Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

УДК 519

А.С.Подколзин

Компьютерное моделирование логических процессов

Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия

Москва, 2015 г.

Деп. №

Организация-депонент: ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова", г. Москва

Название работы: Компьютерное моделирование логических процессов. Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия.

Автор: Подколзин А.С. (07.12.1950), ФГБОУ ВО "Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова", г.Москва, Российская Федерация.

Реферат: Книга является третьим томом монографии "Компьютерное моделирование логических процессов", посвященной описанию новой технологии обучения компьютерных решателей задач. Эта технология позволила создать систему компьютерной математики, значительно превосходящую по своим логическим возможностям традиционные системы. Она моделирует рассуждения человека пошаговым образом и позволяет получить не только ответ, но и сам процесс решения. Архитектура логической системы и ее внутренние языки были представлены в первом томе монографии, изданном при поддержке РФФИ в 2008г. Описание приемов решателя было начато во втором томе. Данный том продолжает это описание. В нем рассматриваются приемы решения задач по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и элементарной геометрии. Система уверенно решает стандартные вычислительные планиметрические задачи средней сложности. Анализируя логику задачи, она синтезирует программу для приближенного численного решения, по которой рисует эксиз чертежа. Помимо этого, реализуется обычный ход рассуждений, приводящий к точному ответу.

Ключевые слова: Искусственный интеллект, компьютерный решатель задач, компьютерное моделирование, логический процесс.

Язык: рус.

Страниц: 1320

Илл.: нет

Библ: 37

Title: Computer simulation of logical processes. Vol.3. Experience of computer solver teaching: calculus, differential equations, elementary geometry.

Author: Podkolzin A.S., Moscow State University (MSU), Moscow, Russian Federation.

Abstract: This book is the third volume of monograph "Computer simulation of logical processes". New technology of computer solvers teaching is described. Based on this technology, computer intellectual system was developed. This system not only gives the answer for problem, but simulates step-by-step the whole process of reasoning. Architecture of logical system and it's languages were presented in first volume. In second volume was observed experience of solver teaching in logics, set theory, combinatorial theory and elemenatry algebra. In this volume we continue observation of solver rules. Calculus, differential equations and elementary geometry are considered.

Key words: artificial intelligence, computer problem solver, computer simulation, logical process.

Введение

Легенда о самообучающемся, саморазвивающемся искусственном интеллекте зародилась в недрах научной фантастики очень давно, и с тех пор стала в произведениях этого жанра чем-то совсем обыденным. Мы редко задумываемся о том, что по отношению даже к естественному интеллекту понятия "самообучение" и "саморазвитие" следует использовать с большой осторожностью. Человек обучается, впитывая в себя знания и умения, накопленные человечеством на протяжении многовекового развития. Этот искусственно созданный мир знаний и является подлинным источником человеческого интеллекта. Нейросистема человеческого мозга становится естественным интеллектом, лишь адаптируясь к данному искусственному миру. Фактически, мы имеем единственную интеллектуальную систему, подлинно саморазвивающуюся и самообучающуюся - это интеллект всей человеческой цивилизации. Поэтому, говоря о "самообучающемся искусственном интеллекте", поначалу следует ограничиться установкой на создание компьютерной системы, способной, как и человек, "самообучаться" по книгам и другим носителям знаний.

Если же ориентироваться на создание искусственного интеллекта, саморазвивающегося в абсолютном смысле, то следует ясно отдавать себе отчет, что оъектом изучения здесь является не архитектура нейросистемы - естественной либо искусственной, а логические процессы, обеспечивающие развитие упомянутого выше "мира знаний". Даже создание идеальной искусственной нейросистемы не отменит необходимости развития науки о логических процессах, как не отменила потребности в развитии теоретической механики способность естественных нейросистем управлять динамическими процессами. К сожалению, на сегодняшний день науки о логических процессах мы не имеем. Математическая логика, предпринимая попытки найти какие-то эффективные общие принципы автоматического решения задач, столкнулась с проблемой экспоненциальной трудоемкости перебора, и вынуждена была отступить. В этой ситуации единственным подходом к изучению логических процессов оказывается компьютерное моделирование реальных процессов рассуждений. Компьютер становится своего рода микроскопом, позволяющим нарисовать детальную картину мира логических процессов во всем ее разнообразии. Уже первые попытки такого рода ясно показывают, насколько велико данное разнообразие. Оно выглядит не меньшим, чем разнообразие физических или химических явлений, и развитие науки о логических процессах, а вместе с ней и создание искусственного интеллекта, затянется на весьма длительный период.

Настоящая монография "Компьютерное моделирование логических процессов"посвящена исследованию логических процессов, предпринятому с помощью компьютерной логической системы "Искра". Чтобы промоделировать в системе решение задачи человеком, оно разбивалось на атомарные шаги, и для каждого шага создавалась несложная программа, способная выполнять его в аналогичных ситуациях. Такие программы получили название приемов. Были проработаны многие предметные области, в первую очередь математические, и накоплена база приемов, имеющая более 40000 элементов. Фактически, она представляет собой огромную коллекцию "фотоснимков" с траекторий решения задач, взятых из задачников. В ряде областей база приемов оказалась способной функционировать как автоматический решатель задач, неплохо имитирующий действия человека. Но, что гораздо более важно, она стала исходным сырьем для анализа того, как базисные теоремы предметной области преобразуются в приемы, иными словами, для анализа процесса самообучения "по книгам". Были предприняты стандартизация и оптимизация приемов, создана их классификация. Почти для каждого приема указан источник - некоторая базисная теорема предметной области. Изучена последовательность действий при переходе от теоремы к приему, и предложены предварительные версии алгоритмов, воспроизводящих такие действия. Среди данных алгоритмов имеются процедуры адаптации приемов к обучающим задачам. Результатом явился некоторый прототип "генератора приемов", позволяющий в простых случаях сразу получать вполне осмысленные приемы, в более сложных - приходить к ним после автоматической доводки по задачнику. Совсем сложные случаи дают хороший материал для продолжения исследований. Данный генератор приемов можно уподобить пирамиде, в основании которой лежит база приемов, вершиной служит множество базисных теорем, а промежуточные слои соответствуют этапам синтеза приема.

В целом, проделанная работа подтвердила эффективность использования компьютерной логической системы как "микроскопа" для изучения логических процессов и наметила пути создания интеллектуальной системы, способной быстро обучаться по традиционным источникам научно-технической информации.

Обучение логической системы "Искра" было предпринято для таких предметных областей, как алгебра множеств и комбинаторика, элементарная алгебра, элементарная геометрия, математический анализ, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения, комплексный анализ, теория вероятностей. Проработаны многие разделы линейной алгебры, общей алгебры, дискретной математики, интегральных уравнений, элементарных физики и химии. Рассматривались нематематические области: шахматы, понимание естественного языка, анализ рисунков. Сразу заметим, что главным образом изучались стандартные задачи вычислительного характера, хотя и для многих теоретических задач тоже создавались приемы, обеспечивающие их решение. В некоторых предметных областях (например, элементарные алгебра и геометрия) удалось добиться достаточно стабильного решения стандартных задач, в других - лишь предложены объяснения отдельных траекторий решения.

При сравнении с обычными системами компьютерной математики становятся очевидны преимущества предлагаемого подхода в тех случаях, когда логика начинает играть существенную роль. По существу, логическую систему "Искра" можно рассматривать как экспериментальную систему компьютерной математики нового типа, допускающую постепенное перерастание в интеллектуальную математическую систему.

Общее число приемов сейчас превышает 42000, число проработанных задач - свыше 10000. При этом, даже без архивации, система занимет всего около 120 Мб. Это означает, что стандартные размеры внешнего твердого диска в 1Тб позволяют увеличить объем решателя в 8000 раз, без существенного замедления его в тех областях, где обучение уже завершено.

Предлагамая книга представляет собой третий том монографии "Компьютерное моделирование логических процессов". В первом томе монографии [1] описываются архитектура системы, а также языки ЛОС и ГЕНОЛОГ. Во втором томе рассматриваются общелогические приемы, а также приемы, относящиеся к следующим разделам: алгебра множеств, простейшие свойства функций, мощности множеств и комбинаторика, числовые множества, элементарная алгебра, комбинаторные функции, многочлены. В данном, третьем томе рассматриваются приемы решения задач по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и элементарной геометрии. Описывается процедура, позволяющая решателю строить эскизы чертежей в планиметрических задачах.

Четвертый том монографии будет посвящен рассмотрению приемов решения задач по аналитической геометрии, линейной алгебре, комплексному анализу, теории вероятностей, элементарной физике, элементарной химии, приемам программирования "обычных" вычислений, а также приемам, возникшим в таких областях, как понимание естественного языка, шахматы и анализ рисунков. Наконец, в пятом томе монографии предполагается описать архитектуру генератора приемов и его основные блоки.

Параллельно с написанием монографии продолжается развитие системы. Поэтому каждая книга будет сопровождаться своей версией программы. Все эти версии, расположенные в хронологическом порядке, могут быть получены по адресу " www.intsys.msu.ru/invest/solver/logsyst.zip". Сборники задач, использованные при обучении решателя, приводятся в списке литературы.

Автор выражает искреннюю благодарность В.Б.Кудрявцеву, поддержка которого сделала возможным проведение данного исследования. Автор благодарен также П.А. Пантелееву, оказавшему помощь при подготовке рукописи.

Оглавление

Глава 1

Приемы по математическому анализу

Продолжаем описание приемов решателя, начатое во втором томе. После элементарной алгебры естественно перейти к рассмотрению приемов, созданных для решения задач по математическому анализу. В качестве основного обучающего материала здесь выступал известный сборник задач Б.П.Демидовича. Впрочем, "при первом чтении" отбирались, в основном, вычислительные задачи, которые изредка дополнялись несложными теоретическими. Материал оказался в значительной большей степени "алгоритмизируемым", чем в элементарной алгебре. Как результат, большинство приемов сгруппировались внутри пакетных операторов, и лишь сравнительно небольшая их часть реализуется непосредственно при сканировании задачи. Напомним, что целью обучения системы являлся первичный анализ механизмов управления логическими процессами, а не создание сколь-нибудь развитой программы для пользователя. Поэтому данный решатель по математическому анализу, хотя и способен решать множество разнообразных стандартных задач, никоим образом не претендует на полноту. Дальнейшее его обучение представляет собой хорошее упражнение по программированию на ГЕНОЛО́Ге.

1.1 Дифференцируемость и вычисление производных

Напомним обозначения, используемые решателем. Производная функции f одной вещественной переменной в точке a обозначается "производная(f a)". Если производная не определена, то значением данного выражения служит символ "неопред". Таким образом, выражение "производная(f a)" имеет численное значение в тех и только тех случаях, когда функция дифференцируема в рассматриваемой точке. Прорисовка производной формульным редактором зависит от того, как задана функция f. Обычно она задается через описатель "отображение", т.е. в виде "отображение(y y-число $F(y)$)". В этом случае, если a - переменная, производная прорисовывается в виде дроби:

$$\frac{dF(a)}{da}.$$

Если выражение a не является переменной, используется другой вариант прорисовки:

$$\frac{dF(y)}{d(y=a)}.$$

Заметим, что набор производной формульным редактором происходит так, как если бы набиралась обычная дробь, т.е. после d нажимается клавиша для умножения ("звездочка"). Скобка с равенством $y = a$ тоже набирается как сомножитель. Если a - переменная, то внутренняя связанная переменная y при наборе не указывается, и формульный редактор выбирает ее самостоятельно. В случаях, когда задание f не имеет указанного вида (в том числе, если вместо "y-число" используется другой ограничитель области определения функции), прорисовка производной выполняется так же, как текстовым редактором: "производная(f, a)".

Описатель "отображение" при работе с числовыми функциями, как правило, будет задавать их формально определенными на всей числовой прямой. В тех точках, где выражение для значения функции обычно считается не определенным, оно будет иметь какое-то значение, о котором, впрочем, ничего не будет известно. Это - всего лишь технический трюк, упрощающий программирование приемов. Такие формально доопределенные функции будут использоваться в задачах применительно только к тем подмножествам числовой прямой, где они определены в традиционном смысле.

Дифференцируемость функции f одной либо нескольких вещественных переменных в точке a либо в каждой точке множества a выражается утверждением "дифференцируема$(f\ a)$". Это утверждение прорисовывается формульным редактором так же, как текстовым. Аналогично, утверждение "непрдифф$(f\ a)$" обозначает непрерывную дифференцируемость функции f на множестве a либо в окрестности точки a.

Кратные и частные производные функции $f(x_1 \dots x_n)$, $n \geq 1$, обозначаются выражением "частнпроизв$(f\ (k_1 \dots k_n)\ (a_1 \dots a_n))$". Здесь $(a_1 \dots a_n)$ - точка, в которой берется производная, $(k_1 \dots k_n)$ - набор целых неотрицательных кратностей производных по соответствующим переменным. Если $n = 1$, то вместо одноэлементных наборов (a_1), (k_1) берутся сами числа a_1, k_1. Формульный редактор может прорисовать частную либо кратную производную только для функций, заданных описателем "отображение". Как и для случая одной переменной, каждая переменная x_i ограничивается в этом описателе единственным утверждением "x_i- число". Если все $a_1, \dots, a_n$ суть переменные, то прорисовка имеет вид:

$$\frac{d^{k_1+\dots+k_n} f(x_1, \dots, x_n)}{dx_1^{k_1} \dots dx_n^{k_n}}.$$

Иначе она имеет вид:

$$\frac{d^{k_1+\dots+k_n} f(x_1, \dots, x_n)}{d(x_1 = a_1)^{k_1} \dots d(x_n = a_n)^{k_n}}.$$

В обоих случаях переменные с нулевым значением k_i пропускаются. Если кратности заданы целочисленными константами, то вместо суммы $k_1 + \dots k_n$ прорисовывается ее значение, иначе - берется формальная сумма. Следует помнить, что во внутреннем представлении эта сумма отсутствует и прорисовка ее имеет чисто "косметический" характер.

Утверждение "кратндифференцируема$(f\ k\ a)$" означает, что функция f является k-кратно дифференцируемой в некоторой окрестности точки a. Утверждение "Непрдифф$(f\ k\ M)$" означает, что функция f на множестве M является k-кратно непрерывно дифференцируемой. Утверждение "гармоническая$(f\ M)$" означает, что функция f двух вещественных переменных является гармонической на множестве M. Все эти утверждения прорисовываются формульным редактором так же, как текстовым.

Обращение к нормализатору "нормпроизводная"

Вычисление производной выполняется нормализатором "нормпроизводная", который будет описан ниже. Этот нормализатор изменяет терм "производная(...)" на формально вычисленное значение t только при условии, что либо установлена дифференцируемость функции, либо таковая будет иметь место при добавлении к посылкам условий на о.д.з. выражения t, регистрируемых в комментарии (коррекцияпосылок ...).

Чтобы вычислить производную, встречающуюся в условии задачи на преобразование либо описание, служит следующий прием:

$\forall_{abc}(c = \text{производная}(a, b) \to \text{производная}(a, b) = c)$

Если решается дифференциальное уравнение и выражение "производная(...)" содержит неизвестные, то прием блокируется. Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпроизводная". Указатель "нормзадача" обеспечивает передачу условий на о.д.з. найденной производной из комментария (коррекцияпосылок ...) в контекст замены. Таким образом, прием может сужать первоначальный логический контекст, дополняя его условиями на о.д.з. для рассматриваемой производной.

Если производная возникла в первоначальном условии задачи, которую нужно было решать в о.д.з., то данный подход означает, что выписывание ограничений на о.д.з. в начале решения является частичным и продолжается по ходу решения. Заметим, что в этом случае до формального дифференцирования не только о.д.з. производной, но и о.д.з. выражения под производной явно выписываться не будет. Если же задача ставилась для посылок, гарантирующих существование производной, то действительно может произойти отбрасывание некоторых особых точек, где производная существует, но методы формального дифференцирования для ее вычисления недостаточны. Это требует определенной осторожности в приемах, обращающихся к вычислению производной. Например, при исследовании функции область определения ее производной берется по о.д.з. найденного выражения, а все остальное относится к категории "особых точек", которые и анализируются отдельно. Заметим, что нормализатор "нормпроизводная" имеет только приемы для элементарных функций, так что о.д.з. производной может отличаться от о.д.з. исходной функции лишь множеством изолированных точек. Во всяком случае, пополнение контекста замены условиями на о.д.з. для вычисленной производной, приводит это к сужению контекста либо нет, является техническим шагом, необходимым для последующей эффективной работы с данной производной.

При формальном дифференцировании никаких промежуточных упрощений не предпринимается: оказалось, что они лишь замедляют получение результата. Упрощение происходит при сканировании задачи уже после того, как рассматриваемый прием был применен. Если при дифференцировании получается чрезмерно громоздкое выражение, то используется ограниченный набор средств упрощения. Для этого вводится комментарий "сокращение", блокирующий часть трудоемких приемов и активирующий некоторые сравнительно дешевые компенсирующие приемы. Указатель "контрольнормализации(нормпроизводная)"расчищает буфер промежуточных результатов диффернцирования, как только производная оказалась вычислена. Иногда это приводит к небольшому ускорению. Уровень срабатывания приема равен 1.

Переход от символа "частнпроизв" к символу "производная" в случае единичной кратности дифференцирования

$\forall_{fx}$(частнпроизв($\lambda_a(f(a), a -$ число) $1\ x$) = производная($\lambda_a(f(a), a -$ число) x))

Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

Вычисление кратных и частных производных

Данный прием реализован на ЛОСе. Он применяется при усмотрении в условии задачи на преобразование выражения "частнпроизв($f\ k\ a$)", где f - функция, заданная с помощью описателя "отображение", k - набор кратностей дифференцирования по переменным связывающей приставки данного описателя, a - точка, в которой берется производная. В случае нескольких переменных эта точка должна быть задана как набор. Требуется также, чтобы выражение, определяющее значение функции, не содержало символа "значение". Прием выполняет последовательные дифференцирования рассматриваемой функции в соответствии с набором кратностей. На промежуточных этапах производные вычисляются в некоторой произвольной точке, для обозначения которой вводятся новые переменные. Промежуточные результаты упрощаются с помощью вспомогательных задач. На последнем шаге подставляется значение a, причем проверяется, что все условия на о.д.з. полученного выражения являются следствиями посылок задачи. Уровень срабатывания равен 1.

Вынесение минуса из-под знака производной

Иногда может понадобиться простейшая стандартизация производных, не вычисляемых непосредственно (например, содержащих неизвестные функции). Пока были востребованы лишь следующие два приема такой стандартизации:

$$\forall_{fn}\left(\frac{d^n(-f(x))}{dx^n} = -(\frac{d^n f(x)}{dx^n})\right)$$

$$\forall_{f}\left(\frac{d(-f(x))}{dx} = -(\frac{df(x)}{dx})\right)$$

Они срабатывают на уровне 1.

Производная функции, заданной параметрически

Под параметрическим заданием функции f обычно понимают определение ее через две вспомогательные функции g, h, заданные на одном и том же множестве A: $f(x) = y; x = g(t), y = h(t), t \in A$. Разумеется, при этом требуют, чтобы из совпадения значений функции g следовало совпадение значений функции h. Таким образом, при логической формализации параметрического задания можно было бы ввести некую двуместную операцию, выражающую функцию f через функции g, h. Однако, возможен и другой вариант - определять функцию f путем указания ее области определения (равной множеству значений функции g) и использования кванторной импликации $\forall_t(t \in A \rightarrow f(g(t)) = h(t))$ где вместо $g(t), h(t)$ подставлены явные выражения для значений функций g, h. Этот вариант несколько более экономен, так как не требует обязательного ввода в рассмотрение вспомогательных функций g, h - работа происходит с единственной функцией f. Он и реализован в решателе. Для вычисления производной функции, заданной параметрически, создан следующий прием:

$$\forall_{abefght}\left(\frac{df(t)}{dt}=a\ \&\ \frac{dg(t)}{dt}=b\ \&\ \forall_v(h(v)\to y(f(v))=g(v))\ \&\ e=f(t)\to\frac{dy(e)}{de}=\frac{b}{a}\right)$$

Производная входит в условие задачи на преобразование. Она представляет собой производную функции "отображение(x x-число $y(x)$)", взятую в точке e. Третий антецедент берется в контексте замены - он представляет собой параметрическое определение функции y. Переменные f, g, h функциональные, т.е. выражения $h(v), f(v)$, $g(v)$ могут идентифицироваться с произвольными термами. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он усматривает представимость терма e в виде $f(t)$, для походящего выражения t. Первые два антецедента тоже выделены указателем "идентификатор". Они обращаются к вспомогательным задачам на преобразование для вычисления производных функций f, g в точке t. Заметим, что сами эти функции задаются здесь выражениями "отображение(c c-число $f(c)$)", "отображение(c c-число $g(c)$)", где c - вспомогательная переменная. Задачам передается дополнительная посылка "$t-$число". Фильтры "не(входит(производная x1))", "не(входит(производная x2))" проверяют, что производная вычислена, т.е. гарантируют дифференцируемость функций f, g в точке t. Указатель "посылка(и(не(равно(x1 0)) одз(x1) одз(x2)))" обеспечивает регистрацию в контексте замены всех утверждений, обеспечивающих о.д.з. для a, b, а также утверждения "$\neg(a=0)$". Этот шаг аналогичен рассмотренному выше сужению контекста при вычислении производных функций, заданных явно: происходит доопределение о.д.з. по ходу решения задачи, иногда требующее специального рассмотрения "особых" точек, отсеченных данным доопределением. Уровень срабатывания равен 5.

Производная неявной функции

Неявное задание функции y, обычно определяемое уравнением вида $F(y(x), x)=0$, при создании приема требует рассмотрения случая несгруппированных членов, т.е. уравнения вида $f(y(x), x)=g(y(x), x)$. Более точно, неявное задание происходит посредством кванторного тождества вида $\forall_x(P(x)\to f(y(x), x)=g(y(x), x))$. С учетом данного замечания, имеем следующий прием вычисления значения производной функции, заданной неявно:

$$\forall_{abcdfgP}(df(z,x)/dx=a(x,z)\ \&\ df(z,x)/dz=b(x,z)\ \&\ dg(z,x)/dx=c(x,z)\ \&$$
$$dg(z,x)/dz=d(x,z)\ \&\ \forall_u(P(u)\to f(y(u),u)=g(y(u),u))\to dy(x)/dx=$$
$$(a(x,y(x))-c(x,y(x)))/(d(x,y(x))-b(x,y(x))))$$

Вычисляемая производная входит в условие задачи на преобразование. Она берется от функции "отображение(t t-число $y(t)$)" в точке x. Переменные a, b, c, d, f, g, P - функциональные. Последний антецедент находится в контексте замены. Указатели "новаргумент(x6 x20 фикс)", "новаргумент(x7 x20 фикс)" определяют идентификацию двуместных "шаблонов" $f(\dots,\dots)$, $g(\dots,\dots)$ путем выделения в соответствующих частях равенства всех вхождений терма $y(u)$, дающих первый операнд шаблона, и всех прочих вхождений переменной u, дающих второй операнд шаблона. Первые четыре антецедента выделены указателем "идентификатор". В них используется вспомогательная переменная z, вводимая указателем "новаяпеременная(x25)". Заметим, что функции под производными тоже задаются с помощью описателей "отображение", использующих вспомогательную переменную t. Левые части антецедентов обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование, снабженными дополнительными посылками "x-число", "z-число". Проверяется, что производные удалось вычислить: в правых частях должен отсутствовать символ "производная". Так как нормализатор "нормпроизводная" содержит лишь приемы, относящиеся к элементарным функциям, то в о.д.з. найденных формальных производных непрерывность получается автоматически и специально проверять ее не обязательно. При срабатывании приема, как и в рассмотренных ранее случаях, контекст замены пополняется условиями отличия знаменателя дроби от нуля и всеми условиями на о.д.з. вычисленных производных. Уровень срабатывания равен 5.

Производная функции, заданной разбором случаев

Ограничимся условными выражениями, подразбивающими числовую прямую на два луча:

$\forall_{abcd}(c(x) = da(x)/dx \ \& \ d(x) = db(x)/dx \to d(a(x) \text{ при } x \leq p, \text{ иначе } b(x))/dx = (c(x) \text{ при } x \leq p, \text{ иначе } d(x)))$

Прием применяется только в условии задачи на преобразование, имеющей цель "производные". Эта цель допускает произвольное переопределение искомой производной в конечном числе точек. Очевидно, без такой оговорки результат вычисления был бы некорректным для точки p. Фактически прием используется решателем только при определении функции плотности распределения случайной величины. Переменные a, b, c, d функциональные. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются вспомогательными задачи на преобразование, также имеющими цель "производные". Проверяется отсутствие символа "производная" в термах $c(x), d(x)$. Указатели "альтернатива", "дробь" разрешают перестановку частей неравенства и переход к строгому неравенству. Уровень срабатывания приема равен 2.

Обращение к проверочному оператору "усмдифференцируема"

Обычно при вычислении производной какая-либо особая проверка дифференцируемости не предпринимается, так как неявно содержится в самом процессе вычисления. В тех случаях, когда она нужна, используется описываемый в конце раздела проверочный оператор "усмдифференцируема". Пока он содержит лишь простейшие приемы, относящиеся к элементарным функциям. Обращение к оператору выполняется следующим приемом:

$\forall_{af}(\text{дифференцируема}(f, a) \to \text{дифференцируема}(f, a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Обращение к синтезатору "облгармоничности"

При обучении решателя комплексному анализу возникла необходимость определять область, в которой заданная вещественная функция двух переменных является гармонической. Для этого был создан описываемый в конец раздела синтезатор "облгармоничности". Обращение к нему выполняется следующим приемом:

$\forall_{fxA}(\text{гармоническая}(f, A) \ \& \ x = A \to \text{гармоническая}(f, x))$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, не имеющей цели "полный". Первый антецедент обрабатывается синтезатором "облгармоничности", определяющим область A. В каждой точке этой области функция f будет гармонической, но точки гармоничности, требущие особого рассмотрения, в нее не попадут. Второй антецедент, выделенный указателем "подборзначений", заменяет рассматриваемое условие во вспомогательной задаче. Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор "нормпроизводная"

Нормализатор является корневым - преобразуются только корневые вхождения. Он использует буфер, сохраняющий 50 последних результатов. Утверждения, которые могут понадобиться для сопровождения по о.д.з. во внешней задаче, накапливаются в его комментарии (коррекцияпосылок $\ldots$). При описании приемов нормализатора используем формульную прорисовку производной. Следует помнить, что фактически запись $df(x)/dx$ означает "производная(отображение(y $y -$ число $f(y))x$)".

1. Производная константы.

   $\forall_{ab}(da/db = 0)$

2. Производная тождественной функции.

   $\forall_{a}(da/da = 1)$

3. Производная линейной функции.

   $\forall_{abc}(d(ac + b)/dc = a)$

   Уровни срабатывания этого и предыдущих приемов равны 1.

4. Вынесение минуса из-под производной.

   $\forall_{af}(d(-f(a))/da = -(df(a)/da)$

   Переменная f функциональная. Прием выполняет рекурсивное обращение: производная в правой части сама обрабатывается рассматриваемым нормализатором, а вся правая часть - нормализатором общей стандартизации "нормминус". Уровень срабатывания равен 2.

5. Вынесение коэффициента из-под производной.

   $\forall_{abf}(d(af(b))/db = a \cdot df(b)/db)$

   Аналогично предыдущему.

6. Производная суммы.

   $\forall_{abcfg}(a = df(c)/dc \;\&\; b = dg(c)/dc \;\&\; a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \rightarrow d(f(c) + g(c))/dc = a + b)$

   Переменные f, g функциональные. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализатором "нормпроизводная". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Они выполняют проверку того, что производные существуют - либо при вычислении удалось избавиться от заголовка "производная", либо существование производной явно указано в списке посылок. Результат обрабатывается нормализатором "нормплюс". Уровень срабатывания равен 2.

7. Производная произведения.

   $\forall_{abfgy}(a = df(y)/dy \ \& \ b = dg(y)/dy \ \& \ a -$ число $\& \ b -$ число $\rightarrow d(f(y)g(y))/dy = f(y)b + g(y)a)$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

8. Производная дроби.

   $\forall_{abfgx}(a = df(x)/dx \ \& \ b = dg(x)/dx \ \& \ a-$число $\& \ b-$число $\rightarrow d(f(x)/g(x))/dx = (ag(x) - bf(x))/g(x)^2)$

   Аналогично предыдущему, но добавляется указатель "вывод(условие(коммент(нормпредел))не(равно(значение(x7 x23)0)))". Он обеспечивает регистрацию в комментарии "коррекцияпосылок" условия "$\neg(g(x) = 0$" на о.д.з. производной. Если обращение к вычислению производной сопровождалось комментарием "нормпредел", то указанное действие не выполняется. Это же по умолчанию относится к последующим приемам. Комментарий "нормпредел" используется, если передача условий на о.д.з. посредством комментария "коррекцияпосылок" оказывается избыточной - например, в некоторых приемах нормализатора вычисления пределов "нормпредел". Уровень срабатывания равен 2.

9. Производная синуса.

   $\forall_{afy}(a = df(y)/dy \ \& \ a -$ число $\rightarrow d\sin f(y)/dy = a\cos f(y))$

   Переменная f функциональная. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпроизводная". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срсбатывания равен 2.

10. Производная косинуса.

    $\forall_{afy}(a = df(y)/dy \ \& \ a -$ число $\rightarrow d\cos f(y)/dy = -a\sin f(y))$

    Аналогично предыдущему.

11. Производная тангенса.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a -$ число $\rightarrow d\,\mathrm{tg}\, f(x)/dx = a/(\cos f(x))^2)$

    В комментарии "коррекцияпосылок" регистрируется утверждение $\neg(\cos f(x) = 0)$. Уровень срабатывания равен 2.

12. Производная котангенса.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a -$ число $\rightarrow d\,\mathrm{ctg}\, f(x)/dx = -a/(\sin f(x))^2)$

    Регистрируется утверждение $\neg(\sin f(x) = 0)$. Уровень срабатывания равен 2.

13. Производная степени.

    $\forall_{abfxy}(a = df(y)/dy \ \& \ a -$ число $\& \ b -$ rational $\& \ \neg($знаменатель$(b) -$ even$) \ \&$ знаменатель$(b) \leq$ числитель$(b) \rightarrow d(f(y)^b)/dy = ab(f(y))^{b-1})$

    Переменная f функциональная. Выражение b не содержит переменной дифференцируемой функции. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfxy}(a = df(y)/dy$ & a – число & b – rational & $\neg$(знаменатель(b) – even) & числитель$(b) <$ знаменатель$(b) \to d(f(y)^b)/dy = ab(f(y))^{b-1})$

Единственное отличие от предыдущего приема состоит в том, что происходит регистрация утверждения $\neg(f(y) = 0)$.

$\forall_{abfy}(b = df(y)/dy$ & b – число & $0 < a \to d(a^{f(y)})/dy = \ln aba^{f(y)})$

Заметим, что в логическом представлении для натурального логарифма нет специальной операции - он записывается просто как логарифм по основанию "e". Происходит регистрация утверждения $\neg(a-1 = 0)$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfy}(b = df(y)/dy$ & b – число $\to d(f(y)^a)/dy = ba(f(y))^{a-1})$

Уровень срабатывания равен 3, т.е. ранее приведенные приемы оказались неприменимы. Тогда накладывается условие $0 < f(y)$.

$\forall_{abfgx}(a = df(x)/dx$ & a – число & $b = dg(x)/dx$ & b – число $\to d(f(x)^g(x))/dx = (f(x))^{g(x)}(b \ln f(x) + ag(x)/f(x)))$

Это - общий случай. Переменные f, g функциональные. Уровень срабатывания равен 4. Регистрируется утверждение $0 < f(x)$.

14. Производная логарифма.

    $\forall_{abfx}(a = df(x)/dx$ & a – число & $\neg(b - 1 = 0) \to d\log_b f(x)/dx = a/(\ln bf(x)))$

    Переменная f функциональная, причем выражение $f(y)$ не имеет заголовка "тангенс". Для тангенса создан отдельный прием, в котором заменяющее выражение несколько упрощено. Регистрируется утверждение $0 < f(x)$. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{abfx}(a = df(x)/dx$ & a – число & $0 < b$ & $\neg(b - 1 = 0) \to d\log_b \operatorname{tg} f(x)/dx = 2a/(\ln b \sin(2f(x))))$

    Регистрируются утверждения $0 < \operatorname{tg} f(x), \neg(\sin(2f(x)) = 0)$. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{abfgy}(a = df(y)/dy$ & a – число & $b = dg(y)/dy$ & b – число $\to d\log_{f(y)} g(y)/dy = (bf(y)\ln f(y) - ag(y)\ln g(y))/(f(y)g(y)(\ln f(y))^2))$

    Переменные f, g функциональные. Регистрируются утверждения $0 < f(y), 0 < g(y), \neg(f(y) - 1 = 0)$. Уровень срабатывания равен 3.

15. Производная арксинуса.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx$ & a – число $\to d\arcsin f(x)/dx = a/\sqrt{1 - f(x)^2})$

    Регистрируются утверждения $0 < 1 - f(x)^2, 0 < 1 + f(x), 0 < 1 - f(x)$. Хотя первое является следствием двух последних, его наличие упрощает последующий контроль о.д.з. Уровень срабатывания равен 2.

16. Производная арккосинуса.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx$ & a – число $\to d\arccos f(x)/dx = -a/\sqrt{1 - f(x)^2})$

    Аналогично предыдущему.

17. Производная арктангенса.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx$ & a – число $\to d\operatorname{arctg} f(x)/dx = a/(1 + f(x)^2))$

    Никакие утверждения не регистрируются. Уровень срабатывания равен 2.

18. Производная арккотангенса.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a$ – число $\rightarrow d\,\mathrm{arcctg}\, f(x)/dx = -a/(1 + f(x)^2))$

    Аналогично предыдущему.

19. Производная модуля.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a$ – число $\rightarrow d|f(x)|/dx = a\mathrm{sg} f(x))$

    Напомним, что sg считается в нуле не определенным. Поэтому регистрируется утверждение $\neg(f(x) = 0)$. Уровень срабатывания равен 2.

20. Производная сигнума.

    $\forall_{fy}(d\mathrm{sg} f(y)/dy = 0)$

    Регистрируется утверждение $\neg(f(y) = 0)$, уточняющее о.д.з. исходного выражения. Уровень срабатывания равен 1.

21. Производные гиперболических функций.

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a$ – число $\rightarrow d\,\mathrm{sh}\, f(x)/dx = a\,\mathrm{ch}\, f(x))$

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a$ – число $\rightarrow d\,\mathrm{ch}\, f(x)/dx = a\,\mathrm{sh}\, f(x))$

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a$ – число $\rightarrow d\,\mathrm{th}\, f(x)/dx = a/(\mathrm{ch}\, f(x))^2)$

    $\forall_{afx}(a = df(x)/dx \ \& \ a$ – число $\rightarrow d\,\mathrm{cth}\, f(x)/dx = -a/(\mathrm{sh}\, f(x))^2$

    В последнем приеме регистрируется утверждение $\neg(f(x) = 0)$. Уровни срабатывания равны 2.

Приемы нормализатора "нормпроизводная", добавленные для комплексных функций вещественной переменной

В нормализатор "нормпроизводная", изначально ориентированный на дифференцирование вещественнозначных функций, оказалось целесообразным добавить группу приемов, обеспечивающих дифференцирование комплекснозначных функций вещественной переменной. Это упрощает рекурсивные обращения в тех случаях, когда комплекснозначная операция имеет вещественный операнд. Здесь созданы следующие приемы:

1. Вынесение минуса из-под производной.

   Прием аналогичен указанному в предыдущем разделе, но операция "Минус" - комплекснозначная.

2. Вынесение коэффициента из-под производной.

   Тоже аналогично приему предыдущего раздела. Вместо вещественнозначной операции "умножение" берется ее комплекснозначный аналог "Умножение".

3. Производная суммы.

   $\forall_{abcfg}(a = df(c)/dc \ \& \ b = dg(c)/dc \ \& \ a$ – комплексное & b – комплексное $\rightarrow d(f(c) + g(c))/dc = a + b)$

   Используется комплекснозначаная операция "Плюс". Два последних антецедента обрабатываются проверочным оператором "усмкомплексное". Как и ранее, они обеспечивают проверку дифференцируемости слагаемых.

4. Производная произведения.

   $\forall_{abfgy}(a = df(y)/dy \ \& \ b = dg(y)/dy \ \& \ a$ – комплексное & b – комплексное $\to d(f(y)g(y))/dy = f(y)b + g(y)a)$

   Сложение и умножение - комплекснозначные.

5. Производная дроби.

   $\forall_{abfgx}(a = df(x)/dx \ \& \ b = dg(x)/dx \ \& \ a$ – комплексное & b – комплексное $\to d(f(x)/g(x))/dx = (ag(x) - bf(x))/g(x)^2)$

   Используются комплекснозначные операции "Минус", "Плюс", "Умножение", "Дробь", "Степень". Регистрация сопровождающего утверждения - аналогично вещественнозначному случаю.

6. Производная степени.

   $\forall_{abfy}(b = df(y)/dy \ \& \ b$ – комплексное & $\neg(a = 0) \to d(a^{f(y)})/dy = \ln a b a^{f(y)})$

   Используются комплекснозначные операции "Умножение", "Степень", "Логарифм". В двух последних случаях имеются в виду главные значения. Регистрируется утверждение "$\neg(a - 1 = 0)$"; сумма - комплекснозначная.

   $\forall_{abfy}(b = df(y)/dy \ \& \ b$–комплексное & $0 \leq \mathrm{Re}(a) - 1 \to d(f(y)^a)/dy = ab(f(y)^{a-1}))$

7. Производная синуса.

   $\forall_{afy}(a = df(y)/dy \ \& \ a$ – комплексное $\to d \sin f(y)/dy = a \cos f(y))$

   Используются комплекснозначные операции "Умножение", "Синус", "Косинус".

8. Производная косинуса.

   $\forall_{afy}(a = df(y)/dy \ \& \ a$ – комплексное $\to d \cos f(y)/dy = -a \sin f(y))$

9. Производная логарифма.

   $\forall_{abf}(\neg(f(a) = 0) \ \& \ b = df(a)/da \ \& \ b$ – комплексное $\to d \ln f(a)/da = b/f(a))$

   Регистрируется утверждение "$\neg(a - 1 = 0)$".

Проверочный оператор "усмдифференцируема"

Если значение производной в точке вычислять не нужно, а достаточно лишь усмотреть ее существование, применяется проверочный оператор "усмдифференцируема". Как и оператор "нормпроизводная", он ограничивается лишь теми случаями, когда все промежуточные операции в рассматриваемой точке дифференцируемы.

1. Константа.

   $\forall_{abf}(b$ – число $\to$ дифференцируема$(\lambda_x(a, f(x)), b))$

   Переменная f функциональная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1. Для случая нескольких переменных используется другая версия приема:

   $\forall_{abfn}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to b(i)$ – число$) \to$ дифференцируема$(\lambda_x(a, f(x)), \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\})))$

   Переменные b, f функциональные. Указатель "кортежпеременных" определяет идентификацию связывающей приставки x произвольной длины. Указатель "контекст(равно(х14 длинанабора(х23)))" идентифицирует n как число переменных связывающей приставки. Указатель "развертка" определяет идентификацию терма $\lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\})$ с выражением вида "набор(...)", причем разряды $b(i)$ идентифицируются с термами - операндами этого набора. Первый антецедент выделен указателем "блокпроверок". Он убеждается в том, что все $b(i)$ суть вещественные числа. Уровень срабатывания равен 1.

2. Тождественная функция.

   $\forall_{af}(a - \text{число} \to \text{дифференцируема}(\lambda_x(x, f(x)), a))$

   Уровень срабатывания приема равен 1. Для нескольких переменных создана другая версия приема:

   $\forall_{bfmn}(m = n+1 \ \& \ \forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \to b(i) - \text{число}) \to \text{дифференцируема}(\lambda_{xy}(x, f(x, y)), \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, m\})))$

   Переменные b, f функциональные. Указатель "кортежпеременных(х24)" определяет идентификацию переменной y с произвольным числом переменных связывающей приставки. При этом x идентифицируется с единственной такой переменной. Указатель "элемент(х23)" уточняет, что x может располагаться в связывающей приставке на любом месте. Идентификация переменной n, равной длине списка переменных y, и набора b осуществляются так же, как в приеме для константной функции. Первый антецедент выделен указателем "программа", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Использование тождества из посылок, явно определяющего функцию.

   $\forall_{afg}(f = g \ \& \ \text{дифференцируема}(g, a) \to \text{дифференцируема}(f, a))$

   Функция f обозначена переменной. В посылках находится равенство этой переменной выражению g, имеющему заголовок "отображение". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "спуск" блокирует альтернативные попытки. Уровень срабатывания равен 2.

4. Минус.

   $\forall_{afg}(\text{дифференцируема}(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to \text{дифференцируема}(\lambda_x(-f(x), g(x)), a))$

   Связывающая приставка x допускается любой длины. Переменные f, g функциональные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Плюс.

   $\forall_{afgh}(\text{дифференцируема}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \ \& \ \text{дифференцируема}(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to \text{дифференцируема}(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a))$

   Длина связывающей приставки произвольная. Переменные f, g, h функциональные. Антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

6. Умножение.

   $\forall_{afgh}(\text{дифференцируема}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \ \& \ \text{дифференцируема}(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to \text{дифференцируема}(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a))$

Аналогично предыдущему.

7. Дробь.

   $\forall_{afgh}$(дифференцируема($\lambda_x(f(x), h(x)), a$) & дифференцируема($\lambda_x(g(x), h(x))$, a) & $\neg(g(a) = 0) \to$ дифференцируема($\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), a$))

   Аналогично предыдущему, причем последний антецедент тоже обрабатывается проверочным оператором.

8. Степень.

   $\forall_{afgp}$($p-$rational & $\neg$(знаменатель(p)$-$even) & $0 \leq p-1$ & дифференцируема($\lambda_x($ $f(x), g(x)), a$) $\to$ дифференцируема($\lambda_x((f(x))^p, g(x)), a$))

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{fgh}$(дифференцируема($\lambda_x(f(x), h(x)), a$) & дифференцируема($\lambda_x(g(x), h(x)), a$) & $0 < f(a) \to$ дифференцируема($\lambda_x(f(x)^{g(x)}, h(x)), a$))

   Уровень срабатывания равен 2.

9. Логарифм.

   $\forall_{fgh}$(дифференцируема($\lambda_x(f(x), h(x)), a$) & дифференцируема($\lambda_x(g(x), h(x)), a$) & $0 < f(a)$ & $\neg(f(a) - 1 = 0) \to$ дифференцируема($\lambda_x(\log_{f(x)} g(x), h(x)), a$))

   Уровень срабатывания равен 2.

10. Синус.

    $\forall_{afg}$(дифференцируема($\lambda_x(f(x), g(x)), a$) $\to$ дифференцируема($\lambda_x(\sin f(x), g(x))$, a))

    Уровень срабатывания этого и последующих приемов равен 1.

11. Косинус.

    $\forall_{afg}$(дифференцируема($\lambda_x(f(x), g(x)), a$) $\to$ дифференцируема($\lambda_x(\cos f(x), g(x))$, a))

12. Тангенс.

    $\forall_{afg}$(дифференцируема($\lambda_x(f(x), g(x)), a$) & $\neg(\cos f(a) = 0) \to$ дифференцируема($\lambda_x(\mathrm{tg}\, f(x), g(x)), a$))

13. Котангенс.

    $\forall_{afg}$(дифференцируема($\lambda_x(f(x), g(x)), a$) & $\neg(\sin f(a) = 0) \to$ дифференцируема($\lambda_x(\mathrm{ctg}\, f(x), g(x)), a$))

Синтезатор "облнепрдифф" определения области непрерывной дифференцируемости вещественной функции

Синтезатор обрабатывает утверждения вида "непрдифф(f x)", определяя для заданной описателем "отображение" функции f некоторое множество x, в каждой точке которого f непрерывно дифференцируема. Как и предыдущие пакеты, он предпринимает рекурсивную "разборку" входного выражения, так что результат имеет достаточно естественный вид, не включая в себя лишь точки, требущие специальных рассмотрений.

1. Константа.

   $\forall_a$(непрдифф($\lambda_x(a, \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to x(i) -$ число$)), \prod_{i=1}^n \mathbf{R}$))

   Связывающая приставка x состоит из произвольного числа переменных. Указатель "контекст(равно(x14 длинанабора(x23)))" идентифицирует n с длиной этой приставки. Указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности под описателем "отображение" с конъюнкцией утверждений "$x(i)$ – число". В виде конечного произведения прорисовывается выражение "Прямоепроизведение(A)", равное прямому произведению заданного конечного набора множеств A. Указатель "развертка" определяет построение соответствующего терма "прямоепроизведение($A_1, \ldots, A_m$)" для явно перечисляемых элементов набора (в данном примере равных числовой прямой $\mathbf{R}$). Уровень срабатывания равен 1.

2. Тождественная функция.

   $\forall_a(m = n + 1 \to$ непрдифф($\lambda_{xy}(x, x -$ число & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to y(i) -$ число$)), \prod_{i=1}^m \mathbf{R}$))

   Аналогично предыдущему. В качестве x берется произвольный элемент связывающей приставки. Это определяется указателем "элемент(x23)". Переменная y идентифицируется с остатком связывающей приставки, имеющим произвольную длину (в том числе нулевую), n - с длиной остатка. Антецедент выделен указателем "программа". Уровень срабатывания равен 1.

3. Минус.

   $\forall_{afg}$(непрдифф($\lambda_x(f(x), g(x)), a$) $\to$ непрдифф($\lambda_x(-f(x), g(x)), a$))

   Переменные f, g функциональные. Антецедент выделен указателем "значения". Он реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Указатель "спуск" блокирует альтернативные попытки.

4. Плюс.

   $\forall_{abfgh}$(непрдифф($\lambda_x(f(x), h(x)), a$) & непрдифф($\lambda_x(g(x), h(x)), b$) $\to$
   непрдифф($\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a \cap b$))

   Переменные f, g, h функциональные. Указатель "первыйтерм(фикс(0 1 3 1))" определяет идентификацию $f(x)$ с первым слагаемым. Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Указатель "спуск" блокирует альтернативные попытки. Уровень обращения равен 1.

5. Умножение.

   $\forall_{abfgh}$(непрдифф($\lambda_x(f(x), h(x)), a$) & непрдифф($\lambda_x(g(x), h(x)), b$) $\to$
   непрдифф($\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a \cap b$))

   Аналогично предыдущему.

6. Дробь.

   $\forall_{abfgh}$(непрдифф($\lambda_x(f(x), h(x)), a$) & непрдифф($\lambda_x(g(x), h(x)), b$) &
   $c = \mathrm{set}_x(h(x)$ & $g(x) = 0) \to$ непрдифф($\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), (a \cap b) \setminus c$))

   Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение.

7. Степень.

   $\forall_{afgp}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $p-$rational & $\neg$(знаменатель$(p)-$even) & $0 \leq p-1 \to$ непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), a)$)

   Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, остальные обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abfgp}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $p-$rational & $\neg$(знаменатель$(p)-$even) & $p-1 < 0$ & $b = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $\neg(f(x) = 0)) \to$ непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), a \cap b)$)

   Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abfgp}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $p-$rational & знаменатель$(p)-$even & $0 \leq p-1$ & $b = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 \leq f(x)) \to$ непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), a \cap b)$)

   $\forall_{abfgp}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $p-$rational & знаменатель$(p)-$even & $p-1 < 0$ & $b = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x)) \to$ непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), a \cap b)$)

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{abfg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $0 < b \to$ непрдифф$(\lambda_x(b^{f(x)}, g(x)), a)$)

   Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abfgh}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & непрдифф$(\lambda_x(g(x), h(x)), b)$ &
   $c = \mathrm{set}_x(h(x)$ & $0 < f(x)) \to$ непрдифф$(\lambda_x((f(x))^{g(x)}, h(x)), a \cap b)$)

   Уровень срабатывания равен 2.

8. Логарифм.

   $\forall_{abcfg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $0 < b$ & $\neg(b-1 = 0)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x)) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\log_b f(x), g(x)), a \cap c)$)

   Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами, последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

9. Синус.

   $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\sin f(x), g(x)), a)$)

   Указатель "спуск" блокирует альтернативные попытки. Уровень срабатывания равен 1.

10. Косинус.

    $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\cos f(x), g(x)), a)$)

11. Тангенс.

    $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $\neg(\cos f(x) = 0)) \to$
    непрдифф$(\lambda_x(\mathrm{tg}\, f(x), g(x)), a \cap c)$)

    Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Уровень срабатывания равен 1.

12. Котангенс.

    $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $\neg(\sin f(x) = 0)) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\mathrm{ctg}\, f(x), g(x)), a \cap c))$

13. Арксинус.

    $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x)+1$ & $0 < 1-f(x)) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\arcsin f(x), g(x)), a \cap c))$

14. Арккосинус.

    $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x)+1$ & $0 < 1-f(x)) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\arccos f(x), g(x)), a \cap c))$

15. Арктангенс.

    $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\mathrm{arctg}\, f(x), g(x)), a))$

    В этом и следующем приемах альтернативные попытки блокируются указателем "спуск".

16. Арккотангенс.

    $\forall_{afg}$(непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ непрдифф$(\lambda_x(\mathrm{arcctg}\, f(x), g(x)), a))$

Синтезатор "облкратндифф" определения области k-кратно непрерывной дифференцируемости вещественной функции

Синтезатор аналогичен предыдущему, поэтому приемы перечисляем без пояснений.

1. Константа

   $\forall_{ak}$(Непрдифф$(\lambda_x(a, \forall_i(i \in \{1, \dots, n\} \to x(i) -$ число$)), k, \prod_{i=1}^{n} \mathbf{R}))$

2. Тождественная функция

   $\forall_{ak}(m = n + 1 \to$ Непрдифф$(\lambda_{xy}(x, x -$ число & $\forall_i(i \in \{1, \dots, n\} \to y(i) -$ число$)), k, \prod_{i=1}^{m} \mathbf{R}))$

3. Минус

   $\forall_{afgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a) \to$ Непрдифф$(\lambda_x(-f(x), g(x)), k, a))$

4. Плюс

   $\forall_{abfghk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), h(x)), k, a)$ & Непрдифф$(\lambda_x(g(x), h(x)), k, b) \to$ Непрдифф$(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), k, a \cap b))$

5. Умножение

   $\forall_{abfghk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), h(x)), k, a)$ & Непрдифф$(\lambda_x(g(x), h(x)), k, b) \to$ Непрдифф$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), k, a \cap b))$

6. Дробь

   $\forall_{abcfghk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), h(x)), k, a)$ & Непрдифф$(\lambda_x(g(x), h(x)), k, b)$ & $c = \mathrm{set}_x(h(x)$ & $g(x) = 0) \to$ Непрдифф$(\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), k, (a \cap b) \setminus c))$

7. Степень

   $\forall_{afgkp}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $p-$натуральное $\rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(f(x)^p, g(x)), k, a))$

   $\forall_{abfgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $0 < b \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(b^{f(x)}, g(x)), k, a))$

   Уровень срабатывания приемов равен 1.

   $\forall_{afgpk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), k, g(x)), a)$ & $p-$rational & $\neg$(знаменатель$(p)-$even) & $0 \leq p - k \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), k, a))$

   $\forall_{abfgpk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $p -$ rational & $\neg$(знаменатель$(p) -$ even) & $p - k < 0$ & $b = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $\neg(f(x) = 0)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), k, a \cap b))$

   $\forall_{abfgpk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $p -$ rational & знаменатель$(p) -$ even & $0 \leq p - k$ & $b = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 \leq f(x)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), k, a \cap b))$

   $\forall_{abfgpk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $p -$ rational & знаменатель$(p) -$ even & $p - k < 0$ & $b = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x((f(x))^p, g(x)), k, a \cap b))$

   Уровень срабатывания приемов равен 2.

   $\forall_{abcfghk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), h(x)), k, a)$ & Непрдифф$(\lambda_x(g(x), h(x)), k, b)$ & $c = \mathrm{set}_x(h(x)$ & $0 < f(x)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x((f(x))^{g(x)}, h(x)), k, a \cap b))$

   Уровень срабатывания равен 3.

8. Логарифм

   $\forall_{abcfgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $0 < b$ & $\neg(b-1 = 0)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(\log_b f(x), g(x)), k, a \cap c))$

9. Синус

   $\forall_{afgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(\sin f(x), g(x)), k, a))$

10. Косинус

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(\cos f(x), g(x)), k, a))$

11. Тангенс

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $\neg(\cos f(x) = 0)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(\mathrm{tg}\, f(x), g(x)), k, a \cap c))$

12. Котангенс

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $\neg(\sin f(x) = 0)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(\mathrm{ctg}\, f(x), g(x)), k, a \cap c))$

13. Арксинус

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x) + 1$ & $0 < 1 - f(x)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(\arcsin f(x), g(x)), k, a \cap c))$

14. Арккосинус

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф$(\lambda_x(f(x), g(x)), k, a)$ & $c = \mathrm{set}_x(g(x)$ & $0 < f(x) + 1$ & $0 < 1 - f(x)) \rightarrow$ Непрдифф$(\lambda_x(\arccos f(x), g(x)), k, a \cap c))$

15. Арктангенс

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф($\lambda_x(f(x), g(x)), k, a) \to$ Непрдифф($\lambda_x(\operatorname{arctg} f(x), g(x)), k, a$))

16. Арккотангенс

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф($\lambda_x(f(x), g(x)), k, a) \to$ Непрдифф($\lambda_x(\operatorname{arcctg} f(x), g(x)), k, a$))

17. Гиперболический синус

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф($\lambda_x(f(x), g(x)), k, a) \to$ Непрдифф($\lambda_x(\operatorname{sh} f(x), g(x)), k, a$))

18. Гиперболический косинус

    $\forall_{afgk}$(Непрдифф($\lambda_x(f(x), g(x)), k, a) \to$ Непрдифф($\lambda_x(\operatorname{ch} f(x), g(x)), k, a$))

Синтезатор "облгармоничности" определения области гармоничности числовой функции двух вещественных переменных

Синтезатор имеет единственный прием:

$\forall_{ABf}$(Непрдифф($\lambda_{xy}(f(x, y), x -$ число & $y -$ число$), 2, A)$ & $B = \operatorname{set}_{xy}((x, y) \in A$ & $d^2 f(x, y)/dx^2 + d^2 f(x, y)/dy^2 = 0) \to$ гармоническая($\lambda_{xy}(f(x, y), x -$ число & $y -$ число$), B$))

Первый антецедент выделен указателем "значения". Он определяет область A, в которой функция f двукратно непрерывно дифференцируема. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Условия под описателем "класс" в его правой части разрешаются относительно x, y с помощью вспомогательной задачи на описание. Предварительно вспомогательной задачей на преобразование упрощается сумма вторых производных.

1.2 Вычисление пределов

Предел вещественной функции f в точке a обозначается выражением "предел(f s a)", где s - указатель типа рассматриваемой окрестности: $s = 0$ - двусторонняя окрестность, $s = 1$ - односторонняя правая, $s = 2$ - односторонняя левая. Формульным редактором предел прорисовывается, если функция f задана описателем "отображение". Именно, выражение "предел(отображение(x $x -$ число $f(x)$)s a)" изображается как $\lim_{x\to a\backslash s} f(x)$). При этом для конкретных значений $s = 0, 1, 2$ берутся, соответственно, прорисовки $\lim_{x\to a} f(x)$), $\lim_{x\to a+0} f(x)$), $\lim_{x\to a-0} f(x)$). Как и в случае производной, будем считать, что выражение "предел(...)" имеет численное значение тогда и только тогда, когда предел существует и конечен. В противном случае его значением является один из нечисловых символов "плюсбеск", "минусбеск", "неопред". Соответственно, предел равен ∞, $-\infty$ либо не существует.

Предел последовательности a обозначается "пределпослед(a)". Формульный редактор прорисовывает его как $\lim(a)$. Верхний и нижний пределы функции f в точке a обозначаются, соответственно, выражениями "верхнийпредел(f s a)", "нижнийпредел(f s a)". Как и выше, s - указатель типа окрестности. Формульный редактор прорисовывает их обычным образом: - $\overline{\lim}_{x\to a\backslash s} f(x)$, $\underline{\lim}_{x\to a\backslash s} f(x)$. Если нужно рассматривать верхний либо нижний предел последовательности, то она задается через описатель "отображение" как функция натурального аргумента. Утверждение "частичнпредел(a u)" означает, что a есть частичный предел последовательности

u. Утверждение "сходится(u)" означает, что u есть числовая последовательность, имеющая своим пределом вещественное число. Оба утверждения прорисовываются формульным редактором так же, как текстовым.

Утверждение "обольшое($f\ g\ a\ s$)" означает, что вещественная функция f в окрестности точки a представляет собой "о большое" от функции g; s - указатель типа окрестности. Формульный редактор прорисовывает это утверждение так же, как текстовый. На практике неудобно каждый раз явно задавать контекст "стремления" аргумента к точке a в указанном четерехместном отношении, и оно почти нигде не применяется. Вместо это используется традиционная запись $f(x) = O(g(x))$, предполагающая наличие в контексте вспомогательного утверждения "стремится($x\ a\ s$)". Данное соглашение относится к области "контекстной семантики", когда смысл утверждений либо выражений не может быть определен в отрыве от технических пометок контекста. Здесь нет какого-либо отступления от логической корректности - просто для удобства вычислений вводится сокращенная запись, которая на каждом этапе преобразований может быть преобразована в более громоздкую логически безупречную запись. В нашем случае речь идет о "вынесении за скобки" указания рассматриваемой окрестности, реализованном с помощью дополнительной фиктивной посылки "стремится(...)". Прорисовывается она в виде $x \to a\backslash s$ либо $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to a-0$. Выражение $O(g(x))$ используется обычным образом. Здесь "O" - вспомогательный логический символ. Формульный редактор прорисовывает его так же, как текстовый.

Утверждение "малаявеличина($f\ g\ a\ s$)" означает, что вещественная функция f в окрестности точки a представляет собой "о малое" от функции g; s - указатель типа окрестности. Сокращенным эквивалентом служит фиктивное утверждение "$o(f(x)g(x))$, используемое в контексте посылки "стремится(...)". Утверждение "асимптравно($f\ g\ a\ s$)" означает, что предел отношения вещественных функций f, g в точке a существует и равен 1. Утверждение "локприближ($f\ g\ h\ a\ s$)" означает, что в окрестности точки a вещественная функция f представима как сумма функции g и некоторой функции, представляющей собой "о большое" от функции h. При этом h в данной окрестности есть "о малое" от g.

Обращение к нормализаторам вычисления пределов

Для вычисления пределов служат нормализаторы "нормпредел", "нормверхпредел", "нормнижпредел". Обращения к ним выполняются следующими приемами:

1. Обращение к нормализатору "нормпредел".

   $\forall_{abcf}(a = \lim_{x\to b\backslash c} f(x) \to \lim_{x\to b\backslash c} f(x) = a)$

   $\forall_{abcf}(a = \lim_{x\to b\backslash c}\{f(x)\} \to \lim_{x\to b\backslash c}\{f(x)\} = a)$

   В первом приеме функция задается описателем "отображение($x\ x-$число $f(x)$)", во втором - описателем "отображение($x\ x$ $-$ натуральное $f(x)$)". Прорисовка формульным редактором фигурных скобок указывает на предел по натуральному аргументу. В этом случае $b = \infty$. Приемы применяются к подвыражению условия задачи на доказательство либо преобразование. Это подвыражение не должно располагаться внутри условного выражения, т.е. вычислению предела будет предшествовать разбор случаев. Переменная f функциональная. Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". При этом вводится дополнительная посылка

$\neg(x - b = 0)$. Проверяется, что предел удалось вычислить, т.е. заголовок выражения a отличен от символа "предел". Указатель "нормзадача" определяет перенесение в контекст замены из комментария нормализатора (коррекцияпосылок ...) условий на существование предела, найденных при его вычислении. Ситуация здесь аналогична производным. Если выражение под пределом содержит конечные суммы либо произведения, то уровень срабатывания приема равен 3, иначе он равен 1.

2. Обращение к нормализатору "нормверхпредел".

   $\forall_{abcf}(a = \overline{\lim}_{x \to b \backslash c} f(x) \to \overline{\lim}_{x \to b \backslash c} f(x) = a)$

   $\forall_{abcf}(a = \overline{\lim}_{x \to b \backslash c} \{f(x)\} \to \overline{\lim}_{x \to b \backslash c} \{f(x)\} = a)$

   Аналогично обращениям к нормализатору "нормпредел". Если функция задана через описатель "отображение" отдельным равенством, то используется следующий прием:

   $\forall_{abcfuv}(f = \lambda_y(u(y), v(y))\ \&\ a = \overline{\lim}_{x \to b \backslash c} u(x) \to \overline{\lim}_{x \to b \backslash c} f(x) = a)$

   Здесь переменная f - обычная, переменные u, v - функциональные. Первый антецедент берется в посылках, второй - обращается к нормализатору "нормверхпредел". В остальном аналогично обращению к нормализатору "нормпредел".

3. Обращение к нормализатору "нормнижпредел".

   $\forall_{abcf}(a = \underline{\lim}_{x \to b \backslash c} f(x) \to \underline{\lim}_{x \to b \backslash c} f(x) = a)$

   $\forall_{abcf}(a = \underline{\lim}_{x \to b \backslash c} \{f(x)\} \to \underline{\lim}_{x \to b \backslash c} \{f(x)\} = a)$

   $\forall_{abcfuv}(f = \lambda_y(u(y), v(y))\ \&\ a = \underline{\lim}_{x \to b \backslash c} u(x) \to \underline{\lim}_{x \to b \backslash c} f(x) = a)$

   Аналогично предыдущему.

Нормализатор "нормпредел"

Этот нормализатор общей стандартизации относится к числу немногих очень больших нормализаторов решателя и выполняет практически всю работу по вычислению пределов. Он является корневым, т.е. его приемы применяются только к корневому вхождению преобразуемого выражения. Элемент "разборслучаев" в описании формата нормализатора означает, что в процессе вычислений может быть предпринят откат к исходной точке, где инициируется заданный вызвавшим откат приемом разбор случаев. По окончании обработки всех случаев и подслучаев они объединяются в условном выражении, упрощаемом при помощи нормализатора "нормвариант". Схема разбора случаев с откатами необходима из-за того, что обычно набор альтернативных условий на значения параметров возникает лишь в процессе вычисления предела. При этом некоторые из альтернатив могут потребовать цепочки вычислений, отличающейся от той, которая привела к точке рассмотрения списка альтернатив. Нормализатор имеет следующие приемы:

1. Предел константы.

   $\forall_{abc}(\lim_{x \to c \backslash a} b = b)$

   Уровень срабатывания этого и следующего приемов равен 1.

2. Предел тождественной функции.

   $\forall_{ab}(\lim_{x \to b \backslash a} x = b)$

3. Вынесение минуса из-под предела.

   $\forall_{abcf}(c = \lim_{x\to b\backslash a} f(x)$ & $c -$ число $\to \lim_{x\to b\backslash a}(-f(x)) = -c)$

   Переменная f функциональная. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", он реализует рекурсивное обращение к нормализатору "нормпредел". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Его истинность означает, что рассматриваемый предел существует и равен числу c. Уровень срабатывания равен 2. Для рассмотрения бесконечных пределов созданы следующие приемы:

   $\forall_{abf}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = \infty \to \lim_{x\to a\backslash b}(-f(x)) = -\infty)$

   $\forall_{abf}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = -\infty \to \lim_{x\to a\backslash b}(-f(x)) = \infty)$

   Если нормализатор усмотрит, что предел заведомо не существует, то будет выдан символ "неопред". Для учета этой возможности создан еще один прием:

   $\forall_{abf}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) =$ неопред $\to \lim_{x\to a\backslash b}(-f(x)) =$ неопред$)$

   Уровень срабатывания равен 3.

4. Предел суммы.

   (a) Конечные пределы слагаемых.

   $\forall_{abcdfg}(c = \lim_{x\to b\backslash a} f(x)$ & $c -$ число & $d = \lim_{x\to b\backslash a} g(x)$ & $d -$ число $\to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x) + g(x)) = c + d)$

   Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор", второй и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Бесконечный предел одного слагаемого и равный ему либо конечный предел суммы остальных слагаемых.

   $\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to d\backslash b}$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty)$ & $c = \lim_{x\to d\backslash b} f(x)$ & $(c -$ число $\vee \ a = c) \to \lim_{x\to d\backslash b}(g(x) + f(x)) = a)$

   Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Отсутствие предела, если нет предела одного из слагаемых и есть конечный предел суммы остальных слагаемых.

   $\forall_{abcfg}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) =$ неопред & $c = \lim_{x\to b\backslash a} g(x)$ & $c-$число $\to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)+g(x)) =$ неопред$)$

   Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

   (d) Конечный предел одного из слагаемых и бесконечный предел суммы остальных слагаемых.

   $\forall_{abcdfg}(c = \lim_{x\to b\backslash a} f(x)$ & $c -$ число & $d = \lim_{x\to b\backslash a} g(x)$ & $(d = \infty \ \vee \ d = -\infty) \to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x) + g(x)) = d)$

   Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Хотя четвертый антецедент и выделен указателем "блокпроверок", но при его обработке нет надобности применять какие-либо проверочные операторы - достаточно сравнить предел d с символами бесконечности. Поэтому компилятор преобразует его в дизъюнкцию соответствующих сравнений. Уровень срабатывания приема равен 2.

(e) Выделение главного члена суммы.

Если сумма является основанием степени сомножителя числителя либо знаменателя дроби под пределом, причем показатель степени имеет конечный предел, то можно отбрасывать слагаемые, представляющие собой "о малое" от остаточной суммы:

$\forall_{abcpfguv}(g(x) = o(f(x))\ \&\ p = \lim_{x\to a\backslash b} c(x)\ \&\ p -$ число $\to \lim_{x\to a\backslash b}((f(x) + g(x))^{c(x)}u(x))/v(x) = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)^{c(x)}u(x))/v(x))$

Переменные c, f, g, u, v функциональные. Указатель "операнд(x7 фикс(0 1 1 3 1 1 1))" определяет идентификацию $g(x)$ с некоторым слагаемым суммы. Первый антецедент представляет собой прорисовку формульным редактором вспомогательного утверждения "o$(g(x), f(x))$". Он обрабатывается проверочным оператором "o", приемы которого будут приведены ниже. Указатель "занесениепосылки(1 стремится(x23 x1 x2))" определяет передачу этому оператору дополнительной посылки "стремится($x\ a\ b$)". Чтобы отбросить случай многочленов, для которого созданы другие приемы, введен фильтр, требующий наличие в основании степени операции, отличной от сложения, умножения, изменения знака и возведения в константную степень. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "дробь" разрешает перестановку местами числителя и знаменателя. Допускаются вырожденные единичные значения c, u, v. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Разложение на множители суммы под пределом, если более, чем одно слагаемое не имеет предела.

$\forall_{abfg}(f = \lambda_x(g(x), x -$ число$) \to \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = \lim_{x\to a\backslash b} f(x))$

Выражение под пределом представляет собой сумму, имеющую более одного слагаемого, для которого обращение к нормализатору "нормпредел" дает результат "неопред". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение $g(x)$ в его правой части обрабатывается нормализатором "видумножение". Уровень срабатывания равен 4.

(g) Некоторое слагаемое ограничено и не имеет предела, а сумма остальных слагаемых имеет бесконечный предел.

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = c\ \&\ (c = \infty\ \vee\ c = -\infty)\ \&$ ограничено$(g(x)) \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x) + g(x)) = c)$

Указатель "операнд(x7 фикс(0 1 1 3 2))" определяет идентификацию $g(x)$ с некоторым слагаемым. Последний антецедент с помощью проверочного оператора устанавливает ограниченность данного слагаемого. Первый антецедент реализует рекурсивное обращение для вычисления предела c остаточной суммы. Второй антецедент, выделенный указателем "блокпроверок", сравнивает этот предел с символами бесконечности. Уровень срабатывания равен 6. Предел слагаемого $g(x)$ до этого найти не удалось, так как иначе уже был бы вычислен предел всей суммы.

(h) Сложение дробей, стремящихся к бесконечностям разных знаков.

$\forall_{abfghuvw}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = \infty\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = \infty\ \&\ h = \lambda_x(f(x) + g(x), x -$ число$) \to \lim_{x\to a\backslash b}(v(x)(f(x)+g(x))^{v(x)})/w(x) = \lim_{x\to a\backslash b}(v(x)(h(x))^{u(x)}/w(x)))$

Хотя бы одно из выражений $f(x), g(x)$ имеет заголовок "дробь". Первые два антецедента вычисляют пределы этих выражений. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Сумма в его правой части обрабатывается нормализатором "видумножение", выполняющим сложение дробей. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя внешней дроби, расположенной под пределом, а указатель "единица" разрешает вырожденные единичные значения $u(x), v(x)$. Уровень срабатывания равен 3.

(i) Разность логарифмов.

$\forall_{afg}(\lim_{x\to b\backslash c}\ln(f(x)/g(x)) = a \to \lim_{x\to b\backslash c}(\ln f(x) - \ln g(x)) = a)$

Антецедент предпринимает попытку вычислить предел логарифма частного. Проверяется, что результат a не содержит символа "предел". Уровень срабатывания равен 3.

5. Предел произведения.

(a) Конечные пределы сомножителей.

$\forall_{abcdfg}(c = \lim_{x\to b\backslash a} f(x)$ & c – число & $d = \lim_{x\to b\backslash a} g(x)$ & d – число $\to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)g(x)) = cd)$

Введен слабый ограничитель трудоемкости, предотвращающий чрезмерно длительное применение приема. Это может понадобиться, если должны применяться совсем другие средства, например, правило Лопиталя. Для ускорения вычислений отсекаются случаи, когда c оказалось равно 0, а сомножитель $f(x)$ не является первым в произведении. Такие случаи учитываются при вычислении предела d после отбрасывания первого сомножителя. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Бесконечный предел одного из сомножителей и конечный ненулевой либо бесконечный предел произведения остальных сомножителей.

$\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to d\backslash b} f(x) \,\&\, (a = \infty \vee a = -\infty) \,\&\, c = \lim_{x\to d\backslash b} g(x) \,\&\, (a = \infty \,\&\, (c = -\infty \vee c < 0) \vee a = -\infty \,\&\, (c = \infty \vee 0 < c)) \to \lim_{x\to d\backslash b}(f(x)g(x)) = -\infty)$

$\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to d\backslash b} f(x) \,\&\, (a = \infty \vee a = -\infty) \,\&\, c = \lim_{x\to d\backslash b} g(x) \,\&\, (a = \infty \,\&\, (c = \infty \vee 0 < c) \vee a = -\infty \,\&\, (c = -\infty \vee c < 0)) \to \lim_{x\to d\backslash b}(f(x)g(x)) = \infty)$

Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор", второй и четвертый - указателем "блокпроверок". Проверяется, что после рекурсивных обращений получаются выражения a, c, не имеющие заголовка "предел". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Правило Лопиталя.

$\forall_{abcdefg}(e = \lim_{x\to c\backslash d} f(x) \,\&\, b = \lim_{x\to c\backslash d} g(x) \,\&\, (e = 0 \,\&\, (b = \infty \vee b = -\infty) \vee b = 0 \,\&\, (e = \infty \vee e = -\infty)) \,\&\, a = \lim_{x\to c\backslash d}((df(x)/dx(g(x))^2)/dg(x)/dx) \to \lim_{x\to c\backslash d}(f(x)g(x)) = -a)$

Первые два антецедента вычисляют пределы b, e сомножителя $f(x)$ и остаточного произведения $g(x)$. Третий антецедент, выделенный указателем "блокпроверок", устанавливает, что один из пределов нулевой, а другой - бесконечный. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он применяет правило Лопиталя, вычисляя предел отношения производных функций $f(x)$ и $1/g(x)$. Правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел", а перед этим дробь под пределом упрощается в о.д.з. вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что предел вычислить удалось - т.е. что заголовок выражения a отличен от символа "предел". Отсюда следует, что и производные вычислить удалось - иначе символ "производная", как, не имеющий априори своим значением число, заблокирует работу нормализатора "нормпредел". При создании нормализатора предполагалось, что он будет применяться к пределам, под которыми расположены только символы арифметических операций и элементарных функций. Это позволило сэкономить на многих дополнительных проверках корректности, в частности, для данного приема. Нетрудно создать версию нормализатора, свободную от данного ограничения, хотя она и будет в "обычных" случаях работать несколько медленнее. Можно порекомендовать это в качестве самостоятельного упражнения.

Введен фильтр, обеспечивающий выбор в качестве $f(x)$ логарифма, если произведение имеет хотя бы один логарифм. Тогда, при вычислении производной, данный логарифм будет исключен. Если произведение не имеет логарифмических сомножителей, то в качестве $f(x)$ выбирается самый длинный сомножитель. Чтобы заблокировать зацикливание при многократном применении правила Лопиталя, используется комментарий "частнпроизв". Он передается нормализатору при рекурсивном обращении, и данный прием блокируется, если число таких комментариев становится больше двух. Кроме того, прием блокируется, если произведение содержит факториал варьируемого выражения, либо если имеется комментарий "производная". Уровень срабатывания равен 9.

(d) Выражение имеющего бесконечный предел тангенса либо котангенса через синус и косинус.

$\forall_{abcfghx}(0 < b \ \& \ \lim_{x\to c\backslash a}\cos h(x) = 0 \to \lim_{x\to c\backslash a}(g(x)(\operatorname{tg} h(x))^b/f(x)) = \lim_{x\to c\backslash a}(g(x)(\sin h(x))^b/(f(x)(\cos h(x))^b)))$

$\forall_{abcfghx}(0 < b \ \& \ \lim_{x\to c\backslash a}\sin h(x) = 0 \to \lim_{x\to c\backslash a}(g(x)(\operatorname{ctg} h(x))^b/f(x)) = \lim_{x\to c\backslash a}(g(x)(\cos h(x))^b/(f(x)(\sin h(x))^b)))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй реализует обращение к нормализатору "нормпредел". Если $f(x)$ равно единице и имеется комментарий "производная", то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Отсутствие предела, если предел одного из сомножителей не существует, а предел произведения остальных сомножителей существует, конечен и отличен от 0.

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = \text{неопред} \ \& \ c = \lim_{x\to b\backslash a} g(x) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)g(x)) = \text{неопред})$

Уровень срабатывания равен 3.

(f) Использование асимптотического равенства для натурального логарифма, аргумент которого стремится к единице.

$\forall_{abcfghu}(\lim_{x\to b\backslash c} f(x) = 1 \ \& \ a = \lim_{x\to b\backslash c} u(x) \ \& \ a - \text{число} \to \lim_{x\to b\backslash c}(((\ln f(x))^{u(x)}g(x))/h(x)) = \lim_{x\to b\backslash c}(((f(x)-1)^{u(x)}g(x))/h(x)))$

$\forall_{abcfghu}(\lim_{x\to b\backslash c} f(x) = 1 \ \& \ a = \lim_{x\to b\backslash c} u(x) \ \& \ a - \text{число} \to \lim_{x\to b\backslash c}(h(x)/((\ln f(x))^{u(x)}g(x))) = \lim_{x\to b\backslash c}(h(x)/(((f(x)-1)^{u(x)}g(x))))$

Уровни срабатывания равны 2.

(g) Выражение через натуральные логарифмы логарифма, основание которого стремится к единице либо к бесконечности.

$\forall_{abcfghu}(b = \lim_{x\to c\backslash a} u(x)\ \&\ (b = 1 \vee b = \infty) \to \lim_{x\to c\backslash a}(h(x)(\log_{u(x)} f(x))^{g(x)}) = \lim_{x\to c\backslash a}((h(x)(\ln f(x))^{g(x)})/(\ln u(x))^{g(x)}))$

Уровень срабатывания равен 3.

(h) Несуществование предела, если один из сомножителей периодический и меняет знак, а произведение остальных имеет предел, отличный от нуля. Пока рассмотрен только случай степени минус единицы:

$\forall_{bcdefg}(e = \lim_{a\to d\backslash c} b(a)\ \&\ (e-$ число $\&\ \neg(e = 0)\ \vee\ e = \infty\ \vee\ e = -\infty)\ \&\ g = \lim_{a\to d\backslash c} f(a)\ \&\ (g = \infty\ \vee\ g = -\infty) \to \lim_{a\to d\backslash c}((-1)^{f(a)}b(a)) =$ неопред$)$

Уровень срабатывания равен 3.

(i) Нулевой предел одного из сомножителей при ограниченном снизу и сверху произведении остальных сомножителей.

$\forall_{abfgx}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = 0\ \&$ ограничено$(g(x)) \to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)g(x)) = 0)$

Утверждение "ограничено(A)" представляет собой условную запись того факта, что при варьировании переменных численного выражения A в области истинности рассматриваемого списка посылок множество значений этого выражения ограничено. В отличие от утверждения "ограничена$(f\ M)$" об ограниченности числовой функции f на множестве M, оно имеет лишь контекстную семантику и используется в теоремах приемов. Для его проверки относительно текущего списка посылок создан проверочный оператор "ограничено". При наличии в списке посылок утверждения "стремится$(\ldots)$" будет проверяться ограниченность в соответствующей окрестности. Уровень срабатывания приема равен 6.

(j) Попытка логарифмирования произведения, если предел одного из множителей равен нулю, а предел остальных множителей бесконечен.

$\forall_{abcdfg}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = 0\ \&\ \lim_{x\to c\backslash a} g(x) = \infty\ \&\ 0 < f(x)\ \&$
$b = \lim_{x\to c\backslash a}(\ln f(x) + \ln g(x)) \to \lim_{x\to c\backslash a}(f(x)g(x)) = \exp b)$

Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому сообщается дополнительная посылка "$x\ \to\ c\backslash a$". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор" и реализуют обращения к оператору "нормпредел". Произведение должно иметь своим сомножителем степень, показатель которой содержит x. Проверяется, что выражение b не имеет заголовка "предел" и не содержит символа "отказ". Уровень срабатывания равен 4.

(k) Разбор случаев по знаку предела остаточного произведения, если выбранный множитель имеет бесконечный предел.

$\forall_{abcdfgx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x)\ \&\ (a = \infty\ \vee\ a = -\infty)\ \&\ d = \lim_{x\to c\backslash b} g(x)\ \&\ d -$ число $\to \lim_{x\to c\backslash b}(f(x)g(x)) =$ разборслучаев$(d = 0\ \vee\ 0 < d\ \vee\ d < 0))$

Консеквент теоремы имеет вид равенства предела техническому терму "разборслучаев$(\ldots)$". Компилятор обрабатывает эту запись таким образом, чтобы произошел откат к повторному вычислению исходного предела, т.е. первого предела в цепочке рекурсивных обращений оператора "нормпредел" к самому себе. При этом указание на заданный разбор случаев будет встроено в старую схему разбора случаев, связанную с вычислением исходного предела, так что ее текущий подслучай окажется подразбит на заданные новые подслучаи. Разумеется, сама цепочка обращений, которая привела к срабатыванию заданного приема, будет отброшена. Однако, большинство промежуточных результатов обращений к пакетным операторам будет сохранено в их буферах, и при повторных вычислениях они будут сразу же оттуда извлекаться.

Чтобы распознавать начало цепочки рекурсивных обращений, используется комментарий "подчинено". Его наличие указывает на промежуточную точку цепочки. Здесь нормализатор выдает в качестве ответа терм "разборслучаев(...)". При отсутствии данного комментария происходит обращение к оператору "подслучаи", реализующему коррекцию схемы разбора случаев. Затем выполняется откат к начальной точке цикла сканирования нормализатора, где будет инициировано вычисление предела в первом из новых подслучаев текущего "старого" подслучая. Заметим, что при каждом рекурсивном обращении оператор "нормпредел" проверяет, не получен ли терм "разборслучаев", чтобы сразу же отреагировать на него одним из указанных выше двух способов.

Прием проверяет, что выражение d неконстантное. Комментарии "асимптоценка" и "подслучаи" блокируют его применение. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Предел произведения логарифмической и степенной функций при стремлении аргумента к нулю.

$\forall_{abcdfg}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = 0 \;\&\; 0 < d \;\&\; e = \lim_{x\to a\backslash b} g(x) \;\&\; e -$ число $\to \lim_{x\to a\backslash b}((\ln f(x))^c (f(x))^d g(x)) = 0)$

Уровень срабатывания равен 1.

(m) Предел произведения степенной и показательной функций при стремлении аргумента к бесконечности.

$\forall_{bcdefgh}(\lim_{x\to e\backslash h} f(x) = \infty \;\&\; b = \lim_{x\to e\backslash h} g(x) \;\&\; b -$ число $\&\; 0 < b \;\&\; d(b-1) < 0 \to \lim_{x\to e\backslash h}((f(x))^c (g(x))^{df(x)}) = 0)$

$\forall_{bcdefgh}(\lim_{x\to e\backslash h} f(x) = \infty \;\&\; b = \lim_{x\to e\backslash h} g(x) \;\&\; b -$ число $\&\; 0 < c \;\&\; 0 < b \;\&\; 0 \le d(b-1) \to \lim_{x\to e\backslash h}((f(x))^c (g(x))^{df(x)}) = \infty)$

Уровень срабатывания равен 1.

(n) Преобразование произведения с дробным сомножителем к виду дроби.

$\forall_{abfgh}(\lim_{x\to b\backslash a}((f(x)/g(x))h(x)) = \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)h(x)/g(x)))$

Проверяется, что переменная x входит в знаменатель $g(x)$. Уровень срабатывания равен 1.

(o) Попытка раскрывания скобок.

$\forall_{abcfghu}(u = \lambda_x((f(x)+g(x))h(x), x -$ число$) \;\&\; \lim_{x\to b\backslash c} u(x) = a \to \lim_{x\to b\backslash c}((f(x)+g(x))h(x)) = a)$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Произведение $(f(x)+g(x))h(x)$ в его правой части обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Второй антецедент реализует рекурсивное обращение к нормализатору "нормпредел", причем проверяется, что результат a не содержит символа "предел". Попытка применить прием предпринимается, если $f(x), h(x)$ имеют своими обобщенными сомножителями степени, основания которых не зависят от x, а показатели линейны относительно x. Уровень срабатывания равен 8.

(p) Несуществование предела произведения с сигнумом.

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = c \,\&\, (c = \infty \vee c = -\infty) \,\&\, \lim_{x\to a\backslash b} \mathrm{sg} g(x) = \text{неопред} \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)\mathrm{sg} g(x)) = \text{неопред})$

Уровень срабатывания равен 4.

6. Предел степени.

(a) Конечные пределы показателя и основания степени

$\forall_{abcdfg}(b = \lim_{x\to d\backslash a} f(x) \,\&\, b - \text{число} \,\&\, c = \lim_{x\to d\backslash a} g(x) \,\&\, c - \text{число} \,\&\, (0 < b \;\vee\; (0 \leq b \,\&\, 0 < c)) \to \lim_{x\to d\backslash a}((f(x))^{g(x)}) = b^c)$

Уровень срабатывания равен 3.

(b) Бесконечный предел основания степени.

$\forall_{abcf}(a < 0 \,\&\, \lim_{x\to c\backslash b} f(x) = \infty \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^a) = 0)$

$\forall_{abcf}(0 < a \,\&\, \lim_{x\to c\backslash b} f(x) = \infty \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^a) = \infty)$

Уровень срабатывания первого приема равен 2, второго - 3. В случае отрицательной бесконечности рассматриваются только рациональные показатели степени с нечетным знаменателем:

$\forall_{abcf}(a - \text{rational} \,\&\, \text{числитель}(a) - \text{even} \,\&\, \lim_{x\to c\backslash b} f(x) = -\infty \,\&\, 0 < a \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^a) = \infty)$

$\forall_{abcf}(a - \text{rational} \,\&\, \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \,\&\, \lim_{x\to c\backslash b} f(x) = -\infty \,\&\, a < 0 \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^a) = 0)$

$\forall_{abcf}(a - \text{rational} \,\&\, \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \,\&\, \neg(\text{числитель}(a) - \text{even}) \,\&\, \lim_{x\to c\backslash b} f(x) = -\infty \,\&\, 0 < a \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^a) = -\infty)$

Уровень срабатывания равен 2.

(c) Константный рациональный показатель степени.

$\forall_{abcdfx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x) \,\&\, a - \text{число} \,\&\, d - \text{rational} \,\&\, \text{знаменатель}(d) - \text{even} \,\&\, 0 < \text{числитель}(d) \,\&\, 0 \leq a \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^d) = a^d)$

$\forall_{abcdfx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x) \,\&\, a - \text{число} \,\&\, d - \text{rational} \,\&\, \text{знаменатель}(d) - \text{even} \,\&\, \text{числитель}(d) < 0 \,\&\, 0 \leq a \,\&\, neg(a = 0) \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^d) = a^d)$

$\forall_{abcdfx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x) \,\&\, a - \text{число} \,\&\, d - \text{rational} \,\&\, \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \,\&\, \text{числитель}(d) < 0 \,\&\, neg(a = 0) \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^d) = a^d)$

$\forall_{abcdfx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x) \,\&\, a - \text{число} \,\&\, d - \text{rational} \,\&\, \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \,\&\, 0 < d \to \lim_{x\to c\backslash b}((f(x))^d) = a^d)$

Уровни срабатывания равны 2. Для нулевого показателя степени создан отдельный прием:

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x\to a\backslash b} f(x) \,\&\, (c = \infty \;\vee\; (c - \text{число} \,\&\, \neg(c = 0))) \to \lim_{x\to a\backslash b}((f(x))^0) = 1)$

Ненулевой предел основания гарантирует, что в некоторой окрестности точки a условие на о.д.з. для степени с нулевым показателем будет выполнено. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Бесконечный предел показателя степени.

$\forall_{abcdfg}(d = \lim_{x\to a\backslash c} f(x) \,\&\, d - \text{число} \,\&\, b = \lim_{x\to a\backslash c} g(x) \,\&\, b = \infty \,\&\, 0 < 1 - d \,\&\, 0 < d + 1 \to \lim_{x\to a\backslash c}((f(x))^{g(x)}) = 0)$

$\forall_{abcdfg}(d = \lim_{x\to a\backslash c} f(x) \,\&\, d - \text{число} \,\&\, b = \lim_{x\to a\backslash c} g(x) \,\&\, (b = -\infty \,\&\, 0 < 1 - d \;\vee\; b = \infty \,\&\, 1 - d < 0) \,\&\, 0 \leq d \to \lim_{x\to a\backslash c}((f(x))^{g(x)}) = \infty)$

Уровень срабатывания равен 3.

(e) Несуществование предела степени с отрицательным основанием, если показатель стремится к бесконечности.

Здесь важно, чтобы показатель принимал значения произвольной четности. Для контроля этого различаются два случая: варьируемая переменная принимает произвольные вещественные значения в окрестности заданной точки, либо она принимает только целочисленные значения. В первом случае вводится ограничение на допустимый вид показателя, чтобы он из соображений непрерывности принимал с некоторого момента все целочисленные значения, во втором - используется нечетность коэффициента при варьируемой переменной. Первый случай отличается от второго отсутствием комментария "целое". Для него имеется два приема:

$\forall_{abcdfgh}(a+1 \leq 0 \ \& \ \lim_{x\to c\backslash b} f(x) = \infty \ \& \ \lim_{x\to c\backslash b}(g(x)/h(x)) = d \ \& \ (d = \infty \vee d = -\infty \ \vee \ (d - \text{число} \ \& \ \neg(d = 0))) \to \lim_{x\to c\backslash b}(g(x)a^{f(x)}/h(x)) = \text{неопред})$

$\forall_{abcdfg}(= \lim_{x\to a\backslash b}((f(x))^{g(x)}) \ \& \ (c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \vee \ c = \infty \ \vee \ c = -\infty) \ \& \ d = \lim_{x\to a\backslash b} g(x) \ \& \ (d = \infty \ \vee \ d = -\infty) \to \lim_{x\to a\backslash b}((-f(x))^{g(x)}) = \text{неопред})$

Первый прием срабатывает на уровне 3, второй - на уровне 1. Проверяется, что показатель степени содержит только операции "плюс", "умножение", "дробь", "степень", "минус", возможно, заключенные под корневой целой частью. При наличии комментария "целое" применяются следующие приемы:

$\forall_{adghmnp}(a + 1 \leq 0 \ \& \ \lim_{x\to\infty}(g(x)/h(x)) = d \ \& \ (d = \infty \ \vee \ d = -\infty \ \vee \ (d - \text{число} \ \& \ \neg(d = 0))) \to \lim_{x\to\infty}(g(x)a^{(mx/n)+p}/h(x)) = \text{неопред})$

$\forall_{cfmnp}(c = \lim_{x\to\infty}((f(x))^{(mx/n)+p}) \ \& \ ((c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0)) \ \vee \ c = \infty \ \vee \ c = -\infty) \to \lim_{x\to\infty}((-f(x))^{(mx/n)+p}) = \text{неопред})$

Переменные m, n идентифицируются с целочисленными константами, причем m - с нечетной константой. Уровни срабатывания, как и выше, равны 3 и 1.

(f) Основание степени имеет нулевой предел, а константный показатель отрицателен.

$\forall_{abcdfx}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = 0 \ \& \ c < 0 \ \& \ 0 \leq f(x) \to \lim_{x\to b\backslash a}((f(x))^c) = \infty)$

$\forall_{abcdfx}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = 0 \ \& \ c < 0 \ \& \ f(x) \leq 0 \to \lim_{x\to b\backslash a}((f(x))^c) = -\infty)$

Истинность третьего антецедента проверяется с дополнительными посылками "$x - \text{число}, x \to b\backslash a$". Так как изначально предполагается, что выражение под пределом определено в малых окрестностях точки b, проверка строгого неравенства необязательна. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Разбор случаев при нулевом пределе основания степени.

$\forall_{abcfx}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = 0 \to \lim_{x\to b\backslash a}((f(x))^c) = \text{разборслучаев}(0 < c \ \vee \ c < 0 \ \vee \ c = 0))$

Выражение c неконстантное. Комментарий "асимптоценка" блокирует применение приема. Уровень срабатывания равен 4. На этом уровне уже становится ясно, что знак c неизвестен, так что остается лишь прибегнуть к разбору случаев.

(h) Разбор случаев при бесконечном пределе показателя степени.

$\forall_{abcdfgx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x) \ \& \ (a = \infty \ \vee \ a = -\infty) \ \& \ d = \lim_{x\to c\backslash b} g(x) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \to \lim_{x\to c\backslash b}((g(x))^{f(x)}) = \text{разборслучаев}(d = 1 \ \vee \ 0 < d - 1 \ \& \ d - 1 < 0))$

Выражение d неконстантное. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcdfx}(\lim_{x\to c\backslash b} f(x) = \infty \to \lim_{x\to c\backslash b}(d^{f(x)}) = \text{разборслучаев}(d+1 < 0 \vee d = -1 \ \vee\ 0 < d+1 \ \& \ d-1 < 0 \ \vee\ d = 1 \ \vee\ 0 < d-1))$

Уровень срабатывания равен 4.

(i) Разбор случаев при бесконечом пределе основания степени.

$\forall_{abcfx}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = \infty \to \lim_{x\to b\backslash a}((f(x))^c) = \text{разборслучаев}(0 < c \ \vee\ c < 0 \ \vee\ c = 0))$

Уровень срабатывания равен 4.

(j) Разбор случаев при нулевом пределе показателя степени.

$\forall_{abcfx}(0 \le c \ \& \ \lim_{x\to b\backslash a} f(x) = 0 \to \lim_{x\to b\backslash a}(c^{f(x)}) = \text{разборслучаев}(c = 0 \ \vee\ \neg(c = 0)))$

Проверяется неочевидность того, что c положительно. Уровень срабатывания равен 4.

(k) Переход к экспоненте.

$\forall_{abcdj}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(d = 0) \to \lim_{n\to\infty\backslash j}((1 + a/(bn))^{cn/d}) = \exp(ac/bd))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcfgx}(0 < f(x) \ \& \ c = \lim_{x\to b\backslash a}(\ln f(x) \cdot g(x)) \to \lim_{x\to b\backslash a}((f(x))^{g(x)}) = \exp c)$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором с дополнительными посылками "x – число, $x \to b\backslash a$". Показатель степени содержит переменную x. Проверяется, что выраженияе c не содержит символа "предел", т.е. что предел удалось вычислить. Нормализатор "нормстепень" обеспечивает обработку символов бесконечности под экспонентой. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcdfghuvw}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = c \ \& \ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = d \ \& \ h = \lambda_x(w(x)(\ln f(x) - \ln g(x)), x - \text{число}) \ \& \ (c = 0 \ \& \ d = 0 \ \vee\ c = \infty \ \& \ d = \infty) \to$
$\lim_{x\to a\backslash b}(((u(x)f(x))/(v(x)g(x)))^{w(x)}) = \lim_{x\to a\backslash b}((u(x)/v(x))^{w(x)} \exp(h(x))))$

Выражения $f(x), g(x)$ идентифицируются с произведениями всех сомножителей числителя и знаменателя дроби в основании степени, для которых усматривается положительность. Допускаются вырожденные единичные значения f, g, u, v, однако хотя бы одно из выражений $f(x), g(x)$ должно отличаться от единицы. При усмотрении используются дополнительные посылки "x – число, $x \to a\backslash b$". Показатель степени $w(x)$ содержит переменную x. Первые два антецедента вычисляют пределы, обращаясь к нормализатору "нормпредел". Последний антецедент, выделенный указателем "блокпроверок", проверяет, что либо оба найденных предела нулевые, либо оба бесконечные. Третий антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обращается к нормализатору "асимптоценка". Этот нормализатор будет описан впоследствии. В качестве дополнительных посылок используются "$x -$ число, $x \to a\backslash b$". Результатом служит асимптотическая оценка h, т.е. некоторое выражение стандартного для таких случаев типа, асимптотически равное исходному. Проверяется, что оно не содержит символа "отказ", т.е. что оценка действительно была найдена. Уровень срабатывания равен 4.

(l) Переход к степени произведения.

$\forall_{abcdfghuv}(\lim_{x\to d\backslash a}(((g(x))^{f(x)+b}(h(x))^{f(x)+c}u(x))/v(x)) = \lim_{x\to d\backslash a}(((g(x)h(x))^{f(x)}(g(x))^b(h(x))^c u(x))/v(x)))$

Выражение $f(x)$ идентифицируется с невырожденной суммой всех слагаемых показателей степени, содержащих x. Либо b, c - константы, либо x не входит в $g(x), h(x)$. Указатель "дробь" допускает перестановку числителя и знаменателя.Уровень срабатывания равен 3.

(m) Преобразование степени произведения к виду произведения степеней.

Если показатель степени не зависит от варьируемой переменной, то применяется преобразование, обратное рассмотренному в предыдущем пункте:

$\forall_{abcfghuv}(0 \leq f(x)\ \&\ 0 \leq g(x) \to \lim_{x\to a\backslash b}(((f(x)g(x))^h u(x))/v(x)) = \lim_{x\to a\backslash b}(((f(x))^h(g(x))^h u(x))/v(x)))$

Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, причем используются дополнительные посылки "$x-$число, $x \to a\backslash b$". Допустима перестановка числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 4.

(n) Раздельное рассмотрение четных и нечетных номеров элементов последовательности при наличии степени минус единицы.

$\forall_{af}(a = \lim_{x\to\infty} f(2x)\ \&\ a = \lim_{x\to\infty} f(2x+1) \to \lim_{x\to\infty} f(x) = a)$

Имеется комментарий "целое", свидетельствующий, что предел берется по целочисленным значениям. Выражение $f(x)$ содержит степень минус единицы, показатель которой линеен относительно x. Уровень срабатывания равен 1. Для усмотрения несуществования предела созданы следующие два приема:

$\forall_f(\lim_{x\to\infty} f(2x) = \text{неопред} \to \lim_{x\to\infty} f(x) = \text{неопред})$

$\forall_{abf}(a = \lim_{x\to\infty} f(2x)\ \&\ b = \lim_{x\to\infty} f(2x+1)\ \&\ (a - \text{число}\ \vee\ a = \infty\ \vee\ a = -\infty)\ \&\ (b - \text{число}\ \vee\ b = \infty\ \vee\ b = -\infty)\ \&\ \neg(a - b = 0) \to \lim_{x\to\infty} f(x) = \text{неопред})$

(o) Несуществование предела степени с константным ненулевым показателем, если не существует предел модуля основания.

$\forall_{abfn}(\lim_{x\to a\backslash b} |f(x)| = \text{неопред}\ \&\ \neg(n = 0) \to \lim_{x\to a\backslash b}((f(x))^n) = \text{неопред})$

Уровень срабатывания равен 6.

(p) Предел степени с целочисленным показателем.

$\forall_{abcdfg}(g(x)-\text{целое}\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} f(x) = c\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = d\ \&\ d - \text{число} \to \lim_{x\to a\backslash b}((f(x))^{g(x)}) = c^d)$

Уровень срабатывания равен 8.

(q) Модуль под радикалом.

$\forall_{abcfg}(0 < g(x)\ \&\ c = \lim_{x\to a\backslash b}(\sqrt{|f(x)/(g(x))^2|}) \to \lim_{x\to a\backslash b}(\sqrt{|f(x)|}/g(x)) = c)$

Проверяется, что найденное при обработке второго антецедента выражение c не содержит символа "предел". Уровень срабатывания равен 1.

7. Предел дроби.

(a) Конечные пределы числителя и знаменателя, с ненулевым пределом знаменателя.

$\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x \to c \backslash d} f(x)\ \&\ a-$ число $\&\ b = \lim_{x \to c \backslash d} g(x)\ \&\ b-$ число $\&\ \neg(b = 0) \to \lim_{x \to c \backslash d}(f(x)/g(x)) = a/b)$

Уровень срабатывания равен 2.

(b) Правило Лопиталя.

$\forall_{abcdefghui}(d = \lim_{y \to a \backslash b} f(y)\ \&\ e = \lim_{y \to a \backslash b} g(y)\ \&\ (d = 0\ \&\ e = 0\ \vee\ (d = \infty\ \vee\ d = -\infty)\ \&\ (e = \infty\ \vee\ e = -\infty))\ \&\ h = \lambda_y(df(y)/dy, y -$ число$)\ \&\ u = \lambda_y(dg(y)/dy, y-$число$)\ \&\ c = \lim_{y \to a \backslash b}(h(y)/u(y))\ \&\ (c-$число $\vee\ c = \infty\ \vee\ c = -\infty)\ \&\ i = c \to \lim_{y \to a \backslash b}(f(y)/g(y)) = i)$

Первые два антецедента, выделенные указателем "идентификатор", вычисляют пределы d, e числителя и знаменателя. Третий антецедент, выделенный указателем "блокпроверок", убеждается, что эти пределы либо оба нулевые, либо оба бесконечные. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". К производным в их правых частях применяется нормализатор "нормпроизводная", которому передаются дополнительные посылки $y -$ число, $y \to a \backslash b$. Шестой антецедент тоже выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел", которому передается комментарий "частнпроизв". Этот комментарий играет роль счетчика внешних обращений к правилу Лопиталя. Седьмой антецедент, выделенный указателем "блокпроверок", проверяет, что конечный либо бесконечный предел c удалось найти. Наконец, последний антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обращается к вспомогательной задаче на преобразование для упрощения предела c. Если выражение c константное, то упрощение отменяется, и результат i оказывается равен c.

Если число N комментариев "частнпроизв" более одного, то должно выполняться одно из следующих условий:

i. Числитель либо знаменатель дроби имеет слагаемое, линейное по y. Это гарантирует зануление слагаемого при двукратном последующем дифференцировании.
ii. $N = 2$, причем длины числителя и знаменателя менее 40.

Кроме того, если в дроби встречается тригонометрическая операция, зависящая от y и расположенная внутри степенного выражения, то при $N < 2$ проверяется, что показатель степени константный, а при $N \geq 2$ - что этот показатель представляет собой целочисленную константу.

Далее, прием блокируется в следующих случаях:

i. Числитель либо знаменатель рассматриваемой дроби имеет длину более 80.
ii. Числитель либо знаменатель дроби имеет своим сомножителем степенное выражение с неконстантным показателем, предел основания которого - нулевой либо бесконечный.
iii. Дробь содержит факториал, зависящий от y.
iv. Обе производные $u(y), h(y)$ имеют длину более 70.
v. Имеется комментарий "целое", причем y встречается в показателе степенного выражения, расположенного внутри рассматриваемой дроби.

Имеется не очень сильный ограничитель трудоемкости, ослабляемый, если числитель либо знаменатель дроби представляет собой степень переменной y с натуральным показателем.

Уровень срабатывания равен 5.

(c) Группировка множителей числителя и знаменателя в виде степени дроби.
$\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to d\backslash b}(f(x)/g(x))$ & $a -$ число & $0 < c \to$
$\lim_{x\to d\backslash b}((f(x))^c/(g(x))^c) = a^c)$
Указатель "общаястепень(общаястепень x3 степень(значение(x6 x23)x3) степень(значение(x7 x23)x3))" определяет идентификацию переменной c как не зависящего от x наибольшего общего делителя показателей степени множителей числителя и знаменателя. Здесь используется вспомогательная процедура "общаястепень". Уровень срабатывания равен 2. При группировке части множителей числителя и знаменателя применяется другой прием:
$\forall_{abcdfghuv}(\lim_{x\to d\backslash a}(((g(x))^{f(x)+b}u(x))/((h(x))^{f(x)+c}v(x))) =$
$\lim_{x\to d\backslash a}(((g(x)/h(x))^{f(x)}(g(x))^b u(x))/((h(x))^c v(x))))$
Допускаются вырожденные значения $u(x), v(x), b, c$. Уровень срабатывания равен 2. Наконец, для случая, когда общий делитель показателей степени числителя и знаменателя зависит от x и имеет бесконечный предел, создан еще один прием:
$\forall_{abcdfghp}(\lim_{x\to a\backslash b} h(x) = p$ & $(p = \infty \ \vee\ p = -\infty) \to$
$\lim_{x\to a\backslash b}((f(x))^{ch(x)}/(g(x))^{dh(x)}) = \lim_{x\to a\backslash b}(((f(x))^c)/((g(x))^d))^{h(x)})$
Уровень срабатывания равен 3.

(d) Дробь с константным знаменателем, имеющая конечный предел числителя.
$\forall_{abcdf}(c = \lim_{x\to d\backslash a} f(x)$ & $c -$ число & $\neg(b = 0) \to \lim_{x\to d\backslash a}(f(x)/b) = c/b)$
Прием создан для ускоренной обработки простых случаев. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Нулевой предел знаменателя и ненулевой - числителя.
$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b} g(x) = 0$ & $c = \lim_{x\to a\backslash b} f(x)$ & $(c -$ число $\vee\ c = \infty\ \vee\ c = -\infty)$ & $0 < cg(x) \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x)) = \infty)$
$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b} g(x) = 0$ & $c = \lim_{x\to a\backslash b} f(x)$ & $(c -$ число $\vee\ c = \infty\ \vee\ c = -\infty)$ & $cg(x) < 0 \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x)) = -\infty)$
Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому передаются дополнительные посылки "$x -$ число", "$x \to a\backslash b$". Уровень срабатывания равен 3. В некоторых случаях (например, при усмотрении точки разрыва второго рода) нет необходимости делать различие между несуществованием предела и бесконечным пределом. Тогда обращение к нормализатору "нормпредел" сопровождается комментарием "непрерывно". Если такой комментарий есть, то в приведенных выше приемах отпадает необходимость анализировать знак произведения $cg(x)$:
$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b} g(x) = 0$ & $c = \lim_{x\to a\backslash b} f(x)$ & $(c -$ число $\vee\ c = \infty\ \vee\ c = -\infty) \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x)) =$ неопред)
Уровень срабатывания этого приема тоже равен 3. Если явно усматривается, что знаменатель имеет нулевой предел и меняет знак, а числитель имеет ненулевой предел, то выдается результат "неопред":
$\forall_{acdfgx}(c -$ число & $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ & $a = \lim_{x\to c} g(x)$ & $(a -$ число & $\neg(a = 0)\ \vee\ a = \infty\ \vee\ a = -\infty)$ & переменазнака$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), c) \to$
$\lim_{x\to c}(g(x)/f(x)) =$ неопред)

Проверочный оператор "переменазнака", усматривающий перемену знака функции в заданной точке, будет описан ниже в разделе, посвященном исследованию свойств функций вещественной переменной. Уровень срабатывания равен 4.

Наконец, имеется прием, который вместо знака произведения $cg(x)$ анализирует знак произведения производной функции g в точке a на ненулевой предел c:

$\forall_{abcfg}(df(a)/da = b\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ \lim_{x\to a-0} g(x) = 0\ \&\ c = \lim_{x\to a-0} f(x)\ \&\ (c - \text{число}\ \vee\ c = \infty\ \vee\ c = -\infty)\ \&\ \neg(c = 0) \to \lim_{x\to a-0}(f(x)/g(x)) = (-\infty \text{ при } 0 < bc, \text{иначе } \infty))$

Для вычисления производной используется вспомогательная задача на преобразование. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Положительный результат здесь будет получен только при условии, что производную удалось вычислить, т.е. при условии, что функция g в точке a дифференцируема. Для ускорения проверок сразу проверяется, что выражения b, c отличны от константы 0. Уровень срабатывания приема равен 5.

(f) Несуществование предела, если один из пределов числителя либо знаменателя не существует, а другой - существует, конечен и отличен от нуля.

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to b\backslash c} f(x) = \text{неопред}\ \&\ a = \lim_{x\to b\backslash c} g(x)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \neg(a = 0) \to \lim_{x\to b\backslash c}(f(x)/g(x)) = \text{неопред})$

Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 4.

(g) Попытка преобразования имеющей нулевой предел разности в числителе либо знаменателе. Такая попытка предпринимается для разности квадратных корней, а также разности тангенсов:

$\forall_{abcdefghuv}(\lim_{x\to c\backslash a} v(x) = 0\ \&\ \lim_{x\to c\backslash a}(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) = 0\ \&\ d = \lim_{x\to c\backslash a}(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \neg(d = 0)\ \&\ b = \lim_{x\to c\backslash a} u(x)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e = \lim_{x\to c\backslash a}((f(x) - g(x))^{u(x)} h(x)/v(x))\ \&\ e - \text{число} \to \lim_{x\to c\backslash a}((\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})^{u(x)} h(x)/v(x)) = (1/d)^b e)$

$\forall_{abcfghuv}(b = \lim_{x\to c\backslash a} v(x)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \lim_{x\to c\backslash a} f(x) = \lim_{x\to c\backslash a} g(x)\ \&\ \lim_{x\to c\backslash a} u(x) = 0 \to \lim_{x\to c\backslash a}((\operatorname{tg} f(x) - \operatorname{tg} g(x))^{v(x)} h(x)/u(x)) = \lim_{x\to c\backslash a}(((\sin(f(x) - g(x)))^{v(x)} h(x))/((\cos f(x) \cos g(x))^{v(x)} u(x))))$

Второй прием применяется, если выражение под пределом содержит синус либо косинус. Указатель "дробь" в обоих случаях разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 4.

(h) Предел отношения степенной и показательной либо степенной и логарифмической функций.

