О конфигурациях прямых на плоскости.

Шнурников И.Н.

Пусть Γ — конечный набор из $n \geqslant 2$ различных прямых на вещественной двумерной проективной плоскости. Обозначим через $f(\Gamma)$ число областей — компонент связности дополнения в проективной плоскости к объединению прямых из Γ. Как устроено множество всех возможных чисел $f(\Gamma)$ для фиксированного n и произвольного расположения прямых? Этот вопрос изучали Б. Грюнбаум (1972), Г. Пурди (1980), Н. Мартинов (1990, 1993), В.И. Арнольд (2007) и др. Явная формула для множества чисел $f(\Gamma)$ была получена Н. Мартиновым в 1993 г. В.И. Арнольд предложил другую схему доказательства формулы Н. Мартинова, в которой ключевую роль играют оценки снизу числа $f(\Gamma)$. К настоящему моменту подход В.И. Арнольда реализован и получены оценки числа $f(\Gamma)$, например:

Теорема, (2010). *Пусть максимальное число прямых из Γ, пересекающихся в одной точке, равно m и $n > m \geqslant 2$. Тогда:*

$$f(\Gamma) \geqslant 2\frac{n^2 - n + 2m}{m+3}.$$

Для конфигурации прямых Γ через t_i обозначим число точек пересечения, принадлежащих ровно i прямым для $i = 2, \ldots, n$. Совокупность чисел $t_2, \ldots, t_n$ до некоторой степени описывает набор прямых Γ. Например, можно найти число областей

$$f(\Gamma) = 1 + \sum_{i=2}^{n} (i-1)t_i.$$

В свою очередь, числа $t_2, \ldots, t_n$ не могут быть произвольными целыми неотрицательными числами. Известен ряд соотношений между числами t_i, которые доказали Е. Мельхиор (1940), П. Эрдош и Г. Пурди (1978), Ф. Хирцебрух (1986), Дж. Сцима и Е. Сойер (1993, 1995) и др. Примером такого соотношения (линейного по t_i неравенства) служит следующее.

Теорема, (2010). *Пусть $t_n = t_{n-1} = t_{n-2} = 0$. Тогда*

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \geqslant 8 + \sum_{i\geqslant 4} \left(2i - 7\frac{1}{2}\right) t_i.$$