Асимптотика числа пороговых функций и асимптотика числа вырожденных {±1}-матриц.

А.А.Ирматов

Аннотация

В докладе будет рассказано о решении двух, ставших уже классическими, проблем дискретной математики, математической кибернетики и комбинаторики. Одной из этих проблем является нахождение асимптотики числа пороговых функций, которая в статье А.Д.Коршунова (см. А.Д.Коршунов, УМН, 2009, Т.64, В.5(389)) включена в список важных нерешенных проблем дискретной математики и математической кибернетики.

В 19 веке L.Schläfli в эквивалентных терминах получил (около 1850 г.) верхнюю оценку для числа пороговых функций **P**(2, n):

$$P(2,n) \le 2\sum_{i=0}^{n}\binom{2^n-1}{i} \quad .$$

С конца 50-х годов прошлого века вопрос о нахождении числа пороговых функций стал одним из центральных вопросов пороговой логики. В ряде статей были получены нижние оценки для **P**(2, n), близкие по порядку логарифма к верхней оценке L.Schläfli. Наилучшая нижняя оценка в этой серии работ была получена автором в 1993 году:

$$P(2,n) \ge 2^{n^2\left(1-\frac{7}{\ln n}\right)} \cdot P\left(2,\left[\frac{7(n-1)}{\log_2(n-1)}\right]\right) \quad .$$

Проблема о распределении значений детерминанта {±1}-матрицы интенсивно изучается с 30-х годов 20-го века (см. A.M.Odlyzko, Journal of Comb.Theory, Ser.A 47, 124-133 (1988)).

В 1963 году Komlós J. (опубликовано в 1967 году) доказал, что вероятность вырожденности случайной Бернуллиевой {0, 1}-матрицы M_n с ростом размерности стремится к нулю, что верно и для {±1}-матриц:

$$P_n \overset{def}{=} \Pr(\det M_n = 0) = o_n(1).$$

В 1977 году он улучшил свой результат до верхней оценки

$$P_n < O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

В 1995 году Kahn J., Komlós J. и Szemerédi E. добились экспоненциального убывания верхней оценки: $(0.999+o_n(1))^n$. В 2007 году Tao T. и Vu V. получили оценку $\left(\frac{3}{4}+o_n(1)\right)^n$, а в 2009 году Bourgain J., Vu V.H. и Wood P.M. улучшили ее до $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+o_n(1)\right)^n$. В 2018 году К.Тихомировым было показано, что

$$P_n=\left(\frac{1}{2}+o_n(1)\right)^n.$$

В докладе будет исследовано представление числа пороговых функций в комбинаторно-топологических терминах, вытекающего из работ L.Schläfli, Zaslavsky T., Hall P. и Folkman J., и показана связь числа $P(2,n)$ с числом вырожденных {±1}-матриц, позволяющая установить следующие асимптотики.

Теорема 1. Асимптотика вероятности $\mathbf{P}_n$ равна:

$$P_n \quad (n-1)^2 2^{1-n}, n\to\infty.$$

Теорема 2. Асимптотика числа пороговых функций равна:

$$P(2,n) \quad 2\binom{2^n-1}{n}, n\to\infty.$$

Полное изложение результатов можно найти здесь.