Для рассмотрения отношения степенной и показательной функций создана следующая группа приемов:

$\forall_{abcdefghi}(\lim_{x\to e\backslash h} f(x) = \infty\ \&\ i = \lim_{x\to e\backslash h} g(x)\ \&\ i - \text{число}\ \&\ 0 < i\ \&\ 0 < d(i-1) \to \lim_{x\to e\backslash h}(a(f(x))^c/(b(g(x))^{df(x)})) = 0)$

$\forall_{abcdefghi}(\lim_{x\to e\backslash h} f(x) = \infty\ \&\ i = \lim_{x\to e\backslash h} g(x)\ \&\ i - \text{число}\ \&\ 0 < i\ \&\ d(i-1) < 0\ \&\ 0 < ab \to \lim_{x\to e\backslash h}(a(f(x))^c/(b(g(x))^{df(x)})) = \infty)$

$\forall_{abcdefghi}(\lim_{x\to e\backslash h} f(x) = \infty\ \&\ i = \lim_{x\to e\backslash h} g(x)\ \&\ i - \text{число}\ \&\ 0 < i\ \&\ 0 < d(i-1)\ \&\ 0 < ab \to \lim_{x\to e\backslash h}((b(g(x))^{df(x)})/(a(f(x))^c)) = \infty)$

$\forall_{abcdefgh}(\lim_{x \to e \setminus h} f(x) = \infty \ \& \ \lim_{x \to e \setminus h} g(x) = \infty \ \& \ 0 < d \to \lim_{x \to e \setminus h}(a(f(x))^c/(b(g(x))^{df(x)})) = 0)$

$\forall_{abcdefghi}(\lim_{x \to e \setminus h} f(x) = \infty \ \& \ i = \lim_{x \to e \setminus h} g(x) \ \& \ i -$ число $\& \ 0 < i \ \& \ d(i-1) \leq 0 \to \lim_{x \to e \setminus h}((b(g(x))^{df(x)})/(a(f(x))^c)) = 0)$

Уровень срабатывания приемов равен 1. Несуществование предела отношения степенной и показательной функций усматривается для отрицательного основания степени, по модулю большего единицы:

$\forall_{abcfgpqr}(\lim_{x \to a \setminus b} f(x) = c \ \& \ c -$ число $\& \ c + 1 < 0 \ \& \ \lim_{x \to a \setminus b} g(x) = \infty \ \& \ \neg(p = 0) \to \lim_{x \to a \setminus b}((p(f(x))^{g(x)})/(q(g(x))^r)) =$ неопред)

Уровень срабатывания равен 3. Для отношения степенной и логарифмической функций созданы следующие приемы:

$\forall_{abcdefgh}(0 < e \ \& \ \lim_{x \to h \setminus a} g(x) = \infty \ \& \ c = \lim_{x \to h \setminus a} f(x) \ \& \ (c = \infty \ \vee \ c = -\infty \ \vee \ c -$ число $\& \ \neg(c = 0)) \to \lim_{x \to h \setminus a}((b(\ln g(x))^d)/(f(x)(g(x))^e)) = 0)$

$\forall_{abcdefgh}(0 < e \ \& \ \lim_{x \to h \setminus a} g(x) = \infty \ \& \ c = \lim_{x \to h \setminus a} f(x) \ \& \ (c = \infty \ \vee \ c = -\infty \ \vee \ c -$ число $\& \ \neg(c = 0)) \to \lim_{x \to h \setminus a}((b(\ln \ln g(x))^d)/(f(x)(g(x))^e)) = 0)$

Уровень срабатывания равен 1.

(i) Отбрасывание младших членов многочлена.

$\forall_{abcdefghuvw}(e = \lim_{x \to c \setminus d} u(x) \ \& \ (e = \infty \ \vee \ e = -\infty) \ \& \ v = \lambda_x(ax^b + w(x), x -$ число$) \ \& \ \neg(a = 0) \to \lim_{x \to c \setminus d}(((v(u(x)))^h f(x))/g(x)) = \lim_{x \to c \setminus d}(((a(u(x))^b)^h f(x))/g(x)))$

Указатель "смногочлен(x21 x23)"определяет идентификацию $v(u(x))$, путем усмотрения в анализируемой сумме значения некоторого многочлена v от выражения $u(x)$, группируемого из всех содержащих переменную x множителей слагаемых. Коэффициентами этого многочлена являются какие-то, возможно, неконстантные выражения, не зависящие от x. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Он выделяет старший член ax^b многочлена $v(x)$ и находит сумму $w(x)$ его младших членов. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 2.

(j) Разбор случаев по равенству нулю предела знаменателя.

$\forall_{abcdfx}(a = \lim_{x \to c \setminus b} f(x) \ \& \ a -$ число $\& \ d = \lim_{x \to c \setminus b} g(x) \ \& \ d -$ число $\to \lim_{x \to c \setminus b}(f(x)/g(x)) =$ разборслучаев$(d = 0 \ \vee \ \neg(d = 0)))$

Предел d знаменателя должен быть неконстантным, причем проверочный оператор не должен усматривать, что d имеет ненулевое значение. Уровень срабатывания равен 3.

(k) Разбор случаев по равенству нулю либо знаку предела числителя, если предел знаменателя равен нулю.

$\forall_{abcdfx}(\lim_{x \to c \setminus b} g(x) = 0 \ \& \ a = \lim_{x \to c \setminus b} f(x) \ \& \ a -$число $\to \lim_{x \to c \setminus b}(f(x)/g(x)) =$ разборслучаев$(a = 0 \ \vee \ \neg(a = 0)))$

Предел a числителя должен быть неконстантным, причем проверочный оператор не должен усматривать, что a имеет ненулевое значение. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcdfx}(\lim_{x \to c \setminus b} g(x) = 0 \ \& \ a = \lim_{x \to c \setminus b} f(x) \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ 0 < g(x) \to \lim_{x \to c \setminus b}(f(x)/g(x)) =$ разборслучаев$(0 < a \ \vee \ a < 0))$

Предел числителя a неконстантный, причем не усматривается ни его положительность, ни отрицательность. Уровень срабатывания равен 5.

(l) Бесконечный предел числителя и конечный ненулевой - знаменателя.

$\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to b\backslash d} f(x)$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty)$ & $c = \lim_{x\to b\backslash d} g(x)$ & $c -$ число & $(a = \infty$ & $0 < c \ \vee \ a = -\infty$ & $c < 0) \to \lim_{x\to b\backslash d}(f(x)/g(x)) = \infty)$

$\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to b\backslash d} f(x)$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty)$ & $c = \lim_{x\to b\backslash d} g(x)$ & $c -$ число & $(a = -\infty$ & $0 < c \vee a = \infty$ & $c < 0) \to \lim_{x\to b\backslash d}(f(x)/g(x)) = -\infty)$

Уровень срабатывания равен 2.

(m) Бесконечный предел знаменателя.

$\forall_{abcdfgx}(b = \lim_{x\to d\backslash a} g(x)$ & $(b = \infty \ \vee \ b = -\infty)$ & $c = \lim_{x\to d\backslash a} f(x)$ & $c -$ число $\to \lim_{x\to d\backslash a}(f(x)/g(x)) = 0)$

$\forall_{abcfg}(a = \lim_{x\to b\backslash c} f(x)$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty)$ & ограничено$(g(x)) \to \lim_{x\to b\backslash c}(g(x)/f(x)) = 0)$

Во втором приеме третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используются дополнительные посылки "$x -$ число", "$x \to b\backslash c$". Хотя из существования конечного предела вытекает ограниченность, первый прием не является избыточным, так как проверочный оператор "ограничено" не предпринимает попытки вычислить предел. Уровень срсбатывания приемов равен 3.

$\forall_{bcfg}(\lim_{x\to b\backslash c} |f(x)| = \infty$ & ограничено$(g(x)) \to \lim_{x\to b\backslash c}(g(x)/f(x)) = 0)$

Прием применяется, если $f(x)$ содержит степенное выражение вида $(-A)^B$. Уровень срабатывания равен 3.

(n) Вынесение множителей числителя либо знаменателя, имеющих конечный ненулевой предел.

$\forall_{abcdfghx}(c = \lim_{x\to a\backslash b} g(x)$ & $c-$число & $\neg(c = 0)$ & $d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/h(x))$ & $d -$ число $\to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/(g(x)h(x))) = d/c)$

$\forall_{abcdfghx}(c = \lim_{x\to a\backslash b} g(x)$ & $c -$ число & $c < 0$ & $d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/h(x))$ & $(d = \infty \ \vee \ d = -\infty) \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/(g(x)h(x))) = -d)$

$\forall_{abcdfghx}(c = \lim_{x\to a\backslash b} g(x)$ & $c -$ число & $0 < c$ & $d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/h(x))$ & $(d = \infty \ \vee \ d = -\infty) \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/(g(x)h(x))) = d)$

$\forall_{abcdfghx}(c = \lim_{x\to a\backslash b} g(x)$ & $c-$число & $\neg(c = 0)$ & $d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/h(x))$ & $d -$ число $\to \lim_{x\to a\backslash b}(g(x)f(x)/h(x)) = cd)$

$\forall_{abcdfghx}(c = \lim_{x\to a\backslash b} g(x)$ & $c -$ число & $0 < c$ & $d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/h(x))$ & $(d = \infty \ \vee \ d = -\infty) \to \lim_{x\to a\backslash b}(g(x)f(x)/h(x)) = d)$

$\forall_{abcdfghx}(c = \lim_{x\to a\backslash b} g(x)$ & $c -$ число & $c < 0$ & $d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/h(x))$ & $(d = \infty \ \vee \ d = -\infty) \to \lim_{x\to a\backslash b}(g(x)f(x)/h(x)) = -d)$

$\forall_{abcdfghx}(c = \lim_{x\to a\backslash b} g(x)$ & $c -$ число & $\neg(c = 0)$ & $\lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/h(x)) =$ неопред $\to \lim_{x\to a\backslash b}(g(x)f(x)/h(x)) =$ неопред)

Уровень срабатывания приемов равен 4. В случае константных множителей применяются другие приемы, срабатывающие на уровне 1:

$\forall_{abcdfg}(d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x))$ & $d -$ число $\to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/cg(x)) = d/c)$

$\forall_{abcdfg}(d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x))$ & $d =$ неопред $\to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/cg(x)) =$ неопред)

$\forall_{abcdfg}(d = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x))$ & $d -$ число $\to \lim_{x\to a\backslash b}(cf(x)/g(x)) = cd)$

(o) Попытка вычисления предела логарифма дроби, если числитель и знаменатель имеют одновременно нулевой либо бесконечный предел.

$\forall_{abcfgpq}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = p \ \& \ \lim_{x\to c\backslash a} g(x) = q \ \& \ b = \lim_{x\to c\backslash a}(\ln f(x) - \ln g(x)) \ \& \ (p = 0 \ \& \ q = 0 \ \vee \ p = \infty \ \& \ q = \infty) \ \& \ 0 < f(x) \ \& \ 0 < g(x) \to \lim_{x\to c\backslash a}(f(x)/g(x)) = \exp b)$

Числитель либо знаменатель дроби имеет своим обобщенным сомножителем степень с показателем, зависящим от x, либо факториал выражения, зависящего от x. Первые два антецедента вычисляют пределы числителя и знаменателя, четвертый - убеждается. что они оба нулевые либо бесконечные, третий - предпринимает попытку вычислить предел логарифма дроби. Проверяется, что заголовок результата b отличен от символа "предел" и не содержит символа "отказ", т.е. что предел найти удалось. Созданы две версии приема. Обе снабжены средним ограничителем трудоемкости. Первая версия срабатывает на уровне 4, вторая - на уровне 6 и имеет ослабленный ограничитель. Дополнительно создан прием, который вместо предела логарифма дроби находит его асимптотическую оценку:

$\forall_{abcdfghuv}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = c \ \& \ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = d \ \& \ h = \lambda_x(\ln f(x) - \ln g(x), x -$ число$) \ \& \ (c = 0 \ \& \ d = 0 \vee c = \infty \ \& \ d = \infty) \to \lim_{x\to a\backslash b}((u(x)f(x))/(v(x)g(x))) = \lim_{x\to a\backslash b}((u(x)\exp(h(x)))/v(x)))$

Указатели "перечень" определяют идентификацию $f(x), g(x)$ с произведениями всех положительных множителей числителя и знаменателя. Как и выше, проверяется наличие среди обобщенных множителей $f(x), g(x)$ степени с показателем, зависящим от x, либо факториала выражения, содержащего x. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Разность логарифмов в его правой части обрабатывается нормализатором "асимптоценка". Проверяется, что результат $h(x)$ не содержит символа "отказ". Уровень срабатывания равен 4.

(p) Выделение слагаемого числителя, кратного знаменателю.

$\forall_{abcdefg}(e = \lim_{x\to c\backslash d}(g(x)/f(x)) \ \& \ (e -$ число $\vee \ e = \infty \ \vee \ e = -\infty) \to \lim_{x\to c\backslash d}((af(x) + g(x))/(bf(x))) = a/b + e)$

Первый антецедент предпринимает попытку вычислить предел остаточной дроби. Уровень срабатывания равен 2.

(q) Отбрасывание ограниченных слагаемых числителя при неограниченном знаменателе.

$\forall_{abcfg}($ограничено$(f(x)) \ \& \ \lim_{x\to a\backslash b}|h(x)| = \infty \to \lim_{x\to a\backslash b}((f(x) + g(x))/h(x)) = \lim_{x\to a\backslash b}(g(x)/h(x)))$

Выражение $f(x)$ идентифицируется с отдельным слагаемым. Проверяется, что либо это слагаемое не содержит x, либо в нем имеется зависящая от x степень вида $(-A)^B$, либо в нем имеется синус либо косинус выражения, зависящего от x. Уровень срабатывания равен 8.

(r) Представление модуля дроби в виде дроби.

$\forall_{abfgu}(\lim_{x\to a\backslash b}((|f(x)/g(x)|h(x))/u(x)) = \lim_{x\to a\backslash b}((|f(x)|h(x))/(|g(x)|u(x))))$

Уровень срабатывания равен 1.

(s) Логарифм факториала в числителе либо знаменателе дроби.

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = \infty \to \lim_{x\to a\backslash b}((\ln(f(x)!)g(x))/h(x)) = \lim_{x\to a\backslash b}((f(x)\ln(f(x))g(x))/h(x)))$

Если выражение $g(x)$ не содержит x, то проверяется, что усматривается его отличие от нуля. Это делается для ускоренного перехода к разбору случаев по значениям параметров. Указатель "дробь" разрешает переставлять местами числитель и знаменатель. Уровень срабатывания равен 1.

(t) Поглощение слагаемого числителя либо знаменателя остальными слагаемыми.

$\forall_{abcfghp}(\text{ограничено}(g(x))\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b}|f(x)| = \infty \to$
$\lim_{x\to a\backslash b}((((f(x)+g(x))^c h(x))/p(x)) = \lim_{x\to a\backslash b}(((f(x))^c h(x))/p(x)))$

Используется указатель "дробь". Уровень срабатывания равен 8.

(u) Сокращение на степень выражения, имеющего бесконечный предел.

$\forall_{abcdefghmn}(\lim_{x\to c\backslash d} f(x) = e\ \&\ (e = \infty\ \vee\ e = -\infty)\ \&\ 0 \leq m-n\ \&\ 0 < n \to \lim_{x\to c\backslash d}((a(f(x))^m + g(x))/(b(f(x))^n + h(x))) = \lim_{x\to c\backslash d}((a(f(x))^{m-n} + g(x)(f(x))^{-n})/(b + h(x)(f(x))^{-n})))$

Выделенные слагаемые содержат наибольшие степени выражения $f(x)$. Хотя бы один из коэффициентов a, b неконстантный - для отбрасывания рассматриваемого отдельно случая частного многочленов. К произведениям с $(f(x))^{-n}$ в числителе и знаменателе результата применяется нормализатор раскрывания скобок. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

(v) Выделение константного слагаемого.

$\forall_{abfgpq}(\neg(b=0)\ \&\ p = \lim_{n\to\infty}((qf(n)+g(n))/bn) \to \lim_{n\to\infty}((q(an+f(n))+g(n))/bn) = (aq/b + p \text{ при } p - \text{число},\ \text{иначе } p))$

Либо усматривается, что p - число, либо p - символ плюс-минус бесконечности, либо p - символ "неопред". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abfpqr}(\neg(b=0)\ \&\ r = \lim_{n\to\infty}(f(n)/bn) \to \lim_{n\to\infty}((a[pn/q] + f(n))/bn) = (ap/bq + r \text{ при } r - \text{число},\ \text{иначе } r))$

Аналогично предыдущему.

8. Предел модуля.

$\forall_{abcf}(a = \lim_{x\to b\backslash c} f(x)\ \&\ a - \text{число} \to \lim_{x\to b\backslash c}|f(x)| = |a|)$

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ (b = -\infty\ \vee\ b = \infty) \to \lim_{x\to c\backslash a}|f(x)| = \infty)$

Уровень срабатывания равен 2. Если под модулем находится сумма, причем предел модуля одного слагаемого бесконечен, а предел остаточной суммы - конечен, то применяется следующий прием:

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b}|f(x)| = \infty\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = c\ \&\ c - \text{число} \to \lim_{x\to a\backslash b}|f(x) + g(x)| = \infty)$

Уровень срабатывания равен 4.

9. Предел логарифма.

$\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to c\backslash d} f(x)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b = \lim_{x\to c\backslash d} g(x)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(1-a=0)\ \&\ 0 < b \to \lim_{x\to c\backslash d}\log_{f(x)} g(x) = \log_a b)$

$\forall_{abcfg}(a = \lim_{x\to b\backslash c} f(x)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \lim_{x\to b\backslash c} g(x) = \infty\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(1-a = 0) \to \lim_{x\to b\backslash c}\log_{f(x)} g(x) = \infty)$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to c\backslash a} g(x) = 0\ \&\ b = \lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < b-1$
$\to \lim_{x\to c\backslash a}\log_{f(x)} g(x) = -\infty)$

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to c\backslash a} g(x)=0\ \&\ b=\lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ b-$ число $\&\ b-1<0$ $\to \lim_{x\to c\backslash a}\log_{f(x)} g(x)=\infty)$

$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to c\backslash a} g(x)=$ неопред $\&\ b=\lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ b-$ число $\&\ 0<b\ \&$ $\neg(b-1=0)\to \lim_{x\to c\backslash a}\log_{f(x)} g(x)=$ неопред$)$

Уровень срабатывания равен 3. Если из контекста не удается усмотреть условия на о.д.з. (положительность и отличие от единицы) для константного основания логарифма, то применяется следующий прием:

$\forall_{abcdg}(b=\lim_{x\to c\backslash d} g(x)\ \&\ b-$ число $\&\ 0<b\to \lim_{x\to c\backslash d}\log_a g(x)=\log_a b)$

В о.д.з. логарифма это преобразование корректно. Уровень срабатывания равен 2.

10. Предел факториала.

    $\forall_{abf}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x)=\infty\to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)!)=\infty)$

    Уровень срабатывания равен 1.

11. Предел сигнума.

    (a) Ненулевой предел выражения под сигнумом.
    $\forall_{abcf}(b=\lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ (b=\infty\ \vee\ 0<b)\to \lim_{x\to c\backslash a}\mathrm{sg} f(x)=1)$
    $\forall_{abcf}(b=\lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ (b=-\infty\ \vee\ b<0)\to \lim_{x\to c\backslash a}\mathrm{sg} f(x)=-1)$
    Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Нулевой предел выражения, сохраняющего знак.
    $\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x)=0\ \&\ f(x)<0\to \lim_{x\to c\backslash a}\mathrm{sg} f(x)=-1)$
    $\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x)=0\ \&\ 0<f(x)\to \lim_{x\to c\backslash a}\mathrm{sg} f(x)=1)$
    Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используются дополнительные посылки "$x-$число", "$x\ toc\backslash a$", "$\neg(x-c=0)$". Уровень срабатывания равен 2.

    (c) Периодическая функция под сигнумом.
    $\forall_{abf}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x)=-\infty\ \&$ непрерывно$(\lambda_x(f(x),x-$число$),\mathrm{set}_x(x-$число $\&\ (x\to a\backslash b)))\to \lim_{x\to a\backslash b}\mathrm{sg}\sin f(x)=$ неопред$)$
    $\forall_{abf}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x)=\infty\ \&$ непрерывно$(\lambda_x(f(x),x-$число$),\mathrm{set}_x(x-$число $\&\ (x\to a\backslash b)))\to \lim_{x\to a\backslash b}\mathrm{sg}\sin f(x)=$ неопред$)$
    Вместо синуса может рассматриваться косинус. Уровень срабатывания равен 3.

    (d) Нулевой односторонний предел выражения под сигнумом и известный знак производной.
    $\forall_{abcf}(\lim_{x\to a+0} f(x)=0\ \&\ c=df(a)/da\ \&\ c-$ число $\&\ \neg(c=0)\to$ $\lim_{x\to a+0}\mathrm{sg} f(x)=\mathrm{sg} c)$
    $\forall_{abcf}(\lim_{x\to a-0} f(x)=0\ \&\ c=df(a)/da\ \&\ c-$ число $\&\ \neg(c=0)\to$ $\lim_{x\to a-0}\mathrm{sg} f(x)=-\mathrm{sg} c)$
    Уровень срабатывавния равен 3.

    (e) Разбор случаев по отличию от нуля предела выражения под сигнумом.
    $\forall_{abcf}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x)=c\to \lim_{x\to a\backslash b}\mathrm{sg} f(x)=$ разборслучаев$(c=0\ \vee\ \neg(c=0)))$

Проверяется, что предел c удалось вычислить и что он неконстантный. Кроме того, проверяется неочевидность отличия его от нуля. Уровень срабатывания равен 5.

12. Использование равенства из посылок для завершающей стандартизации.

    После того, как нормализатор вычислил предел a, проверяется наличие в посылках равенства $a = b$, у которого a находится в левой части, и выполняется замена результата a на b:

    $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$.

    В основном, рассматриваемые приемом равенства возникают в посылках при разборе случаев. Уровень срабатывания равен 1.

13. Пределы тригонометрических функций.

    (a) Синус.
    $\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b – число $\to \lim_{x \to c \backslash a} \sin f(x) = \sin b)$
    Уровень срабатывания равен 2. Для усмотрения несуществования предела синуса служат следующие приемы:
    $\forall_{abcfnx}(a = \lim_{x \to c \backslash b} f(x)$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty)$ & $\neg(n = 0) \to$
    $\lim_{x \to c \backslash b}((\sin f(x))^n) =$ неопред)
    $\forall_{abcfx}(a = \lim_{x \to c \backslash b} f(x)$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty) \to$
    $\lim_{x \to c \backslash b} |\sin f(x)| =$ неопред)
    В обоих случаях должен отсутствовать комментарий "целое", а $f(x)$ - построено только при помощи элементарных функций, т.е. аргумент x при стремлении к c начиная с некоторого момента будет принимать все промежуточные вещественные значения. Уровни срабатывания равны 4. Если имеется комментарий "целое", то аргумент x при стремлении к бесконечности может принимать только целочисленные значения. Здесь используются другие два приема:
    $\forall_{amn}(\lim_{x \to \infty} \sin(m\pi x/n + a) =$ неопред)
    $\forall_{amn}(\lim_{x \to \infty} |\sin(m\pi x/n + a)| =$ неопред)
    Переменные m, n идентифицируются, соответственно, с целочисленной и натуральной константами. Предполагается, что они взаимно простые - иначе ранее сработали бы приемы, выполняющие сокращение. В первом приеме либо n отлично от единицы, либо m нечетное и усматривается отличие синуса a от нуля. Во втором приеме n отлично от единицы. Уровни срабатывания равны 4.

    (b) Косинус. Приемы аналогичны приемам предыдущего пункта:
    $\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b – число $\to \lim_{x \to c \backslash a} \cos f(x) = \cos b)$
    $\forall_{abcfnx}(a = \lim_{x \to c \backslash b} f(x)$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty)$ & $\neg(n = 0) \to$
    $\lim_{x \to c \backslash b}((\cos f(x))^n) =$ неопред)
    $\forall_{abcfx}(a = \lim_{x \to c \backslash b} f(x)$ & $(a = \infty \ \vee \ a = -\infty) \to$
    $\lim_{x \to c \backslash b} |\cos f(x)| =$ неопред)
    $\forall_{amn}(\lim_{x \to \infty} \cos(m\pi x/n + a) =$ неопред)
    $\forall_{amn}(\lim_{x \to \infty} |\cos(m\pi x/n + a)| =$ неопред)

(c) Тангенс.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b – число & $\neg(\cos b = 0) \to \lim_{x \to c \backslash a} \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} b)$

$\forall_{abcdef}(c = \lim_{x \to a \backslash d} f(x)$ & c – число & $\cos c = 0$ & $0 < f(x) - c \to \lim_{x \to a \backslash d} \operatorname{tg} f(x) = -\infty)$

$\forall_{abcdef}(c = \lim_{x \to a \backslash d} f(x)$ & c – число & $\cos c = 0$ & $f(x) - c < 0 \to \lim_{x \to a \backslash d} \operatorname{tg} f(x) = \infty)$

Во втором и третьем приемах последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому передаются дополнительные посылки "x – число", "$x \to a \backslash d$". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcfx}(a = \lim_{x \to c \backslash b} f(x)$ & $(a = \infty \vee a = -\infty) \to \lim_{x \to c \backslash b} \operatorname{tg} f(x) =$ неопред)

Отсутствует комментарий "целое" и $f(x)$ построено только из элементарных функций. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Котангенс. Приемы аналогичны приемам предыдущего пункта:

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b–число & $\neg(\sin b = 0) \to \lim_{x \to c \backslash a} \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} b)$

$\forall_{abcdef}(c = \lim_{x \to a \backslash d} f(x)$ & c – число & $\sin c = 0$ & $f(x) - c < 0 \to \lim_{x \to a \backslash d} \operatorname{ctg} f(x) = -\infty)$

$\forall_{abcdef}(c = \lim_{x \to a \backslash d} f(x)$ & c – число & $\sin c = 0$ & $0 < f(x) - c \to \lim_{x \to a \backslash d} \operatorname{ctg} f(x) = \infty)$

$\forall_{abcfx}(a = \lim_{x \to c \backslash b} f(x)$ & $(a = \infty \vee a = -\infty) \to \lim_{x \to c \backslash b} \operatorname{ctg} f(x) =$ неопред)

(e) Арктангенс.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b – число $\to \lim_{x \to c \backslash a} \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} b)$

$\forall_{abf}(\lim_{x \to a \backslash b} f(x) = \infty \to \lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{arctg} f(x) = \pi/2)$

$\forall_{abf}(\lim_{x \to a \backslash b} f(x) = -\infty \to \lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{arctg} f(x) = -\pi/2)$

Уровень срабатывания равен 2.

(f) Арксинус.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b–число & $0 \leq 1 - b$ & $0 \leq 1 + b \to \lim_{x \to c \backslash a} \arcsin f(x) = \arcsin b)$

Уровень срабатывания равен 2.

(g) Арккосинус.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b–число & $0 \leq 1 - b$ & $0 \leq 1 + b \to \lim_{x \to c \backslash a} \arccos f(x) = \arccos b)$

Уровень срабатывания равен 2.

(h) Секанс.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b–число & $\neg(\cos b = 0) \to \lim_{x \to c \backslash a} \sec f(x) = \sec b)$

Уровень срабатывания равен 2.

(i) Косеканс.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x \to c \backslash a} f(x)$ & b – число & $\neg(\sin b = 0) \to \lim_{x \to c \backslash a} \operatorname{cosec} f(x) = \operatorname{cosec} b)$

(j) Использование асимптотической оценки для тригонометрического множителя числителя либо знаменателя при стремлении аргумента к нулю.

$\forall_{abfghpu}(\lim_{x \to a \backslash b} g(x) = 0$ & $\lim_{x \to a \backslash b} h(x) = p$ & p – число $\to$
$\lim_{x \to a \backslash b}((f(x)(\sin g(x))^{h(x)})/u(x)) = \lim_{x \to a \backslash b}((f(x)(g(x))^{h(x)})/u(x)))$

$\forall_{abfghpu}(\lim_{x\to a\backslash b} g(x) = 0 \ \& \ \lim_{x\to a\backslash b} h(x) = p \ \& \ p -$ число $\to$ $\lim_{x\to a\backslash b}((f(x)(\operatorname{tg} g(x))^{h(x)})/u(x)) = \lim_{x\to a\backslash b}((f(x)(g(x))^{h(x)})/u(x)))$

Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 1.

14. Пределы гиперболических функций.

(a) Гиперболический синус.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x\to c\backslash a} f(x) \ \& \ b -$ число $\to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{sh} f(x) = \operatorname{sh} b)$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = \infty \to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{sh} f(x) = \infty)$

$\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = -\infty \to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{sh} f(x) = -\infty)$

Уровень срабатывания равен 3.

(b) Гиперболический косинус. Приемы аналогичны приемам предыдущего пункта:

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x\to c\backslash a} f(x) \ \& \ b -$ число $\to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{ch} f(x) = \operatorname{ch} b)$

$\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = \infty \to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{ch} f(x) = \infty)$

$\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = -\infty \to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{ch} f(x) = \infty)$

(c) Гиперболический тангенс.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x\to c\backslash a} f(x) \ \& \ b -$ число $\to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{th} f(x) = \operatorname{th} b)$

$\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = \infty \to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{th} f(x) = 1)$

$\forall_{acf}(\lim_{x\to c\backslash a} f(x) = -\infty \to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{th} f(x) = -1)$

Уровень срабатывания равен 2.

(d) Гиперболический котангенс.

$\forall_{abcf}(b = \lim_{x\to c\backslash a} f(x) \ \& \ b -$ число $\to \lim_{x\to c\backslash a} \operatorname{cth} f(x) = \operatorname{cth} b)$

Уровень срабатывания равен 2.

15. Упрощение выражения под пределом.

В особых случаях предпринимается попытка упростить выражение под пределом с помощью вспомогательной задачи:

$\forall_{abfg}(f = \lambda_x(g(x), x -$ число$) \to \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = \lim_{x\to a\backslash b} f(x))$

Должно быть выполнено хотя бы одно из следующих требований:

(a) Выражение под пределом содержит какой-либо из символов "секанс", "косеканс", "суммавсех".

(b) Выражение содержит сумму с дробным слагаемым.

(c) Выражение содержит логарифм произведения, дроби либо степени.

(d) Выражение содержит сумму, некоторое слагаемое которой имеет своим сомножителем сумму, либо квадрат суммы, либо куб суммы.

(e) Выражение содержит зависящую от x степень, показатель которой начинается с символа "минус".

(f) Выражение содержит дробное выражение, кторое можно сократить.

Если имеется комментарий "частнпроизв" (счетчик числа внешних применений правила Лопиталя), то он должен быть единственным, выражение под пределом не должно иметь заголовка "дробь", а длина его не должна превосходить 40.

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение $g(x)$ в его правой части обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, имеющей цели "упростить", "одз", "сложитьдроби". Ей передаются дополнительные посылки "x – число", "$x \to a\backslash b$". Уровень срабатывания равен 8.

16. Использование асимптотических оценок.

    Для нахождения асимптотических оценок используется нормализатор "асимптоценка", который будет описан ниже. Этот нормализатор преобразует исходное выражение в его асимптотическую оценку, используя дополнительную входную информацию, задаваемую в комментариях обращения. В частности, комментарий (переменная x) определяет переменную, по которой берется асимптотика. Количество членов в локальных формулах Тейлора, используемых нормализатором (не считая остаточного члена), регулируется комментарием (уровень n). Обычно это количество равно $n+1$. Предполагается наличие посылки "$x \to a\backslash b$".

    (a) Асимптотическая оценка суммы, непосредственно расположенной под знаком предела.
    $\forall_{abfg}(f = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = \lim_{x\to a\backslash b} f(x))$
    $\forall_{abfg}(f = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \lim_{x\to a\backslash b} |g(x)| = \lim_{x\to a\backslash b} |f(x)|)$
    Выражение $g(x)$ имеет заголовок "плюс" и не содержит условных подвыражений. Антецедент выделен указателем "идентификатор", подвыражение $g(x)$ в его правой части обрабатывается нормализатором "асимптоценка", которому передаются комментарии (переменная x), (уровень 1) и посылки "x – число", "$x \to a\backslash b$". Результат $f(x)$ не должен содержать символа "отказ" и либо не имеет заголовка "плюс", либо не зависит от x.

    Перед попыткой найти асимптотическую оценку проверяется отсутствие комментария "частнпроизв", указывающего на вычисление предела при применении правила Лопиталя. Кроме того, для блокировки обращений к нормализатору "асимптоценка" используется комментарий "асимптоценка". Наконец, проверяется, что если предел какого-либо слагаемого не определен, то существует слагаемое с бесконечным пределом модуля. Уровень срабатывания равен 3.

    (b) Асимптотическая оценка суммы - сомножителя произведения, непосредственно расположенного под знаком предела.
    $\forall_{abcdfghu}(b = \lim_{x\to d\backslash a} u(x)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c = \lim_{x\to d\backslash a} h(x)\ \&\ (c = \infty\ \vee\ c = -\infty)\ \&\ f = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \lim_{x\to d\backslash a}(g(x)(h(x))^{u(x)}) = \lim_{x\to d\backslash a}(g(x)(f(x))^{u(x)}))$
    Выражение $h(x)$ имеет заголовок "плюс". Одновременное обращение $g(x)$, $u(x)$ в единичные константы запрещается, так как этот случай обрабатывается предыдущим приемом. Первые два антецедента проверяют, что показатель степени имеет конечный предел, третий и четвертый - что $h(x)$ имеет бесконечный предел. Последний антецедент вычисляет асимптотическую оценку. Уровень обращения равен 3.

(c) Асимптотическая оценка суммы - сомножителя числителя либо знаменателя дроби, непосредственно расположенной под знаком предела.

$\forall_{abcdefghuv}(b = \lim_{x\to d\backslash a} u(x)\ \&\ b -$ число $\&\ c = \lim_{x\to d\backslash a} g(x)\ \&\ e = \lim_{x\to d\backslash a} h(x)\ \&\ (c = \infty\ \vee\ c = -\infty\ \vee\ c = 0\ \&\ (e = \infty\ \vee\ e = -\infty)\ \&\ 0 < b)\ \&\ f = \lambda_x(g(x), x -$ число$) \to \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)(g(x))^{u(x)})/v(x)) = \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)(f(x))^{u(x)})/v(x)))$

$\forall_{abcdefghuv}(b = \lim_{x\to d\backslash a} u(x)\ \&\ b -$ число $\&\ c = \lim_{x\to d\backslash a} |g(x)|\ \&\ e = \lim_{x\to d\backslash a} h(x)\ \&\ (c = \infty\ \vee\ c = 0\ \&\ (e = \infty\ \vee\ e = -\infty)\ \&\ 0 < b)\ \&\ f = \lambda_x(g(x), x -$ число$) \to \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)|g(x)|^{u(x)})/v(x)) = \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)|f(x)|^{u(x)})/v(x)))$

Выражение $g(x)$ имеет заголовок "плюс". Дробь невырожденная. Первый и второй антецеденты проверяют, что показатель степени имеет конечный предел. Третий, четвертый и пятый устанавливают, что либо предел выражения $g(x)$ бесконечный, либо он равен нулю, предел остаточного произведения бесконечный, а предел показателя степени положительный. Последний антецедент обращается к нормализатору "асимптоценка". Уровень срабатывания равен 3.

(d) Асимптотическая оценка произведения, непосредственно расположенного под знаком предела.

$\forall_{abcfghx}(b = \lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ (b = \infty\ \vee\ b = -\infty)\ \&\ h = \lambda_x(f(x)g(x), x -$ число$) \to \lim_{x\to c\backslash a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to c\backslash a} h(x))$

Сомножитель $f(x)$ и остаточное произведение $g(x)$ содержат переменную x. Произведение не имеет условных подвыражений. Первые два антецедента убеждаются в том, что предел $f(x)$ бесконечный. Если имеется комментарий "частнпроизв", указывающий, что предел вычисляется при применении правила Лопиталя, причем c отлично от нуля и символов бесконечности, то проверяется отсутствие в произведении $f(x)g(x)$ дроби с зависящим от x знаменателем либо степени с отрицательным показателем и содержащим x основанием. Последний антецедент обращается к нормализатору "асимптоценка". В отличие от предыдущих приемов, где обращение сопровождалось комментарием (уровень 1), здесь берется комментарий (уровень 2). Результат $h(x)$ не должен содержать символа "отказ". Если он неконстантный, то не должен иметь вид суммы. Для блокировки повторной попытки применения приема используется комментарий "перпендикулярно". Уровень срабатывания равен 4.

(e) Асимптотическая оценка сомножителя числителя либо знаменателя дроби, имеющего нулевой предел.

$\forall_{abcdfghuv}(b = \lim_{x\to d\backslash a} u(x)\ \&\ b -$число$\ \&\ \lim_{x\to d\backslash a} g(x) = 0\ \&\ f = \lambda_x(g(x), x -$ число$) \to \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)(g(x))^{u(x)})/v(x)) = \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)(f(x))^{u(x)})/v(x)))$

Заголовком выражения $g(x)$ служит один из символов "плюс", "синус", "косинус", "тангенс", "котангенс", "логарифм". Это выражение не содержит условных подвыражений. Показатель степени $u(x)$ имеет вид дроби. Первые два антецедента проверяют, что предел этого показателя конечен, третий - проверяет, что предел выражения $g(x)$ равен 0. Последний антецедент использует нормализатор "асимптоценка" для нахождения асимптотической оценки $f(x)$. Как и выше, здесь используется комментарий (уровень 2), указывающий на увеличенное число членов локальной формулы

Тейлора. Проверяется, что выражение $f(x)$ не содержит символа "отказ". Если оно неконстантное, то проверяется, что либо его заголовок отличен от символов "плюс", "синус", "косинус", "тангенс", "котангенс", "логарифм", либо оно не содержит символа, являющегося заголовком исходного выражения $g(x)$. Перед попыткой нахождения асимптотической оценки проверяется, что количество комментариев "частнпроизв" (глубина вложенных обращений к правилу Лопиталя) не превосходит 2, а при наличии хотя бы одного такого комментария - что выражение под пределом не содержит тригонометрических операций, зависящих от x. Уровень срабатывания равен 4. Создана версия данного приема, в которой не требуется, чтобы показатель степени $u(x)$ имел вид дроби. Ее уровень срабатывания равен 6. Наконец, на уровне 7 срабатывает еще одна версия, у которой обращение к нормализатору "асимптоценка" сопровождается комментарием (уровень 3).

(f) Асимптотическая оценка логарифма с бесконечным пределом - сомножителя числителя либо знаменателя дроби, непосредственно расположенной под знаком предела.

$\forall_{abcdfghuvw}(b = \lim_{x\to d\backslash a} u(x)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c = \lim_{x\to d\backslash a} g(x)\ \&\ (c = \infty \vee c = 0)\ \&\ f = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)(\log_{w(x)} g(x))^{u(x)})/v(x)) = \lim_{x\to d\backslash a}((h(x)(\log_{w(x)} f(x))^{u(x)})/v(x)))$

Выражение под логарифмом имеет вид суммы и не содержит условных подвыражений. Первые два антецедента проверяют, что предел показателя степени конечен, следующие два - что предел выражения под логарифмом равен бесконечности либо нулю. Последний антецедент обращается к нормализатору "асимптоценка" с комментарием (уровень 1). Уровень срабатывания равен 3.

17. Предел последовательности.

Напомним, что записи предела функции в точке и предела последовательности отличаются друг от друга лишь тем, что в первом случае область изменения аргумента x ограничивается условием "$x -$ число", а во втором - условием "$x -$ натуральное". Разумеется, во втором случае сама "точка" задается символом ∞, а тип ее окрестности формально может быть левосторонним либо двусторонним. В случае предела последовательности формульный редактор берет выражение под пределом в фигурные скобки.

(a) Попытка вычислить предел по множеству вещественных чисел.

$\forall_{abcf}(a = \lim_{n\to c\backslash b} f(n) \to \lim_{n\to c\backslash b}\{f(n)\} = a)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Проверяется, что результат a не имеет заголовка "предел", т.е. что предел вычислить удалось и он существует. Если в $f(n)$ имеется подвыражение вида "значение($A\ t$)", причем переменная n входит в t, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Предел суммы.

$\forall_{abfg}(a = \lim_{n\to\infty}\{f(n)\}\ \&\ b = \lim_{n\to\infty}\{g(n)\} \to \lim_{n\to\infty}\{f(n)+g(n)\} = a+b)$

Выражение под пределом содержит подвыражение вида "значение($A\ t$)", причем n входит в t. Антецеденты вычисляют пределы слагаемого $f(n)$ и остаточной суммы $g(n)$. Проверяется, что эти пределы найдены и что они не образуют пару $-\infty, \infty$. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Усмотрение бесконечного предела с помощью нижней оценки, имеющейся в посылках.

$\forall_{Afp}(\forall_x(A(x) \to p(x) \le f(x))\ \&\ A(t)\ \&\ \lim_{n\to\infty}\{p(t)\} = \infty \to \lim_{n\to\infty}\{f(t)\} = \infty)$

Как и выше, выражение под пределом содержит подвыражение вида "значение(A t), где n входит в t. Первый антецедент берется в контексте. Истинность второго антецедента устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство, которой передается дополнительная посылка "n-натуральное". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", его левая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Предел дроби.

$\forall_{abfg}(a = \lim_{n\to\infty}\{f(n)\}\ \&\ b = \lim_{n\to\infty}\{g(n)\}\ \&\ \neg(b = 0) \to \lim_{n\to\infty}\{f(n)/g(n)\} = a/b)$

Дробь имеет подвыражение вида "значение(A t)", где t содержит n. Проверяется, что пределы a, b удалось вычислить и что хотя бы один из них не бесконечный. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Использование посылки, определяющей значение предела последовательности.

$\forall_{af}(\lim(f) = a \to \lim_{n\to\infty}\{f(n)\} = a)$

Запись $\lim(f)$ обозначает выражение "пределпослед(f)". Уровень срабатывания равен 2.

(f) Предел логарифма.

$\forall_{abf}(\lim_{n\to\infty}\{f(n)\} = b\ \&\ 0 \le b \to \lim_{n\to\infty}\{\log_a f(n)\} = \log_a b)$

Уровень срабатывания равен 2.

18. Устранение указателя одностороннего предела для символов бесконечности.

$\forall_f(\lim_{x\to\infty-0} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x))$

$\forall_f(\lim_{x\to-\infty+0} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x))$

19. Усмотрение бесконечного предела при помощи неравенств из посылок.

$\forall_{abfg}(0 < f(x) + g(x)\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = -\infty \to \lim_{x\to a\backslash b} f(x) = \infty)$

$\forall_{abfg}(f(x) + g(x) < 0\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = \infty \to \lim_{x\to a\backslash b} f(x) = -\infty)$

Допускается случай нестрогого неравенства. Уровень срабатывания равен 2.

20. Противоречивый список посылок.

Если список посылок противоречив, то выражение под пределом при упрощении могло быть заменено на символ "противоречие". Тогда предел полагаем неопределенным:

$\forall_{ab}(\lim_{x\to a\backslash b} \text{противоречие} = \text{неопред})$

Уровень срабатывания равен 1.

21. Условное выражение под пределом.

(a) Разбор случаев для условного выражения под пределом.
$\forall_{abcf}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = \text{разборслучаев}(c \ \vee \ \neg(c)))$
Указатель "контекст(позиция(x8 фикс(0 1 1 3))вид(x8 вариант(x3 x4 x5)))" идентифицирует условное выражение "(d при c, иначе e)". Проверяется, что x не входит в c, но входит в d либо в e. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Исключение условного выражения под пределом.
$\forall_{abcfg}(\lim_{x\to a\backslash b}(f(x) \text{ при } x = c, \text{ иначе } g(x)) = \lim_{x\to a\backslash b} g(x))$
Напомним, что в отсутствии специальных указателей обычная переменная идентифицируется с выражением, не содержащим связанных переменных внешнего квантора либо описателя. В нашем случае выражение c не будет зависеть от x. Уровень срабатывания равен 0.
$\forall_{afgpq}(q(a) - p(a) = 0 \ \& \ \text{возрастаетвточке}(\lambda_x(q(x) - p(x), x - \text{число}), a) \to \lim_{x\to a-0}(f(x) \text{ при } p(x) \le q(x), \text{ иначе } g(x)) = \lim_{x\to a-0} f(x))$
$\forall_{afgpq}(q(a) - p(a) = 0 \ \& \ \text{возрастаетвточке}(\lambda_x(q(x) - p(x), x - \text{число}), a) \to \lim_{x\to a+0}(f(x) \text{ при } p(x) \le q(x), \text{ иначе } g(x)) = \lim_{x\to a+0} g(x))$
$\forall_{afgpq}(q(a) - p(a) = 0 \ \& \ \text{убываетвточке}(\lambda_x(q(x) - p(x), x - \text{число}), a) \to \lim_{x\to a-0}(f(x) \text{ при } p(x) \le q(x), \text{ иначе } g(x)) = \lim_{x\to a-0} g(x))$
$\forall_{afgpq}(q(a) - p(a) = 0 \ \& \ \text{убываетвточке}(\lambda_x(q(x) - p(x), x - \text{число}), a) \to \lim_{x\to a+0}(f(x) \text{ при } p(x) \le q(x), \text{ иначе } g(x)) = \lim_{x\to a+0} f(x))$
Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации, а также нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Второй антецедент обрабатывается проверочными операторами усмотрения возрастания либо убывания в точке. Они будут описаны позднее. Уровень срабатывания приемов равен 2.
$\forall_{afgpq}(0 < \lim_{x\to a\backslash b}(q(x) - p(x)) \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x) \text{ при } p(x) \le q(x), \text{ иначе} g(x)) = \lim_{x\to a\backslash b} f(x))$
Допускается случай строгого неравенства в условном выражении. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Исключение условного выражения после вычисления предела.
$\forall_{abcd}(a < b \to (c \text{ при } a < b, \text{ иначе } d) = c)$
Антецедент берется в посылках; обычно он представляет собой дополнительную посылку, выделяющую рассматриваемый подслучай. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Последовательность, определяемая раздельно для четных и нечетных номеров.
$\forall_{afg}(\lim_{n\to\infty}\{f(2n)\} = a \ \& \ \lim_{n\to\infty}\{g(2n+1)\} = a \to \lim_{n\to\infty}\{(f(n) \text{ при } n - \text{even}, \text{ иначе } g(n))\} = a)$
Проверяется, что выражение a не содержит символа "предел". Уровень срабатывания равен 1. Если пределы по четным и нечетным номерам различны, то применяется следующий прием:
$\forall_{abfg}(\lim_{n\to\infty}\{f(2n)\} = a \ \& \ \lim_{n\to\infty}\{g(2n+1)\} = b \ \& \ \neg(a - b = 0) \to \lim_{n\to\infty}\{(f(n) \text{ при } n - \text{even}, \text{ иначе } g(n))\} = \text{неопред})$
Проверяется, что оба предела удалось вычислить. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

22. Предел конечной суммы.

    (a) Непосредственное суммирование ряда.
    $\forall_{abfg}(\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty \ \& \ \sum_{i=a}^{\infty} f(i) = b \to \lim_{n\to\infty} \sum_{i=a}^{g(n)} f(i) = b)$
    Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Бесконечная сумма во втором антецеденте обрабатывается нормализатором "суммаряда". Проверяется, что результат b не содержит символа "суммавсех", т.е. что сумму удалось вычислить.

    (b) Использование асимптотической оценки.
    $\forall_{fgpm}(g = \lambda_x(f(x), x - \text{число}) \ \& \ 0 < m - p \ \& \ 0 < m \to$
    $\lim_{n\to\infty}\{\sum_{k=1}^{n} f(k^p/n^m)\} = \lim_{n\to\infty}\{\sum_{k=1}^{n} g(k^p/n^m)\})$
    Указатель "контекст(...)" определяет идентификацию в выражении под суммой дроби вида $(ck^p)/(dn^m)$. Дальнейшая идентификация функциональной переменной f выполняется согласно указателю "новаргумент", после обработки выражения под суммой нормализатором "извлечение", выделяющим "в чистом виде" вхождения дроби k^p/n^m. Этот нормализатор будет описан в последующих разделах. Переменные k, n не должны входить в выражения m, p. После обработки нормализатором "извлечение" они должны встречаться под суммой только внутри вхождений данной дроби. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение $f(x)$ в его правой части обрабатывается нормализатором "асимптоценка", сопровождаемым комментарием (уровень 1) и дополнительными посылками "$x -$ число, $x \to 0$". Проверяется, что результат $g(x)$ не содержит символа "отказ". Уровень срабатывания равен 1.

    (c) Использование определенного интеграла.
    $\forall_{af}(\int_0^1 f(x)dx = a \ \& \ a - \text{число} \to \lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=m}^{n+k} f(i/n)/n\} = a)$
    Указатель "новаргумент" определяет идентификацию $f(\ldots)$ путем такого преобразования выражения под суммой, чтобы переменные i, n входили только в виде дроби i/n. Как и в предыдущем пункте, для этого используется нормализатор "извлечение". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение, обеспечивающей вычисление интеграла. Второй антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, проверяет, что интеграл удалось вычислить. Уровень срабатывания равен 1.
    $\forall_{afg}(nf(i,n) = g(i/n) \ \& \ \int_0^1 g(x)dx = a \ \& \ a - \text{число} \to$
    $\lim_{n\to\infty}\{\sum_{i=m}^{n+k} f(i,n)\} = a)$
    Первый антецедент упрощает с помощью вспомогательной задачи произведение суммируемого выражения на n. Указатель "новаргумент" определяет идентификацию результата с выражением $g(\ldots)$, содержащим переменные i, n только в виде дроби i/n. Второй антецедент вычисляет интеграл с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Уровень обращения равен 2.

23. Предел целой части.

    (a) Конечный предел целой части.

$\forall_{af}(f(a) -$ целое & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a-0}[f(x)] = f(a) - 1)$
$\forall_{af}(f(a) -$ целое & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a+0}[f(x)] = f(a))$
$\forall_{af}(f(a) -$ целое & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a-0}[f(x)] = f(a))$
$\forall_{af}(f(a) -$ целое & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a+0}[f(x)] = f(a) - 1)$

Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. В зависмости от того, рассматривается ли левая либо правая окрестность, ему передается комментарий "меньше" либо "больше". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abf}(\lim_{x\rightarrow a-0} f(x) = b$ & $b-$ число & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a-0}[f(x)] = -[-b] - 1)$
$\forall_{abf}(\lim_{x\rightarrow a+0} f(x) = b$ & $b-$ число & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a+0}[f(x)] = [b])$
$\forall_{abf}(\lim_{x\rightarrow a-0} f(x) = b$ & $b-$число & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), x-$число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a-0}[f(x)] = [b])$
$\forall_{abf}(\lim_{x\rightarrow a+0} f(x) = b$ & $b-$число & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), x-$число$), a) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a+0}[f(x)] = -[-b] - 1)$

Уровень срабатывания равен 5.

(b) Бесконечный предел целой части.

$\forall_{abf}(\lim_{x\rightarrow a\backslash b} f(x) = -\infty \rightarrow \lim_{x\rightarrow a\backslash b}[f(x)] = -\infty)$
$\forall_{abf}(\lim_{x\rightarrow a\backslash b} f(x) = \infty \rightarrow \lim_{x\rightarrow a\backslash b}[f(x)] = \infty)$

Уровень срабатывания равен 3.

(c) Отбрасывание целой части для выражения, стремящегося к бесконечности.

$\forall_{abcdfghk}(\lim_{x\rightarrow a\backslash b} f(x) = c$ & $(c = \infty \vee c = -\infty)$ & $d = \lim_{x\rightarrow a\backslash b}((f(x)^k g(x))/h(x)) \rightarrow \lim_{x\rightarrow a\backslash b}(([f(x)]^k g(x))/h(x)) = d)$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Проверяется, что выражение d не содержит символа "предел". Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 6.

(d) Разбор случаев по отличию производной от нуля.

$\forall_{abcf}(df(a)/da = c \rightarrow \lim_{x\rightarrow a\backslash b}[f(x)] =$ разборслучаев$(c = 0 \vee \neg(c = 0)))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Проверяется, что выражение c не содержит символа "производная". Проверяется также, что это выражение не есть ноль и что не очевидно отличие его от нуля. Уровень срабатывания равен 5.

Нормализатор "нормверхпредел"

Нормализатор "нормверхпредел", вычисляющий верхний предел функции в точке, имеет пока лишь несколько приемов, рассчитанных на простейшие случаи:

1. Вычисление верхнего предела, если существует предел.

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x\rightarrow a\backslash b} f(x)$ & $(c -$ число $\vee c = \infty \vee c = -\infty) \rightarrow \overline{\lim}_{x\rightarrow a\backslash b}\{f(x)\} = c)$

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x\to a\backslash b} f(x)$ & $(c -$ число $\vee$ $c = \infty$ $\vee$ $c = -\infty) \to \overline{\lim}_{x\to a\backslash b} f(x) = c)$

Уровень срабатывания приемов равен 3.

2. Рассмотрение подпоследовательностей, на которых показатель степени с отрицательным основанием имеет постоянную четность.

   $\forall_{fpq}(p = \overline{\lim}_{x\to\infty}\{f(2x)\}$ & $q = \overline{\lim}_{x\to\infty}\{f(2x+1)\} \to \overline{\lim}_{x\to\infty}\{f(x)\} = \max(p, q))$

   Выражение $f(x)$ должно иметь подвыражение вида $(-A)^{Bx+C}$. Антецеденты реализуют рекурсивные обращения к нормализатору. Предварительно выражения $f(2x)$,$f(2x + 1)$ обрабатываются вспомогательными задачами на упрощение. Проверяется, что результаты p, q не содержат символа "верхнийпредел". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{cf}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{f(n)\} = \sup(\mathrm{set}_m(\exists_k(k \in \{0, \ldots, c-1\}$ & $m = \overline{\lim}_{n\to\infty}\{f(cn+k)\}))))$

   Указатель "контекст(...)" идентифицирует внутри выражения $f(n)$ подвыражение $(-A)^{a+bn/c}$, где a, b - целочисленные константы, c - натуральная константа, меньшая 5. Указатель "или(...)" определяет развертку квантора существования в дизъюнкцию. Верхний предел в заменяющем терме обрабатывается нормализатором "норверхпредел". Уровень срабатывания равен 2.

3. Рассмотрение подпоследовательностей, на которых тригонометрическое подвыражение обращается в константу.

   $\forall_{fp}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{f(n)\} = \sup(\mathrm{set}_m(\exists_k(k \in \{0, \ldots, 2p-1\}$ & $m = \overline{\lim}_{n\to\infty}\{f(2pn + k)\}))))$

   Указатель "контекст(...)" определяет идентификацию внутри выражения $f(n)$ синуса либо косинуса от $qn\pi/p$, где p, q - натуральные константы. Квантор существования разворачивается в дизъюнкцию. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{fp}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{f(n)\} = \sup(\mathrm{set}_m(\exists_k(k \in \{0, \ldots, p-1\}$ & $m = \overline{\lim}_{n\to\infty}\{f(pn+k)\}))))$

   Аналогично предыдущему, но идентифицируется тангенс либо котангенс от $qn\pi/p$.

4. Исключение условного подвыражения по четности номера.

   $\forall_{abfpq}(p = \overline{\lim}_{x\to\infty}\{f(2x, a(2x))\}$ & $q = \overline{\lim}_{x\to\infty}\{f(2x+1, a(2x+1))\} \to$
   $\overline{\lim}_{x\to\infty}\{f(x, (a(x)$ при $x -$ even, иначе $b(x)))\} = \max(p, q))$

   Указатель "вхождение(x6)" определяет идентификацию произвольного вхождения условного подвыражения "$(a(x)$ при $x -$ even, иначе $b(x))$" внутри выражения $f(\ldots)$. Проверяется, что результаты p, q обращений к нормализатору не содержат символа "верхнийпредел". Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор "нормнижпредел"

Нормализатор полностью аналогичен рассмотренному выше.

Нахождение частичных пределов

Для определения частичных пределов последовательностей созданы следующие приемы сканирования задачи:

1. Исключение разбора случаев по четным и нечетным элементам.

   $\forall_{abfx}$(частичнпредел$(x, \lambda_n(f(n, (a(n)$ при n–even, иначе $b(n))), n$–натуральное$))$ $\leftrightarrow$ частичнпредел$(x, \lambda_n(f(2n, a(2n)), n -$ натуральное$))$ $\vee$ частичнпредел$(x,$ $\lambda_n(f(2n+1, b(2n+1)), n -$ натуральное$)))$

   Утверждение "частичнпредел$(\ldots)$" входит в условие задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные. Указатель "вхождение(x6)" определяет идентификацию произвольного вхождения условного выражения "$(a(n)$ при $n -$ even, иначе $b(n))$"внутри терма $f(\ldots)$. Уровень срабатывания равен 1.

2. Попытка нахождения предела.

   $\forall_{abx}(b = \lim_{n\to\infty}\{a(n)\}$ & $b -$ число $\rightarrow$ частичнпредел$(x, \lambda_n(a(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow x = b)$

   Первый антецедент обращается к нормализатору "нормпредел". Проверяется, что результат b не содержит символа "предел". Уровень срабатывания равен 2.

3. Кванторная расшифровка условия для частичного предела.

   Если последовательность задана с помощью описателя "отображение", то используется прием:

   $\forall_{ax}$(частичнпредел$(x, \lambda_n(a(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow \forall_{en}(0 < e$ & $e -$ число & $n -$ натуральное $\rightarrow \exists_m(n < m$ & $m -$ натуральное & $|x - a(m)| < e)))$

   Утверждение "частичнпредел$(\ldots)$" здесь является условием задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

   Иногда последовательность A бывает удобно определить составленной из выписываемых подряд конечных наборов, образующих последовательность B. В этом случае используется запись $A =$ кортежи(B). Для частичного предела последовательности, заданной указанным образом, создан следующий вариант приема расшифровки по определению:

   $\forall_{apx}$(частичнпредел$(x,$ кортежи$(\lambda_n(\lambda_m(a(m,n), m \in \{1, \ldots, p(n)\}), n -$ натуральное$))) \leftrightarrow \forall_{en}(0 < e$ & $e -$ число & $n -$ натуральное $\rightarrow \exists_{km}(n < m$ & $m -$ натуральное & $k \in \{1, \ldots, p(m)\}$ & $|x - a(k,m)| < e)))$

   Уровень срабатывания здесь тоже равен 4. В заключение приведем прием, применяемый, если неизвестной является рассматриваемая последовательность:

   $\forall_{fx}$(последовательность$(f, \mathbb{R}) \rightarrow$ частичнпредел$(x, f) \leftrightarrow \forall_{en}(0 < e$ & $e -$ число & $n -$ натуральное $\rightarrow \exists_m(n < m$ & $m -$ натуральное & $|x - f(m)| < e)))$

   Как и выше, утверждение "частичнпредел(x, f)" является условием задачи на описание, причем выражение f содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 6.

4. Выделение слагаемого, имеющего предел.

   $\forall_{abckx}(c = \lim_{n\to\infty}\{b(n)\} \rightarrow$ частичнпредел$(x,$ кортежи$(\lambda_n(\lambda_m(a(m,n) + b(n), m \in \{1, \ldots, k(n)\}), n -$ натуральное$))) \leftrightarrow$ частичнпредел$(x - c, \lambda_n(\lambda_m(a(m,n), m \in \{1, \ldots, k(n)\}), n -$ натуральное$)))$

   Утверждение "частичнпредел$(\ldots)$" входит в условие задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{afg}(a = \lim_{n\to\infty}\{f(n)\}$ & $a -$ число $\to$ частичнпредел$(x, \lambda_n(f(n)+g(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow \exists_y($частичнпредел$(y, \lambda_n(g(n), n -$ натуральное$))$ & $x = a + y))$

При отборе слагаемого $f(x)$ проверяется, чтобы в него не входил символ "значение". Уровень срабатывания равен 3.

5. Частичный предел последовательности, образованной вложенными по включению растущими фрагментами.

   $\forall_{akx}(\lim_{n\to\infty}\{k(n)\} = \infty \to$ частичнпредел$(x, \lambda_n(\lambda_m(a(m), m \in \{1, \ldots, k(n)\}), n-$ натуральное$)) \leftrightarrow$ частичнпредел$(x, \lambda_m(a(m), m -$ натуральное$)) \vee \exists_m(m -$ натуральное & $x = a(m)))$

   Утверждение "частичнпредел$(\ldots)$" входит в условие задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 1.

6. Выделение сомножителя, имеющего предел.

   $\forall_{afg}(a = \lim_{n\to\infty}\{f(n)\}$ & $a -$ число $\to$ частичнпредел$(x, \lambda_n(f(n)g(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow \exists_y($частичнпредел$(y, \lambda_n(g(n), n -$ натуральное$))$ & $x = ay))$

   При отборе сомножителя $f(x)$ проверяется, чтобы в него не входил символ "значение". Уровень срабатывания равен 3.

Пределы и сходимость последовательностей

1. Ориентация равенства.

   $\forall_{ab}(a = \lim(b) \leftrightarrow \lim(b) = a)$

   Прием ориентирует равенство так, чтобы выражение "пределпослед$(\ldots)$" оказалось слева. Равенство должно являться посылкой задачи. Уровень срабатывания равен 0.

2. Усмотрение сходимости последовательности из равенства для ее предела.

   По определению, считаем, что выражение "пределпослед(f)" имеет численное значение тогда и только тогда, когда последовательность f сходится. Это дает возможность пользоваться следующими приемами:

   $\forall_{ab}(\lim(a) = b$ & $b -$ число $\to$ сходится$(a))$

   $\forall_{ab}(a = \lim(b) \to$ сходится$(b) \leftrightarrow a -$ число$)$

   В обоих случаях равенство берется в посылках, утверждение "$b -$ число" обрабатывается проверочным оператором. Первый прием срабатывает на уровне 0, второй - на уровне 1.

3. Кванторная расшифровка условия равенства предела последовательности заданному числу.

   $\forall_{ab}(a -$ число & последовательность$(b, \mathbb{R}) \to a = \lim(b) \leftrightarrow \forall_e(e -$ число & $0 < e \to \exists_n(n -$ натуральное & $\forall_m(m -$ натуральное & $n \leq m \to |b(m) - a| < e))))$

   Равенство является условием задачи на доказательство. Антецеденты обрабатываются проверочными операторми. Утверждение "последовательность$(f\ A)$" означает, что f есть последовательность элементов множества A. Уровень срабатывания равен 4. На той же самой теореме созданы еще две версии приема. Первая преобразует посылку задачи на доказательство либо на описание. Если имеет место задача на описание с целью (независит ...), то уровень срабатывания равен 5, иначе он равен 6. Вторая версия применяется к условию задачи на описание. В этом случае b должно содержать неизвестные. Уровень срабатывания равен 5.

4. Расшифровка равенства предела последовательности бесконечности.

   $\forall_f$(последовательность$(f,\mathbb{R}) \to \lim(f) = \infty \leftrightarrow \forall_a(a -$ число $\to \exists_n(n -$ натуральное & $\forall_m(m -$ натуральное & $n < m \to a < f(m)))))$

   Созданы три версии приема, аналогичные версиям предыдущего пункта.

5. Расшифровка условия сходимости последовательности.

   $\forall_f$(последовательность$(f,\mathbb{R}) \to$ сходится$(f) \leftrightarrow \exists_a(a -$ число & $a = \lim(f)))$

   Прием применяется к посылке задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_f$(последовательность$(f,\mathbb{R}) \to$ сходится$(f) \leftrightarrow \exists_a(a-$число & $\forall_e(e-$число & $0 < e \to \exists_n(n -$ натуральное & $n \le m \to |f(m) - a| < e))))$

   На этой теореме созданы три приема. Первый применяется к подутверждению условия задачи на описание, имеющей цель "пример" либо не имеющей цели "полный". Выражение f должно содержать неизвестные. Второй применяется к условию задачи на доказательство, имеющему вид "не(сходится(...))". Третий применяется к посылке "не(сходится(...))" задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "пример". В первых двух случаях уровень срабатывания равен 5, в последнем - равен 2.

6. Ограниченность сходящейся последовательности.

   $\forall_f$(последовательность$(f,\mathbb{R})$ & сходится$(f) \to$ огрсверху(Val$(f)))$

   $\forall_f$(последовательность$(f,\mathbb{R})$ & сходится$(f) \to$ огрнизу(Val$(f)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм", т.е. заменяют утверждения об ограниченности на константу "истина". Второй антецедент берется в контексте, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

7. Подбор последовательности с бесконечным пределом для реализации кванторного неравенства.

   $\forall_{abcf}(a-$ число & $b-$ число & $c-$ число & $\neg(c = 0)$ & последовательность$(f,\mathbb{R})$ & $\lim(f) = \infty \to \exists_m(m -$ натуральное & $\forall_n(n -$ натуральное & $m < n \to b \le |cf(n) + a|)))$

   Прием имеет заголовок "существует", т.е. используется для попытки подбора значения несущественной неизвестной. Утверждения "$m -$ натуральное", "$\forall_n(n -$ натуральное & $m < n \to b \le |cf(n) + a|)$" идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей несущественную неизвестную m. Других условий с m задача не имеет. Первые четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами, пятый - берется в контексте. Последний антецедент замещает во вспомогательной задаче на описание условия с переменной m. Уровень срабатывания равен 3. Имеется еще один аналогичный прием:

$\forall_{abcf}(a-$число $\& \ b-$число $\& \ c-$число $\& \ \neg(c=0) \ \&$ последовательность$(f,\mathbb{R}) \ \& \ \lim(f)=\infty \ \& \ m-$ число $\to \exists_n(n-$ натуральное $\& \ m<n \ \& \ 0 \leq b+|cf(n)+a|))$

Здесь исключается несущественная переменная n. Уровень срабатывания тоже равен 3.

8. Пример последовательности с бесконечным пределом.

   $\forall_f(f=\lambda_n(n, n-$ натуральное $\to$ последовательность$(f,\mathbb{R}) \ \& \ \lim(f)=\infty)$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Утверждения "последовательность($f,\mathbb{R})$", "$\lim(f)=\infty)$" идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f является неизвестной этой задачи. Антецедент замещает указанные условия во вспомогательной задаче на описание. Уровень срабатывания равен 3.

9. Подбор константной сходящейся последовательности.

   $\forall_f($последовательность$(f,\mathbb{R}) \ \& \ \exists_a(a-$ число $\& \ f=\lambda_n(a, n-$ натуральное$)) \to$ сходится$(f))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Выражение f либо является неизвестной, либо содержит более одной неизвестной. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - замещает во вспомогательной задаче условие сходимости. Уровень срабатывания равен 3.

10. Подбор неограниченной расходящейся последовательности.

    $\forall_{af}($последовательность$(f,\mathbb{R}) \ \& \ \lim(f)=\infty \to \neg($сходится$(f)))$

    Прием аналогичен предыдущему. Выражение f идентифицируется с неизвестной. Требуется отсутствие условия задачи, содержащего одновременно переменную f и символ "частичнпредел". Кроме того, не должно быть условия с равенством, имеющим подвыражение $f(A)$, не содержащего выражения вида $g(B)$, где g - неизвестная, отличная от f. Уровень срабатывания равен 4.

11. Подбор ограниченной расходящейся последовательности.

    $\forall_f($последовательность$(f,\mathbb{R}) \ \& \ \exists_{ab}(a-$ число $\& \ b-$ число $\& \ \neg(a=b) \ \& \ f=\lambda_n((a$ при $n-\mathrm{even},$ иначе $b), n-$ натуральное$)) \to \neg($сходится$(f)))$

    Аналогично предыдущему.

12. Усмотрение сходящейся последовательности с помощью кванторного равенства, позволяющего начиная с некоторого номера определять общий член.

    $\forall_{afgAB}($последовательность$(f,\mathbb{R}) \ \& \ (A(x) \ \& \ x-$ число$)=(x=g(n)) \ \& \ \lim_{n\to\infty}\{g(n)\}=a \ \& \ a-$число $\& \ \forall_n(n-$натуральное $\& \ B(n)\to A(f(n))) \ \& \ B(n)\to$ сходится$(f))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Утверждение о сходимости входит в условие задачи на описание. Переменная f идентифицируется с неизвестной. Первый и пятый антецеденты суть некоторые другие условия задачи. Указатель "новаргумент(x26 x6 фикс)" определяет проверку того, что консеквент кванторной имплиации, идентифицированной с пятым антецедентом, содержит переменную f только в виде $f(n)$. После этого $A(x)$ строится как результат замены всех вхождений подтерма $f(n)$ в консеквент на переменную x. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Он разрешает $A(x)$ относительно x, обращаясь к вспомогательной задаче на описание. Этой задаче сообщаются дополнительные посылки "$n-$натуральное", "$n \to \infty$". Результат $g(n)$, начиная с некоторого достаточно большого номера, удовлетворяющего условию B, должен, согласно пятому антецеденту, равняться $f(n)$. Третий антецедент тоже выделен указателем "идентификатор". Он обращается к нормализатору "нормпредел" для вычисления предела a последовательности $g(n)$. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором - подтверждается факт сходимости последовательности $g(n)$. Наконец, последний, шестой антецедент обращается к вспомогательной задаче на доказательство для проверки того, что условие $B(n)$ выполняется для достаточно больших значений n. Задаче передаются те же содержащие n дополнительные посылки, что и выше. Уровень срабатывания равен 2.

13. Подбор последовательности, не имеющей заданного предела.

    $\forall_{af}(\exists_b(b-\text{число} \,\&\, \neg(b=a) \,\&\, \forall_n(n-\text{натуральное} \to f(n)=b)) \to \neg(\lim(\lambda_n(f(n), n-\text{натуральное}))=a))$

    Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Выражение $f(n)$ содержит неизвестные. Антецедент замещает рассматриваемое условие во вспомогательной задаче. Уровень срабатывания равен 3.

14. Подбор константной последовательности, имеющей заданный предел.

    $\forall_{af}(\forall_n(n-\text{натуральное} \to f(n)=a) \to \lim(\lambda_n(f(n), n-\text{натуральное}))=a)$

    Аналогично предыдущему.

15. Равенство нулю предела последовательности дробей, у которых числители имеют конечный ненулевой либо бесконечный предел.

    $\forall_{afg}(a=\lim(\lambda_n(f(n), n-\text{натуральное})) \,\&\, \neg(a=0) \to \lim(\lambda_n(f(n)/g(n), n-\text{натуральное}))=0 \leftrightarrow \lim(\lambda_n(g(n), n-\text{натуральное}))=\infty)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он вычисляет предел последовательности, обращаясь к вспомогательной задаче на преобразование. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором.

16. Попытка доказательства сходимости ограниченной снизу последовательности путем усмотрения ее ослабленной монотонности.

    $\forall_{af}(\text{последовательность}(f,\mathbb{R}) \,\&\, a \le f(n) \,\&\, \forall_{en}(n-\text{натуральное} \,\&\, e-\text{число} \,\&\, 0<e \to \exists_m(m-\text{натуральное} \,\&\, \forall_p(p-\text{натуральное} \,\&\, m \le p \to f(p) \le f(n)+e))) \to \text{сходится}(f))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Консеквент идентифицируется с условием задачи на доказательство. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Второй антецедент использует синтезатор "нижняяоценка" для получения нижней оценки a общего члена последовательности. Истинность третьего антецедента устанавливается при помощи вспомогательной задачи на доказательство. Под ослабленной монотонностью понимается существование для любых натурального n и вещественного $\varepsilon>0$ такого номера m, что начиная с него все члены последовательности не превосходят $f(n) + \epsilon$. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

17. Попытка логарифмирования при нахождении предела последовательности.

    $\forall_{af}(0 < f(n)$ & $\lim(\lambda_n(\ln f(n), n-$натуральное$)) = a$ & $(a-$число $\vee\ a = \infty \vee a = -\infty) \rightarrow \lim(\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)) = \exp a)$

    Прием применяется, если $f(n)$ имеет своим обобщенным сомножителем конечное произведение. Первый и третий антецеденты обрабатываются проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

18. Предел последовательности средних значений.

    $\forall_{afkmp}(\lim(\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)) = a$ & $(a -$ число $\vee\ a = \infty\ \vee\ a = -\infty) \rightarrow \lim(\lambda_n(\sum_{i=m}^{n+k} f(i)/(n+p), n -$ натуральное$)) = a)$

    Уровень срабатывания равен 2.

19. Обращение к нормализатору "нормпредел".

    $\forall_{af}(a = \lim_{n\rightarrow\infty}\{f(n)\} \rightarrow \lim(\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)) = a)$

    Если $f(n)$ содержит конечную сумму, то прием блокируется. Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Проверяется, что результат a не содержит символа "предел". Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{af}(a = \lim_{n\rightarrow\infty}\{f(n)\}$ & $a -$ число $\rightarrow$ сходится$(\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)))$

    Аналогично предыдущему. Прием имеет заголовок "второйтерм". Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости.

20. Переход к обозначению "пределпослед".

    $\forall_a($последовательность$(a, \mathbb{R}) \rightarrow$ предел$(a, 0, \infty) = \lim(a))$

    Антецедент берется в контексте. Уровень срабатывания равен 0.

21. Использование кванторной импликации, определяющей общей член последовательности.

    $\forall_{bpA}($последовательность$(p, \mathbb{R})$ & $\forall_n(n -$ натуральное $\rightarrow p(n) = A(n))$ & $\lim_{n\rightarrow\infty}\{A(n)\} = b \rightarrow \lim(p) = b)$

    Первые два антецедента берутся в контексте, последний - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что результат b не содержит символа "предел". Уровень срабатывания равен 2.

Расшифровка по определению условия равенства предела заданному выражению

$\forall_{abf}(\lim_{x\rightarrow a} f(x) = b \leftrightarrow \forall_c(c -$ число & $0 < c \rightarrow \exists_d(0 < d$ & $d -$ число & $\forall_x(x -$ число & $|x - a| < d$ & $\neg(x = a) \rightarrow |f(x) - b| < c))))$

На этой теореме созданы два приема. Первый применяется к условию задачи на доказательство и имеет уровень срабатывания 4. Второй применяется к посылке задачи на описание либо на доказательство и имеет уровень срабатывания 6.

Учет сколь угодно большого параметра в задачах на исследование, имеющих цель "известно"

В задачах по физике иногда делается допущение о том, что заданные параметры (например, масса) "сколь угодно велики". Это формализуется посредством вспомогательных посылок вида "$A \to \infty$". При решении сначала вводится вспомогательная переменная p, обозначающая такой численный параметр. Она сопровождается статусом "известной" величины. После того, как находится содержащее p выражение для некоторой неизвестной через известные величины, в нем выполняется предельный переход по p. Ввод параметра p реализуется следующим приемом:

$\forall_{ab}((a \to \infty) \to b = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Выражение a содержит неизвестные. Переменная b представляет собой новый известный параметр. Для блокировки повторного ввода параметра используется комментарий (стремится вспомпараметр b). Уровень срабатывания равен 2. Исключение параметра из ответа реализуется вторым приемом:

$\forall_{afxy}((y \to \infty)\ \&\ \lim_{y\to\infty} f(y) = a \to x = f(y) \leftrightarrow x = a)$

Преобразуемое равенство является посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Первый антецедент идентифицируется с другой посылкой этой задачи. Переменная x идентифицируется с неизвестной. Выражение $f(y)$ не содержит неизвестных и содержит переменную y. Отсутствуют прочие посылки вида "стремится$(\ldots)$". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Он вычисляет предел, используя нормализатор "нормпредел" и упрощая результат вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что a не содержит y. Уровень срабатывания приема равен 2.

Проверочный оператор "о"

Проверочный оператор "о" ("о малое") служит для проверки истинности контекстно зависимого утверждения "о$(A\ B)$". Формульный редактор прорисовывает его в привычном виде "$A = o(B)$". Данное утверждение означает, что предел отношения A/B в топологии, заданной термом "стремится$(\ldots)$" из рассматриваемого контекста, равен 0. При использовании оператора предполагается, что имеется ровно один такой терм. Бесконтекстный аналог - "малаявеличина$(f\ g\ a\ b)$" - ввиду громоздкости практически не используется. Для оператора "о" созданы пока лишь несколько простейших приемов:

1. Отбрасывание постоянного коэффициента.

   $\forall_{abc}(a = o(b) \to ac = o(b))$

   $\forall_{abc}(\neg(c = 0)\ \&\ a = o(b) \to a = o(bc))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1. Множитель c идентифицируется как произведение всех "фиксированных" в контексте сомножителей.

2. Отбрасывание минуса.

   $\forall_{ab}(a = o(b) \to -a = o(b))$

   $\forall_{ab}(a = o(b) \to a = o(-b))$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Усмотрение того, что сумма есть "о малое".

   $\forall_{abc}(a = o(c)\ \&\ b = o(c) \to a + b = o(c))$

   Переменная a идентифицируется с первым слагаемым. Уровень срабатывания равен 1.

4. Сравнение степенных функций с различными показателями.

   $\forall_{abcdef}((x \to d\backslash e)\ \&\ \lim_{x \to d\backslash e} a = f\ \&\ (f = \infty \vee f = -\infty)\ \&\ 0 < c - b \to a^b = o(a^c))$

   Первый антецедент берется в контексте, второй - выделен указателем "идентификатор" и использует нормализатор "нормпредел", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Для случая нулевой степени создан отдельный прием:

   $\forall_{abcdef}((x \to d\backslash e)\ \&\ \lim_{x \to d\backslash e} a = f\ \&\ (f = \infty\ \vee\ f = -\infty)\ \&\ 0 < c \to b = o(a^c))$

   Проверяется, что b не содержит переменных x для которых имеется посылка вида "$x \to p\backslash q$".

1.3 Общие свойства числовых функций

1.3.1 Асимптотическое поведение функции

Для получения асимптотических оценок предусмотрены два средства - нормализатор "асимптоценка" и задачи на преобразование, имеющие цель "асимптоценка". В обоих случаях посылки содержат утверждения вида $x \to a\backslash b$, указывающие варьируемые параметры и окрестности их рассмотрения.

Нормализатор "асимптоценка"

Нормализатор "асимптоценка" уже упоминался в приемах вычисления пределов. Он используется для нахождения асимптотической оценки исходного выражения в предположении о стремлении некоторого его параметра x, определяемом посылкой "$x \to a\backslash b$". Предполагается, что посылка такого вида единственная. Кроме того, при обращении к нормализатору вводится комментарий (переменная x), выделяющий данный параметр. В процессе преобразований используется обычное обозначение "$O(\ldots)$" для остаточного члена. По окончании преобразований остаточный член, если он является "о малым" от основной части, отбрасывается. При обращении к нормализатору могут вводиться дополнительные комментарии, ослабляющие либо усиливающие требования к допустимости преобразований в зависимости от того, как предполагается использовать результат. Нормализатор некорневой, т.е. описываемые ниже приемы, если явно не оговорено противное, могут применяться к произвольному подтерму преобразуемого терма.

1. Арифметика выражений с "O".

   (a) Сумма двух "O".
   $\forall_x(O(x) + O(x) = O(x))$
   Уровень обращения равен 1.
   $\forall_{abcdegx}(0 \le e - d\ \&\ a = \lim_{x \to c\backslash b} g(x)\ \&\ (a = \infty\ \vee\ a = -\infty)\ \&\ (x \to c\backslash b) \to O(g(x)^e) + O(g(x)^d) = O(g(x)^e))$

Переменная x не входит в d, e. Первый и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами, второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел", которому передается комментарий "асимптоценка", блокирующий встречное обращение к нормализатору "асимптоценка". Последний антецедент берется в контексте. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{bcdegx}((x \to c\backslash b)\ \&\ 0 \leq d-e\ \&\ \lim_{x\to c\backslash b} g(x) = 0 \to O(g(x)^d) + O(g(x)^e) = O(g(x)^e))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abcgx}((x \to c\backslash a)\ \&\ b = \lim_{x\to c\backslash a} g(x)\ \&\ (b = \infty\ \vee\ b = -\infty) \to O(g(x)) + O(1) = O(g(x)))$

$\forall_{abch}((x \to c\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to c\backslash a} h(x) = 0 \to O(h(x)) + O(1) = O(1))$

Уровень срабатывания приемов равен 1.

$\forall_{abuvx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a}(u(x)/v(x)) = 0 \to O(u(x)) + O(v(x)) = O(v(x)))$

Перед попыткой применения приема проверяется, что $u(x), v(x)$ не содержат символа "O". Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Исключение константного множителя либо минуса из-под "O".

$\forall_{abcdfx}((x \to a\backslash b) \to O(cf(x)/d) = O(f(x)))$

Антецедент берется в контексте. Переменная x не входит в d, а c идентифицируется с произведением всех не содержащих x сомножителей. Указатель "заменазнака" относит минус перед дробью, если он есть, к коэффициенту c. Хотя бы одно из выражений c, d отлично от единицы. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Сумма "O" и выражения, имеющего порядок роста, не больший, чем это "O".

$\forall_{abcghx}((x \to c\backslash a)\ \&\ b = \lim_{x\to c\backslash a}(g(x)/h(x))\ \&\ b - \text{число} \to g(x) + O(h(x)) = O(h(x)))$

Первый антецедент берется в контексте, второй выделен указателем "идентификатор" и обращается к нормализатору "нормпредел", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

(d) Умножение либо деление "O", либо минус перед "O".

$\forall_{abfgx}((x \to a\backslash b) \to f(x)O(g(x)) = O(f(x)g(x)))$

Переменная x входит в выражение $f(x)$. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{bcdehx}((x \to d\backslash e) \to bO(h(x))/c = O(h(x)))$

$\forall_{abcfx}((x \to a\backslash b) \to cO(f(x)) = O(f(x)))$

Переменная x не входит в b, c. В первом приеме дробь невырожденная. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abfx}((x \to b\backslash a) \to -O(f(x)) = O(f(x)))$

Уровень срабатывания равен 1.

(e) Множитель "O" выражения под "O".

$\forall_{abfgx}((x \to a\backslash b) \to O(f(x)O(g(x))) = O(f(x)g(x)))$

Уровень срабатывания равен 2.

(f) Модуль под "O".

$\forall_{abdfgx}((x \to a\backslash b)\ \&\ d-\text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(d)-\text{even}) \to O(|f(x)|^d g(x)) = O((f(x))^d g(x)))$

Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Натуральная степень "O".

$\forall_{abfnx}((x \to a\backslash b) \to (O(f(x)))^n = O((f(x))^n))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Уровень срабатывания равен 1.

(h) Поглощение слагаемых в сумме под "O".

$\forall_{abcfgh}(c = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x))\ \&\ c - \text{число}\ \&\ (x \to a\backslash b) \to O(f(x) + g(x) + h(x)) = O(O(g(x)) + h(x)))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, третий - берется в контексте. Выражения $f(x), g(x)$ идентифицируются со слагаемыми, не содержащими символа "O". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcfgh}(c = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x))\ \&\ c - \text{число}\ \&\ (x \to a\backslash b) \to O(f(x) + O(g(x)) + h(x)) = O(O(g(x)) + h(x)))$

$\forall_{abcfgh}(c = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x))\ \&\ c - \text{число}\ \&\ (x \to a\backslash b) \to O(O(f(x)) + g(x) + h(x)) = O(O(g(x)) + h(x)))$

$\forall_{abcfgh}(c = \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x))\ \&\ c - \text{число}\ \&\ (x \to a\backslash b) \to O(O(f(x)) + O(g(x)) + h(x)) = O(O(g(x)) + h(x)))$

Аналогично предыдущему.

(i) Отбрасывание сомножителя - степени минус единицы под "O".

$\forall_{ab}(O((-1)^a b) = O(b))$

Уровень срабатывания равен 2.

2. Поглощение ограниченного слагаемого слагаемым с бесконечным пределом.

$\forall_{cdfgx}((x \to c\backslash d)\ \&\ \lim_{x\to c\backslash d}|g(x)| = \infty\ \&\ \text{ограничено}(f(x)) \to g(x) + f(x) = g(x) + O(1))$

Преобразуемая сумма корневая. Выражения $f(x)$,$g(x)$ идентифицируются со слагаемыми, не имеющими заголовка "O", причем переменная x должна входить в $g(x)$. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Созданы две версии приема. В первой, срабатывающей на уровне 5, требуется, чтобы не существовала некорневая сумма, содержащая x. Во второй, срабатывающей на уровне 7, это требование отбрасывается.

$\forall_{bcdfgx}((x \to c\backslash d)\ \&\ \lim_{x\to c\backslash d}|g(x)| = \infty\ \&\ b = \lim_{x\to c\backslash d} f(x)\ \&\ b - \text{число} \to g(x) + f(x) = g(x) + O(1))$

Аналогично предыдущему, созданы две версии приема с тем же различием. Первая срабатывает на уровне 4 и имеет сравнительно сильный ограничитель трудоемкости, вторая - срабатывает на уровне 7.

3. Поглощение одного слагаемого другим, если их пределы одновременно равны нулю либо одновременно бесконечны.

   $\forall_{abcdfhx}(b = \lim_{x \to c \backslash a} |f(x)|$ & $d = \lim_{x \to c \backslash a} |h(x)|$ & $(b = 0 \ \vee \ d = \infty)$ & $lim_{x \to c \backslash a}(|f(x)|/|h(x)|) = 0$ & $(x \to c \backslash a) \to f(x) + h(x) = h(x) + O(f(x)))$

   Преобразуемая сумма корневая, причем слагаемые $f(x)$,$h(x)$ не содержат символа "O". Первый, второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор" и обращаются к нормализатору "нормпредел". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.

4. Выделение единственного слагаемого, имеющего бесконечный предел.

   $\forall_{abcdfgx}(d = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & $(d = \infty \ \vee \ d = -\infty)$ & $c = \lim_{x \to a \backslash b} g(x)$ & $c -$ число & $(x \to a \backslash b) \to f(x) + g(x) = f(x))$

   Преобразуемая сумма корневая и не содержит символа "O". Выражение $f(x)$ идентифицируется с отдельным слагаемым, $g(x)$ есть сумма остальных слагаемых. Уровень срабатывания равен 3.

5. Поглощение логарифмического слагаемого степенным.

   $\forall_{abfmnpqrsx}((x \to a \backslash b)$ & $\lim_{x \to a \backslash b} f(x) = \infty$ & $0 < m$ & $0 < n \to p(\ln f(x))^m/q + r(f(x))^n/s = r(f(x))^n/s + O((\ln f(x))^m))$

   Переменная x не входит в выражения p, q, r, s, m, n. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 7.

6. Поглощение экспоненциальных слагаемых.

   $\forall_{abcdmnx}((x \to \infty)$ & $0 < b - a$ & $0 < a$ & $\neg(d = 0) \to cx^n a^x + dx^m b^x = dx^m b^x + O(x^n a^x))$

   Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения m, n. Переменная x не входит в a, b, c, d. Антецеденты, кроме первого, обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 7.

7. Сумма двух степеней с одинаковыми основаниями.

   $\forall_{abcdeghijux}((x \to e \backslash h)$ & $0 < d - c$ & $b = \lim_{x \to e \backslash h} u(x)$ & $(b = \infty \ \vee \ b = -\infty) \to i(u(x))^d/a + j(u(x))^c/g = i(u(x))^d/a + O((u(x))^c))$

   Переменная x не входит в выражения a, c, d, g, i, j. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", второй и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{acdeghijux}((x \to e \backslash h)$ & $0 < c - d$ & $\lim_{x \to e \backslash h} u(x) = 0 \to i(u(x))^d/a + j(u(x))^c/g = i(u(x))^d/a + O((u(x))^c))$

   Аналогично предыдущему.

8. Замена предположительно малого слагаемого на "O".

   $\forall_{abcdeghix}((x \to d \backslash e)$ & $h = \lim_{x \to d \backslash e} g(x)$ & $(h = \infty \ \vee \ h = -\infty)$ & $a < 0 \to b + c(g(x))^a/i = b + O((g(x))^a))$

   Проверяется, что b имеет слагаемое, не содержащее x. Если оно ненулевое, то член $c(g(x))^a/i$, стремящийся к нулю, будет малым, и его можно занести под

"O". Преждевременное применение приема может привести к отказу - если указанное слагаемое имеет нулевое значение, то результат преобразований сохранит символ "O". Поэтому уровень срабатывания выбран достаточно большим - равным 6.

$\forall_{abcdeghx}((x \to d\backslash e)\ \&\ \lim_{x\to d\backslash e} g(x) = 0\ \&\ 0 < a \to b+c(g(x))^a/h = b+O((g(x))^a))$

Аналогично предыдущему.

9. Степень суммы.

   Переходим к серии приемов, использующих локальную формулу Тейлора. Начнем со случая, когда преобразуемое выражение имеет подвыражение вида A^b, где b - константа, A - сумма. Здесь предпринимается попытка представить A в виде суммы "главной части" B и остаточного члена C, после чего подвыражение преобразуется к виду $B^b \cdot (1 + C/B)^b$ и применяется локальная формула Тейлора для $(1+x)^b$ в окрестности нуля. Для нахождения главной части используется рекурсивное обращение к нормализатору "асимптоценка". Последующие приемы будут использовать похожую схему действий.

   $\forall_{abcfghux}((x \to a\backslash c)\ \&\ u = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u(x), x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^2(u(x))^{b-2}, x - \text{число}) \to (f(x))^b = (u(x))^b + bg(x)(u(x))^{b-1} + O(h(x)))$

   Выражение b не содержит переменной x, заголовком выражения $f(x)$ служит символ "плюс". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", его подвыражение $f(x)$ обрабатывается нормализатором "асимптоценка". Результат u представляет собой искомую главную часть основания степени. Проверяется, что она не содержит символа "отказ" и не имеет заголовка "плюс". Третий антецедент определяет остаточный член g основания степени. Указатель "копия(...)" уточняет, что в правой части данного антецедента выражение $f(x)$ берется в исходном виде, без обработки его нормализатором "асимптоценка". Наконец, четвертый антецедент определяет порядок остаточного члена формулы Тейлора. Подвыражение $g(x)$ его правой части обрабатывается нормализатором "асимптоценка". Это же подвыражение в заменяющем терме берется без обработки нормализатором. Проверяется, что h не содержит символа "O". Перед попыткой применения приема проверяется отсутствие комментария (уровень N) с $N > 1$, указывающего на необходимость рассматривать большее число членов формулы Тейлора. Проверяется также, что вхождение преобразуемого подвыражения достижимо из корня всего выражения только через арифметические операции и основания степеней. Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии данного приема. Первая из них применяется к подвыражениям, не достижимым из корня указанным образом. Ее уровень срабатывания равен 5. Вторая применяется к подвыражениям, содержащим символ "O" и расположенным внутри другого "O". Уровень срабатывания здесь равен 2. При наличии комментария (уровень 2) число членов разложения увеличивается:

   $\forall_{abcfghux}((x \to a\backslash c)\ \&\ u = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u(x), x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^3(u(x))^{b-3}, x - \text{число}) \to (f(x))^b = (u(x))^b + bg(x)(u(x))^{b-1} + b(b-1)(g(x))^2(u(x))^{b-2}/2 + O(h(x)))$

   В остальном прием аналогичен предыдущему, вплоть до уровня срабатывания, однако имеется лишь первая из указанных выше альтернативных версий. В случае комментария (уровень 3) добавляются сразу два новых члена:

$\forall_{abcfghux}((x \to a\backslash c)\ \&\ u = \lambda_x(f(x), x\text{−число})\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u(x), x\text{−число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^5(u(x))^{b-5}, x - \text{число}) \to (f(x))^b = (u(x))^b + bg(x)(u(x))^{b-1} + b(b-1)(g(x))^2(u(x))^{b-2}/2 + b(b-1)(b-2)(g(x))^3(u(x))^{b-3}/6 + b(b-1)(b-2)(b-3)(g(x))^4(u(x))^{b-4}/24 + O(h(x)))$

Прием аналогичен предыдущему, но имеется лишь одна его версия, срабатывающая на уровне 2.

10. Синус.

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \sin g(x) = g(x) + O(h(x)^3))$

Второй антецедент обращается к нормализатору "нормпредел", третий - определяет асимптотическкюу оценку h выражения $g(x)$. Должен отсутствовать комментарий (уровень N) при $N > 1$, выражение h не должно содержать символа "отказ". Вхождения $g(x)$ вне третьего антецедента выделены указателями "копия", т.е. берутся без преобразования нормализатором "асимптоценка". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \sin g(x) = g(x) - g(x)^3/6 + O(h(x)^5))$

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \sin g(x) = g(x) - g(x)^3/6 + g(x)^5/120 + O(h(x)^7))$

В первом случае должен иметься комментарий (уровень 2), во втором - комментарий (уровень 3). В остальном аналогично предыдущему.

11. Косинус.

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \cos g(x) = 1 - (g(x))^2/2 + O(h(x)^4))$

Аналогично случаю синуса. Должен отсутствовать комментарий (уровень N) при $N > 1$. Если такой комментарий есть, то применяется следующий прием:

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \cos g(x) = 1 - (g(x))^2/2 + (g(x))^4/24 + O(h(x)^6))$

Наконец, приведем прием для случая, когда выражение под косинусом имеет заголовок "O":

$\forall_{abf}((x \to a\backslash b)\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} f(x) = 0 \to \cos O(f(x)) = 1 + O((f(x))^2))$

Здесь требуется, чтобы символ "O" не входил в выражение $f(x)$. Уровнр срабатывания перечисленных приемов равны 2.

12. Тангенс.

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \operatorname{tg} g(x) = g(x) + O(h(x)^3))$

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \operatorname{tg} g(x) = g(x) + (g(x))^3/3 + O(h(x)^5))$

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \operatorname{tg} g(x) = g(x) + (g(x))^3/3 + 2(g(x))^5/15 + O(h(x)^7))$

Первый прием применяется, если отсутствует комментарий (уровень N) при $N > 1$, второй и третий - если имеются комментарии (уровень 2) и (уровень 3) соответственно. Уровень срабатывания равен 2.

13. Котангенс.

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \operatorname{ctg} g(x) = (g(x)) - 1 - g(x)/3 + O(h(x)^3))$

Уровень срабатывания равен 2.

14. Арктангенс.

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \operatorname{arctg} g(x) = g(x) + O(h(x)^3))$

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \operatorname{arctg} g(x) = g(x) - (g(x))^3/3 + O(h(x)^5))$

$\forall_{abghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \operatorname{arctg} g(x) = g(x) - (g(x))^3/3 + (g(x))^5/5 + O(h(x)^7))$

В первом случае отсутствует комментарий (уровень N) при $N > 1$, во втором - имеется комментарий (уровень 2), в последнем - (уровень 3). Уровень срабатывания равен 2. Если выражение под арктангенсом не стремится к нулю, используются следующие два приема:

$\forall_{abcfghux}(u = \lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ u - \text{число}\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u, x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^2, x - \text{число})\ \&\ (x \to c\backslash a) \to \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} u + g(x)/(1+u^2) + O(h(x)))$

$\forall_{abcfghux}(u = \lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ u - \text{число}\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u, x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^3, x - \text{число})\ \&\ (x \to c\backslash a) \to \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} u + g(x)/(1+u^2) - 2u(g(x))^2/(1+u^2)^2 + O(h(x)))$

Проверяется, что выражение под арктангенсом зависит от x. Первый антецедент вычисляет предел u выражения под арктангенсом. Третий антецедент определяет приращение g. Четвертый вычисляет асимптотику h остаточного члена, применяя нормализатор "асимптоценка" к $g(x)$. В заменяющем терме выражение $g(x)$ берется без обработки этим нормализатором. Первый прием применяется при отсутствии комментария (уровень N), где $N > 1$, второй - при наличии такого комментария. Уровни срабатывания равны 3.

15. Арксинус.

$\forall_{abfghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \arcsin g(x) = g(x) + O((h(x))^3))$

$\forall_{abfghx}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0\ \&\ h = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \arcsin g(x) = g(x) - (g(x))^3/6 + O((h(x))^5))$

Первый прием применяется при отсутствии комментария (уровень N), где $N > 1$, второй - при наличии такого комментария. Уровни срабатывания равны 2.

16. Переход к тригонометрическим операциям, аргумент которых стремится к нулю.

$\forall_{bcfgx}(g = \lim_{x\to b\backslash c} f(x)\ \&\ g - \text{число}\ \&\ \neg(g = 0)\ \&\ (x \to b\backslash c) \to \sin f(x) = \sin g \cos(f(x) - g) + \cos g \sin(f(x) - g))$

$\forall_{bcfgx}(g = \lim_{x\to b\backslash c} f(x)$ & g – число & $\neg(g = 0)$ & $(x \to b\backslash c) \to \cos f(x) = \cos g \cos(f(x) - g) - \sin g \sin(f(x) - g))$

Выражение $f(x)$ должно зависеть от x. Первый антецедент вычисляет предел g этого выражения. Проверяется, что он ненулевой. Выражения g и $f(x) - g$ прощаются вспомогательными задачами на преобразование. Уровень срабатывания приемов равен 3. Для тангенса и котангенса созданы несколько более сложные приемы:

$\forall_{abcfgx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x)$ & a – число & $\neg(a = 0)$ & $\neg(\cos a = 0)$ & $g = \lambda_x((f(x) - a)^2, x$ – число) & $(x \to c\backslash b) \to \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} a + (1 + (\operatorname{tg} a)^2)(f(x) - a) + O(g(x)))$

$\forall_{abcfgx}(a = \lim_{x\to c\backslash b} f(x)$ & a – число & $\neg(a = 0)$ & $\neg(\sin a = 0)$ & $g = \lambda_x((f(x) - a)^2, x$ – число) & $(x \to c\backslash b) \to \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} a - (1 + (\operatorname{ctg} a)^2)(f(x) - a) + O(g(x)))$

Здесь пятый антецедент сначала упрощает разность $f(x) - a$ с помощью вспомогательной задачи на преобразование, а затем обрабатывает ее квадрат нормализатором "асимптоценка". Уровень срабатывания равен 3.

17. Гиперболический синус.

    $\forall_{abfghx}((x \to b\backslash a)$ & $\lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0$ & $h = \lambda_x(g(x), x$ – число) $\to \operatorname{sh} g(x) = g(x) + (g(x))^3/6 + O(h(x)^5))$

    Уровень срабатывания равен 2.

18. Гиперболический косинус.

    $\forall_{abfghx}((x \to b\backslash a)$ & $\lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0$ & $h = \lambda_x(g(x), x$ – число) $\to \operatorname{ch} g(x) = 1 + (g(x))^2/2 + O(h(x)^4))$

    $\forall_{abfghx}((x \to b\backslash a)$ & $\lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0$ & $h = \lambda_x(g(x), x$ – число) $\to \operatorname{ch} g(x) = 1 + (g(x))^2/2 + (g(x))^4/24 + O(h(x)^6))$

    Первый прием применяется при отсутствии комментария (уровень 3), второй - при его наличии. Уровни срабатывания равны 2.

19. Гиперболический тангенс.

    $\forall_{abfghx}((x \to b\backslash a)$ & $\lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0$ & $h = \lambda_x(g(x), x$ – число) $\to \operatorname{th} g(x) = g(x) - (g(x))^3/6 + O(h(x)^5))$

    Уровень срабатывания равен 2.

20. Гиперболический котангенс.

    $\forall_{abfghx}((x \to b\backslash a)$ & $\lim_{x\to b\backslash a} g(x) = 0$ & $h = \lambda_x(g(x), x$ – число) $\to \operatorname{cth} g(x) = (g(x))^{-1} + g(x)/3 - (g(x))^3/45 + O(h(x)^5))$

    Уровень срабатывания равен 2.

21. Натуральный логарифм.

    $\forall_{abcfghux}((x \to a\backslash c)$ & $u = \lambda_x(f(x), x$–число) & $g = \lambda_x(f(x) - u(x), x$–число) & $h = \lambda_x((g(x))^2(u(x))^{-2}, x$ – число) $\to \ln f(x) = \ln u(x) + g(x)(u(x))^{-1} + O(h(x)))$

    Выражение под логарифмом имеет заголовок "плюс". Как и в случае приема для степени суммы, предпринимается представление этого выражения в виде суммы постоянного слагаемого u (определяемого вторым антецедентом с помощью нормализатора "асимптоценка") и стремящегося к нулю слагаемого g.

Должен отсутствовать комментарий (уровень N) для $N > 1$. При наличии комментариев (уровень 2) и (уровень 3) применяются, соответственно, следующие приемы:

$\forall_{abcfghux}((x \to a\backslash c)\ \&\ u = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u(x), x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^3(u(x))^{-3}, x - \text{число}) \to \ln f(x) = \ln u(x) + g(x)(u(x))^{-1} - (g(x))^2(u(x))^{-2}/2 + O(h(x)))$

$\forall_{abcfghux}((x \to a\backslash c)\ \&\ u = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u(x), x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^4(u(x))^{-4}, x - \text{число}) \to \ln f(x) = \ln u(x) + g(x)(u(x))^{-1} - (g(x))^2(u(x))^{-2}/2 + (g(x))^3(u(x))^{-3}/3 + O(h(x)))$

Уровни срабатывания всех трех приемов равны 2. Для исключения символа "O" из-под логарифма создан отдельный прием:

$\forall_{adfghx}((x \to a\backslash b)\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} f(x) = \infty\ \&\ h = \lambda_x(g(x)/f(x), x - \text{число})\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} h(x) = 0 \to \ln(f(x) + O(g(x))) = \ln f(x) + O(h(x)))$

Частное $g(x)/h(x)$ обрабатывается нормализатором "асимптоценка". Уровень срабатывания равен 5.

22. Степенное выражение с переменным показателем.

    Прежде всего, рассматривается случай, когда предел рассматриваемого степенного выражения равен 1:

    $\forall_{abfhuvx}(\lim_{x\to a\backslash b}(u(x))^{v(x)} = 1\ \&\ f = \lambda_x(v(x)\ln u(x), x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((\ln u(x))^2 v(x)^2, x - \text{число})\ \&\ (x \to a\backslash b) \to (u(x))^{v(x)} = 1 + f(x) + O(h(x)))$

    Здесь $v(x)$ должно содержать x. Отсутствует комментарий (уровень N) при $N > 1$. Выражение $v(x)$ в третьем антецеденте обрабатывается нормализатором "асимптоценка", в прочих антецедентах - берется в исходном виде. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2. При наличии комментариев (уровень 2), (уровень 3) используются, соответственно, следующие два приема:

    $\forall_{abfhuvx}(\lim_{x\to a\backslash b}(u(x))^{v(x)} = 1\ \&\ f = \lambda_x(v(x)\ln u(x), x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((\ln u(x))^3 v(x)^3, x - \text{число})\ \&\ (x \to a\backslash b) \to (u(x))^{v(x)} = 1 + f(x) + (f(x))^2/2 + O(h(x)))$

    $\forall_{abfhuvx}(\lim_{x\to a\backslash b}(u(x))^{v(x)} = 1\ \&\ f = \lambda_x(v(x)\ln u(x), x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((\ln u(x))^4 v(x)^4, x - \text{число})\ \&\ (x \to a\backslash b) \to (u(x))^{v(x)} = 1 + f(x) + (f(x))^2/2 + (f(x))^3/6 + O(h(x)))$

    Уровень срабатывания равен 2. Если предел степени не равен 1, выполняется переход к экспоненте:

    $\forall_{abfuvx}(\lim_{x\to a\backslash b}(u(x))^{v(x)} = f\ \&\ (x \to a\backslash b) \to (u(x))^{v(x)} = \exp(v(x))\ln u(x))$

    Проверяется, что предел f, вычисленный первым антецедентом, отличен от константы 1, причем переменная x входит как в показатель степени, так и в ее основание (при константном основании, отличном от e, применяется отдельный прием, приведенный ниже в пункте "элементарные преобразования"). Уровень срабатывания равен 2. Для экспоненты от суммы используется следующий прием:

    $\forall_{abcfghux}(u = \lim_{x\to c\backslash a} f(x)\ \&\ u - \text{число}\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u, x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^2, x - \text{число})\ \&\ (x \to c\backslash a) \to \exp(f(x)) = \exp u + \exp u \cdot g(x) + O(h(x)))$

Выражение $g(x)$ в третьем антецеденте обрабатывается нормализатором "асимптоценка", в заменяющем тереме - берется без изменений. Прием применяется, если отсутствует комментарий (уровень 3). Уровень срабатывания равен 2. Дополнительно создан прием, срабатывающий на уровне 5 безотносительно к комментарию (уровень ...):

$\forall_{abcfghux}(u = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ g = \lambda_x(f(x) - u, x - \text{число})\ \&\ h = \lambda_x((g(x))^3 \exp u(x), x - \text{число})\ \&\ \lim_{x \to c \backslash a} g(x) = 0\ \&\ (x \to c\backslash a) \to \exp(f(x)) = \exp(u(x)) + \exp(u(x)) \cdot g(x) + \exp(u(x))(g(x))^2/2 + O(h(x)))$

Здесь первый антецедент обрабатывает выражение $f(x)$ нормализатором "асимптоценка". Этим же нормализатором обрабатывается выражение $g(x)$ в третьем антецеденте. Уровень срабатывания равен 5. Наконец, приведем прием, применяемый для исключения из-под экспоненты символа "O":

$\forall_{abcfg}(\lim_{x \to a\backslash b} f(x) = c\ \&\ (c = \infty \vee c = -\infty)\ \&\ \lim_{x \to a\backslash b} g(x) = 0\ \&\ (x \to a\backslash b) \to \exp(f(x) + O(g(x))) = \exp(f(x)) + O(\exp(f(x))g(x)))$

Уровень срабатывания равен 4.

23. Логарифм факториала.

    $\forall_{abfg}(\lim_{x \to a\backslash b} f(x) = \infty\ \&\ h = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ (x \to a\backslash b) \to \ln(f(x)!) = f(x)\ln(f(x)) - f(x) + \ln(f(x))/2 + \ln 2/2 + \ln \pi/2 + O(h(x)^{-1}))$

    Подвыражение $f(x)$ во втором антецеденте обрабатывается нормализатором "асимптоценка", в прочих случаях рассматривается исходная версия этого подвыражения. Уровень срабатывания равен 2.

24. Конечная сумма.

    $\forall_{abcfghpq}(\lim_{j \to d\backslash e} g(j) = \infty\ \&\ 0 \le h(j) - g(j)\ \&\ \text{невозрастает}(\lambda_i(f(i), i - \text{число}), \mathbb{N})\ \&\ p = \lambda_j((h(j) - g(j))f(g(j)), j - \text{число})\ \&\ q = \lambda_j(p(j) - (f(g(j)) + f(h(j)))(h(j) - g(j))/2, j - \text{число})\ \&\ \lim_{j \to d\backslash e}(f(h(j))/f(g(j))) = 1\ \&\ (j \to d\backslash e) \to \sum_{i=g(j)}^{h(j)} f(i) = p(j) + O(q(j)))$

    Рассматривается простейший случай, когда суммируются монотонно невозрастающие значения, причем на промежутке суммирования значения в начале и конце промежутка асимптотически равны, а нижняя граница промежутка суммирования стремится к бесконечности. Для получения оценки p суммируемая величина заменяется своим значением в начале промежутка (наибольшим), а остаточный член q представляет собой половину результата замены суммируемой величины на разность ее значений в начале и конце промежутка. Уровень срабатывания равен 3.

25. Целая часть.

    $\forall_{abf}((x \to a\backslash b)\ \&\ \lim_{x \to a\backslash b} f(x) = \infty \to [f(x)] = f(x) + O(1))$

    Уровень срабатывания равен 5.

26. Переход к вычислению асимптотической оценки в окрестности нуля.

    Чтобы активировать приемы, применяющие локальную формулу Тейлора в окрестности нуля, создан (в дополнение к уже приводившимся выше частным приемам такого типа) следующий общий прием, переводящий рассмотрения в эту окрестность:

$\forall_{abfgx}(g = \lambda_y(f(a+y), y - \text{число}) \; \& \; a - \text{число} \; \& \; (x \to a \backslash c) \to f(x) = g(x-a))$

Функциональная переменная $f(x)$ идентифицируется со всем преобразуемым термом. Выражение a отлично от константы 0. Первый антецедент выделен укзателем "идентификатор". Выражение $f(a+y)$ в его правой части обрабатывается нормализатором "асимптоценка" при дополнительных посылках "y – число, $y \to 0\backslash c$" и удаленных старых посылках "стремится(...)". Прием применяется при наличии в преобразуемом терме тригонометрических функций либо логарифма. Проверяется, что результат g имеет только "мультипликативные"вхождения переменной y (т.е. достижимые из корня через операции "умножение", "дробь", "минус", "степень"). Уровень срабатывания равен 6.

27. Инициализация внешнего разбора случаев по результату преобразований.

    Если в итоге преобразований нормализатор "асимптоценка" получает сумму нескольких варьируемых слагаемых, причем при одних значениях параметров пренебрежимо малыми оказываются одни слагаемые, а при других - другие, то внешней задаче может быть передана информация о том, какой именно разбор случаев для параметров необходим. Далее нормализатор продолжит работать вплоть до выдачи окончательного результата, и если таковой не позволит сработать приему, обратившемуся к получению асимптотики, то при возобновлении сканирования внешней задачи инициируется разбор случаев. Описанный механизм будет включен, если при обращении к нормализатору "асимптоценка" ему будет передан комментарий "Случай".

    $\forall_{abdefgh}(\neg(a=0) \; \& \; 0 \leq b \; \& \; 0 \leq h \; \& \; \neg(e=0) \; \& \; \lim_{c \to g\backslash f} d(c) = \infty \; \& \; (c \to g\backslash f) \to \text{контекст}(ab^{d(c)} + eh^{d(c)}))$

    Прием имеет заголовок "замена(замечание асимптоценка)". Это значит, что он никак не преобразует текущее выражение, а ограничивается вводом комментариев. Консеквент "контекст(...)" определяет попытку применения приема при идентификации текущего терма с выражением $ab^{d(c)} + eh^{d(c)}$. Проверяется, что переменная c не входит в a, b, e, h, но входит в $d(c)$ и что не очевидно ни одно из неравенств $0 \leq b-h$, $b-h \leq 0$. Прием вводит новый комментарий (Случай $b = h \vee 0 < b-h \vee b-h < 0$) к посылкам текущей задачи. Предварительно проверяется, что эта задача не имеет комментария (Случай ...) к своим посылкам. Уровень срабатывания равен 6.

    $\forall_{abdefg}(\neg(a=0) \; \& \; \neg(e=0) \; \& \; 0 \leq b \; \& \; \lim_{c \to g\backslash f} d(c) = \infty \; \& \; (c \to g\backslash f) \to \text{контекст}(ab^{d(c)} + e))$

    Аналогично предыдущему, но вводится комментарий (Случай $b = 1 \;\vee\; 0 < b-1 \;\vee\; b-1 < 0$).

    $\forall_{abdefgh}(\neg(a=0) \; \& \; 0 \leq b \; \& \; 0 < h \; \& \; \neg(e=0) \; \& \; \lim_{c \to g\backslash f} d(c) = \infty \; \& \; (c \to g\backslash f) \to \text{контекст}(ab^{d(c)} + e(d(c))^h))$

    Вводится комментарий (Случай $0 < b-1 \;\vee\; b-1 \leq 0$).

    $\forall_{abdefghp}(\neg(a=0) \; \& \; 0 \leq b \; \& \; 0 \leq h \; \& \; \neg(e=0) \; \& \; \lim_{c \to g\backslash f} d(c) = \infty \; \& \; 0 < p \; \& \; (c \to g\backslash f) \to \text{контекст}(a(d(c))^p \cdot b^{d(c)} + eh^{d(c)}))$

    Вводится комментарий (Случай $0 \leq b-h \;\vee\; b-h < 0$).

28. Элементарные преобразования, используемые в дополнение к основным приемам.

(a) Устранение вложенных сумм.

$\forall_{abcd}(c = a + (b + d) \to a + (b + d) = c)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормплюс". Уровень срабатывания этого и следующих двух приемов равен 1.

(b) Степень произведения.

$\forall_{abfghx}((x \to a\backslash b)\ \&\ 0 < f(x)\ \&\ 0 < g(x) \to (f(x)g(x))^{h(x)} = (f(x))^{h(x)}(g(x))^{h(x)})$

(c) Степень степени.

$\forall_{abfghx}((x \to a\backslash b)\ \&\ 0 < f(x) \to ((f(x))^{g(x)})^{h(x)} = (f(x))^{g(x)h(x)})$

(d) Раскрывание скобок.

$\forall_{abcdefgx}((x \to a\backslash f) \to e + b(c + d)/g = e + b(c + d)/g)$

Заменяемый терм обрабатывается нормализаторами "стандплюс", "нормплюс". Переменная x входит в сумму $c + d$. Допускаются вырожденные (но не одновременно) единичные значения b, g. Созданы две версии приема. Первая применяется на уровне 1, причем должны быть выполнены дополнительные условия:

i. Выражения $b, c + d$ не имеют слагаемых вида $A(B + C)$.

ii. Либо преобразуемое вхождение не является "алгебраическим" (т.е. достижимым из корня только через арифметические операции и основания степеней), либо каждое расположенное в нем не под знаком "O" вхождение переменной x является алгебраическим.

Вторая версия применяется на уровне 3. Требуется, чтобы преобразуемое вхождение было алгебраическим.

(e) Устранение минуса перед суммой.

$\forall_{abc}(a = -(b + c) \to -(b + c) = a)$

Выражение $-(b + c)$ обрабатывается нормализатором "нормминус". Уровень срабатывания равен 1.

(f) Устранение модуля.

$\forall_{abfx}((x \to a\backslash b)\ \&\ 0 \leq f(x) \to |f(x)| = f(x))$

$\forall_{abfx}((x \to a\backslash b)\ \&\ f(x) \leq 0 \to |f(x)| = -f(x))$

Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Сложение подобных дробей.

$\forall_{abcdefgx}((x \to g\backslash e) \to d + af(x) + bf(x)/c = d + (ac + b)f(x)/c)$

Переменная x не входит в выражения a, b, c, но входит в $f(x)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcdefghx}((x \to h\backslash g) \to e + af(x)/d + bf(x)/c = e + (ac + bd)f(x)/(cd))$

Аналогично предыдущему.

(h) Приведение подобных членов.

$\forall_{abcfx}((x \to d\backslash e) \to c + af(x) + bf(x) = c + (a + b)f(x))$

Переменная x не входит в выражения a, b. Подобные слагаемые не содержат символа "O". Уровень срабатывания равен 3.

(i) Переход от дроби с неконстантным знаменателем к произведению.
$\forall_{abcdx}((x \to c\backslash d) \to a/b = ab^{-1})$
Переменная x входит в знаменатель b. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Переход к натуральным логарифмам.
$\forall_{abcdx}((x \to c\backslash d) \to \log_a b = \ln b(\ln a)^{-1})$
Переменная x входит в рассматриваемый логарифм. Основание логарифма не равно числу e. Уровень срабатывания равен 2.

(k) Формулы приведения.
$\forall_{ak}(k - \text{целое} \to \cos(\pi k + a) = (-1)^k \cos a)$
$\forall_{ak}(k - \text{целое} \to \sin(\pi k + a) = (-1)^k \sin a)$
Уровень срабатывания равен 2.

29. Завершающее исключение символа "O".

Во всех рассматриваемых далее приемах преобразуемая сумма имеет корневое вхождение, причем все ее слагаемые должны быть идентифицированы с соответствующим выражением теоремы.

$\forall_{abcdeghpx}((x \to e\backslash h) \ \& \ 0 < d - c \ \& \ a = \lim_{x \to e\backslash h} g(x) \ \& \ (a = \infty \ \vee \ a = -\infty) \to b(g(x))^d/p + O((g(x))^c) = b(g(x))^d/p)$

Переменная x не входит в выражения b, c, d, p. Либо с помощью проверочного оператора удается установить, что b не равно 0, либо при обращении к нормализатору был введен комментарий "0", причем усматривается, что $c < 0$. Комментарий "0" используется в тех случаях, когда результат должен быть либо асимптотически равен исходному выражению, либо оба они должны иметь своим пределом 0. Например, этого достаточно, если при вычислении предела некоторого выражения оно заменяется на свою асимптотическую оценку.

Обращения к нормализатору "асимптоценка", связанные с анализом сходимости рядов, могут сопровождаться комментариями "сходится", "суммавсех"либо "сходится", "степень". В этих случаях накладываются дополнительные требования на остаточный член асимптотики. Первая пара комментариев используется приемом, находящим асимптотическую оценку общего члена ряда для анализа его сходимости. Так как ряд не обязательно знакопостоянный, этот прием дополнительно требует от нормализатора "асимптоценка", чтобы сходился ряд, составленный из значений отбрасываемого остаточного члена на последовательных натуральных числах. Вторая пара комментариев возникает в приеме, реализующем признак Гаусса сходимости знакопостоянных рядов. В обоих случаях ограничение на остаточный член распространяется только на первоначальное обращение к нормализатору "асимптоценка", который, в свою очередь, может предпринимать попытки получения асимптотических оценок различных вспомогательных выражений. Чтобы отбрасывать "O" при наличии комментария "сходится", созданы несколько отдельных приемов. Остальные приемы (в том числе рассматриваемый) в этой ситуации блокируются фильтром "или(коммент(сходится) коммент(глуб 1))". Заметим, что комментарии (глуб N) создаются нормализаторами, имеющими в своем описании формата символ "глуб", автоматически. Они указывают глубину рекурсии N. Первоначально N полагается равным 1, а при рекурсивном обращении оно увеличивается на 1. Фактически комментарий копируется, так что во внешнем процессе значение N не изменяется. Уровень срабатывания приема равен 7.

$\forall_{abcdeghix}((x \to e\backslash h)\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ 0<c-d\ \&\ \lim_{x\to e\backslash h} g(x)=0 \to b(g(x))^d/i + O((g(x))^c) = b(g(x))^d/i)$

Переменная x не входит в выражения b, c, d, i. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abcdfgx}(\lim_{x\to d\backslash a} |g(x)| = \infty\ \&\ b = \lim_{x\to d\backslash a} f(x)\ \&\ b -$ число $\&\ (x \to d\backslash a) \to g(x) + O(f(x)) = g(x))$

Слагаемое, не имеющее заголовка "O" и содержащее x, должно быть единственным. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abcdfx}((x \to b\backslash c)\ \&\ a<0\ \&\ \lim_{x\to b\backslash c} f(x) = \infty \to d + O((f(x))^a) = d)$

Переменная x не входит в d. Либо усматривается, что d не равно 0, либо имеется комментарий "0". Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abfx}((x \to a\backslash b)\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} f(x) = 0 \to O(f(x)) = 0)$

Должен присутствовать комментарий "0". Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abcdfgx}((x \to b\backslash c)\ \&\ 0<a\ \&\ \lim_{x\to b\backslash c} f(x) = 0 \to d + O((f(x))^a) = d)$

Либо усматривается, что d отлично от 0, либо имеется комментарий "0". Либо x не входит в d, либо имеются комментарии "0", "сходится", "степень". В отличие от предыдущих, данный прием уже допускает наличие комментария "сходится", но только в сочетании с комментарием "степень". Эта пара комментариев возникает в приеме, реализующем признак Гаусса сходимости знакопостоянных рядов. Она обеспечивает там необходимое ограничение на рост остаточного члена.

$\forall_{abfgx}(\lim_{x\to b\backslash a}(g(x)/|f(x)|) = 0\ \&\ (x \to b\backslash a) \to f(x) + O(g(x)) = f(x))$

Выражения $f(x), g(x)$ не содержат символа "O". Переменная x входит во второе из этих выражений, первое - имеет не более одного содержащего x слагаемого. Отбрасываются случаи степенных $f(x), g(x)$, учтенные в описанных выше приемах. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{abfghx}(\lim_{x\to b\backslash a}(g(x)/|f(x)|) = 0\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a}(h(x)/|f(x)|) = 0\ \&\ (x \to b\backslash a) \to f(x) + O(g(x)) + O(h(x)) = f(x))$

Выражения $f(x), g(x), h(x)$ не содержат символа "O". Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{abfghx}((x \to \infty)\ \&$ сходится$(\lambda_n(\sum_{x=1}^{n} |g(x)|, n-$натуральное$)) \to f(x)+O(g(x)) = f(x))$

Прием применяется при наличии комментариев "сходится", (глуб 1), "суммавсех". Выражение $f(x)$ не должно содержать символ "значение". Второй антецедент выражает сходимость последовательности частичных сумм - именно в таком виде решатель записывает условие сходимости ряда. Этот антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Уровень срабатывания равен 8. При наличии комментариев "сходится", "степень", (глуб 1) применяются следующие приемы:

$\forall_{abcfgx}(c = \lim_{x\to b\backslash a}(\ln g(x)/\ln x)\ \&\ c -$ число $\&\ c<0\ \&\ (x \to b\backslash a) \to f(x) + O(g(x)) = f(x))$

$\forall_{abfg}((x \to b\backslash a)\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a} f(x) = -\infty\ \&\ \lim_{x\to b\backslash a}(g(x)/f(x)) = 0 \to f(x) + O(g(x)) = f(x))$

Уровень срабатывания равен 8. В заключение приведем прием, применяемый при наличии комментария "0":

$\forall_{abfgx}((x \to a\backslash b)\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} f(x) = 0 \to g(x) + O(f(x)) = g(x))$

Уровень срабатывания равен 6.

30. Выдача отказа.

    Отказ выдается, если на уровне 9 обнаруживается, что преобразуемый терм содержит символ "O". Теорема приема имеет вид:

    $\forall_a(a = \text{отказ})$

31. Нормализатор "нормO". Для быстрого упрощения выражений вида "O(...)", создаваемых приемами нормализатора "асимптоценка", создан нормализатор "нормO". Он имеет единственный прием:

    $\forall_{abcdfx}((x \to a\backslash b) \to O(cf(x)/d) = O(f(x)))$

    Выражения c, d не должны содержать переменной x.

Формула Стирлинга

$\forall_n((n \to \infty)\ \&\ m(n) - \text{целое}\ \&\ \lim_{n\to\infty}\{m(n)\} = \infty \to m(n)! = \sqrt{2\pi m(n)}(m(n))^{m(n)} \cdot \exp(-m(n)))$

Прием применяется к обобщенному множителю (подвыражению, достижимому из корня выражения только через умножения, дроби, минусы и основания степеней) условия задачи на преобразование, имеющей цель "асимптоценка". Уровень срабатывания равен 2.

Нахождение асимптотической оценки основания степени, являющейся обобщенным множителем условия

$\forall_{abcfgh}((x \to a\backslash b)\ \&\ h = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b}(g(x)\ln(f(x)/h(x))) = c\ \&\ c - \text{число} \to (f(x))^{g(x)} = \exp c(h(x)^{g(x)}))$

Степень представляет собой обобщенный множитель условия задачи на преобразование, имеющей цель "асимптоценка". Выражение $f(x)$ представляет собой сумму. Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обрабатывает это выражение нормализатором "асимптоценка". Рассматриваемая степень не должна являться подвыражением другой степени, показатель которой зависит от x. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

Разбор случаев при нахождении асимптотической оценки выражения, содержащего целую часть дроби

Если целая часть является заголовком обобщенного множителя преобразуемого выражения, то она просто отбрасывается. Если же это не так, то для ее устранения иногда приходится аккуратно рассматривать серию случаев. Здесь используется следующий прием:

$\forall_{kn}((n \to \infty) \to \exists_i(i \in \{0, \ldots, k-1\}\ \&\ n(\mathrm{mod}\ k) - i = 0))$

Указатель "контрольвывода(целаячасть(дробь(x14 x11)))" определяет попытку применения приема при усмотрении в условии задачи на преобразование, имеющей цель "асимптоценка", подвыражения "$[n/k]$", где k - натуральная константа. Прием выводит новую посылку - дизъюнкцию, в которую квантор существования разворачивается согласно указателю "или(...)". Эта посылка снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 4.

Использование интеграла для получения асимптотической оценки суммы

$\forall_{abcdfP}((x \to a\backslash b)$ & $\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,i)di$ & $\lim_{x\to a\backslash b}(f(x,c(x))/P(x)) = 0$ & $\lim_{x\to a\backslash b}(f(x,d(x))/P(x)) = 0$ & невозрастает$(\lambda_i(f(x,i), i -$ число$), \mathbb{Z}\cap[c(x),d(x)]) \to \sum_{i=c(x)}^{d(x)} f(x,i) = P(x))$

$\forall_{abcdfP}((x \to a\backslash b)$ & $\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,i)di$ & $\lim_{x\to a\backslash b}(f(x,c(x))/P(x)) = 0$ & $\lim_{x\to a\backslash b}(f(x,d(x))/P(x)) = 0$ & неубывает$(\lambda_i(f(x,i), i -$ число$), \mathbb{Z}\cap[c(x),d(x)]) \to \sum_{i=c(x)}^{d(x)} f(x,i) = P(x))$

Конечная сумма представляет собой обобщенный множитель условия задачи на преобразование, имеющей цель "асимптоценка". Требуется, чтобы она не была расположена внутри степенного выражения, показатель которого зависит от x. Второй антецедент вычисляет интеграл, используя вспомогательную задачу на преобразование. Результат $P(x)$ не должен содержать символ "интеграл". Если выражение под суммой содержит символы "числосочетаний", "факториал", то попытка применения приема блокируется. Введен слабый ограничитель трудоемкости. По каждой из приведенных двух теорем созданы две версии приема. Одна срабатывает на уровне 4, другая - на уровне 5. В последнем случае обращение к проверочным операторам "усмневозрастает", "усмнеубывает" сопровождается усиливающим комментарием "производная".

Асимптотическое поведение суммы произведений биномиальных коэффициентов на значения некоторой функции

$\forall_{abcdfghprn}((n \to \infty)$ & $g \le f(k)/q(k)$ & $f(k)/q(k) \le h$ & $p(c) = \lim_{n\to\infty}(h/g)$ & $\lim_{c\to 0+0} p(c) = 1$ & $f(k)/q(k) \le r$ & $\lim_{n\to\infty}(r/(f(n/2)d^n)) = 0$ & $0 < f(k)$ & $0 < q(k) \to \sum_{k=a}^{n+b}(f(k)C_n^k/q(k)) = f(n/2)2^n/q(n/2))$

Конечная сумма является обобщенным множителем условия задачи на преобразование, имеющей цель "асимптоценка". Как и выше, требуется, чтобы она не располагалась в степенном выражении с показателем, зависящим от x. Второй и третий антецеденты обрабатываются синтезаторами, определяющими нижнюю и верхнюю оценки g, h отношения $f(k)/g(k)$. При обращении к синтезаторам вводятся дополнительные посылки "$k-$число","$k \in \{[(1-2c)n/2], \ldots, [(1+2c)n/2]\}$","$c-$число","$0 < c$", "$c \to 0+0$". Здесь c - вспомогательная переменная, которая может войти в выражения g, h. Кроме того, обращения сопровождаются комментарием (независит k), обеспечивающим независимость этих выражений от k. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он вычисляет предел $p(c)$ отношения оценок с помощью нормализатора "нормпредел". Аналогичным образом, пятый антецедент убеждается, что $p(c)$ стремится к единице при стремлении c к нулю. Шестой антецедент обрабатывается синтезатором, определяющим верхнюю оценку r выражения $f(k)/g(k)$ на всем промежутке от a до $n + b$. Седьмой антецедент убеждается, что r мало по сравнению с $f(n/2)d^n$, где d - произвольное число, большее единицы. Уровень срабатывания равен 3.

1.3.2 Перемена знака в окрестности точки

Утверждение "переменазнака($f\ a$)" означает, что вещественная функция f одной переменной обращается в ноль в точке a, причем в малой проколотой окрестности этой точки она не равна нулю и имеет противоположные знаки слева и справа от a. Формульным редактором символ "переменазнака" прорисовывается так же, как текстовым.

Проверочный оператор "переменазнака"

Для усмотрения истинности утверждения "переменазнака($f\ a$)" создан проверочный оператор "переменазнака". Он имеет следующие приемы:

1. Простейшие нечетные функции.

   переменазнака$(\lambda_x(x, x - \text{число}), 0)$

   переменазнака$(\lambda_x(\sin x, x - \text{число}), 0)$

   переменазнака$(\lambda_x(\operatorname{tg} x, x - \text{число}), 0)$

   переменазнака$(\lambda_x(\operatorname{arctg} x, x - \text{число}), 0)$

   Уровень срабатывания приемов равен 1.

2. Отбрасывание минуса.

   $\forall_{abfx}$(переменазнака$(\lambda_x(f(x), x{-}\text{число})a) \rightarrow$ переменазнака$(\lambda_x(-f(x), x{-}\text{число}), a))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3. Степень с рациональным показателем, имеющим нечетные числитель и знаменатель.

   $\forall_{abcfx}(a{-}\text{rational}\ \&\ \neg(\text{числитель}(a){-}\text{even})\ \&$ переменазнака$(\lambda_x(f(x), x{-}\text{число}), b) \rightarrow$ переменазнака$(\lambda_x((f(x))^a, x - \text{число}), b))$

   Антецеденты обрабатываться проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

4. Линейная функция.

   $\forall_{abcde}(\neg(a = 0)\ \&\ ad + e = 0 \rightarrow$ переменазнака$(\lambda_x(ax + e, x - \text{число}), d))$

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 2.

5. Синус.

   $\forall_{ab}(\neg(a = 0)\ \&\ \sin(ab) = 0 \rightarrow$ переменазнака$(\lambda_x(\sin(ax), x - \text{число}), b))$

   Созданы две версии приема, срабатывающих на уровне 1. Первая применяется в отсутствии комментария "знаменатель", вторая - при его наличии. У второй версии отсутствует первый антецедент. Заметим, что комментарий "знаменатель" у данного проверочного оператора означает замену требования перемены в точке "строгого" знака на требование перемены "нестрогого" знака.

6. Отбрасывание ненулевого сомножителя.

   $\forall_{abcfgy}(\neg(f(y) = 0)$ & переменазнака$(\lambda_x(g(x), x -$ число$), y) \rightarrow$ переменазнака$(\lambda_x(f(x)g(x), x -$ число$), y))$

   Анецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

7. Отбрасывание ненулевого знаменателя.

   $\forall_{abcfgy}(\neg(f(y) = 0)$ & переменазнака$(\lambda_x(g(x), x -$ число$), y) \rightarrow$ переменазнака$(\lambda_x(g(x)/f(x), x -$ число$), y))$

   Аналогично предыдущему.

8. Определение перемены знака с помощью производной.

   $\forall_{abfx}(a = df(b)/db$ & $\neg(a = 0)$ & $f(b) = 0 \rightarrow$ переменазнака$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), b))$

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть сначала обрабатывается нормализатором "нормпроизводная", а затем - вспомогательной задачей на преобразование, имеющей цели "упростить", "сложитьдроби". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор", причем его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор "упрощзнак"

Для упрощения анализа промежутков сохранения функцией вещественного переменного своего знака создан нормализатор "упрощзнак". Он предпринимает попытку перейти к более простому выражению с сохранением знака исходного выражения. Нормализатор является корневым, т.е. приемы применяются только ко всему выражению в целом.

1. Устранение сомножителей с известным знаком.

   $\forall_{ab}(0 < a \rightarrow ab = b)$

   $\forall_{ab}(a < 0 \rightarrow ab = -b)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Обращение к обработке выражения, заключенного под знаком "минус".

   $\forall_{ab}(a = b \rightarrow -b = -a)$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "упрощзнак". Заменяющий терм обрабатывается нормализатором "нормминус". Уровень срабатывания равен 1.

3. Устранение сомножителя знаменателя с известным знаком.

   $\forall_{abc}(0 < a \rightarrow b/ac = b/c)$

   $\forall_{abc}(a < 0 \rightarrow b/ac = -b/c)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

4. Устранение сомножителя числителя с известным знаком.

   $\forall_{abc}(0 < a \to ab/c = b/c)$

   $\forall_{abc}(a < 0 \to ab/c = -b/c)$

   Аналогично предыдущему.

1.3.3 Ограниченность

Для обозначения того, что числовая функция f на множестве A ограничена, служит утверждение "ограничена(f A)". Так как условия ограниченности функций обычно возникали в виде подлежащих проверке антецедентов теорем приемов, на практике оказалось удобным пользоваться не этим утверждением, а контекстно-определенной его версией "ограничено(F)". Она означает ограниченность множества значений, принимаемых в текущем контексте численным выражением F. При наличии посылки $x \to a\backslash b$ выражение должно быть ограничено в некоторой окрестности точки a, при этом прочие переменные предполагаются зафиксированными. Имеется бесконтекстная версия "огрвточке(f a)", означающая, что числовая функция f ограничена в некоторой окрестности точки a. Наконец, введено обозначение "неограничено(f)", означающее, что числовая функция f определена в окрестности плюс-бесконечности и при стремлении аргумента к плюс-бесконечности имеет предел плюс-бесконечность.

Свойство ограниченности функций при обучении решателя затрагивалось лишь косвенным образом, и все связанные с ним приемы относятся к трем несложным проверочным операторам.

Проверочный оператор "ограничено"

Оператор обеспечивает проверку условия "ограничено(F)". Он имеет следующие приемы:

1. Ограниченность синуса и косинуса.

   $\forall_a$(ограничено$(\sin a)$)

   $\forall_a$(ограничено$(\cos a)$)

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Ограниченность суммы.

   $\forall_{ab}$(ограничено(a) & ограничено(b) $\to$ ограничено($a+b$))

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

3. Ограниченность произведения.

   $\forall_{ab}$(ограничено(a) & ограничено(b) $\to$ ограничено(ab))

   Аналогично предыдущему.

4. Ограниченность константы.

   $\forall_a$(ограничено(a)).

   Либо выражение a константное, либо имеется хотя бы одна посылка вида "$x \to b\backslash c$", причем ни одна из таких переменных x не входит в a. Уровень срабатывания равен 1.

5. Отбрасывание минуса и модуля.

   $\forall_a$(ограничено$(a) \to$ ограничено$(-a)$)

   $\forall_a$(ограничено$(a) \to$ ограничено$(|a|)$)

   Уровень срабатывания равен 1.

6. Ограниченность степени.

   $\forall_a$(ограничено$((-1)^a)$)

   Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ab}$(ограничено(a) & $0 < b$ & ограничено$(b) \to$ ограничено(a^b))

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ab}(0 < b$ & $(a \to \infty) \to$ ограничено(a^{-b}))

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй берется в контексте. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ab}(0 \leq a$ & $0 \leq 1 - a$ & $0 \leq b \to$ ограничено(a^b))

   Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

7. Ограниченность дроби.

   $\forall_{abc}$(ограничено(a) & $c \leq |b|$ & $0 < c \to$ ограничено(a/b))

   Второй антецедент обрабатывается синтезатором. Он находит константную нижнюю оценку c модуля знаменателя. Первый и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ab}$(ограничено(a) & $\neg(b = 0) \to$ ограничено(a/b))

   Либо выражение b константное, либо имеются посылки вида "$x \to c \backslash d$", и ни одна из переменных x не входит в b. Уровень срабатывания равен 3.

8. Ограниченность обратных тригонометрических функций.

   $\forall_a$(ограничено$(\arcsin a)$)

   $\forall_a$(ограничено$(\arccos a)$)

   $\forall_a$(ограничено$(\mathrm{arctg}\, a)$)

   $\forall_a$(ограничено$(\mathrm{arcctg}\, a)$)

   Уровень срабатывания равен 1.

Проверочный оператор усмотрения неограниченности функции в точке "усмнеогрвточке"

1. Бесконечный предел.

   $\forall_{abfg}(\lim_{x \to a} f(x) = b$ & $(b = \infty \ \vee \ b = -\infty) \to \neg$(огрвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$))

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

2. Произведение синуса либо косинуса непрерывной функции, имеющей бесконечный предел, на функцию, имеющую бесконечный предел.

   $\forall_{afgh}(\lim_{x\to a} f(x) = b \;\&\; (b = \infty \;\vee\; b = -\infty) \;\&\; \lim_{x\to a} g(x) = c \;\&\; (c = \infty \;\vee\; c = -\infty) \;\&\;$ непрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), \mathrm{set}(x -$ число $\&\; (x \to a))) \to \neg($огрвточке$(\lambda_x(f(x)\sin g(x), h(x)), a)))$

   Вместо синуса при идентификации может рассматриваться косинус. Первые четыре антецеденты выделены указателем "идентиифкатор", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3. Отбрасывание минуса.

   $\forall_{fg}(\neg($огрвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)) \to \neg($огрвточке$(\lambda_x(-f(x), g(x)), a)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Отбрасывание ограниченного слагаемого.

   $\forall_{fgh}($ограничено$(f(x)) \;\&\; \neg($огрвточке$(\lambda_x(g(x), h(x)), a)) \to \neg($огрвточке$(\lambda_x(f(x)+g(x), h(x)), a)))$

   Уровень срабатывания равен 3.

Проверочный оператор усмотрения неограниченного роста функции при неограниченном росте аргумента "усмнеограничено"

1. Неограниченность переменной.

   $\forall_x($неограничено$(\lambda_x(x, x -$ число$)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Неограниченность произведения.

   $\forall_{fg}($неограничено$(\lambda_x(f(x), x -$ число$)) \;\&\;$ неограничено$(\lambda_x(g(x), x -$ число$)) \to$ неограничено$(\lambda_x(f(x)g(x), x -$ число$)))$

   Уровень срабатывания равен 2.

3. Неограниченность степени.

   $\forall_{fn}(0 < n \;\&\;$ неограничено$(\lambda_x(f(x), x -$ число$)) \to$ неограничено$(\lambda_x((f(x))^n, x -$ число$)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Неограниченность дроби.

   $\forall_{af}(0 < a \;\&\;$ неограничено$(\lambda_x(f(x), x -$ число$)) \to$ неограничено$(\lambda_x(f(x)/a, x -$ число$)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

5. Неограниченность суммы.

   $\forall_{af}($неограничено$(\lambda_x(f(x), x -$ число$)) \to$ неограничено$(\lambda_x(a + f(x), x -$ число$)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

1.3.4 Доказательство неравенств с помощью производной

Выбор переменной дифференцирования и обращение к вспомогательной задаче

Попытка доказательства неравенства с помощью производной предпринимается лишь на достаточно высоком уровне, когда элементарные средства оказались недостаточными. Начинается она с того, что выбирается переменная дифференцирования и происходит обращение к вспомогательной задаче на доказательство, комментарий (нижняягрань x) которой определяет выбранную переменную x. Эти действия выполняются следующими приемами:

$\forall_{ab}(a < b \rightarrow a < b)$

$\forall_{ab}(a \leq b \rightarrow a \leq b)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Рассматриваемое неравенство является условием задачи на доказательство. Указатель "контекст(входит(переменная(x23)корень) переменная(x23))" определяет идентификацию x с произвольной переменной данного неравенства. Далее проверяется наличие посылки "$x-$число" и отсутствие посылок "$x-$целое","$x-$натуральное". Антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, решаемой с тем же максимальным уровнем, что и текущая задача. Эта задача снабжается комментарием (нижняягрань x). Если текущая задача уже имела комментарий такого вида, то прием блокируется. Если текущая задача имела посылки с заголовками "целое", "натуральное", то уровень срабатывания приема равен 7, иначе он равен 6.

Переход к рассмотрению нижней грани вспомогательной числовой функции

При доказательстве неравенства путем дифференцирования по заданной переменной x сначала предпринимаются несложные эквивалентные преобразования, облегчающие последующие выкладки, а затем вводится обозначение f для вспомогательной функции, зависящей от x. Далее вновь все сводится к вспомогательной задаче на доказательство, в которой доказывается уже не неравенство, а утверждение вида "нижняягрань(0 образ(f A))" либо "Нижняягрань(0 образ(f A))". Здесь "нижняягрань(a B)" означает, что число a является нестрогой нижней гранью числового множества B, а "Нижняягрань(a B)" соответствует случаю строгой нижней грани. Выбор новой переменной f для обозначения исследуемой функции позволяет выводить компактно записываемые следствия о свойствах этой функции (корни производной, особые точки и т.п.).

$\forall_{abcf}(\text{Нижняягрань}(0, \text{образ}(f, \text{set}_x(c))) \rightarrow a < b)$

$\forall_{abcf}(\text{нижняягрань}(0, \text{образ}(f, \text{set}_x(c))) \rightarrow a \leq b)$

Неравенство является условием задачи на доказательство. Указатель "контекст(комментарий(нижняягрань x23)равно(x3 унисборка(и выписка(посылка(x4)входит(x23 x4)терм(x4)))))" идентифицирует переменную x из комментария (нижняягрань x). Здесь же определяется утверждение c - конъюнкция всех содержащих x посылок задачи. Эта конъюнкция обрабатывается вспомогательной задачей на описание, разрешающей ее относительно x явным образом. Выражение $\text{set}_x(c)$ обрабатывается нормализатором "нормкласс". В качестве f выбирается новая переменная. Антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, максимальный уровень которой равен максимальному уровню текущей задачи. Этой задаче передается посылка - определение функции f: "$\lambda_x(b - a, x - \text{число}) = f$". Одновременно у нее отбрасываются все старые посылки, содержащие x. Уровень срабатывания равен 3.

Вычисление производной

При решении введенной в предыдущем пункте задачи на доказательство предпринимается попытка вычислить производную и занести в посылки равенство, ее определяющее:

$\forall_{afgh}(f = \lambda_x(g(x), x - \text{число})\ \&\ a = dg(x)/dx \to \lambda_x(a, x - \text{число}\ \&\ \text{одз}(a)) = h\ \&\ \text{Производная}(f, h))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство. Проверяется, что условие этой задачи имеет вид "нижняягрань(0 образ(f A))" либо "Нижняягрань(0 образ(f A))". Проверяется также отсутствие посылки вида "Производная(f ...)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается сначала нормализатором "нормпроизводная", а затем - вспомогательной задачей на преобразование. Утверждение "$x - \text{число}\ \&\ \text{одз}(a)$" обрабатывается вспомогательной задачей на описание для явного разрешения относительно переменной x. Уровень срабатывания равен 1.

Вычисление корней производной

Для производной g, найденной в предыдущем пункте, предпринимается попытка найти корни на том множестве b, где нужно доказать неравенство. После этого вводится посылка вида "$\text{roots}(g, b) = \ldots$":

$\forall_{abfguv}(g = \lambda_x(u(x), v(x))\ \&\ \text{Производная}(f, g)\ \&\ a = \text{set}_x(u(x) = 0\ \&\ x \in b) \to \text{roots}(g, b) = a)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство. С условием этой задачи идентифицируется утверждение "нижняягрань(0 образ(f b))" либо "Нижняягрань(0 образ(f b))". Проверяется отсутствие уже введенных ранее посылок вида "$\text{roots}(g, b) = \ldots$". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Утверждения под описателем "класс" в его правой части разрешаются явным образом относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание, которой передается дополнительная цель "корни". Эта цель будет учитываться при инициализации попыток усмотрения отсутствия корней с помощью дальнейшего дифференцирования. Ориентация нового равенства закрепляется. Уровень срабатывания равен 1.

Определение множества точек, где производная не определена либо не найдена

$\forall_{bfguv}(\text{Производная}(f, g)\ \&\ g = \lambda_x(u(x), v(x)) \to b \setminus \text{Dom}(g) = \text{set}_x(x \in b\ \&\ \neg(v(x))))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство. С условием этой задачи идентифицируется утверждение "нижняягрань(0 образ(f b))" либо "Нижняягрань(0 образ(f b))". Утверждение "$x \in b\ \&\ \neg(v(x))$" обрабатывается вспомогательной задачей на описание для явного разрешения относительно переменной x. Внешнее выражение $\mathrm{set}_x(\ldots)$ обрабатывается нормализатором "нормкласс". Проверяется отсутствие ранее введенных посылок вида "$b \setminus \mathrm{Dom}(g) = \ldots$". Уровень срабатывания равен 1.

Обращение к нормализаторам "нормнижняягрань", "нормНижняягрань"

После того, как найдены множество корней производной и множество особых точек, нормализаторы "нормнижняягрань", "нормНижняягрань" преобразуют условие задачи на доказательство в одно или несколько неравенств, либо в кванторную серию неравенств. Дальнейшее решение этой задачи будет продолжаться обычными сребствами. Нормализаторы были подробно описаны в предыдущей книге - в разделе, посвященном числовым множествам. Для обращения к ним служат следующие приемы:

$\forall_{abcf}(a = \text{Нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) \rightarrow \text{Нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) = a)$

$\forall_{abcf}(a = \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) = a)$

Заменяемый терм идентифицируется с условием задачи на доказательство, имеющей посылки "Производная(f g)", "равно(корни(g c)...)", "равно(разность(c область(g)) ...)". Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается соответствующим нормализатором. Проверяется, что после обработки заголовок правой части (т.е. "Нижняягрань" либо "нижняягрань") исключается. Уровень срабатывания равен 2.

Определение нецелесообразности попытки доказательства неравенства элементарными средствами - оператор "фильтрнеравенства"

Чтобы не тратить время на применение стандартных средств доказательства неравенств в подозрительно нестандартных ситуациях, создан оператор фильтра "фильтрнеравенства". Он упоминался в приемах предыдущей книги, связанных с доказательством неравенств. Оператор является истинным (т.е. блокирующим элементарные средства) в следующих случаях:

1. Существует переменная, имеющая в доказываемом неравенстве единственное алгебраическое вхождение (т.е. достижимое из корня только через арифметические операции, модули, равенства, неравенства и через основания степеней). При этом некоторое другое вхождение данной переменной не является алгебраическим.

2. Существует переменная, имеющая в неравенстве единственное вхождение под тригонометрической операцией (синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс) и при этом имеющая также вхождение не под тригонометрическими операциями.

3. Существует переменная, имеющая в неравенстве единственное вхождение под одной из операций "логарифм", "арксинус", "арктангенс", "арккосинус", и имеющая также вхождение не под этой же операцией.

4. Существует переменная, имеющая в неравенстве единственное вхождение в показателе степени и имеющая при этом вхождение не в показателе степени.

Преобразование неравенства перед дифференцированием

После того, как выбрана переменная дифференцирования, но до перехода к рассмотрению нижней грани, могут оказаться полезными преобразования неравенства, упрощающие действия после дифференцирования:

1. Деление на алгебраическое выражение, являющееся множителем при трансцендентном выражении.

   $\forall_{abc}(0 < a \to 0 < ab + c \leftrightarrow 0 < b + c/a)$

   $\forall_{abc}(a < 0 \to 0 < ab + c \leftrightarrow b + c/a < 0)$

   Неравенство является условием задачи на доказательство, имеющей комментарий (нижняягрань x). Заголовком выражения b служит один из символов "логарифм", "арктангенс", "арксинус", "арккосинус". Переменная x входит в это выражение, причем любое ее вхождение в выражения a, c является алгебраическим. Указатели "альтернатива", "дробь" разрешают рассмотрение нестрогих неравенств и перестановку частей неравенства. Уровень срабатывания равен 1.

2. Разбор случаев по знаку алгебраического множителя при трансцендентном выражении.

   $\forall_b(0 < b \ \vee \ b < 0 \ \vee \ b = 0)$

   Указатель "контрольвывода(плюс(умножение(x1 x2)x3))" инициирует применение приема при усмотрении выражения вида "$ab+c$" в условии задачи на доказательство, обладающей комментарием (нижняягрань x). Проверяется, что это выражение является одной из частей доказываемого неравенства. Выражение a имеет своим заголовком один из символов "логарифм", "арктангенс", "арксинус", "арккосинус". Оно содержит переменную x, причем выражения b, c не имеют неалгебраических вхождений данной переменной. Уровень срабатывания равен 2.

3. Группировка трансцендентных выражений.

   $\forall_{abcde}(a \ln b + c \ln b + d < e \leftrightarrow (a + c) \ln b + d < e)$

   Неравенство является условием задачи на доказательство, имеющей комментарий (нижняягрань x). Переменная x входит в b и не имеет неалгебраических вхождений в выражениях a, c, d. Допускается перестановка частей неравенства. Уровень срабатывания равен 2.

4. Деление на экспоненту.

   $\forall_{abc}(0 < \exp(a)b + c \leftrightarrow 0 < b + c/\exp(a))$

   Неравенство является условием задачи на доказательство, имеющей комментарий (нижняягрань x). Переменная x входит в a и не входит в b. Выражение c не является суммой. Допускается рассмотрение нестрогих неравенств и перестановка частей неравенства. Уровень срабатывания равен 1.

Попытки угадать часть корней производной и подразбить промежуток их поиска

Данный прием ориентирован на очень частный случай - когда ноль оказывается корнем производной. Если это так, то далее реализуется разбор случаев для точки ноль и двух полупрямых (предполагается, что на этих полупрямых удастся доказать отсутствие корней, используя дальнейшее дифференцирование). Конечно, этот случай вряд ли стоило бы особо выделять, но в искусственно подобранных задачах нулевое значение корня встречается сравнительно часто. Кроме того, прием можно обобщить, используя какие-то более развитые средства угадывания корня.

$\forall_{fgx}(f(0) - g(0) = 0 \ \& \ f(x) = g(x) \to x = 0 \ \lor \ 0 < x \ \lor \ x < 0)$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Второй антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "корни". Должно отсутствовать условие, имеющие вид отрицания равенства x нулю либо вид неравенства для x, позволяющего определить его нестрогий знак. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Попытка применения приема предпринимается только в случае истинности оператора фильтра "диффильтр". Этот оператор введен для усмотрения целесообразности попытки доказательства отсутствия корней производной путем повторного дифференцирования. Он истинен в следующих случаях:

1. Неизвестная часть уравнения имеет как слагаемые с неалгебраическим вхождением неизвестной, так и неизвестные слагаемые без таких вхождений, причем количество слагаемых одного из этих типов равно 1. Либо существует слагаемое неизвестной части уравнения, представляющее собой относительно неизвестной одночлен степени от 1 до 5, либо существует слагаемое неизвестной части, имеющее вид произведения неизвестного сомножителя с заголовком "логарифм", "арксинус", "арктангенс" либо "арккосинус", на многочлены от неизвестной степени не выше 5.

2. Неизвестная часть уравнения имеет вид произведения неизвестного сомножителя с заголовком "логарифм", "арксинус", "арктангенс" либо "арккосинус", на выражение, не имеющее неалгебраических вхождений неизвестной.

Уровень срабатывания приема равен 1.

Попытки доказать отсутствие корней производной путем повторного дифференцирования

1. Использование концов промежутка для угадывания знака неравенства.

   $\forall_{afgx}(x < a \ \& \ 0 < \lim_{x\to a-0}(g(x) - f(x)) \ \& \ f(x) < g(x) \to \neg(f(x) = g(x)))$

   $\forall_{afgx}(a < x \ \& \ 0 < \lim_{x\to a+0}(g(x) - f(x)) \ \& \ f(x) < g(x) \to \neg(f(x) = g(x)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Равенство $f(x) = g(x)$ идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "корни". Первый антецедент представляет собой другое условие этой задачи, причем вместо строгого неравенства допускается нестрогое. Переменная x идентифицируется с неизвестной. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, предварительно для вычисления предела используется нормализатор "нормпредел". Третий антецедент обрабатывается задачей на доказательство, которой передается комментарий (нижняягрань x). Это обеспечивает немедленную попытку доказательства с помощью дифференцирования. Попытка применения приема предпринимается, если истинен указанный выше оператор фильтра "диффильтр". Кроме того, требуется отсутствие другого неравенства, ограничивающего x с той же стороны, что и первый антецедент. Уровень срабатывания равен 2. При отсутствии явного неравенства для x рассматривается поведение разности частей уравнения на бесконечности соответствующего знака:

$\forall_{afgx}(0 < \lim_{x\to-\infty}(g(x) - f(x))\ \&\ f(x) < g(x) \to \neg(f(x) = g(x)))$

$\forall_{afgx}(0 < \lim_{x\to\infty}(g(x) - f(x))\ \&\ f(x) < g(x) \to \neg(f(x) = g(x)))$

Приемы аналогичны предыдущим.

2. Использование особых внутренних точек для угадывания знака неравенства.

   $\forall_{fgx}(0 < g(0) - f(0)\ \&\ f(x) < g(x) \to \neg(f(x) = g(x)))$

   В качестве особой внутренней точки берется ноль. Предварительно проверяется отсутствие неравенства либо отрицания равенства для x, делающего ноль заведомо недопустимым. В остальном прием аналогичен приемам предыдущего пункта.

1.3.5 Общее исследование функций с помощью пределов и производных

Точная верхняя и нижняя грани значений функции на множестве

В этом подразделе описываются приемы, применяемые для решения задач на преобразование с условиями вида "sup(образ(f, a))", "inf(образ(f, a))", где функция f явно определена при помощи описателя "отображение".

1. Ввод обозначения для рассматриваемой функции. Прежде всего, функция обозначается посредством некоторой новой переменной f, а к посылкам задачи присоединяется равенство, определяющее эту переменную:

   $\forall_{afuv}(\inf(\text{образ}(\lambda_x(u(x), v(x)), a)) = \inf(\text{образ}(f, a)))$

   $\forall_{afuv}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(u(x), v(x)), a)) = \sup(\text{образ}(f, a)))$

   Преобразуемое выражение является условием задачи на преобразование. В качестве f выбирается новая переменная; к посылкам присоединяется утверждение "$\lambda_x(u(x), v(x)) = f$". Заметим, что имеющиеся приемы ориентации равенства фиксируют данный порядок его частей, препятствующий последующему исключению f. При наличии в условии задачи символа "целаячасть" прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

2. Вычисление производной.

   $\forall_{afgh}(f = \lambda_x(g(x), x - \text{число})\ \&\ a = dg(x)/dx \to \lambda_x(a, x - \text{число}\ \&\ \text{одз}(a)) = h\ \&\ \text{Производная}(f, h))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Попытка применения приема начинается с того, что первый антецедент идентифицируется с некоторой посылкой задачи на преобразование. Проверяется, что условие задачи имеет вид "sup(образ(f, M))" либо "inf(образ(f, M))" и что отсутствует посылка вида "Производная($f\ldots$)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпроизводная" и вспомогательной задачей на преобразование. Утверждение "x – число & одз(a)" явно разрешается относительно x при помощи вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 1.

3. Вычисление корней производной.

   $\forall_{abcdfguv}(g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & Производная(f, g) & $a = \mathrm{set}_x(u(x) = 0$ & $x \in b) \rightarrow \mathrm{roots}(g, b) = a)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента берутся в посылках задачи на преобразование, имеющей условие вида "sup(образ(f, b))" либо "inf(образ(f, b))". Проверяется отсутствие посылки вида "$\mathrm{roots}(g, b) = \ldots$". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Утверждение "$u(x) = 0$ & $x \in b$" в его правой части разрешается относительно x вспомогательной задачей на описание, которой передается также цель "корни". Чтобы заблокировать ненужные действия, у этой задачи отбрасываются посылки, содержащие символы "Производная", "отображение", "область". Выражение "set(...)" обрабатывается после этого нормализатором "нормкласс". Уровень срабатывания равен 1.

4. Определение множества точек, где производная не определена либо не найдена.

   $\forall_{bfguv}$(Производная(f, g) & $g = \lambda_x(u(x), v(x)) \rightarrow b\backslash\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{set}_x(x \in b \,\&\, \neg v(x)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента берутся в посылках задачи на преобразование, имеющей условие вида "sup(образ(f, b))" либо "inf(образ(f, b))". Проверяется отсутствие посылки вида "$b \setminus \mathrm{Dom}(g) = \ldots$". Утверждение "$x \in b$ & $\neg v(x)$" разрешается относительно x вспомогательной задачей на описание. К внешнему описателю применяется нормализатор "нормкласс". Уровень срабатывания равен 1.

5. Обращения к нормализаторам "норминф", "нормсуп". После того, как найдены корни и особые точки проивзодной, применяются нормализаторы "норминф", "нормсуп", описанные в разделе "числовые множества" предыдущей книги:

   $\forall_{abf}(a = \inf(\text{образ}(f, b)) \rightarrow \inf(\text{образ}(f, b)) = a)$

   $\forall_{abf}(a = \sup(\text{образ}(f, b)) \rightarrow \sup(\text{образ}(f, b)) = a)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Заменяемая часть равенства идентифицируется с условием задачи на преобразование, имеющей посылки "Производная(f, g)", "корни$(g, b) = \ldots$", а также посылку "$b \setminus \mathrm{Dom}(g) = \ldots$" либо "$b \subseteq \mathrm{Dom}(g)$". Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается соответствующим нормализатором вычисления точной грани - верхней либо нижней. Уровень срабатывания равен 5.

6. Отбрасывание корневой одноместной операции.

   Выкладки иногда удается существенно упростить, если корневая операция рассматриваемого выражения является монотонной. Тогда достаточно определить соответствующую точную грань для выражения, полученного отбрасыванием этой операции. Для усмотрения данной возможности создана серия приемов, срабатывающих на малых уровнях, с опережением приема четвертого уровня, инициирующего цепочку выкладок с производной:

   (a) Степень.
   $\forall_{abf}(0 < a - 1 \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(a^{f(x)}, x - \text{число}), b)) = a^{\sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b))})$

$\forall_{abf}(0 < a \ \& \ 0 \leq f(x) \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x((f(x))^a, x - \text{число}), b)) = (\sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b)))^a)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В последнем приеме обработка второго антецедента происходит при дополнительной посылке $x \in b$. Вместо символа sup допускается символ inf. Уровень срабатывания равен 0.

(b) Модуль.

$\forall_{af}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(|f(x)|, x-\text{число}),\ a)) = \max(|\sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x-\text{число}), a))|, |\inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a))|))$

Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abcf}(b = \inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x-\text{число}), a)) \ \& \ 0 \leq b \rightarrow \inf(\text{образ}(\lambda_x(|f(x)|, x-\text{число}), a)) = b)$

$\forall_{abcf}(b = \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x-\text{число}), a)) \ \& \ b \leq 0 \rightarrow \inf(\text{образ}(\lambda_x(|f(x)|, x-\text{число}), a)) = -b)$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается задачей на преобразование, которая имеет достаточно большой максимальный уровень для применения полного перечня описываемых средств нахождения точных граней. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{af}(\exists_x(x \in a \ \& \ f(x) = 0) \rightarrow \inf(\text{образ}(\lambda_x(|f(x)|, x - \text{число}), a)) = 0)$

Первый антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Плюс.

$\forall_{abf}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x)+a, x-\text{число}), b)) = \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x-\text{число}), b)) + a)$

Указатель "альтернатива" обобщает прием также на случай символа "инф". Уровень срсбатывания равен 0.

(d) Арктангенс.

$\forall_{af}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(\operatorname{arctg} f(x), x - \text{число}), a)) = \operatorname{arctg} \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a)))$

Этот и четыре следующих приема аналогичны предыдущему.

(e) Арккотангенс.

$\forall_{af}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(\operatorname{arcctg} f(x), x - \text{число}), a)) = \operatorname{arcctg} \inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a)))$

(f) Арксинус.

$\forall_{af}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(\arcsin f(x), x - \text{число}), a)) = \arcsin \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a)))$

(g) Арккосинус.

$\forall_{af}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(\arccos f(x), x - \text{число}), a)) = \arccos \inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a)))$

(h) Минус.

$\forall_{af}(\sup(\text{образ}(\lambda_x(-f(x), x-\text{число}), a)) = -\inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x-\text{число}), a)))$

(i) Умножение.

$\forall_{abf}(a \leq 0 \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(af(x), x - \text{число}), b)) = a \inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b)))$

$\forall_{abf}(0 \leq a \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(af(x), x - \text{число}), b)) = a \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b)))$

Указатели "альтернатива" обобщают приемы на случай точной нижней грани. Уровень срабатывания равен 0.

(j) Дробь

$\forall_{abf}(a < 0 \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x)/a, x - \text{число}), b)) = \inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b))/a)$

$\forall_{abf}(0 < a \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x)/a, x - \text{число}), b)) = \sup(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b))/a)$

Аналогично предыдущему пункту.

$\forall_{abf}(0 \leq a \,\&\, 0 < f(x) \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(a/f(x), x - \text{число}), b)) = a/\inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b)))$

$\forall_{abf}(0 \leq a \,\&\, f(x) < 0 \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(a/f(x), x - \text{число}), b)) = a/\inf(\text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), b)))$

Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому передается дополнительная посылка "$x \in b$". В остальном аналогично предыдущему.

Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве

В подразделе рассматривается решение задач на описание, имеющих условие вида "$\text{Max}(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b, c)$" либо "$\text{Min}(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b, c)$". Здесь $\lambda_x(u(x), v(x))$ - известная функция, одноместная либо многоместная. Хотя бы одно из выражений a, b, c содержит неизвестные. Напомним, что b - подмножество всех точек множества a, в которых рассматриваемая функция принимает, соответственно, наибольшее либо наименьшее свое значение c на a.

1. Ввод обозначения для рассматриваемой функции.

   $\forall_{abcuvf}(\text{Max}(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b, c) \leftrightarrow \text{Max}(f, a, b, c))$

   $\forall_{abcuvf}(\text{Min}(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b, c) \leftrightarrow \text{Min}(f, a, b, c))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Левая часть эквивалентности идентифицируется с условием задачи на описание. Выражение для функции не содержит неизвестных задачи. Указатель "кортежпеременных(x23)" разрешает рассмотрение многоместных функций. Выбирается новая переменная f, и помимо эквивалентного преобразования вводится новая посылка $\lambda_x(u(x), v(x)) = f$. Уровень срабатывания равен 1.

   Далее случаи одноместных и многоместных функций будут рассматриваться раздельно (за исключением нескольких простых случаев). Начнем с одноместных функций.

2. Вычисление производной.

   $\forall_{afgh}(f = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \,\&\, a = dg(x)/dx \rightarrow \lambda_x(a, x - \text{число} \,\&\, \text{одз}(a)) = h \,\&\, \text{Производная}(f, h))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, имеющей условие "$\mathrm{Max}(f, \ldots)$" либо "$\mathrm{Min}(f, \ldots)$". Должна отсутствовать посылка вида "Производная(f ...)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпроизводная" и вспомогательной задачей на преобразование. Утверждение "x – число & одз(a)" разрешается относительно x вспомогательной задачей на описание. Уровень срабатывания равен 1.

3. Вычисление корней производной.

   $\forall_{abcdfguv}(g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & Производная(f, g) & $a = \mathrm{set}_x(u(x) = 0$ & $x \in b) \rightarrow \mathrm{roots}(g, b) = a)$

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей условие "$\mathrm{Max}(f, b, \ldots)$" либо "$\mathrm{Min}(f, b, \ldots)$". Должна отсутствовать посылка вида "$\mathrm{roots}(g, b) = \ldots$". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Утверждение под описателем "класс" разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание, которой придается также цель "корни". Сам описатель обрабатывается нормализатором "нормкласс". Уровень срабатывания равен 1.

4. Определение множества точек, где производная не определена либо не найдена.

   $\forall_{bfguv}$(Производная(f, g) & $g = \lambda_x(u(x), v(x)) \rightarrow b \setminus \mathrm{Dom}(g) = \mathrm{set}_x(x \in b$ & $\neg(v(x))))$

   Аналогично предыдущему, но отсутствовать должна посылка вида "$b \setminus \mathrm{Dom}(g) = \ldots$".

5. Обращения к нормализаторам "нормМаксимум" и "нормМинимум".

   Определение точек максимума либо минимума по результатам анализа производной выполняется нормализаторами "нормМаксимум" и "нормМинимум", которые будут приведены ниже. Обращение к этим нормализаторам выполняют следующие приемы:

   $\forall_{abcde}(e = \mathrm{Max}(a, b, c, d) \rightarrow \mathrm{Max}(a, b, c, d) = e)$

   $\forall_{abcde}(e = \mathrm{Min}(a, b, c, d) \rightarrow \mathrm{Min}(a, b, c, d) = e)$

   Они имеют заголовок "второйтерм". Левая часть равенства идентифицируется с условием задачи на описание. При этом выражения a, b не содержат неизвестных, а выражения c, d - содержат. Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается соответствующим нормализатором. Уровень срабатывания равен 2.

6. Нормализатор "нормМаксимум".

   (a) Переход от промежутка к его особым точкам.
   $\forall_{abcfgxy}$(Производная$(f, g) \rightarrow \mathrm{Max}(f, [a, b] \cup c, x, y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f, ([a, b] \setminus \mathrm{Dom}(g)) \cup \mathrm{roots}(g, [a, b]) \cup \{a, b\} \cup c, x, y))$
   Явные выражения для множеств корней и особых точек производной будут подставляться последующими приемами нормализатора. Для полуинтервалов и интервала созданы аналогичные приемы, в которых вводятся дополнительные условия на верхние пределы для значений функции в окрестности отбрасываемого конца:

$\forall_{abcfgxy}$(Производная$(f,g) \to \mathrm{Max}(f,(a,b]\cup c,x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f,((a,b]\backslash\mathrm{Dom}(g))$ $\cup\,\mathrm{roots}(g,(a,b]) \cup \{b\} \cup c,x,y)$ & $\overline{\lim}_{z\to a+0} f(z) \leq y)$

$\forall_{abcfgxy}$(Производная$(f,g) \to \mathrm{Max}(f,[a,b)\cup c,x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f,([a,b)\backslash\mathrm{Dom}(g))$ $\cup\,\mathrm{roots}(g,[a,b)) \cup \{a\} \cup c,x,y)$ & $\overline{\lim}_{z\to b-0} f(z) \leq y)$

$\forall_{abcfgxy}$(Производная$(f,g) \to \mathrm{Max}(f,(a,b)\cup c,x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f,((a,b)\backslash\mathrm{Dom}(g))$ $\cup\,\mathrm{roots}(g,(a,b)) \cup c,x,y)$ & $\overline{lim}_{z\to a+0} f(z) \leq y$ & $\overline{\lim}_{z\to b-0} f(z) \leq y)$

В последних приемах подвыражение "Max(...)" заменяющего терма обрабатывается нормализатором "нормМаксимум". Неравенства для верхних пределов только выписываются, но не анализируются. Они будут рассматриваться по завершении работы нормализатора. Уровни срабатывания первых трех приемов равны 1, последнего - 2. В случае периодической функции, определенной на всей числовой прямой, применяется особый прием:

$\forall_{abcdfgxy}$(Производная(f,g) & периодична$(f,d) \to \mathrm{Max}(f,\mathbb{R},x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f,$ $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Dom}(g) \cup \mathrm{roots}(g,\mathbb{R}),x,y))$

Второй антецедент обрабатывается синтезатором "период". Уровень срабатывания равен 1.

(b) Группировки для множеств корней производной и ее особых точек.

$\forall_{abcfgxy}$(Произодная$(f,g) \to \mathrm{Max}(f,\mathrm{roots}(g,a)\cup\mathrm{roots}(g,b)\cup c,x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f,$ $\mathrm{roots}(g,a \cup b) \cup c,x,y))$

$\forall_{abcfgxy}$(Произодная$(f,g) \to \mathrm{Max}(f,a \setminus \mathrm{Dom}(g) \cup b \setminus \mathrm{Dom}(g) \cup c,x,y) \leftrightarrow$ $\mathrm{Max}(f,(a \cup b) \setminus \mathrm{Dom}(g) \cup c,x,y))$

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Использование посылки, явно задающей фрагмент области.

Прием использует заблаговременно выведенные равенства для множества корней и множества особых точек производной:

$\forall_{abcfxy}(b = c \to \mathrm{Max}(f,a \cup b,x,y) = \mathrm{Max}(f,a \cup c,x,y))$

Требуется, чтобы выражение c имело своим заголовком один из символов "пусто", "перечень", "класс", а b не имело такого заголовка. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Построение таблицы значений.

$\forall_{afgxy}(g =$ сужение$(f,a) \to \mathrm{Max}(f,a,x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(g,a,x,y))$

Прием предпринимает попытку перейти от исходной функции f к функции g, заданной на конечном множестве с помощью выражения "таблица(...)". Такая возможность возникает, как только множество a оказывается конечным. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормсужение", который и находит явное выражение для функции - либо в виде выражения "таблица(...)", либо в виде выражения "конст(...)". Предварительно проверяется, что f не имело такого вида, и проверяется, что результат имеет такой вид. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Сравнение значений.

$\forall_{abcdexy}(0 < b-d \to \mathrm{Max}($таблица$\{$конст$(a,b),$ конст$(c,d);e\},p,x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}($ таблица$\{$конст$(a,b);e\},p \setminus c,x,y))$

$\forall_{abcdexy}(b-d < 0 \to \mathrm{Max}($таблица$\{$конст$(a,b),$ конст$(c,d);e\},p,x,y) \leftrightarrow \mathrm{Max}($ таблица$\{$конст$(c,d);e\},p \setminus a,x,y))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1. Если выражения b, d неконстантные, то проверка неравенств может потребовать дополнительных усилий, с возможным отсутствием явного сопровождения по о.д.з., и для нее созданы дублирующие приемы, срабатывающие на уровне 4:

$\forall_{abcdexy}((0 < b - d) = \text{истина} \to \mathrm{Max}(\text{таблица}\{\text{конст}(a, b), \text{конст}(c, d); e\}, p, x, y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(\text{таблица}\{\text{конст}(a, b); e\}, p \setminus c, x, y))$

$\forall_{abcdexy}((b - d < 0) = \text{истина} \to \mathrm{Max}(\text{таблица}\{\text{конст}(a, b), \text{конст}(c, d); e\}, p, x, y) \leftrightarrow \mathrm{Max}(\text{таблица}\{\text{конст}(c, d); e\}, p \setminus a, x, y))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "стандменьше".

(f) Константная функция.

$\forall_{abcxy}(\mathrm{Max}(\text{конст}(a, b), c, x, y) \leftrightarrow x = c \;\&\; y = b)$

Уровень срабатывания равен 1.

(g) Максимум на множестве, заданном параметрически.

В случае параметрического задания множества, на котором ищется максимум, предпринимается переход к новой функции, полученной из исходной подстановкой функции, выражающей значения аргумента через параметр:

$\forall_{afghuv}(a = \lambda_x(f(x), x - \text{число}) \to \mathrm{Max}(a, \mathrm{set}_y(\exists_z(y = g(z) \;\&\; h(z))), u, v) \leftrightarrow \exists_w(\mathrm{Max}(\lambda_z(f(g(z)), z - \text{число}), \mathrm{set}_z(h(z)), w, v) \;\&\; u = \mathrm{set}_x(\exists_z(z \in w \;\&\; x = g(z)))))$

Антецедент берется в посылках. Выражение "$f(g(z))$" в заменяющей части упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование, после чего выражение "$\lambda_z(f(g(z))$ обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, имеющей цель "таблица". Наконец, утверждение "Max(...)" обрабатывается нормализатором "нормМаксимум". Выражение для u обрабатывается нормализатором "нормкласс". Уровень срабатывания равен 3.

7. Нормализатор "нормМинимум". Этот нормализатор аналогичен предыдущему.

8. Разбор случаев по условному выражению, определяющему множество корней производной.

   $\forall_{abcdfg}(\mathrm{roots}(f, a) = (b \text{ при } c, \text{ иначе } d) \;\&\; \text{Производная}(g, f) \to c \vee \neg c)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Оба антецедента берутся в посылках задачи на описание, имеющей условие вида "Максимум$(g, \ldots)$" либо "Минимум$(g, \ldots)$" либо "экстремум$(g, \ldots)$". Выведенная дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 0.

9. Максимум суммы функций от различных переменных на прямом произведении.

   $\forall_{abcdefgpqi}(e = \mathrm{Max}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a, m, n) \;\&\; i = \mathrm{Max}(\lambda_y(g(y), y - \text{число}), b, r, s) \to \mathrm{Max}(\lambda_{xy}(f(x) + g(y), p(x) \;\&\; q(y)), a \times b, c, d) \leftrightarrow \exists_{mnrs}(e \;\&\; i \;\&\; c = m \times r \;\&\; d = n + s))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор", их правые части обрабатываются вспомогательными задачами на описание для разрешения относительно неизвестных m, n, r, s, в качестве которых выступают новые переменные. Проверяется, что результаты e, i не имеют заголовка "Максимум". Уровень срабатывания равен 0.

10. Максимум либо минимум константы.

$\forall_{abcdfm}(m = \mathrm{set}_x(x \in b \ \& \ f(x)) \rightarrow \mathrm{Max}(\lambda_x(a, f(x)), b, c, d) \leftrightarrow c = m \ \& \ d = a)$

$\forall_{abcdfm}(m = \mathrm{set}_x(x \in b \ \& \ f(x)) \rightarrow \mathrm{Min}(\lambda_x(a, f(x)), b, c, d) \leftrightarrow c = m \ \& \ d = a)$

Уровень срабатывания равен 0.

11. Определение максимума дроби с использованием операторов "верхняяоценка", "нижняяоценка".

$\forall_{abcdfgmpq}(f(x) \leq b \ \& \ c \leq g(x) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ r = \mathrm{set}_x(f(x) = b \ \& \ g(x) = c \ \& \ c \in m) \ \& \ \neg(r = \emptyset) \ \& \ a = \lambda_x(f(x)/g(x), x - \text{число}) \rightarrow \mathrm{Max}(a, m, p, q) \leftrightarrow q = b/c \ \& \ p = r)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Заменяемое утверждение идентифицируется с условием задачи на описание, содержащим неизвестные. Последний антецедент идентифицируется с посылкой. Переменная x входит как в $f(x)$, так и в $g(x)$. Должна отсутствовать посылка "Производная(a ...)". Первые два антецедента обрабатываются синтезаторами. Они находят верхнюю оценку числителя и нижнюю оценку знаменателя. Третий и четвертый антецеденты, обрабатываемые проверочными операторами, устанавливают, что найденные оценки положительны. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он определяет множество r точек внутри m, на которых значения числителя и знаменателя одновременно равны оценкам b, c. Конъюнкция под описателем "класс" явно разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание, а сам описатель упрощается задачей на преобразование. Шестой антецедент, проверяющий непустоту множества r, обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

12. Одноэлементное множество.

$\forall_{abcd}(\mathrm{Max}(a, \{b\}, c, d) \leftrightarrow c = \{b\} \ \& \ d = a(b))$

$\forall_{abcd}(\mathrm{Min}(a, \{b\}, c, d) \leftrightarrow c = \{b\} \ \& \ d = a(b))$

Уровень срабатывания равен 1.

13. Переход к конечному списку.

Если в контексте имеет посылка, указывающая, что искомые точки максимума либо минимума заключены в заданном конечном списке, то множество, по которому берется этот максимум (минимум), заменяется на свое пересечение с данным списком:

$\forall_{abcde}(c \subseteq \{;e\} \ \& \ p = b \cap \{;e\} \rightarrow \mathrm{Max}(a, b, c, d) \leftrightarrow \mathrm{Max}(a, p, c, d))$

$\forall_{abcde}(c \subseteq \{;e\} \ \& \ p = b \cap \{;e\} \rightarrow \mathrm{Min}(a, b, c, d) \leftrightarrow \mathrm{Min}(a, p, c, d))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". При этом идентификация начинается с усмотрения в задаче первого антецедента. Затем ищется вхождение заменяемого утверждения, в контексте которого должно оказаться усмотренное включение. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Выражение b

не должно иметь заголовка "перечень", а выражение p имеет этот заголовок. Уровень срабатывания равен 1.

14. Разбор случаев по условному выражению, расположенному под максимумом либо минимумом.

$\forall_{abcfgmnpqAMNPQR}(\mathrm{Max}(\lambda_x(R(f(x)), B(x)), \mathrm{set}_x(A(x)\ \&\ x \in a), m, n) = (m = M\ \&\ n = N)\ \&\ \mathrm{Max}(\lambda_x(R(g(x)), B(x)), \mathrm{set}_x(\neg A(x)\ \&\ x \in a), p, q) = (p = P\ \&\ q = Q) \to \mathrm{Max}(\lambda_x(R((f(x) \text{ при } A(x), \text{ иначе } g(x))), B(x)), a, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Max}(\text{таблица}\{\text{конст}(M, N), \text{конст}(P, Q)\}, M \cup P, b, c))$

$\forall_{abcfgmnpqAMNPQR}(\mathrm{Min}(\lambda_x(R(f(x)), B(x)), \mathrm{set}_x(A(x)\ \&\ x \in a), m, n) = (m = M\ \&\ n = N)\ \&\ \mathrm{Min}(\lambda_x(R(g(x)), B(x)), \mathrm{set}_x(\neg A(x)\ \&\ x \in a), p, q) = (p = P\ \&\ q = Q) \to \mathrm{Min}(\lambda_x(R((f(x) \text{ при } A(x), \text{ иначе } g(x))), B(x)), a, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Min}(\text{таблица}\{\text{конст}(M, N), \text{конст}(P, Q)\}, M \cup P, b, c))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Заменяемое утверждение является условием задачи на описание, причем хотя бы одно из выражений b, c содержит неизвестные. Указатель "вхождение(x42)" определяет идентификацию условного выражения "$(f(x)$ при $A(x)$, иначе $g(x))$" как произвольного подтерма выражения, задающего значение функции. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части разрешаются относительно соответствующих неизвестных m, n, p, q (роль которых играют новые переменные) с помощью вспомогательных задач на описание. Проверяется, что ответ имеет вид конъюнкции равенств, задающих значения этих неизвестных (соответственно, M, N, P, Q). Заменяющее утверждение сводит исходную задачу к рассмотрению объединения множеств M, P, на которых функция принимает значения N, Q. Уровень срабатывания равен 0.

15. Ввод вспомогательной переменной для длины числового промежутка.

$\forall_{abcfyzAT}(T = [a, b]\ \&\ \mathrm{Min}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), [0, b - a], u, t) = A(u, t) \to \mathrm{Min}(\lambda_x(f(\text{длина}([a, x])), x - \text{число}), T, y, z) \leftrightarrow \exists_{ut}(A(u, t)\ \&\ z = t\ \&\ y = \mathrm{set}_v(\exists_w(w \in u\ \&\ v = a + w))))$

$\forall_{abcfyzAT}(T = [a, b]\ \&\ \mathrm{Max}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), [0, b - a], u, t) = A(u, t) \to \mathrm{Max}(\lambda_x(f(\text{длина}([a, x])), x - \text{число}), T, y, z) \leftrightarrow \exists_{ut}(A(u, t)\ \&\ z = t\ \&\ y = \mathrm{set}_v(\exists_w(w \in u\ \&\ v = a + w))))$

Приемы применяются в задачах с временными промежутками $T = [a, b]$. Указатель "новаргумент" обеспечивает проверку того, что рассматриваемая функция содержит переменную x только в виде выражения, определяющего длину подпромежутка $[a, x]$. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть рассматривает функцию, полученную из исходной подстановкой вместо длины подпромежутка новой переменной, пробегающей отрезок $[0, b - a]$. Эта часть разрешается относительно вспомогательных неизвестных u, t с помощью задачи на описание. Заменяющее утверждение обеспечивает переход к исходным неизвестным y, z. Уровень срабатывания равен 0.

Переходим к рассмотрению приемов, относящихся к многоместным функциям.

16. Анализ области, на которой ищется максимум либо минимум.

Находится конъюнкция условий принадлежности точки области поиска максимума - минимума и условий ее принадлежности области определения функции.

Результат упрощается, причем результирующая область поиска выражается через описатель "класс", без попыток исключения его даже в вырожденных случаях:

$\forall_{abcdf}(\mathrm{set}_x(g(x)\ \&\ x \in a) = d\ \&\ f = \lambda_x(h(x), g(x)) \to \mathrm{Max}(f, a, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f, d, b, c))$

$\forall_{abcdf}(\mathrm{set}_x(g(x)\ \&\ x \in a) = d\ \&\ f = \lambda_x(h(x), g(x)) \to \mathrm{Min}(f, a, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Min}(f, d, b, c))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание. Указатель "кортежпеременных" разрешает идентификацию x со связывающей приставкой произвольной длины. При этом отсекается случай, когда она имеет длину 1. Второй антецедент берется в посылках, первый - выделен указателем "идентификатор". Конъюнкция под описателем "класс" в его левой части разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Для блокировки повторного применения приема служит комментарий "(критическиеточки область)". Уровень срабатывания равен 0. Если вместо области поиска максимума-минимума указан символ "одз", то применяются аналогичные приемы, расшифровывающие этот символ:

$\forall_{abcdf}(d = \mathrm{set}_x(g(x)\ \&\ \text{одз}(h(x)))\ \&\ f = \lambda_x(h(x), g(x)) \to \mathrm{Max}(f, \text{одз}, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f, d, b, c))$

$\forall_{abcdf}(d = \mathrm{set}_x(g(x)\ \&\ \text{одз}(h(x)))\ \&\ f = \lambda_x(h(x), g(x)) \to \mathrm{Min}(f, \text{одз}, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Min}(f, d, b, c))$

17. Обращение к вспомогательной задаче на определение критических точек в случае многоместной функции.

    $\forall_{abcdf}(\text{критическиеточки}(\lambda_x(h(x), p(x))) = d\ \&\ f = \lambda_x(h(x), g(x)) \to \mathrm{Max}(f, \mathrm{set}_z(p(z)), b, c) \leftrightarrow \mathrm{Max}(f, d, b, c))$

    $\forall_{abcdf}(\text{критическиеточки}(\lambda_x(h(x), p(x))) = d\ \&\ f = \lambda_x(h(x), g(x)) \to \mathrm{Min}(f, \mathrm{set}_z(p(z)), b, c) \leftrightarrow \mathrm{Min}(f, d, b, c))$

    Приемы предпринимают попытку определить критические точки функции на области поиска максимума - минимума, после чего заменяют область на множество этих точек. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование (приемы определения критических точек для таких задач см. в следующем пункте). Проверяется, что результат d не содержит символа "критическиеточки". Второй антецедент берется в посылках. Требуется, чтобы связывающая приставка x (а тем самым и z) имела более одной переменной. Для блокировки повторной попытки служит комментарий "критическиеточки". Уровень срабатывания равен 1.

18. Определение критических точек многоместных функций.

    (a) Ввод обозначения для рассматриваемой функции.

    $\forall_{afuv}(\text{критическиеточки}(\lambda_x(u(x), v(x))) = \text{критическиеточки}(f))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Левая часть равенства идентифицируется с условием задачи на преобразование. Указатель "посылка(...)"

обеспечивает ввод новой посылки "$\lambda_x(u(x), v(x)) = f$, где f - новая переменная. Эта посылка сопровождается комментариями "упростить" и "определениепараметра", блокирующими попытки ее изменения. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Определение внутренности области определения.

$\forall_{fuv}(f = \lambda_x(u(x), v(x)) \rightarrow$ внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) =$ внутренность$(\mathrm{set}_x(v(x)$ $)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на преобразование, имеющей условие "критическиеточки(f)". Описатель "класс" в правой части выводимого равенства обрабатывается нормализатором "нормкласс", а сама правая часть - нормализатором "нормвнутренность", который, собственно, и находит внутренность области определения. Перед применением приема проверяется отсутствие посылки вида "равно(внутренность(область(f))...)". Кроме того, утверждение $v(x)$ не должно иметь своим конъюнктивным членом равенство. Ориентация выведенного равенства фиксируется комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Вычисление производной.

$\forall_{afghmiux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $i \in \{1, \ldots, m\}$ & $a = dg(x)/dx(i) \rightarrow$ $\lambda_x(a, u(x)$ & одз$(a)) = h$ & Частнпроизв$(f, i, h))$

Прием имеет заголовок "вывод". Он вычисляет частные производные функции f по всем ее аргументам (при каждом срабатывании - по i-му аргументу для $i \in \{1, \ldots, n\}$), вводит для них обозначения h и связывает их с функцией f посредством посылок "Частнпроизв(...)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на преобразование, имеющей условие "критическиеточки(f)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", он вычисляет длину m связывающей приставки x. Третий антецедент выделен указателем "программа", он перечисляет натуральные значения i из $\{1, \ldots, m\}$. Отбирается то значение, для которого отсутствует посылка вида "Частнпроизв$(f \ i \ h)$". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпроизводная, а затем - упрощается задачей на преобразование. Как и в предыдущем пункте, утверждение $u(x)$ не должно иметь равенство своим конъюнктивным членом. Уровень срабатывания равен 1.

Если функция f имеет единственную переменную (такая ситуация может возникнуть при поиске критических точек на границе области, см. ниже), то применяется следующий прием:

$\forall_{afghp}(f = \lambda_x(g(x), p(x))$ & $a = dg(x)/dx \rightarrow \lambda_x(a, p(x)$ & одз$(a)) = h$ & Производная$(f, h))$

Уровень срабатывания равен 1.

(d) Определение стационарных точек.

$\forall_{afghmux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ Частнпроизв$($ $f, i, h(i)))$ & $a = \mathrm{set}_x(\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow h(i)(x) = 0$ & $x \in \mathrm{Dom}(h(i))$ & $x \in$ $b))$ & внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) = b \rightarrow$ стационарныеточки$(f) = a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи преобразование, имеющей условие "критическиеточки(f)".

Проверяется отсутствие посылки вида "стационарныеточки(f) = ...". Указатель "развертка(фикс(3))" определяет идентификацию третьего антецедента с группой посылок "Частнпроизв(f 1 $h(1)$)", ..., "Частнпроизв(f m $h(m)$)". Функциональная переменная h идентифицируется при этом с набором соответствующих производных. Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, определяющей внутренность b области определения функции f. Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", определяет длину связывающей приставки m. Четвертый антецедент тоже выделен указателем "идентификатор". Квантор общности в его правой части выделен указателем "развертка", т.е. определяет конъюнкцию утверждений "$h(i)(x) = 0$ & $x \in \mathrm{Dom}(h(i))$ & $x \in b$" по всем $i = 1, \ldots, m$. Эта конъюнкция представляет собой систему уравнений для корней частных производных, решаемую в пересечении области определения производных с внутренностью области определения функции f. Она решается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание; внешний описатель "класс" обрабатывается после этого описателем "нормкласс". Уровень срабатывания равен 2. Для вырожденного случая функции одной переменной создан аналогичный прием:

$\forall_{abfguv}(g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & Производная(f, g) & $a = \mathrm{set}_x(u(x) = 0$ & $x \in b)$ & внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) = b \rightarrow$ стационарныеточки$(f) = a)$

(e) Определение особых точек.

$\forall_{cfghmux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ Частнпроизв$(f, i, h(i)))$ & $c =$ внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) \rightarrow$ особыеточки$(f) = \mathrm{set}_x(x \in c$ & $\exists_i(i \in \{1, \ldots, m\}$ & $\neg(x \in \mathrm{Dom}(h(i))))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются так же, как соответствующие антецеденты первого приема предыдущего пункта. Должна отсутствовать посылка вида "особыеточки(f) = ...". Кроме того, область определения хотя бы одной из частных производных должна отличаться от области определения функции f. Конъюнкция под описателем "класс" в выводимом равенстве описывает точки из внутренности области определения f, не принадлежащие области определения хотя бы одной из частных производных. Эта конъюнкция разрешается относительно x вспомогательной задачей на описание, и далее внешний описатель обрабатывается нормализатором "нормкласс". Уровень срабатывания равен 1. Для случая функций одной переменной создан аналогичный прием:

$\forall_{bfguv}$(Производная(f, g) & $g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & $b =$ внутренность$(\mathrm{Dom}(f)$ $) \rightarrow$ особыеточки$(f) = \mathrm{set}_x(x \in b$ & $\neg v(x)))$.

Наконец, если все частные производные имеют область определения, совпадающую с областью определения функции f, то делается вывод об отсутствии особых точек:

$\forall_{fghmux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ Частнпроизв$(f, i, h(i))) \rightarrow$ особыеточки$(f) = \emptyset)$

(f) Определение критических точек для границы области и объединение найденных точек.

$\forall_{abcdfgh}(f = \lambda_x(g(x), h(x))$ & стационарныеточки$(f) = a$ & особыеточки$(f) = b$ & граница$(\mathrm{set}_x(h(x))) = c$ & критическиеточки$(\lambda_x(g(x), x \in c)) = d \rightarrow$ критическиеточки$(f) = a \cup b \cup d)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к условию задачи на преобразование. Первые три антецедента берутся в посылках, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Левая часть четвертого антецедента обрабатывается нормализатором "нормграница". Левая часть пятого антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Это рекурсивное обращение к нахождению критических точек, но уже лишь на границе области. Условие $x \in c$ предварительно обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение, результатом чего служит появление в условиях на область определения "граничной" функции равенства, связывающего координаты точек границы. Приводимый далее прием использует данное равенство для понижения размерности задачи. Проверяется, что результирующее выражение d не содержит символа "критическиеточки". Уровень срабатывания равен 3.

(g) Устранение функциональной связи в определении области путем явного разрешения ее относительно одной из переменных.

$\forall_{afghpqrs}(h = \lambda_{xy}(f(x,y), p(x,y) = q(x,y)\ \&\ g(x,y))\ \&\ (p(x,y) = q(x,y)) = (x = r(y)\ \&\ s(y))\ \&\ \text{критическиеточки}(\lambda_y(f(r(y),y), g(r(y),y)\ \&\ s(y))) = a \rightarrow \text{критическиеточки}(h) = \text{set}_{xy}(y \in a\ \&\ x = r(y)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование. Первый антецедент берется в посылках. Переменная x идентифицируется с некоторой переменной связывающей приставки, y - с набором остальных переменных этой приставки. Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", разрешает равенство $p(x,y) = q(x,y)$ относительно x с помощью вспомогательной западчи на описание. Третий антецедент, также выделенный указателем "идентификатор", выполняет рекурсивное обращение к задаче на преобразование для отыскания критических точек функции с уменьшенным на единицу числом переменных. В заменяющем выражении выполняется переход к исходному списку переменных. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Критические точки для одноэлементной области определения.

$\forall_{af}(\text{критическиеточки}(\lambda_x(f(x), x = a)) = \{a\})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он используется в случае, когда после понижения размерности граница оказывается одноточечной. Уровень срабатывания равен 0.

(i) Устранение дизъюнкции в условиях на область определения.

$\forall_{abfgh}(\text{критическиеточки}(\lambda_x(f(x), g(x))) = a\ \&\ \text{критическиеточки}(\lambda_x(f(x), h(x))) = b \rightarrow \text{критическиеточки}(\lambda_x(f(x), g(x)\ \vee\ h(x))) = a \cup b)$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Они определяют соответствующие подмножества критических точек с помощью вспомогательных задач на преобразование. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abfghp}(\text{критическиеточки}(\lambda_{xy}(f(x,y), x = g(y)\ \&\ p(y))) = a\ \&\ \text{критическиеточки}(\lambda_{xy}(f(x,y), x = h(y)\ \&\ p(y))) = b \rightarrow \text{критическиеточки}(\lambda_{xy}(f(x,y), x \in \{g(y), h(y)\}\ \&\ p(y))) = a \cup b)$

Аналогично предыдущему. Переменная x идентифицируется с некоторой переменной связывающей приставки, переменная y - с набором остальных переменных этой приставки.

19. Нахождение максимума либо минимума на объединении множеств.

$\forall_{apqrsuvPQR}(\text{Max}(a, \text{set}_x(P(x) \ \& \ R(x)), u, v) = (u = p \ \& \ v = q) \ \& \ \text{Max}(a, \text{set}_x(Q(x) \ \& \ R(x)), u, v) = (u = r \ \& \ v = s) \rightarrow \text{Max}(a, \text{set}_x((P(x) \ \vee \ Q(x)) \ \& \ R(x)), u, v) \leftrightarrow v = \max(q, s) \ \& \ u = (p \text{ при } 0 \leq q - s, \text{ иначе } \emptyset) \cup (\emptyset \text{ при } 0 < q - s, \text{ иначе } r))$

$\forall_{apqrsuvPQR}(\text{Min}(a, \text{set}_x(P(x) \ \& \ R(x)), u, v) = (u = p \ \& \ v = q) \ \& \ \text{Min}(a, \text{set}_x(Q(x) \ \& \ R(x)), u, v) = (u = r \ \& \ v = s) \rightarrow \text{Min}(a, \text{set}_x((P(x) \ \vee \ Q(x)) \ \& \ R(x)), u, v) \leftrightarrow v = \min(q, s) \ \& \ u = (p \text{ при } 0 \leq q - s, \text{ иначе } \emptyset) \cup (\emptyset \text{ при } 0 < q - s, \text{ иначе } r))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Они применяются к условию задачи на описание. a идентифицируется с переменной, обозначающей функцию; u, v идентифицируются с неизвестными. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части разрешаются относительно u, v вспомогательными задачами на описание. В результате находятся значения p, q этих неизвестных для первого подслучая и значения r, s для второго. В заменяющем утверждении происходит склейка подслучаев. Уровень срабатывания равен 0.

20. Понижение размерности области.

$\forall_{afghpqrsA}(a = \lambda_{xy}(f(x, y), g(x, y)) \ \& \ \text{Max}(\lambda_y(f(h(y), y), g(h(y), y)), \text{set}_v(A(v)), p, q) = (p = r \ \& \ q = s) \rightarrow \text{Max}(a, \text{set}_{zv}(z = h(v) \ \& \ A(v)), p, q) \leftrightarrow q = s \ \& \ p = \text{set}_{zv}(z = h(v) \ \& \ v \in r))$

$\forall_{afghpqrsA}(a = \lambda_{xy}(f(x, y), g(x, y)) \ \& \ \text{Max}(\lambda_y(f(y, h(y)), g(y, h(y))), \text{set}_z(A(z)), p, q) = (p = r \ \& \ q = s) \rightarrow \text{Max}(a, \text{set}_{zv}(v = h(z) \ \& \ A(z)), p, q) \leftrightarrow q = s \ \& \ p = \text{set}_{zv}(v = h(z) \ \& \ z \in r))$

$\forall_{afghpqrsA}(a = \lambda_{xy}(f(x, y), g(x, y)) \ \& \ \text{Min}(\lambda_y(f(h(y), y), g(h(y), y)), \text{set}_v(A(v)), p, q) = (p = r \ \& \ q = s) \rightarrow \text{Min}(a, \text{set}_{zv}(z = h(v) \ \& \ A(v)), p, q) \leftrightarrow q = s \ \& \ p = \text{set}_{zv}(z = h(v) \ \& \ v \in r))$

$\forall_{afghpqrsA}(a = \lambda_{xy}(f(x, y), g(x, y)) \ \& \ \text{Min}(\lambda_y(f(y, h(y)), g(y, h(y))), \text{set}_z(A(z)), p, q) = (p = r \ \& \ q = s) \rightarrow \text{Min}(a, \text{set}_{zv}(v = h(z) \ \& \ A(z)), p, q) \leftrightarrow q = s \ \& \ p = \text{set}_{zv}(v = h(z) \ \& \ z \in r))$

Приемы применяются, если одна из координат двумерной области, по которой берется максимум либо минимум, явно выражена через другую координату. Преобразуемое утверждение является условием задачи на описание, причем p, q - неизвестные. Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть представляет собой результат сведения исходной задачи к единственной координате. Она разрешается относительно p, q с помощью вспомогательной задачи на описание. В заменяющем утверждении предпринимается переход к исходной паре координат. Уровень срабатывания равен 0.

21. Учет монотонности степени.

$\forall_{abfguA}(a = \lambda_x((f(x))^p, g(x)) \ \& \ p-\text{rational} \ \& \ \neg(\text{числитель}(p)-\text{even}) \ \& \ \text{Max}(\lambda_x(f(x), g(x)), b, z, u) = A(z, u) \ \& \ 0 < p \rightarrow \text{Max}(a, b, z, v) \leftrightarrow \exists_u(A(z, u) \ \& \ v = u^p))$

Если ищется максимум степени с константным положительным рациональным показателем, имеющим нечетный знаменатель, то задача сводится к поиску максимума основания степени. Первый антецедент берется в посылках, четвертый выделен указателем "идентификатор", прочие - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

22. Выход из блока анализа.

    Если в процессе рассмотрения блока анализа некоторой задачи на описание, имеющей условие "Max(...)" либо "Min(...)", выводится следствие о принадлежности искомой точки максимума либо минимума известному конечному списку, то оно передается данной задаче в качестве условия, а работа с ее блоком анализа обрывается. Теорема приема имеет вид "замещениеусловий(содержится(a перечень(b)))", заголовок приема - "замещениеусловий". Уровень срабатывания равен 1. Прием стоит несколько в стороне от изложенной выше техники определения максимумов и минимумов с помощью производной, однако в особых случаях может оказаться полезным.

Экстремумы функции на множестве

Подраздел аналогичен предыдущему, но вместо точек максимума либо минимума ищутся точки локальных экстремумов. Условие задачи на описание имеет здесь вид "$\mathrm{Extr}(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b, c)$, где $\lambda_x(u(x), v(x))$ - известная функция, одноместная либо многоместная, a - неизвестная точка экстремума, b - значение функции f в этой точке, c - тип экстремума (логический символ "максимум" либо "минимум"). Во внутреннем представлении заголовком данного условия служит логический символ "экстремум".

1. Ввод обозначения для рассматриваемой функции.

   $\forall_{abcfuv}(\mathrm{Extr}(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Extr}(f, a, b, c))$

   Преобразуемое утверждение является условием задачи на описание, причем выражение, задающее функцию, не содержит неизвестных. Переменная x идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Выбирается новая переменная f, и вводится посылка "$\lambda_x(u(x), v(x)) = f$". Уровень срабатывания равен 1.

2. Определение внутренности области определения.

   $\forall_{fuv}(f = \lambda_x(u(x), v(x)) \to$ внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) =$ внутренность$(\mathrm{set}_x(v(x)$ & одз$(u(x)))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, имеющей условие вида "экстремум(f ...)". Конъюнкция в правой части выводимого равенства разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. После этого ее надвыражения обрабатываются нормализаторами "нормкласс" и "нормвнутренность". Перед применением приема проверяется, что среди конъюнктивных членов утверждения $v(x)$ нет равенства и что отсутствует посылка вида "внутренность(область(f)) = ...". Уровень срабатывания равен 1.

3. Вычисление производной.

   $\forall_{afgh}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $a = dg(x)/dx \to \lambda_x(a, u(x)$ & одз$(a)) = h$ & Производная$(f, h))$

   Прием применяется, если функция зависит от одной переменной. Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, имеющей условие "экстремум(f ...)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпроизводная" и упрощается вспомогательной задачей на преобразование. В качестве h берется какая-то новая переменная. Требуется, чтобы до применения приема отсутствовала посылка вида "Производная(f ...)". Уровень срабатывания равен 1. В случае нескольких переменных применяется другой прием:

$\forall_{afghimux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $i \in \{1, \ldots, m\}$ & $a = dg(x)/dx(i) \rightarrow \lambda_x(a, u(x)$ & одз$(a)) = h$ & Частнпроизв$(f, i, h))$

Здесь первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор" и вычисляет длину m связывающей приставки с помощью нормализатора "нормдлинанабора", третий - выделен указателем "программа" и выбирает такой номер i от 1 до m, что для него отсутствует посылка вида "Частнпроизв(f i ...)". Перед применением приема проверяется, что утверждение $u(x)$ не имеет своим конъюнктивным членом равенство. Остальное - аналогично предыдущему приему.

4. Вычисление корней производной.

   Как и выше, начнем со случая одноместной функции:

   $\forall_{afguv}(g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & Производная(f, g) & $a = \mathrm{set}_x(u(x) = 0$ & $v(x)) \rightarrow \mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = a)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей условие "экстремум(f ...)". третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Конъюнкция под описателем "класс" в его правой части разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Сам описатель обрабатывается нормализатором "нормкласс". Перед попыткой применения приема проверяется отсутствие посылки вида "$\mathrm{roots}(g, \ldots) = \ldots$". Уровень срабатывания равен 1. В случае нескольких переменных прием определяет множество стационарных точек функции f:

   $\forall_{afghmux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ Частнпроизв$(f, i, h(i)))$ & $a = \mathrm{set}_x(\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow h(i)(x) = 0$ & $x\mathrm{Dom}(h(i)))) \rightarrow$ стационарныеточки$(f) = a)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Третий антецедент, выделенный указателем "развертка", идентифицруется с группой посылок "Частнпроизв$(f, 1, h(1))$", ..., "Частнпроизв$(f, m, h(m))$". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Квантор общности в его правой части разворачивается в конъюнкцию уравнений для частных производных, разрешаемых относительно переменных x в пересечении областей определения производных. В остальном - аналогично случаю одной переменной.

5. Отыскание множества точек, где производная не определена либо не найдена.

   $\forall_{bcfguv}($Производная(f, g) & $g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & $c =$ внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) \rightarrow c \setminus \mathrm{Dom}(g) = \mathrm{set}_x(x \in c$ & $\neg(v(x))))$

   Прием соответствует случаю функции одной переменной. Все антецеденты идентифицируются с посылками. Конъюнкция под описателем в правой части выводимого равенства разрешается относительно x. Уровень срабатывания равен 1. Для функций, зависящих от нескольких переменных, создан другой прием:

$\forall_{cfghmux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow$ Частнпроизв$(f, i, h(i)))$ & $c =$ внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) \rightarrow$ особыеточки$(f) = \mathrm{set}_x(x \in c$ & $\exists_i(i \in \{1, \ldots, m\}$ & $\neg(x \in \mathrm{Dom}(h(i))))))$

Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные антецеденты идентифицируются с посылками, причем третий антецедент, выделенный указателем "развертка", идентифицируется с группой посылок, соответствующих различным значениям i. Квантор существования в правой части выводимого равенства выделен указателем "или(...)" и выписывается в виде дизъюнкции. После этого конъюнкция под описателем разрешается относительно переменных связывающей приставки x. Уровень срабатывания равен 1.

6. Выделение подмножества точек, в которых будет проверяться условие экстремума.

   После определения стационарных точек и особых точек, расположенных во внутренности области определения функции, предпринимается сужение области поиска экстремума на эти точки. Для одноместных функций это происходит следующим образом:

   $\forall_{abcfgxyz}($Производная(f, g) & внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) = a$ & $a \setminus \mathrm{Dom}(g) = b$ & $\mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = c$ & $\mathrm{Extr}(f, x, y, z) \rightarrow x \in b \cup c)$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последний - с условием задачи на описание. Выражение f не содержит неизвестных. Выражение x содержит существенную неизвестную. Выводимое условие сопровождается комментариями "разборслучаев", "серия", которые понадобятся, если оно будет преобразовано в дизъюнкцию либо в параметрическое описание. Уровень срабатывания равен 2. Для многоместных функций версия такова:

   $\forall_{abfxyz}($стационарныеточки$(f) = a$ & особыеточки$(f) = b$ & $\mathrm{Extr}(f, x, y, z) \rightarrow x \in a \cup b)$

   После применения данных приемов условие задачи обычно преобразуется к виду дизъюнкции условий вида $\mathrm{Extr}(f, p, \ldots)$ для известных точек p. Чтобы анализировать такие условия - определять тип экстремума либо усматривать его отсутствие, создан ряд специальных приемов.

7. Усмотрение экстремума при помощи операторов "усмвозрастаетвточке", "усмубываетвточке".

   Приемы относятся к случаю функций одной переменной. Если анализируемая на экстремум точка принадлежит пересечению множества корней производной с внутренностью области определения функции, то выполняется обращение к проверочным операторам, усматривающим убывание либо возрастание производной в данной точке. При успехе делается вывод, что точка является экстремумом соответствующего типа:

   $\forall_{abcfgxy}($Производная(f, g) & $\mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = b$ & $a \in b$ & внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) = c$ & $a \in c$ & убываетвточке$(g, a) \rightarrow \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow x = f(a)$ & $y = \max)$

   $\forall_{abcfgxy}($Производная(f, g) & $\mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = b$ & $a \in b$ & внутренность$(\mathrm{Dom}(f)) = c$ & $a \in c$ & возрастаетвточке$(g, a) \rightarrow \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow x = f(a)$ & $y = \min)$

Утверждение "экстремум(...)" является условием задачи на описание, причем выражение a не содержит неизвестных. Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

8. Усмотрение экстремальной точки путем доказательства неравенства.

   Предпринимается попытка установить, что точка является локальным максимумом либо минимумом, путем непосредственного доказательства неравенства:

   $\forall_{afuvP}(P(a)\ \&\ 0 < f(x) - f(a)\ \&\ g = \lambda_x(f(x), P(x)) \to \mathrm{Extr}(g, a, u, v) \leftrightarrow u = f(a)\ \&\ v = \min)$

   $\forall_{afuvP}(P(a)\ \&\ f(x) - f(a) < 0\ \&\ g = \lambda_x(f(x), P(x)) \to \mathrm{Extr}(g, a, u, v) \leftrightarrow u = f(a)\ \&\ v = \max)$

   Утверждение "экстремум(...)" является условием задачи на описание, выражение a не содержит неизвестных. Последний антецедент берется в посылках, первые два - обрабатываются вспомогательными задачами на доказательство. Второй из этих задач передаются дополнительные посылки $P(x), \neg(x = a), x \to a$. Количество переменных в связывающей приставке x может быть любым. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4 (т.е. обычно эти приемы применяются в последнюю очередь).

9. Усмотрение точки перегиба.

   $\forall_{abcfguvxyz}(\text{Производная}(f, g)\ \&\ \mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = b\ \&\ a \in b\ \&\ \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(f)) = c\ \&\ a \in c\ \&\ g = \lambda_z(u(z), v(z))\ \&\ u(z) < 0 \to \neg(\mathrm{Extr}(f, a, x, y)))$

   $\forall_{abcfguvxyz}(\text{Производная}(f, g)\ \&\ \mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = b\ \&\ a \in b\ \&\ \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(f)) = c\ \&\ a \in c\ \&\ g = \lambda_z(u(z), v(z))\ \&\ 0 < u(z) \to \neg(\mathrm{Extr}(f, a, x, y)))$

   Приемы имеют заголовок "station" и относятся только к одноместным функциям. Они заменяют условие "экстремум(...)" задачи на описание на константу "ложь". Выражение a не должно содержать неизвестных. Последний антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, устанавливает, что в проколотой окрестности корня производной a эта производная строго отрицательна либо строго положительна. При обращении проверочному оператору передаются дополнительные посылки "$v(z), z \to a, \neg(z - a = 0)$". Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

10. Усмотрение экстремума в точках, где производная не существует либо не найдена.

    Если точка a принадлежит внутренности области определения функции f, но производная g в ней не определена, то предпринимается анализ знаков производной слева и справа от точки:

    $\forall_{abcfguvxy}(\text{Производная}(f, g)\ \&\ c = \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(f))\ \&\ c \backslash \mathrm{Dom}(g) = b\ \&\ a \in b\ \&\ g = \lambda_z(u(z), v(z))\ \&\ 0 < u(z)\ \&\ u(z) < 0 \to \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow x = f(a)\ \&\ y = \max)$

    $\forall_{abcfguvxy}(\text{Производная}(f, g)\ \&\ c = \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(f))\ \&\ c \backslash \mathrm{Dom}(g) = b\ \&\ a \in b\ \&\ g = \lambda_z(u(z), v(z))\ \&\ u(z) < 0\ \&\ 0 < u(z) \to \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow x = f(a)\ \&\ y = \min)$

Знак производной слева от точки a устанавливается предпоследним антецедентом: ему передаются дополнительные посылки "$v(z), z \to a, z - a < 0$". Последнему антецеденту, устанавливающему знак производной справа от точки, передаются дополнительные посылки "$v(z), z \to a, 0 < z - a$". Уровень срабатывания равен 1. Чтобы аналогичным образом усмотреть точку перегиба, введены еще два приема:

$\forall_{abcfguvxy}$(Производная(f, g) & $c =$ внутренность(Dom(f)) & $c \backslash \mathrm{Dom}(g) = b$ & $a \in b$ & $g = \lambda_z(u(z), v(z))$ & $u(z) < 0$ & $u(z) < 0 \to \neg(\mathrm{Extr}(f, a, x, y)))$

$\forall_{abcfguvxy}$(Производная(f, g) & $c =$ внутренность(Dom(f)) & $c \backslash \mathrm{Dom}(g) = b$ & $a \in b$ & $g = \lambda_z(u(z), v(z))$ & $0 < u(z)$ & $0 < u(z) \to \neg(\mathrm{Extr}(f, a, x, y)))$

Уровень срабатывания здесь тоже равен 1. Все четыре приема применяются только к одноместным функциям.

11. Использование второй производной.

Для функций, зависящих не более чем от трех переменных, созданы приемы усмотрения экстремума с помощью второй производной. Начнем со случая одноместных функций:

$\forall_{abdfguvxy}$(Производная(f, g) & roots$(g, \mathrm{Dom}(g)) = b$ & $a \in b$ & $g = \lambda_z(u(z), v(z))$ & $d = du(a)/da$ & d – число & $\neg(d = 0) \to \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow 0 < d$ & $x = f(a)$ & $y = \min \ \vee \ d < 0$ & $x = f(a)$ & $y = \max$)

Утверждение "экстремум(...)" является условием задачи на описание, причем выражение a не содержит неизвестных. Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он вычисляет производную d в точке a от первой производной функции f. Проверяется, что d есть константа. Третий, шестой и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Заменяющая дизъюнкция сопровождается комментариями "разборслучаев" и "серия". Уровень срабатывания равен 3. Если вторая производная d зависит от каких-либо параметров, используется другой прием:

$\forall_{abdfguvxy}$(Производная(f, g) & roots$(g, \mathrm{Dom}(g)) = b$ & $a \in b$ & $g = \lambda_z(u(z), v(z))$ & $d = du(a)/da$ & d – число $\to \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow 0 < d$ & $x = f(a)$ & $y = \min \ \vee \ d < 0$ & $x = f(a)$ & $y = \max \ \vee \ d = 0$ & $\mathrm{Extr}(f, a, x, y)$)

Отличие от предыдущего приема заключается в том, что указатель "контекст(входит(x9 параметры(x4)))" сразу же выбирает некоторую переменную x9, входящую в выражение d. При формировании заменяющей дизъюнкции равенство $d = 0$ разрешается относительно этой переменной. Переходим к функциям, зависящим от двух переменных:

$\forall_{abcfghuvpq}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), h(x, y))$ & $d^2g(p, q)/dp^2 = a$ & $d^2g(p, q)/dpdq = b$ & $d^2g(p, q)/dq^2 = c$ & $d = ac - b^2$ & $\neg(d = 0) \to \mathrm{Extr}(f, (p, q), u, v) \leftrightarrow u = g(p, q)$ & $0 < d$ & $(a < 0$ & $v = \max \ \vee \ 0 < a$ & $v = \min))$

Как и выше, утверждение "экстремум(...)" является условием задачи на описание, причем либо выражения p, q не содержат неизвестных, либо имеет место этап редактирования параметрического описания. Должен иметься комментарий "стационарныеточки", свидетельствующий, что уже срабатывал прием, сводящий задачу к анализу экстремума в отдельных точках. В остальном прием аналогичен случаю одной переменной. Уровень срабатывания его тот же. Наконец, для трех переменных создан следующий прием:

$\forall_{abcdefghpqrsuvAB}(f = \lambda_{xyz}(g(x,y,z),h(x,y,z))\ \&\ d^2g(p,q,r)/dp^2 = a\ \&\ d^2g(p,q,r)/dq^2 = b\ \&\ d^2g(p,q,r)/dr^2 = c\ \&\ d^2g(p,q,r)/dpdq = d\ \&\ d^2g(p,q,r)/dpdr = e\ \&\ d^2g(p,q,r)/dqdr = s\ \&\ A = ab - d^2\ \&\ \neg(A = 0)\ \&\ B = abc + 2dse - be^2 - as^2 - cd^2\ \&\ \neg(B = 0) \to \mathrm{Extr}(f,(p,q,r),u,v) \leftrightarrow u = g(p,q,r)\ \&\ 0 < A\ \&\ (0 < a\ \&\ 0 < B\ \&\ v = \min\ \vee\ a < 0\ \&\ B < 0\ \&\ v = \max))$

Этот прием, хотя и несколько громоздок, совершенно аналогичен предыдущему. Создание на ГЕНОЛОГе общего приема для произвольного числа переменных, большего единицы, оставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

12. Вывод необходимого условия экстремума, если выражение для функции содержит неизвестные.

    Прием применяется к одноместным функциям. Если удается вычислить производную в рассматриваемой точке, то к условиям задачи присоединяется равенство этой производной нулю:

    $\forall_{abfgxy}(\mathrm{Extr}(\lambda_z(f(z),g(z)),a,x,y)\ \&\ b = df(a)/da\ \&\ b - \text{число} \to b = 0)$

    Прием имеет заголовок "выводусловия". Выражение "$\lambda_z(f(z),g(z))$" содержит неизвестные. Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Его истинность означает, что производную удалось вычислить, в частности, что она существует. Уровень срабатывания равен 2.

13. Декомпозиция условия "$x \to a$" в случае нескольких переменных.

    $\forall_{abnx}((\lambda_i(x(i), i \in \{1,\ldots,n\}) \to \lambda_j(a(j), j \in \{1,\ldots,n\})\backslash b) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to (x(i) \to a(i)\backslash b)))$

    Указатели "развертка" определяют идентификацию заменяемого терма с утверждением вида "$((x_1,\ldots,x_n) \to (a_1,\ldots,a_n)\backslash b)$", означающим, что векторная переменная $(x_1,\ldots,x_n)$ стремится к точке $(a_1,\ldots,a_n)$, причем b - указатель типа рассматриваемой окрестности. За неимением других определенных выше возможностей, этот указатель равен 0 ("полная" окрестность). Квантор общности заменяющего терма разворачивается в конъюнкцию утверждений вида "$x_i \to a_i\backslash b$". Уровень срабатывания равен 1.

14. Дополнительные приемы усмотрения отсутствия экстремума.

    (a) Отсутствие экстремума для константы.
    $\forall_{abcd}(\neg(\mathrm{Extr}(\lambda_x(a, x - \text{число}), b, c, d)))$
    Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к условию задачи на описание и имеет уровень срабатывания 0.

    (b) Усмотрение отсутствия экстремума в заданной точке с помощью анализа поведения функции по различным направлениям в этой точке.
    $\forall_{abcdefghpqruv}(f = \lambda_{xy}(g(x,y),h(x,y))\ \&\ g(p+x,q+ax) = b(a)x^n/c(a) + d(a)x^m/e(a) + r(x)\ \&\ \exists_{ij}(b(i) = 0\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ b(j)c(j)d(i)e(i) < 0) \to \neg(\mathrm{Extr}(f,(p,q),u,v)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть представляет собой значение анализируемой функции в точке прямой с направляющим вектором $(1, a)$, проходящей через точку (p, q). Эта часть с помощью вспомогательной задачи на преобразование заменяется на сумму первых членов разложения по формуле Тейлора (степени выше шестой отбрасываются). Правая часть антецедента выделяет в данном разложении два старших члена, причем $n < m$ и обе степени m, n оказываются четными. Последний антецедент выражает достаточное условие наличия в (p, q) седловой точки, формулируемое в терминах коэффициентов при указанных двух старших членах. В нем фигурируют два различных направления прямой: $a = i$ и $a = j$. Истинность последнего антецедента устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 4. Для случая, когда n четное, а m нечетное, создан аналогичный прием:

$\forall_{abcdefghpqruv}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), h(x, y))\ \&\ g(p + x, q + ax) = b(a)x^n/c(a) + d(a)x^m/e(a) + r(x)\ \&\ \exists_i(b(i) = 0\ \&\ \neg(d(i) = 0)) \to \neg(\mathrm{Extr}(f, (p, q), u, v)))$

Уровень срабатывания его тоже равен 4.

(c) Отсутствие экстремума на линии стационарных точек.

Если функция двух переменных имеет непрерывную линию, состоящую из стационарных точек, то делается вывод о непринадлежности точки экстремума этой линии:

$\forall_{abcfguvz}(\mathrm{Extr}(f, u, z, v)\ \&\ \text{стационарныеточки}(f) = c \cup \mathrm{set}_{xy}(x \in \{; g(y)\}\ \&\ y-$ число $\&\ a \le y\ \&\ y \le b)\ \&\ 0 < b - a\ \&\ \text{непрерывно}(\lambda_y(g(y), y-\text{число}), [a, b]) \to \neg(u \in \mathrm{set}_{xy}(x \in \{; g(y)\}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ a \le y\ \&\ y \le b)))$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, первый - с условием этой задачи. Утверждение $x \in \{; g(y)\}$ под описателем "класс"означает, что рассматриваются сразу несколько линий стационарных точек, определяемых зависимостями x от y, причем $g(y)$ есть упорядоченный набор выражений для таких зависимостей. Все они определены на промежутке $[a, b]$. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Они убеждаются в невырожденности промежутка и в непрерывности рассматриваемых зависимостей (т.е. в непрерывности вектор-функции $g(y)$). Уровень срабатывания равен 1. Для случая единственной линии создан аналогичный прием:

$\forall_{abcfguvz}(\mathrm{Extr}(f, u, z, v)\ \&\ \text{стационарныеточки}(f) = c \cup \mathrm{set}_{xy}(x = g(y)\ \&\ y -$ число $\&\ a \le y\ \&\ y \le b)\ \&\ 0 < b - a\ \&\ \text{непрерывно}(\lambda_y(g(y), y-\text{число}), [a, b]) \to \neg(u \in \mathrm{set}_{xy}(x = g(y)\ \&\ y - \text{число}\ \&\ a \le y\ \&\ y \le b)))$

(d) Усмотрение отсутствия экстремума функции многих переменных, обращающейся в константу при подстановке части их значений.

$\forall_{abcfgpuv}(p = \lambda_{xy}(f(x, y), g(x, y))\ \&\ f(x, b) = c \to \neg(\mathrm{Extr}(p, (a, b), u, v)))$

$\forall_{abcfgpuv}(p = \lambda_{xy}(f(x, y), g(x, y))\ \&\ f(a, y) = c \to \neg(\mathrm{Extr}(p, (a, b), u, v)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение, причем результат c не зависит от переменной x в первом случае и от y во втором. Подставляемое выражение

(b либо, соответственно, a) не содержит неизвестных. Утверждение $g(x,y)$ не должно иметь своим конъюнктивным членом равенство (отбрасываются случаи поиска условного экстремума). Уровень срабатывания равен 1. Для функций трех переменных созданы аналогичные приемы:
$\forall_{abcdfgpuv}(p = \lambda_{xyz}(f(x,y,z), g(x,y,z))\ \&\ f(a,y,c) = d \to \neg(\mathrm{Extr}(p,(a,b,c),u, v)))$
$\forall_{abcdfgpuv}(p = \lambda_{xyz}(f(x,y,z), g(x,y,z))\ \&\ f(a,b,z) = d \to \neg(\mathrm{Extr}(p,(a,b,c),u, v)))$
$\forall_{abcdfgpuv}(p = \lambda_{xyz}(f(x,y,z), g(x,y,z))\ \&\ f(x,b,c) = d \to \neg(\mathrm{Extr}(p,(a,b,c),u, v)))$

15. Отбрасывание внешних одноместных монотонных операций.

Иногда отыскание экстремума существенно ускоряется после отбрасывания внешней монотонной операции:

(a) Сумма.
$\forall_{abfguvw}(\mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x), g(x)), u, c, w) = b \to \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x)+a, g(x)), u, v, w) \leftrightarrow \exists_c(b\ \&\ v = c+a))$
Преобразуемое утверждение "экстремум(...)" является условием задачи на описание. Длина связывающей приставки x произвольная. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно неизвестных u, c, w с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 0.

(b) Степень.
$\forall_{afguvw}(0 < a\ \&\ \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x), g(x)\ \&\ 0 \le f(x)), u, c, w) = b \to \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x)^a, g(x)), u, v, w) \leftrightarrow \exists_c(b\ \&\ v = c^a))$
Переменная a идентифицируется с константой, не являющейся простой дробью с нечетным знаменателем. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор".
$\forall_{afguvw}(0 < a\ \&\ \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x), g(x)), u, c, w) = b \to \mathrm{Extr}(\lambda_x((f(x))^a, g(x)), u, v, w) \leftrightarrow \exists_c(b\ \&\ v = c^a))$
Переменная a идентифицируется с простой дробью, имеющей нечетные числитель и знаменатель.
$\forall_{afguvw}(0 < a\ \&\ \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x), g(x)), u, c, w) = b\ \&\ 0 \le f(x) \to \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x)^a, g(x)), u, v, w) \leftrightarrow \exists_c(b\ \&\ v = c^a))$
Переменная a идентифицируется с константой, представляющей собой простую дробь с четным числителем либо вообще не являющейся простой дробью. Первый и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В последнем случае добавляется посылка "$g(x)$". Во всех трех приемах связывающая приставка может иметь произвольную длину. Уровни срабатывания равны 0. Наконец, приведем прием усмотрения отсутствия экстремума при наличии непрерывной линии корней функции двух переменных:
$\forall_{afguvw}(0 < a\ \&\ (f(x,y) = 0\ \&\ y - \text{число}) = (y = h(x))\ \&\ \mathrm{Extr}(\lambda_{xy}(f(x,y), g(x,y)), u, c, w) = \text{ложь}\ \&\ \text{непрерывно}(\lambda_x(h(x), x - \text{число}), \mathbb{R}) \to \mathrm{Extr}(\lambda_{xy}(f(x,y)^a, g(x,y)), u, v, w) \leftrightarrow \text{ложь})$

Здесь переменная a идентифицируется с простой дробью, имеющей четный числитель. Так как линия корней непрерывна, экстремумы на ней отсутствуют. Третий антецедент гарантирует отсутствие экстремумов в областях отрицательных либо положительных значений основания степени. Уровень срабатывания приема равен 0.

(c) Минус.
$\forall_{bfguvw}(\mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x), g(x)), u, c, d) = b \to \mathrm{Extr}(\lambda_x(-f(x), g(x)), u, v, w) \leftrightarrow \exists_{cd}(b \,\&\, v = -c \,\&\, w = (\max \text{ при } d = \min, \text{ иначе } \min)))$
Уровень срабатывания равен 0.

16. Определение условного экстремума путем явного выражения переменных из условий связи.

Приемы применяются, если уравнение связи линейно относительно некоторой переменной:

$\forall_{fghpqrs}(h = \lambda_{xy}(f(x,y), p(x,y) = q(x,y) \,\&\, g(x,y)) \,\&\, (p(x,y) = q(x,y)) = (x = r(y) \,\&\, s(y)) \to \mathrm{Extr}(h, u, v, w) \leftrightarrow \exists_z(\mathrm{Extr}(\lambda_y(f(r(y), y), g(r(y), y) \,\&\, s(y)), z, v, w) \,\&\, u = (r(z), z)))$

$\forall_{fghpqrs}(h = \lambda_{yx}(f(x,y), p(x,y) = q(x,y) \,\&\, g(x,y)) \,\&\, (p(x,y) = q(x,y)) = (x = r(y) \,\&\, s(y)) \to \mathrm{Extr}(h, u, v, w) \leftrightarrow \exists_z(\mathrm{Extr}(\lambda_y(f(r(y), y), g(r(y), y) \,\&\, s(y)), z, v, w) \,\&\, u = (z, r(z))))$

Приемы отличаются лишь порядком переменных: во втором случае порядок x, y в связывающей приставке изменен на обратный. Проверяется, что выражения $p(x,y), q(x,y)$ линейны относительно x. Приемы применяются к условию задачи на описание. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно x вспомогательной задачей на описание. Утверждение "экстремум(...)" в заменяющей части эквивалентности разрешается относительно z, v, w с помощью другой задачи на описание. Заметим, что прием будет применен лишь в том случае, если обе задачи окажутся успешно решены. Уровень срабатывания равен 2. Для функций трех и четырех переменных созданы аналогичные приемы:

$\forall_{fghpqrs}(h = \lambda_{xyz}(f(x,y,z), p(x,y,z) = q(x,y,z) \,\&\, g(x,y,z)) \,\&\, (p(x,y,z) = q(x,y,z)) = (x = r(y,z) \,\&\, s(y,z)) \to \mathrm{Extr}(h, u, v, w) \leftrightarrow \exists_d(\mathrm{Extr}(\lambda_{yz}(f(r(y,z), y, z), g(r(y,z), y, z) \,\&\, s(y,z)), d, v, w) \,\&\, u = \text{префикс}(r(d(1), d(2)), d)))$

$\forall_{fghpqrs}(h = \lambda_{yxz}(f(x,y,z), p(x,y,z) = q(x,y,z) \,\&\, g(x,y,z)) \,\&\, (p(x,y,z) = q(x,y,z)) = (x = r(y,z) \,\&\, s(y,z)) \to \mathrm{Extr}(h, u, v, w) \leftrightarrow \exists_d(\mathrm{Extr}(\lambda_{yz}(f(r(y,z), y, z), g(r(y,z), y, z) \,\&\, s(y,z)), d, v, w) \,\&\, u = (d(1), r(d(1), d(2)), d(2))))$

$\forall_{fghpqrs}(h = \lambda_{xyzv}(f(x,y,z,v), p(x,y,z,v) = q(x,y,z,v) \,\&\, g(x,y,z,v)) \,\&\, (p(x,y,z,v) = q(x,y,z,v)) = (x = r(y,z,v) \,\&\, s(y,z,v)) \to \mathrm{Extr}(h, u, t, w) \leftrightarrow \exists_d(\mathrm{Extr}(\lambda_{yzv}(f(r(y,z,v), y, z, v), g(r(y,z,v), y, z, v) \,\&\, s(y,z,v)), d, t, w) \,\&\, u = \text{префикс}(r(d(1), d(2), d(3)), d)))$

17. Определение условного экстремума по методу Лагранжа.

Считаем, что в задаче на поиск условного экстремума функции связи между аргументами размещаются среди утверждений, задающих область определения этой функции. Предварительно они должны быть приведены к виду равенств с нулевой правой частью. Метод реализуется следующими приемами:

(a) Ввод функции Лагранжа.

$\forall_{fpqrn}(f = \lambda_x(p, \forall_i(i \in \{1, \dots, n\} \to q(i) = 0)\ \&\ r) \to g = \lambda_{xy}(p + \sum_{i=1}^{n}(y(i)q(i)), r\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \dots, n\} \to y(i) - \text{число}))\ \&\ \text{функциялагранжа}(f, g))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, условие которой имеет вид "экстремум(f ...)". Указатель "развертка(...)" определяет идентификацию квантора общности внутри этого антецедента с конъюнкцией равенств $q(1) = 0, \dots, q(n) = 0$. Указатель "переменные(x24 x14)" определяет выбор в качестве $y(1), \dots, y(n)$ некоторых новых переменных (x14 определяет число этих переменных). Для обозначения функции Лагранжа выбирается новая переменная g. Конечная сумма и квантор общности в выражении для функции Лагранжа выделены указателями "развертка", т.е. выписываются, соответственно, как обычная сумма и конъюнкция. Посылка "функциялагранжа(f g)" связывает новую функцию с исходной, она используется последующими приемами. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Нахождение внутренности области определения функции Лагранжа.

$\forall_{fguv}(\text{функциялагранжа}(g, f)\ \&\ f = \lambda_x(u(x), v(x)) \to \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(f)) = \text{внутренность}(\mathrm{set}_x(v(x)\ \&\ \text{одз}(u(x)))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей условие "экстремум(g ...)". Должна отсутствовать посылка вида "равно(внутренность(область(f))...)". Конъюнкция под описателем "класс" разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Ее надвыражения обрабатываются нормализаторами "нормкласс" и "нормвнутренность". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Определение частных производных функции Лагранжа.

$\forall_{afghimpux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))\ \&\ m = l(x)\ \&\ i \in \{1, \dots, m\}\ \&\ a = dg(x)/dx(i)\ \&\ \text{функциялагранжа}(p, f) \to \lambda_x(a, u(x)\ \&\ \text{одз}(a)) = h\ \&\ \text{Частнпроизв}(f, i, h))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей условие "экстремум(p ...)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормдлинанабора", в результате чего идентифицируется число переменных m. Третий антецедент выделен указателем "программа". Он перечисляет номера переменных i. Проверяется отсутствие посылки вида "Частнпроизв(f i ...)". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпроизводная", а затем упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Конъюнкция $u(x)$ & одз(a) в выводимом утверждении разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Определение стационарных точек функции Лагранжа.

$\forall_{afghmpux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))\ \&\ m = l(x)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \dots, m\} \to \text{Частнпроизв}(f, i, h(i)))\ \&\ a = \mathrm{set}_x(\forall_i(i \in \{1, \dots, m\} \to h(i)(x) = 0\ \&\ x \in \mathrm{Dom}(h(i))))\ \&\ \text{функциялагранжа}(p, f) \to \text{стационарныеточки}(f) = a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Его первый, третий и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей условие "экстремум($p \ldots$)". При этом указатель "развертка" определяет идентификацию третьего антецедента с группой посылок "Частнпроизв($f, 1, h(1)$)", $\ldots$, "Частнпроизв($f, m, h(m)$)". Второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Квантор общности в четвертом антецеденте разворачивается в конъюнкцию - систему уравнений для корней частных производных. Эта система разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Перед применением приема проверяется отсутствие посылки "равно(стационарныеточки(f)$\ldots$)". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Отыскание множества точек, где производная функции Лагранжа не определена либо не найдена.

$\forall_{cfghmpux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))$ & $m = l(x)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \to$ Частнпроизв$(f, i, h(i)))$ & $c =$ внутренность(Dom(f)) & функциялагранжа(p, f) $\to$ особыеточки(f) $=$ set$_x(x \in c$ & $\exists_i(i \in \{1, \ldots, m\}$ & $\neg(x \in \mathrm{Dom}(h(i))))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Все антецеденты, кроме второго, идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей условие "экстремум(p $\ldots$)". Утверждение под описателем "класс" в правой части выводимого равенства разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Сам описатель обрабатывается нормализатором "нормкласс". Перед попыткой применить прием проверяется отсутствие посылки вида "равно(особыеточки(f)$\ldots$)". Уровень срабатывания приема равен 1.

(f) Переход к проверке экстремума для функции Лагранжа, в которую подставлены известные значения множителей Лагранжа.

$\forall_{afgmnxyz}$(функциялагранжа(f, g) & числперем(f) $= n$ & числперем(g) $= m$ & стационарныеточки(g) $= a$ & особыеточки(g) $= \emptyset \to \mathrm{Extr}(f, x, y, z) \leftrightarrow \exists_v(v \in a$ & $x =$ поднабор$(v, 1, n)$ & Extr(сужение(подфункция(g, наборномеров$(n+1, m)$, поднабор$(v, n+1, m)$), Dom(f)), поднабор$(v, 1, n), y, z)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуется условие задачи на описание, причем эта задача не имеет другого условия с заголовком "экстремум". Выражение x должно содержать существенную неизвестную. Первый и два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на описание, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Они определяют число переменных функций f, g с помощью нормализатора "нормчислперем". Заменяющее утверждение означает, что наличие экстремума функции f в точке x эквивалентно существованию такой стационарной точки v функции Лагранжа, что x является проекцией набора v на первые n разрядов (соответствующие исходным переменным функции f), а результат подстановки в функцию Лагранжа определяемых набором v значений множителей Лагранжа (т.е. функция от первых n переменных) имеет в данной точке x экстремум соответствующего типа. Таким образом, после применения данного приема остается лишь выполнить анализ на экстремум в выделенных точках. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Определение дифференциала Лагранжа в стационарной точке.

$\forall_{afnpqr}(f = \lambda_x(p, \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to q(i) = 0)$ & $r(x))$ & $m =$ числперем(f) $\to$

диффлагранжа$(f, a, \lambda_y($дифференциал$(f, 2, a, y), \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to$ дифференциал$(\lambda_x(q(i), r(x)), 1, a, y) = 0)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \to y(i) -$ число$))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, имеющей условие "экстремум$(f,\ a\ \ldots)$", где выражение a не содержит неизвестных. Указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности в этом антецеденте с конъюнкцией равенств $q(1) = 0, \ldots, q(n) = 0$, задающих ограничения, при которых ищется экстремум. Кванторы общности в выводимом утверждении тоже выделены указателем "развертка" и выписываются в виде конъюнкций. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор" и определяет число m переменных функции f с помощью нормализатора "нормчислперем". Указатель "переменные(x24 x13)" определяет выбор в качестве y набора новых переменных, имеющего длину m. Значением функции $\lambda_y($дифференциал$(f, 2, a, y), \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to$ дифференциал$(\lambda_x(q(i), r(x)), 1, a, y) = 0)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \to y(i) -$ число$))$ служит значение полного дифференциала второго порядка функции f в точке a для набора y значений приращений переменных. Это значение вычисляется путем решения вспомогательной задачи на преобразование, имеющей условие "дифференциал$(f, 2, a, y)$". Область определения указанной функции ограничивается системой уравнений, обращающих в 0 значения полных дифференциалов первого порядка функций связи $\lambda_x(q(i), r(x))$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Эти дифференциалы вычисляются аналогичным образом. Заметим, что фактическое вычисление полного дифференциала первого либо второго порядка выполняется несложными приемами, реализованными на ЛОСе. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Нормализация дифференциала Лагранжа.

Для исключения зависимых переменных в дифференциале Лагранжа используется следующий прием:

$\forall_{abcfgh}(\neg(b = 0) \to$ диффлагранжа$(f, a, \lambda_{xy}(g(x), bx + c = 0$ & $h(x))) \to$ диффлагранжа$(f, a, \lambda_y(g(-c/b), h(-c/b))))$

Преобразование применяется к посылке задачи на описание. Здесь x - отдельная переменная, не входящая в выражения b, c; y - список прочих переменных связывающей приставки. Уровень срабатывания равен 0.

Для приведения подобных членов дифференциала созданы еще два приема:

$\forall_{abcdefg}($диффлагранжа$(f, a, \lambda_{xyz}(bxy/c + dxy/e + h(z), g(z))) \leftrightarrow$ диффлагранжа$(f, a, \lambda_{xyz}((b/c + d/e)xy + h(z), g(z))))$

$\forall_{abcdefg}($диффлагранжа$(f, a, \lambda_{xy}(bx^2/c + dx^2/e + g(y), h(y))) \leftrightarrow$ диффлагранжа$(f, a, \lambda_{xy}((b/c + d/e)x^2 + g(y), h(y))))$

Уровень срабатывания их тоже равен 0.

(i) Использование дифференциала Лагранжа для определения экстремума.

Рассмотрены случаи, когда дифференциал зависит от одной либо двух переменных:

$\forall_{afpqxy}($диффлагранжа$(f, a, \lambda_z(pz^2/q, z -$ число$))$ & $\neg(p = 0)$ & $\neg(q = 0) \to \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow x = f(a)$ & $(0 < pq$ & $y = \min\ \vee\ pq < 0$ & $y = \max))$

$\forall_{afpqrxy}($диффлагранжа$(f, a, \lambda_{zv}(pz^2 + qv^2 + rzv, z -$ число & $v -$ число$))$ & $0 < 4pq - r^2 \to \mathrm{Extr}(f, a, x, y) \leftrightarrow x = f(a)$ & $(0 < p$ & $y = \min\ \vee\ p < 0$ & $y =$

max))

$\forall_{afpqrxy}$(диффлагранжа$(f, a, \lambda_{zv}(pz^2+qv^2+rzv, z-$число $\&$ $v-$число$))$ $\& \, 4pq-r^2 < 0 \to \neg(\text{Extr}(f, a, x, y)))$

Эти приемы имеют заголовок "a3" и применяются к условию задачи на описание. Уровень срабатывания равен 2. Если вместо одной стационарной точки имеем целое семейство таких точек, отличающихся лишь значениями вспомогательных переменных функции Лагранжа, то для усмотрения отсутствия экстремума используется дополнительный прием:

$\forall_{afpqrxyA}$(диффлагранжа$(f, a, \lambda_{zv}(pz^2+qv^2+rzv, z-$число $\&$ $v-$число$))$ $\& \, A = 4pq - r^2 \,\&\, \exists_u(A < 0 \,\&\, B) \to \neg(\text{Extr}(f, a, x, y)))$

Здесь предполагается, что задача имеет цель (серия u), т.е. u - набор параметров редактируемого параметрического описания. Эти параметры не входят в a, но встречаются в выражении A. Через B обозначена конъюнкция всех условий задачи, содержащих параметры u. Уровень срабатывания равен 2.

Качественное описание графика функции

Под качественным описанием графика одноместной вещественной функции, как и обычно, понимается перечисление общих свойств этой функции: область определения, промежутки монотонности, экстремумы, число корней на промежутках монотонности и т.п. Задача на качественное описание графика функции $\lambda_x(f(x), x-$число$)$ формулируется как задача на описание, имеющая условие "$x = \lambda_x(f(x), x -$ число$)$" и цели "исследовать", "полный", "явное", "прямойответ", "функция", "неизвестные x". Решение этой задачи начинается с того, что инициируется рассмотрение ее блока анализа. Это делается на уровне 1. Блоку анализа передаются указанное условие и цели "исследовать", "неизвестные x". Далее работают приемы вывода следствий, характеризующих функцию x. Наиболее интересные факты, по мере их появления, передаются во внешнюю задачу на описание. По исчерпании средств вывод следствий обрывается, и далее, по исчерпании средств сканирования исходной задачи на описание, в качестве ответа выдается полный список ее условий. Он состоит из исходного условия, к которому присоединены отобранные факты. Вывод и отбор следствий управляются целевой установкой исходной задачи. Она может несколько варьироваться по сравнению с указанной выше, и тогда акцент исследования свойств функции изменится (например, будет изучаться выпуклость-вогнутость, непрерывность, и т.п.).

Перейдем к описанию приемов исследования функции, используемых для вывода следствий в блоке анализа:

1. Область определения функции.

   $\forall_{afg}(a = \lambda_x(g(x), f(x)) \to \text{Dom}(a) = \text{set}_x(f(x) \,\&\, \text{одз}(g(x))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". При этом a - переменная. Утверждение под описателем "класс" разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Для блокировки повторного срабатывания используется комментарий (определено a). При анализе функции a могут возникнуть какие-то вспомогательные функции, которые тоже будут определяться посылками задачи. Например, могут появиться функции b, по значению которых значение a определяется однозначно, и притом монотонным образом. Они связываются с функцией a утверждениями "возрастание(a b)", "убывание(a b)". Наличие таких посылок блокирует применение рассматриваемого приема к функции b, так как ее область определения находится одним из следующих приемов:

$\forall_{afg}$(возрастание(f, g) & $\mathrm{Dom}(f) = a \to \mathrm{Dom}(g) = a$)

$\forall_{afg}$(убывание(f, g) & $\mathrm{Dom}(f) = a \to \mathrm{Dom}(g) = a$)

Здесь оба антецедента идентифицируются с посылками. Выводимые равенства во всех трех случаях сопровождаются комментарием "ориентацияравенства", блокирующим перестановку операндов. Уровень срабатывания равен 0.

2. Вычисление производной.

   $\forall_{fghu}(f = \lambda_x(g(x), u(x)) \to \lambda_x(dg(x)/dx, u(x)) = h$ & Производная$(f, h))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Либо f является неизвестной, либо существует посылка "возрастание($\ldots f$)" или "убывание($\ldots f$)". Отсутствует посылка вида "Производная($f \ldots$)". Кроме того, должны отсутствовать посылки вида "возрастание($f \ldots$)", "убывание($f \ldots$)". Последнее требование объясняется тем, что если анализ интервалов монотонности функции f сведен к анализу интервалов монотонности некоторой другой функции, то вычислять нужно лишь производную последней. Наличие некоторых специальных целей (например, указания на исследование непрерывности либо анализ точек разрыва) блокирует данный прием. К производной $dg(x)/dx$ применяется нормализатор "нормпроизводная", и результат упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 1.

3. Определение множества точек, в которых производная не определена либо не вычислена.

   $\forall_{abcd}$(Производная(a, b) & $\mathrm{Dom}(a) = c$ & $\mathrm{Dom}(b) = d \to \mathrm{Dom}(a) \backslash \mathrm{Dom}(b) = \mathrm{set}_x(x \in c$ & $\neg(x \in d)))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Заметим, что область определения производной будет заблаговременно найдена тем же приемом, который определял область определения исследуемой функции. Конъюнкция под описателем "класс" разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 2.

4. Определение корней производной.

   $\forall_{abfg}(a = \lambda_x(g(x), f(x)) \to \mathrm{roots}(a, \mathrm{Dom}(a)) = \mathrm{set}_x(f(x)$ & $g(x) = 0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Должна существовать посылка вида "Производная($\ldots a$)". Конъюнкция под описателем "класс" разрешается относительно x с помошью вспомогательной задачи на описание. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

5. Определение области роста функции.

   Под областью роста понимается множество точек, где производная определена и не обращается в ноль.

   $\forall_{abcde}$(Производная(a,b) & $\mathrm{Dom}(b) = c$ & $\mathrm{roots}(b, \mathrm{Dom}(b)) = d$ & $\mathrm{Dom}(a) = e \to$ областьроста$(a, \mathrm{set}_x(x \in c$ & $x \in e$ & $\neg(x \in d))))$

   Антецеденты идентифицируются с поылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Выражения c, d не должны содержать символа "вариант", причем d не имеет заголовка "класс". Конъюнкция под описателем "класс" разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 2. Если выражение для области роста имеет вид объединения множеств, то утверждение "областьроста(...)" разбивается на подутверждения, соответствующие этим множествам:

   $\forall_{abc}$(областьроста$(a, b \cup c) \leftrightarrow$ областьроста(a,b) & областьроста$(a,c))$

   Уровень срабатывания равен 0.

6. Определение промежутков монотонности функции.

   $\forall_{abcdefghijk}$(Производная(a,b) & $\mathrm{roots}(b, \mathrm{Dom}(b)) = c$ & областьроста$(a, [d,j])$ & областьроста$(a, [j,g])$ & $j \in c$ & убываетвточке$(b,j) \to$ возрастает$(a, [d,j])$ & убывает$(a, [j,g]))$

   $\forall_{abcdefghijk}$(Производная(a,b) & $\mathrm{roots}(b, \mathrm{Dom}(b)) = c$ & областьроста$(a, [d,j])$ & областьроста$(a, [j,g])$ & $j \in c$ & возрастаетвточке$(b,j) \to$ убывает$(a, [d,j])$ & возрастает$(a, [j,g]))$

   Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Таким образом, устанавливается, что на промежутках $[d,j]$, $[j,g]$ (принадлежность концов этим промежуткам регулируется параметрами e, f, h, i) производная функции a определена и отлична от нуля, а в точке j она обращается в нуль. После этого усмотрение того, что j есть точка строгого монотонного убывания либо возрастания производной, позволяет установить монотонное возрастание либо убывание функции a на рассматриваемых промежутках. Если уже имелись посылки, констатирующие такую монотонность, то попытка применения приема блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcdfgx}$(Производная(f,g) & областьроста$(f, [a,b])$ & $g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & $0 < u(x) \to$ возрастает$(f, [a,b]))$

   $\forall_{abcdfgx}$(Производная(f,g) & областьроста$(f, [a,b])$ & $g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & $u(x) < 0 \to$ убывает$(f, [a,b]))$

   Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать", последний - обрабатывается проверочным оператором. По каждой теореме созданы две версии приема. В одной из них проверочному оператору придается посылка о стремлении x к точке b слева, в другом - посылка о стремлении x к точке a справа. Предварительно выражение $u(x)$ обрабатывается нормализатором "упрощзнак", который может преобразовать его в более простое выражение, имеющее тот же знак, но не обязательно равное исходному. Приемы имеют средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2. Все четыре приема продублированы, и с более слабым ограничителем трудоемкости срабатывают также на уровне 3. Если область роста исследуемой функции найти не удалось, либо для какого-то ее отрезка не удалось усмотреть монотонность функции на нем, то применяются приемы, решающие неравенства для производной:

$\forall_{abcfg}(\text{Производная}(a,b)\ \&\ b=\lambda_x(g(x),f(x))\ \&\ c=\text{set}_x(x-\text{число}\ \&\ g(x)<0)\rightarrow \text{убывает}(a,c))$

$\forall_{abcfg}(\text{Производная}(a,b)\ \&\ b=\lambda_x(g(x),f(x))\ \&\ c=\text{set}_x(x-\text{число}\ \&\ 0<g(x))\rightarrow \text{возрастает}(a,c))$

Первые два антецедента идентифицируются с поылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать", причем a - неизвестная этой задачи. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Конъюнкция под его описателем "класс" разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание, имеющей сравнительно большой максимальный уровень. Прием имеет слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

7. Определение точек экстремума.

   $\forall_{abcdghiluvx}(\text{убывает}(a,[x,b])\ \&\ \text{возрастает}(a,[g,x])\ \&\ \text{Dom}(a)=l\ \&\ x\in l\ \&\ a=\lambda_y(v(y),u(y))\rightarrow \text{Extr}(a,x,v(x),\max))$

   $\forall_{abcdghiluvx}(\text{возрастает}(a,[x,b])\ \&\ \text{убывает}(a,[g,x])\ \&\ \text{Dom}(a)=l\ \&\ x\in l\ \&\ a=\lambda_y(v(y),u(y))\rightarrow \text{Extr}(a,x,v(x),\min))$

   Все антецеденты, кроме четвертого, идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Переменная a является неизвестной этой задачи. Принадлежность концов промежуткам регулируется параметрами c,d,h,i. Истинность четвертого антецедента устанавливается при помощи вспомогательной задачи на доказательство. Должна отсутствовать посылка вида "экстремум($a\ x\ \ldots$)". Уровень срабатывания равен 1. Если функция имеет бесконечно много чередующихся промежутков возрастания и убывания, то применяются следующие приемы:

   $\forall_{abcdefghnuv}(\text{убывает}(f,\bigcup_{n,g(n)}(a(n),b(n)))\ \&\ \text{возрастает}(f,\bigcup_{m,h(m)}(c(m),d(m)))\ \&\ \exists_q(h(q)\ \&\ b(n)=c(q))\ \&\ \text{Dom}(f)=e\ \&\ b(n)\in e\ \&\ f=\lambda_x(u(x),v(x))\rightarrow \forall_n(g(n)\rightarrow \text{Extr}(f,b(n),u(b(n)),\min)))$

   $\forall_{abcdefghnuv}(\text{возрастает}(f,\bigcup_{n,g(n)}(a(n),b(n)))\ \&\ \text{убывает}(f,\bigcup_{m,h(m)}(c(m),d(m)))\ \&\ \exists_q(h(q)\ \&\ b(n)=c(q))\ \&\ \text{Dom}(f)=e\ \&\ b(n)\in e\ \&\ f=\lambda_x(u(x),v(x))\rightarrow \forall_n(g(n)\rightarrow \text{Extr}(f,b(n),u(b(n)),\max)))$

   Все антецеденты, кроме третьего и пятого, идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать", причем f - неизвестная. Истинность третьего антецедента устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство, которой передается дополнительная посылка $g(n)$. Этот антецедент проверяет, что конец каждого промежутка убывания (во втором приеме - возрастания) является началом какого-то промежутка возрастания (соответственно, убывания). Истинность пятого антецедента тоже устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

8. Определение числа корней на интервалах монотонности.

$\forall_{abcdefghijkx}(a = \lambda_x(g(x), f(x))$ & убывает$(a, [b, c])$ & $h = \lim_{x\to b+0} g(x)$ & $i = \lim_{x\to c-0} g(x) \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(a, (b, c))) = (1$ при $hi < 0,$ иначе $0))$

$\forall_{abcdefghijkx}(a = \lambda_x(g(x), f(x))$ & возрастает$(a, [b, c])$ & $h = \lim_{x\to b+0} g(x)$ & $i = \lim_{x\to c-0} g(x) \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(a, (b, c))) = (1$ при $hi < 0,$ иначе $0))$

Приемы основаны на сравнении знаков односторонних пределов значений исследуемой функции в концах промежутка монотонности. Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать", причем a - неизвестная. третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализатором "нормпредел". Для каждой теоремы созданы две версии приема. Одна срабатывает, если выражения h, i константные, другая - если хотя бы одно из них неконстантное. Во втором случае выбирается некоторый параметр указанных выражений, и неравенство $hi < 0$ разрешается относительно этого параметра. В обоих случаях уровень срабатывания равен 1.

9. Разбор случаев по значениям параметров.

   Если множество корней производной задается с помощью условного выражения, то это выражение определяет разбор случаев:

   $\forall_{abcde}(\mathrm{roots}(a, b) = (d$ при , иначе $e) \to c \ \vee \ \neg c)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Должна существовать посылка вида "Производная(f a)", где f - неизвестная. Если имеется какая-либо дизъюнктивная посылка, то прием блокируется, чтобы сначала предоставить возможность разбора случаев по этой посылке. Уровень срабатывания равен 0.

   Кроме данного приема, имеются также два приема, усматривающие в посылке задачи на исследование, имеющей цель "исследовать", условное подвыражение "вариант(a b c)", и выводящих дизъюнкцию "$a \ \vee \ \neg a$" для разбора случаев. В первом случае условное подвыражение входит в равенство для области определения функции, во втором - в утверждение с заголовком "областьроста". Уровни срабатывания равны 1.

10. Выделение подфункции, от которой исследуемая функция зависит монотонно.

    Иногда удается существенно упростить вычисления при замене исследуемой функции на другую, более "простую" функцию, от которой исходная зависит монотонно. Для нахождения таких "упрощенных" функций служат пакетные синтезаторы "возрастание" и "убывание", которые будут описаны ниже. Пока перечислим приемы, обращающиеся к данным синтезаторам:

    $\forall_{abdfg}(a = \lambda_x(g(x), f(x))$ & возрастание$(\lambda_x(g(x), f(x)), b) \to b = d$ & возрастание$(a, d))$

    $\forall_{abdfg}(a = \lambda_x(g(x), f(x))$ & е,убывание$(\lambda_x(g(x), f(x)), b) \to b = d$ & убывание$(a, d))$

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Переменная a является неизвестной. Второй антецедент выделен указателем "значения" и реализует обращение к синтезатору, находящему "упрощенную" версию b исходной функции, такую, что значение второй монотонно возрастает (для второго приема - убывает) при возрастании значения первой. Проверяется, что найденная функция отлична от исходной. Для функции b выбирается в качестве обозначения новая переменная d, и прием выводит равенство $b = d$, сопровождая его связывающей две функции посылкой - "возрастание(a, d)" либо "убывание(a, d)". Уровень срабатывания приема равен 0.

Введенные упрощенные функции исследуются на промежутки монотонности, как это было описано выше, и при получении для них результатов эти результаты переадресуются исходной функции:

$\forall_{abc}$(возрастает(a, b) & убывание$(c, a) \rightarrow$ убывает(c, b))

$\forall_{abc}$(возрастает(a, b) & возрастание$(c, a) \rightarrow$ возрастает(c, b))

$\forall_{abc}$(убывает(a, b) & убывание$(c, a) \rightarrow$ возрастает(c, b))

$\forall_{abc}$(убывает(a, b) & возрастание$(c, a) \rightarrow$ убывает(c, b))

В этих приемах антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Переменная c - неизвестная задачи. Уровень срабатывания равен 0.

11. Разбиение найденной области монотонности на промежутки.

    Если выражение для области монотонности имеет вид объединения, то посылка разбивается на две:

    $\forall_{abcde}$(возрастает$(a, b \cup c) \leftrightarrow$ возрастает(a, b) & возрастает(a, c))

    $\forall_{abcde}$(убывает$(a, b \cup c) \leftrightarrow$ убывает(a, b) & убывает(a, c))

    Преобразуемое утверждение является посылкой задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Уровень срабатывания равен 0.

12. Упрощение выражения, определяющего значение функции, если некоторый параметр явно выражен через другие параметры.

    В результате разбора случаев в условии задачи на описание, имеющей цель "исследовать", может появиться равенство, выражающее один из известных параметров задачи через другие известные параметры. Если этот параметр входит в терм, задающий исследуемую функцию, то перед выдачей ответа задачи предпринимается попытка упростить последний:

    $\forall_{fgh}(f(x) = g(x) \rightarrow \lambda_x(g(x), h(x)) = \lambda_x(f(x), h(x)))$

    Заменяемый описатель "отображение" находится в одной из частей равенства - условия задачи на описание, имеющей цель "исследовать". В другой части равенства расположена неизвестная, обозначающая исследуемую функцию. Существует условие задачи, имеющее вид "$a = t$", где a - известный параметр, не входящий в t и входящий в $g(x)$. Антцедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение, которой передается дополнительная посылка "$h(x)$". Уровень срабатывания равен 3.

13. Регистрация в списке условий внешней задачи на описание результатов исследования.

По мере появления в блоке анализа утверждений, представляющих интерес для общей характеризации функции, эти утверждения передаются во внешнюю задачу на описание. Приемы, которые выполняют данную работу, имеют теоремы вида "замещениеусловий(A)", где A - вид отбираемого утверждения. Заголовок приема - символ "замещениеусловий". Фильтры уточняют вид утверждения A и общие свойства контекста.

"замещениеусловий($\mathrm{Dom}(a) = b$)"

"замещениеусловий(убывает(a b))"

"замещениеусловий(возрастает(a b))"

"замещениеусловий(экстремум(a b c d))"

"замещениеусловий($\mathrm{roots}(ab) = c$)"

"замещениеусловий($\mathrm{card}(\mathrm{roots}(ab)) = c$)"

Во всех слуаях a идентифицируется с неизвестной задачи. Первые четыре приема имеют уровень срабатывания 7, последние два - уровень 8. Если задача имела дополнительную цель "выпуклавверх", указывающую, что в дополнение к промежуткам монотонности, корням и экстремумам, следует исследовать также промежутки выпуклости, то для отбора результатов используются еще два приема:

"замещениеусловий(выпуклавверх(a b))"

"замещениеусловий(выпуклавниз(a b))"

Уровень срабатывания здесь равен 8. Собственно анализ выпуклости предпринимается приемами, описываемыми в следующем пункте.

14. Определение промежутков выпуклости

    (a) Вычисление второй производной.

    $\forall_{abfg}(a = \lambda_x(g(x), f(x)) \rightarrow \lambda_x(dg(x)/dx, x - \text{число}) = b \;\&\; \text{Производная}(a, b))$

    Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цели "исследовать", "выпуклавверх". Должна существовать посылка вида "Производная(c a)", где c - неизвестная задачи. Повторное применение приема блокируется комментарием "производная" к посылке, идентифицированной с антецедентом. Для вычисленной производной выбирается новая переменная b. Производная вычисляется и упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Решение неравенств для второй производной.

    $\forall_{abcdfg}(\text{Производная}(d, a) \;\&\; \text{Производная}(a, b) \;\&\; b = \lambda_x(g(x), f(x)) \;\&\; c = \mathrm{set}_x(g(x) < 0) \rightarrow \text{выпуклавверх}(d, c))$

    $\forall_{abcdfg}(\text{Производная}(d, a) \;\&\; \text{Производная}(a, b) \;\&\; b = \lambda_x(g(x), f(x)) \;\&\; c = \mathrm{set}_x(0 < g(x)) \rightarrow \text{выпуклавниз}(d, c))$

    Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цели "исследовать", "выпуклавверх". Переменная d - неизвестная. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Неравенство в его правой части разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание, и далее к описателю "класс" применяется нормализатор "нормкласс". Уровень срабатывания равен 3.

(c) Разбиение области выпуклости на промежутки.

$\forall_{abc}$(выпуклаввверх$(a, b \cup c) \leftrightarrow$ выпуклаввверх$(a, b) \cup$ выпуклаввверх(a, c))

$\forall_{abc}$(выпуклавниз$(a, b \cup c) \leftrightarrow$ выпуклавниз$(a, b) \cup$ выпуклавниз(a, c))

Уровень срабатывания приемов равен 1.

15. Синтезатор "возрастание".

Опишем приемы использованного выше синтезатора "возрастание". Утверждение "возрастание$(f\ g)$" будет означать, что значение числовой функции f однозначно определяется по значению числовой функции g, причем при возрастании значения функции g значение функции f тоже возрастает. Аналогичным образом определяется утверждение "убывание$(f\ g)$". Входной переменной синтезатора является f, выходной переменной - g.

(a) Рациональная степень с четным знаменателем.

$\forall_{abcdefg}(c -$ rational & знаменатель$(c) -$ even & возрастание$(\lambda_x(g(x), f(x)),$ $e) \rightarrow$ возрастание$(\lambda_x((g(x))^c, f(x)), e))$

Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, третий - синтезатором.

(b) Рациональная степень с положительным нечетным знаменателем.

$\forall_{abcdfg}(c -$ rational & $\neg$(числитель$(c) -$ even) & $0 < c$ & возрастание$(\lambda_x(g(x),$ $f(x)), d) \rightarrow$ возрастание$(\lambda_x((g(x))^c, f(x)), d))$

Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, последний - синтезатором.

(c) Линейная функция.

$\forall_{abcdfg}(0 < c$ & возрастание$(\lambda_x(g(x),$
$f(x)), d) \rightarrow$ возрастание$(\lambda_x(b + cg(x), f(x)), d))$

$\forall_{abcdfg}(c < 0$ & убывание$(\lambda_x(g(x), f(x)), d) \rightarrow$ возрастание$(\lambda_x(b + cg(x), f(x)),$ $d))$

Исключается случай $b = 0, c = 1$. В остальном аналогично предыдущим пунктам.

(d) Показательная функция.

$\forall_{abfg}(0 < b - 1$ & возрастание$(\lambda_x(g(x), f(x)), a) \rightarrow$ возрастание$(\lambda_x(b^{g(x)}, f(x)),$ $a))$

(e) Логарифмическая функция.

$\forall_{abcfg}(0 < b - 1$ & возрастание$(\lambda_x(g(x), f(x)), a) \rightarrow$ возрастание$(\lambda_x(\log_b g(x),$ $f(x)), a))$

(f) Выдача результата по исчерпании возможностей.

$\forall_a$(возрастание(a, a))

Все предшествующие приемы срабатывали на уровне 1. Данный прием срабатывает по превышении этого уровня. Он выдает в качестве результата свое входное данное.

16. Синтезатор "убывание".

Синтезатор имеет приемы "рациональная степень с четным знаменателем", "рациональная степень с положительным нечетным числителем", "линейная функция", "показательная функция" - как в предыдущем пункте. Кроме того, добавлен прием для дробной зависимости с константным положительным числителем:

$\forall_{abfg}(0 < a \;\&\; \text{возрастание}(\lambda_x(g(x), f(x)), b) \to \text{убывание}(\lambda_x(a/g(x), f(x)), b))$

Определение числа корней

Задача на нахождение числа корней заданной функции f на заданном множестве a ставится как задача на преобразование, имеющая условие $\text{card}(\text{roots}(f, a))$. Для решения таких задач созданы следующие приемы:

1. Обращение к задаче на качественное описание графика функции.

   $\forall_{afgh}(\text{card}(\text{roots}(\lambda_x(f(x), g(x)), a)) = \text{card}(\text{roots}(h, a)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к условию задачи на преобразование. Указатель "посылка(равно(отображение(x23 и(значение(x7 x23) принадлежит(x23 x1))значение(x6 x23))x8) примечание(определениепараметра) примечание(разборслучаев))" заносит в список посылок задачи результат обработки нормализатором утверждения $\lambda_x(f(x), g(x) \;\&\; x \in a) = h$. Здесь h - новая переменная. В качестве нормализатора выступает задача на описание, имеющая цели "исследовать", "числокорней" и неизвестную h. Изложенная выше техника качественного описания графика функции преобразует исходное условие в конъюнкцию утверждений, описывающих свойства функции h. Наличие цели "числокорней" приводит к отбрасыванию утверждений "убывает(...)", "возрастает(...)". Утверждения, связанные с корнями исследуемой функции, сохраняются. В результате срсбатывания приема эти утверждения попадают в список посылок текущей задачи на преобразование. Повторная попытка применения приема блокируется комментарием "исследовать". Уровень срабатывания равен 1.

2. Отбрасывание подмножества, на котором число корней найдено.

   Прием использует посылку, указывающую число корней на некотором подмножестве рассматриваемого множества. Это подмножество вычитается.

   $\forall_{abcfp}(c = a \setminus b \;\&\; \text{card}(\text{roots}(f, b)) = p \to \text{card}(\text{roots}(f, a)) = p + \text{card}(\text{roots}(f, c)))$

   Заголовок приема - "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормразность". Преобразуемое выражение расположено в условии задачи на преобразование. Проверяется различие выражений a, c. Блокировка повтора обеспечивается комментарием "числокорней" к использованной посылке. Уровень срсбатывания равен 1.

3. Отбрасывание подмножества, на котором корни найдены.

   $\forall_{abcfp}(c = a \setminus b \;\&\; \text{roots}(f, b) = p \to \text{card}(\text{roots}(f, a)) = \text{card}p + \text{card}(\text{roots}(f, c)))$

   Аналогично предыдущему. Добавляется лишь обработка нормализатором "норммощность" выражения $\text{card}p$.

4. Рассмотрение элементов перечня.

Предыдущие приемы обеспечивали учет числа корней на интервалах монотонности. За вычетом этих интервалов, остаются их граничные точки. Они последовательно просматриваются; если значение функции в текущей точке равно нулю, то прибавляется единица, иначе - ноль:

$\forall_{abcfgh}(\neg(a \in \{;b\})\ \&\ \mathrm{Dom}(f) = c\ \&\ a \in c\ \&\ f = \lambda_x(g(x), h(x)) \rightarrow \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, \{a;b\})) = \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, \{;b\})) + (1 \text{ при } g(a),\ \text{ иначе } 0))$

Второй и последний антецеденты берутся в посылках, первый и третий - обрабатываются проверочными операторами. Выражение $g(a)$ упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование, условное выражение обрабатывается нормализатором "нормвариант". Уровень срабатывания равен 0.

5. Разбор случаев по равенству элементов перечня.

   Если в оставшемся двухэлементном списке не удается усмотреть различие его элементов, то предпринимается разбор случаев:

   $\forall_{ab}(a - b = 0\ \vee\ \neg(a - b = 0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(мощность(корни (x3 перечень(набор(x1 x2)))))" инициирует применение приема при усмотрении выражения "card(roots(a, b))". Фильтр "не(легковидеть(не(равно(плюс(x1 минус(x2))0))))" обеспечивает проверку того, что отличие от нуля разности $a - b$ неочевидно. Выведенная дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 2.

1.3.6 Монотонность

Напомним логические символы, связанные с монотонностью функций одного вещественного переменного. Утверждения "убывает(f a)", "возрастает(f a)" означают, что функция f, соответственно, строго убывает либо строго возрастает на множестве a. Утверждения "неубывает(f a)", "невозрастает(f a)" означают, что функция f монотонно неубывает либо, соответственно, монотонно невозрастает на множестве a. Утверждения "убываетвточке(f a)", "возрастаетвточке(f a)" означают, что функция f, соответственно, строго убывает либо возрастает в точке a (сравниваются значения функции в a и в точке из малой двусторонней окрестности). Выражения "упорядубыв(a f)", "упорядвозр(a f)" обозначают, соответственно, результат переупорядочения элементов набора a (не обязательно числового) по убыванию либо, соответственно, возрастанию значений одноместной вещественной функции f (численной характеристики элемента набора).

Приемы символа "убывает"

1. Доказательство убывания функции путем расшифровки по определению.

   $\forall_{afg}(\text{убывает}(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in a\ \&\ y \in a\ \&\ 0 < y - x \rightarrow 0 < f(x) - f(y)))$

   Прием применяется к условию задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 7.

2. Усмотрение убывания из отрицательности производной.

Предполагается, что на момент использования приема производная уже вычислена и указана в посылках. Прием, который выполняет такую подготовительную работу, общий для доказательства всех типов монотонности. Он будет приведен в самом конце раздела "монотонность".

$\forall_{abcdfgFG}(F(y) < 0 \,\&\, \text{Производная}(f, g) \,\&\, g = \lambda_y(F(y), G(y)) \to \text{убывает}(f, [a, b]))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, первый - обрабатывается проверочным оператором, которому передается дополнительная посылка "$y \in [a, b]$". Заметим, что прием допускает любые варианты для концов промежутка; роль индикаторов включения их в промежуток играют переменные c, d. Уровень срабатывания равен 3.

3. Усмотрение убывания из неположительности производной и конечности числа ее корней.

   $\forall_{abcdfgpqFG}(\forall_y(y \in a \to F(y) \leq 0) \,\&\, \text{Производная}(f, g) \,\&\, g = \lambda_y(F(y), G(y)) \,\&\, b = \text{set}_y(y \in a \,\&\, F(y) = 0) \,\&\, \text{конечное}(b) \,\&\, a = [p, q] \to \text{убывает}(f, a))$

   Прием аналогичен предыдущему: преобразуется подутверждение условия задачи на доказательство; второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками. Истинность первого антецедента (неотрицательность производной) устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он определяет множество b корней производной. Конъюнкция под описателем разрешается относительно y с помощью задачи на описание, затем применяется нормализатор "нормкласс". Последний антецедент, выделенный указателем "идентификатор", убеждается, что рассматриваемое множество есть промежуток. Наконец, предпоследний антецедент, устанавливающий конечность множества корней, обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 4.

4. Обращение к оператору "усмубывает".

   В произвольном контексте условия задачи предпринимается попытка усмотреть истинность утверждения "убывает(...)" при помощи проверочного оператора:

   $\forall_{af}(\text{убывает}(f, a) \to \text{убывает}(f, a))$

   Антецедент обрабатывается оператором "усмубывает". Уровень срабатывания равен 1.

5. Проверочный оператор "усмубывает".

   Оператор имеет следующие приемы:

   (a) Плюс.
   $\forall_{abfg}(\text{убывает}(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to \text{убывает}(\lambda_x(b + f(x), g(x)), a))$
   К выражению b относятся все слагаемые, не содержащие x. Проверяется, что оно не тождественно нулевое. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{afgh}(\text{убывает}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \,\&\, \text{невозрастает}(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to \text{убывает}(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a))$

Выражение $f(x)$ идентифицируется с отдельным слагаемым. Оба антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Умножение.

$\forall_{abfg}(0 < b \ \&$ убывает$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x(bf(x), g(x)), a))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afgh}(0 \leq f(x) \ \& \ 0 \leq g(x) \ \&$ убывает$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \ \&$ убывает$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Первым двум из этих операторов передаются дополнительные посылки "$h(x), x \in a$". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Минус.

$\forall_{afg}($возрастает$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x(-f(x), g(x)), a))$

Уровень срабатывания равен 1.

(d) Дробь.

$\forall_{afgh}(0 \leq f(x) \ \& \ 0 < g(x) \ \&$ убывает$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \ \&$ неубывает$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), a))$

Аналогично случаю умножения. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Степень.

$\forall_{abfg}(0 < b \ \& \ 0 \leq f(x) \ \&$ убывает$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

$\forall_{abfg}(0 < b \ \& \ b-$rational $\& \ \neg($числитель$(b)-$even$) \ \&$ убывает$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

$\forall_{afgh}(0 < f(x)-1 \ \&$ невозрастает$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \ \&$ убывает$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x((f(x))^{g(x)}, h(x)), a))$

В последнем приеме проверяется, что x входит в показатель степени. Уровни срабатывания равны 2.

(f) Натуральный логарифм.

$\forall_{afg}($убывает$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убывает$(\lambda_x(\ln f(x), g(x)), a))$

Уровень срабатывания равен 1.

Приемы символа "возрастает"

Аналогично символу "убывает", созданы приемы "Доказательство возрастания функции путем расшифровки по определению", "Усмотрение возрастания из положительности производной", "Усмотрение возрастания из неотрицательности производной и конечности числа ее корней". Кроме того, созданы следующие два приема, обеспечивающие устранение квантора при наличии посылки "возрастает$(\ldots)$":

$\forall_{afmAB}(\forall_x(A(x) \to x \in B) \ \&$ возрастает$(f, B) \ \& \ A(m) \to \forall_x(A(x) \ \& \ m \leq x \to a \leq f(x)) \leftrightarrow a \leq f(m))$

$\forall_{abc}($последовательность$(c, \mathbb{N}) \ \&$ возрастает$(c, \mathbb{N}) \to \exists_n(n -$ натуральное $\& \ a \leq n \ \& \ 0 \leq b + c(n)))$

Первый и последний антецеденты первого приема обрабатываются вспомогательными задачи на доказательство. Во втором приеме допускаются знаки строгих неравенств. Уровни срабатывания равны 1.

Созданы проверочный оператор "усмвозрастает" и прием, обращающийся к нему. По сравнению со случаем убывания, добавились два новых приема:

$\forall_{fgA}$(возрастает(g, A) & возрастает$(f, \mathrm{Val}(g)) \rightarrow$ возрастает(произведение$(f, g), A)$)

$\forall_{fAB}$(возрастает(f, A) & $B \subseteq$ образ$(f, A) \rightarrow$ возрастает(обрфункция$(f), B)$)

Здесь произведение функций, как обычно, означает их последовательное применение.

Приемы символа "неубывает"

Для данного символа созданы следующие приемы:

1. Доказательство неубывания функции путем расшифровки по определению. Аналогично случаю символа "убывает".

2. Усмотрение неубывания из неотрицательности производной. Аналогично случаю символа "убывает".

3. Определение точной нижней и верхней граней значений на промежутке монотонно неубывающей функции.

   $\forall_{abcdfg}$(неубывает$(\lambda_x(f(x), g(x)), [a, b]) \rightarrow \inf($образ$(\lambda_x(f(x), g(x)), [a, b])) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x)$)

   $\forall_{abcdfg}$(неубывает$(\lambda_x(f(x), g(x)), [a, b]) \rightarrow \sup($образ$(\lambda_x(f(x), g(x)), [a, b])) = \overline{\lim}_{x \rightarrow b-0} f(x)$)

   Приемы применяются к условию задачи на преобразование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

4. Кванторная расшифровка условия неубывания в посылках.

   $\forall_{af}$(неубывает$(f, a) \leftrightarrow \forall_{ij}(i \in a \ \&\ j \in a \ \&\ 0 \leq i - j \rightarrow 0 \leq f(i) - f(j)))$

   Утверждение входит в посылку задачи на описание, причем некоторое условие этой задачи содержит подвыражение вида $f(\ldots)$. Уровень срабатывания равен 6.

5. Обращение к оператору "усмнеубывает". Аналогично случаю символа "убывает".

6. Проверочный оператор "усмнеубывает". Аналогично случаю символа "убывает", но добавлен прием, непосредственно вычисляющий производную:

   $\forall_{bcfgpqA}(0 \leq df(x)/dx \rightarrow$ неубывает$(\lambda_x(f(x), g(x)), [p, q] \cap A))$

   Чтобы была предпринята попытка применить данный прием, при обращении к оператору необходимо ввести комментарий "производная". Истинность антецедента проверяется с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Предварительно производная вычисляется и упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень обращения равен 4.

Приемы символа "невозрастает"

Приемы этого символа совершенно аналогичны приемам предыдущего символа.

Приемы символа "убываетвточке"

Символ "убываетвточке" обычно возникает в теоремах приемов, причем обрабатывается проверочным оператором "усмубываетвточке". Перечислим приемы этого оператора:

1. Плюс.

   $\forall_{abfg}$(убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x(f(x) + b, g(x)), a))$

   Переменная b идентифицируется с невырожденной суммой всех слагаемых, не содержащих переменной x. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{afgh}$(убываетвточке$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & убываетвточке$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a))$

   Функциональная переменная $f(x)$ идентифицируется с некоторым слагаемым, $g(x)$ - с остаточной суммой. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

2. Минус.

   $\forall_{afg}$(возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x(-f(x), g(x)), a))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Умножение.

   $\forall_{abfg}(b < 0$ & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x(bf(x), g(x)), a))$

   $\forall_{abfg}(0 < b$ & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x(bf(x), g(x)), a))$

   Переменная b идентифицируется с невырожденным произведением всех сомножителей, не содержащих x. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{afgh}(0 < f(a)$ & $0 < g(a)$ & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & убываетвточке$(\lambda_x(g(x), h(x)), a)$ & $a -$ число $\to$ убываетвточке$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a))$

   Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{afgh}(0 < \lim_{x \to a} f(x)$ & убываетвточке$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a))$

   $\forall_{afgh}(\lim_{x \to a} f(x) < 0$ & возрастаетвточке$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a))$

   Приемы применяются только при наличии комментария "корни" (такой комментарий вводится приемами, определяющими промежутки монотонности при качественном описании графика функции). Пределы вычисляются нормализатором "нормпредел". Уровень срабатывания равен 2.

4. Степень.

   $\forall_{abfg}(0 < b$ & $b-$rational & $\neg$(числитель$(b)-$even) & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

$\forall_{abfg}(b < 0$ & $b-$rational & $\neg$(числитель$(b)-$even) & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abfg}(0 < b$ & $0 < f(a)$ & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $a-$ число $\rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

$\forall_{abfg}(b < 0$ & $0 < f(a)$ & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $a-$ число $\rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{bfg}(0 < b$ & $0 \leq f(x)$ & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), \infty) \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), \infty))$

$\forall_{bfg}(b < 0$ & $0 < f(x)$ & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), \infty) \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), \infty))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами, причем в случае второго антецедента используются дополнительные посылки "$x-$ число$, x \rightarrow \infty$". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ag}$(возрастаетвточке$(\lambda_x(g(x), x-$число$), \infty)$ & $a-$число & $0 < a$ & $a - 1 < 0 \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x(a^{g(x)}, x-$ число$), \infty))$

Прием применяется при отсутствии комментария "меньшеилиравно". При наличии комментария "меньшеилиравно", указывающего на проверку нестрогого убывания в точке, используется другая версия приема, отличающаяся от данной тем, что последнее неравенство в антецедентах - нестрогое. В обоих случаях введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfg}(0 < b$ & $b-$rational & числитель$(b)-$even & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $f(a) < 0 \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

Для случаев односторонней окрестности созданы еще две версии последнего приема:

$\forall_{abfg}(0 < b$ & $b-$rational & числитель$(b)-$even & возрастаетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $f(a) \leq 0 \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

$\forall_{abfg}(0 < b$ & $b-$rational & числитель$(b)-$even & убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & $0 \leq f(a) \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x((f(x))^b, g(x)), a))$

В первом случае должен иметься комментарий "меньше", указывающий, что рассматривается левая окрестность точки, во втором - комментарий "больше", указывающий на правую окрестность. Уровни срабатывания всех трех последних приемов равны 3.

5. Натуральный логарифм.

   $\forall_{afg}$(убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x(\ln f(x), g(x)), a))$

   Уровень срабатывания равен 1.

6. Использование производной.

   $\forall_{abfg}(b = df(a)/da$ & $b-$ число & $b < 0$ & $a-$ число $\rightarrow$ убываетвточке$(\lambda_x(f(x), g(x)), a))$

Прием блокируется, если выражение $f(x)$ содержит хотя бы один из символов "факториал", "произведениевсех", "суммавсех". Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{afg}(df(x)/dx < 0 \to \text{убываетвточке}(\lambda_x(f(x), g(x)), \infty))$

Аналогично предыдущему, но при проверке антецедента вводятся дополнительные посылки "x – число, $x \to \infty$". Уровень срабатывания равен 4.

7. Факториал.

   Хотя это явно и не указано, подразумевается, что рассматривается бесконечно-удаленная точка:

   $\forall_{afg}(\text{убываетвточке}(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to \text{убываетвточке}(\lambda_x(f(x)!, g(x)), a))$

   Уровень срабатывания равен 1.

8. Использование задания функции через описатель "отображение".

   $\forall_{afuv}(f = \lambda_x(u(x), v(x))\ \&\ \text{убываетвточке}(\lambda_x(u(x), v(x)), a) \to \text{убываетвточке}(f, a))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

9. Рассмотрение отношения двух последовательных значений в случае целочисленного аргумента.

   $\forall_{fg}(0 < f(x)\ \&\ f(x+1)/f(x) - 1 < 0 \to \text{убываетвточке}(\lambda_x(f(x), g(x)), \infty))$

   Прием применяется, если имеется комментарий "натуральное", указывающий, что рассматриваются только натуральные значения аргумента. Такие обращения к оператору используются при исследовании рядов. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Им придаются дополнительные посылки "x – натуральное, $x \to \infty$". Уровень срабатывания равен 5.

10. Попытка раскрывания скобок.

    $\forall_{fgh}(\text{убываетвточке}(\lambda_x((f(x) + g(x))h(x), x - \text{число}), \infty) \to \text{убываетвточке}(\lambda_x((f(x) + g(x))h(x), x - \text{число}), \infty))$

    Прием применяется, если усматривается, что $f(x), h(x)$ имеют своими обобщенными множителями два экспоненциальных выражения, основания которых не зависят от x, а показатели степени - линейны по x. Истинность антецедента устанавливается проверочным оператором, причем выражение $(f(x)+g(x))h(x)$ предварительно обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс" и вспомогательной задачей на преобразование. При этом используются дополнительные посылки "x – число, $x \to \infty$". Уровень срабатывания равен 2.

Приемы символа "возрастаетвточке"

Аналогично символу "убываетвточке", здесь создан лишь проверочный оператор "усмвозрастаетвточке". Приемы его аналогичны приемам предыдущего раздела. При этом не были созданы (не востребованы рассмотренными примерами) приемы для факториала, для отношения двух последовательных значений и для попытки раскрывания скобок.

Приемы символа "упорядвозр"

1. Пустой набор.

   $\forall_f$(упорядвозр(пустоеслово, f) = пустоеслово)

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Одноэлементный набор.

   $\forall_{af}$(упорядвозр($(a), f$) = (a))

   Уровень срабатывания равен 0.

3. Шаг рекурсии.

   $\forall_{abcfinP}$(упорядвозр($b, \lambda_x(f(x), P(x))$) = c & $l(c) = n$ & $i \in \{1, \dots, n\}$ & $0 \leq f(c(i)) - f(a) \rightarrow$ упорядвозр(префикс$(a, b), \lambda_x(f(x), P(x))$) = Вставка$(c, i, a)$)

   Прием применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", определяет с помощью вспомогательной задачи на преобразование результат c переупорядочивания набора b. Второй и третий антецеденты тоже выделены указателем "идентификатор". С их помощью определяется длина n набора c и последовательно перечисляются значения i от 1 до n. Последний антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Как только он оказывается истинным, т.е. значение $f(a)$ становится не превосходящим значения f на i-м элементе набора c, так сразу же определяется заменяющий терм - результат вставки элемента a на i-ю позицию. Уровень срабатывания равен 3. Заметим, что возможен особый случай - когда a нужно занести в конец набора c. Для этого случая создан отдельный прием:

   $\forall_{abcfnP}$(упорядвозр($b, \lambda_x(f(x), P(x))$) = c & $l(c) = n$ & $0 \leq f(a) - f(c(n)) \rightarrow$ упорядвозр(префикс$(a, b), \lambda_x(f(x), P(x))$) = суффикс$(c, a)$)

   Прием аналогичен предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

Приемы символа "упорядубыв"

Приемы этого символа аналогичны приемам символа "упорядвозр".

Вычисление производной при доказательстве монотонности функции

При доказательстве монотонности любого типа ("возрастает", "убывает", "невозрастает", "неубывает") используется прием, вычисляющий производную и регистрирующий ее в посылках задачи:

$$\forall_{afgh}(a = dg(x)/dx \rightarrow \lambda_x(a, x - \text{число}\ \&\ \text{одз}(a)) = f\ \&\ \text{Производная}(\lambda_x(g(x), h(x)), f))$$

Прием инициируется при усмотрении выражения "$\lambda_x(g(x), h(x))$" в качестве операнда утверждения с заголовком "возрастает" либо "убывает" либо "невозрастает" либо "неубывает". Это утверждение должно представлять собой условие задачи на доказательство. Антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обрабатывается при помощи нормализатора "нормпроизводная" и вспомогательной задачи на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

1.3.7 Приемы символа "корни"

Как уже говорилось ранее, выражение "корни(f a)" обозначает множество элементов множества a, на которых функция f обращается в ноль. Формульный редактор прорисовывает это выражение в виде "$\mathrm{roots}(f, a)$". Частично приемы, связанные с определением множества корней, были описаны выше. Прежде всего, добавим к ним прием, связанный со вырожденным случаем пустого множества:

$\forall_f(\mathrm{roots}(f, \emptyset) = \emptyset)$

Уровень срабатывания приема равен 0. Далее, введем приемы, позволяющие определять число корней многочлена на отрезке с помощью теоремы Штурма:

$\forall_{abfgnpr}(f = \text{типмн}(p, \text{веществполе})\ \&\ g = \text{производнаямн}(f)\ \&\ \text{остаткимн}(f, g, r)\ \&\ n = l(r)\ \&\ \neg(f(a) = 0)\ \&\ \neg(f(b) = 0)\ \&\ 0 < b - a \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(\lambda_x(p(x), x - \text{число}), [a, b])) = \text{переменызнака}(\lambda_i(r(i)(a), i \in \{1, \ldots, n\})) - \text{переменызнака}(\lambda_i(r(i)(b), i \in \{1, \ldots, n\})))$

$\forall_{fgnpr}(f = \text{типмн}(p, \text{веществполе})\ \&\ g = \text{производнаямн}(f)\ \&\ \text{остаткимн}(f, g, r)\ \&\ n = l(r) \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(\lambda_x(p(x), x - \text{число}), \mathbb{R})) = \text{переменызнака}(\lambda_i(\text{старшкоэфф}(r(i)) \times (-1)^{\deg(r(i))}, i \in \{1, \ldots, n\})) - \text{переменызнака}(\lambda_i(\text{старшкоэфф}(r(i)), i \in \{1, \ldots, n\})))$

Первый прием относится к случаю конечного отрезка, второй - к случаю всей вещественной прямой. В этих приемах выражение $p(x)$ в скобочной записи имеет вид "значениемн(p x)", т.е. "значение формального многочлена p в точке x". Для идентификации данного многочлена по выражению для его значения используется указатель "значениемн(x15)". Так как при идентификации возможно отнесение многочлена к кольцу целых чисел, первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", выполняет преобразование p в многочлен f над полем вещественных чисел. Для этого используется нормализатор "нормтипмн". Второй антецедент вычисляет производную g многочлена f, используя нормализатор "нормпроизводнаямн". Третий антецедент, выделенный указателем "значения", обращается к синтезатору "остаткимн" для нахождения последовательности r взятых со знаком минус остатков, получаемых при нахождении наибольшего общего делителя многочленов f, g по алгоритму Евклида. Эта последовательность используется в качестве последовательности Штурма. Для вычисления количеств перемен знака, встречающихся в заменяющем терме, используется нормализатор "переменызнака". Перечислим приемы последнего нормализатора:

1. Одноэлементный набор.

   $\forall_a(\text{переменызнака}((a)) = 0)$

2. Отбрасывание первого нуля.

   $\forall_a(\text{переменызнака}(\text{префикс}(0, a)) = \text{переменызнака}(a))$

   Уровень срабатывания этого и предыдущего приемов равен 1.

3. Отбрасывание второго нуля.

   $\forall_{abc}(b = 0 \to \text{переменызнака}(a, b; c) = \text{переменызнака}(\text{префикс}(a, c)))$

   Уровень срабатывания равен 2.

4. Одинаковые знаки двух первых элементов набора.

   $\forall_{abc}(0 < ab \to \text{переменызнака}(a, b; c) = \text{переменызнака}(\text{префикс}(b, c)))$

   Уровень срабатывания равен 3.

5. Разные знаки у двух первых элементов набора.

   $\forall_{abc}(ab < 0 \rightarrow$ переменызнака$(a, b; c) =$ переменызнака(префикс$(b, c)) + 1)$

   Уровень срабатывания равен 3.

1.3.8 Четность и нечетность

Утверждения "четнаяфункция(f)", "нечетнаяфункция(f)" означают, соответственно, что f есть четная либо нечетная числовая функция.

Для исследования функции на четность и периодичность вводится задача на описание, имеющая цели "исследовать", "четнаяфункция", "функция". Ее единственной неизвестной служит переменная f, обозначающая исследуемую функцию. Условием задачи служит равенство $f = \lambda_x(\ldots)$, определяющее функцию. В процессе решения данной задачи формируется ее блок анализа, которому передаются цели "исследовать", "четнаяфункция". Перечислим приемы, усмотрения четности-нечетности, используемые при рассмотрении блока анализа:

1. Усмотрение четной и нечетной функций путем обращения к проверочным операторам.

   $\forall_{fgy}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & четнаяфункция$(\lambda_x(f(x), g(x))) \rightarrow$ четнаяфункция$(y))$

   $\forall_{fgy}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & нечетнаяфункция$(\lambda_x(f(x), g(x))) \rightarrow$ нечетнаяфункция$(y))$

   В обоих случаях первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "четнаяфункция", причем y - неизвестная задачи. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Используются операторы "усмчетнаяфункция", "усмнечетнаяфункция", приемы которых будут приведены ниже. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение четной и нечетной функций путем решения вспомогательной задачи на преобразование.

   $\forall_{fgy}(f(-x) - f(x) = 0$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x)) \rightarrow$ четнаяфункция$(y))$

   $\forall_{fgy}(f(-x) + f(x) = 0$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x)) \rightarrow$ нечетнаяфункция$(y))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "четнаяфункция", y - неизвестная. Отсутствуют посылки вида "четнаяфункция(y)", "нечетнаяфункция(y)". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, причем используется дополнительная посылка $g(x)$. Уровень срабатывания равен 4.

3. Регистрация в списке условий внешней задачи на описание результатов исследования на четность.

   Посылки "четнаяфункция(f)", "нечетнаяфункция(f)", возникающие в блоке анализа, передаются во внешнюю задачу на описание. Теоремы приемов меют вид "замещениеусловий(четнаяфункция(f))", "замещениеусловий(нечетнаяфункция(f))". Уровень срабатывания равен 8.

4. Проверочный оператор "усмчетнаяфункция".

(a) Константа.
$\forall_{af}$(четнаяфункция($\lambda_x(a, f(x))$))

(b) Степенная функция.
$\forall_{pf}(p$ – rational & числитель(p) – even $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(x^p, f(x))$))

(c) Сумма.
$\forall_{fgh}$(четнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & четнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(f(x) + g(x), h(x))$))
Указатель "первыйтерм(фикс(0 1 3 1))" определяет идентификацию $f(x)$ с первым слагаемым.

(d) Умножение.
$\forall_{fgh}$(четнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & четнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(f(x)g(x), h(x))$))
$\forall_{fgh}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & нечетнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(f(x)g(x), h(x))$))
Как и в предыдущем случае, в качестве $f(x)$ берется первый сомножитель.

(e) Косинус.
$\forall_f$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(\cos f(x), g(x))$))

(f) Одноместная операция от четной функции.
$\forall_{fgh}$(четнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(f(g(x)), h(x))$))
Указатель "символ(x6)" определяет идентификацию f с произвольным логическим символом, обозначающим одноместную операцию.

(g) Дробь.
$\forall_{fgh}$(четнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & четнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(f(x)/g(x), h(x))$))
$\forall_{fgh}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & нечетнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(f(x)/g(x), h(x))$))

(h) Модуль.
$\forall_f$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(|f(x)|, g(x))$))

5. Проверочный оператор "усмнечетнаяфункция".

(a) Тождественная функция.
$\forall_f$(нечетнаяфункция($\lambda_x(x, f(x))$))

(b) Степенная функция.
$\forall_{fp}(p$ – rational & $\neg$(числитель(p) – even) & $\neg$(знаменатель(p) – even) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(x^p, f(x))$))

(c) Сумма.
$\forall_{fgh}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & нечетнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$

нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x) + g(x), h(x))$))

(d) Умножение.
$\forall_{fgh}$(четнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & нечетнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$

нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x)g(x), h(x))$))

$\forall_{fgh}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & четнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ четнаяфункция($\lambda_x(f(x)g(x), h(x))$))

В качестве $f(x)$ берется первый сомножитель.

(e) Минус.

$\forall_{fg}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(-f(x), g(x))$))

(f) Синус, тангенс и котангенс.

$\forall_{fg}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(\operatorname{ctg} f(x), g(x))$))

$\forall_{fg}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(\operatorname{tg} f(x), g(x))$))

$\forall_{fg}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(\sin f(x), g(x))$))

(g) Дробь.

$\forall_{fgh}$(четнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & нечетнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x)/g(x), h(x))$))

$\forall_{fgh}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), h(x))$) & четнаяфункция($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x)/g(x), h(x))$))

(h) Сигнум.

$\forall_{fg}$(нечетнаяфункция($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\rightarrow$ нечетнаяфункция($\lambda_x(\mathrm{sg} f(x), g(x))$))

1.3.9 Периодичность

Утверждение "периодична($f\ \ t$)" означает, что числовая функция f периодична и имеет своим периодом (не обязательно наименьшим) число t. В случае константной функции допускается любое вещественное положительное t. Как уже говорилось выше, исследование функции на четность и периодичность определяется наличием цели "четнаяфункция". При этом усмотрение периодических функций обеспечивается синтезатором "период". Обращение к синтезатору выполняется следующим приемом:

$\forall_{afgy}$(периодична($\lambda_x(f(x), g(x)), a$) & $y = \lambda_x(f(x), g(x))$ $\rightarrow$ периодична(y, a))

Второй антецедент берется в посылках задачи на исследование, имеющей цель "четнаяфункция", первый - выделен указателем "значения". Уровень срабатывания равен 1. Для регистрации в списке условий внешней задачи на описание найденных утверждений о периодичности служит дополнительный прием с теоремой "замещениеусловий(периодична($f\ \ t$))". Здесь f - неизвестная задачи. Уровень срабатывания равен 8.

Перечислим приемы синтезатора "период":

1. Переход к явному заданию функции при помощи равенства из посылок.

   $\forall_{abfg}$($a = \lambda_x(f(x), g(x))$ & периодична($\lambda_x(f(x), g(x)), b$) $\rightarrow$ периодична(a, b))

   Первый антецедент берется в посылках, второй - реализует рекурсивное обращение к синтезатору.

2. Сумма, произведение, дробь, степень.

   $\forall_{abcdfgmn}$(периодична($\lambda_x(f(x), x-$число$), a)$ & периодична($\lambda_x(g(x), x-$число$), b)$ & $a = nc/pd$ & $b = mc/qd$ & n – целое & m – целое & p – целое & q – целое $\rightarrow$ периодична($\lambda_x(f(x) + g(x), x-$ число$)$, нок$(mp, nq)c/pqd$))

   Указатель "вариант(фикс(0 1 3)умножение дробь степень)" разрешает применять прием, если вместо суммы имеется одна из перечисленных операций. Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения к синтезатору. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Они выделяют в найденных периодах общие множители c, d числителя и знаменателя и идентифицируют дробные коэффициенты $n/p, m/q$. Оставшиеся антецеденты обрабатываются проверочными операторами - они устанавливают, что параметры n, p, m, q целочисленные. Выражение $f(x)$ идентифицируется с произвольным операндом, содержащим x. При этом $g(x)$ также должно содержать x. Для случая константного операнда добавлен специальный прием:

   $\forall_{abf}$(периодична($\lambda_x(f(x), x-$число$), a) \rightarrow$ периодична($\lambda_x(f(x)+b, x-$число$), a)$))

   Вместо суммы здесь разрешаются умножение, дробь и степень. Чтобы учесть несимметричность двух последних операций, введен еще один прием:

   $\forall_{abf}$(периодична($\lambda_x(f(x), x-$ число$), a) \rightarrow$ периодична($\lambda_x(b/f(x), x-$ число$), a)$))

   Здесь вместо дроби может рассматриваться степень.

3. Одноместная операция - общий случай.

   $\forall_{afg}$(периодична($\lambda_x(f(x), x-$число$), a) \rightarrow$ периодична($\lambda_x(g(f(x)), x-$число$), a)$))

   Указатель "символ(x7)" определяет идентификацию g с символом одноместной операции. Уровень срабатывания равен 2 (прочие приемы синтезатора имеют уровень 1). Прием применяется для отбрасывания внешней одноместной операции, примененной к невырожденному терму. Для атомарных одноместных операций используются другие приемы.

4. Синус и косинус.

   $\forall_{abc}$(периодична($\lambda_x(\sin(ax/b + c), x-$ число$), 2\pi b/|a|)$))

   $\forall_{abc}$(периодична($\lambda_x(\cos(ax/b + c), x-$ число$), 2\pi b/|a|)$))

5. Тангенс и котангенс.

   $\forall_{abc}$(периодична($\lambda_x(\mathrm{tg}(ax/b + c), x-$ число$), \pi b/|a|)$))

   $\forall_{abc}$(периодична($\lambda_x(\mathrm{ctg}(ax/b + c), x-$ число$), \pi b/|a|)$))

1.3.10 Непрерывность

Для исследования функции одной вещественной переменной на непрерывность используются задачи на описание, имеющие цели "исследовать", "функция", "непрерывно". При этом условие задачи имеет вид $y = \lambda_x(\ldots)$, где y - неизвестная. Как и выше, такая задача решается с помощью вывода следствий в своем блоке анализа. Последнему передаются цели "исследовать", "непрерывно", (неизвестная y).

Определение особых точек

Для нахождения множества особых точек, которые будут анализироваться, используется следующий прием:

$\forall_{fgmy}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & $m =$ Особыеточки$(\lambda_x(f(x), g(x))) \to$ Особыеточки$(y) = m)$

Этот прием выводит следствие в посылках задачи на исследование, имеющей цель "непрерывно". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормОсобыеточки", который, собственно, и находит множество особых точек. Приемы нормализатора будут приведены ниже. Переменная y - неизвестная задачи. Отсутствует посылка вида "Особыеточки$(y) = \ldots$". Уровень срабатывания равен 2.

Определение области непрерывности

После того, как найдены область определения функции и особые точки, делается вывод о непрерывности функции на их разности:

$\forall_{abx}(a = \mathrm{Dom}(x)$ & $b =$ Особыеточки$(x) \to$ непрерывно$(x, a \setminus b))$

Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение устранимого разрыва либо непрерывности

$\forall_{abcdefgyA}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = A \cup \{a; b\}$ & $c = \lim_{x\to a-0} f(x)$ & $c -$ число & $c = \lim_{x\to a+0} f(x)$ & $e = \mathrm{Dom}(y)$ & $a \in e \to \neg(c - f(a) = 0)$ & устранимыйразрыв$(y, a)\ \vee\ c - f(a) = 0$ & непрерывно$(y, \{a\}))$

Первый, второй и шестой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "непрерывно" и не имеющей цели "равномернонепрерывно". Третий и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Они вычисляют левый и правый пределы с помощью нормализатора "нормпредел" и убеждаются в их совпадении. Четвертый и последний антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Чтобы заблокировать попытку применения приема в случаях, когда тип особой точки a уже установлен, в данном и других приемах используется комментарий (разрыввторогорода y a). Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcdefgyA}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = A \cup \{a; b\}$ & $c = \lim_{x\to a-0} f(x)$ & $c -$ число & $c = \lim_{x\to a+0} f(x)$ & $e = \mathrm{Dom}(y)$ & $\neg(a \in e) \to$ устранимыйразрыв$(y, a))$

Отличие от предыдущего приема состоит в том, что точка не принадлежит области определения. Уровень срабатывания равен 3. Для усмотрения серии устранимых разрывов создан следующий прием:

$\forall_{cdfgpqyAB}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v))) \cup B$ & $A = q(v)$ & $c = \lim_{x\to p(v)-0} f(x)$ & $c -$ число & $d = \lim_{x\to p(v)+0} f(x)$ & $d -$ число & $c - d = 0$ & $e = \mathrm{Dom}(y)$ & $\neg(p(v) \in e) \to \forall_v(q(v) \to$ устранимыйразрыв$(y, p(v))))$

Первый, второй и предпоследний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "непрерывно". В выражении для множества особых точек усматривается фрагмент "$\mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v)))$", представляющий собой параметрическое описание серии. Третий антецедент упрощает условие на параметры $q(v)$ с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Четвертый и шестой антецеденты находят левый и правый пределы c, d в "общей" точке серии

$p(v)$. Нормализатору "нормпредел" передаются при этом дополнительные посылки $g(x), A$. Восьмой антецедент проверяет равенство нулю разности $c-d$, обрабатывая ее нормализатором "стандплюс". Все эти антецеденты выделены указателем "идентификатор". Пятый и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, истинность последнего антецедента устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 3.

Объединение областей непрерывности

$\forall_{abc}($непрерывно(a, b) & непрерывно$(a, c) \leftrightarrow$ непрерывно$(a, b \cup c))$

Прием применяется к двум посылкам задачи на исследование, имеющей цель "непрерывно". Переменная a - неизвестная задачи. Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение непрерывности на подмножестве

$\forall_{abc}($непрерывно(a, b) & $c \subseteq b \rightarrow$ непрерывно$(a, c))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент берется в контексте, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Исключение квантора общности в задании области непрерывности

$\forall_{Pf}(\forall_x(P(x) \rightarrow$ непрерывно$(f, \{x\})) \leftrightarrow$ непрерывно$(f, \mathrm{set}_x(P(x))))$

Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение точки разрыва первого рода

$\forall_{abcdfgyA}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = A \cup \{a; b\}$ & $c = \lim_{x \to a-0} f(x)$ & $c -$ число & $d = \lim_{x \to a+0} f(x)$ & $d -$ число & $\neg(c - d = 0) \rightarrow$ разрывпервогорода$(y, a))$

Прием аналогичен случаю усмотрения устранимого разрыва, но проверяется различие пределов слева и справа. Уровень срабатывания равен 3.

Если некоторый фрагмент множества особых точек определяется выражением, не имеющим заголовка "перечень" либо "класс", то он обрабатывается следующим приемом:

$\forall_{abcdfgyAB}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = b \cup B$ & $A = (a -$ число & $a \in b)$ & $c = \lim_{x \to a-0} f(x)$ & $c -$ число & $d = \lim_{x \to a+0} f(x)$ & $d -$ число & $\neg(c - d = 0) \rightarrow \forall_z(z \in b \rightarrow$ разрывпервогорода$(y, z)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "непрерывно". Выражение b идентифицируется как операнд объединения, заголовок которого отличен от символов "перечень", "класс". Третий антецедент упрощает условие принадлежности множеству b. Здесь a - новая переменная. Четвертый и шестой антецеденты вычисляют левый и правый пределы. Нормализатору "нормпредел" передаются при этом дополнительные посылки $g(x), A$. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Для блокировки повторных попыток рассмотрения фрагмента b используется комментарий (разрыввторогорода y b). Уровень срабатывания равен 3. Если фрагмент множества особых точек задан при помощи описателя класс, то используется аналогичный прием:

$\forall_{cdfgpqyAB}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v))) \cup B$ & $A = q(v)$ & $c = \lim_{x \to p(v)-0} f(x)$ & $c-$ число & $d = \lim_{x \to p(v)+0} f(x)$ & $d-$ число & $\neg(c - d = 0) \to \forall_v(q(v) \to$ разрывпервогорода$(y, p(v))))$

Если пределы слева и справа найдены, но в различных точках серии могут как совпадать, так и различаться, то применяются приемы, в которых серия особых точек подразбивается либо ограничивается:

$\forall_{abcdfgyAB}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = b \cup B$ & $A = (a-$число & $a \in b)$ & $c = \lim_{x \to a-0} f(x)$ & $c-$ число & $d = \lim_{x \to a+0} f(x)$ & $d-$число $\to \forall_a(a \in b$ & $\neg(c-d = 0) \to$ разрывпервогорода$(y, a))$ & $\forall_a(a \in b$ & $c - d = 0$ & $a \in \mathrm{Dom}(y) \to$ непрерывно$(y, a)))$

$\forall_{cdfgpqyAB}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v))) \cup B$ & $A = q(v)$ & $c = \lim_{x \to p(v)-0} f(x)$ & $c -$ число & $d = \lim_{x \to p(v)+0} f(x)$ & $d -$ число $\to \forall_v(q(v)$ & $\neg(c - d = 0) \to$ разрывпервогорода$(y, p(v))))$

Первый прием применяется, если заголовок выражения b отличен от символов "перечень", "класс". Его уровень срабатывания равен 3. Второй прием применяется, если вычисленные пределы не содержат символа "вариант". В противном случае серия особых точек будет подразбиваться приемом, описываемым ниже. Уровень срабатывания второго приема равен 4.

Усмотрение точки разрыва второго рода

В случае отдельной точки предпринимается попытка вычислить левый либо правый предел и убедиться в том, что он бесконечный или не существует:

$\forall_{abcdfgyA}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = A \cup \{a; b\}$ & $c = \lim_{x \to a-0} f(x)$ & $(c = \infty \ \vee \ c = -\infty \ \vee \ c =$ неопред$) \to$ разрыввторогорода$(y, a))$

$\forall_{abcdfgyA}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = A \cup \{a; b\}$ & $c = \lim_{x \to a+0} f(x)$ & $(c = \infty \ \vee \ c = -\infty \ \vee \ c =$ неопред$) \to$ разрыввторогорода$(y, a))$

Первые два антецедента идентифицируюьтся с посылками задачи на исследование, имеющей цель "непрерывно". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Первый из них вычисляет предел с помощью нормализатора "нормпредел", второй - сравнивает его с символами "плюсбеск", "минусбеск", "неопред". Уровень срабатывания равен 3. Для анализа серии точек введен следующий прием:

$\forall_{cdefgpqyABC}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v))) \cup B$ & $A = q(v)$ & $\lim_{x \to p(v)-0} f(x) = e$ & $(e =$ неопред $\vee \ |e| = \infty) \to \forall_v(q(v) \to$ разрыввторогорода$(y, p(v))))$

Подразбиение множества особых точек

Если обнаруживается, что левый или правый предел в точке, относящейся к некоторой серии особых точек, задается условным выражением, то серия подразбивается на две соответствующие подсерии. Это позволяет воспользоваться для анализа подсерий приведенными выше приемами.

$\forall_{cdfghpqyAB}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & $A = q(v)$ & $\lim_{x \to p(v)-0} f(x) = (c$ при $h(v),$ иначе $d) \to$ Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v))) \cup B \leftrightarrow$ Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v)$ & $h(v))) \cup \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v)$ & $\neg h(v))) \cup B)$

$\forall_{cdfghpqyAB}(y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & $A = q(v)$ & $\lim_{x\to p(v)+0} f(x) = (c$ при $h(v),$ иначе $d) \to$ Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v))) \cup B \leftrightarrow$ Особыеточки$(y) = \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v)$ & $h(v))) \cup \mathrm{set}_z(\exists_v(z = p(v)$ & $q(v)$ & $\neg h(v))) \cup B)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Они применяются к посылке задачи на исследование, имеющей цель "непрерывно". Первый антецедент берется в посылках, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

Регистрация в списке условий внешней задачи на описание результатов исследования на непрерывность

Для отбора и передачи во внешнюю задачу результатов исследования на непрерывность используются приемы, основанные на перечисляемых ниже теоремах. Во всех случаях текущая задача на исследование имеет цель "непрерывно", прием f - ее неизвестная.

1. "замещениеусловий(непрерывно(f a))". Либо задача не имеет цели "равномернонепрерывно", либо отсутствует посылка "равномернонепрерывно(f a)".
2. "замещениеусловий(разрывпервогорода(f a))".
3. "замещениеусловий(разрыввторогорода(f a))".
4. "замещениеусловий(устранимыйразрыв(f a))".
5. "замещениеусловий(длялюбого(x если $P(x)$ то разрывпервогорода(f x))".
6. "замещениеусловий(равномернонепрерывно(f a))".
7. "замещениеусловий(не(равномернонепрерывно(f a)))".

Уровень срабатывания приемов равен 8.

Учет граничных точек

Если в список особых точек попадает граничная точка промежутка, на котором определена рассматриваемая функция, то ее нужно отбросить из данного списка, так как приведенные выше приемы анализа особых точек предполагали вычисление левого и правого пределов, т.е. определенность функции в двусторонней окрестности. Анализ поведения функции в концах промежутков определенности должен выполняться дополнительными средствами. Для указанного отбрасывания пока создан следующий прием:

$\forall_{abcdey}(d = c \setminus \{a\}$ & $\mathrm{Dom}(y) = [a, b]$ & $a-$число $\to$ Особыеточки$(y) = c \leftrightarrow$ Особыеточки$(y) = d)$

Уровень срабатывания равен 1.

Отбрасывание изолированных точек

Если область определения функции, помимо промежутков, включает в себя также серии изолированных точек, то эти точки не войдут в определяемый нормализатором "нормОсобыеточки" список особых точек (там учитываются только граничные точки промежутков определенности). Соответственно, после вычитания из области определения множества особых точек появится утверждение "непрерывно($f\ a$)", где множество a сохранит изолированные точки. Для отбрасывания их введен следующий прием:

$\forall_{abcf}$(непрерывно(f, (арифмпрогрессия(a, b) $\cup\, c) \setminus d$) $\leftrightarrow$ непрерывно($f, c \setminus d$))

Допускаются вырожденные пустые c, d. Уровень срабатывания равен 4.

Использование непрерывности функции для ослабления антецедентов

Следующий прием использует непрерывность функции в точке для отбрасывания антецедента, исключающего рассмотрение данной точки:

$\forall_{afyA}$(непрерывно($\lambda_x(f(x), x -$ число$), -a$) & $A(y) \rightarrow \forall_x(\neg(x + a = 0)$ & $A(x)$ & $x -$ число $\rightarrow f(x) = 0) \leftrightarrow \forall_x(A(x)$ & $x -$ число $\rightarrow f(x) = 0)$)

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором "усмнепрерывно" (см. ниже). Истинность второго устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство, которой передаются дополнительные посылки "$x -$ число", "$0 < y + a + e$", "$0 < -y - a + e$", "$0 < e$", "$e \rightarrow 0 + 0$". Уровень срабатывания равен 3.

Обращение к оператору "усмнепрерывно"

$\forall_{af}$(непрерывно(f, a) $\rightarrow$ непрерывно(f, a))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Образ отрезка при монотонном непрерывном отображении

$\forall_{abfC}$(Отображение($f, [a, b], C$) & непрерывно($f, [a, b]$) & возрастает($f, [a, b]$) $\rightarrow$ $\mathrm{Val}(f) = [f(a), f(b)]$)

Прием имеет заголовок "вывод". Все три антецедента идентифицируются с посылками задачи. Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение непрерывности суперпозиции

$\forall_{fgA}$(непрерывно(g, A) & непрерывно(f, образ(g, A)) $\rightarrow$ непрерывно(произведение(f, g), A))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

Исследование функции на равномерную непрерывность

При исследовании функции на равномерную непрерывность к целям "исследовать", "непрерывно" исходной задачи на описание добавляется цель "равномернонепрерывно". В остальном действия аналогичны, однако приемы, связанные с анализом особых точек, блокируются. Вместо этого применяются следующие приемы:

1. Функция непрерывна на отрезке.

   $\forall_{abf}(\mathrm{Dom}(f) = [a, b]$ & непрерывно$(f, [a, b]) \to$ равномернонепрерывно$(f, [a, b]))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "равномернонепрерывно". Переменная f - неизвестная задачи. Уровень срабатывания равен 2.

2. Предел в концевой точке промежутка непрерывности не существует либо бесконечен.

   $\forall_{abcdfgy}(a -$ число & непрерывно$(y, (a, b])$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & $\lim_{x\to a+0} f(x) = c$ & $(c = \infty \ \vee \ c = -\infty \ \vee \ c =$ неопред$) \to \neg($равномернонепрерывно$(y, (a, b])))$

   $\forall_{abcdfgy}(b -$ число & непрерывно$(y, (a, b])$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & $\lim_{x\to b-0} f(x) = c$ & $(c = \infty \ \vee \ c = -\infty \ \vee \ c =$ неопред$) \to \neg($равномернонепрерывно$(y, [a, b))))$

   Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "равномернонепрерывно". Переменная y - неизвестная задачи. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два последних - выделены указателем "идентификатор". Они вычисляют односторонний предел с помощью нормализатора "нормпредел" и убеждаются, что он не существует либо бесконечен. Уровень срабатывания равен 4.

3. Пределы в концевых точках промежутка непрерывности существуют и конечны.

   $\forall_{abcdfgpqy}($непрерывно$(y, [a, b])$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & $c = \lim_{x\to a+0}$ & $c -$ число & $d = \lim_{x\to b-0} f(x)$ & $d -$ число $\to$ равномернонепрерывно$(y, [a, b]))$

   Заметим, что здесь обозначение $[a, b]$ используется формульным редактором в обобщенном смысле: во внутреннем скобочном представлении данного выражения введены переменные - индикаторы принадлежности концов промежутку, так что допускаются промежутки любого типа. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий и пятый - выделены указателем "идентификатор", четвертый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

4. Бесконечный промежуток: существует конечный предел производной.

   $\forall_{abcdfgh}(h(x) = df(x)/dx$ & $\lim_{x\to\infty} h(x) = c$ & $c-$число & $\lim_{x\to a+0} f(x) = d$ & $d-$число & непрерывно$(y, [a, \infty))$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x)) \to$ равномернонепрерывно$(y, [a, \infty)))$

   $\forall_{abcdfgh}(h(x) = df(x)/dx$ & $\lim_{x\to-\infty} h(x) = c$ & $c -$ число & $\lim_{x\to a-0} f(x) = d$ & $d -$ число & непрерывно$(y, (-\infty, a])$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x)) \to$ равномернонепрерывно$(y, (-\infty, a]))$

   В обоих случаях используется индикатор принадлежности точки a промежутку, т.е. она может как относиться к нему, так и не относиться. Два последних антецедента идентифицируются с посылками. Первый, второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Для вычисления производной используется вспомогательная задача на преобразование. Уровень срабатывания приемов равен 3. Для случая, когда промежуток совпадает со всей числовой прямой, введен отдельный прием:

$\forall_{cdfgh}(h(x) = df(x)/dx$ & $\lim_{x\to-\infty} h(x) = c$ & $c-$число & $\lim_{x\to\infty} h(x) = d$ & $d-$число & непрерывно$(y, \mathbb{R})$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x)) \rightarrow$ равномернонепрерывно$(y, \mathbb{R}))$

5. Бесконечный промежуток: производная не ограничена.

   $\forall_{abfgh}(h(x) = df(x)/dx$ & $\neg($огрвточке$(\lambda_x(h(x), x-$ число$), \infty))$ & $y = \lambda_x(f(x), g(x))$ & непрерывно$(y, [a, \infty)) \rightarrow \neg($равномернонепрерывно$(y, [a, \infty))))$

   Два последний антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "равномернонепрерывно". Первый антецедент вычисляет производную с помощью вспомогательной задачи на преобразование, второй - обрабатывается проверочным оператором "усмнеогрвточке". Уровень срабатывания равен 4.

Проверочный оператор "усмнепрерывно"

1. Константа.

   $\forall_{abf}($непрерывно$(\lambda_x(a, f(x)), b))$

   Здесь и в остальных приемах переменная x идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания равен 1.

2. Линейная функция.

   $\forall_{abcf}($непрерывно$(\lambda_{xy}(ax + b, f(x, y)), c))$

   Допускается обращение b в ноль, a - в ± 1. Уровень срабатывания равен 1.

3. Сумма.

   $\forall_{afgh}($непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & непрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \rightarrow$ непрерывно$(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

4. Произведение.

   $\forall_{afgh}($непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & непрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \rightarrow$ непрерывно$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a))$

   Аналогично предыдущему.

5. Минус.

   $\forall_{afh}($непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \rightarrow$ непрерывно$(\lambda_x(-f(x), h(x)), a))$

6. Дробь.

   $\forall_{afgh}(\neg(g(x) = 0)$ & непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & непрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \rightarrow$ непрерывно$(\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), a))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Первому из них передается дополнительная посылка $x \in a$. Уровень срабатывания равен 1.

7. Степень.

   $\forall_{afhp}(p - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(p) - \text{even}) \ \& \ 0 < p \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x((f(x))^p, h(x)), a))$

   $\forall_{afhp}(0 < p \ \& \ 0 \leq f(x) \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x((f(x))^p, h(x)), a))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Во втором приеме второму антецеденту передается дополнительная посылка $x \in a$. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{afgh}(0 < f(x) \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x)^g(x), h(x)), a))$

   При обработке проверочным оператором первого антецедента используется дополнительная посылка $x \in a$. Уровень срабатывания равен 2.

8. Синус, косинус, модуль, арктангенс, арккотангенс, арксинус и арккосинус.

   $\forall_{afh}(\text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x(\sin f(x), h(x)), a))$

   Указатель "вариант(...)" допускает замену символа "синус" на любой из символов "косинус", "модуль", "арктангенс", "арккотангенс", "арксинус" и "арккосинус". Уровень срабатывания равен 1.

9. Тангенс и котангенс.

   $\forall_{afh}(\neg(\cos f(x) = 0) \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x(\operatorname{tg} f(x), h(x)), a))$

   $\forall_{afh}(\neg(\sin f(x) = 0) \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x(\operatorname{ctg} f(x), h(x)), a))$

   В обоих случаях первый антецедент обрабатывается с дополнительной посылкой "$x \in a$". Уровень срабатывания равен 1.

10. Логарифм.

    $\forall_{abfh}(\neg(b - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x(\log_b f(x), h(x)), a))$

    Уровень срабатывания равен 1.

11. Непрерывность вектор-функции.

    $\forall_{afgh}(\text{непрерывно}(\lambda_x(g(x), f(x)), a) \ \& \ \text{непрерывно}(\lambda_x(h(x), f(x)), a) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x(\text{префикс}(g(x), h(x)), f(x)), a))$

    Выражение "префикс$(g(x), h(x))$" идентифицируется с термом "набор(...)", причем функциональная переменная $g(x)$ идентифицируется с первым элементом данного набора, а $h(x)$ - с его остатком. Антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Заметим, что одноэлементный набор тоже анализируется с помощью данного приема. В этом случае $h(x)$ окажется пустым набором и, согласно приему для константы, будет оценено как "непрерывное". Уровень срабатывания равен 2.

12. Использование посылки.

    $\forall_{afAB}(a \in B \ \& \ \text{непрерывно}(f, B) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_x(f(x), A(x)), a))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

13. Операции над функциями.

    Рассматриваются две операции над числовыми функциями - "минусфунк" и "плюсфунк". Они прорисовываются формульным редактором в виде обычных минуса и суммы:

    $\forall_{af}$(непрерывно$(f,a) \to$ непрерывно$(-f,a)$)

    $\forall_{afg}$(непрерывно(f,a) & непрерывно$(g,a) \to$ непрерывно$(f+g,a)$)

    Антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Во втором приеме указатель "дистрибразвертка(фикс(0 1))" определяет одновременную обработку всех слагаемых. Уровень срабатывания равен 1.

14. Обратная функция.

    $\forall_{abcdfp}$(непрерывно$(f,[a,b])$ & взаимнооднозначно(f) & $p =$ образ$(f,[a,b]) \to$ непрерывно(обрфункция$(f), p$))

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормобраз". Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор определения множества особых точек "нормОсобыеточки"

Выражение "Особыеточки(f)" обозначает некоторое подмножество области определения числовой функции f, пополненной точками, проколотая окрестность которых включается в область определения. Это подмножество должно включать в себя все точки, в которых функция имеет разрыв, но не обязательно только их. Заметим, что при рассмотрении комплекснозначных функций то же самое выражение будет обозначать множество, включающее в себя все точки, где нарушается условие аналитичности. Нормализатор "нормОсобыеточки" относится только к вещественнозначным функциям. Он имеет следующие приемы:

1. Тождественная функция.

   $\forall_f$(Особыеточки$(\lambda_x(x, f(x))) = \emptyset$)

2. Константа.

   $\forall_{af}$(Особыеточки$(\lambda_x(a, f(x))) = \emptyset$)

3. Модуль.

   $\forall_{fg}$(Особыеточки$(\lambda_x(|f(x)|, g(x))) =$ Особыеточки$(\lambda_x(f(x), g(x)))$)

4. Плюс.

   $\forall_{fgh}$(Особыеточки$(\lambda_x(f(x)+g(x), h(x))) =$ Особыеточки$(\lambda_x(f(x), h(x))) \cup$ Особыеточки$(\lambda_x(g(x), h(x)))$)

   Подвыражения "Особыеточки$(\ldots)$" в правой части обрабатываются нормализатором "нормОсобыеточки", после чего применяется нормализатор "нормобъединение".

5. Умножение.

   $\forall_{fgh}$(Особыеточки($\lambda_x(f(x)g(x), h(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), h(x))$) $\cup$ Особыеточки($\lambda_x(g(x), h(x))$))

   Аналогично предыдущему.

6. Дробь.

   $\forall_{fgh}$(Особыеточки($\lambda_x(f(x)/g(x), h(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), h(x))$)$\cup$Особыеточки($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\cup\, \mathrm{set}_x(g(x) = 0$ & $h(x)$))

   Аналогично предыдущему, но добавляется член с описателем "класс", обрабатываемый вспомогательной задачей на упрощение.

7. Степень.

   $\forall_{fgp}$($p -$ rational & $0 < p \to$ Особыеточки($\lambda_x((f(x))^p, g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x($ $f(x), g(x))$))

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1 (как и у предыдущих приемов).

   $\forall_{fgh}$($0 < f(x) \to$ Особыеточки($\lambda_x((f(x))^{g(x)}, h(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), h(x)$ $)$) $\cup$ Особыеточки($\lambda_x(g(x), h(x))$))

   $\forall_{fgh}$($g(x) -$ целое $\to$ Особыеточки($\lambda_x((f(x))^{g(x)}, h(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x),$ $h(x))$) $\cup$ Особыеточки($\lambda_x(g(x), h(x))$))

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используется дополнительная посылка $h(x)$. Уровень срабатывания равен 2.

8. Вариант.

   $\forall_{fghpq}$(Особыеточки($\lambda_x((f(x)$ при $p(x) = q(x),$ иначе $g(x)), h(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\cup\, \mathrm{set}_x(p(x) = q(x))$)

   $\forall_{fghpq}$(Особыеточки($\lambda_x((f(x)$ при $p(x) \le q(x),$ иначе $g(x)), h(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(g(x), h(x)$) $\cup$ Особыеточки($\lambda_x(f(x), h(x))$) $\cup\, \mathrm{set}_x(p(x) = q(x))$)

   Описатель "класс" обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Уровень срабатывания этого и всех нижеследующих приемов равен 1.

9. Синус.

   $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\sin f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

10. Косинус.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\cos f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

11. Тангенс.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{tg}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$)$\cup\mathrm{set}_x(g(x)$ & $\cos f(x) = 0$))

12. Котангенс.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{ctg}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$)$\cup\mathrm{set}_x(g(x)$ & $\sin f(x) = 0$))

13. Секанс.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\sec f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\cup\,\mathrm{set}_x(g(x)$ & $\cos f(x) = 0$))

14. Косеканс.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{cosec}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\cup\,\mathrm{set}_x(g(x)$ & $\sin f(x) = 0$))

15. Логарифм.

    $\forall_{fgh}$(Особыеточки($\lambda_x(\log_{f(x)} g(x), h(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), h(x))$)$\cup$Особыеточки($\lambda_x(g(x), h(x))$) $\cup\,\mathrm{set}_x(f(x) = 1$ & $h(x)$))

16. Минус.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(-f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

17. Сигнум.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{sg} f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\cup\,\mathrm{set}_x(f(x) = 0$ & $g(x)$))

18. Целаячасть.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x([f(x)], g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$) $\cup\,\mathrm{set}_x(f(x)$ – целое & $g(x)$))

19. Обратные тригонометрические функции.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{arctg}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{arcctg}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\arcsin f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\arccos f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

20. Гиперболические функции.

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{ch}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{sh}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

    $\forall_{fg}$(Особыеточки($\lambda_x(\mathrm{th}\, f(x), g(x))$) = Особыеточки($\lambda_x(f(x), g(x))$))

1.3.11 Операции над числовыми функциями

Распространение арифметических операций на числовые функции требует ввода новых логических символов, так как "старые" сумма, умножение, изменение знака применялись только к числам. Для этой цели введены символы "плюсфунк", "минусфунк", "умножфунк", "умножконст". Более подробно, если $f_1, \ldots, f_n$ суть числовую (вообще говоря, комплекснозначные) функции, имеющие общую область определения, то "плюсфунк($f_1 \ldots f_n$)" обозначает числовую функцию с той же областью определения, значение которой получается суммированием значений функций $f_1, \ldots, f_n$. Аналогично определяются "умножфунк($f_1 \ldots f_n$)" и "минусфунк(f_1)". Наконец, посредством "умножконст($a\ f$)" обозначается функция, получаемая домножением числовой функции f на численную константу a. Формульный редактор прорисовывает эти операции так же, как их числовые аналоги.

Данные операции пока почти не рассматривались, и приемов для них создано мало. Перечислим сначала приемы символа "плюсфунк".

1. Решение простейших уравнений.

   $\forall_{abx}(a + x = b \leftrightarrow x = b - a)$

   Здесь посредством "+" обозначена операция "плюсфунк", посредством "$-$" - "минусфунк". Прием применяется к условию задачи на описание. Выражение x - невырожденная сумма всех неизвестных слагаемых левой части. Выражение a ненулевое, правая часть известна. Уровень срабатывания равен 2.

2. Длина суммы двух наборов.

   $\forall_{ab}(a - \text{слово}\ \&\ b - \text{слово}\ \&\ l(a) = l(b) \rightarrow l(a + b) = l(a))$

   Как и выше, имеется в виду символ "плюсфунк". Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами (напомним, что под словом понимается произвольный конечный набор), последний - выделен указателем "идентификатор". Его левая и правая части обрабатываются нормализатором "нормдлинанабора".

3. Значение в точке.

   $\forall_{fgx}((f + g)(x) = f(x) + g(x))$

   Левый знак "+" обозначает "плюсфунк", правый - "Плюс". Уровень срабатывания равен 0.

4. Область определения.

   $\forall_{fgA}(\mathrm{Dom}(f) = A\ \&\ \mathrm{Dom}(g) = A \rightarrow \mathrm{Dom}(f + g) = A)$

   Антецеденты выделены указателями "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

5. Нормализатор общей стандартизации "нормплюсфунк".

   (a) Нулевое слагаемое
   $\forall_{af}(\lambda_x(0, f(x)) + a = a)$

   (b) Сложение матриц
   $\forall_{abmn}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}) + \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}) = \lambda_{ij}(a(i,j) + b(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}))$
   Указатель "матрица(фикс(0 1 1)фикс(0 1 2)фикс(0 2))" определяет идентификацию слагаемых с матрицами, заданными выражениями вида "строки(...)". В таком же виде формируется результат. Созданы две версии приема - одна вещественнозначная, другая комплекснозначная. Признаком выбора версии служит наличие в матрицах выражения с мнимой единицей. Левая сумма - "плюсфунк", правая - "плюс" либо "Плюс".

Для символа "умножконст" созданы всего два приема:

1. Длина набора, полученного умножением другого набора на число.

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{слово} \rightarrow l(ab) = l(b))$

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Значение функции в точке.

   $\forall_{afx}((af)(x) = af(x))$

   Уровень срабатывания равен 0.

Функции, определяемые многочленами

Для указания на то, что одноместная вещественная функция f может быть задана многочленом с вещественными коэффициентами, используется утверждение "функмногочлен(f)". Чтобы определять неизвестную такую функцию по известным верхней оценке m степени многочлена и значениям в $m+1$ точке, служит следующий прием, основанный на интерполяционной формуле Лагранжа:

$\forall_{abfmnxA}(n-1 = m \;\&\; \mathrm{card}\{;a\} = n \;\&\; A =$
$\sum_{i=1}^{n}((b(i)\prod_{j,j\in\{1,\ldots,n\},\neg(j=i)}(x-a(j)))/(\prod_{j,j\in\{1,\ldots,n\},\neg(j=i)}(a(i)-a(j)))) \rightarrow$
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow f(a(i)) = b(i)) \;\&\; \deg(f) \leq m \;\&\;$ функмногочлен$(f) \leftrightarrow$
$f = \lambda_x(A, x -$ число$))$

Прием имеет заголовок "заменусловия(второйтерм)". Указатель "развертка" определяет идентификацию кванторной импликации с группой условий $f(a(1)) = b(1), \ldots,$ $f(a(n)) = b(n)$ задачи на описание. Переменная f при этом является неизвестной задачи. Первый антецедент выделен указателем "программа", остальные - выделены указателем "идентификатор". Роль второго антецедента состоит в установлении попарных различий точек $a(i)$, для которых заданы значения $b(i)$ функции f. Его левая часть обрабатывается нормализатором "норммощность". Указатель "развертка" определяет преобразование конечных сумм и произведений в формуле Лагранжа в обычные сумму и произведения. Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор "извлечение"

При интегрировании, решении дифференциальных уравнений и в ряде других задач приходится выполнять замену переменных. Она обычно инициируется усмотрением возможности представить некоторое выражение A в виде $f(B(x_1,\ldots,x_n))$, где $B(x_1,\ldots,x_n)$- заданное, обозначаемое новой переменной y подвыражение, а $f(y)$ - терм, не содержащий переменных $x_1,\ldots,x_n$. Выражения A, изначально не имеющие указанного вида, иногда удается привести к нему с помощью специальных нормализаторов. Мы рассмотрим здесь наиболее часто применяемый для такой цели нормализатор - "извлечение". Он применяется к выражению A, причем при обращении ему передается комментарий (новаргумент T X), где T - выражение $B(x_1 \ldots x_n)$, X - список переменных $x_1,\ldots,x_n$. Нормализатор пытается так преобразовать выражение A, чтобы все вхождения переменных $x_1,\ldots,x_n$ оказались заключены внутри вхождений выражения $B(\ldots)$.

Если в идентифицируемой части теоремы приема встречается выражение $f(B(x))$ и введен указатель "новаргумент(f x извлечение)", то компилятор автоматически организует обращение к нормализатору "извлечение" при попытке идентификации функциональной переменной $f(\ldots)$. Предполагается, что выражение $B(x)$ до этого уже было идентифицировано.

Перечислим приемы нормализатора. Ниже сохраняем обозначения $B(x), x$ для элементов "входного" комментария (новаргумент $B(x)$ (x)).

1. Выделение степени.

$\forall_{abcdn}(n = a/b \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow c^{a+d} = c^d(c^b)^n)$

Указатель "контекст(...)" идентифицирует $B(x)$ с выражением c^b. Указатель "перечень(...)" идентифицирует a с невырожденной суммой всех слагаемых показателя степени, зависящих от x. Первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обрабатывает отношение a к b нормализатором "нормдробь". Истинность второго антецедента усматривается проверочным оператором. Либо d отлично от нуля, либо n отлично от единицы. Уровень срабатывания приема равен 1.

$\forall_{abcden}(n = d/e \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow b/(ca^d) = b(a^{-e})^n/c)$

$B(x)$ имеет вид a^{-e}. В остальном аналогично предыдущему пункту. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(c = a + b \rightarrow a = (\sqrt{c})^2 - b)$

$B(x)$ имеет вид $\sqrt{c}$. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он проверяет, что текущее подвыражение a является подсуммой выражения c, при этом идентифицируется остаточная сумма b. Проверяется, что x входит в a и не входит в b. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcn}(n = a/b \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow c^a = (c^b)^n)$

$B(x)$ имеет вид c^b. Переменная x входит в c. Выражение n, определяемое первым антецедентом, отлично от единицы. Допускается вырожденное единичное значение показателя степени a, но тогда b должно иметь вид $1/d$. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(\sqrt{a + bc}\sqrt{a - bc} = \sqrt{a^2 - b^2c^2})$

$\forall_{abc}(\sqrt{|a + bc|}\sqrt{|bc - a|} = \sqrt{|a^2 - b^2c^2|})$

$\forall_{abc}((a + bc)(a - bc) = a^2 - b^2c^2)$

$B(x)$ имеет вид c^2. Допускаются только такие вхождения переменной x в выражения a, b, которые размещены внутри подтермов "значение(...)". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdnp}(n = a/b \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow c^{p(a+d)} = c^{pd}(c^b)^{pn})$

$B(x)$ имеет вид c^b. Переменная p идентифицируется с натуральной константой, a - с суммой всех слагаемых, зависящих от x. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcn}(n = a/b \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow c^a = (c^b)^n)$

Прием ориентирован на комплекснозначную степень. $B(x)$ имеет вид c^b. Переменная x входит в c. Уровень срабатывания равен 1.

2. Выделение синуса и косинуса.

$\forall_{ab}((\sin a)^{2b} = (1 - (\cos a)^2)^b)$

$\forall_{ab}((\cos a)^{2b} = (1 - (\sin a)^2)^b)$

$B(x)$ имеет в первом случае вид $\cos a$,а во втором - $\sin a$. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(a = b/2 \rightarrow \cos b = 2(\cos a)^2 - 1)$

$\forall_{ab}(a = b/2 \rightarrow \cos b = 1 - 2(\sin a)^2)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализаторами "нормдробь" и "стандплюс". В остальном - аналогично двум предыдущим приемам.

$\forall_{abpq}(a = b/2 \to p\cos b + q = 2p(\cos a)^2 - p + q)$

$\forall_{abpq}(a = b/2 \to p\cos b + q = p + q - 2p(\sin a)^2)$

$B(x)$ не имеет вхождений выражений $\sin b, \cos b$, однако имеет вхождение выражения $(\cos a)^2$ (для первого приема) либо $(\sin a)^2$ (для второго приема). Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(a = b/3 \to \cos b = 4(\cos a)^3 - 3\cos a)$

$\forall_{ab}(a = b/3 \to \sin b = 3\sin a - 4(\sin a)^3)$

В первом случае $B(x)$ имеет вид $\cos a$, во втором - $\sin a$. Уровень срабатывания равен 1.

3. Выражение через тангенс.

   $\forall_a(\operatorname{ctg} a = 1/\operatorname{tg} a)$

   $\forall_{ab}((\sin a)^{2b} = (\operatorname{tg} a)^{2b}/((\operatorname{tg} a)^2 + 1)^b)$

   $\forall_{ab}((\cos a)^{2b} = 1/((\operatorname{tg} a)^2 + 1)^b)$

   $\forall_{ab}((\sin a)^b(\cos a)^b = (\operatorname{tg} a)^b/(1 + (\operatorname{tg} a)^2)^b)$

   $\forall_a(\sin a/\cos a = \operatorname{tg} a)$

   Во всех случаях $B(x)$ имеет вид $\operatorname{tg} a$. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ab}((\cos a)^b = ((1 - (\operatorname{tg}(a/2))^2)/(1 + (\operatorname{tg}(a/2))^2))^b)$

   $\forall_{ab}((\sin a)^b = (2\operatorname{tg}(a/2)/(1 + (\operatorname{tg}(a/2))^2))^b)$

   $B(x)$ имеет вид $\operatorname{tg}(a/2)$. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abpqx}(pq = 2n \to (a(\sin x)^p + b(\cos x)^p)^q = (a(\operatorname{tg} x)^p + b)^q/(1 + (\operatorname{tg} x)^2)^n)$

   $B(x)$ имеет вид $\operatorname{tg} x$. Переменные p, q идентифицируются с натуральными константами. Антецедент выделен указателем "программа", причем n - тоже натуральная константа. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ab}(b - 2a = 0 \to \cos b = 2/(1 + (\operatorname{tg} a)^2) - 1)$

   $B(x)$ имеет вид $\operatorname{tg} a$. Антецедент выделен указателем "идентификатор", причем его левая часть обрабатывается нормализатором "стандплюс". Уровень срабатывания равен 1.

4. Логарифм модуля.

   $\forall_a(\ln a = \ln|a|)$

   $B(x)$ имеет вид $\ln|a|$. Уровень срабатывания равен 1.

5. Выделение подпроизведения.

   $\forall_{abc}(c = a \to ab = cb)$

   $B(x)$ имеет вид произведения и идентифицируется с переменной a. Преобразуемое произведение не совпадает с a и не имеет сомножителя, равного a. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Он не использует каких-либо нормализаторов и играет чисто техническую роль - блокирует использование исходного произведения в качестве заменяющего терма. Уровень срабатывания равен 1.

6. Выделение суммы.

   $\forall_{abc}(c = a \rightarrow a + b = c + b)$

   Прием аналогичен предыдущему. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(ac + bc = c(a + b))$

   $\forall_{abc}(-ac - bc = -c(a + b))$

   $B(x)$ имеет вид $a + b$. Уровень срабатывания равен 1.

7. Выделение разности.

   $\forall_{abc}(b - a + c = c - (a - b))$

   $B(x)$ имеет вид $a - b$. Уровень срабатывания равен 1.

8. Выделение суммы либо разности синуса и косинуса.

   $\forall_{an}((\sin a)^n(\cos a)^n = (((\sin a + \cos a)^2 - 1)/2)^n)$

   $\forall_{an}((\sin a)^n(\cos a)^n = ((1 - (\sin a - \cos a)^2)/2)^n)$

   В первом случае $B(x)$ имеет вид $\sin a + \cos a$, во втором - $\sin a - \cos a$.

   $\forall_a(\sin(2a) = (\sin a + \cos a)^2 - 1)$

   $B(x)$ имеет вид $\sin a + \cos a$. Уровни срабатывания приемов равны 1.

9. Выделение дроби.

   (a) Общий случай.
   $\forall_{abpqrs}((ap + bq)/(ar + bs) = (p + q(b/a))/(r + s(b/a)))$
   $B(x)$ имеет вид b/a. Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_{abcdepqr}(r = \min(p, q) \rightarrow cd^p/ea^q = cd^{p-r}/ea^{q-r} \cdot (d/a)^r)$
   $B(x)$ имеет вид d/a. Переменные p, q идентифицируются с натуральными константами (возможно, равными единице). Одновременное обращение в единицу всех переменных c, e, p, q блокируется. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя (тогда заменяющий терм приобретает вид "$1/\ldots$"). Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_{abc}((a + b)/c = a/c + b/c)$
   $B(x)$ имеет вид d/e. Слагаемое a делится на d либо на e. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 3.
   $\forall_{abcd}(ba/cd = b/(c(d/a)))$
   $B(x)$ имеет вид d/a. Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_{abcdepq}(q(b + cd^p)/a^pe = qb/a^pe + cq(d/a)^p/e)$
   $B(x)$ имеет вид d/a. Переменная p идентифицируется с натуральной константой. Введен указатель "дробь". Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_{abcdpqk}(pd^k/(q(ab + cd)^k) = (p(d/a)^k)/(q(b + c(d/a))^k))$
   Переменная k идентифицируется с натуральной константой. В остальном аналогично предыдущему.

$\forall_{abnpqrs}((pa^n + qb^n)r/s = (p + q(b/a)^n)r/(s/a^n))$

$B(x)$ имеет вид b/a. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Введен указатель "дробь". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcd}((ab + c)/ad = b/d + c/ad)$

Этот прием применяется без учета вида $B(x)$. Переменные b, d идентифицируются с константными термами. Текущая задача должна иметь цель (связка ...), т.е. решаются дифференциальные уравнения. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcdn}(ab^n/cd^n = a(b/d)^n/c)$

$B(x)$ имеет вид b/d. Введен указатель "дробь". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(a/bc = a/b \cdot 1/c)$

Этот прием рассчитан на комплекснозначные операции. $B(x)$ имеет вид $1/c$. Требуется, чтобы b не имело сомножителя c. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdmnpqr}(p((ca^n + db^n)r)^m/q = pa^{mn}((c + d(b/a)^n)r)^m/q)$

$B(x)$ имеет вид b/a. Текущая задача имееть цель (связка ...). Введен указатель "дробь". Уровень срабатывания равен 2.

(b) Выражения с радикалами.

$\forall_{abcd}(a\sqrt{b}/c\sqrt{d} = a\sqrt{b/d}/c)$

$B(x)$ имеет вид дроби, причем как b, так и d содержит подвыражение, равное числителю либо знаменателю этой дроби. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcd}(c\sqrt{ab}/ad = c\sqrt{b/a}/d$

$B(x)$ имеет вид b/a. В этом и двух следующих приемах текущая задача должна иметь цель (связка ...). Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcdmn}(m - 2n = 0 \to d\sqrt{a^m b}/ca^n = d\sqrt{b}/c)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". $B(x)$ имеет вид дроби. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abc}(\sqrt{a^b c} = a^{b/2}\sqrt{c})$

Переменная b идентифицируется с четной целочисленной константой. $B(x)$ имеет вид дроби. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Выражения с модулем

$\forall_{abcd}(b\sqrt{|a|}/c\sqrt{|d|} = b\sqrt{|a/d|}/c)$

$B(x)$ имеет вид a/d. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abc}(a\sqrt{|b|}/bc = a/\sqrt{|b|}c)$

Прием применяется безотносительно к виду $B(x)$, причем текущая задача должна иметь цель вида (связка ...). Уровень срабатывания равен 3.

10. Выделение линейной комбинации.

$\forall_{abcdxy}(\neg(a = 0)\ \&\ ad - bc = 0 \to cx + dy = c/a \cdot (ax + by))$

$B(x)$ имеет вид $ax + by$, причем a, b - константные выражения. Текущая задача должна иметь цель (связка ...). Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражения a, c должны различаться. Уровень срабатывания равен 1.

11. Выделение модуля.

    $\forall_{an}(a^n = |a|^n)$

    $B(x)$ имеет вид $|a|$. Переменная n идентифицируется с четным числом либо с простой дробью, имеющей четный числитель. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_a(a = 0 \leftrightarrow |a| = 0)$

    $B(x)$ имеет вид $|a|$, однако берется модуль комплексного числа. Уровень срабатывания равен 1.

12. Выделение производной.

    $\forall_{fmn}(0 < n - m \rightarrow d^n f(x)/dx^n = d^{n-m}(d^m f(x)/dx^m)/dx^{n-m})$

    $B(x)$ имеет вид $d^m f(x)/dx^m$, причем даже при $m = 1$ используется симво "частнпроизв". Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{fx}(df(x)/dx = df(x)/dx)$

    Прием преобразует обозначение для производной в обозначение для кратной производной 1-го порядка. Левая и правая части в скобочной записи имеют вид "производная(отображение(x1 число(x1)значение(x6 x1))x23)" и "частнпроизв(отображение(x7 число(x7)значение(x6 x7))1 x23)". Прием этом $B(x)$ равно второму терму. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{bfx}(d^b f(x)/dx^b = d^b f(x)/dx^b)$

    Прием выполняет переобозначение связанной переменной у производной. Левая и правая части имеют, соответственно, вид "частнпроизв(отображение(x1 число(x1)значение(x6 x1))x2 x23)" и "частнпроизв(отображение(x7 число(x7) значение(x6 x7))x2 x23)". При этом $B(x)$ равно второму терму. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{fmn}(0 < n - 1 \rightarrow d^n f(x)/dx^n = d^{n-1}(df(x)/dx)/dx^{n-1})$

    Прием выделяет "обычную" производную из кратной. $B(x)$ имеет вид $df(x)/dx$, причем здесь используется не символ "частнпроизв", а символ "производная". Уровень срабатывания равен 3.

13. Выделение сигнума.

    $\forall_{ab}(a^2 = (a \cdot \mathrm{sg} b)^2)$

    $B(x)$ имеет вид $a \cdot \mathrm{sg} b$. Уровень срабатывания равен 2.

14. Гиперболические функции.

    Уровни срабатывания перечисляемых далее приемов равны 1.

    (a) Выражение гиперболического котангенса через гиперболический тангенс.
        $\forall_a(\operatorname{cth} a = 1/\operatorname{th} a)$
        $B(x)$ имеет вид $\operatorname{th} a$.

    (b) Использование формулы двойного аргумента.
        $\forall_{ab}(a = b/2 \rightarrow \operatorname{ch} b = 1 + 2(\operatorname{sh} a)^2)$
        $\forall_{ab}(a = b/2 \rightarrow \operatorname{ch} b = 2(\operatorname{ch} a)^2 - 1)$
        В первом случае $B(x)$ имеет вид $\operatorname{sh} a$, во втором - $\operatorname{ch} a$. Антецедент выделен указателем "идентификатор".

(c) Половинный аргумент.
$\forall_{ab}(a = b/2 \to (\operatorname{ch} a)^2 = (\operatorname{ch} b + 1)/2)$
$B(x)$ имеет вид $\operatorname{ch} b$.

(d) Гиперболические синус и косинус.
$\forall_{ab}((\operatorname{ch} a)^{2b} = (1 + (\operatorname{sh} a)^2)^b)$
$\forall_{ab}((\operatorname{sh} a)^{2b} = ((\operatorname{ch} a)^2 - 1)^b)$
$B(x)$ имеет вид, соответственно, $\operatorname{sh} a$ и $\operatorname{ch} a$.

(e) Выражение гиперболических синуса и косинуса через гиперболический тангенс.
$\forall_{ab}((\operatorname{sh} a)^{2b} = (\operatorname{th} a)^2 b/(1 - (\operatorname{th} a)^2)^b)$
$\forall_{ab}((\operatorname{ch} a)^{2b} = 1/(1 - (\operatorname{th} a)^2)^b)$
$\forall_{ab}((\operatorname{sh} a)^b (\operatorname{ch} a)^b = (\operatorname{th} a)^b/(1 - (\operatorname{th} a)^2)^b)$
$B(x)$ имеет вид $\operatorname{th} a$.
$\forall_{ab}((\operatorname{ch} a)^b = ((1 + (\operatorname{th}(a/2))^2)/(1 - (\operatorname{th}(a/2))^2))^b)$
$\forall_{ab}((\operatorname{sh} a)^b = (2 \operatorname{th}(a/2)/(1 - (\operatorname{th}(a/2))^2))^b)$
$B(x)$ имеет вид $\operatorname{th}(a/2)$.

1.4 Вычисление интегралов

Напомним логические символы, используемые в связи с интегрированием. Утверждение "первообразная(g f)" означает, что g есть первообразная функции f, т.е. g дифференцируема на своей области определения и в каждой точке этой области ее производная равна f. Область определения f, вообще говоря, может быть шире области определения g. Фактически в обучающем материале решателя задачи с символом "первообразная" пока не рассматривались.

При вычислении неопределенных интегралов используется выражение "Интеграл(f)", обозначающее какую-то одну из множества первообразных функции f. Формульный редактор прорисовывает его в виде неопределенного интеграла. Для неопределенного интеграла как множества всех первообразных никакого обозначения введено не было, поскольку в задачах этот объект не встречался. Заметим, что фактически обозначение "Интеграл(...)" используется лишь внутри нормализатора "нормИнтеграл", который последовательно преобразует его вплоть до окончания формального интегрирования. Поэтому коллизии тип равенства двух отличающихся на константу первообразных не возникают.

Определенный интеграл от функции f, взятый по всей области ее определения, обозначается "интеграл(f)". Если областью определения служит промежуток, то формульный редактор прорисовывает интеграл в обычном виде, с указанием нижнего и верхнего пределов. Утверждение "интегрируема(f)" означает, что вещественная функция f интегрируема на своей области определения.

Выражения "двойнойинтеграл(f)", "тройнойинтеграл(f)" обозначают, соответственно, двойной интеграл и тройной интегралы от функции f по ее области определения. Формульный редактор прорисовывает их в обычном виде, причем область интегрирования размещается снизу под знаком интеграла. Во избежание громоздких формул, обычно эта область обозначается переменной, явно задаваемой равенством из контекста. Справа от знака интеграла записывается выражение для значения функции f, которое "умножается" на стандартную запись $dxdy$ либо $dxdydz$. Здесь между всеми буквами ставится знак умножения.

Выражение "кривинтеграл(f a)" обозначает криволинейный интеграл 1-го рода, вычисляемый для функции f вдоль кривой a. Выражение "Кривинтеграл(f a)" обозначает криволинейный интеграл второго рода, вычисляемый для вектор-функции f вдоль ориентированной кривой a. Как и в случае кратных интегралов, формульный редактор размещает обозначение кривой снизу под знаком интеграла, причем обычно здесь стоит переменная, определяемая в контексте. Для интеграла первого рода справа от знака интеграла размещается выражение для значения функции, "домноженное" на стандартную запись ds. Здесь допускается только буква s. В случае интеграла второго рода используется обычная запись $Adx+Bdy$ либо $Adx+Bdy+Cdz$. Для обоих типов криволинейных интегралов функция должна выражаться только через переменные (буквы) x, y, z, причем в контексте должна быть однозначно указана прямоугольная система координат.

1.4.1 Нормализатор нахождения первообразной "нормИнтеграл"

Этот нормализатор выполняет практически всю работу по формальному интегрированию. Он применяется к выражению "Интеграл(отображение(x x – число $f(x)$))", прорисовываемому формульным редактором в виде $\int f(x)dx$. Заметим, что входная функция и промежуточные функции, рассматриваемые в процессе интегрирования, формально имеют своей областью определения всю числовую прямую. Это всего лишь техническое соглашение, так как данная информация нигде не используется. При необходимости о.д.з. выражений определяется каждый раз заново. Нормализатор имеет следующие приемы:

1. Интеграл суммы.

   $\forall_{fghux}(\int f(x)dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число})\ \&\ \int g(x)dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \rightarrow \int(f(x)+g(x))dx = \lambda_x(h(x)+u(x), x - \text{число}))$

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормИнтеграл". Результирующая сумма $h(x)+u(x)$ обрабатывается нормализатором "стандинтеграл", в котором собрано множество приемов упрощения выражений, часто возникающих при интегрировании. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abfghu}(\int(x^b/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число})\ \&\ \int(f(x)/g(x))dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \rightarrow \int((ax^b+f(x))/g(x))dx = \lambda_x(ah(x)+u(x), u - \text{число}))$

   Здесь переменная b идентифицируется с натуральной константой, возможно, равной единице. Требуется, чтобы каждое вхождение переменной x в $g(x)$ являлось основанием степени, показатель которой делится на некоторую натуральную константу m. При этом наибольший общий делитель числа $b+1$ и всех таких констант m должен быть больше единицы. Уровень срабатывания равен 1. Прием продублирован на уровне 7, причем перечисленные выше ограничения сняты; нужно лишь, чтобы b было натуральной константой.

   $\forall_{afgpquv}(a = ((df(x)/dx)p(x))/u(x)\ \&\ a = ((dg(x)/dx)q(x))/v(x) \rightarrow$
   $\int((\ln(f(x))u(x))/(g(x)p(x)) + (\ln(g(x))v(x))/(f(x)q(x)))dx =$
   $\lambda_x((\ln(f(x))\ln(g(x)))/a, x - \text{число}))$

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их правые части упрощаются вспомогательными задачами на преобразование, при этом оказывается, что результаты упрощения равны между собой. Уровень срабатывания приема равен 2.

2. Вынесение константного множителя за знак интеграла.

   $\forall_{afgh}(\int(f(x)/h(x))dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int(af(x)/h(x))dx = \lambda_x(ag(x), x - \text{число}))$

   $\forall_{afgh}(\int(f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int(f(x)/ag(x))dx = \lambda_x(h(x)/a, x - \text{число}))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор", его левая часть обрабатывается нормализатором "нормИнтеграл". Результирующий терм под описателем "отображение" обрабатывается нормализатором "стандинтеграл". Уровень срабатывания равен 1.

3. Вынесение минуса из-под интеграла.

   $\forall_{fg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int(-f(x))dx = \lambda_x(-g(x), x - \text{число}))$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Интеграл константы.

   $\forall_a(\int adx = \lambda_x(ax, x - \text{число}))$

   Уровень срабатывания равен 1.

5. Интеграл степенной функции.

   $\forall_{abc}(\neg(c+1=0) \to \int((ax+b)^c)dx = \lambda_x((ax+b)^{c+1}/(a(c+1)), x - \text{число}))$

   $\forall_{ab}(\neg(a=0) \to \int(1/(ax+b))dx = \lambda_x(\ln|ax+b|/a, x - \text{число}))$

   $\forall_{abc}(\neg(c-1=0) \to \int(1/(ax+b)^c)dx = \lambda_x(1/(a(1-c)(ax+b)^{c-1}), x - \text{число}))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(\neg(a=0) \to \int(1/((ax+b)^c))dx = \lambda_x((\ln|ax+b|/a) \text{ при } c=1, \text{ иначе } 1/(a(1-c)(ax+b)^{c-1}), x - \text{число}))$

   Уровень срабатывания равен 2.

6. Рациональные выражения.

   (a) Квадратный трехчлен в знаменателе и единица в числителе.
   $\forall_{abcd}(d = 4ac - b^2 \ \& \ d \leq 0 \to \int(1/(ax^2+bx+c))dx = \lambda_x((\ln|(2ax+b-\sqrt{-d})/(2ax+b+\sqrt{-d})|/\sqrt{-d} \text{ при}\neg(d=0), \text{ иначе} -2/(2ax+b)), x - \text{число}))$
   $\forall_{abcd}(d = 4ac - b^2 \ \& \ 0 \leq d \to \int(1/(ax^2+bx+c))dx = \lambda_x((2\,\mathrm{arctg}((2ax+b)/\sqrt{d})/\sqrt{d} \text{ при}\neg(d=0), \text{ иначе } -2/(2ax+b)), x - \text{число}))$
   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "видумножение". Результат d не должен быть тождественно нулевым. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "подстановка(...)" допускает обращение b в 0. Как и обычно, при обработке заменяющего терма используется нормализатор "стандинтеграл". Кроме того, для исключения условных выражений применяется нормализатор "нормвариант". Предарительно нормализатор "нормусм" предпринимает попытку заменить условие на логическую константу. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcd}(d = 4ac - b^2 \to \int(1/(ax^2+bx+c))dx = \lambda_x((2\,\mathrm{arctg}((2ax+b)/\sqrt{d})/\sqrt{d}$ при $0 < d$, иначе $(-2/(2ax+b)$ при $d = 0$, иначе $\ln|(2ax+b-\sqrt{-d})/(2ax+b+\sqrt{-d})|/\sqrt{-d})), x -$ число$))$

Уровень срабатывания равен 2.

(b) Квадратный трехчлен в знаменателе и переменная в числителе.

$\forall_{abcf}(\int(1/(ax^2+bx+c))dx = \lambda_x(f(x), x -$ число$) \to \int(x/(ax^2+bx+c))dx = \lambda_x((\ln|ax^2+bx+c| - bf(x))/(2a), x -$ число$))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором "нормИнтеграл". Если a, b, c - десятичные константы, причем дискриминант является точным квадратом, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Формула понижения для степени квадратного трехчлена, расположенной в знаменателе, при единичном числителе.

$\forall_{abcdef}(d = 4ac - b^2\ \&\ \int(1/(ax^2+bx+c)^{e-1})dx = \lambda_x(f(x), x -$ число$) \to \int(1/(ax^2+bx+c)^e)dx = \lambda_x((2ax+b)/(d(e-1)(ax^2+bx+c)^{e-1}) + (2a(2e-3)f(x))/(e-1)d, x -$ число$))$

Переменная e идентифицируется с натуральной константой, большей единицы. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть первого из них обрабатывается нормализатором "видумножение", левая часть второго - нормализатором "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Формула понижения для степени квадратного трехчлена, расположенной в знаменателе, если в числителе находится переменная.

$\forall_{abcdf}(\neg(4ac - b^2 = 0)\ \&\ \int(1/(ax^2+bx+c)^{d-1})dx = \lambda_x(f(x), x -$ число$) \to \int(x/(ax^2+bx+c)^d)dx = \lambda_x(-(bx+2c)/((d-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{d-1}) - b(2d-3)f(x)/((d-1)(4ac-b^2)), x -$ число$))$

Аналогично предыдущему.

(e) Квадрат квадратного трехчлена в знаменателе и квадрат переменной в числителе.

$\forall_{abcdf}(d = 4ac - b^2\ \&\ \int(1/(ax^2+bx+c))dx = \lambda_x(f(x), x-$число$) \to \int(x^2/(ax^2+bx+c)^2)dx = \lambda_x(((b^2-2ac)x+bc)/(ad(ax^2+bx+c)) + 2cf(x)/d, x -$ число$))$

Обработка антецедентов такая же, как и выше. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Сумма четвертой степени и положительной константы в знаменателе.

$\forall_{ab}(0 < a\ \&\ 0 < b \to \int(1/(ax^4+b))dx = \lambda_x((\ln((\sqrt{a}x^2+\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}x+\sqrt{b})/(\sqrt{a}x^2-\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}x+\sqrt{b})) + 2\,\mathrm{arctg}((\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}x)/(\sqrt{b}-\sqrt{a}x^2)))/(4\sqrt{2}\sqrt[4]{a}b^{3/4}), x -$ число$))$

$\forall_{ab}(0 < a\ \&\ 0 < b \to \int(x^2/(ax^4+b))dx = \lambda_x((-\ln((\sqrt{a}x^2+\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}x+\sqrt{b})/(\sqrt{a}x^2-\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}x+\sqrt{b}))+2\,\mathrm{arctg}((\sqrt{2}\sqrt[4]{ab}x)/(\sqrt{b}-\sqrt{a}x^2)))/(4\sqrt{2}\sqrt[4]{a}b^{3/4}), x -$ число$))$

Уровень срабатывания равен 1.

7. Иррациональные выражения.

(a) Табличные интегралы для единицы, деленной на квадратный корень из квадратного трехчлена.

$\forall_{abcd}(a < 0 \ \& \ d = b^2 - 4ac \to \int(1/\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \lambda_x(-\arcsin((2ax+b)/\sqrt{d})/\sqrt{-a}, x - \text{число}))$

$\forall_{abcd}(0 < a \to \int(1/\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \lambda_x(\ln|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b|/\sqrt{a}, x - \text{число}))$

$\forall_{abcd}(0 < ab \to \int(1/\sqrt{(ax+c)(bx+d)})dx = \lambda_x((\ln|ax+c|\text{sg}(ax+c)/\sqrt{ab}$ при $ad-bc = 0,$ иначе $(2\ln|b\sqrt{(ax+c)(bx+d)}+\sqrt{ab}(bx+d)|-\ln|bx+d|)/\sqrt{ab}), x-\text{число}))$

Уровни срабатывания равны 1.

$\forall_{abc}(\int(1/\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \lambda_x((\ln|2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b|/\sqrt{a}$ при $0 < a,$ иначе $((x/\sqrt{c}$ при $b = 0,$ иначе $2\sqrt{bx+c}/b)$ при $a = 0,$ иначе $-\arcsin((2ax+b)/\sqrt{b^2-4ac})/\sqrt{-a})), x - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 2.

(b) Представление интеграла от дроби с суммой в числителе и иррациональностью в знаменателе в виде суммы интегралов.

$\forall_{abcdf}(\int(x/\sqrt{dx^2+c})dx = \lambda_x(f(x), x-\text{число}) \ \& \ \int(1/\sqrt{dx^2+c})dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число}) \to \int((ax+b)/\sqrt{dx^2+c})dx = \lambda_x(af(x)+bg(x), x-\text{число}))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcfghuv}(\int(g(x)/(f(x)(bx^2+c)^{a/2}))dx = \lambda_x(u(x), x-\text{число}) \ \&$
$\int(h(x)/(f(x)(bx^2+c)^{a/2}))dx = \lambda_x(v(x), x-\text{число}) \to$
$\int((g(x)+h(x))/(f(x)(bx^2+c)^{a/2}))dx = \lambda_x(u(x)+v(x), x-\text{число}))$

Проверяется, что числитель $g(x)+h(x)$ представляет собой многочлен от x и что каждое вхождение переменной x в $f(x)$ - основание степени с четным показателем. Антецеденты выделены указателем "идентификатор", их левые части обрабатываются нормализатором "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Преобразование множителя знаменателя, имеющего вид степени линейного двучлена, в степень переменной.

$\forall_{abcdefg}(\int(x^{g-1}/\sqrt{c(1-bx)^2+ea(1-bx)x+da^2x^2})dx = \lambda_x(f(x), x-\text{число}) \to \int(1/((ax+b)^g\sqrt{cx^2+ex+d}))dx = \lambda_x(-\text{sg}(a)\text{sg}(ax+b)f(1/(ax+b)), x-\text{число}))$

Переменная g идентифицируется с натуральной константой. Антецедент реализует рекурсивное обращение к нормализатору "нормИнтеграл". Предварительно выражение под радикалом обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdefgh}(\int(f((x-b)/a)/(x^h\sqrt{c(x-b)^2+d(x-b)a+ea^2}))dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число}) \to \int(f(x)/((ax+b)^h\sqrt{cx^2+dx+e}))dx = \lambda_x(\text{sg}(a)g(ax+b), x-\text{число}))$

Переменная h идентифицируется с натуральной константой, $f(x)$ - с многочленом от x. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Перенесение иррациональности из числителя в знаменатель.

$\forall_{abcf}(\int f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int(f(x)(ax^2+bx+c)/\sqrt{ax^2+bx+c})dx)$

Выражение $f(x)$ идентифицируется с многочленом от x. К числителю в заменяющем интеграле применяется нормализатор раскрывания скобок. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdefg}(\int(f(x)\sqrt{ax^2+bx+e}/(cx+g)^d)dx = \int(f(x)(ax^2+bx+e)/((cx+g)^d\sqrt{ax^2+bx+e}))dx)$

Переменная d идентифицируется с натуральной константой, выражение $f(x)$ - с многочленом от x. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Многочлен в числителе и степень переменной, умноженная на радикал, - в знаменателе.

$\forall_{abcdfg}(\int(f(1/x)x^{d-1}/\sqrt{a+cx+bx^2})dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to$
$\int(f(x)/(x^d\sqrt{ax^2+cx+b}))dx = \lambda_x(-\text{sg}(x)g(1/x), x - \text{число}))$

Переменная d идентифицируется с натуральной константой, $f(x)$ - с многочленом от x, степень которого меньше d. Уровень срабатывания приема равен 1.

$\forall_{abcdfghuv}(\text{частноемногочленов}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), \lambda_x(x^d, x - \text{число}), g, h)$ &
$\int(g(x)/\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число})$ &
$\int(h(x)/(x^d\sqrt{ax^2+bx+c}))dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число}) \to$
$\int(f(x)/(x^d\sqrt{ax^2+bx+c}))dx = \lambda_x(u(x)+v(x), x - \text{число}))$

Переменная d идентифицируется с натуральной константой, $f(x)$ - с многочленом от x, степень которого не меньше d. Первый антецедент обрабатывается синтезатором деления многочленов, два следующих - выполняют рекурсивное обращение к нормализатору "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 2.

(f) Многочлен в числителе и радикал - в знаменателе.

$\forall_{abcdefghij}(d = \text{коэффициенты}(f)$ & $\text{интегрмногочлен}(\text{окончание}(d), 1, a, b, c, g)$ & $e = d(1) - g(2)c - g(1)b/2$ & $\int(1/\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int(f(x)/\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \lambda_x(\text{коэфф}(g,x)\sqrt{ax^2+bx+c}+eh(x), x - \text{число}))$

Выражение $f(x)$ идентифицируется с многочленом от x. Известно, что для интегралов такого вида ответ можно получить в виде $g(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+eh(x)$, где $g(x)$ - некоторый многочлен, $h(x)$ - результат интегрирования выражения $1/\sqrt{ax^2+bx+c}$. Процедура, вычисляющая коэффициенты многочлена $g(x)$, имеет рекурсивный характер и реализуется синтезатором "интегрмногочлен", приводимым ниже. В нашем приеме первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", присваивает d терм "набор(...)", перечисляющий упорядоченные по возрастанию степеней коэффициенты многочлена $f(x)$. Проверяется, что набор неодноэлементный. Второй антецедент обрабатывается синтезатором и определяет набор коэффициентов g указанного выше многочлена $g(x)$. Последние два антецедента тоже выделены указателем "идентификатор". Первый из них вычисляет коэффициент e, второй - обращается к нормализатору "нормИнтеграл" для определения $h(x)$. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Синтезатор "интегрмногочлен". Этот синтезатор имеет пять входных параметров. Первый - набор коэффициентов многочлена $f(x)$ с отброшенным свободным членом, второй - указатель глубины рекурсии, изначально равный 1, остальные параметры - коэффициенты квадратного трехчлена под радикалом. Выходная переменная (последняя в обращении к синтезатору) имеет своим значением набор коэффициентов многочлена $g(x)$. Опуская несложные выкладки, приводящие к приемам синтезатора, укажем лишь эти приемы:

i. Набор длины 1.

$\forall_{abcdefg}$(интегрмногочлен$((f), b, c, d, e, (f/bc))$)
Здесь круглые скобки указывают на термы вида "набор(...)". Например, (f) есть "набор(f)".

ii. Набор длины 2.
$\forall_{abcdefhi}$(интегрмногочлен$((i), b{+}1, c, d, e, f) \to$ интегрмногочлен$((h, i), b,$ $c, d, e,$ префикс$(h/bc - (2b+1)df(1)/(2bc), f)))$
Антецедент реализует рекурсивное обращение.

iii. Общий случай.
$\forall_{abcdefj}(3 \le l(a)$ & интегрмногочлен(окончание$(a), b+1, c, d, e, f)$ & $j =$ $a(1)/(bc) - (2b{+}1)df(1)/(2bc) - (b{+}1)ef(2)/(bc) \to$ интегрмногочлен$(a, b,$ $c, d, e,$ префикс$(j, f)))$
Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - реализует рекурсивное обращение, третий - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "видумножение".

(h) Раскрывание скобок под радикалом.
$\forall_{abcdefghi}(f = (dx+c)(ex+g) \to \int(h(x)/((ax+b)^i\sqrt{(dx+c)(ex+g)}))dx =$ $\int(h(x)/((ax+b)^i\sqrt{f}))dx)$
Переменная i идентифицируется с натуральной константой, $h(x)$ - с многочленом от x. Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 1.

(i) Преобразование к сумме простейших дробей отношения многочленов, получающегося после отбрасывания радикала в знаменателе.
$\forall_{abcdfg}(d = g(x)/f(x) \to \int(g(x)/(f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}))dx =$
$\int(d/\sqrt{ax^2+bx+c})dx)$
Функциональные переменные $f(x), g(x)$ идентифицируются с многочленами от x, причем степень многочлена $f(x)$ больше единицы. Антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "простейшиедроби". Проверяется, что результат d представляет собой сумму. Подынтегральное выражение в заменяющем терме обрабатывается нормализаторами "стандплюс" и "упрощинтеграл". Первый из них преобразует выражение к виду суммы, второй - выполняет простейшие стандартизирующие преобразования (приведение подобных членов, сложение дробей с одинаковыми знаменателями и т.п.). Уровень срабатывания равен 3.

(j) Вынесение множителя из-под радикала.
$\forall_{abmnk}(n < m$ & $m - n = 2k \to \int\sqrt{ax^m+bx^n}dx = \int|x^k|\sqrt{ax^{m-n}+b}dx)$
Переменные m, n идентифицируются с целочисленными константами. Уровень срабатывания равен 1.

8. Показательная функция.

$\forall_{ab}(0 < a$ & $\neg(a-1=0) \to \int a^{bx}dx = \lambda_x(a^{bx}/(b\ln a), x -$ число$))$

$\forall_{ab}(0 < a$ & $\neg(a-1=0) \to \int(1/a^{bx})dx = \lambda_x(-1/(b\ln a a^{bx}), x -$ число$))$

$\forall_{ab}(\int exp(ax/c)\sin(bx/d)dx = \lambda_x(cd\exp(ax/c)(ad\sin(bx/d) - bc\cos(bx/d))/(a^2d^2 +$ $b^2c^2), x -$ число$))$

$\forall_{ab}(\int exp(ax/c)\cos(bx/d)dx = \lambda_x(cd\exp(ax/c)(ad\cos(bx/d)+bc\sin(bx/d))/(a^2d^2+b^2c^2), x-\text{число}))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcfg}(\int \exp(ax)\sin(bx)dx = \lambda_x(f(x), x-\text{число})\ \&\ \int \exp(ax)\cos(bx)dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число}) \to \int \exp(ax)\sin(bx+c)dx = \lambda_x(\cos c \cdot f(x) + \sin c \cdot g(x), x-\text{число}))$

$\forall_{abcfg}(\int \exp(ax)\sin(bx)dx = \lambda_x(f(x), x-\text{число})\ \&\ \int \exp(ax)\cos(bx)dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число}) \to \int \exp(ax)\cos(bx+c)dx = \lambda_x(\cos c \cdot g(x) - \sin c \cdot f(x), x-\text{число}))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{fghx}(h(x)-(dg(x)/dx)\cdot\ln f(x)-(g(x)df(x)/dx)/f(x) = 0 \to \int(f(x)^{g(x)})h(x)dx = \lambda_x(f(x)^{g(x)}, x-\text{число}))$

Переменная x входит в каждое из выражений $f(x), g(x), h(x)$. Антецедент выделен указателем "идентификатор", его левая часть упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

9. Интегральный логарифм.

   $\forall_a(\neg(a=0) \to \int(1/\ln(ax))dx = \lambda_x(\mathrm{li}(ax)/a, x-\text{число}))$

   $\forall_{abcd}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(c=0) \to \int(\exp(cx+d)/(ax+b))dx = \lambda_x(\exp(d-bc/a)\mathrm{li}(cx+bc/a)/a, x-\text{число}))$

   $\forall_a(\neg(a=0) \to \int(1/(x\exp(ax)))dx = \lambda_x(\mathrm{li}(\exp(-ax)), x-\text{число}))$

   Чтобы приемы не применялись в тех случаях, когда использование функции $\mathrm{li}(x)$ нежелательно (например, предпочтительнее разложение в ряд), используется блокирующий комментарий "интегрлогарифм". Уровень срабатывания равен 2.

10. Тригонометрические функции.

    (a) Простейшие интегралы.

    $\forall_{abc}(\neg(a=0) \to \int \sin(ax/c+b)dx = \lambda_x(-c\cos(ax/c+b)/a, x-\text{число}))$

    $\forall_{abc}(\neg(a=0) \to \int \cos(ax/c+b)dx = \lambda_x(c\sin(ax/c+b)/a, x-\text{число}))$

    $\forall_{abc}(\int(1/(\sin(ax/c+b))^2)dx = \lambda_x(-c\,\mathrm{ctg}(ax/c+b)/a), x-\text{число})$

    $\forall_{abc}(\int(1/(\cos(ax/c+b))^2)dx = \lambda_x(c\,\mathrm{tg}(ax/c+b)/a), x-\text{число})$

    Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abc}(\int \sin(ax/c+b)dx = \lambda_x((\sin bx \text{ при } a=0,\ \text{иначе} -c\cos(ax/c+b)/a), x-\text{число}))$

    $\forall_{abc}(\int \cos(ax/c+b)dx = \lambda_x((\cos bx \text{ при } a=0,\ \text{иначе } c\sin(ax/c+b)/a), x-\text{число}))$

    Уровень срабатывания равен 2.

    (b) Дроби с линейными комбинациями синуса и косинуса.

    $\forall_{abcdefghi}(e = c^2+d^2\ \&\ \int(1/(c\sin x+d\cos x+g))dx = \lambda_x(h(x), x-\text{число})\ \&\ i = ac+bd \to \int((a\sin x+b\cos x+f)/(c\sin x+d\cos x+g))dx = \lambda_x((ix+(bc-ad)\ln|c\sin x+d\cos x+g|+(fe-gi)h(x))/e, x-\text{число}))$

Указатели "подстановка" разрешают обращение коэффициентов a, b в ноль, но не одновременно. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdefg}(f = c^2 + e^2 \; \& \; \int(1/(e\sin x + c\cos x)^{d-1})dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int((a\sin x + b\cos x)/((e\sin x + c\cos x)^d))dx = \lambda_x((bc + ae)g(x)/f - (be - ac)/(f(d-1)(e\sin x + c\cos x)^{d-1}), x - \text{число}))$

Переменная d идентифицируется с натуральной константой, большей единицы. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcde}(e = c^2 + d^2 \to \int((a\sin x + b\cos x)/(c\sin x + d\cos x))dx = \lambda_x(((bd + ac)x + (bc - ad)\ln|c\sin x + d\cos x|)/e, x - \text{число}))$

$\forall_{abc}(c = \sqrt{a^2 + b^2} \to \int(1/(a\sin x + b\cos x))dx = \lambda_x(\ln|(-c - b\operatorname{tg}(x/2) + a)/(c - b\operatorname{tg}(x/2) + a)|/c, x - \text{число}))$

$\forall_{abcd}(\int((a + b\operatorname{tg} x)/(c + d\operatorname{tg} x))dx = \int((a\cos x + b\sin x)/(c\cos x + d\sin x))dx)$

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Дроби с квадратичной формой относительно синуса и косинуса.

$\forall_{abcdefgh}(g = a - c \; \& \; h = e^2 + d^2 \; \& \; \int(1/(e\sin x + d\cos x))dx = \lambda_x(f(x), x - \text{число}) \to \int((a(\sin x)^2 + b\sin x\cos x + c(\cos x)^2)/(e\sin x + d\cos x))dx = \lambda_x(((be - dg)\sin x - (bd + eg)\cos x + (bde - ce^2 - ad^2)f(x))/h, x - \text{число}))$

$\forall_{abcdefghijuv}(e = (f-d)^2 + c^2 \; \& \; g = (f + d + \sqrt{e})/2 \; \& \; h = (f + d - \sqrt{e})/2 \; \& \; i = f - g \; \& \; j = f - h \; \& \; \int(1/(x^2 + gi))dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \; \& \; \int(1/(x^2 + hj))dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число}) \to \int((a\sin x + b\cos x)/(f(\sin x)^2 + c\sin x\cos x + d(\cos x)^2))dx = \lambda_x(((bc + 2ai)jv(j\sin x + (c\cos x)/2) - (bc + 2aj)iu(i\sin x + (c\cos x)/2))/(c\sqrt{e}), x - \text{число}))$

$\forall_{abcd}(\int((a\sin x + b\cos x)/(c + d\sin x\cos x))dx = \int((a\sin x + b\cos x)/(c(\sin x)^2 + c(\cos x)^2 + d\sin x\cos x))dx)$

Третий прием подготавливает возможность срабатывания второго, причем во втором приеме e не должно быть тождественно нулевым. Уровень срабатывания всех приемов равен 1.

(d) Понижение степени для некоторых простых тригонометрических дробей.

$\forall_{abcdf}(d = (c-1)(a^2 + b^2) \; \& \; \int(1/(a\sin x + b\cos x)^{c-2})dx = \lambda_x(f(x), x - \text{число}) \to \int(1/(a\sin x + b\cos x)^c)dx = \lambda_x((b\sin x - a\cos x)/d(a\sin x + b\cos x)^{c-1} + (c-2)f(x)/d, x - \text{число}))$

$\forall_{abcdfg}(d = (c-1)(a^2 - b^2) \; \& \; \int(1/(a + b\cos x)^{c-1})dx = \lambda_x(f(x), x - \text{число}) \; \& \; \int(1/(a + b\cos x)^{c-2})dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int(1/(a + b\cos x)^c)dx = \lambda_x(-b\sin x/(d(a + b\cos x)^{c-1}) + (2c-3)af(x)/d - (c-2)g(x)/d, x - \text{число}))$

В обоих случаях переменная c идентифицируется с натуральной константой, большей единицы. Во втором случае проверяется, что d не тождественно нулевое. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Сомножителем знаменателя служит квадратный корень из квадратичной формы относительно синуса и косинуса.

$\forall_{abcdefg}(\int((a\sin x + f\cos x)/(g(\operatorname{tg} x)\sqrt{b + c\sin x\cos x + d(\sin x)^2 + e(\cos x)^2}))\cdot dx = \int(\operatorname{sg}(\cos x)(a\operatorname{tg} x + f)/g(\operatorname{tg} x)\sqrt{b + e + c\operatorname{tg} x + (b + d)(\operatorname{tg} x)^2})dx)$

Указатель "новаргумент(x7 x23 извлечение)" определяет идентификацию $g(\operatorname{tg} x)$ путем преобразования идентифицирующего выражения к такому виду, где все вхождения переменной x располагаются внутри $\operatorname{tg} x$. При этом используется описанный выше нормализатор "извлечение". Уровень срабатывания равен 3.

(f) Попытка группировки для получения суммы либо разности синуса и косинуса.

Иногда бывает полезно выделить в подынтегральном выражении сумму синуса и косинуса, чтобы усмотреть возможность полезной замены переменной интегрирования. Для этого служат следующие приемы:
$\forall_{af}(a = \int(\sin x + \cos x)bdx \rightarrow \int(b\sin x + b\cos x)dx = a)$
$\forall_{af}(a = \int(\sin x - \cos x)bdx \rightarrow \int(b\sin x - b\cos x)dx = a)$
Указатель "содержится(x23 x2)" и фильтр "входит(x23 x2)" определяют идентификацию b с выражением, содержащим переменную x. Антецедент выделен указателем "идентификатор" и выполняет рекурсивное обращение к нормализатору "нормИнтеграл". Проверяется, что a не содержит символа "Интеграл". Уровень срабатывания равен 1.

11. Гиперболическе функции.

(a) Простейшие интегралы.
$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \rightarrow \int \operatorname{sh}(ax/c + b)dx = \lambda_x(c\operatorname{ch}(ax/c + b)/a, x - \text{число}))$

$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \rightarrow \int \operatorname{ch}(ax/c + b)dx = \lambda_x(c\operatorname{sh}(ax/c + b)/a, x - \text{число}))$

$\forall_{abc}(\int(1/(\operatorname{sh}(ax/c + b))^2)dx = \lambda_x(c\operatorname{cth}(ax/c + b)/a), x - \text{число})$

$\forall_{abc}(\int(1/(\operatorname{ch}(ax/c + b))^2)dx = \lambda_x(c\operatorname{th}(ax/c + b)/a), x - \text{число})$
Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{abc}(\int \operatorname{sh}(ax/c + b)dx = \lambda_x((\operatorname{sh} bx \text{ при } a = 0,\ \text{иначе } c\operatorname{ch}(ax/c + b)/a), x - \text{число}))$

$\forall_{abc}(\int \operatorname{ch}(ax/c + b)dx = \lambda_x((\operatorname{ch} bx \text{ при } a = 0,\ \text{иначе } c\operatorname{sh}(ax/c + b)/a), x - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 2.

(b) Линейная комбинация гиперболических синуса и косинуса в знаменателе.
$\forall_{abc}(c = b^2 - a^2 \rightarrow \int(1/(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x))dx =$
$(\lambda_x(2\operatorname{arctg}((b\operatorname{th}(x/2) + a)/\sqrt{c})/\sqrt{c}, x - \text{число}) \text{ при } 0 < c, \text{иначе}$
$(\lambda_x(-2/(a + \operatorname{th}(x/2)), x - \text{число}) \text{ при } c = 0,\ \text{иначе}$
$\lambda_x(\ln|(b\operatorname{th}(x/2) + a - \sqrt{-c})/(b\operatorname{th}(x/2) + a + \sqrt{-c})|/\sqrt{-c}, x - \text{число}))))$
Уровень срабатывания равен 1.

(c) Произведение гиперболической функции на тригонометрическую.
$\forall_{abcd}(\int \operatorname{sh}(ax/b)\sin(cx/d)dx =$
$\lambda_x(bd(ad\operatorname{ch}(ax/b)\sin(cx/d) - bc\operatorname{sh}(ax/b)\cos(cx/d))/(a^2d^2 + b^2c^2), x - \text{число}))$

$\forall_{abcd}(\int \operatorname{sh}(ax/b)\cos(cx/d)dx =$
$\lambda_x(bd(ad\operatorname{ch}(ax/b)\cos(cx/d) + bc\operatorname{sh}(ax/b)\sin(cx/d))/(a^2d^2 + b^2c^2), x - \text{число}))$

$\forall_{abcd}(\int \operatorname{ch}(ax/b)\sin(cx/d)dx =$
$\lambda_x(bd(ad\operatorname{sh}(ax/b)\sin(cx/d) - bc\operatorname{ch}(ax/b)\cos(cx/d))/(a^2d^2 + b^2c^2), x - \text{число}))$

$\forall_{abcd}(\int \mathrm{ch}(ax/b)\cos(cx/d)dx =$
$\lambda_x(bd(ad\,\mathrm{sh}(ax/b)\cos(cx/d) + bc\,\mathrm{ch}(ax/b)\sin(cx/d))/(a^2d^2 + b^2c^2), x - \text{число}))$
Уровень срабатывания равен 1.

12. Преобразование подынтегрального выражения с помощью вспомогательной задачи.

    После первых попыток проинтегрировать выражение "в лоб" предпринимается попытка обратиться к вспомогательной задаче на преобразование, ориентированной на получение вида, "удобного для интегрирования". Эта задача имеет своим условием подынтегральное выражение и цели "упростить", "нормИнтеграл", "одз". Ей передается комментарий (нормИнтеграл x), выделяющий переменную интегрирования x. Заметим, что в комментарии переменная представлена не как символ, а как однобуквенный терм. Для задач с целью "нормИнтеграл" предусмотрено большое количество специальных приемов, рассредоточенных по различным разделам решателя. В частности, имеется прием для перехода к сумме простейших дробей.

    Теорема приема такова:

    $\forall_{af}(a = f(x) \to \int f(x)dx = \int adx)$

    Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование со сравнительно большим максимальным уровнем, а также нормализатором "упрощинтеграл". Проверяется, что результат a отличен от $f(x)$ и что $f(x)$ не содержит символа определенного интеграла "интеграл". Для блокировки повторной попытки служит комментарий "нормИнтеграл". Если выражение $f(x)$ имеет степень с дробным показателем, основание которой содержит x, то вводится несколько более сильный ограничитель трудоемкости, чем обычно. Но в обоих случаях этот ограничитель слабый. Уровень срабатывания равен 4.

13. Вынесение модуля из-под интеграла.

    $\forall_{fghpu}(p - \mathrm{rational}\ \&\ \neg(\text{числитель}(p) - \mathrm{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(p) - \mathrm{even})\ \&$
    $\int(g(x)(h(x))^p/f(x))dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \to \int(g(x)|h(x)|^p/f(x))dx =$
    $\lambda_x(\mathrm{sg}(h(x))u(x), x - \text{число}))$

    $\forall_{fghpu}(p - \mathrm{rational}\ \&\ \neg(\text{числитель}(p) - \mathrm{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(p) - \mathrm{even})\ \&$
    $\int(g(x)/(f(x)(h(x))^p))dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \to \int(g(x)/(f(x)|h(x)|^p))dx =$
    $\lambda_x(\mathrm{sg}(h(x))u(x), x - \text{число}))$

    Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, последний - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

14. Вынесение сигнума из-под интеграла.

    $\forall_{fghu}(\int(g(x)/h(x))dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \to \int(\mathrm{sg}(f(x))g(x)/h(x))dx =$
    $\lambda_x(\mathrm{sg}(f(x))u(x)))$

    $\forall_{fghu}(\int(g(x)/h(x))dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \to \int(g(x)/(\mathrm{sg}(f(x))h(x)))dx =$
    $\lambda_x(\mathrm{sg}(f(x))u(x)))$

    Уровень срабатывания равен 1.

15. Замена переменной интегрирования.

(a) Степенная функция.

i. Простейшая степенная замена.

$\forall_{abcdfgh}(b = ac + d \ \& \ d - c + 1 = 0 \ \& \ \int(x^a f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x -$ число$) \to \int(x^b f(x^c)/g(x^c))dx = \lambda_x(h(x^c)/c, x -$ число$))$

Переменная b идентифицируется с натуральной константой. Указатель "контекст(равно(x11 нод(или(разряд(фикс(0 1 1 3 1 2)x23 x5)разряд(фикс(0 1 1 3 2)x23 x5)подтерм(степень(теквхожд(x5)умножение(x9 x10)))десчисло(x9)натуральное(x9)единица(1 x10)числзначение(x9)))) десчисло(x2)равно(x3 нод(x11 плюс(числзначение(x2)1))))" определяет наибольший общий делитель x11 всех численных коэффициентов показателей степеней при вхождениях x в выражения задачи A, B, с которыми идентифицируются $f(x^c), g(x^c)$. Затем c вычисляется как наибольший общий делитель x11 и $b+1$. Проверяется, что оно отлично от 0 и 1.

Далее идентифицируются функциональные переменные f, g. Указатели "новаргумент(x6 x23 извлечение)", "новаргумент(x7 x23 извлечение)" определяют идентификацию $f(x^c), g(x^c)$ путем применения описанного выше нормализатора "извлечение". Этот нормализатор преобразует идентифицирующие выражения A, B так, чтобы переменная x встречалась только в виде x^c. В итоге получаются шаблоны для построения выражений вида $f(t), g(t)$: все вхождения x^c заменяются на t. Первые два антецедента выделены указателем "программа": сначала b делится на c с остатком, затем проверяется, что остаток на единицу меньше, чем c. Как и обычно, выражение под результирующим описателем "отображение" обрабатывается нормализатором "стандинтеграл". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdfgh}(b = ac + d \ \& \ d = 1 \ \& \ \int(f(x)/(x^{a+1}g(x)))dx = \lambda_x(h(x), x -$ число$) \to \int(x^c/(x^b g(x^c)))dx = \lambda_x(h(x^c)/c, x -$ число$))$

Аналогично предыдущему, но определяется как наибольший общий делитель численных коэффициентов показателей степени при x в идентифицирующих выражениях для $f(x^c), g(x^c)$. Проверяется, что оно отлично от 0 и 1. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdfgh}(b = ac+d \ \& \ d = 1 \ \& \ \int(x^{a-1}f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x -$ число$) \to \int(x^{-c}/(x^b g(x^{-c})))dx = \lambda_x(-h(x^{-c})/c, x -$ число$))$

Аналогично предыдущему, но нормализатор "извлечение" пытается выделить не x^c, а x^{-c}. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfgh}(\int(x^{a-1}f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x -$ число$) \ \& \ \neg(b = 0) \to \int(x^{ab-1}f(x^b)/g(x^b))dx = \lambda_x(h(x^b)/b, x -$ число$))$

Переменная a идентифицируется с натуральным множителем, b - с остаточным произведением, которое не обязано быть численной константой, но от x не зависит. Как и выше, для идентификации $f(x^b), g(x^b)$ используется нормализатор "извлечение". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{afgh}(\int(x^{a-2}f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x -$ число$) \to \int(f(x^{-1})/(x^a g(x^{-1})))dx = \lambda_x(-h(x^{-1}), x -$ число$))$

Переменная a идентифицируется с натуральной константой, большей единицы. Каждое вхождение переменной x в выражения, идентифицируемые с $f(x^{-1}), g(x^{-1})$, является множителем знаменателя дроби. В остальном аналогично предыдущим приемам. Уровень срабатывания равен 1.

ii. Замены с радикалами - простейший случай.

$\forall_{fghnuv}(n-$целое $\&\ \lambda_y(g(y)/(h(y)df(y)/dy), y-$число$) = \lambda_y(u(\sqrt{f(y)}), y-$число$)\ \&\ \int(u(y)/y^{n-1})dy = \lambda_y(v(y), y -$ число$) \to$
$\int(g(y)/(h(y)f(y)^{n/2}))dy = \lambda_y(2v(\sqrt{f(y)}), y -$ число$))$

Переменная y должна входить в выражение $g(y)$, причем это выражение не должно представлять собой квадратный трехчлен относительно y (такой случай рассматривается в других приемах). Далее, переменная y должна встречаться либо в $g(y)$, либо в $h(y)$. Требуется, чтобы $g(y)$ не имело своим сомножителем такую натуральную степень суммы, показатель которой меньше 4 (иначе в числителе будут раскрываться скобки). Наконец, требуется, чтобы $h(y)$ не имело своим сомножителем дробную степень суммы. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражение в левой части второго антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Указатель "новаргумент(x20 x24 извлечение)" определяет попытку применения нормализатора "извлечение" для усмотрения выражения вида $u(\sqrt{f(y)})$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abfgh}(\int(f(\sqrt{x^2-a})/(g(\sqrt{x^2-a})x^{b-1}\sqrt{x^2-a}))dx = \lambda_x(h(x), x -$ число$)$
$\to \int(f(x)/(g(x)(x^2+a)^{b/2}))dx = \lambda_x(h(\mathrm{sg}(x)\sqrt{x^2+a}), x -$ число$))$

Требуется, чтобы каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение представляло собой основание степени, имеющей своим показателем четную константу. Уровень срабатывания равен 3.

iii. Квадратичная функция под радикалом.
Начнем с рассмотрения подслучая, когда подынтегральное выражение зависит от квадрата переменной интегрирования:

$\forall_{abfg}(\int(\sqrt{a/(1-bx^2)}f(ax^2/(1-bx^2))/(1-bx^2))dx = \lambda_x(g(x), x -$ число$)$
$\to \int f(x^2)dx = \lambda_x(g(x/\sqrt{a+bx^2}), x -$ число$))$

Указатель "контекст(обобщмножитель(фикс(0 1 1 3)x3)вид(x3 степень (плюс (x1 умножение(x2 степень(x23 2)))дробь(x4 2)))единица(1 x2) заменазнака (минус x2)десчисло(x4)натуральное(x4))" определяет усмотрение обобщенного множителя подынтегрального выражения, имеющего вид $(a+bx^2)^{d/2}$, где d - натуральная константа. Под обобщенным множителем понимается произвольное подвыражение, достижимое из заголовка выражения только через операции "минус", "умножение", "дробь", "модуль" и через основания степеней. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение расположено внутри подвыражений $a+bx^2$. Далее $f(x^2)$ идентифицируется с помощью указателя "новаргумент(x6 x23 извлечение)". Чтобы исключить громоздкие вычисления при упрощении подынтегрального выражения антецедента, вводится указатель "мультизамена(фикс(1 1 1 3 1 2)плюс(x1 умножение(x2 x23))дробь(x1 плюс(1 минус(умножение(x2 степень(x23 2))))))". Он связан с формированием подвыражения $f(ax^2/(1-bx^2))$: прежде всего, в шаблоне для $f(y)$ предпринимается замена подвыражений $a+by$ на $a/(1-bx^2)$, и лишь оставшиеся вхождения y заменяются на $ax^2/(1-bx^2)$. Уровень срабатывания равен 2.

Для первой подстановки Эйлера введен следующий прием:

$\forall_{abcfg}(0 < a \,\&\, \int((\sqrt{a}x^2+bx+\sqrt{a}c)f((x^2-c)/(b+2\sqrt{a}x))/(b+2\sqrt{a}x)^2)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \rightarrow \int f(x)dx = \lambda_x(2g(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x), x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения под интегралом терма $(ax^2+bx+c)^{m/2}$, где m - целочисленная константа. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение достижимо от заголовка этого выражения только через операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "модуль" и основания степеней. Кроме того, проверяется, что каждая степень под интегралом, основание которой содержит x, либо имеет показателем целочисленную константу, либо имеет своим основанием квадратный трехчлен ax^2+bx+c. Указатель "мультизамена(...)" определяет формирование терма $f((x^2-c)/(b+2\sqrt{a}x))$ в два этапа: сначала в шаблоне $f(y)$ предпринимается замена всех подвыражений $\sqrt{ay^2+by+c}$ на $(\sqrt{a}x^2+bx+\sqrt{a}c)/(2\sqrt{a}x+b)$, а затем - замена оставшихся вхождений y на $(x^2-c)/(b+2\sqrt{a}x)$. Во многих случаях это существенно ускоряет вычисления. Для случая, когда b обращается в 0, создана отдельная версия приема:

$\forall_{abfg}(0 < a \,\&\, \int((x^2+b)g((x^2-b)/(2\sqrt{a}x))/x^2)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \rightarrow \int f(x)dx = \lambda_x(g(\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{a}x)/(2\sqrt{a}), x - \text{число}))$

Уровни срабатывания обеих версий равны 6.

Переходим ко второй подстановке Эйлера:

$\forall_{abcfg}(0 < c \,\&\, \int((\sqrt{c}x^2+bx+a\sqrt{c})f((b+2\sqrt{c}x)/(x^2-a))/(x^2-a)^2)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \rightarrow \int f(x)dx = \lambda_x(-2g((\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c})/x), x - \text{число}))$

Прием организован совершенно аналогично случаю первой подстановки: идентификация, начинается с усмотрения под интегралом вхождения терма $(ax^2+bx+c)^{m/2}$, и т.д. Указатель "мультизамена(...)" определяет приоритетную замену подтермов $\sqrt{ay^2+by+c}$ на $(\sqrt{c}x^2+bx+a\sqrt{c})/(x^2-a)$. Для нулевого b введена отдельная версия:

$\forall_{abfg}(0 < b \,\&\, \int((x^2+a)f(2\sqrt{b}x/(x^2-a))/(x^2-a)^2)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \rightarrow \int f(x)dx = \lambda_x(-2\sqrt{b}g((\sqrt{ax^2+b}+\sqrt{b})/x), x - \text{число}))$

Уровни срабатывания равны 6.

Наконец, приведем прием для третьей подстановки Эйлера:

$\forall_{abcdfg}(\int(xf((cx^2-b)/(a-dx^2))/(a-dx^2)^2)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \rightarrow \int f(x)dx = \lambda_x(2(ac-bd)g(\mathrm{sg}(dx+c)\sqrt{(ax+b)/(dx+c)}), x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения под интегралом выражения вида $\sqrt{(ax+b)(dx+c)}$. Как и выше, проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение достижимо от заголовка этого выражения только через операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "модуль" и основания степеней. Кроме того, проверяется, что каждая степень под интегралом, основание которой содержит x, либо имеет показателем целочисленную константу, либо имеет вид $((ax+b)(dx+c))^{n/2}$. Наконец, проверяется, что либо a не совпадает с d, либо $-c$ не совпадает с b. Указатель "мультизамена" определяет приоритетную замену подтермов $\sqrt{(ay+b)(dy+c)}$ на $x(ac-bd)/(a-dx^2)$. Уровень срабатывания приема равен 2.

iv. Дробно-линейная функция под радикалом.

$\forall_{abcdefg}(\int(x^{e-1}f((cx^e-b)/(a-dx^e))/(a-dx^e)^2)dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число})$ & $\neg(d=0) \to \int f(x)dx = \lambda_x(e(ac-bd)g(((ax+b)/(dx+c))^{1/e}), x-\text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения под интегралом выражения $((ax+b)/(dx+c))^{m/e}$, где m - целочисленная константа, e - натуральная константа, большая единицы. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение достижимо от заголовка этого выражения только через операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "модуль" и основания степеней. Кроме того, проверяется, что каждое степенное подвыражение, в которое входит x, имеет своим показателем либо целочисленную константу, либо простую дробь со знаменателем e. Указатель "мультизамена(...)" определяет приоритетную замену подвыражений $((ay+b)/(dy+c))^{1/e}$ на x. Уровень срабатывания равен 3.

v. Линейная функция под радикалом.

$\forall_{abcfg}(\neg(a=0)$ & $\int x^{c-1}f((x^c-b)/a)dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(cg((ax+b)^{1/c})/a, x-\text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения под интегралом выражения $(ax+b)^{e/h}$, где e - целочисленная константа, h - натуральная константа, большая единицы. Проверяется, что это выражение не расположено внутри операций "арксинус", "арктангенс", "логарифм", "арккосинус". Другой указатель "контекст(...)" определяет c как наименьшее общее кратное натуральных знаменателей дробных показателей степени при линейных двучленах $px+q$, расположенных в подынтегральном выражении. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральном выражении расположено в основаниях только таких степеней, которые либо имеют своим основанием $ax+b$, либо имеют своим показателем целочисленную или дробную константу. Уровень срабатывания равен 3.

На той же самой теореме созданы еще две версии приема, срабатывающие на уровне 8. Ограничение на степени, основание которых содержит x, в этих приемах отсутствует. Одна версия соответствует четному c. В ней вспомогательные задачи, относящиеся ко второму антецеденту, имеют дополнительную посылку о неотрицательности x (фактически, связанная переменная x во втором антецедента - это исходное

$ax+b$). Другая версия соответствует нечетному c, и у нее таких посылок нет.

Наконец, создана версия приема для радикалов второй степени, у которой отменено ограничение на внешние операции:

$\forall_{abfg}(\neg(a=0)\ \&\ \int xf((x^2-b)/a)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(2g(\sqrt{ax+b})/a, x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения выражения $\sqrt{ax+b}$. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральном выражении расположено в основаниях только таких степеней, которые либо имеют целочисленный показатель, либо имеют своим основанием какой-либо линейный двучлен. Уровень срабатывания равен 8.

vi. Дифференциальный бином.

Начнем с приемов, приводящих дифференциальный бином к стандартной форме, на которую рассчитаны приемы замены переменной:

$\forall_{abcde}(\int(x^c/(a+bx^d)^e)dx = \int(x^c(a+bx^d)^{-e})dx)$

$\forall_{abcde}(\int((a+bx^d)^e/x^c)dx = \int(x^{-c}(a+bx^d)^e)dx)$

$\forall_{abcde}(\int(1/((a+bx^d)^e x^c))dx = \int(x^{-c}(a+bx^d)^{-e})dx)$

Во всех этих случаях хотя бы одна из переменных c, d, e идентифицируется с выражением, не являющимся целочисленной константой. Уровень срабатывания равен 2. Для вырожденного случая введен еще один стандартизирующий прием:

$\forall_{abcd}(int(1/(a+bx^c)^d)dx = \int(a+bx^c)^{-d}dx)$

Здесь d не должно являться целочисленной константой. Уровень срабатывания - такой же, как выше. Для первого случая дифференциального бинома создан следующий прием:

$\forall_{abcdefghijn}(i = c/e\ \&\ j = d/f\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ ef = g\text{нод}(e,f)\ \&\ \int x^{gc/e+g-1}(a+bx^{gd/f})^n dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int x^i(a+bx^j)^n dx = \lambda_x(gh(x^{1/g}), x - \text{число}))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Знаменатели e, f идентифицируются с целочисленными константами, причем хотя бы один из них должен отличаться от единицы. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "программа" и идентифицирует константу g. Наконец, пятый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", выполняет рекурсивное обращение к оператору "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 1.

Прием для второго случая дифференциального бинома выглядит следующим образом:

$\forall_{abcdefghn}(n = (h+1)/g\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ c = d/e\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ \int((x^e - a)/b)^{n-1}x^{d+e-1}dx = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ \neg(g=0) \to \int x^h(a+bx^g)^c dx = \lambda_x((e/bg)f((a+bx^g)^{1/e}), x - \text{число}))$

Первый и третий антецеденты выделены указателем идентификатор. При этом знаменатель e должен идентифицироваться с целочисленной константой. Уровень срабатывания равен 1.

Наконец, переходим к приемам для третьего случая:

$\forall_{abcdefghn}(n = (f+1)/g + c$ & n – целое & $c = d/e$ & $\int(x^{d+e-1}/(x^e - b)^{n+1})dx = \lambda_x(h(x), x$ – число) & $\neg(g = 0) \to \int x^f(a+bx^g)^c dx = \lambda_x(-ea^n h((a+bx^g)^{1/e}/x^{g/e})/g, x$ – число))

$\forall_{abcdefgn}(n = 1/f + c$ & n – целое & $c = d/e$ & $\int(x^{d+e-1}/(x^e - b)^{n+1})dx = \lambda_x(g(x), x$ – число) $\to \int(a+bx^f)^c dx = \lambda_x(-ea^n g((a+bx^f)^{1/e}/x^{f/e})/f, x$ – число))

Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". При этом e идентифицируется с целочисленной константой, отличной от единицы. Уровень срабатывания равен 2.
В заключение добавим прием, позволяющий разбирать случаи по равенству нулю показателя степени при x:

$\forall_{abcfg}$(контекст($\int x^f(a+bx^g)^c dx$))

Прием имеет заголовок "замена(замечание нормИнтеграл)". Его действие заключается в добавлении пары (нормили $g = 0 \ \vee \ \neg(g = 0)$) к списку комментариев нормализатора. Предварительно проверяется неочевидность отличия g от нуля и отсутствие уже введенного такого комментария. Уровень срабатывания равен 1. Позднее, на уровне 7, если результат не удастся найти другими средствами, будет применен прием, вычисляющий интеграл отдельно для каждого подслучая и объединяющий результаты в условное выражение. Этот прием описывается ниже.

vii. Один специальный случай дробно-линейной замены.

$\forall_{abcdefghijklmu}(g = bc - ae$ & $\neg(g = 0)$ & $f = 2(al - cd)/g$ & $h = (de - bl)/g$ & $m = f^2 - 4h$ & $i = \sqrt{m}$ & $j = (f-i)/2$ & $k = (f+i)/2$ & $\int(|x+1|/(((ak^2+bk+d)x^2+aj^2+bj+d)\sqrt{(ck^2+ek+l)x^2+cj^2+ej+l}))dx = \lambda_x(u(x), x$ – число) & $0 \le m \to \int(1/((ax^2+bx+d)\sqrt{cx^2+ex+l}))dx = \lambda_x(iu((x-j)/(k-x)), x$ – число))

Второй и последний антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Прием устраняет в квадратных трехчленах линейные относительно x члены, после чего предпринимает рекурсивное обращение к нормализатору "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 3.

(b) Тригонометрические функции.

i. Простейшие замены.

$\forall_{afgh}(\int((1-x^2)^{(a-1)/2}f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x$ – число) $\to$
$\int((\sin x)^a f(\cos x)/g(\cos x))dx = \lambda_x(-h(\cos x), x$ – число))

$\forall_{afgh}(\int((1-x^2)^{(a-1)/2}f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x$ – число) $\to$
$\int((\cos x)^a f(\sin x)/g(\sin x))dx = \lambda_x(h(\sin x), x$ – число))

$\forall_{afgh}(\int(f(x)/((1-x^2)^{(a+1)/2}g(x)))dx = \lambda_x(h(x), x$ – число) $\to$
$\int(f(\cos x)/((\sin x)^a g(\cos x)))dx = \lambda_x(-h(\cos x), x$ – число))

$\forall_{afgh}(\int(f(x)/((1-x^2)^{(a+1)/2}g(x)))dx = \lambda_x(h(x), x$ – число) $\to$
$\int(f(\sin x)/((\cos x)^a g(\sin x)))dx = \lambda_x(h(\sin x), x$ – число))

Переменная a идентифицируется с нечетной константой. Для идентификации $f(\cos x), g(\cos x), \ldots$ используются указатели "новаргумент(x6 x23 извлечение)", "новаргумент(x7 x23 извлечение)". Первые два приема блокируются, если в качестве $f(\ldots)$ фигурирует степень соответствующей тригонометрической операции, натуральный показатель которой меньше a. Аналогично, последние два приема блокируются, если $f(\ldots)$ - степень синуса либо косинуса с натуральным показателем, не превосходящим a. Уровень срабатывания приемов равен 2. Для тангенса добавлен еще один прием:

$$\forall_{fghp}(g(x)/(\cos x)^2 = h(\operatorname{tg} x)\ \&\ \int(f(x)/h(x))dx = \lambda_x(p(x), x - \text{число}) \to \int(f(\operatorname{tg} x)/g(x))dx = \lambda_x(p(\operatorname{tg} x), x - \text{число}))$$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Перед попыткой применения приема проверяется, что в подынтегральное выражение входит символ "тангенс". Далее с помощью указателя "новаргумент(x6 x23 извлечение)" идентифицируется $f(\operatorname{tg} x)$. После обработки нормализатором "нормдробь" левой части первого антецедента, указатель "новаргумент(x7 x23 извлечение)" позволяет идентифицировать $h(\operatorname{tg} x)$. Уровень срабатывания равен 2.

ii. Замены с тангенсом.

$$\forall_{fgh}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}) = \lambda_x(g(\operatorname{tg} x), x - \text{число})\ \&\ \int(g(x)/(x^2+1))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(h(\operatorname{tg} x), x - \text{число}))$$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Для идентификации $g(\operatorname{tg} x)$, происходящей в первом антецеденте, служит указатель "новаргумент(x7 x23 извлечение)". Проверяется выполнение следующих условий: (а) все тригонометрические аргументы в подынтегральном выражении, отличные от x, являются четными кратными x; (б) переменная x встречается в подынтегральном выражении только в виде $\operatorname{tg} x$, либо $\operatorname{ctg} x$, либо $\cos(2x)$, либо в виде четной степени синуса либо косинуса от x; (в) либо подынтегральное выражение есть дробь, множителем знаменателя которой служит натуральная степень синуса либо косинуса x, либо каждая тригонометрическая операция в $f(x)$ есть тангенс x и существует хотя бы одно вхождение нечетной степени данного тангенса; (г) подынтегральное выражение содержит тангенс либо котангенс x. Уровень срабатывания равен 2. Данный прием продублирован, и на уровне 5 срабатывает при несколько измененных ограничениях. Кроме пункта (а), требуется, чтобы каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение либо было аргументом тангенса или котангенса, либо аргументом синуса либо косинуса, причем последний или являлся основанием четной степени, или входил в произведение одинаковых степеней синуса и косинуса.

Для замены с тангенсом половинного аргумента создан следующий прием:

$$\forall_{fgh}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}) = \lambda_x(g(\operatorname{tg}(x/2)), x - \text{число})\ \&\ \int(g(x)/(x^2 + 1))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(2h(\operatorname{tg}(x/2)), x - \text{число}))$$

требуется, чтобы каждый тригонометрический аргумент в подынтегральном выражении был кратен x, причем существовало хотя бы одно вхождение $\sin x$ либо $\cos x$. Уровень срабатывания равен 6.

iii. Раздельная замена для синуса и косинуса в случае дроби с тригонометрической суммой в числителе.

$\forall_{abfghpuvw}(\lambda_x(h(x), x - \text{число}) = \lambda_x(u(\sin x), x - \text{число})\ \&\ \lambda_x(h(x), x - \text{число}) = \lambda_x(v(\cos x), x - \text{число})\ \&\ \int((1-x^2)^{(a-1)/2} f(x)/v(x))dx = \lambda_x(w(x), x - \text{число})\ \&\ \int((1-x^2)^{(b-1)/2} g(x)/u(x))dx = \lambda_x(p(x), x - \text{число}) \rightarrow \int(((\sin x)^a f(\cos x) + (\cos x)^b g(\sin x))/h(x))dx = \lambda_x(p(\sin x) - w(\cos x), x - \text{число}))$

Показатели степени a, b идентифицируются с нечетными натуральными константами. Указатели "новаргумент(x6 x23 извлечение)", "новаргумент(x7 x23 извлечение)" определяют идентификацию $f(\cos x)$, $g(\sin x)$. Первый и второй антецеденты, выделенные указателями "идентификатор", представляют знаменатель $h(x)$ как $u(\sin x)$ и одновременно как $v(\cos x)$. Здесь тоже используются указатели "новаргумент". Наконец, два последних антецедента выполняют раздельные рекурсивные обращения к нормализатору "нормИнтеграл" для вычисления соответствующих интегралов. Уровень срабатывания равен 2.

iv. Замена для суммы либо разности синуса и косинуса.

$\forall_{afgh}(\int(f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \rightarrow \int((a\cos x - a\sin x) f(\sin x + \cos x)/g(\sin x + \cos x))dx = \lambda_x(ah(\sin x + \cos x), x - \text{число}))$

$\forall_{fgh}(\int(f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \rightarrow \int((\cos x + \sin x) f(\sin x - \cos x)/g(\sin x - \cos x))dx = \lambda_x(h(\sin x - \cos x), x - \text{число}))$

В первом приеме коэффициент a введен только для того, чтобы одновременно охватить случаи $\cos x - \sin x$ и $\sin x - \cos x$; обычно он будет равен ± 1. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{fghmn}(n + 1 = 2m\ \&\ \int(f(x)/(g(x)(2-x^2)^m(1+x^2)^n))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \rightarrow \int(f(\sin x - \cos x)/(g(\sin x - \cos x)((\sin x)^3 + (\cos x)^3)^n))dx = \lambda_x(2h(\sin x - \cos x), x - \text{число}))$

Переменная n идентифицируется с нечетной целочисленной константой. Первый антецедент выделен указателем "программа", второй - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

(c) Показательная функция.

$\forall_{afghu}(0 < a\ \&\ \lambda_x(g(x)/((dh(x)/dx)a^{h(x)}), x - \text{число}) = \lambda_x(f(a^{h(x)}), x - \text{число})\ \&\ \int f(x)dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \rightarrow \int g(x)dx = \lambda_x(u(a^{h(x)})/\ln a, x - \text{число}))$

Указатель "контекст(разряд(фикс(0 1 1 3)степень x10)вид(x10 степень(x1 плюс(значение(x8 x23)x11)))единица(0 x11))" начинает идентификацию с усмотрения в подынтегральном выражении подтерма $a^{h(x)+k}$, где $h(x)$ - невырожденная сумма всех слагаемых показателя степени, содержащих переменную x, k - остаточная сумма. Если подынтегральное выражение имеет своим сомножителем либо сомножителем своего числителя натуральную степень суммы, показатель которой не больше 3, то прием блокируется (сначала будет выполняться раскрывание скобок). Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Для упрощения выражения в его левой части используется вспомогательная задача на преобразование, имеющая цель "нормИнтеграл". Идентификация $f(a^{h(x)})$ в правой части антецедента происходит при участии указателя "новаргумент(x6 x23 извлечение)". Далее третий антецедент выполняет рекурсивное обращение к оператору "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Гиперболические функции.

Приемы аналогичны приемам для тригонометрических замен.

i. Простейшие замены.

$\forall_{afgh}(\int((x^2-1)^{(a-1)/2}f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int((\operatorname{sh} x)^a f(\operatorname{ch} x)/g(\operatorname{ch} x))dx = \lambda_x(h(\operatorname{ch} x), x - \text{число}))$

$\forall_{afgh}(\int((x^2+1)^{(a-1)/2}f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int((\operatorname{ch} x)^a f(\operatorname{sh} x)/g(\operatorname{sh} x))dx = \lambda_x(h(\operatorname{sh} x), x - \text{число}))$

$\forall_{afgh}(\int(f(x)/((x^2-1)^{(a+1)/2}g(x)))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int(f(\operatorname{ch} x)/((\operatorname{sh} x)^a g(\operatorname{ch} x)))dx = \lambda_x(h(\operatorname{ch} x), x - \text{число}))$

$\forall_{afgh}(\int(f(x)/((x^2+1)^{(a+1)/2}g(x)))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int(f(\operatorname{sh} x)/((\operatorname{ch} x)^a g(\operatorname{sh} x)))dx = \lambda_x(h(\operatorname{sh} x), x - \text{число}))$

Переменная a идентифицируется с нечетной целочисленной константой. Если в первых двух случаях $f(\ldots)$ представляет собой натуральную степень соответствующей гиперболической функции, показатель которой меньше a, то прием блокируется. Аналогично, если в последних двух случаях $f(\ldots)$ есть натуральная степень соответствующей гиперболической функции и показатель ее не больше a, то прием блокируется. Уровни срабатывания равны 2.

$\forall_{fghp}(g(x)/(\operatorname{ch} x)^2 = h(\operatorname{th} x)\ \&\ \int(f(x)/h(x))dx = \lambda_x(p(x), x - \text{число}) \to \int(f(\operatorname{th} x)/g(x))dx = \lambda_x(p(\operatorname{th} x), x - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afh}(\int(f(x)/\sqrt{x^2-1})dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int f(\operatorname{ch} x)dx = \lambda_x(h(\operatorname{ch} x), x - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 7.

ii. Замены с гиперболическим тангенсом.

$\forall_{fgh}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}) = \lambda_x(g(\operatorname{th} x), x - \text{число})\ \&\ \int(g(x)/(1-x^2))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(h(\operatorname{th} x), x - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{fgh}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}) = \lambda_x(g(\operatorname{th}(x/2)), x - \text{число})\ \&\ \int(g(x)/(1-x^2))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(2h(\operatorname{th}(x/2)), x - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 6.

(e) Логарифмическая функция.

i. Простейшая замена.

$\forall_{fghuv}(\lambda_x(g(x)/(h(x)(df(x)/dx)), x - \text{число}) = \lambda_x(u(\ln f(x)), x - \text{число})\ \&\ \int u(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число}) \to \int(g(x)/(f(x)h(x)))dx = \lambda_x(v(\ln f(x)), x - \text{число}))$

Переменные f, g, h функциональные. Выражение $f(x)$ идентифицируется с некоторым сомножителем знаменателя, причем проверяется наличие в подынтегральном выражении логарифма, внутри которого расположено $f(x)$. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение под описателем "отображение" в его левой части обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Идентификация $u(\ln f(x))$ происходит с помощью указателя "новаргумент(x20 x23 извлечение)". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abfg}(\int \exp x f((\exp x - b)/a)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow \int f(x)dx = \lambda_x(g(\ln(ax + b))/a, x - \text{число}))$

Указатель "контекст(подчинено(x3 фикс(0 1 1 3))вид(x3 логарифм(e плюс(умножение(x1 x23)x2)))не(алгебрвхождение(фикс(0 1 1 3))единица(1 x1)единица(0 x2)заменазнака(минус x1)))" определяет начало идентификации с усмотрения внутри подынтегрального выражения терма $\ln(ax+b)$, вхождение которого не достижимо из корня переходами через операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "модуль"и через основания степеней. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{afgh}(\int(f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \rightarrow \int(f(\ln(ax))/(xg(\ln(ax))))dx = \lambda_x(h(\ln(ax)), x - \text{число}))$

Указатель "контекст(подчинено(x4 фикс(0 1 1 3))вид(x4 умножение(x1 x23)))" определяет идентификацию a путем усмотрения в подынтегральном выражении терма ax. Далее указатели "новаргумент(x6 x23 извлечение)", "новаргумент(x7 x23 извлечение)" определяют идентификацию $f(\ln(ax))$, $g(\ln(ax))$. Уровень срабатывания равен 4.

ii. Замена через длинный логарифм.

$\forall_{afghu}(\lambda_x(f(x)/g(x), x - \text{число}) = \lambda_x(h(\ln(x + \sqrt{x^2 + a})), x - \text{число}) \ \& \ \int h(x)dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \rightarrow \int(f(x)/(g(x)\sqrt{x^2 + a}))dx = \lambda_x(u(\ln(x + \sqrt{x^2 + a})), x - \text{число}))$

Проверяется, что под интегралом встречается символ "логарифм". Уровень срабатывания равен 2.

iii. Замена через высокий логарифм.

$\forall_{afghu}(0 < a \ \& \ \lambda_x(f(x)/g(x), x - \text{число}) = \lambda_x(h(\ln|(\sqrt{a}+x)/(\sqrt{a}-x)|), x - \text{число}) \ \& \ \int h(x)dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \rightarrow \int(f(x)/(g(x)(a - x^2)))dx = \lambda_x(u(\ln|(\sqrt{a} + x)/(\sqrt{a} - x)|)/(2\sqrt{a}), x - \text{число}))$

Аналогично предыдущему.

(f) Замена для суммы функций.

$\forall_{fghuvw}(du(y)/dy - f(y) = 0 \ \& \ \lambda_y(g(y)/h(y), y - \text{число}) = \lambda_y(v(u(y)), y - \text{число}) \ \& \ \int v(y)dy = \lambda_y(w(y), y - \text{число}) \rightarrow \int((f(y)g(y))/h(y))dy = \lambda_y(w(u(y)), y - \text{число}))$

Переменные f, g, h функциональные. При этом $f(y)$ идентифицируется с содержащим y множителем числителя, имеющим вид суммы. Указатель "контекст(...)" определяет идентификацию внутри подынтегрального выражения также суммы $u(y)$, отличной от $f(y)$. Первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", проверяет, что производная $u(y)$ равна $f(y)$. Второй антецедент, используя указатель "новаргумент(x21 x24 извлечение)", идентифицирует $v(u(y))$. В процессе применения приема проверяются следующие условия: (a) неверно, что числитель и знаменатель подынтегрального выражения приводятся к виду многочленов от y, (б) $u(y)$ не приводится к виду многочлена от y (в) выражение $u(y)$ не содержит степени с дробным показателем, основание которой зависит от y, (г) не менее двух слагаемых выражения $u(y)$ содержат y, (д) если в $u(y)$ встречается натуральная степень содержащего y выражения, причем показатель m ее не менее 3, то в $f(y)$ должна найтись натуральная степень того же выражения, показатель которой не менее $m-1$. Последняя проверка ускоряет отсечение и применяется до сравнительно трудоемкой обработки первого антецедента. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Арктангенс.

$\forall_{fghu}(\lambda_x(f(x)/g(x), x - \text{число}) = \lambda_x(h(\operatorname{arctg} x), x - \text{число})\ \&\ \int h(x)dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \to \int(f(x)/(g(x)(1+x^2)))dx = \lambda_x(u(\operatorname{arctg} x), x - \text{число}))$

Подынтегральное выражение должно содержать символ "арктангенс". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfg}(\neg(a = 0)\ \&\ \int(f((\operatorname{tg} x - b)/a)/(\cos x)^2)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(g(\operatorname{arctg}(ax+b))/a, x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения под интегралом вхождения выражения $\operatorname{arctg}(ax+b)$, не достижимого из корня переходами через операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "модуль"и через основания степеней. Подынтегральное выражение во втором антецеденте упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 4.

(h) Арксинус.

$\forall_{fghu}(\lambda_x(f(x)/g(x), x - \text{число}) = \lambda_x(h(\arcsin x), x - \text{число})\ \&\ \int h(x)dx = \lambda_x(u(x), x - \text{число}) \to \int(f(x)/(g(x)\sqrt{1-x^2}))dx = \lambda_x(u(\arcsin x), x - \text{число}))$

Подынтегральное выражение должно содержать символ "арксинус". Уровень срабатывания равен 2.

(i) Линейная замена.

$\forall_{abcfgh}(\neg(a = 0)\ \&\ \int((x-b)^c f((x-b)/a)/g((x-b)/a))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int(x^c f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(ax+b)/a^{c+1}, x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" определяет начало попытки применения приема с усмотрения под интегралом вхождения v выражения $ax+b$, где x не встречается в a, b и b не есть 0. Переменная c идентифицируется с натуральной константой, меньшей 6. Либо вхождение v не является алгебраическим (достижимым из корня подынтегрального выражения переходами через операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "модуль"и через основания степеней), либо каждое вхождение x в подынтегральное выражение является алгебраическим. Кроме того, должно выполняться одно из двух условий: (а) вхождение v не является алгебраическим, и каждое не алгебраическое вхождение x в подынтегральное выражение - только внутри двучленов, равных $ax+b$; (б) вхождение v является основанием степени, не имеющей своим показателем натуральную константу, не превосходящую c, причем это вхождение не размещено внутри логарифма либо обратной тригонометрической функции. Подынтегральное выражение второго антецедента упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfg}(\neg(a = 0)\ \&\ \int g(x - b/(2a))dx = \lambda_x(f(x), x - \text{число}) \to \int g(x)dx = \lambda_x(f(x + b/(2a)), x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" усматривает, что $g(x)$ имеет вид дроби, числитель которой можно преобразовать к многочлену от x, а знаменателем служит выражение вида $(ax^2 + b^x + c)^{n/2}$, быть может, домноженное на квадратный трехчлен px^2+qx+r, где (a, b) пропорционально (p, q). Целью применения приема является исключение линейных слагаемых в указанных трехчленах. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{afg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число})\ \&\ \neg(a = 0) \to \int f(ax)dx = \lambda_x(g(ax)/a, x-\text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения в подынтегральном выражении произведения ax. Здесь a - некоторое выражение, не содержащее x. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение является сомножителем произведения, делящегося на a. Замена переменной позволяет упростить подынтегральное выражение, отбросив множитель a при x. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(ax)dx = \lambda_x((f(0)x \text{ при } a = 0,\ \text{иначе } g(ax)/a), x - \text{число}))$

Аналогично предыдущему, но проверяется, что неочевидно условие $\neg(a = 0)$. Уровень срабатывания тот же.

$\forall_{afg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число}) \to \int f(a+x)dx = \lambda_x(g(a+x), x-\text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения в подынтегральном выражении суммы $x + a$, где a не содержит x. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение расположено внутри такой суммы. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(x/a)dx = \lambda_x(ag(x/a), x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения в подынтегральном выражении дроби x/a, где a не содержит x. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в подынтегральное выражение - числитель дроби, знаменатель которой делится на a. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(-x)dx = \lambda_x(-g(-x), x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения под интегралом терма $-x$. Проверяется, что перед каждым вхождением переменной x в подынтегральное выражение расположен минус. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afg}(h(x) = f(ax)\ \&\ \int h(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(ag(x/a), x - \text{число}))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения в подынтегральном выражении дроби px/ac, где a - переменная, отличная от x. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Проверяется, что каждое вхождение переменной a в результат $h(x)$ либо является обобщенным сомножителем последнего выражения (т.е. достижимо из корня через операции "минус", "умножение", "дробь", "модуль" и через основания степеней), либо расположено только под операциями "плюс", "умножение", "дробь", "минус". Уровень срабатывания равен 2.

(j) Модуль.

$\forall_{fg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(|x|)dx = \lambda_x(\text{sg}xg(|x|), x - \text{число}))$

Выражение $f(|x|)$ идентифицируется с указателем "новаргумент(x6 x23 извлечение)". Предварительно проверяется наличие под интегралом модуля содержащего x выражения, не являющегося суммой. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{fghn}(n - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{числитель}(n) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(n) - \text{even}) \ \& \int(f(x)/(x^n g(x)))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int(f(|x|)/(x^n g(|x|)))dx = \lambda_x(h(|x|), x - \text{число}))$

$\forall_{fghn}(n - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{числитель}(n) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(n) - \text{even}) \ \& \int(x^n f(x)/g(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int(x^n f(|x|)/g(|x|))dx = \lambda_x(h(|x|), x - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 3.

16. Интегрирование по частям.

$\forall_{fghuv}(\int(g(x)/u(x))dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \ \& \ \int(df(x)/dx)h(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число}) \to \int(f(x)g(x)/u(x))dx = \lambda_x(f(x)h(x) - v(x), x - \text{число}))$

В качестве $f(x)$ берется сомножитель числителя подынтегрального выражения. Знаменатель и остаточное произведение числителя могут вырождаться в единицу. Основанием степени выражения $f(x)$ (показатель ее должен быть натуральным и может вырождаться в единицу) должен служить логарифм, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс либо x. В последнем случае $g(x)$ не должно иметь своим сомножителем натуральную степень логарифма, арксинуса, арккосинуса, арктангенса либо арккотангенса. Перечисленные операции выделены здесь из-за того, что их дифференцирование позволяет перейти к "чисто алгебраическим" операциям. Если $f(x)$ имеет своим заголовком одну из указанных операций, причем либо в подынтегральное выражение не входит логарифм, либо в $f(x)$ не входит символ обратной тригонометрической функции, то дополнительно проверяется, что $h(x)$ не содержит логарифма и арктангенса. Уровень срабатывания равен 7. На той же самой теореме создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 8. Здесь перечисленные выше ограничения на выражение $f(x)$ отбрасываются, однако требуется, чтобы сущетсвовало вхождение переменной в $f(x)$, расположенное внутри логарифма, обратной тригонометрической операции либо в показателе степени. Проверяется отсутствие в $f(x)$ символа "интеграл".

17. Условное выражение под интегралом.

    $\forall_{abcfgpq}(\int(b(x)f(x)/c(x))dx = \lambda_x(p(x), x - \text{число})\ \&\ \int(b(x)g(x)/c(x))dx = \lambda_x(q(x), x - \text{число}) \to \int((f(x)\text{при } a,\ \text{иначе } g(x))b(x)/c(x))dx = \lambda_x((p(x) \text{ при } a, \text{иначе } q(x)), x - \text{число}))$

    Уровень срабатывания равен 3.

18. Разбор случаев по комментарию "нормили".

    Напомним, что в разделе, посвященном замене переменной при интегрировании дифференциального бинома, имелся прием, вводящий комментарий (нормили или(A B)) для разбора случаев по выполнению условий A и B. На достаточно высоком уровне срабатывает прием, учитывающий наличие этого комментария и реализующий определяемый им разбор случаев:

    $\forall_{afghi}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число})\ \&\ i = \lambda_x(f(x), x - \text{число})\ \&\ \int i(x)dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x((g(x) \text{ при } a,\ mbox\ h(x)), x - \text{число}))$

    Указатель "контекст(комментарий(нормили х3)вид(х3 или(х1 х2)))" определяет начало попытки применения приема при усмотрении комментария (нормили или(a b)). Антецеденты выделены указателями "идентификатор". При вычислении первого интеграла нормализатору "нормИнтеграл" передается дополнительная посылка a, при вычислении второго - посылка b. Вспомогательная переменная i, дублирующая переменную f, введена из чисто технических соображений: нужно было как-то адресовать одни нормализаторы первому интегралу, а другие - второму. Для идентичных интегралов это сделать невозможно. Уровень срабатывания равен 7.

19. Интегрирование при помощи разложения в ряд. Для формального интегрирования путем разложения подынтегрального выражения в ряд Тейлора служит нормализатор "интегряд", который описывается далее. Обращение к нему обеспечивается следующим приемом:

    $\forall_{fg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}))$

    Антецедент выделен указателем "идентификатор", и его левая часть обрабатывается нормализатором "интегряд". При решении дифференциальных уравнений данный прием пока блокируется. Блокируется он также на некоторых промежуточных этапах интегрирования, выполняемых описанными выше приемами. Уровень срабатывания равен 9.

1.4.2 Вспомогательные нормализаторы, применяемые при формальном интегрировании

Нормализатор упрощения первообразной "стандинтеграл"

В процессе интегрирования возникает множество промежуточных результатов, которые нужно своевременно упрощать, иначе появляются чрезмерно громоздкие записи. Обычно эти результаты расположены в правой части тождества для вычисляемого интеграла, где объединяются найденные значения вспомогательных интегралов либо предпринимается подстановка в такое значение. Промежуточные упрощения приходится делать достаточно часто, и применение вспомогательных задач на преобразование существенно увеличивает трудоемкость вычислений. Поэтому вместо них используется специальный нормализатор "стандинтеграл". В него вошли как дубликаты некоторых простейших приемов общей стандартизации, так и приемы, ориентированные на специфические подвыражения, появляющиеся при интегрировании. При обращении к нормализатору вводится комментарий (переменная x), указывающий переменную интегрирования. Перечислим приемы нормализатора, приводя в очевидных случаях лишь название приема:

1. Стандартизация сумм.

   (a) Устранение вложенных сумм.

   (b) Сложение с нулем.

   (c) Сложение десятичных констант.

   (d) Приведение подобных членов.
   $\forall_{abc}(ab + ac = (b + c)a)$
   На этой теореме созданы три версии приема. Первая срабатывает на уровне 2 и применяется, если a не константа, а b, c - константы. Вторая версия срабатывает на уровне 3 и применяется, если переменная интегрирования входит в a и не входит в b, c. Наконец, третья версия применяется, если a имеет своим множителем степень с дробным показателем, арктангенс либо логарифм, содержащие переменную интегрирования, а b, c не имеют таких множителей. Она тоже срабатывает на уровне 3.

   (e) Отбрасывание константных слагаемых корневой суммы.
   $\forall_{ab}(a + b = a)$
   Здесь b идентифицируется с невырожденной суммой всех слагаемых, не содержащих переменной интегрирования. Преобразуемая сумма должна располагаться только под операциями "плюс", "минус". Прием блокируется комментарием "вспомпреобразование", означающим, что данное обращение к нормализатору "стандинтеграл" - рекурсивное и имело место из него самого для упрощения некоторого подтерма.
   $\forall_{abc}((a + b)/c = a/c)$
   Аналогично предыдущему. Переменная интегрирования не входит в c. Уровни срабатывания обоих приемов равны 1.

2. Стандартизация степеней.

   (a) Повторное возведение в степень.
   $\forall_{abc}((a^b)^c = a^{bc})$
   Если b - дробь с четным числителем, а c - дробь с четным знаменателем, то прием блокируется.
   $\forall_{abc}(b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \text{знаменатель}(c) - \text{even} \to |a|^{bc})$
   Уровень срабатывания приемов равен 1.

(b) Минус в показателе степени.
$\forall_{ab}(a^{-b} = 1/a^b)$
Уровень срабатывания равен 1.

(c) Упрощение суммы дробей под радикалом при помощи рекурсивного обращения к нормализатору "стандинтеграл".
$\forall_{abcde}(c = e(a/b)^2 + d \to \sqrt{e(a/b)^2 + d} = \sqrt{c})$
Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "стандинтеграл", которому передается комментарий "вспомпреобразование". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Сложение дробей под радикалом.
$\forall_{abcd}(\sqrt{a/d^2 + b/d + c} = \sqrt{cd^2 + bd + a}/|d|)$
Заменяющий терм обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Степень дроби.
$\forall_{ab}((a/\sqrt{b})^2 = a^2/b)$
Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{abc}(a - \text{rational} \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \to (b/c)^a = b^a/c^a)$
$\forall_{abc}(0 \leq a \;\&\; 0 \leq b \to (a/b)^c = a^c/b^c)$
Уровни срабатывания равны 2.

(f) Степень произведения.
$\forall_{abc}(a - \text{rational} \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \to (bc)^a = b^a c^a)$
Уровень срабатывания равен 2.

3. Стандартизация логарифмов.

(a) Разность либо сумма логарифмов.
$\forall_{abcdef}(f \ln|a/b + c| - f \ln|e/b + d| = f \ln|(a + bc)/(e + db)|)$
Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{abc}(a \ln|b| - a \ln|c| = a \ln|b/c|)$
$\forall_{abc}(a \ln|b| - a \ln c = a \ln|b/c|)$
$\forall_{abc}(a \ln b - a \ln|c| = a \ln|b/c|)$
Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{abcmn}(m \ln|a/b^{n/m} + c| + n \ln|b| = m \ln|a + cb^{n/m}|)$
Уровень срабатывания равен 4.

(b) Факторизация суммы под логарифмом.
$\forall_{ab}(b = a \to a = b)$
Переменная a идентифицируется с суммой, расположенной внутри логарифма. Антецедент выделен указателем "идентификатор" и обращается к нормализатору "факторизация", снабженному комментарием "стандинтеграл". Проверяется, что результат b, с точностью до отбрасывания минуса, представляет собой произведение. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Константный множитель под логарифмом.

$\forall_{abc}(\ln|ab/c| = \ln|b/c|)$

$\forall_{abc}(\ln|b/ac| = \ln|b/c|)$

$\forall_{abc}(\ln(ab/c) = \ln|b/c|)$

$\forall_{abc}(\ln(b/ac) = \ln|b/c|)$

$\forall_{abc}(0 < a \to \ln(ab/c) = \ln(b/c))$

Приемы совмещают вынесение из-под логарифма константного множителя и отбрасывание константного слагаемого первообразной. Переменная интегрирования не входит в a. Внешние операции, под которыми может размещаться текущее вхождение логарифма, - только "плюс", "минус", "умножение", "дробь". В последнем случае логарифм должен находиться в числителе дроби. В случае операций "умножение", "дробь" остальные операнды не должны содержать переменной интегрирования. Проверяется отсутствие комментария "вспомпреобразование". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Логарифм частного.

$\ln(1/a) = -\ln a$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(\ln|(c\sqrt{a^2+b}+ca)/(c\sqrt{a^2+b}-ca)| = 2\ln|\sqrt{a^2+b}+a|)$

$\forall_{abc}(\ln|(c\sqrt{a^2+b}-ca)/(c\sqrt{a^2+b}+ca)| = 2\ln|\sqrt{a^2+b}-a|)$

Выражение b не содержит переменной интегрирования. В остальном ограничения аналогичны предыдущему пункту. Внешние операции, под которыми может размещаться текущее вхождение логарифма, - только "плюс", "минус", "умножение", "дробь". В последнем случае логарифм должен находиться в числителе дроби. В случае операций "умножение", "дробь" остальные операнды не должны содержать переменной интегрирования. Проверяется отсутствие комментария "вспомпреобразование". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Логарифм степени.

$\forall_{ab}(\ln(a^b) = b\ln|a|)$

Уровень срабатывания равен 4.

(f) Переход к разности либо сумме кубов под логарифмом.

$\forall_{ab}(\ln(a^2+ab+b^2) = \ln|a^3-b^3| - \ln|a-b|)$

$\forall_{ab}(\ln(a^2-ab+b^2) = \ln|a^3+b^3| - \ln|a+b|)$

Преобразуемое выражение уже содержит: в первом случае - $\ln|a-b|$, а во втором - $\ln|a+b|$. При этом либо a, либо b имеет своим обобщенным множителем степень, показатель которой есть дробь со знаменателем 3. Уровень срабатывания равен 3.

Для случая дробного a созданы еще два приема:

$\forall_{abc}(\ln(a^2/b^2 - ac/b + c^2) = \ln|a^3/b^3 + c^3| - \ln|a/b + c|)$

$\forall_{abc}(\ln(a^2/b^2 + ac/b + c^2) = \ln|a^3/b^3 - c^3| - \ln|a/b - c|)$

Здесь требуется, чтобы преобразуемое выражение содержало, соответственно, $\ln|a/b+c|, \ln|a/b-c|$. Остальное аналогично предыдущему.

4. Стандартизация дробей.

(a) Деление дроби.

$\forall_{abc}((a/b)/c = a/(bc))$

Уровень срабатывания равен 1.

(b) Сложение дробей.

$\forall_{abcdefgh}(g = bf + de \ \& \ h = df \to ab/(cd) + ae/(cf) = ag/(ch))$

Переменная интегрирования не входит в выражения b, d, e, f и входит в a либо в c. Антецеденты выделены указателем "идентфикатор". Первый из них пытается разложить g на множители при помощи нормализатора "видумножение". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcd}(ab + bc/d = (ad + c)b/d)$

Переменная интегрирования не входит в a, c, d но входит в b. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdefgh}((ab/c + d)/e + (bf + h)/g = ab/(ce) + d/e + bf/g + h/g)$

Выражения a, c, e, f, g константные, выражение b не константное. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(a/c + b/c = (a + b)/c)$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdef}(a/(d(b + c)^f) + e/(d(b - c)^f) = (a(b - c)^f + e(b + c)^f)/(d(b^2 - c^2)^f))$

Переменная f идентифицируется с натуральной константой, меньшей 4. В числителе результирующей дроби раскрываются скобки. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcde}(e = a/b + c/(bd) \to a/b + c/(bd) = e)$

Выражение b представляет собой сумму, некоторый сомножитель слагаемого которой представляет собой квадратный корень из суммы. Антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обращается к нормализатору "видумножение". Проверяется, что результат e оказался короче исходного выражения. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Сокращение дробей.

$\forall_{abcde}(ab^d/(eb^c) = ab^{d-c}/e)$

$\forall_{abc}(ab/(ac) = b/c)$

$\forall_{abcdef}(e(a - b)^c/(f(b - a)^d) = e(a - b)^{c-d}(-1)^d/f)$

Уровень срабатывания приемов равен 1. Напомним, что во втором приеме компилятор использует специальную процедуру "алгебрпересечение" для определения общего множителя a, который может оказаться и неявным.

(d) Факторизация числителя и знаменателя.

$\forall_{abcde}(e = a + b \to (a + b)d/c = de/c)$

При идентификации допускается переворачивание дроби. Антецедент обращается к нормализатору "факторизация". Результат e представляет собой произведение. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Сложение дробей в знаменателе либо числителе.

$\forall_{abcdef}(e/(c(a/b + d)^f) = eb^f/(c(a + bd)^f))$

$\forall_{abcde}((a/b + d)e/c = ae/bc + de/c)$

Уровень срабатывания равен 1.

(f) Перегруппировка слагаемых в дробях.
$\forall_{abcdefg}(a(bg+d)/c+eg/f=g(abf+ce)/cf+ad/c)$
Переменная интегрирования не входит в c,f. Выражение g имеет содержащий переменную интегрирования сомножитель, представляющий собой степень с дробным показателем, либо арктангенс, либо логарифм. При этом выражение a не должно иметь такого сомножителя. Выражение d не является подвыражением выражения g. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Исключение переменной интегрирования из множителя знаменателя путем преобразования этого множителя к виду разности кубов.
$\forall_{abcde}(e=a^3-b^3\to c/(d(a^2+b(a+b)))=c(a-b)/(de))$
Выражения a,b суть кубические радикалы, содержащие переменную интегрирования. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации, и результат e не зависит от переменной интегрирования. Уровень срабатывания равен 4.

5. Стандартизация произведений.

(a) Вложенные умножения.

(b) Умножение на единицу.

(c) Умножение на дробь.
$\forall_{abc}(a(b/c)=(ab)/c)$

(d) Перемножение степеней с общим основанием.
$\forall_{abc}(a^b a^c=a^{b+c})$
Блокируется умножение натуральной константы на ее же дробную степень.

(e) Вынесение наружу минуса из сомножителей.

(f) Произведение суммы на разность.
$\forall_{abc}((a-b)^c(a+b)^c=(a^2-b^2)^c)$
В основании результирующей степени выполняется раскрывание скобок. Уровень срабатывания равен 4.

(g) Раскрывание скобок.
$\forall_{abcd}(a(b+c/(ad))=ab+c/d)$
Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{abcdef}(f=a(b+c)^e+d\to a(b+c)^e+d=f)$
Выражение d не тождественный нуль. Либо a, либо e отлично от единицы. При этом показатель степени e - 1,2 либо 3. Переменная интегрирования входит в $b+c$. Выражение a не имеет своим сомножителем дробную степень, арктангенс либо логарифм, зависящие от переменной интегрирования. Антецедент выделен указателем "идентификатор" и обращается к нормализатору раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 2.

(h) Внесение множителя под корень.
$\forall_{abc}(a^c\sqrt{b/a}=a^{c-1}\sqrt{ab}\cdot \mathrm{sg}(a))$
Переменная c идентифицируется с натуральной константой.

6. Сигнум.

   $\forall_{ab}(\mathrm{sg}(a\sqrt{b}) = \mathrm{sg}(a))$

   $\forall_{ab}(\mathrm{sg}(a/b) = \mathrm{sg}(ab))$

   $\forall_{abcd}(\mathrm{sg}(a)((b\mathrm{sg}(a))/d + c) = b/d + c\mathrm{sg}(a))$

   $\forall_{a}((\mathrm{sg}(a))^2 = 1)$

   $\forall_{ab}(a - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(a) - \text{even} \rightarrow (\mathrm{sg}(b))^a = 1)$

   $\forall_{ab}(a - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(a) - \text{even} \rightarrow \mathrm{sg}(b^a) = 1)$

   $\forall_{a}(0 \leq a \rightarrow \mathrm{sg}(a) = 1)$

   $\forall_{a}(a \leq 0 \rightarrow \mathrm{sg}(a) = -1)$

   $\forall_{a}(a\mathrm{sg}(a) = |a|)$

   Уровень срабатывания приемов равен 1.

   Следующий прием предпринимает попытку сложить дроби в выражении под сигнумом:

   $\forall_{ab}(b = a \rightarrow \mathrm{sg}(a) = \mathrm{sg}(b))$

   Внтури a должна находиться сумма с дробным слагаемым, причем эта сумма должны быть достижима из корня a переходами только через операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "модуль" и через основания степеней. Антецедент обращается к нормализатору "видумножение". Уровень срабатывания равен 3.

7. Модуль.

   $\forall_{a}(|-a| = |a|)$

   $\forall_{a}(|a|\mathrm{sg}(a) = a)$

   $\forall_{abc}(ba^d/(c|a|) = ba^{d-1}\mathrm{sg}(a)/c)$

   Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{a}(\ln|a| = \ln a)$

   Прием применяется, если преобразуемое выражение уже содержит $\ln a$ либо радикал четной степени от a. По умолчанию, предполагается отсутствие условных выражений. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcde}(((bc)^2 - ad^2)/(b^2) = e \rightarrow \ln|\sqrt{a}d/|b| + c|\mathrm{sg}(b) = \ln|(d\sqrt{a} + bc)/b|)$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. При этом выражение e не содержит переменной интегрирования. Заменяемое и заменяющее выражения при $b < 0$ различаются на величину $\ln|e|$, а при $0 < b$ совпадают. Таким образом, прием может сместить результат на константу. Чтобы это привело к изменению на константу всей первообразной, ограничиваются надоперации: допускаются только "плюс", "минус", "дробь", "умножение", причем в последних случаях дополнительные операнды не должны содержать переменной интегрирования. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abcde}(((bc)^2 - ad^2)/(b^2) = e \rightarrow \ln(\sqrt{a}d/|b| + c)\mathrm{sg}(b) = \ln|(d\sqrt{a} + bc)/b|)$

   Аналогично предыдущему.

$\forall_a(0 \le a \to |a| = a)$

$\forall_{abc}(|(b-a)/c| = |(a-b)/c|)$

Последний прием применяется, если все слагаемые выражения b имеют знак "минус". Таким образом, происходит просто отбрасывание всех минусов перед слагаемыми числителя. Указатель "дробь" разрешает применение приема к знаменателю вместо числителя. Уровни срабатывания двух последних приемов равны 3.

8. Тригонометрические преобразования.

   (a) Арктангенс.

   $\forall_a(\operatorname{arctg}\operatorname{tg} a = a)$

   Так как результат может быть смещен на константу, добавляются стандартные фильтры, обеспечивающие смещение на константу всей первообразной.

   $\forall_{abc}(\operatorname{arctg}(a/(|b|c)) = \operatorname{sg}(b)\operatorname{arctg}(a/(bc)))$

   Уровни срабатывания этого и предыдущего приемов равны 1.

   $\forall_{ab}(\operatorname{arctg}(a\sqrt{b}) = -\operatorname{sg}(\arcsin((1-a^2b)/(1+a^2b))/2))$

   Выражение b неконстантное. Так как результат может быть смещен на константу, добавляются соответствующие фильтры. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Переход к логарифму модуля тангенса.

   $\forall_a(\ln((1-\cos a)/(1+\cos a)) = 2\ln|\operatorname{tg}(a/2)|)$

   $\forall_a(\ln((1+\cos a)/(1-\cos a)) = -2\ln|\operatorname{tg}(a/2)|)$

   $\forall_a(\ln((1+\sin a)/(1-\sin a)) = 2\ln|\operatorname{tg}(a/2+\pi/4)|)$

   $\forall_a(\ln((1-\sin a)/(1+\sin a)) = -2\ln|\operatorname{tg}(a/2+\pi/4)|)$

   Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Синус арктангенса.

   $\forall_a(\sin\operatorname{arctg} a = a/\sqrt{a^2+1})$

   Уровень срабатывания этого и следующего приемов равен 1.

   (d) Косинус арктангенса.

   $\forall_a(\cos\operatorname{arctg} a = 1/\sqrt{a^2+1})$

   (e) Тангенс.

   $\forall_{abcd}(c/((\operatorname{tg} a)^b d) = c(\operatorname{ctg} a)^b/d)$

   $\forall_{abc}((a\operatorname{tg} b - a)/(c\operatorname{tg} b + c) = a\operatorname{tg}(b-\pi/4)/c)$

   $\forall_{abc}((a\operatorname{tg} b + a)/(c\operatorname{tg} b - c) = a\operatorname{tg}(b+\pi/4)/c)$

   Уровень срабатывания приемов равен 1.

   $\forall_{ab}(a + a(\operatorname{tg} b)^2 = a/(\cos b)^2)$

   Уровень срабатывания равен 2.

   (f) Разность тангенса и котангенса.

   $\forall_{abc}(a\operatorname{tg} b - a\operatorname{ctg} b = -2a\operatorname{ctg}(2b))$

   (g) Сумма логарифмов косинуса и тангенса.

   $\forall_{ab}(2a\ln|\cos b| + a\ln\operatorname{tg} b = a\ln(\sin(2b)/2))$

   Уровень срабатывания равен 3.

9. Минус.

   $\forall_a(--a=a)$

   $\forall_{ab}((-a)/b=-(a/b))$

   $\forall_{ab}(-a-b=-(a+b))$

   Последний прием применяется к сумме произвольного числа слагаемых, у которой каждое слагаемое имеет знак "минус". Уровни срабатывания равны 1.

10. Условные выражения.

    $\forall_{abcdP}(a(b \text{ при } P, \text{ иначе } c)+d(e \text{ при } P, \text{ иначе } f)=(ab+de \text{ при } P, \text{ иначе } ac+df))$

    Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор "упрощинтеграл"

В то время как предыдущий нормализатор обрабатывал результат интегрирования, данный нормализатор используется для предварительной простейшей обработки подынтегрального выражения. Обычно он применяется при сведении одного интеграла к другому. Нормализатор невелик, и в описаниях предшествующих приемов обращения к нему даже не были упомянуты. Приемы его, в основном, связаны с различными редко встречающимися частными случаями.

1. Приведение подобных членов. Под коэффициентами здесь понимаются произведения всех сомножителей, не содержащих переменной интегрирования.

2. Переход к разности квадратов под радикалом.

   $\forall_{ab}(\sqrt{(a-b)(a+b)}=\sqrt{a^2-b^2})$

   Переменная интегрирования входит в одно из выражений a, b и не входит в другое. Уровень срабатывания равен 1.

3. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

   $\forall_{abcd}(bd/(\sqrt{a^2-b^2}c)-ad/(\sqrt{a^2-b^2}c)=d(b-a)/(\sqrt{(a-b)(a+b)}c))$

   $\forall_{abcd}(ad/(\sqrt{a^2-b^2}c)-bd/(\sqrt{a^2-b^2}c)=d(a-b)/(\sqrt{(a-b)(a+b)}c))$

   $\forall_{abcd}(ad/(\sqrt{a^2-b^2}c)+bd/(\sqrt{a^2-b^2}c)=d(a-b)/(\sqrt{(a+b)(a+b)}c))$

   $\forall_{abcdep}(p=c+\sqrt{(a+b)d}\rightarrow ae/p+be/p=(a+b)e/p)$

   В последнем приеме антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания всех приемов равны 2.

4. Перемножение радикалов с вынесением полного квадрата.

   $\forall_{abc}(c\sqrt{a/c}\sqrt{b/c}=\mathrm{sg}(c)\sqrt{ab})$

   Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор "интегряд" вычисления первообразной путем разложения в ряд подынтегрального выражения

Нормализатор получает в качестве входных данных выражение $\int f(x)dx$ и предпринимает попытку разложить подынтегральное выражение в степенной ряд или хотя бы разложить в ряд часть его слагаемых. Затем происходит почленное интегрирование ряда и интегрирование остаточного выражения.

1. Обращение к нормализатору "рядтейлора".

   $\forall_{abfghkmn}(f(x) = g(x) + \sum_{i=n}^{\infty}(a(i)x^{ki+m}/b(i))\ \&\ \int g(x)dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число})\ \&\ \neg(\exists_i(i - \text{целое}\ \&\ n \le i\ \&\ ki + m = -1))\ \&\ \text{одз}(f(x)) \to \int f(x)dx = \lambda_x(h(x) + \sum_{i=n}^{\infty}(a(i)x^{ki+m+1}/(b(i)(ki + m + 1))), x - \text{число}))$

   Первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обращается к нормализатору "рядтейлора", передавая ему комментарий "интегряд". Данный комментарий разрешает выдачу результата, если разложить в ряд удалось лишь часть слагаемых. Таким образом появляется "остаточное" выражение $g(x)$. Второй антецедент выполняет интегрирование этого остаточного выражения. Третий антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Он убеждается в отсутствии членов ряда, у которых степень при x равна минус единице. Четвертый антецедент тоже обрабатывается задачей на доказательство. Он проверяет, что в малой положительной окрестности нуля функция $f(x)$ определена. Собственно, с проверки этого антецедента (введен лимит ее трудоемкости) и начинается реализация приема. Уровень срабатывания равен 1. Для случая, когда ряд имеет минус первую степень переменной, создан отдельный прием:

   $\forall_{abfghkmn}(f(x) = g(x) + \sum_{i=n}^{\infty}(a(i)x^{ki+m}/b(i))\ \&\ \int g(x)dx = \lambda_x(h(x), x - \text{число})\ \&\ (ki + m = -1\ \&\ i - \text{целое}\ \&\ n \le i) = (i = p)\ \&\ \text{одз}(f(x)) \to \int f(x)dx = \lambda_x(h(x) + a(p)\ln|x|/b(p) + \sum_{i=n}^{p-1}(a(i)x^{ki+m+1}/(b(i)(ki+m+1))) + \sum_{i=p+1}^{\infty}(a(i)x^{ki+m+1}/(b(i)(ki + m + 1))), x - \text{число}))$

   Здесь третий антецедент выделен указателем "идентификатор", причем левая его часть разрешается относительно i с помощью вспомогательной задачи на описание. Остальные действия - аналогично предыдущему приему.

2. Замена переменной интегрирования на обратную.

   $\forall_{fg}(\text{одз}(f(x))\ \&\ \int(f(1/y)/y^2)dy = \lambda_y(g(y), y - \text{число}) \to \int f(x)dx = \lambda_x(-g(1/x), x - \text{число}))$

   Первый антецедент проверяет, что функция $f(x)$ определена в окрестности плюс-бесконечности. Второй антецедент обращается к нормализатору "интегряд" после упрощения подынтегрального выражения вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

3. Обработка суммы.

   $\forall_{afgpq}(\int(f(x)/h(x))dx = \lambda_x(p(x), x - \text{число})\ \&\ \int(g(x)/h(x))dx = \lambda_x(q(x), x - \text{число}) \to \int((f(x) + g(x))/h(x))dx = \lambda_x(p(x) + q(x), x - \text{число}))$

   Прием предпринимает попытку выделить слагаемое $f(x)$, для которого первый антецедент сумеет вычислить первообразную с помощью нормализатора "нормИнтеграл". Второй антецедент обращается к нормализатору "интегряд". Уровень срабатывания равен 1.

1.4.3 Применение процедуры вычисления неопределенных интегралов

Для обращения к процедуре "нормИнтеграл" из сканирования задачи служит следующий прием:

$\forall_{ab}(a = \int b \to \int b = a)$

Он применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Терм b должен иметь заголовок "отображение". Проверяется, что результат a отличен от b. Уровень срабатывания равен 1.

1.4.4 Вычисление определенных интегралов

Обращение к синтезатору "значениеинтеграла"

При вычислении определенного интеграла по его первообразной предпринимается предварительная обработка области интегрирования: из нее удаляются особые точки первообразной, и для представления результата в виде объединения промежутков (быть может, с использованием условных выражений) решается вспомогательная задача на описание. Затем используется синтезатор "значениеинтеграла", обрабатывающий каждый промежуток по отдельности и выполняющий необходимый разбор случаев. Нахождение первообразной, обработка области интегрирования и обращение к синтезатору выполняются следующим приемом:

$\forall_{abcfgp}(p = \mathrm{set}_x(x \in [a, b]\ \&\ \text{одз}(g(x)))\ \&\ \int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число})\ \&$ значениеинтеграла$(\lambda_x(g(x), x - \text{число}), p, c) \to \int_a^b f(x)dx = c)$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на преобразование либо на описание. Подынтегральное выражение не должно содержать символа "интеграл", т.е. сначала будут вычисляться определенные интегралы, расположенные внутри него. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормИнтеграл". Первый антецедент тоже выделен указателем "идентификатор". Конъюнкция под описателем "класс" в его правой части обрабатывается вспомогательной задачей на описание, разрешающей ее относительно неизвестной x. Затем сам описатель "класс" обрабатывается нормализаторами "нормкласс", "нормвариант". Последний антецедент реализует обращение к синтезатору "значениеинтеграла".

Прием блокируется в ряде особых случаев: при попытках быстрого решения задач, при программировании вычислений, и т.п. За исключением особых случаев, предпринимается проверка того, что $a \leq b$. Наконец, проверяется отсутствие под интегралом комплекснозначных операций. Уровень срабатывания равен 2.

Синтезатор "значениеинтеграла"

1. Интеграл на промежутке.

   Для замкнутого промежутка формула Ньютона-Лейбница дает следующий прием:

   $\forall_{abfyz}(a = f(y)\ \&\ b = f(z) \to$ значениеинтеграла$(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), [y, z], b - a))$

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор", их правые части обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование. Разность $b - a$ тоже обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Уровни обращения к первым двум задачам равны 6, к последней - 9. Если при обработке антецедентов усматривается противоречивость посылок, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2. Если концы промежутка (оба либо один) отброшены, то используется другая версия, в которой находятся односторонние пределы:

$\forall_{abcdefgx}(c = \lim_{x\to a+0} f(x)$ & $d = \lim_{x\to b-0} f(x)$ & $(c -$ число $\vee$ $c = \infty$ $\vee$ $c = -\infty)$ & $(d -$ число $\vee$ $d = \infty$ $\vee$ $d = -\infty) \to$ значениеинтеграла$(\lambda_x(f(x), x -$ число$), [a, b], (0$ при $b - a = 0,$ иначе $d - c)))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализатором "нормпредел". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Дополнительно проверяется, что c, d не оказались бесконечностями одного знака. Результирующее условное выражение упрощается с помощью задачи на преобразование. Уровень срабатывания приема равен 2.

2. Выделение промежутка из области интегрирования.

   $\forall_{abcdefgh}($непересек$((a, b), e)$ & значениеинтеграла$(f, [a, b], g)$ & значениеинтеграла$(f, e, h) \to$ значениеинтеграла$(f, [a, b] \cup e, g + h))$

   Промежуток $[a, b]$ рассматривается с произвольными допущениями о принадлежности концов. Первый антецедент проверяет непересечение его интервала с остаточными членами объединения. Он обрабатывается проверочным оператором. Второй и третий антецеденты реализуют рекурсивное обращение к синтезатору "значениеинтеграла". Проверяется, что результаты g, h не являются бесконечностями противоположных знаков. Уровень срабатывания равен 2. Если результаты суть бесконечности противоположных знаков, то результат считается не определенным:

   $\forall_{abcdefgh}($непересек$((a, b), e)$ & значениеинтеграла$(f, [a, b], g)$ & значениеинтеграла$(f, e, h) \to$ значениеинтеграла$(f, [a, b] \cup e,$ неопред$))$

   Уровень срабатывания равен 2.

3. Разбор случаев для области интегрирования.

   $\forall_{abcdef}($значениеинтеграла(a, b, c) & значениеинтеграла$(a, d, e) \to$ значениеинтеграла$(a, (b$ при $f,$ иначе $d), (c$ при $f,$ иначе $e)))$

   Антецеденты реализуют рекурсивные обращения к синтезатору, причем в первом случае вводится дополнительная посылка f, а во втором - $\neg(f)$.

   Если f имеет вид равенства, определяющего значение некоторой переменной x, то при неудачной попытке применения предыдущего приема будет предпринята попытка применить аналогичный прием, где a в первом антецеденте предварительно упрощается с учетом указанного равенства (предпринимается подстановка значения переменной x):

   $\forall_{abcdefg}(g = a$ & значениеинтеграла(g, b, c) & значениеинтеграла$(a, d, e) \to$ значениеинтеграла$(a, (b$ при $f,$ иначе $d), (c$ при $f,$ иначе $e)))$

   Первый антецедент обращается для упрощения выражения a к вспомогательной задаче на преобразование, которой передается дополнительная посылка f. Уровни срабатывания обоих приемов равны 1.

4. Пустая область интегрирования.

   $\forall_a$(значениеинтеграла$(a, \emptyset, 0)$)

   Уровень срабатывания равен 2.

5. Разбор случаев для условного выражения в первообразной.

   $\forall_{abcdef}$(значениеинтеграла($\lambda_x(b(x), x-$число$), a, c)$ & значениеинтеграла($\lambda_x(d(x), x-$число$), a, e) \rightarrow$ значениеинтеграла($\lambda_x((b(x)$ при $f,$ иначе $d(x)), x-$число$), a,$ $(c$ при $f,$ иначе $e)))$

   Антецеденты реализуют рекурсивные обращения к синтезатору, причем в первом случае берется дополнительная посылка f, во втором случае - $\neg(f)$. Уровень срабатывания равен 1.

6. Разбор случаев по условному выражению, определяющему предел первообразной в конце промежутка.

   Если попытка вычислить интеграл на промежутке не увенчалась успехом, причем односторонний предел первообразной в конце промежутка определялся условным выражением, то это условное выражение инициирует разбор случаев:

   $\forall_{abcdefghijkl}(\lim_{x \to a+0} f(x) = (i$ при $h,$ иначе $j)$ & значениеинтеграла($\lambda_x(f(x), x-$число$), [a, b], k)$ & значениеинтеграла($\lambda_x(f(x), x-$число$), [a, b], l) \rightarrow$ значениеинтеграла($\lambda_x(f(x), x-$число$), [a, b], (k$ при $h,$ иначе $l)))$

   $\forall_{abcdefghijkl}(\lim_{x \to b-0} f(x) = (i$ при $h,$ иначе $j)$ & значениеинтеграла($\lambda_x(f(x), x-$число$), [a, b], k)$ & значениеинтеграла($\lambda_x(f(x), x-$число$), [a, b], l) \rightarrow$ значениеинтеграла($\lambda_x(f(x), x-$число$), [a, b], (k$ при $h,$ иначе $l)))$

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он вычисляет значение одностороннего предела и идентифицирует результат с условным выражением. Фактически этот предел только что вычислялся другим приемом (см. "интеграл на промежутке"), и происходит извлечение его из буфера. Второй и третий антецеденты выполняют рекурсивное обращение к синтезатору. Используются дополнительные посылки $h, \neg(h)$. Уровень срабатывания приемов равен 3.

Усмотрение пустой области интегрирования

$\forall_{abf}(0 < a - b \rightarrow \int_a^b f(x)dx = 0)$

Предварительно проверяется неочевидность обратного неравенства. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 0.

Разбор случаев для пределов интегрирования

$\forall_{abcf}(c = \int_a^b f(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx = (c$ при $0 \leq b - a,$ иначе $0))$

Предварительно проверяется, что хотя бы одно из выражений a, b неконстантное и что не усматривается ни одно из неравенств $0 \leq b - a, \quad b - a \leq 0$. Антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обращается для вычисления интеграла к вспомогательной задаче на преобразование, которой передается дополнительная посылка $0 \leq b - a$. Прием применяется только в тех случаях, когда максимальный уровень текущей задачи больше 4. В задачах на описание, имеющих цель (связка

...), т.е. при решении дифференциальных уравнений, он блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

Совпадение верхнего и нижнего пределов интегрирования

$\forall_{af}(\int_a^a f(x)dx = 0)$

Уровень срабатывания равен 0.

Ноль под интегралом

$\forall_{ab}(\int_a^b 0 \ dx = 0)$

Уровень срабатывания равен 0.

Вынесение минуса за знак определенного интеграла

$\forall_{abf}(\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx)$

Уровень срабатывания равен 0.

Вынесение постоянного множителя за знак интеграла

$\forall_{abcfg}(\int_a^b cf(x)/g(x)dx = c\int_a^b f(x)/g(x)dx)$

$\forall_{abcfg}(\int_a^b f(x)/(cg(x))dx = (1/c)\int_a^b f(x)/g(x)dx)$

Уровень срабатывания равен 0.

Разбиение области интегрирования согласно условному выражению под интегралом

$\forall_{abcdefghjklrsP}(\mathrm{set}_x(x - \text{число} \ \& \ a < x \ \& \ x < b \ \& \ g(x)) = [c,d] \ \& \ \mathrm{set}_x(x - \text{число} \ \& \ a < x \ \& \ x < b \ \& \ \neg(g(x))) = [r,s] \to \int_a^b P((f(x) \text{ при } g(x), \text{ иначе } h(x)))dx = \int_c^d P(f(x))dx + \int_r^s P(h(x))dx)$

Указатель "вхождение(x40)" определяет идентификацию произвольного вхождения условного выражения в подынтегральное выражение. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Конъюнкции под описателями разрешаются относительно x с помощью вспомогательных задач на описание, и далее применяется нормализатор "нормкласс". Уровень срабатывания равен 1.

Отбрасывание условия под символом "вариант", нарушающегося либо выполняющегося лишь в конечном числе точек

Фактически рассматривается частный подслучай - указанное условие выполняется либо нарушается не более чем в одной точке:

$\forall_{abcdfgP}(\neg(c = 0) \to \int_a^b (f(x) \text{ при } \neg(cx + d = 0) \ \& \ P(x), \text{ иначе } g(x))dx = \int_a^b (f(x) \text{ при } P(x), \text{ иначе } g(x))dx)$

$\forall_{abcdfgP}(\neg(c = 0) \to \int_a^b (f(x) \text{ при } cx + d = 0 \ \& \ P(x), \text{ иначе } g(x))dx = \int_a^b g(x)dx)$

Уровень срабатывания равен 1.

Исключение условного выражения под интегралом

$\forall_{abcfg}(\int_a^b P((f(x) \text{ при } 0 < c - x, \text{ иначе } g(x)))dx = (\int_a^b P(f(x))dx \text{ при } 0 \leq c - b, \text{ иначе } (\int_a^c P(f(x))dx + \int_c^b P(g(x))dx \text{ при } 0 \leq c - a, \text{ иначе } \int_a^b P(g(x))dx)))$

$\forall_{abcfg}(\int_a^b P((f(x) \text{ при } x < c, \text{ иначе } g(x)))dx = (\int_a^b P(f(x))dx \text{ при } 0 \leq c - b, \text{ иначе } (\int_a^c P(f(x))dx + \int_c^b P(g(x))dx \text{ при } 0 \leq c - a, \text{ иначе } \int_a^b P(g(x))dx)))$

$\forall_{abcfg}(\int_a^b P((f(x) \text{ при } c < x, \text{ иначе } g(x)))dx = (\int_a^b P(g(x))dx \text{ при } 0 \leq c - b, \text{ иначе } (\int_a^c P(g(x))dx + \int_c^b P(f(x))dx \text{ при } 0 \leq c - a, \text{ иначе } \int_a^b P(f(x))dx)))$

Указатель "вхождение(x40)" определяет применение приема при усмотрении под интегралом некоторого вхождения условного выражения. Указатель "вариант(...)" разрешает нестрогие неравенства для c, x. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abcdfgP}(\int_a^b P((f(x) \text{ при } c < x \ \& \ x \leq d, \text{ иначе } g(x)))dx = (\int_a^c P(g(x))dx \text{ при } a < c, \text{ иначе } 0) + (\int_{\max(a,c)}^{\min(b,d)} P(f(x))dx \text{ при } \max(a,c) \leq \min(b,d), \text{ иначе } 0))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 1.

Раскрывание скобок в подынтегральном выражении

$\forall_{abfg}(g(x) = f(x) \ \& \ p = \int_a^b g(x)dx \to \int_a^b f(x)dx = p)$

Прием полезен в тех случаях, когда вычислить первообразную не удается, однако после раскрывания скобок в подынтегральном выражении возникает сумма определенных интегралов "стандартного" вида, для которых имеются формулы непосредственного определения их значения. Условием инициализации приема является наличие в числителе подынтегрального выражения сомножителя, имеющего вид натуральной степени суммы. Показателем этой степени может быть константа от 1 до 4. Первый антецедент обращается к нормализатору раскрывания скобок, второй - вычисляет определенный интеграл при помощи вспомогательной задачи на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

Переход к сумме интегралов

Этот прием дополняет предыдущий:

$\forall_{abcdfg}(\int_a^b f(x)dx = c \ \& \ \int_a^b g(x)dx = d \to \int_a^b (f(x) + g(x))dx = c + d)$

Интегралы в антецедентах вычисляются при помощи вспомогательных задач. Уровень срабатывания равен 3.

Стандартизация неравенства, определяющего промежуток интегрирования

$\forall_{ax}(0 \leq a - x \leftrightarrow x \leq a)$

$\forall_{ax}(0 \leq a + x \leftrightarrow -a \leq x)$

Преобразуемое неравенство относится к условиям описателя "отображение", расположенного под символом "интеграл", т.е. к условиям, задающим область интегрирования. x - переменная интегрирования, причем a не содержит x. Указатель "альтернатива(...)" допускает применение приема в случае строгого неравенства. Уровень срабатывания приемов равен 1.

Стандартизация условного выражения под интегралом

$\forall_{abcx}((a(x)$ при $c \le |x|,$ иначе $b(x)) = (b(x)$ при $-c < x$ & $x < c,$ иначе $a(x)))$

Условное выражение расположено под определенным интегралом, причем x - переменная интегрирования. Уровень срабатывания равен 1.

Несколько специальных случаев

$\forall_{fg}(\int_0^\pi (xf(\sin x)/g(\sin x))dx = \pi \int_0^\pi (f(\sin x)/g(\sin x))dx/2)$

Идентификация f, g обеспечивается указателями "новаргумент(x6 x23 извлечение)", "новаргумент(x7 x23 извлечение)". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{an}(0 < a$ & $0 < n+1 \to \int_0^\infty x^n/\exp(ax^2)dx = \Gamma((n+1)/2)/(2a^{(n+1)/2}))$

$\forall_{an}(0 < a$ & $0 < n+1 \to \int_0^\infty x^n \exp(-ax^2)dx = \Gamma((n+1)/2)/(2a^{(n+1)/2}))$

Уровень срабатывания равен 1.

1.4.5 Использование определенного интеграла для вычисления длины кривой

Кривая, заданная явным уравнением в прямоугольной системе координат

$\forall_{abfABKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(A, K) & $((y, x) \in A) = (y = f(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \le x$ & $x \le b$ & $x -$ число$) \to$ длина$(P) = \int_a^b \sqrt{1 + (df(x)/dx)^2}dx)$

$\forall_{abfABKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(A, K) & $((x, y) \in A) = (y = f(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \le x$ & $x \le b$ & $x -$ число$) \to$ длина$(P) = \int_a^b \sqrt{1 + (df(x)/dx)^2}dx)$

Кривая P рассматривается как множество точек, определяемых в прямоугольной системе координат K множеством A своих координат. Выражение "длина(P)" встречается в условии задачи. Первый антецедент берется в посылках, остальные - выделены указателем "идентификатор". Второй антецедент усматривает, что P задана выражением вида "точки$(A\ K)$". Таким образом идентифицируется A. Левая часть третьего антецедента разрешается относительно y с помощью вспомогательной задачи на описание. Указатели "новаяпеременная" уточняют, что x, y - вспомогательные новые переменные. Первый прием блокируется, если A уже явно разрешено относительно второй координаты, а второй - если оно явно разрешено относительно первой координаты. Последний антецедент проверяет, что условие на варьируемую координату сводится к принадлежности его промежутку. Указатели "вариант" разрешают случаи строгих неравенств для x. Заменяющий терм обрабатывается вспомогательными задачами на упрощение, так что обычно прием находит длину кривой сразу. Уровень срабатывания равен 3. Для трехмерного случая создан следующий прием:

$\forall_{abfgABKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(A, K) & $((x, y, z) \in A) = (y = f(x)$ & $z = g(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \le x$ & $x \le b$ & $x -$ число$) \to$
длина$(P) = \int_a^b \sqrt{1 + (df(t)/dt)^2 + (dg(t)/dt)^2}dx)$

Если A уже разрешено относительно второй либо третьей координаты, то прием блокируется. Третий антецедент использует задачу на описание с неизвестными y, z. В остальном - аналогично двумерному случаю.

Кривая распадается на несколько кривых

$\forall_{abfABKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(A, K) & set$_{xy}((x, y) \in A) = \bigcup_{i=1}^{n} B(i)$ & конечнпересчения$(B) \to$ длина$(P) = \sum_{i=1}^{n}$ длина(точки$(B(i), K)))$

$\forall_{abfABKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(A, K) & set$_{xyz}((x, y, z) \in A) = \bigcup_{i=1}^{n} B(i)$ & конечнпересчения$(B) \to$ длина$(P) = \sum_{i=1}^{n}$ длина(точки$(B(i), K)))$

Множество координат A задается описателем "класс", причем в первом случае длина связывающей приставки равна 2, а во втором случае - 3. Преобразуемое выражение входит в условие задачи. Первый антецедент берется в посылках, второй и третий - выделены указателем "идентификатор", последний - обрабатывается проверочным оператором. Утверждение под описателем "класс" в третьем антецеденте разрешается относительно y (во втором приеме - относительно y, z) с помощью такой же задачи на описание, как в приемах предыдущего пункта. Сначала ее решают приемы предыдущего пункта, так как их уровень срабатывания меньше. Здесь же готовый результат извлекается из буфера. Указатели "развертка" определяют идентификацию конечного объединения как обычного объединения нескольких членов и формирование конечной суммы как обычной. Число n должно быть больше единицы. Проверочный оператор "конечнпересечения" убеждается в том, что любые два множества семейства B пересекаются по конечному множеству точек. Слагаемые в заменяющей сумме обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование, так что обычно длины фрагментов кривой определяются приемами сразу. Уровни срабатывания равны 4.

Кривая задана параметрически

$\forall_{abfgAPK}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(set$_{xy}(\exists_t(x = f(t)$ & $y = g(t)$ & $A(t))), K)$ & $A(t) = (a \leq t$ & $t \leq b$ & $t -$ число$) \to$ длина$(P) = \int_a^b \sqrt{(df(t)/dt)^2 + (dg(t)/dt)^2 dt})$

$\forall_{abfgAPK}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(set$_{xyz}(\exists_t(x = f(t)$ & $y = g(t)$ & $z = h(t)$ & $A(t))),$ $K)$ & $A(t) = (a \leq t$ & $t \leq b$ & $t -$ число$) \to$ длина$(P) =$ $\int_a^b \sqrt{(df(t)/dt)^2 + (dg(t)/dt)^2 + (dh(t)/dt)^2 dt})$

$\forall_{abfgAPK}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(set$_{xyz}(\exists_t(x = f(t)$ & $y = g(t)$ & $z = h(t)$ & $A(t))),$ $K)$ & $A(t) = (a \leq t$ & $t -$ число$) \to$ длина$(P) =$ $\int_a^\infty \sqrt{(df(t)/dt)^2 + (dg(t)/dt)^2 + (dh(t)/dt)^2 dt})$

Первый антецедент берется в посылках, два последних - выделены указателем "идентификатор". Второй антецедент идентифицирует функции, определяющие координаты точки кривой, а также условие на параметр $A(t)$. Последний антецедент разрешает это условие относительно t с помощью вспомогательной задачи на описание. Заменяющее выражение обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, так что обычно прием сразу выдает искомую длину. Уровень срабатывания равен 2.

Кривая задана в полярных координатах

$\forall_{abfABKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ полярнточки(A, K) & $((y, x) \in A) = (y = f(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \leq x$ & $x \leq b$ & $x -$ число$)$ & конечное(set$_{xk}(f(x) = f(x + 2k\pi)$ & $x -$ число &¿натуральное & $a \leq x$ & $x \leq b$ & $a \leq x + 2k\pi$ & $x + 2k\pi \leq b)) \to$ длина$(P) =$ $\int_a^b \sqrt{f(x)^2 + (df(x)/dx)^2 dx})$

Первый антецедент берется в посылках, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Второй антецедент усматривает, что кривая P задана выражением "полярнточки(...)". Третий антецедент, используя задачу на описание, разрешает условие принадлежности пары (y, x) множеству A полярных координат точек кривой относительно неизвестной y (т.е. относительно радиуса). Четвертый антецедент разрешает условие $B(x)$ на допустимые значения угла и усматривает промежуток его изменения $[a, b]$. Последний антецедент выражает условие конечности множества точек самопересечения кривой. Указатели "подстановка(...)" разрешают отсутствие любого из неравенств $a \leq x, x \leq b$, причем тогда a, b доопределяются символами бесконечности. Указатели "вариант" разрешают строгие знаки в данных неравенствах. Уровень срабатывания равен 3.

1.4.6 Несколько простых приемов, связанных с гамма-функцией

1. Вычитание единицы из аргумента.

   $\forall_n(0 < n - 1 \to \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1))$

   Переменная n идентифицируется с константным выражением. Уровень срабатывания равен 1.

2. Натуральный аргумент.

   $\forall_n(n$ – натуральное $\to \Gamma(n) = (n-1)!)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

3. Аргумент одна вторая.

   $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

   Уровень срабатывания равен 0.

1.4.7 Кратные интегралы

В основном, создавались приемы, связанные с двойными интегралами. Для тройного интеграла пока создан лишь простейший прием, сводящий его к повторным интегралам. Напомним, что выражения "двойнойинтеграл(f)", "тройнойинтеграл(f)" обозначают двойной и тройной интегралы функции f, взятые по области ее определения. Если функция f задается описателем $\lambda_{xy}(F(x, y), P(x, y))$, то формульный редактор прорисовывает двойной интеграл в виде $\iint_{P(x,y)} F(x, y)dxdy$. В частном случае, когда $P(x, y)$ имеет вид $(x, y) \in Q$, используется обозначение $\iint_Q F(x, y)dxdy$. Заметим, что символ двойного интеграла вводится нажатием клавиши "Ctr-2", а символ тройного - нажатием клавиши "Ctr-3".

При описании области интегрирования сравнительно часто используется выражение "областьграницы(A)", определяющее ее через множество A граничных точек. Приемы, связанные с такими выражениями, были рассмотрены в предыдущей книге монографии - в разделе, посвященном числовым множествам. В частности, там был описан реализованный на ЛОСе прием, предпринимающий попытку перехода к явному заданию области. Уровень срабатывания этого приема равен 2.

Сведение двойного интеграла к произведению однократных

$\forall_{abcdfgP}(P = [a, b] \times [c, d] \to \iint_P f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)dx \int_c^d g(y)dy)$

Уровень срабатывания равен 1.

Сведение двойного интеграла к повторному

$\forall_{abfgh}(P(x, y) = (a \le u \;\&\; u \le b \;\&\; u -$ число $\&\; g(u) \le v \;\&\; v \le h(u) \;\&\; v -$ число$) \;\&\; \{u, v\} = \{x, y\} \to \iint_{P(x,y)} f(x, y)dxdy = \int_a^b(\int_{g(u)}^{h(u)} f(x, y)dv)du)$

Чтобы объединить в одном приеме рассмотрение двух возможных порядков повторного интегрирования: сначала по x либо сначала по y, введен второй антецедент. Он выделен указателем "идентификатор" и позволяет идентифицировать переменные u, v либо с x, y, либо с y, x. Интегрирование будет сначала выполняться по переменной v, затем - по u. Первый антецедент, тоже выделенный указателем "идентификатор", предпринимает попытку идентифицировать область интегрирования с криволинейной трапецией, ограниченной слева и справа прямыми $u = a, u = b$, а снизу и сверху - кривыми $g(u), h(u)$. Заметим, что прием не предпринимает попыток явно разрешить $P(x, y)$ относительно переменных x, y, а берет его таким, какое оно встречается в задаче. Указатели "вариант" разрешают использование в условии $P(x, y)$ любых сочетаний строгих и нестрогих неравенств. Оба однократных интеграла в заменяющем терме обрабатываются вспомогательной задачей на преобразование, т.е. обычно прием сразу находит значение двойного интеграла. Если внутреннее интегрирование не было выполнено, то прием блокируется. Уровень срабатывания рассматриваемого приема равен 2. Создана еще одна его версия, уровень срабатывания которой равен 4. Здесь уже предпринимается попытка разрешения условия $P(x, y)$ относительно неизвестных x, y. Какая именно из этих переменных окажется первичной, а какая - вторичной, определяется в процессе решения.

Наконец, для случая, когда условие на область интегрирования имеет вид $(x, y) \in P$, создан дополнительный прием:

$\forall_{abfgh}(P = \mathrm{set}_{uv}(a \le u \;\&\; u \le b \;\&\; u -$ число $\&\; g(u) \le v \;\&\; v \le h(u) \;\&\; v -$ число$) \;\&\; \{u, v\} = \{x, y\} \to \iint_{P(x,y)} f(x, y)dxdy = \int_a^b(\int_{g(u)}^{h(u)} f(x, y)dv)du)$

Описатель, определяющий область интегрирования, берется непосредственно из задачи и не преобразуется. Уровень срабатывания равен 2.

Область интегрирования распадается на несколько подобластей

$\forall_{fnPQ}(P = \bigcup_{i=1}^n Q(i) \;\&$ разделены$(Q) \to \iint_P f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^n \iint_{Q(i)} f(x, y)dxdy)$

$\forall_{fnPQ}(P(x, y) = ((x, y) \in \bigcup_{i=1}^n Q(i)) \;\&$ разделены$(Q) \to \iint_P f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^n \iint_{Q(i)} f(x, y)dxdy)$

Приемы применяются к подвыражению условия задачи на преобразование. В первом приеме первый антецедент берется непосредственно в посылках, во втором - выделен указателем "идентификатор". При этом его левая часть нормализаторами не обрабатывается, и правая часть идентифицируется непосредственно с условием на область интегрирования. Второй антецедент означает, что любые два элемента семейства Q пересекаются по множеству меры ноль. Для его обработки используется проверочный оператор "усмразделены". Указатели "развертка" определяют идентификацию конечного объединения с обычным объединением и выписывание конечной суммы в заменяющем терме как обычной суммы. Переменная n при этом оказывается идентифицирована с натуральной константой, отличной от единицы. Интегралы в заменяющей части обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование. Уровни срабатывания равны 1.

$\forall_{fnPQ}(\text{set}_{xy}(P(x,y)) = \bigcup_{i=1}^{n} Q(i)$ & разделены$(Q) \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy =$
$\sum_{i=1}^{n} \iint_{Q(i)} f(x,y)dxdy)$

Прием предпринимает попытку явного разрешения условия $P(x,y)$ относительно неизвестных x, y. После этого к левой части первого антецедента применяется нормализатор "нормкласс". В остальном прием аналогичен двум предыдущим. Его уровень срабатывания равен 3. Заметим, что результаты явного разрешения условия $P(x,y)$ и нормализации класса остаются в буферах. Поэтому описанный ранее прием сведения двойного интеграла к повторному, срабатывающий на уровне 4 и обращающийся к тем же вспомогательным вычислениям, берет эти результаты прямо из буфера.

Разбор случаев по области интегрирования

$\forall_{fABCP}(P(x,y) = ((x,y) \in (A$ при $C,$ иначе $B)) \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy =$
$(\iint_A f(x,y)dxdy$ при $C,$ иначе $\iint_B f(x,y)dxdy))$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Антецедент выделен указатлем "идентификатор". Его левая часть не преобразуется, причем идентифицируется с условным выражением. Интегралы в заменяющем терме обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование, т.е. обычно вычисляются внутри данного приема. Уровень срабатывания равен 1. Следующий прием усматривает условное выражение после попытки разрешения условия $P(x,y)$:

$\forall_{fABCP}(\text{set}_{xy}(P(x,y)) = (A$ при $C,$ иначе $B) \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy =$
$(\iint_A f(x,y)dxdy$ при $C,$ иначе $\iint_B f(x,y)dxdy))$

Как и в предыдущем пункте, при обработке левой части антецедента используются вспомогательные задача на описание и нормализатор "нормкласс". Если обращения к ним уже предпринимались, то результаты берутся из буфера, иначе - регистрируются в буфере. Уровень срабатывания равен 3.

Замена переменных

1. Переход к полярным координатам.

   $\forall_{abcdfPQI}(0 < abcd$ & $Q(r,p) = (P(\sqrt{|b/a|}r\cos p, \sqrt{|d/c|}r\sin p)$ & $r -$ число & $p -$ число & $0 \leq r$ & $-\pi \leq p$ & $p \leq \pi)$ & $I = \iint_{Q(r,p)} f(\sqrt{|b/a|}r\cos p, \sqrt{|d/c|}r\sin p) \cdot rdrdp \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy = \sqrt{bd/ac}I)$

   Указатель "контекст$(\ldots)$" инициирует попытку применения приема при усмотрении под интегралом выражения вида $ax^2/b + cy^2/d$, где a, b, c, d не содержат переменных x, y. При этом проверяется, что в условии, определяющем область интегрирования, встречается подвыражение вида $Ax^m/B + Cy^m/D$, где A, B, C, D, m не зависят от x, y (показатель степени m может вырождаться в единицу). Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Второй - выделен указателем "идентификатор". Он определяет условие $Q(r,p)$ на область интегрирования относительно новых (при $a = b, c = d$ - полярных) координат r, p. Правая часть этого антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Заметим, что предварительно условие $P(x,y)$, обычно имеющее вид принадлежности пары (x,y) классу, обозначенному вспомогательной переменной P, обрабатывается нормализатором "нормпринадлежит". Этот нормализатор извлекает из контекста явное описание класса и подставляет его вместо переменной. Третий антецедент тоже выделен указателем "идентификатор". Для вычисления интеграла в новых переменных он обращается к вспомогательной задаче. Проверяется, что результат I не содержит символов "интеграл", "двойнойинтеграл". Уровень срабатывания равен 2. Для случая, когда подсказка на ввод полярных координат размещена не в подынтегральном выражении, а в описании области интегрирования, создан аналогичный прием:

$\forall_{abcdfPQI}(0 < abcd \;\&\; Q(r,p) = (P(\sqrt{|b/a|}r\cos p, \sqrt{|d/c|}r\sin p) \;\&\; r - \text{число} \;\&\; p - \text{число} \;\&\; 0 \le r \;\&\; 0 \le p \;\&\; p \le 2\pi) \;\&\; I = \iint_{Q(r,p)} f(\sqrt{|b/a|}r\cos p, \sqrt{|d/c|}r\sin p)\cdot rdrdp \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy = \sqrt{bd/ac}I)$

Здесь указатель "контекст(...)" обеспечивает усмотрение подвыражения $ax^2/b+cy^2/d$ в описании области интегрирования. В остальном - аналогично первому приему.

2. Переход к обобщенным полярным координатам.

   Рассматривается частный случай, когда степени при синусе и косинусе равны двум:

   $\forall_{abcdfPQI}(Q(r,p) = (P(br(\cos p)^2/a, dr(\sin p)^2/c) \;\&\; r - \text{число} \;\&\; p - \text{число} \;\&\; 0 \le r \;\&\; 0 \le p \;\&\; p \le \pi/2) \;\&\; I = \iint_{Q(r,p)} f(br(\cos p)^2/a, dr(\sin p)^2/c)r\sin p\cos p drdp \;\&\; 0 \le x \;\&\; 0 \le y \;\&\; \neg(a=0) \;\&\; \neg(c=0) \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy = 2bdI/(ac))$

   Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в описании области интегрирования подвыражения $ax/b+cy/d$, расположенного внутри основания степени, натуральный показатель которой больше двух. Коэффициенты a,b,c,d не содержат переменных x,y. Первые два антецедента обрабатываются так же, как в предыдущем пункте. Истинность третьего и четвертого антецедентов устанавливается при помощи задач на доказательство, пятого и шестого - при помощи проверочных операторов. Уровень срабатывания равен 2.

3. Переход к координатам, для которых область интегрирования превращается в прямоугольник.

   $\forall_{abcdfgmnpqrABDPQ}(P(x,y) = (af \le g \;\&\; g \le bf \;\&\; cp \le q \;\&\; q \le dp \;\&\; A(x,y)) \;\&\; (g/f = u \;\&\; q/p = v \;\&\; x - \text{число} \;\&\; y - \text{число} \;\&\; u - \text{число} \;\&\; v - \text{число}) = (x = m(u,v) \;\&\; y = n(u,v) \;\&\; B(u,v)) \;\&\; D = |dm(u,v)/du \cdot dn(u,v)/dv - dm(u,v)/dv \cdot dn(u,v)/du| \;\&\; Q(u,v) = (a \le u \;\&\; u \le b \;\&\; c \le v \;\&\; v \le d \;\&\; u - \text{число} \;\&\; v - \text{число}) \;\&\; r = \iint_{Q(u,v)} h(m(u,v),n(u,v))Ddudv \to \iint_{P(x,y)} h(x,y)dxdy = r)$

   Все антецеденты выделены указателем "идентификатор". Первый антецедент усматривает, что условие на область интегрирования состоит из четырех неравенств $af \le g$, $g \le bf$, $cp \le q$, $q \le dp$ и конъюнкции $A(x,y)$ утверждений, каждое из которых имеет вид "число(...)" либо является отрицанием равенства. Проверяется, что в указанных неравенствах коэффициенты a,b,c,d не зависят от x,y, а в каждой паре (f,g), (p,q) встречаются обе эти переменные. Проверяется также, что хотя бы одно из выражений f,g,p,q не линейно относительно

x, y. Левая часть второго антецедента разрешается относительно новых переменных интегрирования u, v с помощью вспомогательной задачи на описание. Проверяется, что каждое утверждение из остаточной конъюнкции $B(u, v)$, имеет вид "число(...)" либо является отрицанием равенства. Правая часть третьего антецедента упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Четвертый антецедент определяет условие $Q(u, v)$ на область интегрирования в новых переменных. Наконец, пятый антецедент предпринимает попытку вычисления интеграла в этих переменных с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Проверяется, что результат r не содержит символа "двойнойинтеграл". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdfgijklmnpqrABCDEF}(\neg(b = 0)$ & $\neg(d = 0)$ & $\neg(B = 0)$ & $\neg(D = 0)$ & $(ad-bc)bd < 0$ & $(AD-BC)BD < 0$ & $P(x, y) = ((x, y) \in$ областьграницы$(\mathrm{set}_{uv}(af = bg$ & $i) \cup \mathrm{set}_{uv}(cf = dg$ & $j) \cup \mathrm{set}_{uv}(Ap = Bq$ & $k) \cup \mathrm{set}_{uv}(Cp = Dq$ & $l))$ & $E(x, y))$ & $(g/f = z$ & $q/p = w$ & $E(u, v)$ & $u -$ число & $v -$ число & $z -$ число & $w -$ число$) = (u = m(z, w)$ & $v = n(z, w)$ & $F(z, w))$ & $G = |dm(z, w)/dz \cdot dn(z, w)/dw - dm(z, w)/dw \cdot dn(z, w)/dz|$ & $Q(z, w) = (a/b \leq z$ & $z \leq c/d$ & $A/B \leq w$ & $w \leq C/D$ & $F(z, w)$ & $E(m(z, w), n(z, w))$ & $z -$ число & $w -$ число$)$ & $r = \iint_{Q(z,w)} h(m(z, w), n(z, w))Gdzdw \rightarrow \iint_{P(x,y} h(x, y)dxdy = r)$

В этом случае область интегрирования задана с помощью выражения "областьграницы(X)", определяющего ее через множество X граничных точек. При этом граница рспадается на четыре кривые, задаваемые уравнениями $af = bg, cf = dg, Ap = Bq, Cp = Dq$. Здесь a, b, c, d, A, B, C, D - коэффициенты, составленные из всех не зависящих от u, v множителей. Первые две кривые характеризуются константным отношением g/f, вторые - константным отношением q/p. Это позволяет выбрать отношения $g/f, q/p$ в качестве новых переменных интегрирования z, w. Первые шесть антецедентов обрабатываются проверочными операторами, причем они обеспечивают непустоту промежутков $[a/b, c/d], [A/B, C/D]$ изменения переменных z, w. Остаточные условия i, j, k, l, кроме утверждений вида "число(...)", могут содержать лишь следствия утверждения $E(x, y)$. Восьмой антецедент, используя вспомогательную задачу на описание, находит выражения старых переменных через новые. Правая часть девятого антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Десятый антецедент определяет новую область интегрирования, одиннадцатый - вычисляет интеграл. Уровень срабатывания равен 0. Данный прием дополняется приемом, блокирующим попытки разрешения уравнений границы указанной выше области интегрирования относительно переменных u, v. Заголовок вспомогательного приема - "замечание". Блокировка осуществляется при помощи комментария "подстзамена". Уровень срабатывания этого приема тоже равен 0. Для дополнительной обработки условий на область интегрирования по новым параметрам создан небольшой нормализатор "нормпарам". Он устраняет одномерные подобласти, в которых значение одной из переменных фиксировано, а также отбрасывает дублирующие условия.

Разбиение области интегрирования для исключения модуля

$\forall_{fgP}(\iint_{P(x,y)} f(x, y)dxdy = \iint_{P(x,y) \ \& \ 0 \leq g(x,y)} f(x, y)dxdy + \iint_{P(x,y) \ \& \ g(x,y) \leq 0} f(x, y)dxdy)$

Указатель "контекст(позиция(x1 фикс(0 1 1 4))вид(x1 модуль(значение(x7 набор(x23 x24)))))" инициирует попытку применения приема при усмотрении в подынтегральном выражении подтерма $|g(x,y)|$. Если под модулем встречается символ "плюс", то уровень срабатывания равен 1, иначе он равен 5.

Разбиение области интегрирования для исключения сигнума

$\forall_{fgP}(\iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy = \iint_{P(x,y)\ \&\ 0<g(x,y)} f(x,y)dxdy + \iint_{P(x,y)\ \&\ g(x,y)<0} f(x,y)dxdy)$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в подынтегральном выражении терма $\mathrm{sg}(g(x,y))$. Уровень срабатывания равен 2.

Разбиение области интегрирования для исключения целой части

$\forall_{fgmnpqPM}(M = \mathrm{set}_a(\exists_{xy}(P(x,y)\ \&\ g(x,y) = a\ \&\ a - \text{число}))\ \&\ m = \inf M\ \&\ n = \sup M\ \&\ p = [m]\ \&\ q = [n] \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy =$
$\sum_{i=0}^{q-p} \iint_{P(x,y)\ \&\ p+i\leq g(x,y)\ \&\ g(x,y)\leq p+i+1} f(x,y)dxdy)$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в подынтегральном выражении терма $[g(x,y)]$. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражение под квантором существования в правой части первого антецедента явно разрешается относительно x, y с помощью вспомогательной задачи на описание. После этого внешний описатель "класс" обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Таким образом находится множество M значений, которые выражение $g(x,y)$ может принимать в области интегрирования. Второй и третий антецеденты находят точные верхнюю и нижнюю грани M, используя нормализаторы вычисления этих граней. Наконец, два последних антецедента вычисляют целые части данных граней, используя нормализатор "нормцелаячасть". Проверяется, что результаты p, q суть целочисленные константы. Интегралы под суммой в заменяющей части равенства обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

Пустая область интегрирования

$\forall_{fP}(P(x,y) = \text{ложь} \to \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy = 0)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно x, y вспомогательной задачей на описание. Напомним, что такое разрешение используется рядом других приемов, а результат сохраняется в буфере. Уровень срабатывания равен 3.

Вычисление площади плоской области с помощью двойного интеграла

$\forall_{APK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ P = \text{точки}(A,K) \to S(P) = \iint_A dxdy)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент берется в посылках, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "смточки", который заменяет множество P на его явное выражение, определяемое равенством из контекста, если такое равенство существует. Проверяется, что внутри выражения A встречается описатель "класс" по двум варьируемым переменным. Двойной интеграл в заменящей части вычисляется вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

Вычисление объема с помощью двойного интеграла

$\forall_{fgAPK}$(прямкоорд(K) & $P=$ точки(A,K) & $((x,y,z)\in A)=(f(x,y)\leq z$ & $z\leq g(x,y)$ & $z-$ число & $Q(x,y))$ & $0\leq g(x,y)-f(x,y)\rightarrow$ объем$(P)=\iint_{Q(x,y)}(g(x,y)-f(x,y))dxdy)$

Первые два антецедента обрабатываются так же, как в предыдущем разделе. Условие принадлежности точки (x,y,z) множеству A разрешается третьим антецедентом относительно z с помощью вспомогательной задачи на описание. Чевертый антецедент, используя вспомогательную задачу на доказательство, убеждается, что промежуток значений z на области интегрирования непуст. Интеграл в заменяющей части приемом не преобразуется. Уровень срабатывания равен 3. Если попытка доказать четвертый антецедент оказалась безрезультатной, то на уровне 4 срабатывает другой прием, ограничивающий область интегрирования соответственно этому антецеденту:

$\forall_{fgAPK}$(прямкоорд(K) & $P=$ точки(A,K) & $((x,y,z)\in A)=(f(x,y)\leq z$ & $z\leq g(x,y)$ & $z-$ число & $Q(x,y))\rightarrow$
объем$(P)=\iint_{Q(x,y)\ \&\ 0\leq g(x,y)-f(x,y)}(g(x,y)-f(x,y))dxdy)$

При явном разрешении условия $(x,y,z)\in A$ может возникнуть объединение нескольких областей, пересекающихся по множеству меры ноль. Тогда используется следующий прием:

$\forall_{AKPQ}$(прямкоорд(K) & $P=$ точки(A,K) & $\mathrm{set}_{xyz}((x,y,z)\in A)=\bigcup_{i=1}^{n}Q(i)$ & разделены$(Q)\rightarrow$ объем$(P)=\sum_{i=1}^{n}$ объем(точки$(Q(i),K)))$

Указатель "развертка(...)" определяет идентификацию конечного объединения с обычным объединением нескольких множеств. Уровень срабатывания равен 3. Наконец, иногда бывает полезен следующий прием:

$\forall_{fgABCDEKQ}$(прямкоорд(K) & $P=$ точки(A,K) & $((x,y,z)\in A$ & $z-$ число$)=((x,y,z)\in$ областьграницы$(\mathrm{set}_{uvw}(w=f(u,v)$ & $B(u,v))\cup\mathrm{set}_{uvw}(w=g(u,v)$ & $C(u,v))$ $\cup\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{set}_{uvw}(w-$ число & $D(i)))$ & $z-$ число & $E(x,y))$ & $Q(x,y)=(E(x,y)$ & $B(x,y)$ & $C(x,y)$ & $(x,y)\in$ областьграницы$(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{set}_{uv}(D(i))))\rightarrow$ объем$(P)=\iint_{Q(x,y)}|f(x,y)-g(x,y)|dxdy)$

Здесь условие "$(x,y,z)\in A$ & $z-$ число" не разрешается относительно z, а лишь упрощается впомогательной задачей на преобразование. После этого идентифицируется описание границы: поверхности $z=f(x,y),z=g(x,y)$ и конечное число вертикальных цилиндров, задаваемых условиями $D(i)$ на переменные x,y. Это описание, возможно, дополняется общим ограничением $E(x,y)$ на параметры x,y. Последний антецедент определяет область двумерного интегрирования, пересекая область, заданную границами $D(i)$, с областями задания поверхностей $f(x,y),g(x,y)$ и с областью, в которой выполнено $E(x,y)$. Уровень срабатывания равен 4.

Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла

Если поверхность задана соотношением вида $z=f(x,y)$, то используется простейшая формула:

$\forall_{fKPQ}$(прямкоорд(K) & $P=$ точки$(\mathrm{set}_{xyz}(z=f(x,y)$ & $Q(x,y)),K)\rightarrow S(P)=\iint_{Q(x,y)}\sqrt{1+(df(x,y)/dx)^2+(df(x,y)/dy)^2dxdy})$

Подынтегральное выражение упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

Задающее множество координат точек поверхности условие, заключенное под описателем "класс", обычно разрешается явно относительно одной из переменных общими приемами этого описателя. Далее для вычисления площади поверхности могут понадобиться следующие несложные дополнительные приемы:

1. Площадь объединения областей.

   $\forall_{ABPK}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки$(A \cup B, K)$ $\to$ $S(P) = S($точки$(A, K)) + S($точки$(B, K)) - S($точки$(A \cap B, K)))$

   Слагаемые обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

2. Усмотрение нулевой площади.

   $\forall_{KP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки$(\emptyset, K) \to S(P) = 0)$

   Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{aKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки$(\{; a\}, K) \to S(P) = 0)$

   $\forall_{abKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки$(b \cap \{; a\}, K) \to S(P) = 0)$

   Здесь множество координат точек поверхности задается конечным списком a ,быть может, пересеченным с некоторым другим множеством. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{fgAKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки$(\mathrm{set}_{xyz}(z = f(x)$ & $y = g(x)$ & $A(x)), K) \to S(P) = 0)$

   Поверхность выродилась в фрагмент кривой. Указатель "элемент(x23)" разрешает идентифицировать x с произвольным, не обязательно первым, элементом связывающей приставки. Уровень срабатывания равен 2.

3. Условное выражение для множества точек.

   $\forall_{ABCKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки$((A$ при $B,$ иначе $C), K) \to S(P) = (S($точки$(A, K))$ при $B,$ иначе $S($точки$(C, K))))$

   Каждое из выражений $S($точки$(A, K))$, $S($точки$(C, K))$ обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, а внешнее условное выражение - нормализатором "нормвариант".

4. Перестановка координат в случае вертикального цилиндра.

   Если поверхность представляет собой вертикальный цилиндр, то предпринимается перестановка y- и z- координат, чтобы можно было получить уравнение поверхности, разрешенное относительно третьей координаты (как в первом приеме данного раздела):

   $\forall_{afgAKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки$(\mathrm{set}_{xyz}(f(x, y) = g(x, y)$ & $A(x, y, z)), K)$ & $a = S($точки$(\mathrm{set}_{xzy}(f(x, y) = g(x, y)$ & $A(x, y, z)), K)) \to S(P) = a)$

   Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". При этом правая часть третьего антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что результат a не содержит символов "площадь", "двойнойинтеграл", т.е. что площадь удалось вычислить. Уровень срабатывания равен 3.

Если поверхность параметризована, то для вычисления площади применяется следующий прием:

$\forall_{fghAEFGKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(set$_{xyz}(\exists_{uv}(x = f(u,v)$ & $y = g(u,v)$ & $z = h(u,v)$ & $A(u,v))), K)$ & $E = (df(u,v)/du)^2 + (dg(u,v)/du)^2 + (dh(u,v)/du)^2$ & $G = (df(u,v)/dv)^2 + (dg(u,v)/dv)^2 + (dh(u,v)/dv)^2$ & $F = df(u,v)/du \cdot df(u,v)/dv + dg(u,v)/du \cdot dg(u,v)/dv + dh(u,v)/du \cdot dh(u,v)/dv \to S(P) = \iint_{A(u,v)} \sqrt{EG - F^2} dudv)$

Уровень срабатывания равен 3. Если в качестве второго параметра используется z-координата, то вместо трех равенств под квантором существования будут находиться лишь два, и для этого случая нужен отдельный прием:

$\forall_{fgABEFGKP}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(set$_{xyz}(\exists_u(x = f(u,z)$ & $y = g(u,z)$ & $A(u,z))$ & $B(z)), K)$ & $E = (df(u,z)/du)^2 + (dg(u,z)/du)^2$ & $G = (df(u,z)/dv)^2 + (dg(u,z)/dv)^2$ & $F = df(u,z)/du \cdot df(u,z)/dz + dg(u,z)/du \cdot dg(u,z)/dz \to$
$S(P) = \iint_{A(u,z) \ \& \ B(z)} \sqrt{EG - F^2} dudz)$

Уровень срабатывания этого приема тоже равен 3.

В заключение приведем прием, преобразующий описание поверхности от прямоугольных координат к цилиндрическим, если в первом описании выделяется сумма квадратов двух координат, домноженных на одинаковый коэффициент:

$\forall_{afghpAPK}$(прямкоорд(K) & $P =$ точки(set$_{xyz}(f(x,y,z) = g(x,y,z)$ & $A(x,y,z)), K)$ & $(f(v\cos w, v \sin w, z) = g(v \cos w, v \sin w, z)$ & $v-$число & $0 \le v) = (v = h(z,w)$ & $p(z,w))$ & S(точки(set$_{xyz}(\exists_w(x = h(z,w)\cos w$ & $y = h(z,w)\sin w$ & $A(h(z,w)\cos w, h(z,w)\sin w)$ & $w -$ число & $-\pi \le w$ & $w \le \pi$ & $p(z,w))), K)) = a \to S(P) = a)$

Первый антецедент берется в посылках, остальные - выделены указателем "идентификатор". Второй антецедент идентифицирует определяющее поверхность уравнение $f(x,y,z) = g(x,y,z)$. Проверяется, что в этом уравнении встречается подвыражение вида $kx^2 + ky^2$, причем k и прочие слагаемые суммы не зависят от x, y. Проверяется также, что в каждой сумме, имеющей слагаемые $mx^2 + mz^2$ либо $my^2 + mz^2$, выделяется также слагаемое, пропорциональное квадрату оставшейся координаты. Третий антецедент разрешает уравнение поверхности, переведенное в цилиндрические координаты v, w, z, относительно v. Наконец, четвертый антецедент обращается к вспомогательной задаче на преобразование для вычисления площади поверхности, заданной в исходных прямоугольных коорднатах параметрическим описанием относительно z, w. Указатель "элемент(x25)" обеспечивает возможность выбора при идентификации любой из трех координат в качестве z-координаты. Уровень срабатывания равен 3.

Тройной интеграл

Для тройных интегралов пока введен лишь прием, выполняющий сведение их к повторным:

$\forall_{abfghpq}(P(x,y,z) = (a \le u$ & $u \le b$ & $u -$ число & $g(u) \le v$ & $v \le h(u)$ & $v -$ число & $p(u,v) \le w$ & $w \le q(u,v)$ & $w -$ число) & $\{u,v,w\} = \{x,y,z\} \to$
$\iiint_{P(x,y,z)} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{g(u)}^{h(u)} \left(\int_{p(u,v)}^{q(u,v)} f(x,y,z)dw\right) dv\right) du)$

Этот прием аналогичен соответствующему приему для двойных интегралов. Уровень срабатывания равен 4.

1.4.8 Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл первого рода

Напомним, что криволинейный интеграл первого рода от функции f вдоль кривой C обозначается "кривинтеграл(f C)". Формульный редактор прорисовывает его в виде $\int_C f ds$. Однако, при вводе криволинейных интегралов формульным редактором следует использовать не клавишу "Ctr-i"либо "Ctr-j", а последовательно нажимать две клавиши "к", "и" (кир.). Это относится как к интегралам первого, так и второго рода.

1. Вычисление криволинейного интеграла первого рода вдоль кривой, заданной явным соотношением.

   $\forall_{abfABCK}$(прямкоорд(K) & $C =$ точки(A,K) & $((x,y) \in A) = (y = f(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \le x$ & $x \le b$ & $x -$ число$) \to \int_C g(x,y)ds =$ $\int_a^b g(x,f(x))\sqrt{(df(x)/dx)^2 + 1}dx)$

   Условие принадлежности пары (x,y) множеству координат точек кривой разрешается в третьем антецеденте относительно y вспомогательной задачей на описание. После этого четвертый антецедент явно разрешает условие на область значений переменной x и идентифицирует эту область с промежутком. Заменяющий терм обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Указатели "вариант" и "подстановка" допускают произвольные сочетания строгих и нестрогих неравенств, а также бесконечные концы промежутка. Уровень срабатывания равен 3. Для трехмерной кривой созданы следующие два приема, первый из которых предпринимает попытку выбрать в качестве параметра кривой переменную x, а второй - переменную z:

   $\forall_{abfgABCK}$(прямкоорд(K) & $C =$ точки(A,K) & $((x,y,z) \in A) = (y = f(x)$ & $z = g(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \le x$ & $x \le b$ & $x -$ число$) \to \int_C h(x,y,z)ds =$ $\int_a^b h(t,f(t),g(t))\sqrt{1 + (df(t)/dt)^2 + (dg(t)/dt)^2}dt)$

   $\forall_{abfgABCK}$(прямкоорд(K) & $C =$ точки(A,K) & $((x,y,z) \in A) = (x = f(z)$ & $y = g(z)$ & $B(z))$ & $B(z) = (a \le z$ & $z \le b$ & $z -$ число$) \to \int_C h(x,y,z)ds =$ $\int_a^b h(f(t),g(t),t)\sqrt{1 + (df(t)/dt)^2 + (dg(t)/dt)^2}dt)$

   Если условие принадлежности классу A уже разрешено относительно параметра y либо z, то первый прием блокируется. Аналогично, второй прием блокируется, если условие принадлежности классу A уже разрешено относительно x либо y. При этом во втором случае дополнительно требуется, чтобы либо x, либо y уже было явно выражено через z. Уровни срабатывания равны 3.

2. Вычисление криволинейного интеграла первого вдоль кривой, заданной в полярных координатах.

   $\forall_{abfgABKP}$(прямкоорд(K) & $C =$ полярнточки(A,K) & $((y,x) \in A) = (y = g(x)$ & $B(x))$ & $\mathrm{set}_x(B(x)) = \bigcup_{i=1}^n [a(i),b(i)]$ & конечное($\mathrm{set}_{xk}(g(x) = g(x + 2k\pi)$ & натуральное & $B(x)$ & $B(x+2k\pi))) \to \int_C f(x,y)ds =$ $\sum_{i=1}^n \left(\int_{a(i)}^{b(i)} f(g(x)\cos x, g(x)\sin x)\sqrt{(dg(x)/dx)^2 + g(x)^2}dx\right))$

   Третий антецедент разрешает полярный радиус относительно полярного угла. Четвертый - разрешает условие на допустимые значения угла и идентифицирует результат с объединением конечного числа промежутков. Пятый антецедент убеждается в конечности множества точек самопересечения в параметрическом задании кривой. Неориентированная кривая C рассматривается здесь как множество точек, и данная проверка позволяет исключить случаи кратного прохождения одного и того же участка. Условие под описателем "класс" в этом антецеденте разрешается относительно x, k с помощью вспомогательной задачи на описание. Интегралы в заменяющем терме обрабатываются вспомогательной задачей на преобразование. Перед применением приема проверяется, что угол не является уже разрешенным относительно радиуса. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfgABPK}$(прямкоорд(K) & C = полярнточки(A, K) & $((x, y) \in A) = (y = g(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \le x$ & $x \le b$ & x − число$)$ $\rightarrow \int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x\cos g(x), x\sin g(x))\sqrt{(dg(x)/dx)^2+1}dx)$

Здесь третий антецедент разрешает полярный угол относительно полярного радиуса, причем оказывается, что на промежутке $[a, b]$ угол находится по радиусу однозначно. Перед применением приема проверяется, что радиус не является разрешенным относительно угла. Уровень срабатывания равен 3.

3. Вычисление криволинейного интеграла вдоль кривой, заданной параметрически.

   $\forall_{abfghK}$(прямкоорд(K) & C = точки(set$_{xy}(\exists_t(x = g(t)$ & $y = h(t)$ & $t-$число & $a \le t$ & $t \le b)), K) \rightarrow \int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(g(t), h(t))\sqrt{(dg(t)/dt)^2 + (dh(t)/dt)^2}dt)$

   $\forall_{abfghpK}$(прямкоорд(K) & C = точки(set$_{xyz}(\exists_t(x = g(t)$ & $y = h(t)$ & $z = p(t)$ & t − число & $a \le t$ & $t \le b)), K) \rightarrow \int_C f(x,y,z)ds =$
   $\int_a^b f(g(t), h(t))\sqrt{(dg(t)/dt)^2 + (dh(t)/dt)^2 + (dp(t)/dt)^2}dt)$

   Уровень срабатывания приемов равен 2.

4. Вычисление криволинейного интеграла первого рода вдоль отрезка.

   $\forall_{abcdfCK}$(прямкоорд(K) & C = отрезок(AB) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \rightarrow \int_C f(x,y)ds = \sqrt{((c-a)^2 + (d-b)^2)}\int_0^1 f(a+t(c-a), b+t(d-b))dt)$

   Уровень срабатывания равен 2.

5. Кривая распадается на несколько частей.

   $\forall_{fnCD}(C = \bigcup_{i=1}^n D(i)$ & конечнпересечения$(D) \rightarrow \int_C f(x,y)ds =$
   $\sum_{i=1}^n \left(\int_{D(i)} f(x,y)ds\right))$

   Прием относится к случаю, когда кривая изначально задана в виде объединения. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором "усмконечнпересечения", устанавливающим, что любые два различных элемента семейства D пересекаются по конечному множеству точек. Уровень срабатывания приема равен 2. Если распадение кривой на фрагменты усматривается после разрешения ее уравнения относительно одной из координат, то используются следующие приемы:

   $\forall_{abfABKP}$(прямкоорд(K) & C = точки(A, K) & set$_{xy}((x,y) \in A) = \bigcup_{i=1}^n D(i)$ & конечнпересечения$(D) \rightarrow \int_C f(x,y)ds = \sum_{i=1}^n \left(\int_{\text{точки}(D(i),K)} f(x,y)ds\right))$

   $\forall_{abfABKP}$(прямкоорд(K) & C = точки(A, K) & set$_{xyz}((x,y,z) \in A) = \bigcup_{i=1}^n D(i)$ & конечнпересечения$(D) \rightarrow \int_C f(x,y)ds = \sum_{i=1}^n \left(\int_{\text{точки}(D(i),K)} f(x,y)ds\right))$

В первом случае условие принадлежности набора множеству координат точек кривой разрешается с помощью вспомогательной задачи на описание относительно y, во втором случае - относительно y, z. Интегралы под суммой в заменяющей части обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование. Уровень срабатывания приемов равен 4.

6. Преобразование уравнения кривой к полярным координатам.

   $\forall_{PKC}$(прямкоорд$(K) \to C =$ точки$(\text{set}_{xy}(P(x,y)), K) \leftrightarrow$
   $C =$ полярнточки$(\text{set}_{xy}(P(x\cos y, x\sin y)$ & $0 < x$ & $-\pi < y$ & $y \leq \pi$ & $x -$ число & $y -$ число$), K))$

   Прием применяется к посылке задачи на преобразование, определяющей координаты точек кривой C. В условии этой задачи должен встречаться криволинейный интеграл первого рода вдоль C. Необходимым условием применения преобразования является наличие в уравнении кривой подвыражения вида $ax^2/b+cy^2/d$, где a, b, c, d не содержат ни x, ни y. Условие под описателем "класс" в заменяющей части разрешается относительно x с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 2.

Криволинейный интеграл второго рода

Криволинейный интеграл второго рода берется вдоль ориентированной кривой, поэтому начнем с перечисления средств задания таких кривых, используемых в решателе. Выражение "оркривая$(f\ K)$" обозначает ориентированную кривую, определяемую числовой вектор-функцией f одного вещественного переменного (параметра кривой)в системе координат K. Направление прохождения кривой соответствует возрастанию параметра, причем промежуток изменения параметра совпадает с областью определения функции f. Ориентированную кривую можно получить из обычной кривой q, задав указатель ориентации a. Для этого используется выражение "ориенткривой$(q\ a)$". Рассматриваются следующие типы указателей ориентации:

1. "убывает$(K\ i)$" - в системе координат K положение точки кривой однозначно определяется ее i-й координатой, и кривая проходится в направлении убывания значения этой координаты.

2. "возрастает$(K\ i)$" - в системе координат K положение точки кривой однозначно определяется ее i-й координатой, и кривая проходится в направлении возрастания значения этой координаты.

3. "убывает$(K\ 0)$" - в системе координат K кривая проходится по часовой стрелке.

4. "возрастает$(K\ 0)$" - в системе координат K кривая проходится против часовой стрелки.

Ориентированная кривая, соответствующая прохождению отрезка AB от точки A к точке B, обозначается "Отрезок(A, B)". Ориентированная кривая, представляющая собой отрезок неориентированной кривой q с началом в точке A и концом в точке B, обозначается "отрезоклинии(q,A,B)". Наконец, результат последовательного прохождения ориентированных кривых набора a (очередная кривая начинается там, где заканчивается предыдущая) обозначается "путь(a)".

Напомним, что криволинейный интеграл второго рода для вектор - функции F, вычисляемый вдоль ориентированной кривой , обозначается "Кривинтеграл$(F\ C)$".

Формульный редактор прорисовывает его в двумерном случае как $\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$, а в трехмерном - как $\int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dx$. Переменные x,y,z не допускают каких-либо переобозначений. При переходе к внутреннему логическому представлению они теряются и служат лишь для условной нумерации компонент f,g,h интегрируемой вектор-функции.

1. Вычисление криволинейного интеграла второго рода вдоль кривой, заданной явным соотношением.

   $\forall_{abfghABCK}$(прямкоорд(K) & $C =$ ориенткривой(точки(A,K), возрастает$(K,1)$) & $((x,y) \in A) = (y = h(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \leq x$ & $x \leq b$ & $x -$ число$) \to \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_a^b (f(x,h(x)) + g(x,h(x))dh(x)/dx)dx)$

   $\forall_{abfghABCK}$(прямкоорд(K) & $C =$ ориенткривой(точки(A,K), убывает$(K,1)$) & $((x,y) \in A) = (y = h(x)$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \leq x$ & $x \leq b$ & $x -$ число$) \to \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = -\int_a^b (f(x,h(x)) + g(x,h(x))dh(x)/dx)dx)$

   Первый антецедент берется из контекста, второй - идентифицирует множество A координат точек кривой и направление ее обхода, соответствующее возрастанию либо убыванию абсциссы. Третий антецедент явно разрешает ординату точки кривой относительно абсциссы, четвертый - определяет промежуток изменения абсциссы. В обоих случаях решаются вспомогательные задачи на описание. Если абсцисса кривой изначально разрешена относительно ординаты, то приемы блокируются. Уровень срабатывания равен 3. Если после разрешения ординаты относительно абсциссы кривая распадается на две части, причем задано направление обхода по часовой стрелке, то применяется следующая комбинация двух первых приемов:

   $\forall_{abfgpqABCK}$(прямкоорд(K) & $C =$ ориенткривой(точки(A,K), возрастает$(K,0)$) & $((x,y) \in A) = ((y = p(x) \ \vee \ y = q(x))$ & $B(x))$ & $B(x) = (a \leq x$ & $x \leq b$ & $x -$ число$)$ & $0 \leq q(x) - p(x) \to \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_a^b (f(x,p(x)) + g(x,p(x))dp(x)/dx)dx - \int_a^b (f(x,q(x)) + g(x,q(x))dq(x)/dx)dx)$

   Уровень срабатывания здесь тоже равен 3. Во всех случаях заменяющий терм обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, где и происходит фактическое вычисление интеграла.

2. Вычисление криволинейного интеграла вдоль кривой, заданной параметрически.

   $\forall_{abfgpqACK}$(прямкоорд(K) & $C =$ оркривая$(\lambda_t((p(t),q(t)),A(t)),K)$ & $A(t) = (a \leq t$ & $t \leq b$ & $t -$ число$) \to \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_a^b (f(p(t),q(t))dp(t)/dt + g(p(t),q(t))dq(t)/dt)dt)$

   $\forall_{abfghpqrACK}$(прямкоорд(K) & $C =$ оркривая$(\lambda_t((p(t),q(t),r(t)),A(t)),K)$ & $A(t) = (a \leq t$ & $t \leq b$ & $t -$ число$) \to \int_C f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz = \int_a^b (f(p(t),q(t),r(t))dp(t)/dt + g(p(t),q(t),r(t))dq(t)/dt + h(p(t),q(t),r(t))dr(t)/dt)dt)$

   Второй антецедент идентифицирует параметрическое уравнение кривой, третий - находит промежуток изменения параметра с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 3.

3. Криволинейный интеграл вдоль кривой, составленной из фрагментов.

$\forall_{afgnA}(A = \text{путь}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})) \to \int_A f(x,y)dx + g(x,y)dy = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{a(i)} f(x,y)dx + g(x,y)dy \right))$

Указатель "развертка" определяет идентификацию терма "отображение(...)" с конечным набором и выписывание конечной суммы в виде обычной. Суммируемые интегралы предварительно обрабатываются вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

4. Криволинейный интеграл вдоль отрезка.

   $\forall_{abcdfgABK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (c,d) \to \int_{\text{Отрезок}(A,B)} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_0^1 (f(a+(c-a)t, b+(d-b)t)(c-a) + g(a+(c-a)t, b+(d-b)t)(d-b))dt)$

   Уровень срабатывания равен 3.

5. Криволинейный интеграл вдоль отрезка кривой.

   $\forall_{abfghABCK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ C = \text{отрезоклинии}(\text{точки}(A,K), M, N)\ \&\ \text{коорд}(M, K) = (a,b)\ \&\ \text{коорд}(N,K) = (c,d)\ \&\ ((x,y) \in A) = (y = h(x)\ \&\ B(x))\ \&\ p = \min(a,c)\ \&\ q = \max(a,c)\ \&\ \neg(q-p=0)\ \&\ \forall_x(x-\text{число}\ \&\ 0 \le x-p\ \&\ 0 \le q-x \to B(x)) \to \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \text{sg}(c-a)\int_p^q (f(x,h(x)) + g(x,h(x))dh(x)/dx)dx)$

   Второй антецедент усматривает задание кривой в виде отрезка линии и идентифицирует множество A координат точек линии, а также начальную и конечные точки M, N. Третий и четвертый антецеденты определяют координаты точек M, N, используя нормализатор "нормкоорд". Пятый антецедент разрешает условие принадлежности пары (x, y) множеству координат точек кривой относительно неизвестной y. Шестой и седьмой антецеденты находят начало p и конец q промежутка изменения аргумента x между точками M, N. Они используют нормализаторы "нормминимум", "нормамаксимум". Восьмой антецедент с помощью проверочного оператора убеждается в различии точек p, q, а девятый - с помощью вспомогательной задачи на доказательство проверяет, что все точки промежутка относятся к области варьирования абсциссы x при прохождении кривой. Уровень срабатывания равен 4.

6. Случай полного дифференциала.

   $\forall_{abcdfgpqrsABCDK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ df(x,y)/dy - dg(x,y)/dx = 0\ \&\ \text{коорд}(\text{началопути}(C), K) = (a,b)\ \&\ \text{коорд}(\text{конецпути}(C), K) = (c,d)\ \&\ \text{непрдифф}(\lambda_{xy}(f(x, y), x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}), A)\ \&\ \text{непрдифф}(\lambda_{xy}(g(x,y), x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}), B)\ \&\ \text{точкипути}(C) \subseteq \text{точки}(D,K)\ \&\ D \subseteq A\ \&\ D \subseteq B\ \&\ \forall_y(y-\text{число}\ \&\ r \le y\ \&\ y \le s \to (a,y) \in D)\ \&\ \forall_x(x-\text{число}\ \&\ p \le x\ \&\ x \le q \to (x,d) \in D)\ \&\ \text{односвязно}(D)\ \&\ p = \min(a,c)\ \&\ q = \max(a,c)\ \&\ r = \min(b,d)\ \&\ s = \max(b,d) \to \int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \text{sg}(d-b)\int_r^s g(a,y)dy + \text{sg}(c-a)\int_p^q f(x,d)dx)$

   Рассматривается случай, когда под интегралом расположен полный дифференциал. Тогда (при выполнении сопровождающих условий) кривую C можно не уточнять, а лишь указывать ее концы. Поэтому вместо посылки, определяющей кривую, прием ищет в контексте посылку вида "точкипути$(C) \subseteq$ точки(D, K)". Она идентифицируется с седьмым антецедентом и вводит в рассмотрение некоторую область D, внутри которой лежит кривая. Второй антецедент проверяет, что интегрируется полный дифференциал. Его левая честь упрощается в о.д.з.

вспомогательной задачей на преобразование. Третий и четвертый антецеденты, используя нормализатор "норкоорд", определяют координаты $(a, b), (c, d)$ начальной и конечной точек кривой. Пятый и шестой антецеденты, используя синтезатор "облнепрдифф", определяют некоторые множества A, B, в которых функции f, g непрерывно дифференцируемы. Восьмой и девятый антецеденты, обрабатываемые проверочными операторами, убеждаются в том, что эти множества содержат область D. Десятый и одиннадцатый антецеденты, обрабатываемые вспомогательными задачами на доказательство, устанавливают, что левая и верхняя стороны прямоугольника, определяемого концами кривой C, включаются в область D. Это необходимо для составления ломаной, вдоль которой будет выполняться фактическое интегрирование. Двенадцатый антецедент, используя проверочный оператор "усмодносвязно", убеждается в том, что D есть односвязная область. Уровень срабатывания равен 5. Для интегрирования вдоль двух других сторон прямоугольника создан аналогичный прием. Кроме того, рассмотрен случай, когда отсутствует посылка, связывающая область D с кривой C:

$\forall_{abcdfgpqrsABCDK}$(прямкоорд$(K)$ & $df(x,y)/dy - dg(x,y)/dx = 0$ & коорд(началопути$(C), K) = (a, b)$ & коорд(конецпути$(C), K) = (c, d)$ & непрдифф($\lambda_{xy}(f(x, y), x-$число & $y-$число$), A)$ & непрдифф($\lambda_{xy}(g(x, y), x-$число & $y-$число$), B)$ & компсвязности$(A \cap B, D)$ & односвязно(D) &$\forall_y(y -$ число & $r \leq y$ & $y \leq s \rightarrow (a, y) \in D)$ & $\forall_x(x -$ число & $p \leq x$ & $x \leq q \rightarrow (x, d) \in D)$ & точкипути$(C) \subseteq$ точки(D, K) & $p = \min(a, c)$ & $q = \max(a, c)$ & $r = \min(b, d)$ & $s = \max(b, d) \rightarrow \int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \mathrm{sg}(d - b) \int_r^s g(a, y)dy + \mathrm{sg}(c - a) \int_p^q f(x, d)dx)$

Область D здесь определяется как компонента связности пересечения множеств A, B, и лишь затем с помощью вспомогательной задачи на доказательство проверяется, что кривая входит в эту область. Для перечисления компонент связности используется синтезатор "компсвязности". Уровень срабатывания приема равен 5. Создана также его версия, соответствующая интегрированию вдоль двух других сторон прямоугольника.

1.5 Ряды

Ряд $\sum_{i=k}^{\infty} a(i)$ представляется на языке решателя как последовательность своих частичных сумм. Формульный редактор прорисовывает ее в виде $\lambda_n(\sum_{i=k}^{n} a(i), n-$натуральное), а в скобочной записи она имеет вид:
"отображение(n натуральное(n) суммавсех(отображение(i и(целое(i) меньшеилиравно(k i))$a(i)$))))".

Сумма ряда при этом прорисовывается обычным образом, а в скобочной записи имеет вид "суммавсех(отображение(i и(целое(i)меньшеилиравно(k i)) $a(i)$)))".

Заметим, что последовательность частичных сумм должна была бы начинаться с $a(k)$, но тогда пришлось бы вводить сдвиг нумерации. Так как все равно первые члены не влияют на сходимость, то выбран технически более простой вариант - роль номера играет верхний индекс суммирования, который всегда начинается с единицы. При этом сумма от k до n при $n < k$ считается равной нулю. Разумеется, выражение $a(i)$ в таких точках может оказаться не определенным. Однако, в решателе в таких случаях повсюду делается допущение (обычное для логических исчислений), что любое правильно построенное выражение для любого набора значений своих переменных имеет какое-то значение. Просто вне области допустимых значений операций мы ничего не знаем про это значение и никак не можем им "воспользоваться".

1.5.1 Общая стандартизация суммы ряда

В этом подразделе собраны несколько простых приемов стандартизации бесконечных сумм, применяемых в сравнительно редко встречающихся ситуациях.

1. Устранение серии нулевых коэффициентов.

   $\forall_{dfg}(\sum_{i=d}^{\infty}(1-(-1)^i)f(i)/g(i) = 2\sum_{i=[d/2]}^{\infty} f(2i+1)/g(2i+1))$

   $\forall_{dfg}(\sum_{i=d}^{\infty}((-1)^i-1)f(i)/g(i) = -2\sum_{i=[d/2]}^{\infty} f(2i+1)/g(2i+1))$

   $\forall_{defg}(e = -[-d/2] \to \sum_{i=d}^{\infty}(1+(-1)^i)f(i)/g(i) = 2\sum_{i=[d/2]}^{\infty} f(2i)/g(2i))$

   Переменная d идентифицируется с целочисленной константой. Целая часть вычисляется нормализатором "нормцелаячасть". Уровень срабатывания равен 0.

2. Сдвиг области суммирования.

   $\forall_{abf}(\sum_{i=a}^{\infty} f(i+b) = \sum_{i=a+b}^{\infty} f(i))$

   Указатель "контекст(позиция(x3 значение(x6 плюс(x9 x2))) вид(x3 плюс(x9 x2)))" идентифицирует в суммируемом выражении A вхождение подвыражения $i+b$. Указатель "новаргумент(x6 x9 извлечение)" определяет идентификацию шаблона $f(\ldots)$ путем преобразования A к виду, у которого все вхождения индекса суммирования расположены только внутри сумм $i+b$. Уровень срабатывания равен 1.

3. Исключение условного выражения под суммой.

   $\forall_{afgn}(\sum_{i=n}^{\infty}((a \text{ при } i=n, \text{ иначе} f(i))g(i)) = ag(n) + \sum_{i=n+1}^{\infty}(f(i)g(i)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{afg}(\sum_{i=a}^{\infty}((f(i) \text{ при } i-\text{even}, \text{ иначе } 0)g(i)) = \sum_{i=-[-a/2]}^{\infty}(f(2i)g(2i)))$

   $\forall_{afg}(\sum_{i=a}^{\infty}((0 \text{ при } i-\text{even}, \text{ иначе } f(i))g(i)) = \sum_{i=[a/2]}^{\infty}(f(2i+1)g(2i+1)))$

   Переменная a идентифицируется с целочисленной константой. Уровень срабатывания равен 2.

4. Вложенные условные выражения: вынесение наружу подслучая для конкретного члена ряда.

   $\forall_{abcinp}(((a \text{ при } i=n, \text{ иначе } b) \text{ при } p, \text{ иначе } c) = (a \text{ при } i=n, \text{ иначе } (b \text{ при } p, \text{ иначе } c)))$

   $\forall_{abcinp}((-(a \text{ при } i=n, \text{ иначе } b) \text{ при } p, \text{ иначе } c) = (-a \text{ при } i=n, \text{ иначе } (-b \text{ при } p, \text{ иначе } c)))$

   В обоих случаях условное выражение расположено под операцией "суммавсех", причем i - один из индексов суммирования. Уровень срабатывания равен 1.

1.5.2 Сходимость рядов

Представление ряда в виде числовой последовательность позволяет воспользоваться предикатом "сходится(x)", означающем сходимость последовательности x. Соответственно с этим, формульный редактор прорисовывает условие сходимости ряда не в традиционном виде "сходится($\sum_{i=k}^{\infty} a(i)$)", а в виде "сходится($\lambda_n(\sum_{i=k}^{n} a(i), n -$ натуральное))".

Простейшие преобразования, созраняющие сходимость

Описание средств, используемых решателем при анализе сходимости рядов, начнем с серии преобразований, упрощающих условие сходимости.

1. Устранение константного множителя в знаменателе.

   $\forall_{afg}(\neg(a = 0) \rightarrow$ сходится$(\lambda_n(f(n)/ag(n), n-$натуральное$)) \leftrightarrow$ сходится$(\lambda_n(f(n)/g(n), n -$ натуральное$)))$

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Устранение внешнего минуса.

   $\forall_f($сходится$(\lambda_n(-f(n), n-$натуральное$)) \leftrightarrow$ сходится$(\lambda_n(f(n), n-$натуральное$)))$

   Уровень срабатывания равен 0.

3. Устранение константного множителя в числителе.

   $\forall_{afg}(\neg(a = 0) \rightarrow$ сходится$(\lambda_n(af(n)/g(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ \neg(a = 0)$ & сходится$(\lambda_n(f(n)/g(n), n -$ натуральное$)))$

   Если задача имеет тип "описать", то выведенная дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев", ускоряющим переход к рассмотрению подслучаев. Уровень срабатывания равен 0.

4. Устранение константного слагаемого.

   $\forall_{af}($сходится$(\lambda_n(f(n) + a, n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$ сходится$(\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)))$

   Уровень срабатывания равен 0.

Установление сходимости последовательности путем обращения к нормализатору "нормпредел"

$\forall_{af}(a = \lim_{n\rightarrow\infty} f(n)$ & $(a -$ число $\ \vee \ a = \infty \ \vee \ a = -\infty \ \vee \ a =$ неопред$) \rightarrow$ сходится$(\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow a -$ число$)$

В отличие от приема, приведенного в разделе "предел последовательности", данный прием не доказывает сходимость, а заменяет условие сходимости на эквивалентное условие "a – число". При анализе сходимости ряда это может позволить получить ответ "ложь". Первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", обращается к нормализатору "нормпредел". Заметим, что при этом $f(n)$ рассматривается как функция вещественной переменной. Второй антецедент выделен указателем "блокпроверок". Первый его дизъюнктивный член обрабатывается проверочным оператором "усмчисло", остальные - сравнивают результат a с логическими символами "плюсбеск", "минусбеск", "неопред". Если общий член последовательности задается с помощью конечных сумм либо произведений, то прием блокируется. Уровень срабатывания приема равен 4.

Доказательство расходимости ряда, общий член которого не стремится к нулю

$\forall_{abf}(\lim_{n\to\infty}\{f(n)\} = a \ \& \ \neg(a = 0) \to \neg(\text{сходится}(\lambda_k(\sum_{m=b}^{k} f(m), k - \text{натуральное}))))$

Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подутверждению "сходится(...)" условия задачи на доказательство. Первый антецедент обращается к нормализатору "нормпредел", рассматривая $f(n)$ как функцию натурального аргумента. Второй антецедент выделен указателем "блокпроверок". Его успешная обработка возможна лишь в случае, когда предел a фактически вычислен. Прием блокируется, если множителем числителя выражения $f(m)$ служит степень минус единицы, так как для этого случая предусмотрен особый прием, приводимый ниже. Уровни срабатывания равны 2 и 5.

$\forall_{abfgh}(\neg(\lim_{i\to\infty} f(i)/g(i) = 0) \to \neg(\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=n}^{n}(-1)^{h(i)} f(i)/g(i), n - \text{натуральное}))))$

Прием аналогичен предыдущему, но отбрасывание степени минус единицы немного усиливает его, так как расширяет класс ситуаций, в которых можно вычислить предел. При обработке антецедента сначала применяется нормализатор "нормпредел", причем отношение $f(i)/g(i)$ рассматривается как функция вещественного аргумента. Затем используется проверочный оператор "усмне0". Уровни срабатывания равны 2 и 5, причем на уровне 2 введен средней степени ограничитель трудоемкости, ослабленный на уровне 5.

Определение предела общего члена ряда при анализе сходимости

Если условием задачи на описание является утверждение о сходимости ряда, то к условиям этой задачи присоединяется требование равенства нулю предела общего члена ряда.

$\forall_{abf}(\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} f(i), n - \text{натуральное})) \ \& \ b = \lim_{i\to\infty} f(i) \to b = 0)$

Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Проверяется, что предел вычислить удалось (выражение b не должно содержать символа "предел") и что он не тождественно нулевой. Задача не должна иметь своими условиями уравнения. Как и в предыдущем пункте, прием блокируется, если множителем числителя выражения $f(i)$ служит степень минус единицы - тогда предусмотрен другой прием. Если общий член содержит конечную сумму либо конечное произведение, то уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 2. Созданы две версии данного приема: одна применяется, если ряд не содерит неизвестных, другая - если он содержит неизвестные. В последнем случае выводимое равенство $b = 0$ предварительно разрешается относительно неизвестных.

$\forall_{abfgh}(\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n}(-1)^{h(i)} f(i)/g(i), n - \text{натуральное})) \ \&$
$b = \lim_{i\to\infty} f(i)/g(i) \to b = 0)$

Прием аналогичен предыдущему. Как и выше, созданы две его версии - для наличия и отсутствия неизвестных в условии сходимости.

Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1. Признак Коши.

$\forall_{abf}(0 \le f(n)$ & $\lim_{n\to\infty}(f(n)^{1/n}) = a$ & $0 < 1 - a \to$ сходится$(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n),$ $m -$ натуральное$)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи. В случае задачи на описание это условие не должно содержать неизвестных. Общий член ряда должен иметь своим обобщенным множителем степенное выражение, у которого каждое слагаемое показателя степени имеет сомножитель вида n^k (допускается случай $k = 1$). Если общий член ряда имеет своим обобщенным сомножителем конечное произведение, факториал либо степень минус единицы, показатель которой зависит от n, то прием блокируется. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому в качестве дополнительных посылок передаются утверждения "$n -$ число$, n -$ целое$, n \to \infty$". Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "нормпредел". Предварительно выражение под пределом упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Проверяется, что результат a не имеет заголовка "предел". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

2. Признак Гаусса.

Для удобства программирования, этот признак представлен в несколько модифицированном виде:

$\forall_{abfghi}(0 \le f(i{+}1)/f(i)$ & $a = \lambda_i(i\ln(f(i{+}1)/f(i)), i-$число$)$ & $b = \lim_{i\to\infty} a(i) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=g}^{n} f(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow b + 1 < 0)$

Утверждение о сходимости расположено в условии задачи. Первый антецедент, используя проверочный оператор, устанавливает знакопостоянство ряда. Предварительно отношение $f(i+1)/f(i)$ обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Второй и третий антецеденты выделены указателями "идентификатор". Начнем со второго антецедента. Выражение под описателем "отображение" в его правой части обрабатывается нормализатором "асимптоценка", снабженным комментариями "сходится", "степень". Это означает, что при получении асимптотической оценки будут отбрасываться только такие члены, которые суть $O(1/i^{\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$. Если обозначить результат применения нормализатора через A, то будем иметь $i\ln(f(i+1)/f(i)) = A + O(1/i^{\varepsilon})$, т.е. $\ln(f(i{+}1)/f(i)) = A/i{+}O(1/i^{1+\varepsilon})$, и при ограниченном A получим $f(i{+}1)/f(i) = 1 + A/i + O(1/i^{1+\varepsilon})$, в соответствии с обычным видом признака Гаусса. Однако, вообще говоря, A может содержать i и не быть ограниченным. Более того, при наличии в выражении для общего члена ряда дополнительных параметров ограниченность либо неограниченность A может зависеть от таких параметров. Из-за этих параметров асимптотическая оценка A может оказаться не доведенной до окончательного результата: при одних значениях параметров одни члены будут давать главную часть, а при других - другие. Поэтому введен третий антецедент, вычисляющий предел b выражения A при $i \to \infty$. При наличии параметров данный предел может определяться условным выражением. Если $b \ne -1$, то заведомо сходимость ряда эквивалентна неравенству $b+1 < 0$. Если $b = -1$, то A ограничено, и для применимости признака Гаусса достаточно убедиться, что при переходе от A к b не были отброшены члены, не являющиеся $O(1/i^{1+\varepsilon})$. Для этого введен специальный фильтр, контролирующий вид выражения A. Если b есть 0 либо $\pm\infty$, либо если i не входит в A, то никакие дополнительные ограничения не нужны. В противном случае имеем ситуацию, когда наличие дополнительных параметров не позволило довести до конца асимптотическую оценку. Здесь предпринимается проверка того, что A имеет вид суммы, у которой единственное слагаемое содержит i, причем при отбрасывании коэффициента данного слагаемого остается выражение, стремящееся к ∞. Тогда при одних значениях параметров b окажется бесконечным, при других - совпадающим с A, и таким образом никакие члены в случае $b = -1$ не отбрасываются. Класс допустиымх выражений A по мере надобности можно расширять, однако для рассмотренных примеров он был достаточным.

Прием имеет также ряд других фильтров, связанных с целосообразностью попытки его применения. Во-первых, при наличии в общем члене тригонометрической операции от аргумента B, содержащего i, предпринимается попытка вычислить предел B при $i \to \infty$. Если она оказывается неудачной, либо предел задается условным выражением или бесконечен, то прием блокируется. Проверяется, далее, что попытка получить асимптотическую оценку A не привела к отказу и что предел b удалось вычислить. Проверяется, что общий член ряда не содержит конечной суммы, зависящей от i. При редактировании ответа задачи на описание прием блокируется. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровни срабатывания равны 5 и 7. Если общий член ряда имеет своим обобщенным множителем логарифм, внутри которого располагается содержащая i сумма, то уровень срабатывания равен 7, иначе он равен 5.

3. Логарифмический признак.

   $\forall_{acdf}(0 \leq f(i)\ \&\ a = -(\lim_{i\to\infty} \ln f(i)/\ln i)\ \&\ (a - \text{число}\ \&\ \neg(a-1=0)\ \vee\ a = \infty\ \vee\ a = -\infty) \to \text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=c}^{n} f(i), n - \text{натуральное})) \leftrightarrow 1 < a)$

   Прием применяется к условию задачи. Общий член ряда должен иметь своим обобщенным множителем логарифм, зависящий от i. Первый антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, убеждается в том, что члены ряда неотрицательны. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Предел в его правой части вычисляется нормализатором "нормпредел", причем отношение логарифмов предварительно обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Третий антецедент обрабатывается проверочными операторами. Если общий член ряда не имеет зависящих от i обобщенных множителей, заголовки которых отличны от символов "дробь", "степень", "минус", "логарифм", то уровень срабатывания равен 2, иначе он равен 4.

4. Интегральный признак.

   $\forall_{abf}(0 \leq f(x)\ \&\ \text{невозрастает}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), (b,\infty))\ \&\ \int_b^\infty f(x)dx = a \to \text{сходится}(\lambda_x(\sum_{i=b}^{x} f(i), x - \text{натуральное})) \leftrightarrow a - \text{число})$

   Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Они устанавливают, что общий член ряда неотрицателен и что функция $f(x)$ монотонно невозрастает на луче (b, ∞). Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что интеграл удалось вычислить - выражение a не должно содержать символа "интеграл". Если общий член ряда содержит зависящие от i конечную сумму, конечное произведение, факториал либо число сочетаний, то прием блокируется. Он блокируется также, если общий член содержит степенное выражение, показатель которого имеет вхождение i, не достижимое из корня этого показателя переходами через арифметические операции, модули и основания степеней. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

5. Асимптотические преобразования общего члена.

   (a) Асимптотика суммы.

   $\forall_{abfghpuv}(\lim_{i\to\infty} f(i)/g(i) = 0$ & $\lim_{i\to\infty}(h(i)\ln(1+f(i)/g(i))) = b$ & b – число & $p(i) = g(i)^{h(i)}u(i)/v(i)$ & $0 \le p(i) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n}(f(i)+g(i))^{h(i)}u(i)/v(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} p(i), n -$ натуральное$)))$

   Функциональная переменная $f(i)$ идентифицируется с некоторым слагаемым рассматриваемой суммы. Первый антецедент проверяет, что это слагаемое мало по сравнению с остатком суммы, второй - что логарифм отношения общих членов исходного и результирующего рядов имеет конечный предел b. Четвертый антецедент определяет общий член $p(i)$ результирующего ряда, его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если рассматриваемая сумма содержит тригонометрическую операцию, зависящую от i, то прием блокируется. Он блокируется также, если решается задача на описание, имеющая какое-либо уравнение. Указатель "дробь" разрешает применять прием к суммам, расположенным не только в числителе, но и в знаменателе. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Асимптотика логарифма факториала.

   $\forall_{dfgh}(0 \le \ln(f(i)!)g(i)/h(i)$ & $\lim_{i\to\infty} f(i) = \infty \to$
   сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} \ln(f(i)!)g(i)/h(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$
   сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} f(i)\ln(f(i))g(i)/h(i), n -$ натуральное$)))$

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому передаются дополнительные посылки "n – натуральное, $n \to \infty$". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", его левая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Общий член результирующего ряда обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Используется указатель "дробь". Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Асимптотика факториала.

   $\forall_{fghk}(0 \le (f(i)!)^k g(i)/h(i)$ & $\lim_{i\to\infty} f(i) = \infty \to$
   сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}(f(i)!)^k g(i)/h(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$
   сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}(f(i))^{kf(i)}\exp(-kf(i))(f(i))^{k/2}g(i)/h(i), n -$натуральное$)))$

   Аналогично предыдущему.

   (d) Обращение к оператору "асимптоценка".

   Кроме перечисленных выше специальных случаев перехода к асимптотически эквивалентному общему члену ряда, для такого перехода применяется также нормализатор "асимптоценка". Здесь созданы следующие приемы:

   $\forall_{adfghpqrstuvwz}(w = \lambda_n(\sum_{i=d}^{n} v(i), n -$ натуральное$)$ & $v(i) = (f(i))^{a(i)}g(i)/h(i)$ & $u = \lambda_i(f(i), i -$ число$)$ & $u(i) = qr(i)/m(i)$ & $p(i) = (r(i))^{a(i)}g(i)/((s(i))^{a(i)}h(i))$ & $0 \le p(i)$ & $m(i) = ts(i)$ & $z = \lim_{i\to\infty} a(i)$ &
   z – число $\to$ сходится$(w) \leftrightarrow q = 0$ & сходится(w) $\vee$
   сходится$(\lambda_n(\sum_{i=d}^{n} p(i), n -$ натуральное$)))$

$\forall_{adfghpqrstuvwz}(w = \lambda_n(\sum_{i=d}^n v(i), n$ – натуральное) & $v(i) = (f(i))^{a(i)}g(i)/h(i)$ & $u = \lambda_i(f(i), i$ – число) & $u(i) = qr(i)/m(i)$ & $p(i) = (r(i))^{a(i)}g(i)/((s(i))^{a(i)}h(i))$ & $p(i) \leq 0$ & $m(i) = ts(i)$ & $z = \lim_{i\to\infty} a(i)$ & z – число $\to$ сходится$(w) \leftrightarrow q = 0$ & сходится(w) $\vee$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=d}^n p(i), n$ – натуральное)))

Первые пять антецедентов выделены указателем "идентификатор". Первый антецедент находит общий член ряда и начальное значение индекса суммирования. Второй - выбирает зависящее от i отличное от переменной основание степени $f(i)$ некоторого сомножителя числителя. Третий антецедент обращается к нормализатору "асимптоценка" для нахождения асимптотической оценки $u(i)$ выражения $f(i)$. Проверяется, что она отлична от $f(i)$. Четвертый антецедент определяет числитель $qr(i)$ и знаменатель $m(i)$ полученной оценки, причем q идентифицируется с произведением всех сомножителей числителя, не зависящих от i. Пятый антецедент упрощает результат замены подвыражения $f(i)$ общего члена ряда на его асимптотическую оценку, в которой отброшены множитель q и не зависящие от i множители знаменателя. Шестой антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, устанавливает знакопостоянство полученного ряда. Наконец, восьмой и девятый антецеденты устанавливают существование конечного предела показателя степени $a(i)$, под которым заключается преобразуемое выражение $f(i)$. Прием блокируется, если общий член ряда содержит условные выражения, факториалы, конечные суммы либо конечные произведения. Он блокируется также, если в общем члене исходного ряда имеется зависящая от i тригонометрическая операция, для которой не усматривается существование конечного предела при $i \to \infty$. Указатель "дробь" разрешает выделение $f(i)$ не в числителе, а в знаменателе. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdfghmpqrstuvw}(w = \lambda_n(\sum_{i=d}^n v(i), n$ – натуральное) & $v(i) = (f(i))^{a(i)}g(i)/h(i)$ & $b = \lim_{i\to\infty}(f(i))^{a(i)}$ & $(b = 0 \vee b = \infty \vee b = -\infty)$ & $u = \lambda_i((f(i))^{a(i)}, i$ – число) & $u(i) = qr(i)/m(i)$ & $p(i) = r(i)g(i)/(s(i)h(i))$ & $0 \leq p(i)$ & $m(i) = ts(i) \to$ сходится$(w) \leftrightarrow q = 0$ & сходится(w) $\vee$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=d}^n p(i), n$ – натуральное)))

$\forall_{abdfghmpqrstuvw}(w = \lambda_n(\sum_{i=d}^n v(i), n$ – натуральное) & $v(i) = (f(i))^{a(i)}g(i)/h(i)$ & $b = \lim_{i\to\infty}(f(i))^{a(i)}$ & $(b = 0 \vee b = \infty \vee b = -\infty)$ & $u = \lambda_i((f(i))^{a(i)}, i$ – число) & $u(i) = qr(i)/m(i)$ & $p(i) = r(i)g(i)/(s(i)h(i))$ & $p(i) \leq 0$ & $m(i) = ts(i) \to$ сходится$(w) \leftrightarrow q = 0$ & сходится(w) $\vee$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=d}^n p(i), n$ – натуральное)))

Приемы аналогичны предыдущим, но нормализатор "асимптоценка" обрабатывает не основание степени $f(i)^{a(i)}$, а всю степень целиком. Предварительно проверяется, что как основание, так и показатель зависят от i и что основание отлично от i. Третий антецедент вычисляет предел b данной степени, четвертый - убеждается в том, что найденный предел нулевой либо бесконечный. Лишь после этого предпринимается обращение к оператору "асимптоценка". Уровень срабатывания приемов равен 6.

6. Деление степенной функции на показательную.

$\forall_{abcd}(0 < b \to \text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=d}^{n} i^a/b^{ci}, n - \text{натуральное})) \leftrightarrow 0 < b^c - 1 \ \vee \ b^c - 1 = 0 \ \& \ a + 1 < 0)$

Уровень срабатывания равен 1.

7. Расходимость гармонического ряда.

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \to \neg(\text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=a}^{m} 1/(nb + c), m - \text{натуральное}))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Признаки сходимости знакопеременных рядов

1. Признак Лейбница.

   $\forall_{abcfg}(0 \leq f(i)/g(i) \ \& \ \text{убываетвточке}(\lambda_i(f(i)/g(i), i - \text{число}), \infty) \ \& \ \lim_{i\to\infty} f(i)/g(i) = 0 \to \text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n}(-1)^{i+b} f(i)/g(i), n - \text{натуральное})))$

   Первый антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, устанавливает, что ряд знакочередующийся: множители при степени минус единицы неотрицательны. Второй антецедент, обрабатываемый проверочным оператором "усмубываетвточке", проверяет, что начиная с некоторого номера i абсолютные величины членов ряда монотонно убывают. Третий антецедент с помощью нормализатора "нормпредел" убеждается в том, что общий член ряда стремится к нулю. Если общий член содержит конечную сумму или конечное произведение, то прием блокируется. Он блокируется также, если $f(i)$ либо $g(i)$ содержит степень минус единицы, показатель которой зависит от i. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

2. Признак Даламбера.

   $\forall_{abdf}(\lim_{n\to\infty} |f(n+1)/f(n)| = a \ \& \ a - 1 < 0 \to \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m - \text{натуральное})))$

   Эта версия приема применяется, если общий член ряда не имеет параметров либо тип задачи отличен от "описать". Предварительно проверяется отсутствие конечных сумм и произведений, зависящих от n, а также зависящих от n тригонометрических операций, аргумент которых не имеет конечного предела. Уровень срабатывания равен 6. Если общий член ряда зависит от параметров, причем решается задача на описание, то применяется другая версия приема:

   $\forall_{abf}(\lim_{n\to\infty} |f(n+1)/f(n)| = a \to \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m - \text{натуральное})) \leftrightarrow a - 1 < 0 \ \vee \ a - 1 = 0 \ \& \ \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m - \text{натуральное})))$

   Прежде всего, проверяется, что общий член ряда имеет своим обобщенным множителем либо степень, показатель которой зависит от n, либо конечное произведение или факториал, зависящие от n. Если общий член имеет тригонометрическую операцию, зависящую от n либо расположенную под описателем "отображение" и зависящую от переменной его связывающей приставки, то прием блокируется. Если общий член имеет своим обобщенным множителем степень, показатель которой зависит от n, но не имеет обобщенным множителем ни степени с отрицательным основанием и зависящим от n показателем, ни конечного произведения, ни факториала, то уровень срабатывания равен 6. Иначе он равен 5.

3. Признак Дирихле.

   $\forall_{adfghp}(h = \lambda_i(f(i), i -$ натуральное$)$ & ограничено$(\sum_{i=a}^{n} h(i))$ & $\lim_{i\to\infty} g(i)/p(i) = 0$ & убываетвточке$(\lambda_i(g(i)/p(i), i -$ число$), \infty) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} f(i)g(i)/p(i), n -$ натуральное$)))$

   Выражение $f(i)$ идентифицируется с произведением всех сомножителей, представляющих собой либо степени синусов или косинусов зависящих от i выражений, либо степени минус единицы с зависящими от i показателями. Проверяется, что это произведение невырожденное. Проверяется также, что внутри $g(i), p(i)$ не встречаются степени, основание которых имеет заголовок "минус". Первый антецедент обрабатывает $f(i)$ нормализатором "стандплюс", обеспечивая таким образом переход от степеней тригонометрических функций к функциям кратных аргументов. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором "ограничено". Конечная сумма выражений $h(i)$ предварительно упрощается с помощью вспомогательной задачи. Левая часть третьего антецедента обрабатывается нормализатором "нормпредел". Последний антецедент усматривает монотонное убывание выражения $g(i)/p(i)$ начиная с достаточно больших i. Уровень срабатывания равен 3.

4. Суммирование двух последовательных членов знакопеременного ряда.

   Для установления сходимости знакопеременного ряда может быть предпринята попытка получить знакопостоянный ряд, сложив два последовательных члена:

   $\forall_{abfgp}(p = \lim_{i\to\infty} f(2i)$ & $g = \lambda_i(f(2i) + f(2i+1), i -$ целое$)$ & $0 \leq g(i) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} f(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow p = 0$ & сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} g(i), n -$ натуральное$)))$

   $\forall_{abfgp}(p = \lim_{i\to\infty} f(2i)$ & $g = \lambda_i(f(2i) + f(2i+1), i -$ целое$)$ & $g(i) \leq 0 \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} f(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow p = 0$ & сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} g(i), n -$ натуральное$)))$

   Общий член ряда должен содержать выражение вида $(-A)^{i+B}$. Первый антецедент вычисляет предел p общего члена для четных значений индекса. Проверяется, что это вычисление оказалось успешным. Второй антецедент находит асимптотическюу оценку суммы двух последовательных членов. Проверяется, что результат $g(i)$ не имеет своим заголовком "плюс", не содержит символа "отказ" и не содержит степени, основание которой имеет заголовок "минус". Неотрицательность либо неположительность $g(i)$ устанавливается проверочным оператором. Если общий член ряда содержит факториал либо конечное произведение, зависящие от i, то уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 4.

5. Асимптотическое преобразование общего члена ряда.

   $\forall_{afg}(g = \lambda_i(f(i), i -$ число$) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} f(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} g(i), n -$ натуральное$)))$

   Прием применяется, если общий член ряда имеет своим обобщенным множителем тригонометрическую операцию, логарифм либо конечную сумму, зависящие от i. Антецедент обращается к нормализатору "асимптоценка". Это обращение сопровождается комментариями "сходится", "суммавсех", означающими, что при отбрасывании членов "$O(A(i))$" нормализатор будет проверять сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |A(i)|$. Уровень срабатывания равен 5.

6. Степенной ряд.

   $\forall_{abfgr}(r = \underline{\lim}_{i\to\infty}\{(|g(i)|/|f(i)|)^{1/i}\}$ & $(r -$ число $\vee\ r = \infty) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^n f(i)b^i/g(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow |b| < r\ \vee\ |b| = r$ & сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^n f(i)b^i/g(i), n -$ натуральное$)))$

   Прием применяется к условию задачи на описание. Выражение b не содержит переменную i, но является неконстантным. При этом параметры выражения b не должны пересекаться с параметрами выражений $f(i), g(i)$. Задача не должна иметь уравнений, переменные которых пересекаются с переменными выражения b. Она также не должна иметь дизъюнктивных условий. Первый антецедент вычисляет радиус сходимости ряда, используя нормализатор "нормнижпредел". Предварительно выражение под пределом упрощается вспомогательной задачей. Заменяющая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 1.

7. Специальная перегруппировка слагаемых.

   $\forall_{abcdfghjrs}($неубывает$(\lambda_i(f(i), i -$ число$), \mathbb{N})$ & $\text{set}_i(i -$ целое & $b \leq i$ & $[f(i)] = j) = \{r(j), \ldots, s(j)\}$ & $0 \leq g(i)/h(i) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=b}^n (-1)^{a[f(i)]} g(i)/h(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$ сходится$(\lambda_n(\sum_{j=[f(b)]}^n ((-1)^{aj} \sum_{i=r(j)}^{s(j)} g(i)/h(i)), n -$ натуральное$)))$

   Группируются конечные фрагменты идущих подряд слагаемых, имеющих один и тот же знак. Первый антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, усматривает, что выражения $f(i)$ образуют неубывающую последовательность. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Используя вспомогательную задачу, он устанавливает, что множество значений индекса суммирования, дающих одно и то же значение величины $[f(i)]$, представляет собой целочисленный отрезок $r(j), \ldots, s(j)$. На нем знак членов ряда сохраняется. Заменяющее выражение представляет собой результат группировки членов в каждом таком отрезке. Уровень срабатывания равен 3.

Сходимость при суммировании степенной функции

$\forall_{ab}($сходится$(\lambda_m(\sum_{n=a}^m 1/n^b, m -$ натуральное$)) \leftrightarrow 0 < b - 1)$

$\forall_{ab}($сходится$(\lambda_m(\sum_{n=a}^m n^b, m -$ натуральное$)) \leftrightarrow b + 1 < 0)$

Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abg}(b = \lim_{x\to\infty} g(x)$ & $(b = \infty\ \vee\ b = -\infty\ \vee\ b -$ число & $\neg(b = 0))$ & $0 < a - 1 \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=c}^n 1/(i^a g(i)), n -$ натуральное$)))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{af}(\lim_{i\to\infty} f(i) = \infty$ & $\forall_b(b -$ число & $0 < b \to \lim_{i\to\infty} f(i)/i^b = 0) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^n (i^a f(i)), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow a < -1)$

$\forall_{af}(\lim_{i\to\infty} f(i) = \infty$ & $\forall_b(b -$ число & $0 < b \to \lim_{i\to\infty} f(i)/i^b = 0) \to$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i)/i^a, n -$ натуральное$)) \leftrightarrow 1 < a)$

Второй антецедент, представляющий собой кванторную импликацию, обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Попытка применить прием инициируется, если $f(i)$ содержит символ логарифма. Уровень срабатывания равен 1.

Сходимость при суммировании экспоненциальной функции

$\forall_{abc}$(сходится($\lambda_n(\sum_{i=c}^n a^{bi}, n -$ натуральное$)) \leftrightarrow |a^b| < 1)$

Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abfg}(p-1<0$ & $0<p+1$ & $\lim_{i\to\infty} f(i)=\infty$ & $\lim_{i\to\infty} g(i)=b$ & $(b-$ число & $\neg(b=0)\ \vee\ b=\infty\ \vee\ b=-\infty)\to$ сходится($\lambda_n(\sum_{i=a}^n p^{f(i)}/g(i), n-$ натуральное$)))$

Уровень срабатывания равен 2.

Упрощение общего члена

$\forall_{fg}(g=\lambda_i(f(i), i-$ целое$)\to$ сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i), n-$ натуральное$))\leftrightarrow$ сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n g(i), n-$ натуральное$)))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение $f(i)$ в его левой части обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, которая кроме обычных целей "упростить", "одз" имеет также цель (суммаряда i), корректирующую упрощение общего члена с учетом потребностей анализа сходимости. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

Попытка оценки конечного произведения в общем члене ряда

$\forall_{abcfgh}(|h(j)|\le c$ & сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n |f(i)c^{b(i)-a(i)+1}/g(i)|, n-$ натуральное$))\to$ сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i)\prod_{j=a(i)}^{b(i)} h(j)/g(i), n-$ натуральное$)))$

$\forall_{abcfgh}(c\le|h(j)|$ & сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n |f(i)/(g(i)c^{b(i)-a(i)+1})|, n-$ натуральное$))\to$ сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i)/(g(i)\prod_{j=a(i)}^{b(i)} h(j)), n-$ натуральное$)))$

Первый антецедент обрабатывается синтезатором: в первом приеме находится верхняя оценка c, во втором - нижняя. Второй антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Попытка воспользоваться приемом предпринимается, если $h(j)$ содержит зависящие от j синус, косинус либо степенное выражение, заголовком основания которого служит символ "минус". Уровень срабатывания приемов равен 4.

Верхняя оценка общего члена ряда в случае периодических множителей

$\forall_{fghp}(f(i)=g(i)h(i)/p(i)$ & сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n |g(i)/p(i)|, n-$ натуральное$))\to$ сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i), n-$ натуральное$)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "перечень(...)" идентифицирует $h(i)$ как невырожденное произведение всех зависящих от i множителей, представляющих собой неотрицательную степень синуса либо косинуса, или степень минус единицы. Второй антецедент обрабатывается с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срсбатывания равен 1.

$\forall_{afghm}(|g(i)|\le a$ & сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n |f(i)a^{m(i)}/h(i)|, n-$ натуральное$))0\le m(i)\to$ сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i)g(i)^{m(i)}/h(i), n-$ натуральное$)))$

Здесь рассматривается некоторый сомножитель $g(i)^{m(i)}$, у которого внутри $g(i)$ встречается зависящий от i синус либо косинус, либо степенное выражение с минусом в основании. Показатель степени $m(i)$ может обращаться в единицу. Первый антецедент обрабатывается синтезатором, находящим верхнюю оценку a. Ему передаются дополнительные посылки, указывающие, что i стремится к бесконечности. Второй антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, третий - проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Разбор случаев по условному выражению, выражающему предел общего члена ряда

$\forall_{abcd}(d + (b \text{ при } a, \text{ иначе } c) = 0 \leftrightarrow a \ \& \ d + b = 0 \ \vee \ \neg a \ \& \ d + c = 0)$

Прием применяется к ранее выведенному уравнению, выражающему равенство предела общего члена ряда нулю. Задача на описание должна иметь также условие с символом "сходится". Уровень срабатывания равен 0.

1.5.3 Разложение в ряд Тейлора

Для разложения в ряд Тейлора создается задача на преобразование, имеющая цель (рядтейлора x A). Здесь x - переменная, по которой происходит разложение, A - выражение, задающее точку разложения. Выражение t, которое нужно разложить в ряд, является условием задачи. Приемы, используемые при разложении, собраны в нормализаторе "рядтейлора". Обращение к этому нормализатору предпринимается приемом, реализованном на ЛОСе. Этот прием включен в программу символа "преобразовать", так как никаких специфических символов в преобразуемом выражении здесь выделить нельзя. Прием усматривает указанную выше цель и сразу же обращается к нормализатору. Если результат содержит символ "суммавсех", выполняется замена. Уровень срабатывания равен 2. Заметим, что цель (рядтейлора x A) используется как в вещественнозначном, так и в комплексном случаях. Соответственно, вместо нормализатора "рядтейлора" во втором случае берется нормализатор "рядТейлора". Переключение между вариантами обеспечивается проверочным оператором "усмчисло", анализирующим выражение t.

Нормализатор "рядтейлора"

При обращении к нормализатору ему передается комментарий (рядтейлора x b), задающий переменную разложения x и точку разложения b. Этот комментарий извлекается указателем приема "вход(рядтейлора x b)". Нормализатор корневой, т.е. все приводимые далее приемы применяются только к корневому вхождению.

1. Минус перед выражением.

   $\forall_{dfghklpq}(f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i) \ \& \ p = -q \rightarrow -f(x) = \sum_{i=d}^{\infty}(-g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i)))$

   Указатель "вход(...)" идентифицирует переменную x и точку q. Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", упрощает выражение $-q$. Первый антецедент выполняет рекурсивное обращение к нормализатору для разложения $f(x)$. Комментарии при обращении передаются без изменения. Уровень срабатывания равен 1.

2. Константный множитель.

Приемы аналогичны приему из предыдущего пункта:

$\forall_{abdfghklpqr}(f(x)/r(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i)\ \&\ p = -q \to af(x)/(br(x)) = \sum_{i=d}^{\infty} ag(i)(x+p)^{ik+l}/(bh(i)))$

$\forall_{adfghklpq}(f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i)\ \&\ p = -q \to af(x) = \sum_{i=d}^{\infty} ag(i)(x+p)^{ik+l}/h(i))$

Множители a, b не содержат x. Первый прием применяется к дробным выражениям, второй - к произведениям. Специально рассмотрен случай, когда множителем является сигнум:

$\forall_{adfghklpqr}(f(x)/r(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i)\ \&\ p = -q \to \mathrm{sg}a(x)f(x)/r(x) = \sum_{i=d}^{\infty} \mathrm{sg}a(x)g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i))$

$\forall_{adfghklpq}(f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i)\ \&\ p = -q \to \mathrm{sg}a(x)f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} \mathrm{sg}a(x)g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i))$

Уровень срабатывания равен 1.

3. Степенной множитель.

   Степенной множитель, соответствующий точке разложения, сначала отбрасывается, а после разложения заносится под сумму:

   $\forall_{abcfghklmp}(c = -b\ \&\ f(x)/g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l}/p(i) \to (x+c)^m f(x)/g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l+m}/p(i))$

   $\forall_{abcfhklmp}(c = -b\ \&\ f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l}/p(i) \to (x+c)^m f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l+m}/p(i))$

   $\forall_{abcdfghklmp}(c = -b\ \&\ f(x)/g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l}/p(i) + d \to f(x)/((x+c)^m g(x)) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l-m}/p(i) + d/(x+c)^m)$

   Переменная m идентифицируется с целочисленной константой. Уровень срабатывания приемов равен 1.

4. Сумма.

   (a) Разложение в ряд каждого из слагаемых.

   $\forall_{abcd}(a = b\ \&\ c = d \to a + c = b + d)$

   Указатель "вход(...)" определяет переменную x и точку разложения e. Переменная a идентифицируется с содержащим x и не имеющим заголовка "суммавсех" слагаемым преобразуемой суммы, переменная b - с суммой остальных слсгаемых. Антецеденты выделены указателями "идентификатор", их левые части обрабатываются нормализатором "рядтейлора". Проверяется, что либо результат b имеет заголовок "суммавсех", либо он не содержит переменной x, либо при обращении к нормализатору был введен комментарий "интегряд". Этот комментарий означает, что обращение к нормализатору было предпринято при формальном интегрировании, и может оказаться полезным разложение даже части слагаемых. Аналогичная проверка предпринимается для результата d, причем в этом случае разрешаются также выражения, представляющие собой сумму нескольких членов вида $p(x-e)^n$ либо $p/(q(x-e)^n)$. Уровень срабатывания приема равен 1. Следующие два приема, уровень срабатывания которых равен 2, выполняют стандартизацию результата применения данного приема - приводят его к виду одной бесконечной суммы.

(b) Занесение отдельного слагаемого под знак суммирования.

$\forall_{abcfgp}(c=-b \to \sum_{i=0}^{\infty} f(i)(x+c)^{pi}/g(i)+a=\sum_{i=0}^{\infty}((f(0)/g(0)+a$ при $i=0,$ иначе $f(i)/g(i))(x+c)^{pi}))$

Комментарий "вход(...)" идентифицирует переменную x и точку разложения b. Выражение a не зависит от x, p идентифицируется с натуральной константой. Подвыражение $f(0)/g(0)+a$ упрощается вспомогательной задачей.

$\forall_{bcfgkmnp}(c=-b \to \sum_{i=0}^{\infty} f(i)(x+c)^{pi-k}/g(i)+m/(n(x+c)^k)=\sum_{i=0}^{\infty}((f(0)/g(0)+m/n$ при $i=0,$ иначе $f(i)/g(i))(x+c)^{pi-k}))$

Переменная x не входит в m,n; переменные p,k идентифицируются с натуральными константами.

(c) Сложение двух рядов.

$\forall_{abcfghklp}(c=-b \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i)(x+c)^{ki+l}/g(i)+\sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ki+l}/h(i)=\sum_{i=a}^{\infty}((f(i)/g(i)+p(i)/h(i))(x+c)^{ki+l}))$

Подвыражение $f(i)/g(i)+p(i)/h(i)$ сначала обрабатывается нормализатором "видумножение", а затем упрощается вспомогательной задачей на преобразование.

5. Умножение рядов и возведение ряда в квадрат.

$\forall_{abcdefghkl}(f(x)=\sum_{i=k}^{\infty} a(i)x^i/b(i)\ \&\ g(x)/h(x)=\sum_{i=l}^{\infty} c(i)x^i/d(i)\ \&\ e(i)=\sum_{j=0}^{i} a(j+k)c(i+l-j)/(b(j+k)d(i+l-j)) \to f(x)g(x)/h(x)=\sum_{i=0}^{\infty} e(i)x^{i+k+l})$

$\forall_{abcdefghkl}(f(x)=\sum_{i=k}^{\infty} a(i)x^i/b(i)\ \&\ g(x)=\sum_{i=l}^{\infty} c(i)x^i/d(i)\ \&\ e(i)=\sum_{j=0}^{i} a(j+k)c(i+l-j)/(b(j+k)d(i+l-j)) \to f(x)g(x)=\sum_{i=0}^{\infty} e(i)x^{i+k+l})$

Точкой разложения служит ноль. Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения к нормализатору "рядтейлора". Третий - упрощает коэффициент $e(i)$ общего члена произведения полученных рядов с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Переменные k,l идентифицируются с целочисленными константами. Уровень срабатывания равен 5. Для возведения ряда в квадрат создан следующий прием:

$\forall_{abcfkn}(f(x)=\sum_{i=k}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} a(i)x^{ni+m}/b(i)\ \&\ c=\lambda_i(\sum_{j=0}^{i} a(j+k)a(i+k-j)/(b(j+k)b(i+k-j)), i-\text{целое}) \to (f(x))^2=\sum_{i=0}^{\infty}(c(i)x^{ni+2kn+2m}))$

Уровень срабатывания здесь тоже равен 5.

6. Экспонента.

$\forall_{abcdkx}(k-\text{натуральное}\ \&\ c=-b \to \exp(a(x+c)^k/d)=\sum_{i=0}^{\infty} a^i(x+c)^{ki}/(d^i\cdot i!))$

Точка разложения - b. Выражения a,c,d,k не содержат переменной разложения x. Уровень срабатывания равен 1.

7. Логарифм.

   $\forall_{abcdk}(k$ – натуральное & $b = -c$ & $\neg(a = 0) \to \ln(1 + a(x + b)^k/d) =$
   $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a^i(x + b)^{ki}/(d^i i))$

   Точка разложения - c. Выражения a, b, d, k не содержат переменной x. Указатели "вывод(...)" обеспечивают вывод сопровождающих посылок $-|d/a|^{1/k} - b < x, x < |d/a|^{1/k} - b$. Уровень срабатывания равен 1. Создан ряд приемов, подготавливающих применение данного приема:

   $\forall_{abfg}(0 < f(x) \to \ln((f(x))^{g(x)}) = g(x)\ln f(x))$

   $\forall_{abfg}(0 < f(x)$ & $0 < g(x) \to \ln(f(x)/g(x)) = \ln g(x) - \ln f(x))$

   $\forall_{abfg}(0 < f(x)$ & $0 < g(x) \to \ln(f(x)g(x)) = \ln g(x) + \ln f(x))$

   При обработке антецедентов проверочными операторами используются дополнительные посылки "$x \to a$", где a - точка разложения. Уровни срабатывания равны 1.

8. Синус.

   $\forall_{abcdkx}(k$ – натуральное & $c = -b \to \sin(a(x + c)^k/d) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a^{2i-1}(x + c)^{(2i-1)k}/((2i - 1)!d^{2i-1}))$

   Точка разложения - b. Выражения a, c, d, k не содержат переменной x. Уровень срабатывания равен 1. Следующие три приема аналогичны данному.

9. Косинус.

   $\forall_{abcdkx}(k$ – натуральное & $c = -b \to \cos(a(x + c)^k/d) =$
   $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a^{2i}(x + c)^{2ik}/((2i)!d^{2i}))$

10. Тангенс.

    $\forall_{abcdkx}(k$ – натуральное & $c = -b \to \mathrm{tg}(a(x + c)^k/d) =$
    $\sum_{i=1}^{\infty} a^{2i-1}2^{2i}(2^{2i} - 1)$числобернулли$(i)(x + c)^{(2i-1)k}/((2i)!d^{2i-1}))$

11. Котангенс.

    $\forall_{abcdkx}(k$ – натуральное & $c = -b \to \mathrm{ctg}(a(x + c)^k/d) =$
    $\sum_{i=0}^{\infty} a^{2i-1}2^{2i}(1$ при $i = 0,$ иначе $-$ (числобернулли$(i)))(x + c)^{(2i-1)k}/((2i)!d^{2i-1}))$

12. Степенная функция.

    $\forall_{abcdkmx}(k$ – натуральное & $c = -b$ & $\neg(a = 0) \to (1 + a(x + c)^k/d)^m =$
    $\sum_{i=0}^{\infty} a^i \prod_{j=0}^{i-1}(m - j)(x + c)^{ki}/(d^i i!))$

    $\forall_{abcdekmx}(k$ – натуральное & $c = -b$ & $\neg(d = 0)$ & $\neg(a = 0) \to$
    $1/(d + a(x + c)^k/e)^m = 1/d^m \sum_{i=0}^{\infty}(-a)^i \prod_{j=0}^{i-1}(m + j)(x + c)^{ki}/(d^i e^i i!))$

    Точка разложения - b. Выражения a, c, d, e, k, m не содержат переменной разложения x. Указатели "вывод" обеспечивают занесение в список посылок неравенств, ограничивающих интервал сходимости. Уровень срабатывания приемов равен 1.

13. Преобразование произведения тригонометрических функций к виду суммы.

    Следующие приемы подготавливают возможность применения приемов разложения синуса и косинуса, преобразуя степени и произведения тригонометрических функций в суммы:

$\forall_{abk}((\sin a)^k = b \to (\sin a)^k = b)$

$\forall_{abk}((\cos a)^k = b \to (\cos a)^k = b)$

$\forall_{abk}((\cos d)^m(\sin a)^k = b \to (\cos d)^m(\sin a)^k = b)$

Переменные k, m идентифицируются с натуральными константами. Переменная разложения не входит в a, d. Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "стандплюс", которому передается комментарий "видумножение".

14. Явное указание серий нулевых коэффициентов

Чтобы получить стандартное представление ряда по последовательным натуральным показателям степени, вводятся условные выражения, формально устраняющие нулевые "пробелы":

$\forall_{abcdfgkmnp}(m = kp+n \,\&\, d = -c \to b+\sum_{i=a}^{\infty} f(i)(x+d)^{ki+m}/g(i) = b+\sum_{i=ka+m}^{\infty}(f((i-m)/k)/g((i-m)/k) \text{ при } i (\mathrm{mod}\ k) = n, \text{ иначе } 0)(x+d)^i)$

Переменная k идентифицируется с натуральной константой, m - с целочисленной. Первый антецедент, выделенный указателем "программа", делит m на k с остатком. Дробное выражение в заменяющей части упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Если разложение в ряд предпринимается для формального интегрирования, то данный прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

15. Добавление тождественно нулевых младших членов.

Преобразование предпринимается для "выравнивания" диапазонов суммирования нескольких рядов в общей сумме.

$\forall_{abcf}(c = -b \to a + \sum_{i=1}^{\infty}((f(i) \text{ при } i (\mathrm{mod}\ 2) = 1, \text{ иначе } 0)(x+c)^i) = a + \sum_{i=0}^{\infty}((f(i) \text{ при } i(\mathrm{mod}\ 2) = 1, \text{иначе } 0)(x+c)^i))$

Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcdefg}(b - \text{целое} \,\&\, 0 \le b \,\&\, c = -d \to e + \sum_{i=b}^{\infty} f(i)(x+c)^{i+a}/g(i) = e + \sum_{i=0}^{\infty}((0 \text{ при } i < a+b, \text{ иначе } f(i-a)/g(i-a))(x+c)^i))$

Переменная a идентифицируется с натуральной константой, b может равняться нулю. Для случая нулевого a предусмотрен отдельный прием:

$\forall_{bcdefg}(b\text{−целое} \,\&\, 0 \le b \,\&\, c = -d \to e+\sum_{i=b}^{\infty} f(i)(x+c)^i/g(i) = e+\sum_{i=0}^{\infty}((0 \text{ при } i < b, \text{ иначе } f(i)/g(i))(x+c)^i))$

Здесь выражение b отлично от нуля. Уровни срабатывания двух последних приемов равны 5.

16. Вспомогательные преобразования, применяемые перед разложением.

   (a) Разложение на простейшие дроби.
   $\forall_{abc}(a = b/c \to b/c = a)$
   Разложение выполняется в нуле. Выражения b, c при раскрывании скобок приводятся к виду многочленов относительно переменной разложения x, причем степень знаменателя больше единицы. Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "простейшиедроби", снбженным комментарием (переменная x). Результат a представляет собой сумму. Уровень срабатывания приема равен 3.

(b) Преобразование дроби с суммой в числителе к виду суммы дробей.
$\forall_{abc}((a+b)/c = a/c + b/c)$
Уровень срабатывания равен 2.

(c) Синус либо косинус суммы.
$\forall_{ab}(\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$
$\forall_{ab}(\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$
Переменная разложения x входит в a и не входит в b. Разложение выполняется в нуле. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Раскрывание скобок.
$\forall_{abcd}(a = (b+c)d \rightarrow (b+c)d = a)$
Правая часть антецедент обрабатывается нормализатором "стандплюс". Переменная разложения встречается хотя бы в одном из выражений b, c. Уровень срабатывания равен 4.

(e) Преобразование экспоненты к стандартному виду.
$\forall_{abfx}(0 < a \rightarrow a^{f(x)+b} = a^b \exp(\ln(a)f(x)))$
Переменная b идентифицируется с суммой всех слагаемых показателя, не зависящих от переменной разложения x. Основание степени a не зависит от x. Переменная f функциональная. Либо b отлично от нуля, либо a отлично от числа e. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Переход к тангенсу.
$\forall_{abc}(a \sin c / b \cos c = a \operatorname{tg} c / b)$
Уровень срабатывания этого и следующего приемов равен 2.

(g) Переход к котангенсу.
$\forall_{abc}(a \cos c / b \sin c = a \operatorname{ctg} c / b)$

(h) Устранение иррациональности в знаменателе.
$\forall_{abcdp}(b^2c - d^2 = p \rightarrow a/(b\sqrt{c} + d) = ab\sqrt{c}/p - ad/p)$
Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором разложения на множители "видумножение". Проверяется, что результат p не является суммой. Уровень срабатывания равен 4.

17. Почленное интегрирование ряда для производной.

$\forall_{abcfgkmpq}(g = \lambda_x(df(x)/dx, x - \text{число})\ \&\ g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m}/q(i)\ \&\ c = -b\ \&\ 0 \leq ak + m \rightarrow f(x) = f(b) + \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m+1}/(q(i)(ik+m+1)))$

Указатель "корень" необходим для идентификации функциональной переменной $f(x)$ с преобразуемым термом. Указатель "вход(...)" определяет переменную разложения x и точку разложения b. Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор". Производная в правой части первого из них обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. К левой части второго антецедента рекурсивным образом применяется нормализатор "рядтейлора". Переменная k идентифицируется с натуральной константой, m - с целочисленной. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Попытка применения приема предпринимается, если преобразуемый терм представляет собой арктангенс, арксинус, арккосинус либо логарифм, быть может, домноженный на x. В этих случаях дифференцирование существенно упрощает выражение. Если преобразуемый терм содержит символ "суммавсех", то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4. В рассмотренном приеме разложение в ряд производной начиналось с неотрицательной степени. Если эта степень отрицательная, то применяются следующие приемы:

$\forall_{abcfgkmpqr}(g = \lambda_x(df(x)/dx, x - \text{число})\ \&\ g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m}/q(i)\ \&\ ak + m < 0\ \&\ r = -[(m+1)/k]\ \&\ \neg(\exists_i(i - \text{целое}\ \&\ a \le i\ \&\ ki + m = -1))\ \&\ h(x) = \sum_{i=a}^{r-1} p(i)(x+c)^{ik+m+1}/(q(i)(ik+m+1))\ \&\ \lim_{x\to b+0}(f(x) - h(x)) = s\ \&\ s - \text{число}\ \&\ c = -b \to f(x) = s + \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m+1}/(q(i)(ik+m+1)))$

$\forall_{abcfgkmpqr}(g = \lambda_x(df(x)/dx, x - \text{число})\ \&\ g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m}/q(i)\ \&\ ak + m < 0\ \&\ (ki + m = -1\ \&\ i - \text{целое}\ \&\ a \le i) = (i = r)\ \&\ h(x) = \sum_{i=a}^{r-1} p(i)(x+c)^{ik+m+1}/(q(i)(ik+m+1)) + p(r)\ln(x+c)/q(r)\ \&\ \lim_{x\to b+0}(f(x) - h(x)) = s\ \&\ s - \text{число}\ \&\ c = -b \to f(x) = s + h(x) + \sum_{i=r+1}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m+1}/(q(i)(ik+m+1)))$

Эти приемы аналогичны первому приему данного пункта. Отдельно рассмотрены случаи, когда среди отрицательных показателей степени нет минус единицы и когда она есть. Уровни срабатывания равны 4.

18. Переход к разложению в нуле.

    $\forall_{abfpq}(f(y+b) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)y^{ki+m}/q(i) \to f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x-b)^{ki+m}/q(i))$

    Точка разложения b отлична от нуля. Левая часть антецедента сначала упрощается вспомогательной задачей на преобразование, а затем обрабатывается нормализатором "рядтейлора", причем при обращении комментарий (рядтейлора x b) заменяется на комментарий (рядтейлора y 0). Если преобразуемый терм содержит символ "суммавсех", то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1. При этом программа данного приема размещена компилятором после программ ранее перечисленных приемов уровня 1, так что попытка применить его предпринимается лишь при неудачной попытке непосредственного разложения.

19. Усмотрение зависимости от натуральной степени переменной.

    $\forall_{afgkmnpq}(g(x^k) = f(x)\ \&\ g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)x^{mi+n}/q(i) \to f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)x^{kmi+kn}/q(i))$

    Прежде всего, идентифицируются переменная разложения x и точка разложения c. Проверяется, что $c = 0$ и что преобразуемый терм имеет не менее двух вхождений переменной x. Указатель "контекст(...)" определяет идентификацию k как наибольшего общего делителя натуральных коэффициентов показателей степени при x, имеющихся в преобразуемом терме. Проверяется, что k не равно единице. Указатель "новаргумент(g x извлечение)" определяет идентификацию функциональной переменной g путем такого преобразования $f(x)$, чтобы переменная x встречалась только в виде x^k. Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "рядтейлора". Уровень срабатывания равен 1.

20. Произведение экспоненты на тригонометрическую функцию.

    $\forall_{abcx}(c = \sqrt{a^2+b^2}\ \&\ \neg(c = 0) \to \exp(ax)\cos(bx) = \sum_{i=0}^{\infty} c^i \cos(i\arccos(a/c))x^i/i!)$

    $\forall_{abcx}(c = \sqrt{a^2+b^2}\ \&\ \neg(c = 0) \to \exp(ax)\sin(bx) = \sum_{i=0}^{\infty} c^i \mathrm{Sg}(b)\sin(i\arccos(a/c))x^i/i!)$

Напоминаем, что $\mathrm{Sg}(b)$ равно 1 при $b \geq 0$, а иначе равно -1. Точкой разложения служит 0. Уровень срабатывания приемов равен 2.

21. Отбрасывание нулевого младшего члена.
$\forall_{afx}(\sum_{i=a}^{\infty}((0 \text{ при } i = a, \text{ иначе } p(i))f(i)) = \sum_{i=a+1}^{\infty} p(i)f(i))$
Уровень срабатывания равен 1.

1.5.4 Применение локальной формулы Тейлора

Чтобы разложить заданное выражение $f(x)$ по локальной формуле Тейлора относительно переменной x в точке A, ограничиваясь членами степени не выше n, используется задача на преобразование с условием $f(x)$ и целью (формулатейлора x A n). Собственно разложение обеспечивается нормализатором "формулатейлора", приемы которого перечисляются ниже. Для обращения к нормализатору служит следующий прием:

$\forall_{afgx}(g(x) = f(x + a) \ \&\ x - \text{число} \rightarrow f(x) = g(x - a))$

Прием имеет заголовок "втоpойтерм". Указатель "контекст(цель(формулатейлора терм(x23) терм(x1) терм(x14)))" обеспечивает идентификацию переменной разложения x, точки разложения a и степени разложения n. Указатель "корень" необходим для идентификации функциональной переменной $f(x)$ с условием задачи на преобразование. Правая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "фомулатейлора", которому передаются комментарии "(переменная x)" и "(степень n)". Нормализатор предназначен для получения разложения в нуле. Проверяется, что результат $g(x)$ имеет вид многочлена относительно x. Уровень срабатывания равен 2. Нормализатор использует стандартные разложения элементарных функций. Если его возможностей оказалось недостаточно, то на уровне 5 предприниается существенно более трудоемкая попытка получить разложение с помощью непосредственного вычисления производных:

$\forall_{afn}(a \in \mathrm{set}_x(\text{одз}(f(x))) \ \&\ x - \text{число} \rightarrow f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(d^i f(a)/da^i \cdot (x - a)^i)/i!)$

Истинность первого антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Кратные производные вычисляются вспомогательными задачами на преобразование. Заметим, что хотя каждая их них вычисляется независимо от других, но буфер обращений к нормализатору "нормпроизводная" сохраняет предыдущие результаты дифференцирования, и сколь-нибудь существенного дублирования не происходит.

Наконец, упомянем еще один прием, обращающийся к нормализатору "формулатейлора". Он используется для обработки условия задачи на описание, имеющего вид $f(x) = O((x + a)^n)$. Предполагается, что в контексте данного условия расположен терм "$x \rightarrow c$", где $c = -a$. Прием находит разложение $f(x)$ в точке $-a$ до степени $n - 1$ и приравнивает все его члены нулю:

$\forall_{abcfnpx}((x \rightarrow c) \ \&\ f(x - a) = \sum_{i=1}^{p}(b(i)x^{i-1}) \ \&\ c = -a \rightarrow f(x) = O((x + a)^n) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, p\} \rightarrow b(i) = 0))$

Первый антецедент берется в контексте. Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "формулатейлора". Указатель "видмногочлена(фикс(2 2))" обеспечивает идентификацию степени p и набора коэффициентов $b(1), \ldots, b(p)$ результата разложения. Квантор общности в заменяющей части выделен указателем "развертка", т.е. выписывается в виде конъюнкции равенств. Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор "формулатейлора"

Нормализатор корневой - все приводимые ниже приемы применяются только к корневому вхождению. Разложение выполняется в нуле. Практически во всех приемах заменяющее выражение обрабатывается нормализатором "Норммногочлен", раскрывающим скобки и приводящим подобные члены. При этом отбрасываются степени выше n - й, где n берется из комментария (степень n).

1. Плюс. Каждое слагаемое суммы обрабатывается независимо, и результаты складываются:

   $\forall_{abcd}(a = c \ \& \ b = d \to a + b = c + d)$

   Левая части антецедентов обрабатываются нормализатором "формулатейлора". Переменная a идентифицируется с некоторым слагаемым, содержащим переменную разложения x, но не имеющим вида одночлена относительно x.

2. Минус.

   $\forall_{ab}(a = b \to -a = -b)$

   Аналогично предыдущему. Проверяется, что a не является одночленом относительно x.

3. Умножение.

   $\forall_{abcd}(a = c \ \& \ b = d \to ab = cd)$

   Переменная a идентифицируется с сомножителем, зависящим от x. Проверяется, что остаточное произведение тоже зависит от x. Оба антецедента реализуют рекурсивное обращение к нормализатору. Для случая, когда лишь один сомножитель зависит от x, предусмотрен отдельный прием:

   $\forall_{abc}(a = b \to ac = bc)$

   Указатель "перечень(...)" идентифицирует c с невырожденным произведением всех сомножителей, не содержащих x. Проверяется, что остаточное произведение a зависит от x, но не имеет вида x^n.

4. Степень.

   $\forall_{abn}(a = b \to a^n = b^n)$

   Переменная n идентифицируется с натуральной константой, меньшей 5. Выражение a содержит x, но не равно x. Уровень срабатывания данного и всех перечисленных выше приемов нормализатора равен 1. Для случая, когда показатель степени не зависит от x, но не является натуральной константой, создан следующий прием:

   $\forall_{abcdn}(a = c + d \ \& \ \neg(c = 0) \to a^b = c^b + \sum_{i=1}^{n} c^{b-i} \prod_{j=0}^{i-1}(b - j)d^i/i!)$

   Указатель "контекст(...)" идентифицирует по входным комментариям нормализатора переменную разложения x и степень разложения n. Основание степени содержит x. Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "формулатейлора". Результат идентифицируется с суммой $c + d$, где c составлено из всех слагаемых, не содержащих x, d - остаточная сумма (возможно, нулевая). Указатель "развертка" обеспечивает выписывание конечной суммы в заменяющей части как обычной суммы. Нормализаторы преобразуют эту часть к виду многочлена от x. Уровень срабатывания равен 2. Если не удается усмотреть, что c ненулевое, предпринимается попытка применить другой прием:

$\forall_{abchpqkm}(m = kq \ \& \ a = (bx^m/h) + c \ \& \ \neg(b = 0) \to a^{p/q} = x^{kp}(b/h + cx^{-m})^{p/q})$

Переменные p, q идентифицируются с натуральными константами. Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "формулатейлора". По правой части идентифицируются b, h, m, c. Член bx^m/h выбирается наименьшей возможной степени m, т.е. c либо равно 0, либо представляет собой сумму одночленов степени большей m. Первый антецедент убеждается в том, что m делится на q, и находит частное k. Второй сомножитель заменяющего терма обрабатывается нормализатором "формулатейлора", и далее все произведение преобразуется к виду многочлена. Уровень срабатывания равен 2. Наконец, приведем приемы, созданные для случая, когда показатель степени зависит от переменной x:

$\forall_{abc}(a = b + c \to \exp a = \exp(b) + \sum_{i=1}^{n} \exp(b)c^i/i!)$

$\forall_{fg}(0 < f(x) \to (f(x))^{g(x)} = \exp(g(x) \ln f(x)))$

В первом из этих приемов левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "формулатейлора", после чего переменная b идентифицируется с суммой всех не содержащих x слагаемых. Нормализаторы преобразуют заменяющий терм к виду многочлена. Уровень срабатывания равен 1. Второй прием применяется, если основание и показатель степени зависят от x. Он обращается к нормализатору "формулатейлора" для обработки подвыражений $g(x)$, $\ln f(x)$. Затем выражение под экспонентой в заменяющем терме преобразуется к виду многочлена. Уровень срабатывания равен 3.

5. Дробь.

   $\forall_{abcde}(a = c \ \& \ b = d + e \ \& \ \neg(d = 0) \to a/b = cb^{-1})$

   Знаменатель содержит переменную разложения. Левые части первых двух антецедентов и подвыражение b^{-1} заменяющего терма обрабатываются нормализатором "формулатейлора". Правая часть второго антецедента разбивается в невырожденную сумму $d+e$, где d составлено из всех слагаемых, не зависящих от x. Уровень срабатывания равен 1. Если разложение знаменателя не имеет указанного вида, то используется другой прием:

   $\forall_{abcdefkmx}(a = cx^m + d \ \& \ b = ex^k + f \ \& \ 0 \leq m - k \ \& \ \neg(e = 0) \to a/b = (cx^{m-k} + dx^{-k})/(e + fx^{-k}))$

   Левые части первых двух антецедентов и весь заменяющий терм целиком обрабатываются нормализатором "формулатейлора". Степени m, k берутся наименьшими среди степеней соответствующих слагаемых. Уровень срабатывания приема равен 2.

6. Синус.

   $\forall_{abn}(a = b \to \sin a = \sum_{i=1}^{-[-n/2]}(-1)^{i-1}b^{2i-1}/(2i-1)!)$

   Выражение a содержит переменную разложения x. Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "формулатейлора". Проверяется, что все слагаемые результата зависят от x. Если это не выполнено, применяется следующий прием:

   $\forall_{abc}(a = b + c \to \sin a = \sin b \cos c + \cos b \sin c)$

Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "формулатейлора". С учетом попытки применения предыдущего приема, это означает, что результат разложения просто берется из буфера. Переменная b идентифицируется с невырожденной суммой всех слагаемых, не содержащих x, переменная c - с невырожденной остаточной суммой. Выражения $\sin c, \cos c$ в заменяющем терме обрабатываются нормализатором "формулатейлора", после чего весь этот терм преобразуется к виду многочлена. Уровни срабатывания равны 1.

7. Косинус.

   Аналогично случаю синуса, созданы следующие два приема:

   $\forall_{abn}(a = b \to \cos a = \sum_{i=1}^{[n/2]}(-1)^i b^{2i}/(2i)!)$

   $\forall_{abc}(a = b + c \to \cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c)$

8. Логарифм.

   $\forall_{abcn}(a = b + c \ \& \ \neg(b = 0) \to \ln a = \ln b + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}c^i/(ib^i))$

   Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "формулатейлора". Переменная b идентифицируется с невырожденной суммой всех не содержащих x слагаемых, переменная c - с невырожденной остаточной суммой. Уровень срабатывания равен 1.

9. Тангенс.

   $\forall_a(\mathrm{tg}\, a = \sin a/\cos a)$

   Выражение a содержит x. Числитель и знаменатель заменяющего выражения, а также все это выражение целиком обрабатываются нормализатором "формулатейлора". Уровень срабатывания равен 1.

10. Котангенс.

    $\forall_a(\mathrm{ctg}\, a = \cos a/\sin a)$

    Аналогично случаю тангенса.

1.5.5 Разложение в ряд Фурье

Для разложения в ряд Фурье создается задача на преобразование, имеющая цель (рядфурье x a b). Здесь x - переменная, по которой происходит разложение, $[a, b]$ - промежуток, на котором требуется получить разложение. Ряд Фурье выписывается формально, без анализа условий сходимости. Для четных либо нечетных функций используются следующие приемы:

$\forall_{abfpql}(l = q - p \ \& \ 0 < l \ \& \ \text{четнаяфункция}(\lambda_x(f(x), x - \text{число})) \ \&$
$a = \lambda_i(2/l \int_p^q f(x)\cos(2\pi i x/l)dx, i - \text{целое}) \ \& \ b = \int_p^q f(x)dx \to$
$f(x) = b/l + \sum_{i=1}^{\infty}(a(i)\cos(2\pi i x/l)))$

$\forall_{abfpql}(l = q - p \ \& \ 0 < l \ \& \ \text{нечетнаяфункция}(\lambda_x(f(x), x - \text{число})) \ \&$
$a = \lambda_i(2/l \int_p^q f(x)\sin(2\pi i x/l)dx, i - \text{целое}) \ \& \ b = \int_p^q f(x)dx \to$
$f(x) = b/l + \sum_{i=1}^{\infty}(a(i)\sin(2\pi i x/l)))$

Указатель "контекст(цель(рядфурье x p q))" идентифицирует переменную разложения x и промежуток разложения $[p, q]$. Проверяется, что $p = -q$. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Интегралы вычисляются с помощью вспомогательных задач на преобразование, прчием предпринимается проверка того, что интегрирование удалось выполнить. Уровень срабатывания равен 1. Для общего случая создан следующий прием:

$\forall_{abcfpql}(l = q - p \ \& \ 0 < l \ \& \ a = \lambda_i(2/l \int_p^q f(x)\cos(2\pi ix/l)dx, i - \text{целое}) \ \&$
$b = \lambda_i(2/l \int_p^q f(x)\sin(2\pi ix/l)dx, i - \text{целое}) \ \& \ c = \int_p^q f(x)dx \rightarrow$
$f(x) = c/l + \sum_{i=1}^{\infty}(a(i)\cos(2\pi ix/l)) + \sum_{i=1}^{\infty}(b(i)\sin(2\pi ix/l)))$

Уровень срабатывания этого приема равен 2.

1.5.6 Суммирование рядов

Нормализатор "суммаряда"

Прежде всего, для суммирования рядов применяется пакетный нормализатор "суммаряда", основанный на нескольких стандартных суммах и приводящих к ним несложных преобразованиях.

1. Усмотрение стандартных разложений в ряд Тейлора.

   (a) Экспонента.
   $\forall_{abpqx}(0 \leq a + q \rightarrow \sum_{i=a}^{\infty} x^{bi+p}/(i+q)! = x^{p-bq}\exp(x^b) - \sum_{i=0}^{a+q-1} x^{bi+p-bq}/i!)$
   Переменные a, q идентифицируются с целочисленными константами.
   $\forall_a(a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \sum_{i=a}^{\infty} 1/i! = e - \sum_{i=0}^{a-1} 1/i!)$
   Уровень срабатывания приемов равен 1.

   (b) Синус.
   $\forall_{abcx}(a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a - 1 \rightarrow \sum_{i=a}^{\infty}(-1)^{i+b}x^{2i+c}/(2i-1)! = (-1)^{b+1}x^{c+1}\sin x - \sum_{i=1}^{a-1}(-1)^{i+b}x^{2i+c}/(2i-1)!)$
   $\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a - 1 \rightarrow \sum_{i=a}^{\infty}(-1)^{i+b}/(2i-1)! = (-1)^{b+1}\sin 1 - \sum i = 1^{a-1}(-1)^{i+b}/(2i-1)!)$
   Уровень срабатывания равен 1. Для подготовки возможности срабатывания этих приемов создан еще один прием, срабатывающий на уровне 2:
   $\forall_{abcfg}(b - \text{целое} \ \& \ c = (a+1)/2 \rightarrow \sum_{i=b}^{\infty} f(i)/((2i+a)!g(i)) = \sum_{i=b+c}^{\infty} f(i - c)/((2i-1)!g(i-c)))$
   Здесь переменная a идентифицируется с целочисленной нечетной константой, отличной от -1. Выражения $f(i-c), g(i-c)$ в заменяющем терме упрощаются вспомогательными задачами на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Косинус.
   Непосредственное усмотрение ряда для косинуса выполняют следующие приемы, срабатывающие на уровне 1:
   $\forall_{abcx}(c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow \sum_{i=c}^{\infty}(-1)^{i+a}x^{2i+b}/(2i)! = (-1)^a x^b \cos x - \sum_{i=0}^{c-1}(-1)^{i+a}x^{2i+b}/(2i)!)$
   $\forall_{ab}(c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow \sum_{i=c}^{\infty}(-1)^{i+a}/(2i)! = (-1)^a \cos 1 - \sum_{i=0}^{c-1}(-1)^{i+a}/(2i)!)$
   Для подготовки срабатывания этих приемов служит следующее преобразование, выполняемое на уровне 2:

$\forall_{abcfg}(b$ – целое & $c = a/2 \rightarrow \sum_{i=b}^{\infty} f(i)/((2i+a)!g(i)) = \sum_{i=b+c}^{\infty} f(i-c)/((2i)!g(i-c)))$

Здесь переменная a идентифицируется с четной целочисленной константой.

(d) Степенная функция.

$\forall_{abcx}(c$ – целое & $0 \leq c \rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1}(a-j)x^{i+b}/i! = x^b(1+x)^a - \sum_{i=0}^{c-1} \prod_{j=0}^{i-1}(a-j)x^{i+b}/i!)$

$\forall_{abc}(0 \leq c \rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} a^{bi+d} = a^d/(1-a^b) - \sum_{i=0}^{c-1} a^{bi+d})$

В первом случае выводятся сопровождающие посылки $0 < x+1, 0 < 1-x$, во втором - посылка $|a^b| < 1$. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Логарифм.

$\forall_{abc}(c$ – целое & $0 \leq c-1 \rightarrow \sum_{i=c}^{\infty}(-1)^{i+a}x^{i+b}/i = (-1)^{a+1}x^b \ln(x+1) - \sum_{i=1}^{c-1}(-1)^{i+a}x^{i+b}/i)$

Выводятся сопровождающие посылки $0 < x+1, 0 \leq 1-x$. Уровень срабатывания равен 1.

2. Суммы некоторых числовых рядов.

Уровни срабатывания приводимых в этом разделе приемов равны 1:

(a) Сумма чисел, обратных квадратам.

$\forall_m(\sum_{i=m}^{\infty} 1/i^2 = \pi^2/6 - \sum_{i=1}^{m-1} 1/i^2)$

Переменная m идентифицируется с натуральной константой.

(b) Сумма знакочередующегося гармонического ряда.

$\forall_{am}(\sum_{i=m}^{\infty}(-1)^{i+a}/i = (-1)^{a+1}\ln 2 - \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+a}/i)$

(c) Сумма знакочередующегося ряда чисел, обратных квадратам.

$\forall_{am}(\sum_{i=m}^{\infty}(-1)^{i+a}/i^2 = (-1)^{a+1}\pi^2/12 - \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+a}/i^2)$

3. Обобщенное сокращение для факториалов.

$\forall_{abcdfgnpqrst}(\neg(c = 0)$ & $p = bc - ad$ & $r = \sum_{i=q+1}^{\infty} f(i)(ai+b)^{n-1}/((ci+d-1)!g(i))$ & $s = \sum_{i=q}^{\infty} f(i)(ai+b)^{n-1}/((ci+d)!g(i))$ & $t = af(q)(cq+d)(aq+b)^{n-1}/((cq+d)!g(q)) \rightarrow \sum_{i=q}^{\infty} f(i)(ai+b)^n/((ci+d)!g(i)) = (ar+at+ps)/c)$

Преобразование основано на том, что множитель $ai+b$ представляется как сумма константы и кратного последнего множителя факториала $ci+d$. Переменные a, c, n идентифицируются с натуральными константами, переменные b, d - с целочисленными. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Третий и четвертый антецеденты выполняют рекурсивные обращения к нормализатору "суммаряда". Проверяется, что результаты r, s не содержат символа "суммавсех". Уровень срабатывания равен 2.

4. Сдвиг области суммирования.

Для упрощения выражения под суммой может быть предпринята замена переменной суммирования:

$\forall_{abfm}(m$ – целое $\rightarrow \sum_{n=a}^{\infty} f(n) = \sum_{n=a+m}^{\infty} f(n-m))$

Указатель "контекст(...)" определяет идентификацию подвыражения вида $n+m$, не являющегося показателем степени при минус единице. Проверяется, что n не имеет других вхождений в суммируемое выражение, отличных от вхождений вида $(-1)^{n+A}$. Общий член нового ряда упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

5. Раскрывание скобок в суммируемом выражении.

   $\forall_{fghpqrs}(r = \sum_{i=a}^{\infty} f(i)g(i)/p(i)$ & $s = \sum_{i=a}^{\infty} f(i)h(i)/p(i) \rightarrow \sum_{i=a}^{\infty} f(i)(g(i)+h(i))/p(i) = r+s)$

   Правые части обоих антецедентов обрабатываются нормализатором "суммаряда". Проверяется, что результаты не содержат символа "суммавсех". Уровень срабатывания равен 3.

6. Вынесение константного множителя.

   $\forall_{abcfgs}(s = \sum_{i=c}^{\infty} f(i)/g(i) \rightarrow \sum_{i=c}^{\infty} af(i)/(bg(i)) = as/b)$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 1.

7. Вынесение минус единицы из основания степени.

   $\forall_{afghp}(\sum_{i=a}^{\infty}(-p(i))^{f(i)}g(i)/h(i) = \sum_{i=a}^{\infty}(-1)^{f(i)}(p(i))^{f(i)}g(i)/h(i))$

   Выражение $p(i)$ отлично от -1, причем показатель степени $f(i)$ зависит от i. Уровень срабатывания равен 4.

8. Группировка под общий показатель степени.

   $\forall_{abcdefghmp}(p = \sum_{i=m}^{\infty}(a^b d^e)^i g(i)/h(i) \rightarrow \sum_{i=m}^{\infty} a^{bi+c}d^{ei+f}g(i)/h(i) = a^c d^f p)$

   Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "суммаряда", которому передается комментарий "нормминус", блокирующий предыдущий прием. Проверяется, что результат p не содержит символа "суммавсех". Уровень срабатывания равен 4.

Обращение к нормализатору "суммаряда"

Обращение к нормализатору "суммаряда" из сканирования задачи выполняется следующим приемом:

$\forall_{abf}(b = \sum_{i=a}^{\infty} f(i) \rightarrow \sum_{i=a}^{\infty} f(i) = b)$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, не имеющей целей (рядтейлора ...), (рядфурье ...). Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "суммаряда". Проверяется отсутствие в результате b бесконечных сумм. Уровень срабатывания равен 3.

Стандартизация задания области суммирования

$\forall_a(\sum_{i,i-\text{натуральное}} a(i) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i))$

Здесь условие "натуральное(i)" заменяется на "и(целое(i) меньшеилиравно(1 i))", так как последняя версия используется во всех остальных приемах, связанных с рядами. Уровень срабатывания равен 1.

Попытка суммирования путем перехода к конечным суммам

$\forall_{abf}(b = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=a}^{n} f(i) \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i) = b)$

Преобразуемый ряд входит в условие задачи на преобразование, не имеющей целей (рядтейлора ...), (рядфурье ...). Общий член ряда представляет собой сумму, причем параметр i не встречается в показателях степени. Второй антецедент предпринимает попытку упростить конечную сумму $\sum_{i=a}^{n} f(i)$ с помощью вспомогательной задачи на преобразование и найти ее предел, используя нормализатор "нормпредел". Проверяется. что результат b не содержит символа "предел". Уровень срабатывания приема равен 2.

Попытка почленного дифференцирования степенного ряда

$\forall_{abcdefghpqs}(p = ad/c \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < ce + d \ \& \ h(x) = \sum_{i=e}^{\infty} f(i)x^{ai+p-1}/((ci+d)^{q-1}g(i)) \ \&$ $\int h(y)dy = \lambda_y(s(y), y - \text{число}) \to \sum_{i=e}^{\infty} f(i)x^{ai+b}/((ci+d)^q g(i)) = x^{b-p}a(s(x) - s(0))/c)$

Преобразуемый ряд входит в условие задачи на преобразование, не имеющей целей (рядтейлора ...), (рядфурье ...). Он не должен располагаться под описателем "отображение". Переменная x идентифицируется с переменной, имеющей единственное вхождение в общий член ряда. Первый антецедент упрощает выражение ad/c с помощью нормализаторов общей стандартизации и убеждается в том, что p - целочисленная константа. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Четвертый антецедент обращается к вспомогательной задаче на преобразование для суммирования ряда, полученного из исходного степенного ряда почленным дифференцированием. Проверяется, что результат $h(x)$ не содержит символа "суммавсех". Левая часть пятого антецедента обрабатывается нормализатором "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 4.

Попытка почленного интегрирования степенного ряда

$\forall_{abcdefghpq}(b = ad/c - 1 \ \& \ \sum_{i=e}^{\infty}(ci+d)^{p-1} f(i) x^{ai+b+1}/g(i) = h(x) \ \& \ s = dh(x)/dx \ \&$ $0 \le ae + b \ \& \ 0 < a \to \sum_{i=e}^{\infty}(ci+d)^p f(i) x^{ai+q}/g(i) = csx^{q-b}/a)$

Аналогично предыдущему пункту. Переменная p идентифицируется с натуральной константой, b - с целочисленной. Прием обобщен на случай, когда вместо переменной x берется произвольное выражение t:

$\forall_{abcdefghpq}(b = ad/c - 1 \ \& \ \sum_{i=e}^{\infty}(ci+d)^{p-1} f(i) x^{ai+b+1}/g(i) = h(x) \ \& \ s =$ $dh(x)/d(x = t) \ \& \ 0 \le ae + b \ \& \ 0 < a \ \& \ n = \overline{\lim}_{i\to\infty}\{((ci+d)^p f(i)/g(i))^{1/i}\} \ \&$ $|nt^a| < 1 \to \sum_{i=e}^{\infty}(ci+d)^p f(i) t^{ai+q}/g(i) = st^{q-b})$

Правая часть шестого антецедента обрабатывается нормализатором "нормверхпредел". Истинность последнего антецедента, означающего, что t попадает в область сходимости, устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Чтобы не дублировать первый прием, данная версия применяется только для выражений t, не являющихся переменными. Уровень срабатывания ее тоже равен 4.

Раскрывание скобок в суммируемом выражении

$\forall_{fghprs}(r = \sum_{i=a}^{\infty} f(i)g(i)/p(i) \ \& \ s = \sum_{i=a}^{\infty} f(i)h(i)/p(i) \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i)(g(i) + h(i))/p(i) =$ $r + s)$

Преобразуемый ряд входит в условие задачи на преобразование, не имеющей целей "рядтейлора", "рядфурье". Правые части антецедентов обрабатываются вспомогательными задачами на упрощение. Проверяется, что результаты r, s не содержат символа "суммавсех". Уровень срабатывания равен 4.

Метод Абеля

$\forall_{abfmx}$(сходится($\lambda_n(\sum_{i=a}^{\infty} f(i), n -$ натуральное)) & $\sum_{i=a}^{\infty}(f(i)x^{mi}) = g(x)$ &
$\lim_{x \to 1-0} g(x) = b \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i) = b)$

Контекст срабатывания приема - тот же, что и выше. Истинность первого антецедента проверяется с помощью задачи на доказательство. Указатель "контекст(...)" определяет идентификацию m с наибольшим общим делителем всевозможных натуральных коэффициентов k в сомножителях $(ki+p)^q$ знаменателя общего члена $f(i)$. Выбирается новая переменная x, и левая часть второго антецедента упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Этой задаче передаются дополнительные посылки "$x -$ число, $x \to 1-0$". Проверяется, что результат $g(x)$ не содержит символа "суммавсех". Левая часть последнего антецедента обрабатывается нормализатором "нормпредел". Проверяется, что предел удалось вычислить. Если числитель выражения $f(i)$ имеет своим сомножителем степень вида y^p, где y - переменная, а p содержит i, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.

Глава 2

Приемы по дифференциальным уравнениям

В обычной практике дифференциальное уравнение с неизвестной функцией $y(x)$ записывается как числовое равенство вида $A(x, y(x), \ldots) = B(x, y(x), \ldots)$, связывающее значение варьируемой переменной x со значениями функции y и ее производных. Однако, с точки зрения логической формализации такая запись неудовлетворительна - подлинное условие на неизвестную y складывается из утверждений о том, что ее значением является вещественная функция с непустой областью определения A, на которой она нужное число раз непрерывно дифференцируема, и кванторной импликации $\forall_x(x \in A \rightarrow A(x, y(x), \ldots) = B(x, y(x), \ldots))$. Вместе с тем, полная запись этого условия достаточно громоздка, и применение ее затормозило бы выкладки решателя без какой-либо практической выгоды. Поэтому в дифференциальных уравнениях снова приходится вспомнить о принципе "контекстной семантики", позволяющем работать лишь с фрагментами точного логического описания, вынося "за скобки" все сопровождающие элементы. В данном случае за скобки выносятся антецедент $x \in A$ кванторной импликации и общие условия на функцию y. Соответственно, задача на решение дифференциального уравнения оформляется как задача на описание, имеющая условие $A(x, y(x), \ldots) = B(x, y(x), \ldots)$, к которому автоматически добавляется утверждение "y – функция". К посылкам, тоже автоматически, добавляется утверждение "x – число". Список целей задачи - почти тот же, что и в обычных уравнениях, т.е. "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "упростить", "неизвестные y". К нему добавляется единственный новый элемент - "связка x". Этот элемент указывает на упомянутую выше "контекстную семантику", выделяя переменную x как варьируемую переменную функционального уравнения. Ответом уравнения служит группа утверждений, определяющих явно либо неявно значение $y(x)$ и ограничивающих допустимые значения x. При этом допускаются сложные дизъюнктивно-конъюнктивные конструкции и параметрические описания. Например, в качестве ответа на задачу с условием $dy(x)/dx * x^2 = x^3 + 2$ выдаются утверждения $\neg(x = 0), \exists_b(y(x) = x^2/2 - 2/x + b \ \& \ b - \text{число})$.

Для ввода новой задачи на решение дифференциального уравнения следует выбирать пункт меню целевых установок задач "Найти значения неизвестных - Решить функциональные уравнения". Тогда появляется надпись "Найти", под которой перечисляются функциональные неизвестные $y(x), z(x), \ldots$. После нажатия Enter ввод целевой установки задачи завершается, и далее записываются сами уравнения.

2.1 Уравнения первого порядка

2.1.1 Уравнение с разделяющимися переменными

Интегрирование уравнения с разделяющимися переменными

В этом случае приемы выполняют непосредственное интегрирование уравнения:

$\forall_{abcehvxy}(\int b(z)/e(z)dz = \lambda_z(h(z), z - \text{число})\ \&\ \int c(x)/a(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число}) \rightarrow a(x)b(y(x))dy(x)/dx + c(x)e(y(x)) = 0 \leftrightarrow \exists_p(p - \text{число}\ \&\ h(y(x)) = -v(x) + p)\ \&\ \neg(e(y(x)) = 0)\ \vee\ e(y(x)) = 0\ \&\ a(x)b(y(x))dy(x)/dx = 0\ \&\ dy(x)/dx - \text{число})$

Уравнение является условием задачи на описание, имеющей неизвестную y. Переменные a, b, c, e функциональные. Выражения $a(x), c(x)$ не содержат неизвестных. Для идентификации шаблонов $b(\ldots)$, $e(\ldots)$ используются указатели "новаргумент(x2 x23 фикс)", "новаргумент(x5 x23 фикс)". Они гарантируют, что в идентифицирующие выражения переменная x будет входить только в виде $y(x)$. Предварительно указатели "перечень(x2 не(известно(x2)))", "перечень(x5 не(известно(x5)))" определяют эти идентифицирующие выражения как произведения всех неизвестных сомножителей соответствующих слагаемых (за исключением явно выделенной в теореме производной $dy(x)/dx$). Первый и второй антецеденты вычисляют неопределенные интегралы, используя нормализатор "нормИнтеграл". Предварительно подынтегральные выражения обрабатываются нормализатором "упрощинтеграл". Квантор существования в заменяющей части обрабатывается нормализатором "уравндифф", имеющим несколько несложных приемов для стандартизации параметрических описаний решений дифференциальных уравнений. Условие $e(y(x)) = 0$ обрабатывается нормализатором "нормчисло", заменяющим его в очевидных случаях на константу "ложь". Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия", указывающим на параметрическое описание неизвестной. Уровень срабатывания равен 2. Для различных вариаций вида уравнения, допускающего разделение переменных, созданы также следующие приемы:

$\forall_{abchvxy}(\int b(z)dz = \lambda_z(h(z), z - \text{число})\ \&\ \int c(x)/a(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число}) \rightarrow a(x)b(y(x))dy(x)/dx = c(x) \leftrightarrow \exists_p(p - \text{число}\ \&\ h(y(x)) = v(x) + p))$

$\forall_{abcehpvxy}(\int b(z)/(e(z)-p)dz = \lambda_z(h(z), z-\text{число})\ \&\ \int c(x)/a(x) = \lambda_x(v(x), x-\text{число}) \rightarrow a(x)b(y(x))dy(x)/dx + c(x)e(y(x)) = pc(x) \leftrightarrow \exists_q(q - \text{число}\ \&\ h(y(x)) = -v(x) + q)\ \&\ \neg(e(y(x))-p = 0) \vee e(y(x))-p = 0\ \&\ a(x)b(y(x))dy(x)/dx = 0\ \&\ dy(x)/dx-\text{число})$

$\forall_{abcehvxy}(\int b(z)/(e(z)-c)dz = \lambda_z(h(z), z-\text{число})\ \&\ \int 1/a(x)dx = \lambda_x(v(x), x-\text{число}) \rightarrow a(x)b(y(x))dy(x)/dx + e(y(x)) = c \leftrightarrow \exists_p(p-\text{число}\ \&\ h(y(x)) = -v(x)+p)\ \&\ \neg(e(y(x)) - c = 0)\ \vee\ e(y(x)) - c = 0\ \&\ a(x)b(y(x))dy(x)/dx = 0\ \&\ dy(x)/dx - \text{число})$

$\forall_{abcehqrsvxy}(\int b(z)/(e(z)q^{s(z)})dz = \lambda_z(h(z), z-\text{число})\ \&\ \int c(x)q^{r(x)}/a(x)dx = \lambda_x(v(x), x-\text{число})\ \&\ 0 < q \rightarrow a(x)b(y(x))dy(x)/dx + c(x)e(y(x))q^{r(x)+s(y(x))} = 0 \leftrightarrow \exists_p(p - \text{число}\ \&\ h(y(x)) = -v(x) + p)\ \&\ \neg(e(y(x)) = 0)\ \vee\ e(y(x)) = 0\ \&\ a(x)b(y(x))dy(x)/dx = 0\ \&\ dy(x)/dx - \text{число})$

Все эти приемы аналогичны первому приему. Уровни срабатывания их равны 2.

При решении дифференциальных уравнений не обязательно получать явное выражение для неопределенных интегралов - допустимо интегрирование "в квадратурах", т.е. с использованием выражений вида $\int_a^x f(z)dz$. Поэтому приведенные выше приемы продублированы для варианта с квадратурами. В этих приемах при вычислении интегралов после нормализатора "нормИнтеграл" применяется нормализатор "квадратура", обеспечивающий переход к определенным интегралам с переменным верхним пределом. Уровни срабатывания данных версий приемов равны 4.

В заключение отметим версию приема, ориентированную на самый простой случай, когда в левой части находится производная неизвестной функции, а в правой - известное выражение:

$\forall_{fg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to dy(x)/dx = f(x) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ y(x) = g(x) + c))$

Уровень срабатывания этого приема равен 1.

Замена для линейной комбинации аргумента и неизвестной функции, приводящая к уравнению с разделяющимися переменными

$\forall_{abfgxyzABCP}(Ady(x)/dx + B - C = f(ax + by(x))dy(x)/dx + g(ax + by(x))\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ (f(z, x)dz(x)/dx - af(z(x)) + bg(z(x)) = 0\ \&\ z(x) - \text{число}) = P(z(x)) \to Ady(x)/dx + B = C \leftrightarrow P(ax + by(x)))$

Указатель "контекст(...)" находит результат R перенесения всех ненулевых членов уравнения в левую часть и усматривает в этом результате сумму $ax + by(x)$, где a, b не зависят от x, а каждое из оставшихся слагаемых имеет своим сомножителем производную в точке x. Далее обрабатывается первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор". Он усматривает, что левая часть R выразима через производную и некоторые выражения $f(\ldots), g(\ldots)$, содержащие переменную x только внутри подвыражений $ax + by(x)$. Для такой идентификации используются указатели "новаргумент(x6 x23 извлечение)", "новаргумент(x7 x23 извлечение)". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Левая часть третьего антецедента получается из рассматриваемого уравнения переходом к новой неизвестной $z(x) = ax + by(x)$. Она разрешается относительно z с помощью вспомогательной задачи на описание. Очевидно, здесь имеет место случай разделяющихся переменных. Указатель "новаргумент(x40 x25 фикс)"определяет по ответу задачи шаблон $P(\ldots)$. Заменяющий терм находится подстановкой в этот шаблон выражения $ax + by(x)$. Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор "уравндифф"

Как уже отмечалось выше, для простейшего редактирования параметрических описаний, возникающих при интегрировании уравнений, создан нормализатор "уравндифф". Нормализатор не является корневым, т.е. приемы его могут применяться к произвольным подтермам преобразуемого терма.

1. Переход к логарифму произведения либо частного.

   $\forall_{abde}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ -\ln a = -\ln b + c) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ \ln a = \ln b + c))$

   Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abde}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ \ln|a| + d = \ln|b| + c + e) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ \ln|a/b| + d = c + e))$

   $\forall_{abde}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ \ln|a| + d = -\ln|b| + c + e) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ \ln|ab| + d = c + e))$

   $\forall_{abde}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ -\ln|a| + d = \ln|b| + c + e) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ d = \ln|ab| + c + e))$

   $\forall_{ab}(\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|)$

$\forall_{ab}(\ln|a| - \ln|b| = \ln|a/b|)$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ab}(\ln|a| - \ln b = \ln|a/b|)$

$\forall_{abde}(\exists_c(c -$ число & $\ln a + d = \ln|b| + c + e) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $\ln|a/b| + d = c + e))$

$\forall_{abde}(\exists_c(c -$ число & $\ln a + d = -\ln|b| + c + e) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $\ln|ab| + d = c + e))$

$\forall_{abde}(\exists_c(c -$ число & $-\ln a + d = \ln b + c + e) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $\ln|ab| + d = c + e))$

Во втором и третьем приемах проверяется, что неочевидна неотрицательность b, в четвертом - что либо неочевидна неотрицательность a, либо неочевидна неотрицательность b. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ab}(\exists_c(c -$ число & $\ln a = -\ln b + c) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $0 < c$ & $ab = c))$

$\forall_{ab}(\exists_c(c -$ число & $-\ln a = \ln b + c) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $0 < c$ & $ab = c))$

Проверяется неотрицательность a, b. Уровень срабатывания равен 4.

2. Исключение логарифма.

   $\forall_a(\exists_c(c -$ число & $\ln|a| = c) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $a = c))$

   $\forall_a(\exists_c(c -$ число & $\ln|a| + c = 0) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $a = c))$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Переход к логарифму степени.

   $\forall_{an}(n\ln|a| = \ln|a^n|)$

   Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{an}(n\ln a = \ln|a^n|)$

   $\forall_{amn}(m\ln a/n = \ln(a^{m/n}))$

   Переменные m, n идентифицируются с константными выражениями. Уровень срабатывания равен 3.

4. Переход от логарифма степени модуля к логарифму модуля степени.

   $\forall_{abe}(\ln(e|a|^b) = \ln|ea^b|)$

   Переменная b идентифицируется с простой дробью, имеющей нечетный знаменатель, либо с целочисленной константой. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abcp}(\exists_d(d -$ число & $p\ln(|a|^b) = -p\ln|c| + d) \leftrightarrow \exists_d(d -$ число & $\ln|c^2a^{2b}| = d))$

   Переменная b идентифицируется с простой дробью, имеющей четный знаменатель. Переменная p идентифицируется с ± 1. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ab}(\ln(|a|^b) = \ln||a|^b|)$

   Уровень срабатывания равен 4.

5. Домножение на общий знаменатель.

   $\forall_{adp}(\neg(p = 0) \rightarrow \exists_c(c -$ число & $a/p = d/p + c) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $a = d + c))$

   Переменная p идентифицируется с константным выражением. Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор "квадратура"

Нормализатор предназначен для перехода от непроинтегрированного выражения "Интеграл(...)" к описателю "отображение(...)", задающему первообразную через определенный интеграл. Предпринимается попытка выразить последний через определенные интегралы более простого вида. Приемы нормализатора применяются только к корневому вхождению.

1. Ввод определенного интеграла.

   $\forall_{af}(\text{одз}(f(x)) = (x = a) \to \int f(x)dx = \lambda_x(\int_a^x f(y)dy, x - \text{число}))$

   Антецедент определяет о.д.з. подынтегрального выражения $f(x)$, после чего решает вспомогательную задачу на описание, определяющую пример a входящего в о.д.з. значения переменной x. Прием применяется, если $f(x)$ не имеет заголовка "плюс" и не содержит символа "интеграл" определенного интеграла. Уровень срабатывания равен 1.

2. Интегрирование суммы.

   $\forall_{fgpq}(\int f(x)dx = \lambda_x(p(x), x - \text{число})\ \&\ \int g(x)dx = \lambda_x(q(x), x - \text{число}) \to \int(f(x) + g(x))dx = \lambda_x(p(x) + q(x), x - \text{число}))$

   Левые части антецедентов последовательно обрабатываются нормализаторами "нормИнтеграл" и "квадратура". Таким образом, некоторые слагаемые, возможно, удастся проинтегрировать в явном виде. Уровень срабатывания приема равен 1.

3. Вынесение постоянного множителя из-под интеграла.

   $\forall_{abfg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int af(x)/bdx = \lambda_x(ag(x)/b, x - \text{число}))$

   Левая часть антецедента обрабатывается нормализаторами "нормИнтеграл", "квадратура". Уровень срабатывания равен 1.

4. Повторное интегрирование.

   $\forall_{afghv}(\int h(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число})\ \&\ \int f(x)v(x)dx = \lambda_x(g(x), x - \text{число}) \to \int h(x)\int_a^x f(y)dydx = \lambda_x(v(x)\int_a^x f(y)dy - g(x), x - \text{число}))$

   Левые части антецедентов обрабатываются нормализаторами "нормИнтеграл", "квадратура". Выражение под описателем "отображение" в заменяющем терме обрабатывается нормализатором "стандинтеграл". Уровень срабатывания равен 2.

2.1.2 Однородное уравнение

Замена переменной, сводящая однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$\forall_{abcxyzPQ}((c - b(y(x)))/a(y(x)) = P(y(x)/x)\ \&\ (a(z(x)x)(dz(x)/dx + z(x)) + b(z(x)x) = c\ \&\ z(x) - \text{число}) = Q(z(x)) \to a(y(x))dy(x)/dx + b(y(x)) = c \leftrightarrow Q(y(x)/x))$

Прием применяется к условию задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной, переменная x - с варьируемой переменной. Выражение c не содержит неизвестных. Указатели "новаргумент(x1 x24 фикс)", "новаргумент(x2 x24 фикс)" определяют идентификацию шаблонов $a(\ldots)$, $b(\ldots)$, выделяя внутри соответствующих фрагментов уравнения все вхождения $y(x)$. При этом проверяется, что других вхождений переменной y в эти фрагменты не имеется. Левая часть первого антецедента упрощается нормализаторами общей стандартизации, и далее указатель "новаргумент(x40 x23 извлечение)"предпринимает попытку так преобразовать результат, чтобы его можно было представить в виде $P(y(x)/x)$. Это обеспечивает однородность уравнения. Второй антецедент решает уравнение, полученное из исходного заменой $y(x) = z(x)x$, где z - вспомогательная переменная. Как известно из теории, такое уравнение допускает разделение переменных. Для решения создается задача на описание, имеющая неизвестную z и варьируемый параметр x. Указатель "новаргумент(x41 x25 фикс)" обеспечивает идентификацию шаблона $Q(\ldots)$, и далее формируется заменяющий терм $Q(y(x)/x)$. Предпринимается удаление ненужного после срабатывания приема условия "$dy(x)/dx -$ число". Уровень срабатывания равен 5.

Изменение начала координат для сведения к однородному уравнения, содержащего дробно-линейное выражение относительно неизвестной функции и ее аргумента

$\forall_{abcdefuvxyABCDEFPQR}((c-b)/a = f((Ax+By(x)+C)/(Dx+Ey(x)+F))\ \&\ Q = AE - BD\ \&\ \neg(Q = 0)\ \&\ d = (CD - AF)/Q\ \&\ e = (BF - CE)/Q\ \&\ (dv(u)/du = f((Au + Bv(u))/(Du+Ev(u)))\ \&\ v(u) - \text{число}\ \&\ u - \text{число}) = P(v(u))\ \&\ R(u) = P(y(x)-d) \to ady(x)/dx + b = c \leftrightarrow R(x-e)\ \vee\ a = 0\ \&\ b = c)$

Прием применяется к условию задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной, x - с варьируемой переменной. Выражение c не содержит неизвестных. Левая часть первого антецедента преобразуется нормализаторами общей стандартизации, после чего к ней применяется нормализатор "дроблинизвлеч". Этот нормализатор, описываемый ниже, предпринимает попытку явного выделения дробно-линейных подвыражений относительно термов $x, y(x)$, заданных во входном комментарии (дроблинизвлеч x $y(x)$). Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение внутри результирующего выражения дроби $(Ax+By(x)+C)/(Dx+Ey(x)+F)$. Затем указатель "новаргумент(x6 x23 фикс)" проверяет отсутствие вхождений x в данное выражение, не расположенных внутри вхождений этой дроби. Таким образом идентифицируется шаблон $f(\ldots)$. Проверяется, что выражения A, B, C, D, E, F не содержат переменной x. Антецеденты со второго по пятый вычисляют начало координат e, d, к которому будет преобразовано уравнение. Здесь применяются вспомогательные задачи на упрощение. Шестой антецедент предпринимает попытку решить уравнение, полученное из исходного заменами $x = u + e, y(x) = v(u) + d$. Такое уравнение является однородным; для его решения создается вспомогательная задача на описание. Из ответа $R(v(u))$ путем перехода к исходным координатам строится заменяющий терм. Уровень срабатывания равен 5. Для рассмотрения вырожденных случаев, когда некоторые из коэффициентов A, B, D, E обращаются в ноль, созданы отдельные приемы:

$\forall_{abcdefuvxyABCEFPQR}((c-b)/a = f((Ax+By(x)+C)/(Ey(x)+F))\ \&\ Q = AE\ \&\ \neg(Q = 0)\ \&\ d = (-AF)/Q\ \&\ e = (BF-CE)/Q\ \&\ (dv(u)/du = f((Au+Bv(u))/(Ev(u)))\ \&\ v(u) - \text{число}\ \&\ u - \text{число}) = P(v(u))\ \&\ R(u) = P(y(x) - d) \to ady(x)/dx + b = c \leftrightarrow R(x-e)\ \vee\ a = 0\ \&\ b = c)$

$\forall_{abcdefuvxyBCDEFPQR}((c-b)/a = f((By(x)+C)/(Dx+Ey(x)+F))\ \&\ Q = -BD\ \&\ \neg(Q =$

$0) \ \& \ d = CD/Q \ \& \ e = (BF - CE)/Q \ \& \ (dv(u)/du = f(Bv(u)/(Du + Ev(u))) \ \& \ v(u) -$ число $\& \ u -$ число$) = P(v(u)) \ \& \ R(u) = P(y(x) - d) \rightarrow ady(x)/dx + b = c \leftrightarrow R(x - e) \ \vee \ a = 0 \ \& \ b = c)$

$\forall_{abcdefuvxyABCDFPQR}((c-b)/a = f((Ax + By(x) + C)/(Dx + F)) \ \& \ Q = -BD \ \& \ \neg(Q = 0) \ \& \ d = (CD - AF)/Q \ \& \ e = BF/Q \ \& \ (dv(u)/du = f((Au + Bv(u))/(Du))) \ \& \ v(u) -$ число $\& \ u -$ число$) = P(v(u)) \ \& \ R(u) = P(y(x) - d) \rightarrow ady(x)/dx + b = c \leftrightarrow R(x - e) \ \vee \ a = 0 \ \& \ b = c)$

$\forall_{abcdefuvxyACDEFPQR}((c-b)/a = f((Ax + C)/(Dx + Ey(x) + F)) \ \& \ Q = AE \ \& \ \neg(Q = 0) \ \& \ d = (CD - AF)/Q \ \& \ e = (-CE)/Q \ \& \ (dv(u)/du = f(Au/(Du + Ev(u))) \ \& \ v(u) -$ число $\& \ u -$ число$) = P(v(u)) \ \& \ R(u) = P(y(x) - d) \rightarrow ady(x)/dx + b = c \leftrightarrow R(x - e) \ \vee \ a = 0 \ \& \ b = c)$

Эти приемы аналогичны описанному выше.

Применение степенной замены для получения однородного уравнения

$\forall_{abcmnxyzQ}((c - b((z(x))^m))/(m \cdot a((z(x))^m)(z(x))^{m-1}) = (m = n) \ \&$
$(n \cdot a((z(x))^n)(z(x))^{n-1}dz(x)/dx + b((z(x))^n) = c \ \& \ 0 \leq z(x) \ \& \ z(x) -$ число$) = Q(z(x)) \rightarrow$
$a(y(x))dy(x)/dx + b(y(x)) = c \leftrightarrow Q((y(x))^{1/n})) \ \vee \ n < 0 \ \& \ y(x) = 0 \ \& \ b(0) = c$

Прием применяется в тех случаях, когда усматривается неотрицательность выражения $y(x)$. Перед применением степенной замены требуется найти показатель степени m. Он должен быть таким, чтобы уравнение стало однородным, т.е. чтобы правую часть $((c - b((z(x))^m))/(m \cdot a((z(x))^m)(z(x))^{m-1}))$ разрешенного относительно производной результата замены можно было выразить через $z(x)/x$.

Для подбора такого значения m создан специальный нормализатор "однорпараметр". Он применяется к левой части первого антецедента, получая в качестве дополнительного входного данного комментарий (однорпараметр $m \ x \ z(x) \ x$). Здесь элемент x встречается дважды: сначала - как указатель на варьируемую переменную, а затем - как знаменатель того выражения, через которое должен быть выражен преобразуемый нормализатором терм. Нормализатор, описываемый ниже, пытается преобразовать этот терм так, чтобы в нем возникли отношения степеней $z(x)$ и x, подсказывающие подбор значения m. Найденное значение n переменной m подставляется в преобразуемый терм, и с помощью указателя "новаргумент" проверяется, что результат выразим через $z(x)/x$. Далее используется искусственный трюк: цепочка тождественных преобразований обрывается, а вместо преобразуемого выражения помещается равенство $m = n$, которое и выдается нормализатором.

После того, как первый антецедент определил значение n показателя степени, второй антецедент обращается к вспомогательной задаче на описание для разрешения относительно z результата степенной замены. Далее формируется заменяющий терм $Q((y(x))^{1/n})$. Особо учитывается возможность потери нулевого решения при отрицательном n. Уровень срабатывания равен 6. Если неотрицательность $y(x)$ не усматривается, то применяется другая версия приема:

$\forall_{abcmnxyzQ}((c - b((z(x))^m))/(m \cdot a((z(x))^m)(z(x))^{m-1}) = (m = n) \ \&$
$(n \cdot a((z(x))^n)(z(x))^{n-1}dz(x)/dx + b((z(x))^n) = c \ \& \ z(x) -$ число$) = Q(z(x)) \rightarrow$
$a(y(x))dy(x)/dx + b(y(x)) = c \leftrightarrow Q((y(x))^{1/n}) \ \vee \ n < 0 \ \& \ y(x) = 0 \ \& \ b(0) = c)$

Нормализатор "дроблинизвлеч"

Как уже говорилось выше, нормализатор "дроблинизвлеч" предпринимает попытку преобразования исходного выражения к виду, содержащему дробно-линейную зависимость относительно двух заданных термов a, b. Эти термы указываются при обращении в комментарии (дроблинизвлеч a b). Нормализатор не является корневым, т.е. его приемы применяются к произвольным подтермам преобразуемого терма.

1. Выделение дробно-линейной функции из множителей числителя и знаменателя дробного выражения.

   $\forall_{abcdefghpqk}(p(ac + bd + e)^k/(q(af + bg + h)^k) = p((ac + bd + e)/(af + bg + h))^k/q)$

   Выражения a, b идентифицируются комментарием (дроблинизвлеч a b). Допускаются вырожденные единичные значения параметров c, d, f, g, p, q, k и нулевые значения e, h. Ни одно из выражений c, d, e, f, g, h не имеет общей свободной переменной с выражениями a, b. Допускается отсутствие члена ac, и тогда c идентифицируется с нулем. Уровень срабатывания этого и следующего приемов равен 1.

2. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

   $\forall_{abc}(a/b + c/b = (a + c)/b)$

   Комментарий (дроблинизвлеч d e) определяет входные термы d, e. Проверяется, что либо один из этих термов входит в знаменатель b, либо оба они входят в каждое из выражений a, c.

3. Выделение константного слагаемого для получения пропорциональных дробей.

   Если преобразуемое выражение имеет относительно входных термов два различных дробно-линейных выражения с равными знаменателями, то предпринимается попытка отождествить их путем добавления к числителю некоторого кратного знаменателя:

   $\forall_{abcdefmnpqxyABC}(p = Ax + By + C \ \& \ q = Ae - Bd \ \& \ \neg(q = 0) \ \& \ bAf + aeC + Bdc - Aec - aBf - bdC = 0 \ \& \ m = (bA - aB)/q \ \& \ n = (ae - bd)/q \rightarrow (ax + by + c)/p = n + m \cdot (dx + ey + f)/p)$

   Комментарий (дроблинизвлеч x y) определяет входные термы x, y. Указатель "контекст(...)" идентифицирует вхождение в преобразуемый терм второй дроби - $(dx + ey + f)/p$. Проверяется, что числитель этой дроби отличен от $ax + by + c$. Первый антецедент усматривает представление знаменателя p в виде $Ax + By + C$. Четвертый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", убеждается в возможности представить числитель $ax+by+c$ первой дроби как линейную комбинацию знаменателя и числителя второй дроби. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты определяют коэффициенты линейной комбинации. Проверяется, что ни одно из выражений $A, B, C, a, b, c, d, e, f$ не имеет общих параметров с термами x, y. Указатели "подстановка" разрешают обращение в ноль A и B, но не обоих сразу. Уровень срабатывания равен 2. Для вырожденного случая $a = 0$ создан дополнительный прием:

   $\forall_{bcdefmnpqxyABC}(p = Ax + By + C \ \& \ q = Ae - Bd \ \& \ \neg(q = 0) \ \& \ bAf + Bdc - Aec - bdC = 0 \ \& \ m = bA/q \ \& \ n = -bd/q \rightarrow (by + c)/p = n + m \cdot (dx + ey + f)/p)$

Нормализатор "однорпараметр"

Нормализатор предпринимает попытку преобразования исходного терма t для усмотрения значения a варьируемого параметра p, при котором этот терм можно представить в виде $f(A(x)/B(x))$ для заданных выражений $A(x), B(x)$ и переменной x. Имеется в виду, что переменная x не будет иметь других вхождений, кроме вхождений ее в дроби $A(x)/B(x)$. После того, как значение a подобрать удалось, в качестве результата преобразований выдается равенство $p = a$. Входные данные передаются нормализатору через комментарий (однорпараметр $p\ x\ A\ B$), где $A = A(x), B = B(x)$. Данный нормализатор представляет собой нечто промежуточное между нормализатором и синтезатором: как синтезатор, он должен определить значение некоторого параметра, а как нормализатор, он для этого должен сначала преобразовать исходный терм. Приемы нормализатора применяются к произвольным подтермам преобразуемого терма.

1. Выделение частного степеней рассматриваемых выражений.

   $\forall_{abcdmnAB}(d(aA^n + bB^m)/c = d(a + b \cdot (B^m/A^n))/(c/A^n))$

   Указатель "вход(однорпараметр $p\ x\ B\ A$)" идентифицирует дополнительные входные данные. Подбираемый параметр p должен входить хотя бы в одно из выражений m, n. Знаменатель c невырожденный; переменные a, b, d, m, n могут принимать вырожденное единичное значение. Указатель "дробь" разрешает менять местами числитель и знаменатель. Уровень срабатывания равен 1. Для сумм, не являющихся сомножителями числителей либо знаменателей дробей, предусмотрен дополнительный прием:

   $\forall_{abmnAB}(aA^n + bB^m = (a + b \cdot (B^m/A^n))A^n)$

   Этот прием аналогичен предыдущему, но уровень срабатывания его равен 2.

2. Попытка подбора значения параметра при рассмотрении частного степеней.

   $\forall_{afgmnpAB}((m - n = 0) = (p = a)\ \&\ f(a) = g(A/B) \to A^m/B^n = (p = a))$

   Заменяемый терм A^m/B^n представляет собой некоторый подтерм преобразуемого терма. Проверяется, что подбираемый параметр p встречается в m либо в n и что m, n различны. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них разрешается относительно p с помощью вспомогательной задачи на описание. Указатель "контекст(вид(корень $f(p)$))" определяет идентификацию функциональной переменной $f(p)$ со всем преобразуемым термом. Левая часть второго антецедента получается подстановкой в этот терм подобранного первым антецедентом значения a параметра p и обработкой результата нормализаторами общей стандартизации. Указатель "новаргумент(x7 x23 извлечение)" определяет преобразование данной левой части к виду, в котором все вхождения переменной x расположены только внутри дробей A/B. Указатель "нормвывод" далее определяет замену на равенство "$p = a$" не фрагмента преобразуемого терма, идентифицированного с A^m/B^n, а всего этого терма. Наконец, указатель "выход" обеспечивает немедленное прекращений действий нормализатора. Уровень срабатывания приема равен 3.

3. Попытка подбора значения параметра при рассмотрении произведения степеней.

   $\forall_{abfgmnpAB}((m + n = 0) = (p = a)\ \&\ f(a) = g(A/B) \to bA^mB^n = (p = a))$

Прием аналогичен предыдущему.

2.1.3 Линейное уравнение

Интегрирование линейного уравнения

$\forall_{fghvwxy}(\int g(x)/f(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число})\ \&\ \int h(x)\exp(v(x))/f(x)dx = \lambda_x(w(x), x - \text{число}) \to f(x)dy(x)/dx + y(x)g(x) = h(x) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ y(x) = (w(x) + c)/\exp(v(x))))$

Уравнение входит в условие задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной. Выражения $f(x), g(x), h(x)$ не содержат неизвестных. Левые части антецедентов обрабатываются нормализатором "нормИнтеграл". Подвыражение $\exp(v(x))$ во втором антецеденте предварительно упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Такому же упрощению подвергаются выражение $w(x)$ и правая часть равенства в заменяющем утверждении. Само заменяющее утверждение обрабатывается нормализаторами "уравндифф", "нормсуществует". Заметим, что логические нормализаторы "нормсуществует", "нормили" имеют большие подразделы, относящиеся к стандартизации и упрощению ответов дифференциальных уравнений. Ниже мы перечислим приемы этих подразделов. Возвращаясь к интегрированию линейного уравнения, заметим, что уровень срабатывания равен 4. Имеется также другая версия данного приема, которая при интегрировании дополняет нормализатор "нормИнтеграл" нормализатором "квадратура". Уровень ее срабатывания равен 6, причем цели "нормдиффпарам", "вариант" блокируют применение данной версии.

Прием, получающий линейное уравнение при перестановке искомой функции и независимой переменной, реализован следующим образом:

$\forall_{bfghpqrvwxy}(\int q(z)f(z)/(h(z)-p)dz = \lambda_z(v(z), z-\text{число})\ \&\ \int q(z)g(z)\exp(v(z))/(h(z)-p)dz = \lambda_z(w(z), z - \text{число})\ \&\ b = f(y(x))\ \&\ r = q(y(x)) \to (xb + g(y(x)))rdy(x)/dx + h(y(x)) = p \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ x = (c - w(y(x)))/\exp(v(y(x))))\ \vee\ h(y(x)) = p)$

Выражение p не содержит x. Указатель "группировка(x2)" идентифицирует выражение b группировкой всех слагаемых, имеющих множитель x. Для идентификации шаблонов $f(y(x)), g(y(x)), h(y(x)), q(y(x))$ используются указатели "новаргумент". Здесь проверяется, что переменная x встречается только внутри подвыражений $y(x)$. Последние два антецедента, выделенные указателем "идентификатор", требуются только для перехода от b, r к соответствующим шаблонам $f(\ldots), q(\ldots)$. Первые два антецедента выполняют интегрирование, используя для этого нормализатор "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 4.

Интегрирование уравнения Бернулли

$\forall_{fghnvwxy}(\int g(x)/f(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число})\ \&\ \int h(x)\exp((1-n)v(x))/f(x)dx = \lambda_x(w(x), x - \text{число}) \to f(x)dy(x)/dx + y(x)g(x) + (y(x))^n h(x) = 0 \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ (y(x))^{1-n} = \exp((n-1)v(x))(c + (n-1)w(x)))\ \vee\ y(x) = 0)$

Уравнение входит в условие задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной. Выражения $f(x), g(x), h(x)$ не содержат неизвестных. Выражение n отлично от единицы, не содержит неизвестных и не содержит переменной x. Левые части антецедентов обрабатываются нормализаторами "нормИнтеграл". Уровень срабатывания равен 4. При отрицательном показателе степени используемая решателем общая стандартизация преобразует уравнение Бернулли к виду $f(x)(y(x))^n dy(x)/dx + (y(x))^{n+1}g(x) = h(x)$. Здесь используется следующий прием:

$\forall_{fghmnvwxy}(\int g(x)/f(x)dx = \lambda_x(v(x), x - \text{число})\ \&\ \int h(x)\exp((n+1)v(x))/f(x)dx = \lambda_x(w(x), x - \text{число})\ \&\ m - n = 1 \rightarrow f(x)(y(x))^n dy(x)/dx + (y(x))^m g(x) = h(x) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ (y(x))^{n+1} = \exp(-(n+1)v(x))(c + (n+1)w(x))))$

Прием имеет два уровня срабатывания - 4 и 7. В первом случае введен сильный ограничитель трудоемкости, во втором - слабый ограничитель. Наконец, приведем прием интегрирования уравнения, преобразуемого к виду уравнения Бернулли при перестановке x и y:

$\forall_{fghnpqrsuvwxy}(\int u(z)g(z)/(f(z) - p)dz = \lambda_z(v(z), z - \text{число})\ \&$
$\int u(z)h(z)\exp((1-n)v(z))/(f(z) - p)dz = \lambda_z(w(z), z - \text{число})\ \&$
$q = g(y(x))\ \&\ r = h(y(x))\ \&\ s = u(y(x)) \rightarrow (xq + x^n r)sdy(x)/dx + f(y(x)) = p \leftrightarrow$
$\exists_c(c - \text{число}\ \&\ x^{1-n} = \exp((n-1)v(y(x)))(c + (n-1)w(y(x))))\ \vee\ f(y(x)) = p)$

Здесь n, p известны и не содержат переменной x. Уровень срабатывания равен 4.

Сведение уравнения Риккати к уравнению Бернулли путем подбора частного решения

$\forall_{fghpqxyzP}(\text{частноерешение}(f(x)dy(x)/dx + gy(x) + h(x)(y(x))^2 = p(x), q)\ \&$
$(f(x)dz(x)/dx + (g + 2h(x)q)z(x) + h(x)(z(x))^2 = 0) = P(z(x)) \rightarrow$
$f(x)dy(x)/dx + gy(x) + h(x)(y(x))^2 = p(x) \leftrightarrow P(y(x) - q))$

Уравнение входит в условие задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной; выражения $f(x), g, h(x), p(x)$ неизвестных не содержат. Выражение $p(x)$ не тождественно нулевое. Первый антецедент обращается к синтезатору "частноерешение", подбирающему частное решение q рассматриваемого уравнения. Этот синтезатор будет описан ниже. Второй антецедент решает уравнение Бернулли, получающееся из уравнения Риккати заменой $y(x) = q + z(x)$. Для этого используется вспомогательная задача на описание. Заменяющий терм получается из ответа $P(z(x))$ обратной заменой. Уровень срабатывания равен 5.

Синтезатор "частноерешение"

Синтезатор подбирает частное решение заданного дифференциального уравнения. Шаблон обращения к нему имеет вид "частноерешение(a b)", где a - дифференциальное уравнение, b - выходная переменная, которой присваивается выражение, определяющее значение частного решения в точке x. Здесь x - варьируемая переменная дифференциального уравнения.

1. Попытка подбора линейной зависимости.

   $\forall_{abcdfgnxyAB}((A - \text{число}\ \&\ B - \text{число}\ \&\ f(A, Ax + b, x) + a(Ax + B)^n = bx^n + g(x)) = (A = c\ \&\ B = d) \rightarrow \text{частноерешение}(f(dy(x)/dx, y(x), x) + a(y(x))^n = bx^n + g(x), cx + d))$

   Идентификацию начинает указатель "контекст(позиция(x8 фикс(0 1))вид(x8 производная(отображение(x5 число(x5) значение(x24 x5))x23)))". Он усматривает в дифференциальном уравнении подвыражение $dy(x)/dx$ и таким образом идентифицирует переменные x, y. Проверяется, что выражения a, b не содержат x. Далее указатель "новаргумент(x6 x23 фикс)" определяет шаблон $f(\ldots)$.

К первому аргументу этого шаблона относятся все вхождения в дифференциальное уравнение выражений $dy(x)/dx$, ко второму - все вхождения выражения $y(x)$, к третьему - все остальные вхождения переменной x. Первый антецедент рассматривает результат подстановки в дифференциальное уравнение зависимости $y(x) = Ax + B$. Этот результат разрешается с помощью вспомогательной задачи на описание относительно A, B. Задача имеет цель (независит x), блокирующую вхождение переменной x в ответ. В ней требуется найти пример значений неизвестных. Уровень срабатывания равен 1. В данном приеме косвенным указателем на целесообразность попытки являлось наличие в левой и правой частях уравнения слагаемых с одинаковыми степенями $y(x)$ и x. Если такого указателя нет, то на уровне 4 предпринимается аналогичная попытка:

$\forall_{cdfgnxyAB}((A - \text{число} \;\&\; B - \text{число} \;\&\; f(A, Ax + B, x) = g(x)) = (A = c \;\&\; B = d) \to \text{частноерешение}(f(dy(x)/dx, y(x), x) = g(x), cx + d))$

2. Попытка подбора обратно пропорциональной зависимости.

   $\forall_{abcfgxyA}((A - \text{число} \;\&\; f(-A/x^2, A/x, x) + aA = b + g(x)) = (A = c) \to \text{частноерешение}(f(dy(x)/dx, y(x), x) + axy(x) = b + g(x), c/x))$

   $\forall_{abcfgnxyA}((A - \text{число} \;\&\; f(-A/x^2, A/x, x) + (aA^n - b)/x^n = g(x)) = (A = c) \to \text{частноерешение}(f(dy(x)/dx, y(x), x) + a(y(x))^n = b/x^n + g(x), c/x))$

   Приемы аналогичны предыдущим. Уровень срабатывания равен 1.

3. Попытка подбора экспоненциальной зависимости.

   $\forall_{abcfgmnxyA}((A - \text{число} \;\&\; f(Am\exp(mx/n)/n, A\exp(mx/n), x) + (aA^n - b)\exp(mx) = g(x)) = (A = c) \to \text{частноерешение}(f(dy(x)/dx, y(x), x) + a(y(x))^n = b\exp(mx) + g(x), c\exp(mx/n)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Попытка подбора зависимости вида $Ax + B/x$.

   $\forall_{abcdfgnxyAB}((A - \text{число} \;\&\; B - \text{число} \;\&\; f(A - B/(x^2), Ax + B/x, x) + a(Ax + B/x)^n = bx^n + g(x)) = (A = c \;\&\; B = d) \to \text{частноерешение}(f(dy(x)/dx, y(x), x) + a(y(x))^n = bx^n + g(x), cx + d/x))$

   Перед попыткой применения приема проверяется, что $g(x)$ имеет слагаемое, не зависящее от x, а левая часть уравнения не имеет слагаемого вида $Py(x)$, где P не содержит y. Уровень срабатывания равен 2.

5. Попытка подбора квадратичной зависимости.

   $\forall_{abcdefgmnxyABC}(n = 2m \;\&\; (A - \text{число} \;\&\; B - \text{число} \;\&\; C - \text{число} \;\&\; f(2Ax + B, Ax^2 + Bx + C, x) + a(Ax^2 + Bx + C)^m = bx^n + g(x)) = (A = c \;\&\; B = d \;\&\; C = e) \to \text{частноерешение}(f(dy(x)/dx, y(x), x) + a(y(x))^m = bx^n + g(x), cx^2 + dx + e))$

   Переменные m, n идентифицируются с натуральными константами, причем m не превосходит 3. Первый антецедент, выделенный указателем "программа", проверяет, что n вдвое больше, чем m. Уровень срабатывания равен 3.

2.1.4 Уравнение в полных дифференциалах

Интегрирование уравнения в полных дифференциалах

$\forall_{fghpvwxyz}(df(z,x)/dx - dg(z,x)/dz = 0$ & $\int(g(z,x)-h(x))dx = \lambda_x(v(x,z), x -$ число) & $\int(f(z,x) - dv(x,z)/dz)dz = \lambda_z(w(z,x), z -$ число) $\to f(y(x),x)dy(x)/dx + g(y(x),x) = h(x) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $v(x,y(x)) + w(y(x),x) = c))$

Уравнение представляет собой условие задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной. Выражения $f(y(x),x)$, $g(y(x),x)$, идентифицируемые с помощью указателей "новаргумент", не содержат символа "производная". Антецеденты выделены указателем "идентификатор", Производные в левой части первого антецедента вычисляются с помощью вспомогательных задач на преобразование, а к их разности применяется нормализатор "стандплюс". Таким образом устанавливается, что имеем уравнение в полных дифференциалах. Следующие два антецедента выполняют последовательно интегрирование по x и по z, используя нормализатор "нормИнтеграл". При этом производная в последнем антецеденте вычисляется вспомогательной задачей на преобразование. Результирующее параметрическое описание обрабатывается нормализаторами "уравндифф", "нормсуществует". Уровень срабатывания равен 4.

Интегрирование уравнения путем нахождения интегрирующего множителя

$\forall_{fghmpxyzv}$(интегрмножитель$(g(z,x) - h(x), f(z,x), m)$ & $\int(g(z,x) - h(x))mdx =$ $\lambda_x(v(z,x), x -$ число) & $\int(f(z,x)m - dv(x,z)/dz)dz = \lambda_z(w(z,x), z -$ число) & $(\neg($одз$(m))) = p(z) \to f(y(x),x)dy(x)/dx + g(y(x),x) = h(x) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число & $v(x,y(x)) + w(y(x),x) = c) \ \vee \ p(y(x))$ & $f(y(x),x)dy(x)/dx + g(y(x),x) = h(x))$

Уравнение является условием задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной. Для определения интегрирующего множителя используется описываемый ниже синтезатор "интегрмножитель". Обращение к нему имеет вид "интегрмножитель(A B X)", где A - сумма всех членов уравнения, не содержащих производной, включая взятую со знаком "минус" известную правую часть, B - коэффициент при производной. Выходной переменной X присваивается найденный множитель. Второй и третий антецеденты выполняют интегрирование уравнения, домноженного на интегрирующий множитель m. Последний антецедент разрешает относительно z отрицание условия на о.д.з. для интегрирующего множителя. Для ускорения действий здесь применяется нормализатор "особоерешение", составленный из нескольких несложных приемов (см. ниже). Проверяется, что результат разрешения представляет собой либо константу "ложь", либо дизъюнкцию условий равенства z конечному числу "особых точек". Уровень срабатывания равен 9. Создан еще один аналогичный прием, где интегрирование выполняется в другом порядке (сначала по z, потом по x):

$\forall_{fghmpxyzv}$(интегрмножитель$(g(z,x)-h(x), f(z,x), m)$ & $\int(f(z,x)mdz = \lambda_z(v(x,z), z-$ число) & $\int((g(z,x)-h(x))m - dv(x,z)/dx)dx = \lambda_z(w(z,x), z-$число) & $(\neg($одз$(m))) =$ $p(z) \to f(y(x),x)dy(x)/dx + g(y(x),x) = h(x) \leftrightarrow \exists_c(c-$число & $v(x,y(x)) + w(y(x),x) =$ $c) \ \vee \ p(y(x))$ & $f(y(x),x)dy(x)/dx + g(y(x),x) = h(x))$

Синтезатор "интегрмножитель"

Как уже говорилось выше, синтезатор реализует условие "интегрмножитель(A B X)", означающее, что X есть интегрирующий множитель уравнения $B(x,y)dy(x)/dx+$

$A(x,y)=0$. При обращении ему передается комментарий (переменные x y).

1. Множитель зависит только от одной из переменных.

   $\forall_{fghpqvxy}(df/dy=p\ \&\ dg/dx=q\ \&\ (p-q)/g=h(x)\ \&\ \int h(x)dx=\lambda_x(v(x),x-$ число$)\rightarrow$ интегрмножитель$(f,g,\exp(v(x))))$

   $\forall_{fghpqvxy}(df/dy=p\ \&\ dg/dx=q\ \&\ (p-q)/f=h(y)\ \&\ \int h(y)dy=\lambda_y(v(y),y-$ число$)\rightarrow$ интегрмножитель$(f,g,\exp(-v(y))))$

   Левые части первых двух антецедентов обрабатываются нормализатором "нормпроизводная" и упрощаются вспомогательными задачами на преобразование. Затем предпринимается упрощение левой части третьего антецедента и проверяется, что в первом приеме результат $h(\ldots)$ не зависит от переменной y, а во втором - что он не зависит от переменной x. Далее четвертый антецедент выполняет интегрирование, после чего выдается результат. Уровень срабатывания равен 1.

2. Множитель зависит только от произведения переменных.

   $\forall_{fghpqvxy}(df/dy=p\ \&\ dg/dx=q\ \&\ (p-q)/(yg-xf)=h(xy)\ \&\ \int h(z)dz=\lambda_z(v(z),z-$ число$)\rightarrow$ интегрмножитель$(f,g,\exp(v(xy))))$

   Шаблон $h(xy)$ идентифицируется с помощью указателя "новаргумент(x8 набор(x23 x24)извлечение)". Этот указатель использует нормализатор "извлечение" для попытки преобразования выражения к виду, в котором все вхождения переменных x,y расположены только в подвыражениях xy. Уровень срабатывания равен 2.

3. Множитель зависит только от суммы квадратов.

   $\forall_{fghpqvxy}(df/dy=p\ \&\ dg/dx=q\ \&\ (p-q)/(xg-yf)=h(x^2+y^2)\ \&\ \int h(z)dz=\lambda_z(v(z),z-$ число$)\rightarrow$ интегрмножитель$(f,g,\exp(v(x^2+y^2)/2))))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

4. Множитель зависит только от частного переменных.

   $\forall_{fghpqvxy}(df/dy=p\ \&\ dg/dx=q\ \&\ x^2(p-q)/(yg+xf)=h(y/x)\ \&\ \int h(z)dz=\lambda_z(v(z),z-$ число$)\rightarrow$ интегрмножитель$(f,g,\exp(-v(y/x))))$

   Уровень срабатывания равен 3.

5. Множитель зависит только от суммы переменных.

   $\forall_{fghpqvxy}(df/dy=p\ \&\ dg/dx=q\ \&\ (p-q)/(g-f)=h(x+y)\ \&\ \int h(z)dz=\lambda_z(v(z),z-$ число$)\rightarrow$ интегрмножитель$(f,g,\exp(v(x+y))))$

   Уровень срабатывания равен 5.

6. Попытка деления входных выражений на множитель одного из них.

   На достаточно высоких уровнях синтезатор предпринимает попытки варьирования входных выражения, сводя исходную задачу к другой:

   $\forall_{abcgh}($интегрмножитель$(c,g/(a+b),h)\rightarrow$ интегрмножитель$((a+b)c,g,h/(a+b)))$

   $\forall_{abcgh}($интегрмножитель$(g/(a+b),c,h)\rightarrow$ интегрмножитель$(g,(a+b)c,h/(a+b)))$

   Здесь усматривается множитель одного из выражений, представляющий собой сумму $a+b$. Как c, так и g должно содержать хотя бы одну из переменных x,y.

Антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Уровень срабатывания приемов равен 4. Для множителей, не имеющих заголовка "плюс", созданы отдельные приемы, срабатывающие на уровне 5:

$\forall_{abcd}$(интегрмножитель$(b, c/a, d) \to$ интегрмножитель$(ab, c, d/a))$

$\forall_{abcd}$(интегрмножитель$(c/a, b, d) \to$ интегрмножитель$(c, ab, d/a))$

7. Попытка деления входных выражений на степенной множитель одного из них, показатель которого увеличен на единицу.

   $\forall_{abcde}$(интегрмножитель$(c/a^{e+1}, b/a/d) \to$ интегрмножитель$(c, a^e b, d/a^{e+1}))$

   Переменная e идентифицируется с натуральной константой. Уровень срабатывания равен 6.

8. Попытка исключения тангенса путем домножения входных выражений на косинус.

   $\forall_{abcde}$(интегрмножитель$(a \sin b + c \cos b, d \cos b, e) \to$ интегрмножитель$(a \operatorname{tg} b + c, d, e \cos b))$

   $\forall_{abcde}$(интегрмножитель$(d \cos b, a \sin b + c \cos b, e) \to$ интегрмножитель$(d, a \operatorname{tg} b + c, e \cos b))$

   Уровень срабатывания равен 4.

9. Попытка деления входных выражений на экспоненциальный множитель слагаемого одного из них.

   $\forall_{abcde}$(интегрмножитель$(a+c\exp(-b), d\exp(-b), e) \to$ интегрмножитель$(a \exp b + c, d, e/\exp b))$

   $\forall_{abcde}$(интегрмножитель$(d\exp(-b), a+c\exp(-b), e) \to$ интегрмножитель$(d, a \exp b + c, e/\exp b))$

   Уровень срабатывания равен 4.

10. Определение интегрирующего множителя путем группировок.

    Метод определения интегрирующего множителя для дифференциального уравнения $g(x,y)dy(x)/dx + f(x,y) = 0$ путем группировок заключается в отыскании подходящего разбиения $f = f_1 + f_2, g = g_1 + g_2$ и раздельном рассмотрении уравнений $g_1(x,y)dy(x)/dx + f_1(x,y) = 0$, $g_2(x,y)dy(x)/dx + f_2(x,y) = 0$. Если для первого из них удается подобрать интегрирующий множитель m_1, а для второго - множитель m_2, то определяются найденные с помощью этих множителей интегралы $h_1(x,y), h_2(x,y)$ данных уравнений, и далее решается задача подбора функций φ, ψ, для которых $m_1(x,y)\varphi(h_1(x,y)) = m_2(x,y)\psi(x,y)$. Если она решена, то итоговым интегрирующим множителем служит произведение $m_1(x,y)\varphi(h_1(x,y))$.

    При реализации данного метода в решателе удобно искать разбиение с помощью выделения таких групп слагаемых, для которых способ получения интегрирующего множителя заранее известен. Этот подход проиллюстрирован на единственном пока приеме, где f_1, g_1 определяются при усмотрении дифференциала дроби:

$\forall_{acdefgkmnpqsxy}(n - s = 1$ & $k - m = 1$ & $f - ax^m y^n + p$ & $g = -ax^k y^s + q$ & Интегрмножитель(p, q, c, d) & группмножитель$(-1/(ax^{m+2}y^s), y/x, c, d, e) \rightarrow$ интегрмножитель$(f, g, e))$

Здесь $f_1 = ax^m y^n$, $g_1 = -ax^k y^s$. Первые два антецедента уточняют соотношения между показателями степени k, m, n, s. Интегрирующий множитель m_1 и интеграл h_1 определяются сразу: они равны, соответственно, $-1/ax^{m+2}y^s$ и y/x. Для обработки f_2, g_2 используется пакетный синтезатор "Интегрмножитель". Он отличается от синтезатора "интегрмножитель" только тем, что кроме интегрирующего множителя находит также соответствующий ему интеграл. Фактически, здесь происходит обращение к синтезатору "интегрмножитель" и затем выполняется интегрирование. Это делается с помощью единственного приема, который приведем ниже. Таким образом, пятый антецедент находит интегрирующий множитель c и интеграл d для второго уравнения. Завершающий шаг - подбор функций φ, ψ - обеспечивается синтезатором "группмножитель". Уровень срабатывания приема равен 6.

Единственный прием синтезатора "Интегрмножитель" таков:

$\forall_{abcvwxy}$(интегрмножитель(a, b, c) & $\int acdx = \lambda_x(v(x, y), x -$ число) & $\int(bc - (dv(x, y)/dy))dy = \lambda_y(w(y), y-$число$) \rightarrow$ Интегрмножитель$(a, b, c, v(x, y) + w(y)))$

Наконец, рассмотрим синтезатор "группмножитель". Он имеет всего два приема, связанные с частным случаем подбора функции $\psi(X)$ как $X^{\pm 2}$. Это объясняется лишь малым числом задач, на которых предпринималось обучение решателя в данной области. Приемы имеют следующий вид:

$\forall_{abcdf}(cd^2/a = f(b) \rightarrow$ группмножитель$(a, b, c, d, cd^2))$

$\forall_{abcdf}(c/(d^2 a) = f(b) \rightarrow$ группмножитель$(a, b, c, d, c/d^2))$

В обоих случаях шаблон $f(\ldots)$ идентифицируется с помощью указателя "новаргумент(x6 набор(x23 x24) извлечение)", что позволяет доопределять функцию $\varphi(X)$ в достаточно широком диапазоне возможностей.

11. Один специальный случай.

    В заключение приведем прием, усматривающий интегрирующий множитель вида $1/(x^k y)$:

    $\forall_{fgkpqxy}(df/dy = p$ & $dg/dx = q$ & $(xy(q - p) + xf)/(gy) = k \rightarrow$ интегрмножитель$(f, g, 1/(x^k y)))$

    Первые два антецедента выполняют дифференцирование с помощью вспомогательных задач на преобразование. Левая часть последнего антецедента тоже обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, и проверяется, что результат k не содержит переменных x, y. Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор "особоерешение"

Напомним, что в приеме решения уравнения, использующем интегрирующий множитель, предпринималась попытка найти такие значения $y(x) = a$, которые не попадают в о.д.з. интегрирующего множителя, и рассмотреть эти значения как возможные особые решения уравнения. При этом использовался нормализатор "особоерешение", преобразующий отрицание условия на о.д.з. для множителя m. Результат должен был представлять собой дизъюнкцию равенств $y(x) = a$ либо константу "ложь". Перечислим приемы нормализатора, имея в виду, что эти приемы применяются только к корневому вхождению:

1. Отбрасывание условий, не имеющих вида отрицания равенства.

   $\forall_{ab}(\neg(a\ \&\ b) \leftrightarrow \neg b)$

   Здесь a - произвольное утверждение, не имеющее вида отрицания равенства. Применение приема приводит, в частности, к отбрасыванию сопровождающих неравенств. Остаются только "связи", которые могут дать конкретные значения для $y(x)$.

2. Переход к константе "ложь".

   $\neg$истина $=$ ложь

   Прием завершает преобразования, усматривая константу "ложь". Уровни срабатывания этого и предыдущего приемов равны 1.

3. Завершающий спуск отрицания.

   $\forall_{abc}(a\ \vee\ \neg(\neg b\ \&\ c) \leftrightarrow a\ \vee\ b\ \vee\ \neg c)$

   Утверждение b представляет собой равенство. Допускаются вырожденные a, c. Уровень срабатывания равен 3.

4. Попытка явного разрешения равенства относительно неизвестной.

   $\forall_{abcd}((a = b\ \&\ x - \text{число}) = c \rightarrow \neg(\neg(a = b)\ \&\ d) \leftrightarrow \neg(\neg c\ \&\ d))$

   Левая часть антецедента разрешается относительно переменной x, роль которой играет передаваемая через входной комментарий (неизвестная x) переменная y дифференциального уравнения. Перед применением приема проверяется, что равенство $a = b$ еще не разрешено относительно x. Уровень срабатывания равен 2.

5. Отбрасывание условий, не содержащих неизвестных.

   $\forall_{ab}(\neg(a\ \&\ b) \leftrightarrow \neg b)$

   Утверждение a не содержит неизвестной дифференциального уравнения (в приеме она обозначена через x, хотя в действительности ее роль играет переменная y из уравнения). Уровень срабатывания равен 1.

2.1.5 Некоторые стандартные случаи замены переменной

Степенная замена

$$\forall_{fghmnxyzP}(n - m = 1\ \&\ (f(z(x))dz(x)/dx + ng(z(x)) = nh(x)) = P(z(x)) \rightarrow (y(x))^m f((y(x))^n)dy(x)/dx + g((y(x))^n) = h(x) \leftrightarrow P((y(x))^n))$$

Указатель "контекст(позиция(x10 корень)вид(x10 степень(значение(x24 x23)x14)))" определяет начало попытки применения приема с усмотрения в уравнении подвыражения $(y(x))^n$. Здесь n - натуральная константа. Шаблоны $f(\ldots), g(\ldots)$ идентифицируются с помощью указателей "новаргумент(x6 x24 фикс)", "новаргумент(x7 x24 фикс)": проверяется, что неизвестная функция встречается только в n -й степени.

Первый антецедент проверяет, что степень m на единицу меньше n. Второй антецедент решает уравнение, возникающее при замене $z(x) = y(x)^n$. Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на описание. Уровень срабатывания приема равен 4. Предусмотрен также вариант степенной замены для варьируемой переменной:

$$\forall_{abfgmntxyP}(m = n - 1 \ \&\ a - b = x^m g(y(x), x^n) \ \&\ (nf(y(t), t)dy(t)/dt + g(y(t), t) = 0) = P(y(t), t) \to f(y(x), x^n)dy(x)/dx + a = b \leftrightarrow P(y(x), x^n))$$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в уравнении подвыражения x^n, где n - натуральная константа. Шаблон $f(y(x), x^n)$ идентифицируется при помощи указателя "новаргумент(x6 x23 фикс)". Здесь проверяется, что x встречается внутри идентифицирующего терма только в выражениях $y(x), x^n$. Второй антецедент обрабатывает разность $a - b$ нормализатором ускоренного разложения на множители, после чего предпринимает попытку идентифицировать m и $g(y(x), x^n)$, используя указатель "новаргумент(x7 x23 фикс)". Первый антецедент проверяет, что $m = n - 1$. Третий антецедент решает уравнение, возникающее при замене $t = x^n$. Уровень срабатывания равен 7.

Экспоненциальная замена

$$\forall_{afghxyzP}((f(z(x), x)dz(x)/dx + az(x)(g(z(x), x) - h(x)) = 0) = P(z(x), x) \ \&\ \neg(a = 0) \to f(\exp(ay(x)), x)dy(x)/dx + g(\exp(ay(x)), x) = h(x) \leftrightarrow P(\exp(ay(x)), x))$$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в уравнении подвыражения $\exp(ay(x))$. Идентификация шаблонов $f(\ldots), g(\ldots)$ выполняется с помощью указателей "новаргумент(x6 x23 фикс)", "новаргумент(x7 x23 фикс)". Первый антецедент решает уравнение, возникшее при замене $z(x) = \exp(ay(x))$. Уровень срабатывания равен 8.

Простейшие тригонометрические замены

$$\forall_{fghxyzP}((-f(z(x), x)dz(x)/dx + g(z(x), x) = h(x)) = P(z(x), x) \to f(\cos y(x), x)\sin y(x)dy(x)/dx + g(\cos y(x), x) = h(x) \leftrightarrow P(\cos y(x), x))$$

$$\forall_{fghxyzP}((f(z(x), x)dz(x)/dx + g(z(x), x) = h(x)) = P(z(x), x) \to f(\sin y(x), x)\cos y(x)dy(x)/dx + g(\sin y(x), x) = h(x) \leftrightarrow P(\sin y(x), x))$$

В этих приемах указатель "контекст(...)" не используется, так как синус либо косинус неизвестной y усматривается непосредственно среди множителей коэффициента при производной. Указатели "новаргумент" обеспечивают идентификацию шаблонов $f(\ldots), g(\ldots)$, и далее первый антецедент решает уравнение, возникшее при замене переменной. Уровни срабатывания равны 8.

Замена через тангенс половинного аргумента

$$\forall_{abfghxyzP}((2bf(2z(x)/(1 + z(x)^2), (1 - z(x)^2)/(1 + z(x)^2))dz(x)/dx + a(z(x)^2 + 1) \cdot (g(2z(x)/(1 + z(x)^2), (1 - z(x)^2)/(1 + z(x)^2)) - h(x)) = 0) = P(z(x)) \to f(\sin(ay(x)/b), \cos(ay(x)/b))dy(x)/dx + g(\sin(ay(x)/b), \cos(ay(x)/b)) = h(x) \leftrightarrow P(\mathrm{tg}(ay(x)/(2b))) \ \vee\ \cos(ay(x)/(2b)) = 0 \ \&\ g(0, -1) = h(x))$$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в уравнении выражения $\sin(ay(x)/b)$. Проверяется, что уравнение содержит также выражение $\cos(ay(x)/b)$. После этого предпринимается замена $z(x) = \mathrm{tg}(ay(x)/(2b)$, и первый антецедент решает полученное уравнение. Заменяющая дизъюнкция учитывает возможность появления особых решений для значений $y(x)$, обращающих знаменатель тангенса в ноль. Так как эти решения константные, то $dy(x)/dx = 0$, и уравнение приобретает вид $g(0, -1) = h(x)$. Уровень срабатывания равен 9.

Замена для произведения варьируемой переменной и неизвестной

$\forall_{fghkxyzP}((x^{k-1}f(z(x))dz(x)/dx - x^{k-2}f(z(x))z(x) + g(z(x)) = h(x)) = P(z(x))$ &
$0 \leq k - 2 \rightarrow x^k f(xy(x))dy(x)/dx + g(xy(x)) = h(x) \leftrightarrow P(xy(x)))$

Указатель "контекст" не используется. Переменная k идентифицируется с натуральной константой, отличной от единицы. Уровень срабатывания равен 5.

Замена для отношения неизвестной и варьируемой переменной

$\forall_{bfghxyzP}((f(xz(x))x^2dz(x)/dx + g(xz(x)) = h(x)) = P(z(x))$ & $b = f(y(x)) \rightarrow$
$bxdy(x)/dx - by(x) + g(y(x)) = h(x) \leftrightarrow P(y(x)/x))$

Указатель "контекст" не используется. Второй антецедент анализирует общий множитель b двух выделенных в уравнении слагаемых и определяет шаблон $f(y(x))$. Уровень срабатывания равен 8. Целесообразность попытки дробной замены может усматриваться отдельным приемом (см.ниже), который в этом случае вводит комментарий "(производная заменавхождения дробь)". Тогда замена реализуется следующим образом:

$\forall_{fgxyzAP}((A = g(x)) = P(z(x))$ & $A = f(xdz(x)/dx + z(x), xz(x), x) \rightarrow$
$f(dy(x)/dx, y(x), x) = g(x) \leftrightarrow P(y(x)/x))$

Указатель "контекст(...)" определяет начало попытки применения приема при усмотрении в уравнении выражения $dy(x)/dx$. Переменная y идентифицируется с неизвестной, выражение $g(x)$ не содержит неизвестных. Задача имеет комментарий "(производная заменавхождения дробь)". Второй антецедент выписывает левую часть уравнения, возникающего при замене $z(x) = y(x)/x$, и упрощает его вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что результат A не содержит производных внутри сумм, расположенных внутри степенных выражений. Первый антецедент решает данное уравнение. Уровень срабатывания равен 9. Для усмотрения целесообразности замены введен следующий прием:

$\forall_{axy}(\text{контекст}(axdy(x)/dx - ay(x)))$

Здесь происходит усмотрение в условии задачи на описание, имеющей цель (связка ...), подвыражения $axdy(x)/dx - ay(x)$, где y - неизвестная. В отличие от первого приема, это подвыражение может располагаться внутри других выражений уравнения. Допускаются также другие вхождения производной. Затем вводится комментарий "(производная заменавхождения дробь)".

Замена для радикала

$\forall_{abfghxyzP}(\neg(a = 0)$ & $(2z(x)f((z(x)^2 - b)/a)dz(x)/dx + ag((z(x)^2 - b)/a) = ah(x)) = P(z(x)) \rightarrow f(y(x))dy(x)/dx + g(y(x)) = h(x) \leftrightarrow P(\sqrt{ay(x) + b}))$

Указатель "контекст" инициирует попытку применения приема при усмотрении в уравнении подвыражения $\sqrt{ay(x) + b}$. Уровень срабатывания равен 7.

2.1.6 Отбрасывание несущественных условий

Отбрасывание разбора случаев для константной функции

$\forall_{axy}((a \ \vee \ \neg a \ \& \ dy(x)/dx = 0) \ \& \ y(x) = b \leftrightarrow y(x) = b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на описание и позволяет убрать дизъюнкцию, являющуюся следствием условия $y(x) = b$. Здесь y - неизвестная задачи, x - варьируемая переменная, b не содержит переменной x и неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

Отбрасывание функций, определенных в единственной точке

Если рассматривается подслучай, в котором значение варьируемой переменной фиксируется - явно либо с помощью равенства, не содержащего неизвестных задачи, то этот подслучай отбрасывается. Технически отбрасывание осуществляется путем замены равенства для x на константу "ложь". Используются два приема.

Первый ориентирован на случай явной фиксации. Его теорема имеет вид $\forall_{ax}(\neg(x = a))$. Заголовок приема - "второйтерм". Он идентифицирует с равенством $x = a$ некоторое условие задачи и заменяет это условие на константу "ложь". Выражение a не содержит неизвестных и варьируемых параметров. Уровень срабатывания равен 1.

Второй прием имеет теорему $\forall_{ab}(\neg(a = b))$. Равенство $a = b$ идентифицируется с условием задачи на описание, не содержащим неизвестных, но содержащим варьируемую переменную. Должен иметь место этап редактирования ответа. Уровень срабатывания равен 4. Вероятность того, что рассматриваемое условие окажется тождеством, при таких предположениях крайне мала.

Отбрасывание в равенстве произведения нулю множителя, зависящего только от варьируемой переменной

$\forall_{ab}(ab = 0 \leftrightarrow b = 0)$

Произведение входит в условие задачи на описание, причем либо достижимо из корня только через символы "и", "или", "существует", либо очевидно, что $a \neq 0$. Выражение a составлено из всех известных сомножителей, не содержит символов "производная" и "частнпроизв", причем содержит варьируемую переменную. Выражение b содержит неизвестную. Отбрасывание сомножителя a объясняется теми же соображениями, что и в предыдущем пункте: этот сомножитель может дать лишь подслучаи, в которых значение варьируемой переменной фиксировано. Уровень срабатывания равен 0.

Отбрасывание при редактировании ответа неравенств и отрицаний равенств - условий на произвольную постоянную

При редактировании параметрического описания, дающего решение дифференциального уравнения, возникают вспомогательные задачи на описание, имеющие цель "связпеременная". Их условия составлены из ограничений на известные параметры ответа - варьируемые переменные и собственно параметры. Такие ограничения задают о.д.з. выражения для неизвестной функции и обычно не заносятся в ответ. Для их удаления используются приемы с теоремами $\forall_{ab}(\neg(a = b))$, $\forall_{ab}(a < b)$, $\forall_{ab}(a \leq b)$. Они применяются, если задача на описание имеет цель "связпеременная", не имеет уравнений и ни одна из варьируемых переменных не является неизвестной. Фактически, просто отбрасываются неравенства и отрицания равенств. Уровень срабатывания равен 1. Возможно сохранение неравенств и отрицаний равенств, явно разрешенных относительно параметра либо не имеющих вхождений параметра. Оно будет иметь место, если опережающим образом сработает прием выдачи ответа.

Отбрасывание условия на тип значения функциональной переменной при редактировании ответа

Условие "функция(y)" на неизвестную функцию при редактировании ответа отбрасывается. Это обеспечивается приемом с теоремой "$\forall_a(a$ – функция)", имеющим заголовок "второйтерм" и заменяющим указанное условие на константу "истина". Уровень срабатывания равен 3.

Отбрасывание условий на значение функции от исходного аругумента после перехода к вспомогательному аргументу

При решении уравнений, не разрешенных относительно производной, используется метод введения параметра(см. ниже). Здесь возникает вспомогательный аргумент p, через который выражаются как x, так и y: $x = f(p), y = g(p)$. В решателе оказалось удобным вообще исключить в таких случаях из рассмотрения переменную x, сведя указанные два равенства к одному равенству $y(f(p)) = g(p)$. При сведении естественно отбросить старые сопровождающие условия, относящиеся к значениям $y(x)$. Это делают приемы, имеющие заголовок "второйтерм" и следующие теоремы: $\forall_{ab}(a < b)$, $\forall_{ab}(a \leq b)$, $\forall_{yx}(y(x)$ – число). Во всех этих случаях задача на описание должна иметь комментарий (станддиффпарам $y(x)$), который указывает, что уже был введен параметр p. Проверяется, что заменяемое на константу "истина" условие содержит $y(x)$. Первые два приема имеют уровень срабатывания 1, последний - уровень срабатывания 0.

Отбрасывание условия, связывающего исходный аргумент со вспомогательным аргументом

Как и в предыдущем пункте, рассматривается метод введения параметра. На этапе редактирования ответа отбрасываются равенства без неизвестных $x = t$, связывающие исходный аргумент x со вспомогательным аргументом p. Требуется наличие комментария "(вспомпараметр исключение)", указывающего, что имела место успешная попытка исключения вспомогательного аргумента после интегрирования, т.е. удалось перейти от соотношения, связывающего $y(f(p))$ с p к соотношению, связывающему $y(x)$ с x. Уровень срабатывания равен 0.

2.1.7 Предварительные преобразования уравнений

Приемы этого раздела направлены на такую стандартизацию уравнений, которая делает возможным применение описанных выше приемов их интегрирования.

Группировка слагаемых с неизвестной функцией

$\forall_{fghxy}(fg(y(x)) + fh(y(x)) = f(g(y(x)) + h(y(x))))$

Прием применяется к сумме, входящей в условие задачи на описание. Указатель "контекст(...)" усматривает в нем подвыражение $dy(x)/dx$. Переменная x выделена целью "связка" как варьируемая. Указатель "выписка(x6 известно(x6))" идентифицирует f как совокупность всех известных сомножителей двух слагаемых. Проверяется, что x входит в f. Шаблоны $g(y(x)), h(y(x))$ идентифицируются с помощью указателей "новаргумент". Уровень срабатывания равен 3.

Группировка слагаемых с производной

$\forall_{abxy}(ady(x)/dx + bdy(x)/dx = (a+b)dy(x)/dx)$

Прием применяется к сумме, входящей в условие задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной. Выражения a, b не содержат символов "производная", "частнпроизв". Уровень срабатывания равен 1.

Раскрывание скобок с производной

$\forall_{abcdep}(p = (a+b)c + d \to (a+b)c + d = e \leftrightarrow p = e)$

Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Сомножитель некоторого слагаемого суммы $a + b$ представляет собой производную, содержащую неизвестные задачи. Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Вырожденные значения переменных c, d не допускаются. Уровень срабатывания равен 1. Если $d = 0$, то применяется отдельный прием:

$\forall_{abcep}(p = (a+b)c \to (a+b)c = e \leftrightarrow p = e)$

Уровень срабатывания здесь равен 7.

Устранение знаменателя в случае уравнения с разделяющимися переменными

$\forall_{abpqrsxy}(a(x)b(y(x))dy(x)/dx + (p(x)q(y(x)))/(s(x)r(y(x))) = 0 \leftrightarrow$
$a(x)s(x)b(y(x))r(y(x))dy(x)/dx + p(x)q(y(x)) = 0)$

Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Переменные x, y идентифицируются с варьируемой переменной и с неизвестной задачи. Указатели "перечень(...)" идентифицируют b, q, r как произведения всех содержащих неизвестные сомножителей. Далее шаблоны $b(y(x)), q(y(x)), r(y(x))$ идентифицируются согласно указателям "новаргумент ...". Уровень срабатывания равен 1.

Раскрывание скобок для выделения известных слагаемых

$\forall_{abcdep}(p = (a+b)c + d \to (a+b)c + d = e \leftrightarrow p = e)$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Это условие должно содержать производную от неизвестной функции. Переменные a, c идентифицируются с выражениями, не содержащими неизвестных. Выражение b содержит неизвестные. Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Вырожденные значения переменных c, d не допускаются. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdekp}(p = (a+b)^k c + d \to (a+b)^k c + d = e \leftrightarrow p = e)$

Прием аналогичен предыдущему, но введен константный натуральный показатель степени k, который может принимать значения 2,3,4. Уровень срабатывания приема равен 7.

Домножение на знаменатель слагаемого

$\forall_{abcdfxy}(ady(x)/dx + b/c + d = f \leftrightarrow ac \cdot dy(x)/dx + b + cd = cf)$

Прием применяется к условию задачи на описание. Переменная y идентифицируется с неизвестной. Выражение c содержит $y(x)$. Заменяющее утверждение обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 4. На той же теореме основана еще одна версия приема. У нее c не содержит неизвестных, но b содержит. Если b имеет вид $ky(x)$, где k известно, то уровень срабатывания равен 3. Иначе - он равен 6. В последнем случае дополнительно проверяется, что b не имеет степенных подвыражений с дробным показателем степени, у которых основанием служит произведение.

Усмотрение явного выражения для функции и вычисление производной

$\forall_{abxy}(y(x) = a(x) \ \& \ da(x)/dx = b \rightarrow dy(x)/dx = b)$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Переменные x, y идентифицируютя, соответственно, с варьируемой переменной и с неизвестной. Первый антецедент берется в контексте, причем $a(x)$ не содержит неизвестных. Второй антецедент вычисляет производную с помощью нормализатора "нормпроизводная". Уровень срабатывания равен 0.

Сложение дробных выражений в коэффициенте при производной

$\forall_{abcefpxy}(p = (a/b + c)fdy(x)/dx + e \rightarrow (a/b + c)fdy(x)/dx + e = p)$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Сумма $a/b + c$ содержит неизвестные. Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "видумножение", Проверяется, что результат p, с точностью до отбрасывания знака, имеет заголовок "дробь". Уровень срабатывания приема равен 7.

Попытка факторизации коэффициента при производной

$\forall_{abcdpxy}(p = a + b \rightarrow (a + b)dy(x)/dx + c = d \leftrightarrow pdy(x)/dx + c = d)$

Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Выражение $a + b$ не содержит неизвестных. Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "факторизация". Проверяется, что результат p имеет, с точностью до отбрасывания знака, заголовок "умножение" либо "степень". Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, у которой выражение $a + b$ содержит неизвестные. Ее уровень срабатывания равен 5.

Переход к уравнению с нулевой правой частью

$\forall_{xy}(dy(x)/dx = y(x) \leftrightarrow dy(x)/dx - y(x) = 0)$

Прием обрабатывает особый случай, когда непосредственно не усматривается числовое равенство (производная формально может принимать нечисловые значения $\pm\infty$, "неопред"). Уровень срабатывания равен 1.

2.1.8 Учет условия на значение функции в точке

Подстановка в условие на значение функции в точке выражения с произвольными постоянными

$\forall_{afxy}(y(x) = f(x) \to y(a) = f(a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение $y(a)$ входит в условие задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Его переменные не связаны внешними кванторами и описателями. Выражение a не содержит варьируемой переменной x. Антецедент берется в контексте, причем выражение $f(x)$ может содержать только несущественные неизвестные (иными словами, только произвольные постоянные). Замена сопровождается выводом условий на о.д.з. выражения $f(a)$. Уровень срабатывания равен 3.

Исключение модуля при редактировании ответа

Если решение ищется в окрестности заданной точки, то модуль отбрасывается на основе анализа строгого знака выражения в данной точке:

$\forall_{afx}(0 < f(a) \to |f(x)| = f(x))$

$\forall_{afx}(f(a) < 0 \to |f(x)| = -f(x))$

В обоих случаях имеется цель (окрестность x a), указывающая, что решение ищется в окрестности точки a. Проверяется, что выражение $f(x)$ содержит переменную x, и далее антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приемов равен 2.

2.1.9 Уравнения, не разрешенные относительно производной

Попытка явного разрешения уравнения относительно производной

$\forall_{afxyzP}((z - \text{число} \ \& \ f(z, y(x), x) = a) = P(z) \to f(dy(x)/dx, y(x), x) = a \leftrightarrow P(dy(x)/dx))$

Прием применяется к условию задачи на описание. Указатель "контекст(...)" обеспечивает усмотрение в этом условии подвыражения $dy(x)/dx$, где y - неизвестная. Далее шаблон $f(dy(x)/dx, y(x), x)$ идентифицируется согласно указателю "новаргумент(x6 x23 фикс)". Проверяется, что выражение a не содержит неизвестных. Вводится вспомогательная переменная z и составляется уравнение $f(z, y(x), x) = a$. Проверяется, что это уравнение не линейно относительно z. Антецедент разрешает его относительно z с помощью вспомогательной задачи на описание. Указатель "попытказамены" означает, что прием не заменяет исходное уравнение на результат $P(dy(x)/dx)$ разрешения его относительно производной, а вводит вспомогательную задачу, в которой и реализует указанную замену. Если эту задачу решить не удалось, то решение текущей задачи продолжается с применением других средств. Введен очень слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.

Введение вспомогательного параметра

$\forall_{abfghnpquvwxyz}((f(p,z)=g(x)\ \&\ z-$ число$)=(z=h(p,x)\ \&\ q(p,x))\ \&$
$dh(p,x)/dp=a(x)\ \&\ dh(p,x)/dx=b(x)\ \&\ (a(u(p))+(b(u(p))-p)du(p)/dp=0\ \&$
$u(p)-$ число $\&\ q(p,u(p)))=\exists_c(c-$ число $\&\ n(c)\ \&\ u(v)=w)\rightarrow$
$f(dy(x)/dx,y(x))=g(x)\leftrightarrow\exists_c(c-$ число $\&\ n(c)\ \&\ y(w)=h(v,w)))$

Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Идентификация начинается с того, что внутри уравнения усматривается подвыражение $dy(x)/dx$, где y - неизвестная. Для этого служит указатель "контекст(...)". Согласно методу введения параметра, рассматривается новая переменная p, обозначающая $dy(x)/dx$. Составляется уравнение U_1, полученное из исходного уравнения заменой $dy(x)/dx$ на p, и это уравнение нужно разрешить относительно $y(x)$. С этой целью вводится еще одна новая переменная z, на которую в уравнении U_1 заменяются все вхождения $y(x)$. Полученное уравнение U_2, пополненное условием "$z-$число", разрешается первым антецедентом относительно z. Здесь используется вспомогательная задача на описание.

Для дальнейшего нужно, чтобы имелось явное выражение z через p,x. Однако, при решении уравнения U_2 может возникнуть разбор случаев, и тогда ответ будет иметь вид дизъюнкции. Поэтому прием снабжен указателем "дизъюнктчлен(1 4)". Он обеспечивает такую компиляцию, что при идентификации правых частей указанных в нем антецедентов поочередно рассматриваются дизъюнктивные члены левых частей. Для каждого такого дизъюнктивного члена все действия согласно теореме приема выполняются до конца, а затем выписывается дизъюнкция найденных заменяющих утверждений, которая и играет роль итогового заменяющего утверждения.

Чтобы результат разрешения левой части первого антецедента имел вид дизъюнкции утверждений, идентифицируемых с правой частью, предпринимается дополнительная его обработка. Для этого создан нормализатор "нормдиффпарам", который преобразует утверждение к виду дизъюнкции элементарных конъюнкций, преобразует условия принадлежности перечню в дизъюнкции равенств и выполняет простейшую стандартизацию равенств.

С учетом сделанных замечаний, получаем соотношение "$z=h(p,x)$" для текущего рассматриваемого подслучая. Второй и третий антецеденты вычисляют частные производные $dh(p,x)/dp$, $dh(p,x)/dx$, используя вспомогательные задачи на преобразование. Четвертый антецедент решает уравнение, в котором роль неизвестной играет x, а роль варьируемой переменной - p. Соответственно, в нем предпринята замена x на новую неизвестную функцию $u(p)$. Прлученный ответ дополнительно обрабатывается нормализмтором "станддиффпарам" (см. ниже). Так как при решении уравнения может иметь место разбор случаев, то упомянутый выше указатель "дизъюнктчлен" сылается и на данный антецедент. Правая часть антецедента, т.е. $\exists_c(c-$ число $\&\ n(c)\ \&\ u(v)=w)$, идентифицируется с одним из дизъюнктивных членов ответа. Указатель "обобщподст" отменяет проверку невхождения связанной переменной c в $u(v)$ и в w. Для учета возможных особых решений введен указатель "дизъюнктблок(фикс(0 1))". Этот указатель ссылается на утверждение, которое будет добавляться к итоговому заменяющему терму как дополнительный дизъюнктивный член. В данном случае ссылка имеет место на само исходное уравнение, которое обрабатывается нормализатором "особыерешения"(см. ниже). Если особых решений нет, то будет выдана константа "ложь", иначе - утверждение, описывающее найденное решение.

Попытка применения приема блокируется, если не усматривается, что разрешение уравнения относительно производной может быть связано с трудностями. Именно, проверяется наличие вхождения производной с неизвестными, расположенной в подтерме, заголовок которого отличен от символов "равно", "плюс", "умножение", "минус", "модуль", причем в случае заголовка "дробь" производная должна быть размещена в знаменателе. Если $f(p,z)$ линейно относительно z, то уровень срабатывания равен 9, иначе он равен 10. Если уравнение U_1 разрешается относительно x, а не относительно $y(x)$, то прием модифицируется следующим образом:

$\forall_{abfghnpquvwxyz}((f(p,z)=g(x)\ \&\ x-\text{число})=(x=h(p,z)\ \&\ q(p,z))\ \&$
$dh(p,z)/dp=a(z)\ \&\ dh(p,z)/dz=b(z)\ \&\ (pa(u(p))+(pb(u(p))-1)du(p)/dp=0\ \&$
$u(p)-\text{число}\ \&\ q(p,u(p)))=\exists_c(c-\text{число}\ \&\ n(c)\ \&\ u(v)=w)\rightarrow$
$f(dy(x)/dx,y(x))=g(x)\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ n(c)\ \&\ y(h(v,w))=w))$

Попытка исключения вспомогательного параметра после интегрирования

Если после интегрирования уравнения возникло соотношение вида $y(a(p))=f(p)$, где y - неизвестная, p - вспомогательный параметр, то предпринимается попытка решить относительно p уравнение $a(p)=x$ и таким образом вернуться в ответе к исходной варьируемой переменной:

$\forall_{abfgpxy}((a=x)=(p=b\ \&\ g)\rightarrow y(a)=f(p)\leftrightarrow y(x)=f(b)\ \&\ g)$

Указатель "контекст(...)" идентифицирует переменные x,p как элементы цели (связка ...), причем комментарий (параметризация p) указывает, что p играет роль вспомогательного параметра. Левая часть антецедента разрешается относительно p с помощью вспомогательной задачи на описание. Перед попыткой разрешения проверяется, что p имеет не более двух вхождений в a. Если число этих вхождений равно 2, причем одно из них расположено в основании степени, имеющей вид суммы, а другое - вне этого основания, то прием блокируется. Указатель "дизъюнктчлен(1)" предусматривает возможность появления дизъюнктивного ответа для $a=x$. Тогда заменяющий терм будет формироваться тоже как дизъюнкция. Как и выше, используется нормализатор "нормдиффпарам". Прием вводит комментарий "(вспомпараметр исключение)". Уровень срабатывания равен 3. Если после интегрирования уравнения методом вспомогательного параметра и преобразований общей стандартизации соотношение $y(x)=f(x)$, не содержащее параметра p, возникло без специального приема разрешения, то выполняется отбрасывание сопровождающего равенства, связывающего p и x. Обычно такая ситуация складывается при интегрировании уравнения Клеро, где в список условий сразу заносятся два соотношения - для связей x с p и y с p. Теорема приема имеет вид $\forall_{ap}(p=a\leftrightarrow\text{истина})$. Здесь a не содержит неизвестных, p - вспомогательный параметр. Уровень срабатывания равен 3.

Уравнение Клеро

$\forall_{afghpqxyz}((f(p,z)=g(x)\ \&\ z-\text{число})=(z=px+h(p)\ \&\ q(p,x))\ \&\ dh(p)/dp=a(p)\rightarrow f(dy(x)/dx,y(x))=g(x)\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ y(x)=cx+h(c))\ \vee\ y(x)=px+h(p)\ \&\ x+a(p)=0)$

Указатель "контекст(...)" начинает попытку применения приема с усмотрения в условии задачи на описание выражения $dy(x)/dx$, где y - неизвестная, x - варьируемая переменная. Шаблон $f(dy(x)/dx,y(x))$ идентифицируется с помощью указателя "новаргумент(x6 x24 фикс)". Затем находится результат $f(p,z)=g(x)$ замены в уравнении производной и неизвестной функции на новые переменные p,z. Первый антецедент разрешает полученное уравнение относительно z с помощью вспомогательной задачи на описание. Используется также нормализатор "нормдиффпарам". Результат идентифицируется с уравнением $z = px + h(p)$, превращающимся в уравнение Клеро при обратной замене z, p на функцию и производную. Второй антецедент вычисляет производную $dh(p)/dp$, используя вспомогательную задачу на преобразование. Заменяющий терм представляет собой дизъюнкцию общего решения уравнения Клеро и пары соотношений $y(x) = px + h(p), x + a(p) = 0$, из которых будет извлекаться особое решение. Если выражение $f(p, z)$ линейно относительно p либо если каждое вхождение в уравнение варьируемой переменной расположно только в подвыражениях $y(x), dy(x)/dx$, то попытка применения приема блокируется. Созданы две версии приема. Первая применяется, если каждое вхождение варьируемой переменной, не расположенное в подвыражениях $y(x), dy(x)/dx$, является линейным (расположено только под операциями "плюс", "умножение", "минус" либо в числителях дробей). Ее уровень срабатывания равен 4. Вторая версия применяется без данного ограничения. Ее уровень срабатывания равен 10.

Уравнение Лагранжа

$\forall_{abfghpquvwxyz}((f(p,z) = g(x)\ \&\ z - \text{число}) = (z = xh(p) + v(p)\ \&\ q(p,x))\ \&\ dh(p)/dp = a(p)\ \&\ dv(p)/dp = b(p)\ \&\ ((p - h(p))du(p)/dp = u(p)a(p) + b(p)\ \&\ u(p) - \text{число}\ \&\ q(p, u(p))\ \&\ \neg(p - h(p) = 0)) = \exists_c(c - \text{число}\ \&\ n(c)\ \&\ u(p) = w(p,c)) \to f(dy(x)/dx, y(x)) = g(x) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ n(c)\ \&\ y(w(p,c)) = w(p,c)h(p) + v(p)))$

Отличие от предыдущего пункта состоит в том, что после разрешения уравнения в левой части первого антецедента относительно z и применения нормализатора "нормдиффпарам" возникает уравнение вида $z = xh(p) + v(p)$, дающее при обратной замаене уравнение Лагранжа. Здесь уже учитывается возможность разбора случаев при решении линейного дифференциального уравнения в четвертом антецеденте - введен указатель "дизъюнктчлен(4)". Левая часть антецедента дополнительно обрабатывается нормализатором "станддиффпарам". Для учета особого решения введен указатель "дизъюнктблок(фикс(0 1))", добавляющий к заменяющей дизъюнкции новый член - результат обработки исходного уравнения нормализатором "особыерешения". Этому нормализатору передается специальная информация, обеспечивающая поиск особых решений именно для уравнения Лагранжа. Уровень срабатывания равен 5.

Отбрасывание равенства, выражающего варьируемую переменную через вспомогательный параметр после того, как это выражение было подставлено в основное уравнение

Если уравнение оказалось проинтегрированным при помощи вспомогательного параметра p, и в условиях задачи на описание возникло соотношение $y(A(p)) = B(p)$, не содержащее исходной варьируемой переменной x, то предпринимается удаление соотношения $x = C(p)$, выражающего x через p. Это делается приемом, основанным на теореме вида "$\forall_{ax}(x = a \leftrightarrow \text{истина})$". Здесь a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор "нормдиффпарам"

Перечислим приемы уже упоминавшегося выше нормализатора "нормдиффпарам". Заметим, что этот нормализатор не является корневым.

1. Исключение перечня.

   $\forall_{abc}(a \in \{b, c\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a = c)$

   $\forall_{abcd}(a \in \{b, c, d\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a = c \ \vee \ a = d)$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Устранение дизъюнктивных членов, не содержащих равенства с неизвестной.

   $\forall_{ab}(a \ \vee \ b \leftrightarrow a)$

   При обращении к нормализатору ему передается комментарий (неизвестная z), указывающий ту переменную, относительно которой перед этим разрешалось уравнение. Данный прием отбрасывает члены b, которые не содержат равенств с переменной z, не расположенных непосредственно под отрицанием. Уровень срабатывания равен 1.

3. Устранение вложенных конъюнкций и дизъюнкций.

4. Преобразование к виду дизъюнктивной нормальной формы.

   $\forall_{abc}((a \ \vee \ b) \ \& \ c \leftrightarrow a \ \& \ c \ \vee \ b \ \& \ c)$

   Заменяющий терм обрабатывается нормализатором "нормлог" общей логической стандартизации. Уровень срабатывания равен 2.

5. Попытка раскрывания скобок.

   $\forall_{abc}(b = c \rightarrow a = b \leftrightarrow a = c)$

   Переменная a идентифицируется с неизвестной. К левой части антецедента применяется нормализатор "стандплюс". Проверяется, что результатом c служит сумма, отличная от исходного выражения. Уровень срабатывания равен 1.

6. Попытка группировки членов с варьируемой переменной при решении уравнения Лагранжа.

   $\forall_{abx}(ax/b = x(a/b))$

   $\forall_{abx}(ax + bx = x(a + b))$

   В обоих случаях x - варьируемая переменная дифференциального уравнения, передаваемая нормализатору через входной комментарий (группировка x). Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор "станддиффпарам"

Нормализатор необходим для дополнительной стандартизации ответа, полученного при решении дифференциального уравнения относительно вспомогательного параметра. Дизъюнктивные члены этого ответа в приведенных выше приемах идентифицируются с параметрическими описаниями $\exists_c(\ldots)$ относительно произвольной постоянной c. Однако, ответ может содержать особые случаи, не имеющие вида параметрических описаний, и чтобы они идентифицировались по общей схеме, нормализатор вводит фиктивные кванторы существования. Кроме того, он отбрасывает ряд избыточных подтермов и предпринимает попытку несколько упростить вид неявной зависимости. При обращении нормализатору передаются комментарии (неизвестная u) и (параметр p), указывающие неизвестную и варьируемый параметр того уравнения, ответ которого обрабатывается. Нормализатор является корневым.

1. Введение фиктивного квантора существования.

   $\forall_{abdfy}(\exists_c(c -$ число $\& \ f(c)) \ \vee \ g(x) = b \ \& \ d \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ f(c)) \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ g(x) = b \ \& \ d))$

   Переменная g идентифицируется с неизвестной, выражение b не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

2. Отбрасывание несущественных сопровождающих условий.

   $\forall_{abcdf}(a = b \ \& \ df(x)/dx -$ число $\& \ c \ \vee \ d \leftrightarrow a = b \ \& \ c \ \vee \ d)$

   $\forall_{abcdpq}(\neg(p = q) \ \& \ c \ \vee \ d \leftrightarrow c \ \vee \ d)$

   $\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ c \leftrightarrow c)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Отбрасывание равенств, правая часть которых не зависит от параметра.

   $\forall_{abc}(a(e) = b \ \vee \ c \leftrightarrow c)$

   Переменная a идентифицируется с неизвестной. Выражение b не содержит варьируемого параметра. Отброшенное решение является избыточным, так как оно будет независимо найдено нормализатором "особыерешения". Уровень срабатывания равен 1.

4. Один специальный случай упрощения параметрического описания.

   $\forall_{abfpxy}(\neg(b = 0) \to \exists_c(c-$число $\& \ f(ax+by(x)) = x) \vee p \leftrightarrow \exists_c(c-$число $\& \ y(f(x)) = (x - af(x))/b) \ \vee \ p)$

   Переменная y идентифицируется с неизвестной, x - с варьируемым параметром. Выражения a, b константные. Упрощение достигается с помощью перехода к новому параметру $X = ax + by(x)$, который далее снова обозначается за x. Подставляя в равенство $X = ax + by(x)$ вместо переменной x равное ей выражение $f(X)$, получаем $X = af(X) + by(f(X))$, т.е. $y(f(X)) = (X - af(X)/b$. Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор "особыерешения"

Нормализатор "особыерешения" используется приемами, основанными на методе введения параметра, а также приемом интегрирования уравнения Лагранжа. Ему передается исходное уравнение, которое преобразуется либо в константу "ложь"(если особые решения найти не удалось), либо в дизъюнкцию найденных особых решений.

1. Попытка выявления константных особых решений.

   $\forall_{abfpxyz}((p = 0 \ \& \ f(p, z) = a \ \& \ z-$число$) = (p = 0 \ \& \ z = b) \to f(dy(x)/dx, y(x)) = a \leftrightarrow y(x) = b)$

   Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения подвыражения $dy(x)/dx$. Затем с помощью указателя "новаргумент(x6 x24 фикс)" идентифицируется шаблон $f(\ldots)$. Выбираются новые переменные p, z, и уравнения $p = 0, f(p, z) = a$ разрешаются относительно неизвестных p, z. При успехе это дает константные особые решения. Антецедент выделен указателем "дизъюнктчлен", означающим, что перечисляются дизъюнктивные члены ответа, идентифицируемые с его правой частью $p = 0 \ \& \ z = b$. Уровень срабатывания приема равен 1.

2. Рассмотрение уравнения дискриминантной кривой.

   $\forall_{abfgpxyz}((df(z,y(x))/dz = 0 \;\&\; z - \text{число}) = (z = a \;\&\; b) \;\&\; (b \;\&\; dy(x)/dx = a \;\&\; f(a,y(x)) = g(x)) = p \rightarrow f(dy(x)/dx, y(x)) = g(x) \leftrightarrow p)$

   Идентификация выполняется так же, как в предыдущем приеме. Левая часть первого антецедента разрешается относительно z, левая часть второго антецедента - относительно y. В последнем случае вводится также цель (связка x). Оба антецедента сопровождаются указателем "дизъюнктчлен", определяющим перечисление дизъюнктивных членов левой части при идентификации правой части. Проверяется, что результат p решения уравнения второго антецедента представляет собой либо константу "ложь", либо дизъюнкцию равенств вида "$y(x) = \ldots$". Этот результат дополнительно обрабатывается нормализатором "регдиффпарам", отбрасывающим дизъюнктивные члены, у которых значение варьируемого параметра фиксировано. Уровень срабатывания равен 2.

3. Особые решения уравнения Лагранжа.

   Для уравнения Лагранжа $y(x) = xh(dy(x)/dx) + v(dy(x)/dx)$ (см. первый антецедент рассмотренного выше приема интегрирования уравнения Лагранжа) особые решения ищутся специальным приемом. В этом случае нормализатору при обращении передаются дополнительные входные данные - комментарии "(параметры $p - h(p)$)", "(переменная p)", "(коэффициент $h(p)$ $v(p)$)". Теорема приема имеет следующий вид:

   $\forall_{abcdfgpxy}((a = 0 \;\&\; p - \text{число} \;\&\; \text{одз}(c)) = (p = d) \;\&\; b = v(p) \;\&\; c = w(p) \rightarrow f(dy(x)/dx, y(x)) = g(x) \leftrightarrow y(x) = xv(d) + w(d))$

   Идентификация начинается с усмотрения в уравнении подвыражения $dy(x)/dx$. Используются также комментарии "(переменная p)", "(параметры a)", "(коэффициент b c)". Левая часть первого антецедента разрешается относительно p. Второй и третий антецеденты идентифицируют шаблоны $v(\ldots)$, $w(\ldots)$. Уровень срабатывания равен 1.

4. Завершение попыток поиска особых решений.

   Если по достижении уровня 3 текущий терм все еще содержит производную неизвестной функции, то он заменяется на константу "ложь".

2.2 Уравнения порядка выше первого

Напоминаем, что производные высших порядков обозначаются посредством выражений "частнпроизв(T k x)", где T - выражение "отображение(...)" для дифференцируемой функции, k - кратность производной, x - точка, в которой берется производная. Таким образом, для производной первого порядка имеются сразу два обозначения - стандартное обозначение "производная(T x)" и нестандартное - "частнпроизв(T 1 x)". Последнее может иногда возникать в результате применения приемов, работающих с кратными производными, и оно будет незамедлительно преобразовываться к стандартному виду.

2.2.1 Уравнения, допускающие понижение порядка

При реализации на ГЕНОЛОГе приемов данного раздела потребовалось ввести около десятка вспомогательных пакетных операторов. Описания их расположены в конце раздела, после описания всех приемов.

Неизвестная функция встречается только под производной

$\forall_{fgkxyzPQ}((f(z(x)) = g(x)) = \exists_c(P(z(x))) \ \& \ P(d^k y(x)/dx^k) = Q(x) \to f(d^k y(x)/dx^k) = g(x) \leftrightarrow \exists_c(Q(x)))$

Указатель "контекст(...)" начинает попытку применения приема с усмотрения в уравнении подвыражения $d^k y(x)/dx^k$. Указатель "частнпроизв" обеспечивает автоматическое преобразование при идентификации обычной производной первого порядка к кратной производной кратности единица. Указатель "функаргумент(x6 x24 x23 извлечение)" определяет идентификацию шаблона $f(d^k y(x)/dx^k)$ с применением нормализатора "извлечение", преобразующего все встречающиеся в уравнении производные порядков, отличных от k, в производные от $d^k y(x)/dx^k$. Заметим, что переменная x при наличии внешнего дифференцирования будет заменяться на связанную последним дифференцированием переменную a, так что вместо $d^k y(x)/dx^k$ здесь будет иметься подвыражение $d^k y(a)/da^k$. Определяемый указателем "функаргумент" функциональный шаблон учитывает эту особенность, необходимую для корректной замены $d^k y(x)/dx^k$ на новую неизвестную $z(x)$. Левая часть первого антецедента представляет собой результат такой замены. Она является дифференциальным уравнением меньшего порядка, чем исходное, и разрешается относительно z с помощью вспомогательной задачи на описание. В результирующее описание $P(z(x))$ делается обратная подстановка производной $d^k y(x)/dx^k$, и второй антецедент решает полученное дифференциальное уравнение относительно неизвестной y. Указатель "дизъюнктчлен(1)" учитывает возможность появляния дизъюнкции после разрешения левой части первого антецедента; тогда правая часть будет идентифицироваться последовательно со всеми дизъюнктивными членами. В начале применения приема проверяется, что неизвестная y встречается только под производными и что k - наименьшая кратность ее дифференцирования. Проверяется также, что существуют производные от y кратности, большей k. Уровень срабатывания равен 3. Если $k > 1$, то предпринимается дополнительная попытка перейти к другой новой неизвестной $z(x) = d^{k-1} y(x)/dx^{k-1}$:

$\forall_{fgkxyzPQ}((f(dz(x)/dx) = g(x)) = \exists_c(P(z(x))) \ \& \ P(d^{k-1} y(x)/dx^{k-1}) = Q(x) \to f(d^k y(x)/dx^k) = g(x) \leftrightarrow \exists_c(Q(x)))$

Уровень срабатывания здесь тоже равен 3.

Варьируемая переменная входит только под знаком неизвестной функции

$\forall_{afgtxyzPQ}((f(z(x), t) = a) = \exists_c(P(z(t), t)) \ \& \ (P(dy(x)/dx, y(x)) \ \& \ \neg(dy(x)/dx = 0)) = Q(x) \to f(dy(x)/dx, y(x)) = a \leftrightarrow \exists_c(Q(x)))$

Указатели "контекст", "частнпроизв", "функаргумент" задают тот же порядок действий в начале применения приема, что и выше. Далее проверяется, что варьируемая переменная встречается в уравнении только внутри подтермов $y(x)$ и производных функции y - простых либо кратных. Проверяется, что имеется хотя бы одна производная порядка выше первого. Выбираются новые переменные z, t, и составляется уравнение, в котором роль независимой переменной играет t, а роль неизвестной - z. Сначала $z(x)$ подставляется в шаблон $f(\ldots)$ вместо $dy(x)/dx$, а t - вместо $y(x)$. Как и выше, при подстановке $z(x)$ учитывается коррекция связанных переменных. Однако, далее требуется переход от дифференцирования z по x к дифференцированию

z по t. Он обеспечивается нормализаторами "новпроизв", "нормдифф" (см. ниже), которыми левая часть первого антецедента обрабатывается до разрешения ее относительно z. В полученный ответ $\exists_c(P(z(t),t))$ делается обратная подстановка, и он разрешается вторым антецедентом относительно y. Уровень срабатывания приема равен 3.

Попытка представить уравнение в виде равенства нулю производной некоторого вспомогательного выражения

Попытка преобразовать уравнение к виду $dF(x, y(x), dy(x)/dx, \ldots)/dx = 0$ реализуется специальным нормализатором "усмпроизводная", который будет описан ниже. Для обращения к этому нормализатору используется следующий прием:

$\forall_{abc}((a - b = 0) = c \rightarrow a = b \leftrightarrow c)$

Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель (связка ...). Это условие должно содержать неизвестную кратную производную. Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "усмпроизводная". Проверяется, что каждый содержащий неизвестную и имеющий символ "производная" либо "частнпроизв" дизъюнктивный член результата c имеет вид равенства нулю кратной либо обычной производной. Если c представляет собой дизъюнкцию, то условие сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 4. Чтобы воспользоваться результатом приведения уравнения к указанному виду, создан еще один прием:

$\forall fxP((f(x) = c \;\&\; c - \text{число}) = P(x) \rightarrow df(x)/dx = 0 \leftrightarrow \exists_c(P(x)))$

Как и выше, преобразуемое равенство представляет собой условие задачи на описание и содержит неизвестные. Выбирается новая переменная c, и левая часть антецедента разрешается относительно исходных неизвестных с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 3.

Уравнение однородно относительно неизвестной функции и ее производных

$\forall_{dfknxyzPQ}(f(kdy(x)/dx, ky(x)) = k^n d \;\&\; (f(y(x)z(x), y(x)) = 0) = \exists_c(P(z(x))) \;\&$
$P((dy(x)/dx)/y(x)) = Q(x) \rightarrow f(dy(x)/dx, y(x)) = 0 \leftrightarrow \exists_c(Q(x)))$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения $d^p y(x)/dx^p$ при $p > 1$. Указатель "функподст(...)" определяет идентификацию шаблона $f(dy(x)/dx, y(x))$. Для усмотрения однородного уравнения выбирается новая переменная k и предпринимается преобразование выражения $f(kdy(x)/dx, ky(x))$. Это делает первый антецедент, левая часть которого последовательно обрабатывается нормализаторами "нормдифф", "стандплюс", "извлечпарам" и "факторизация". Новым здесь является нормализатор "извлечпарам", который организует вынесение наружу параметра k. Его приемы будут описаны ниже. Правая часть первого антецедента идентифицирует результат преобразований с произведением некоторой степени параметра k на выражение, не содержащее k. Так как правая часть уравнения равна нулю, то это обеспечивает его однородность. Далее выбирается новая переменная z и выполняется стандартная замена $dy(x)/dx = y(x)z(x)$, гарантирующая понижение порядка уравнения. Результат разрешается относительно z вторым антецедентом. Предварительно левая часть уравнения обрабатывается нормализатором "нормдифф", которому передаются комментарий (исключение y) и дополнительная посылка $dy(x)/dx = y(x)z(x)$, нужная для исключения производных. В ответ $\exists_c(P(z(x)))$ вместо $z(x)$ подставляется $(dy(x)/dx)/y(x)$, и третий антецедент разрешает результат такой подстановки относительно $y(x)$. Уровень срабатывания равен 5.

Усмотрение обобщенно-однородного уравнения

$\forall_{afgmpqtxyzMP}$(однорстепень(p, M) & (M & m − число) = ($m = a$) & ($f = g$) = $P(z(t), t)$ & $f - g = p/q \to f = g \leftrightarrow P(y(x)/x^a, \ln x)$)

Прием применяется к уравнению, являющемуся условием задачи на описание, имеющей цель (связка ...). Указатель "контекст(...)" инициирует попытку его применения при усмотрении в уравнении кратной производной. Последний антецедент обрабатывает разность частей уравнения нормализатором "видумножение" и идентифицирует результат с дробью p/q (возможно, $q = 1$). Затем первый антецедент с помощью синтезатора "однорстепень" (см. ниже) составляет систему M линейных уравнений для определения такого параметра m, что уравнение $p = 0$ не меняется при замене x на kx и $y(x)$ на $k^m y(x)$. Предварительно выбирается новая переменная m, которая передается синтезатору в качестве входного данного вместе с переменными x, y. Кроме того, перед обращением к синтезатору выражение p обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Второй антецедент разрешает систему M относительно m и получает значение $m = a$. Левая часть третьего антецедента сначала обрабатывается нормализатором "двойнаязамена" (см. ниже), который обеспечивает замену варьируемой переменной x на $\exp(t)$, а неизвестной $y(x)$ - на $z(t)\exp(at)$ Здесь z, t - новые переменные для неизвестной функции и варьируемой переменной. Далее эта левая часть разрешается относительно z с помощью вспомогательной задачи на описание. В ответ $P(z(t), t)$ подставляются выражения $z(t) = y(x)/x^a, t = \ln x$. Уровень срабатывания равен 5.

Линейное уравнение второго порядка в точных производных

$\forall_{fghp}(dg(x)/dx \cdot f(x) - df(x)/dx \cdot g(x) - h(x)f(x) = 0$ & $(f(x)dy(x)/dx + g(x)y(x) = f(x)\int(p(x)/f(x))dx + c$ & c − число) $= Q(x) \to f(x)d^2y(x)/dx^2 + g(x)dy(x)/dx + h(x)y(x) = p(x) \leftrightarrow \exists_c(Q(x)))$

Выражения $f(x), g(x), h(x), p(x)$ не содержат неизвестных. Первый антецедент усматривает, что имеется уравнение в точных производных. Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Левая часть второго антецедента разрешается относительно y с помощью вспомогательной задачи на описание. Интеграл в ней обрабатывается нормализатором "нормквадратура". Уровень срабатывания равен 5.

В оставшейся части раздела приведем краткие описания нормализаторов и синтезаторов, упомянутых в приведенных выше приемах.

Нормализатор перехода к дифференцированию по новой переменной "новпроизв"

Нормализатор использовался в приеме, связанном с понижением порядка уравнения, у которого варьируемая переменная входит только под знаком неизвестной функции. Нормализатору передается результат замены в уравнении производных функции $y(x)$ на производные функции $z(x) = dy(x)/dx$. Одновременно вместо самой функции $y(x)$ подставлена новая варьируемая переменная t. Нормализатор должен преобразовать выражения $d^k z(x)/dx^k$ при всех $k = 1, \ldots$ таким образом, чтобы в них вместо исходной варьируемой переменной x возникла переменная t. Для этого ему передается входной комментарий (новпроизв x t $z(t)$), указывающий старую и новую переменные x, t, а также выражение $z(t)$, равное $dy(x)/dx = dt/dx$. Заметим, что данный нормализатор будет использован еще в одном приеме - при интегрировании уравнения Эйлера, где тоже рассматривается некоторая замена варьируемой переменной, и требуется аналогичная коррекция производных. Тогда к комментарию (новпроизв ...) добавится комментарий (переменная x $A(t)$), задающий связь $x = A(t)$ между старой и новой переменными.

Нормализатор имеет следующие приемы:

1. Случай производной первого порядка.

   $\forall fgxt(df(x)/dx = df(t)/dt \cdot g)$

   Здесь переменные x, t, g идентифицируются по комментарию (новпроизв x t g). Переменная f - функциональная, т.е. $f(x)$ идентифицируется с произвольным выражением.

2. Переход в случае производной первого порядка от символа "частнпроизв" к символу "производная".

   Приведем теорему приема в скобочной записи, так как в стандартной записи символы "частнпроизв" и "производная" прорисовываются одинаково: "длялюбого(x6 x23 равно(частнпроизв(отображение(x1 число(x1)значение(x6 x1))1 x23) производная(отображение(x1 число(x1) значение(x6 x1))x23)))".

3. Понижение порядка дифференцирования по старой переменной.

   $\forall_{fghntx}(0 < n - 1 \ \& \ d^{n-1}f(x)/dx^{n-1} = h(t) \to d^n f(x)/dx^n = dh(t)/dt \cdot g)$

   Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Переменные x, t, g идентифицируются по комментарию (новпроизв ...). Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "новпроизв".

4. Переход к новой варьируемой переменной в выражениях $y(x)$.

   $\forall_{xyt}(y(x) = y(t))$

   Переменные x, t идентифицируются по комментарию (новпроизв x t g). Переменная y - обычная.

5. Выражение остаточных вхождений старой варьируемой переменной через новую.

   $\forall_{ab}(a = b)$

   Комментарий (переменная c b) идентифицирует старую варьируемую переменную и ее выражение b через новую варьируемую переменную. Проверяется, что по текущему вхождению a расположен символ переменной c. Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор дифференцирования выражений с неизвестной функцией "нормдифф"

После применения нормализатора "новпроизв" может получиться выражение, имеющее произведение под знаком производной. Чтобы преобразовать его к виду, где дифференцируется только неизвестная функция, создан нормализатор "нормдифф". Этот нормализатор применяется также в других случаях и ориентирован на исключение под производными не только произведений, но и некоторых других операций. Он имеет следующие приемы:

1. Производная суммы.

   $\forall_{fgx}(d(f(x) + g(x))/dx = df(x)/dx + dg(x)/dx)$

2. Минус под производной.

   $\forall_{fx}(d(-f(x))/dx = -(df(x)/dx))$

3. Производная произведения.

   $\forall_{fgx}(d(f(x)g(x))/dx = df(x)/dx \cdot g(x) + dg(x)/dx \cdot f(x))$

   $\forall_{afx}(d(f(x)/a)/dx = (1/a)df(x)/dx)$

   Во всех перечисленных выше приемах рассматривалась обычная производная, а уровень срабатывания был равен единице. Для случая кратной производной добавлены еще два приема:

   $\forall_{fgxn}(d^n(f(x)g(x))/dx^n = d^{n-1}(d(f(x)g(x))/dx)/dx^{n-1})$

   $\forall_{afnx}(d^n(f(x)/a)/dx^n = (1/a)d^n f(x)/dx^n)$

   Уровень срабатывания первого приема равен 3, второго - 1.

4. Производная дроби.

   $\forall_{fgx}(d(f(x)/g(x))/dx = (df(x)/dx \cdot g(x) - dg(x)/dx \cdot f(x))/(g(x)^2))$

   Уровень срабатывания равен 1.

5. Производная от производной.

   $\forall_{fn}(d(d^n f(x)/dx^n)/dx = d^{n+1} f(x)/dx^{n+1})$

   Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Указатель "частнпроизв" обеспечивает одновременную обработку случаев, когда внутренняя производная - обычная либо кратная. Уровень срабатывания равен 1.

6. Производная нулевого порядка.

   Такие кратные производные могут возникать в приемах, понижающих кратность дифференцирования. Для их исключения служит следующий прием: "длялюбого(f x равно(частнпроизв(отображение(a число(a) $f(a)$)0 x) $f(x)$))". Уровень срабатывания равен 1.

7. "Кратная" производная первого порядка.

   Прием преобразует кратную производную первого порядка в обычную производную: "длялюбого(f x равно(частнпроизв(отображение(a число(a) $f(a)$) 1 x)производная(отображение(a число(a) $f(a)$)x)))". Уровень срабатывания равен 1.

8. Исключение производной с помощью тождества из посылок.

   $\forall_{axy}(dy(x)/dx = a \to dy(x)/dx = a)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит символа "производная". Для срабатывания приема необходимо наличие комментария (исключение y), передаваемого нормализатору при обращении к нему. Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор преобразования уравнения к виду равенства производной нулю "усмпроизводная"

Нормализатор предпринимает попытки таких преобразований уравнения, при которых все более "крупные" подвыражения оказываются под знаком производной. В случае успеха, вся левая часть уравнения окажется под знаком производной. Прием нормализатора, рассматривая результат R некоторого преобразования текущего уравнения, сначала предпринимает попытку отдельного преобразования R тем же самым нормализатором, и лишь при успехе последней выполняет преобразование текущего уравнения. Таким образом реализуется режим перебора возможных цепочек преобразований. Кроме приемов, предпринимающих попытки преобразований, нормализатор имеет несколько приемов, осуществляющих немедленное изменение текущего уравнения. Они тоже выполняют занесение под общую производную различных фрагментов. Нормализатор корневой - его приемы применяются только к корневому вхождению преобразуемого терма.

1. Усмотрение производной логарифма.

   $\forall_{abckmnxy}(d^{k-1}y(x)/dx^{k-1} = c(x) \ \& \ (a(c(x))^{m-1} + bd(\ln c(x))/dx \cdot (d^k y(x)/dx^k)^{n-1} = 0) = P \to a(c(x))^m + b(d^k y(x)/dx^k)^n = 0 \leftrightarrow c(x) = 0 \ \vee \ P)$

   Переменные k, m, n идентифицируются с натуральными константами. Первый антецедент усматривает, что множитель $c(x)$ представляет собой производную от $y(x)$ порядка $k-1$. Так как выражение в левой части построено с помощью символа "частнпроизв", то для перехода к символу "производная" в случае $k-1 = 1$ эта левая часть обрабатывается нормализатором "нормдифф". Левая часть второго антецедента получена из левой части исходного уравнения делением на $c(x)$ и усмотрением производной от логарифма $c(x)$. Она обрабатывается тем же самым нормализатором "усмпроизводная". Проверяется, что каждый содержащий символ "производная" либо "частнпроизв" дизъюнктивный член результата P имеет вид равенства производной нулю. Уровень срабатывания равен 2. Следующий прием представляет собой небольшое обобщение данного приема:

   $\forall_{abcjkxy}(d^{k-1}y(x)/dx^{k-1} = c(x) \ \& \ (a/c(x) + bd(\ln c(x))/dx = 0) = P \to a + bd^k y(x)/dx^k = 0 \leftrightarrow c(x) = 0 \ \vee \ P)$

   Первый антецедент идентифицирует выражение $c(x)$, его левая часть обрабатывается нормализатором "нормдифф". Затем проверяется, что каждое слагаемое выражения a представляет собой дробь, числитель которой делится на $c(x)$. Допускаются вырожденные единичные знаменатели. Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "усмпроизводная". Требования к результату P - те же, что и выше. Уровень срабатывания равен 4.

2. Внесение минуса под знак производной.

   $\forall_{afx}(-(df(x)/dx)+a=0 \leftrightarrow d(-f(x))/dx+a=0)$

   $\forall_{afnx}(-(d^nf(x)/dx^n)+a=0 \leftrightarrow d^n(-f(x))/dx^n+a=0)$

   Уровень срабатывания равен 3.

3. Внесение константного множителя под знак производной.

   $\forall_{abfx}(adf(x)/dx+b=0 \leftrightarrow d(af(x))/dx+b=0)$

   Переменная x не входит в выражение a. Уровень срабатывания равен 1.

4. Сложение производных.

   $\forall_{afg}(df(x)/dx+dg(x)/dx+a=0 \leftrightarrow d(f(x)+g(x))/dx+a=0)$

   $\forall_{afgn}(d^nf(x)/dx^n+dg(x)/dx+a=0 \leftrightarrow d(d^{n-1}f(x)/dx^{n-1}+g(x))/dx+a=0)$

   Уровень срабатывания равен 1.

5. Отбрасывание одноместной операции.

   $\forall_{fg}(df(g(x))/dx=0 \leftrightarrow dg(x)/dx=0)$

   Указатель "символ(x6)" определяет идентификацию переменной f с символом одноместной операции. Переменная g - функциональная.

   $\forall_{g}(d(\ln g(x))/dx=0 \leftrightarrow dg(x)/dx=0)$

   Натуральный логарифм рассматривается отдельно, так как он задается двуместной операцией "логарифм(a b)" при $a=e$. Уровень срабатывания обоих приемов равен 1.

6. Устранение избыточных подслучаев.

   $\forall_{fk}(d^kf(x)/dx^k=0 \ \lor \ f(x)=0 \leftrightarrow d^kf(x)/dx^k=0)$

   $\forall_{fmn}(0<m-n \rightarrow d^mf(x)/dx^m=0 \ \lor \ d^nf(x)/dx^n=0 \leftrightarrow d^mf(x)/dx^m=0)$

   Указатель "частнпроизв" в обоих приемах обеспечивает идентификацию обычной производной как кратной, имеющей кратность единица. Уровень срабатывания равен 1.

7. Усмотрение производной произведения.

   $\forall_{abfhkxy}(h(x)=d^{k-1}y(x)/dx^{k-1} \ \& \ df(x)/dx-b=0 \ \& \ (d(f(x)h(x))/dx+a=0)=P \rightarrow f(x)d^ky(x)/dx^k+bh(x)+a=0 \leftrightarrow P)$

   Первый антецедент убеждается в том, что $h(x)$ совпадает с $d^{k-1}y(x)/dx^{k-1}$. Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормдифф". Второй антецедент проверяет равенство выражения b производной выражения $f(x)$. Здесь используется нормализатор "нормпроизводная". Левая часть третьего антецедента обрабатывается нормализатором "усмпроизводная". Проверяется, что каждый содержащий символы "производная" либо "частнпроизв" дизъюнктивный член результата P имеет вид равенства производной нулю. Уровень срабатывания равен 2.

8. Усмотрение производной частного.

   $\forall_{abcdhkxy}(h(x)=d^{k-1}y(x)/dx^{k-1} \ \& \ df(x)/dx+c=0 \ \& \ (d(h(x)/f(x))/dx+a=0)=P \ \& \ d=(f(x))^2 \rightarrow f(x)d^ky(x)/dx^k+ch(x)+ad=0 \leftrightarrow P)$

Аналогично предыдущему. Добавился четвертый антецедент, идентифицирующий d как $f(x)^2$. Его правая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации "нормстепень". Уровень срабатывания равен 2.

9. Интегрирование слагаемого, не содержащего неизвестной функции.

   $\forall_{fgh}(\int g(x)dx = \lambda_x(h(x), x-\text{число}) \rightarrow df(x)/dx+g(x) = 0 \leftrightarrow d(f(x)+h(x))/dx = 0)$

   Переменные f, g функциональные. Никакая функция, значение которой в точке x рассматривается внутри выражения $f(x)$, не встречается в $g(x)$. Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "нормИнтеграл".

10. Усмотрение производной степени.

    $\forall_{abkxyP}((d(a(y(x))^{k+1})/dx + b = 0) = P \rightarrow a(y(x))^k dy(x)/dx + b = 0 \leftrightarrow P)$

    Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "усмпроизводная". Уровень срабатывания равен 2.

Синтезатор "однорстепень" определения системы линейных уравнений для степени замены при решении обобщенно-однородного дифференциального уравнения

Обобщенно-однородное дифференциальное уравнение не изменяется при замене x на kx и $y(x)$ на $k^m y(x)$. Чтобы определить параметр m, определяются показатели $A_1, \ldots, A_p$ степеней, в которых переменная k будет входить в слагаемые уравнения после данной замены, и составляется система уравнений $A_1 = \ldots = A_p$. Именно эту работу и выполняет синтезатор "однорстепень". Предварительно в уравнении раскрываются скобки. Обращение к синтезатору имеет вид "однорстепень(a, b)", где a - левая часть уравнения (правая часть нулевая), b - выходная переменная, которой присваивается результирующая система уравнений. При обращении синтезатору передается дополнительная информация - комментарий (переменные m x y). Здесь m - новая переменная, относительно которой составляются уравнения. Обработка отдельного слагаемого выражения a для нахождения показателя степени A_i выполняется еще одним вспомогательным синтезатором - "диффстепень", который будет приведен ниже. Собственно синтезатор "однорстепень" имеет всего два приема, обеспечивающих шаг и завершение рекурсии при составлении уравнений:

1. Случай двух слагаемых.

   $\forall_{abpq}(\text{диффстепень}(a, p)\ \&\ \text{диффстепень}(b, q) \rightarrow \text{однорстепень}(a + b, p = q))$

   Выражения a, b не имеют заголовка "плюс". Указатель "первыйтерм(...)" идентифицирует a как первое слагаемое. Оба антецедента обрабатываются синтезатором "диффстепень".

2. Случай более чем двух слагаемых.

   $\forall_{abcdpqr}(\text{диффстепень}(a, p)\ \&\ \text{диффстепень}(c, q)\ \&\ b = c+d\ \&\ \text{однорстепень}(b, r) \rightarrow \text{однорстепень}(a + b, p = q\ \&\ r))$

   Указатель "первыйтерм(фикс(0 1 1))" идентифицирует a как первое слагаемое суммы. Третий антецедент, с учетом указателя "первыйтерм(фикс(3 2 1))", идентифицирует c как первое слагаемое остаточной невырожденной суммы b. Остальные антецеденты обрабатываются синтезаторами.

Синтезатор "диффстепень"определения показателя степени при вспомогательном параметре

Обращение к синтезатору имеет вид "диффстепень(a b)", где a - слагаемое левой части уравнения, b - выходная переменная. Ей будет присваиваться показатель степени k^b вспомогательного параметра k, возникающей после подстановки $x \to kx$, $y(x) \to k^m y(x)$. Определяющий переменные m, x, y комментарий (переменные $\ldots$) без изменений передается от синтезатора "однорстепень".

1. Рассмотрение степени независимой переменной.

   $\forall_{amnx}($диффстепень$(a, m) \to$ диффстепень$(x^n a, m + n))$

   Переменная n идентифицируется с константным выражением. Антецедент реализует рекурсивное обращение.

2. Отбрасывание константного множителя.

   $\forall_{abm}($диффстепень$(b, m) \to$ диффстепень$(ab, m))$

   Множитель a не содержит переменной x.

3. Рассмотрение степени неизвестной функции.

   $\forall_{amnpxy}($диффстепень$(a, p) \to$ диффстепень$((y(x))^n a, p + nm))$

4. Рассмотрение степени производной.

   $\forall_{amnpkxy}($диффстепень$(a, p) \to$ диффстепень$((d^k y(x)/dx^k)^n a, p + n(m - k)))$

   Указатель "частнпроизв" обеспечивает идентификацию обычной производной как "кратной", имеющей кратность единица.

5. Рассмотрение константы.

   $\forall_a($диффстепень$(a, 0))$

   Выражение a не содержит переменной x.

Нормализатор "двойнаязамена" одновременной замены в дифференциальном уравнении неизвестной и варьируемой переменной

Нормализатор обеспечивает одновременную замену в дифференциальном уравнении U варьируемой переменной x на выражение $f(t)$, а неизвестной $y(x)$ - на выражение $g(z(t), t)$. Здесь t - новая варьируемая переменная, z - новая неизвестная. Нормализатору передаются два входных комментария - (переменная x t $f(t)$) и (функция y z $g(z(t), t)$).

1. Замена функциональной переменной.

   $\forall_{axy}(y(x) = a)$

   Переменные x, y и выражение a идентифицируются входными комментариями (функция y b a), (переменная x c d). Заметим, что этот прием не затрагивает производных функции y, так как под производной (обычной либо кратной) рассматривается выражение $y(u)$ для связанной переменной u.

2. Замена производной первого порядка.

   $\forall_{abfgtxy}(a = f(t) \ \& \ b = g(t) \to dy(x)/dx = (df(t)/dt)/(dg(t)/dt))$

   Используются входные комментарии (функция y d a), (переменная x t b). Антецеденты идентифицируют функциональные переменные f, g. Это нужно для получения внутри производных $df(t)/dt$, $dg(t)/dt$ термов $f(u), g(u)$, где u - вспомогательная связанная переменная. Заменяющая дробь обрабатывается сначала нормализатором "нормдифф", исключающим производные от сложных выражений с неизвестной функцией, а затем упрощается вспомогательной задачей на преобразование.

3. Замена производной порядка выше первого.

   $\forall_{bfgtxy}(b = f(t) \ \& \ d^{n-1}y(x)/dx^{n-1} = g(t) \to d^n y(x)/dx^n = (dg(t)/dt)/(df(t)/dt))$

   Используются входные комментарии (функция y d c), (переменная x t b). Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализаторами "нормдифф", "двойнаязамена". Первый из них нужен для замены кратной производной первого порядка на обычную производную. Заменяющая дробь обрабатывается так же, как в предыдущем приеме.

4. Замена варьируемой переменной.

   Предшествующие приемы имели уровень срабатывания 1. Остаточные вхождения старой варьируемой переменной устраняются следующим приемом:

   $\forall_{ax}(x = a)$

   Здесь используется комментарий (переменная x c a). Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор "извлечпарам" вынесения наружу степени параметра, введенного для усмотрения однородного уравнения

Нормализатор используется в приеме, усматривающем однородное уравнение. Он получает входной комментарий (переменная k), указывающий вспомогательный параметр k. Преобразования направлены на вынесение этого параметра в отдельный степенной множитель преобразуемого выражения. Нормализатор не является корневым.

1. Степень произведения.

   $\forall_{abc}((ab)^c d = a^c b^c d)$

   Используется входной комментарий (переменная a).

2. Факторизация суммы в основании произведения.

   $\forall_{abcdefp}(a + b = c^e d \to p(a + b)^f = pc^{ef} d^f)$

   Используется входной комментарий (переменная c). Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "факторизация".

2.2.2 Отбрасывание несущественных условий

Когда уравнение проинтегрировано, отбрасываются ненужные далее условия, указывающие численный тип значений производных:

$\forall_{nxy}(d^n y(x)/dx^n -$ число$)$

$\forall_{xy}(dy(x)/dx -$ число$)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание, не имеющей вхождений уравнений с производными в свои условия. Переменная y - неизвестная задачи. Уровень срабатывания равен 1.

2.2.3 Учет ограничений на значения производных неизвестной функции в точке

После того, как уравнение проинтегрировано и найдено явное выражение для значения неизвестной функции y в варьируемой точке x, быть может, содержащее произвольные постоянные, происходит учет ограничений на значения производной в конкретных точках a:

$\forall_{afnxy}(y(x) = f(x) \to d^n y(a)/da^n = d^n f(a)/da^n)$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на описание, имеющей цель (связка ...). Указатель "частнпроизв" позволяет рассматривать случай обычных производных. Переменная x варьируемая, y - неизвестная. Антецедент берется в контексте; фактически, он идентифицируется с другим условием задачи. Выражение $f(x)$ не содержит существенных неизвестных. Подразумевается, что несущественные неизвестные суть произвольные постоянные. Выражение a для точки дифференцирования не содержит x. Заменяющее выражение упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

2.2.4 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Интегрирование линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

Приводимый ниже прием следует стандартной схеме действий: составляется характеристический многочлен; предпринимается разложение его на множители (вообще говоря, комплексные); по разложению находится базис пространства решений, и далее выписывается общее решение. При этом используются различные вспомогательные синтезаторы и нормализаторы, которые будут отдельно описаны ниже. Теорема приема имеет следующий вид:

$\forall_{abdkmnpqxy}($характмногочлен$(ad^k y(x)/dx^k + b, p)$ & $q = p$ & базисрешений(q, d) & $d = \{; m\}$ & $l(m) = n \to ad^k y(x)/dx^k + b = 0 \leftrightarrow \exists_c(y(x) = \sum_{i=1}^{n}(c(i)m(i))$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to c(i) -$ число$)))$

Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Переменная y идентифицируется с единственной неизвестной задачи. Первый антецедент обрабатывается синтезатором "характмногочлен". Получая в качестве входного данного левую часть уравнения и комментарий (неизвестная y), этот синтезатор убеждается, что имеет место уравнение с постоянными коэффициентами, и составляет характеристический многочлен p относительно переменной x. Второй антецедент обрабатывает многочлен p группой нормализаторов. Сначала применяется нормализатор "видУмножение", являющийся комплекснозначным аналогом обычного нормализатора разложения на множители "видумножение". Затем применяется нормализатор "нормвеществ", преобразующий в вещественнозначные версии те комплекснозначные операции (суммы, произведения и т.п.), все операнды которых вещественны. Наконец, применяется нормализатор "Корни", обеспечивающий преобразование каждого линейного относительно x множителя к виду $(x + A)$ и отбрасывание всех постоянных множителей. Все эти нормализаторы связаны с комплекснозначными операциями и будут описаны в разделах монографии, посвященных приемам по комплексному анализу. Третий антецедент обрабатывается синтезатором "базисрешений", получающим в качестве входных данных результат q указанной обработки характеристического многочлена и комментарий (переменная x). Если q представляет собой произведение выражений вида $(x + A_i)^{N_i}$, то выходной переменной синтезатора присваивается конечный список d выражений, задающих базис решений (в формате конечного множества). Четвертый антецедент идентифицирует набор m элементов данного множества, пятый - длину набора. Указатель "переменные(x3 x14)" определяет выбор списка c из n новых переменных, обозначающих произвольные постоянные, и далее выписывается параметрическое описание пространства решений. Указатели "развертка" определяют при этом развертку конечной суммы в обычную сумму , а квантора общности - в конъюнкцию. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 2.

Решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами при помощи синтезатора "линчастнрешение"

В случае неоднородного уравнения применяется прием, аналогичный предыдущему. Для отыскания частного решения создан синтезатор "линчастнрешение", который будет описан ниже.

$\forall_{abdkmnpquvxy}$(характмногочлен$(ad^k y(x)/dx^k + b, p)$ & $q = p$ & базисрешений(q, d) & $d = \{;m\}$ & $l(m) = n$ & линчастнрешение$(ad^k y(x)/dx^k + b = u, v) \to ad^k y(x)/dx^k + b = u \leftrightarrow \exists_c(y(x) = v + \sum_{i=1}^{n}(c(i)m(i))$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to c(i) -$ число$)))$

Уровень срабатывания равен 2. Заметим, что в уравнениях с параметрами вид базиса решений d может варьироваться в зависимости от значений параметров. Тогда d будет определяться условным выражением, и для выписывания решений понадобится разбор случаев. Здесь срабатывает следующий прием:

$\forall_{abdefgkpqxP}$(характмногочлен$(ad^k y(x)/dx^k + b, p)$ & $q = p$ & базисрешений(q, d) & $d = (f$ при $P,$ иначе $g)$ & $ad^k y(x)/dx^k + b = u \to P \ \vee\ \neg P)$

Заголовок приема - "выводусловия". Выведенная дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 1. Заметим, что все результаты обращений к синтезаторам и нормализаторам, необходимые для определения базиса решений, сохраняются в соответствующих буферах. Поэтому в каждом из подслучаев они будут браться готовыми, без дублирования трудоемких вычислений.

Уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

1. Уравнение Эйлера.

Начнем со случая однородного уравнения:

$\forall_{ftxyQ}((f = 0) = Q(y(t), t) \to f = 0 \leftrightarrow Q(y(x), \ln |x|))$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в уравнении произведения кратной производной некоторого порядка k на степень x^k. Далее фильтры проверяют, что каждое слагаемое левой части представляет собой либо произведение производной i-го порядка на x^i с постоянным коэффициентом, либо неизвестную функцию $y(x)$ с постоянным коэффициентом. Здесь созданы три фильтра: для слагаемых с кратной производной, с обычной производной и слагаемых, не имеющих производных. Выбирается новая переменная t, и левая часть уравнения f при формировании левой части антецедента обрабатывается нормализатором "новпроизв" для замены $x = \exp(t)$. Ему передаются входные комментарии (новпроизв x t $\exp(-t)$) и (переменная x $\exp(t)$). Результат обрабатывается нормализатором "нормдифф", опускающим производные до неизвестных функций. Далее левая часть антецедента разрешается относительно неизвестной y при варьируемой переменной t. Шаблон $Q(\ldots)$ в правой части антецедента идентифицируется при помощи указателя "новаргумент(x41 x19 фикс)". Уровень срабатывания равен 2. Для неоднородного уравнения создан такой же прием, но в заменяющем терме модуль при x отсутствует:

$\forall_{fgtxyQ}((f = g(\exp t)) = Q(y(t), t) \to f = g(x) \leftrightarrow Q(y(x), \ln x))$

Уровень срабатывания здесь тоже равен 2.

2. Попытка преобразовать уравнение к виду уравнения Эйлера.

   Иногда уравнение приводится к виду уравнения Эйлера, если поделить его левую и правую части на подходящую степень варьируемой переменной x:

   $\forall_{abcknptxy}(px^k d^k y(x)/dx^k + x^{k-n}a = c \to px^n d^k y(x)/dx^k + a = b \leftrightarrow c = x^{k-n}b)$

   Переменные n, k идентифицируются с различными целочисленными константами. Указатель "подстановка" разрешает обработку случая $n = 0$. Проверяется, что каждый содержащий x сомножитель слагаемого левой части уравнения представляет собой либо производную (кратную или обычную), либо неизвестную функцию, либо степень переменной x. Проверяется также, что правая часть не содержит неизвестных. Левая часть антецедента получается из левой части уравнения домножением на x^{k-n}. Она обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Проверяется, что результат c удовлетворяет всем условиям на левую часть уравнения Эйлера. Уровень срабатывания приема равен 6.

3. Замена неизвестной функции в линейном уравнении второго порядка.

   Предпринимается попытка сделать стандартную замену неизвестной функции $y(x) = \exp(-\int(b(x)/a(x))dx/2)z(x)$ и проверить, что полученное уравнение имеет постоянные коэффициенты:

   $\forall_{abcpqrxyQ}(\int(b(x)/a(x))dx = \lambda_x(q(x), x - \text{число})\ \&\ -d(b(x)/(2a(x)))/dx - (b(x))^2/(4(a(x))^2) + c(x)/a(x) = r\ \&\ (d^2y(x)/dx^2 + ry(x) = p(x)/a(x)) = Q(y(x)) \to a(x)d^2y(x)/dx^2 + b(x)dy(x)/dx + c(x)y(x) = p(x) \leftrightarrow Q(y(x)\exp(q(x)/2)))$

   Выражения $a(x), b(x), c(x), p(x)$ не содержат неизвестных. Хотя бы один из коэффициентов $a(x), b(x), c(x)$ зависит от x. Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "нормИнтеграл". Левая часть второго антецедента представляет собой коэффициент при новой неизвестной $z(x)$, возникающий после замены. Она обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что результат r не содержит переменной x. Левая часть третьего антецедента представляет собой уравнение, полученное в результате замены. При этом новая неизвестная z переобозначена на y - для экономии используемых приемом переменных. Новое уравнения решается относительно y с помощью задачи на описание. Уровень срабатывания равен 3.

4. Преобразование линейного уравнения второго порядка к самосопряженному виду и исключение в нем первой производной.

   Используется еще один стандартный способ: для получения самосопряженного уравнения обе части домножаются на $\exp(\int(b(x)/a(x))dx)/a(x)$, и далее используется замена $t = \int(\exp(-\int(b(x)/a(x))dx)dx)$.

   $\forall_{abcmnrQ}(\int(b(x)/a(x))dx = \lambda_x(m(x), x - \text{число})\ \&\ c(x)/a(x)\exp(2m(x)) = r\ \&\ (d^2y(x)/dx^2 + ry(x) = 0) = Q(y(x), x)\ \&\ \int\exp(-m(x))dx = \lambda_x(n(x), x - \text{число}) \to a(x)d^2y(x)/dx^2 + b(x)dy(x)/dx + c(x)y(x) = 0 \leftrightarrow Q(y(x), n(x)))$

   Левые части первого и четвертого антецедентов обрабатываются нормализаторами "нормИнтеграл". Левая часть второго антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Проверяется, что результат r не содержит x. Новое уравнение в левой части третьего антецедента решается относительно y с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 4.

Синтезатор "характмногочлен"

Синтезатор реализует утверждение "характмногочлен(a b)", где значением входной переменной a служит левая часть уравнения, а выходной переменной b присваивается характеристический многочлен. В качестве переменной многочлена берется варьируемая переменная уравнения. Дополнительные входные данные вводятся через комментарий (неизвестная y), указывающий неизвестную уравнения. Синтезатор имеет следующие приемы:

1. Слагаемое с производной неизвестной функции.

   $\forall_{abckxy}(\text{характмногочлен}(a, b) \to \text{характмногочлен}(a + cd^ky(x)/dx^k, b + cx^k))$

   Входной комментарий (неизвестная y) идентифицирует неизвестную y. Указатель "частнпроизв" обеспечивает идентификацию обычной производной ($k = 1$). Проверяется, что x, y не входят в выражение c. Антецедент выполняет рекурсивное обращение к тому же самому синтезатору.

2. Слагаемое с неизвестной функцией.

   $\forall_{abxy}(\text{характмногочлен}(a + by(x), b))$

   Выражения a, b не содержат переменной y.

3. Остаточные слагаемые.

   $\forall_a(\text{характмногочлен}(a, 0))$

   Выражение a не содержит y.

Синтезатор "базисрешений"

Синтезатор реализует утверждение "базисрешений(a b)", где значением входной переменной a служит результат разложения характеристического многочлена на множители вида $(x+a)^n$. Постоянный множитель, если он имелся, предварительно отброшен. Допускается наличие как вещественных, так и комплексных a, причем в последнем случае вместо вещественнозначной суммы "плюс" берется комплекснозначная сумма "Плюс". Аналогично, вместо символов "умножение" и "степень" в комплекснозначном случае будут использоваться символы "Умножение" и "Степень". Предусматривается обработка данных, когда a есть условное выражение, определяющее, в зависимости от значений параметров, различные варианты разложения на множители характеристического многочлена. Дополнительная входная информация передается синтезатору через комментарий (переменная x), указывающим переменную характеристического многочлена. Значением выходной переменной b становится выражение $\{A_1, \ldots, A_k\}$, где A_i - выражения, определяющие значения базисных функций пространства решений. Синтезатор имеет следующие приемы:

1. Случай вещественного корня.

   $\forall_{abcnx}(a -$ число & базисрешений$(b,c) \to$ базисрешений$((x+a)^n b, \mathrm{set}_y(\exists_i(i \in \{0, \ldots, n-1\}$ & $y = x^i \exp(-ax))) \cup c))$

   Созданы два аналогичных приема, отличающиеся друг от друга тем, что у одного из них умножение вещественноезначное, а у другого - комплекснозначное. В обоих случаях сложение и степень - вещественнозначные. Переменная n идентифицируется с натуральной константой, возможно, равной единице. Проверяется наличие комментария (переменная x). Второй антецедент реализует рекурсивное обращение к тому же самому синтезатору. Указатель "или$(\ldots)$"определяет развертку квантора существования в дизъюнкцию равенств $y = A_1, \ldots, y = A_n$. После этого нормализатор "нормкласс" преобразует описатель к виду конечного списка, пополняя найденное при рекурсивном обращении выражение c элементами $A_1, \ldots, A_n$.

2. Случай комплексного корня.

   $\forall_{abcdnx}(a -$ число & $b -$ число & базисрешений$(c,d) \to$ базисрешений$((x+a+bi)^n c, \mathrm{set}_y(\exists_i(i \in \{0, \ldots, n-1\}$ & $y = x^i \cos(-bx)\exp(-ax))) \cup d))$

   $\forall_{abcdnx}(a -$ число & $b -$ число & базисрешений$(c,d) \to$ базисрешений$((x+a-bi)^n c, \mathrm{set}_y(\exists_i(i \in \{0, \ldots, n-1\}$ & $y = x^i \sin(-bx)\exp(-ax))) \cup d))$

   Так как имеется пара комплексно сопряженных корней, дающих пару серий базисных решений - для косинуса и для синуса, то удобно использовать корень с положительным (например) коэффициентом при мнимой единице для порождения серии с косинусом, а корень с отрицательным коэффициентом - для порождения серии с синусом. Тогда запись на ГЕНОЛОГе упрощается. В остальном приемы аналогичны вещественнозначному случаю.

3. Константный множитель.

   Для завершения рекурсии введен прием, обрабатывающий константное выражение:

   $\forall_a($базисрешения$(a, \emptyset))$

Здесь выражение a не содержит переменных. Заметим, что постоянный множитель во входных данных уже был отброшен, так что фактически a всегда будет равно единице.

4. Условное выражение.

   $\forall_{abcdP}$(базисрешений(a, c) & базисрешений$(b, d) \to$ базисрешений$((a$ при P, иначе $b), (c$ при P, иначе $d)))$

   Антецеденты реализуют рекурсивные обращения.

Синтезатор "линчастнрешение"

Обращение к синтезатору имеет вид "линчастнрешение(a b)", где a - линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, b - выходная переменная. Ей присваивается выражение, определяющее значения частного решения. Синтезатору передаются дополнительные входные данные - комментарии (неизвестная y) и (переменная x), указывающие на неизвестную и варьируемую переменную.

1. Степенная функция. Если в правой части уравнения расположена степенная функция ax^k, то составляется характеристическое уравнение левой части, находится кратность p его корня $x = 0$, и частное решение ищется в виде $x^p Q(x)$, где Q - многочлен степени k. Эти действия выполняются следующим приемом:

   $\forall_{abcdfkpqxy}$(характмногочлен$(f(y(x)), b)$ & $b = x^p c$ & $(\forall_i (i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i) -$ число$)$ & $f(\sum_{i=0}^{k} q(i+1)x^{i+p}) = ax^k) = \forall_i (i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i) = d(i)) \to$ линчастнрешение$(f(y(x)) = ax^k, \sum_{i=0}^{k} d(i+1)x^{i+p}))$

   Указатель "контекст$(\ldots)$" извлекает входные комментарии (неизвестная y), (неизвестная x) и таким образом идентифицирует переменные x, y. Переменная k идентифицируется с неотрицательной целочисленной константой; указатель (подстановка $\ldots$) разрешает ей обращаться в ноль. Коэффициент a не содержит переменной x. Указатель "функаргумент$(\ldots)$" определяет идентификацию функционального шаблона $f(y(x))$ с учетом того, что при вычислении производных значения функции y будут браться не в точке x, а во вспомогательных точках t, связанных внешним описателем "отображение".

   Первый антецедент обращается к синтезатору "характмногочлен" для нахождения характеристического многочлена b. Этот многочлен сразу же обрабатывается нормализатором "видУмножение" (разложение на комплексные множители) и нормализатором "Корни" (преобразование линейных множителей к виду, в котором коэффициент при x равен единице). Второй антецедент выделяет сомножитель многочлена, имеющий вид x^p. Таким образом находится кратность корня $x = 0$. Левая часть третьего антецедента представляет собой совокупность условий задачи, полученной при подстановке в уравнение частного решения с неопределенными пока коэффициентами $q(1), \ldots, q(k+1)$. Конечная сумма в ней выделена указателем "развертка" и выписывается как обычная сумма. Указатель "переменные(x16 плюс(x11 1))" определяет выбор списка новых переменных для коэффициентов. Левая часть третьего антецедента разрешается относительно неизвестных $q(1), \ldots q(k+1)$ с помощью вспомогательной задачи на описание. Правая часть антецедента выделена указателем "развертка", т.е. идентифицируется с конъюнкцией равенств $q(1) = d(1), \ldots, q(k+1) = d(k+1)$.

После этого (тоже с помощью указателя "развертка") определяется результирующая сумма. Уровень срабатывания равен 1.

2. Экспонента.

   $\forall_{abcdfkmnpqxy}$(характмногочлен$(f(y(x)), b)$ & $b = (x-m)^p c$ & $(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i)$ − число) & $f(\sum_{i=0}^k q(i+1)x^{i+p}\exp(mx)) = ax^k \exp(mx)) =$
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i) = d(i))$ & $n = ax^k \to$ линчастнрешение$(f(y(x)) = n\exp(mx), \sum_{i=0}^k d(i+1)x^{i+p}\exp(mx)))$

   Прием аналогичен предыдущему. При этом идентификация правой части уравнения проходит в два этапа. Сначала в ней выделяется множитель $\exp(mx)$. Затем последний антецедент разбивает остаточное произведение n на не зависящий от x коэффициент a и степень x^k, быть может, вырожденную.

3. Синус и косинус.

   $\forall_{abcdefkmnpqsxy}$(характмногочлен$(f(y(x)), b)$ & $b = (x-m-ni)^p c$ & $(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i)$ − число & $s(i)$ − число) & $f(\exp(mx)\sum_{i=0}^k (x^{i+p}\cdot(q(i+1)\cos(nx) + s(i+1)\sin(nx)))) = ax^k \exp(mx)\cos(nx)) = (\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i) = d(i))$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to s(i) = e(i)))$ & $u = v\exp(mx)$ & $v = ax^k \to$ линчастнрешение$(f(y(x)) = u\cos(nx), \exp(mx)\sum_{i=0}^k (x^{i+p}(d(i+1)\cos(nx) + e(i+1)\sin(nx)))))$

   $\forall_{abcdefkmnpqsxy}$(характмногочлен$(f(y(x)), b)$ & $b = (x-m-ni)^p c$ & $(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i)$ − число & $s(i)$ − число) & $f(\exp(mx)\sum_{i=0}^k (x^{i+p}\cdot(q(i+1)\cos(nx) + s(i+1)\sin(nx)))) = ax^k \exp(mx)\sin(nx)) = (\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to q(i) = d(i))$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, k+1\} \to s(i) = e(i)))$ & $u = v\exp(mx)$ & $v = ax^k \to$ линчастнрешение$(f(y(x)) = u\sin(nx), \exp(mx)\sum_{i=0}^k (x^{i+p}(d(i+1)\cos(nx) + e(i+1)\sin(nx)))))$

   Приемы аналогичны приему предыдущего пункта. При этом вместо одной серии новых переменных вводятся две серии - q и s. Кроме того, правая часть уравнения идентифицируется не в два, а в три этапа (см. два последних антецедента). Допускаются вырожденные значения $m = 0, k = 0, p = 0$. Уровень срабатывания равен 1.

4. Независимое рассмотрение слагаемых правой части уравнения. Если в правой части расположена сумма, то для каждого слагаемого находится свое частное решение, и далее они суммируются:

   $\forall_{abcde}$(линчастнрешение$(a = b, d)$ & линчастнрешение$(a = c, e) \to$ линчастнрешение$(a = b + c, d + e))$

   Выражение a содержит неизвестную. Это идентифицирует его как левую часть уравнения. Антецеденты реализуют рекурсивные обращения к синтезатору. Уровень срабатывания равен 1.

5. Преобразование правой части к виду суммы.

   Предпринимаются два действия - раскрывание скобок в правой части уравнения и преобразование произведений тригонометрических функций в суммы. Для этого служат следующие приемы:

   $\forall_{abcden}(e = a(b+c)^n + d$ & линчастнрешение$(p = e, f) \to$ линчастнрешение$(p = a(b+c)^n + d, f))$

$\forall_{abcdn}(d = a(\sin b)^n + c$ & линчастнрешение$(p = d, f) \rightarrow$ линчастнрешение$(p = a(\sin b)^n + c, f))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой. В первом приеме либо a, либо n отлично от единицы. Во втором приеме - либо n отлично от единицы, либо a имеет своим сомножителем синус или косинус. Указатель "вариант(...)" разрешает применять этот прием, если вместо синуса стоит косинус. Правая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Во втором приеме обращение к нормализатору сопровождается комментарием "видумножение", включающим приемы преобразования тригонометрических произведений в суммы. Второй антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Уровень срабатывания приема равен 2.

6. Устранение константного знаменателя правой части.

   $\forall_{abcde}$(линчастнрешение$(a = (b/c)d, e) \rightarrow$ линчастнрешение$(a = (bd/c), e))$

   Выражение a содержит неизвестную y, выражение c не содержит варьируемой переменной x. Переменная b идентифицируется с произведением всех сомножителей, не содержащих x. При рекурсивном обращении, реализуемом антецедентом, правая часть уравнения приобретает вид произведения с дробным константным коэффициентом b/c. Это подготавливает возможность применения описанных выше приемов. Уровень срабатывания равен 1.

7. Перенесение экспоненты из знаменателя в числитель.

   $\forall_{abcde}$(линчастнрешение$(a = b\exp(-d)/c, e) \rightarrow$
   линчастнрешение$(a = b/(c\exp d), e))$

   Выражение a содержит неизвестную, выражение d - варьируемую переменную. Уровень срабатывания равен 1.

8. Переход к основанию степени "e".

   $\forall_{abcde}$(линчастнрешение$(a = b\exp(d\ln c), e) \rightarrow$ линчастнрешение$(a = bc^d, e))$

   Выражение a содержит неизвестную. Переменная c идентифицируется с выражением, не содержащим варьируемой переменной и отличным от числа "e". Выражение d содержит варьируемую переменную. Уровень срабатывания равен 1.

9. Определение частного решения методом неопределенных коэффициентов.

   $\forall_{abcdmnpqvz}$(характмногочлен(a, b) & $b = c$ & базисрешений(c, d) & $d = \{; m\}$ & $l(m) = n$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \sum_{j=1}^{n}(z(j)d^{i-1}m(j)/dx^{i-1}) = (p$ при $i = n$, иначе $0)) = \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow z(i) = v(i))$ & $q = \sum_{i=1}^{n}(m(i)\int v(i)dx) \rightarrow$ линчастнрешение$(a = p, q))$

   Указатель "контекст(...)" идентифицирует по входным комментариям переменные x, y. В качестве a берется та часть равенства, которая содержит y. Первый антецедент определяет характеристический многочлен b, второй - обращается к нормализаторам "видУмножение" и "Корни" для получения стандартного разложения этого многочлена на множители. Третий антецедент определяет конечный перечень d выражений для значений базисных функций пространства решений однородного уравнения. Четвертый антецедент идентифицирует набор d этих выражений, пятый - определяет его длину n. Далее, согласно указателю "переменные(x25 x14)", выбирается список z из n новых переменных. Они будут обозначать первые производные варьируемых произвольных постоянных. Левая часть шестого антецедента представляет собой систему линейных уравнений относительно данных производных. Квантор общности здесь выделен указателем "развертка" и преобразуется в конъюнкцию равенств. Производные, являющиеся коэффициентами при неизвестных $z(j)$, обрабатываются нормализатором "нормдифф" и затем упрощаются вспомогательной задачей на преобразование. Система линейных уравнений разрешается относительно неизвестных $z(1), \ldots, z(n)$ с помощью вспомогательной задачи на описание. Ответ обрабатывается нормализатором "нормфикс", отбрасывающим частные подслучаи, в которых значения варьируемой переменной x ограничены каким-либо равенством, не содержащим неизвестных. Это позволяет выделить "общий случай" решения системы, который далее упрощается и идентифицируется с правой частью шестого антецедента. Таким образом, определяются выражения $v(1), \ldots, v(n)$ для значений производных произвольных постоянных. Седьмой антецедент выписывает частное решение q, переходя от производных к самим постоянным с помощью интегрирования. При этом неопределенные интегралы обрабатываются нормализатором "нормквадратура". Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор "нормфикс" имеет единственный прием - $\forall_{ab}(\neg(a = b))$. Он заменяет на константу "ложь" произвольное равенство, не содержащее неизвестной y, у которого выражение a содержит варьируемую переменную, а b - не содержит.

2.3 Системы дифференциальных уравнений

2.3.1 Группировка неизвестных слагаемых в одной части

Рассматриваемые далее приемы решения систем дифференциальных уравнений ориентированы на такой их вид, в котором все неизвестные слагаемые собраны в левой части. Для приведения к этому виду служит следующий прием:

$\forall_{ay}(dy(x)/dx = a \leftrightarrow dy(x)/dx - a = 0)$

Уравнение входит в условие задачи на описание, имеющей цель "связка ...". Число неизвестных задачи должно быть более единицы. Переменная y идентифицируется с неизвестной, выражение a содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 0.

2.3.2 Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Усмотрение системы линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Если в задаче на описание усматривается группа условий, образующая систему таких уравнений, то она переформулируется в виде единственного условия "линдиффсистема(Y A B)". Здесь Y - набор выражений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, перечисляющий неизвестные системы, A - матрица коэффициентов при неизвестных, B - набор свободных членов. Такая переформулировка удобна для последовательной активации приемов, реализующих стандартную схему решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для усмотрения системы служит следующий прием:

$\forall_{afyA}(\lambda_{ij}(-a(i,j)/b(i), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,n\}) = A \ \& \ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to \neg(b(i) = 0)) \to \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to b(i)dy(i)(x)/dx + \sum_{j=1}^{n} a(i,j)y(j)(x) = f(i)) \leftrightarrow$ линдиффсистема$(\lambda_i(y(i)(x), i \in \{1,\ldots,n\}), A, \lambda_i(f(i)/b(i), i \in \{1,\ldots,n\})))$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)", т.е. заменяет группу условий на новое условие. Указатель "контрольвывода(производная(x3 x4))" инициирует попытку применения приема при усмотрении в условии задачи на описание, имеющей цель "связка ...", выражения "производная(x3 x4)", где x3 содержит неизвестные. Указатель "контекст(...)" идентифицирует y с набором всех неизвестных, встречающихся в уравнениях задачи, а x - с варьируемой переменной. Указатели "развертка" обеспечивают идентификацию квантора общности в левой части эквивалентности с группой условий задачи, причем конечные суммы идентифицируются с остаточными суммами, возникающими после идентификации слагаемого с производной. Указатель "коэфф(x1)" обеспечивает идентификацию a с матрицей выражений - коэффициентов при значениях неизвестных функций. Для отсутствующих членов автоматически доопределяются нулевые коэффициенты. Указатель "матрица(фикс(1 1))" определяет выписывание левой части первого антецедента в виде терма "строки(...)", определяющего результирующую матрицу коэффициентов. Заметим, что она соответствует системе, где все коэффициенты при производных равны единице, а все члены без производной перенесены в правую часть уравнения. Указатель "вводтерма(1)" объясняет, что первый антецедент создает новую посылку задачи - равенство, вводящее вспомогательное обозначение A для только что сформированной матрицы коэффициентов. Здесь A - новая переменная. Чтобы она оставалась в правой части равенства, посылка автоматически сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Заметим, что в условии "линдиффсистема(...)" помещается не явное выражение для матрицы, а переменная A. Наконец, второй антецедент обеспечивает проверку возможности деления уравнений на коэффициенты при производных. Уровень срабатывания равен 2.

Определение собственных значений и собственных векторов вспомогательной матрицы

$\forall_{zAP}(A = v \ \& \ ($собствзначение$(A,x,y) \ \&$ собствектор$(A,x,z)) = P(x,y,z) \to \forall_{xyz}(P(x,y,z) \to$ собствзначение$(v,x,y) \ \&$ собствектор$(v,x,z)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(линдиффсистема(x4 x21 x5))" инициирует попытку применения приема при усмотрении в условии задачи на описание терма "линдиффсистема(d v e)". Такой терм появляется при срабатывании приема, указанного в предыдущем подразделе. Первый антецедент находит посылку $v = A$, задающую явный вид A матрицы коэффициентов v. Левая часть второго антецедента разрешается вспомогательной задачей на описание относительно неизвестных x, y, z. В этой части утверждение "собствзначение(A x y)" означает, что x есть собственное значение матрицы A, имеющее кратность y. Утверждение "собствектор(A x z)" означает, что z есть собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению x. В качестве неизвестных x, y, z выбраны новые переменные. Приемы для отыскания собственных значений и собственных векторов будут описаны в разделе, посвященном линейной алгебре. Кванторная импликация, определяющая выводимое утверждение, упрощается вспомогательной задачей на преобразование. В результате посылки задачи пополняются утверждениями "собствзначение(v c k)", перечисляющими собственные значения c и их кратности k, а также кванторными импликациями вида $\forall_z(z \in$ линкомбинации$(\{w_1, \ldots, w_p\}) \to$ собствектор$(v, c, z))$, задающими соответствующие собственные подпространства. Уровень срабатывания равен 2.

Определение множества относящихся к вещественному собственному значению решений при совпадении кратности корня с размерностью собственного подпространства

$\forall_{aktvA}$(собствзначение(A, a, k) & a – число & $\forall_y(y \in$ линкомбинации$(\{; v\}) \to$ собствектор$(A, a, y))$ & $l(v) = k \to$ линреш$(A, a, \mathrm{set}_x(\exists_c(x = \sum_{i=1}^{k}(c(i)\exp(at))v(i)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \to c(i)$ – число$)))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(линдиффсистема(x2 x26 x4))" инициирует его применение так же, как в предыдущем подразделе. Первый антецедент берется в контексте. Он задает некоторое собственное значение a матрицы системы, а также его кратность k. Второй антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, устанавливает, что значение a вещественное. Третий антецедент тоже берется в контексте - он задает набор v базисных векторов собственного подпространства, соответствующего значению a. Четвертый антецедент проверяет, что число векторов набора v равно кратности собственного значения. Выводимое утверждение задает множество решений однородного уравнения, относящихся к собственному значению a. Вспомогательный символ "линреш" введен для накопления в посылках задачи таких фрагментов общего решения однородной системы. В других ситуациях он не используется. Перед тем, как добавлять новое утверждение к списку посылок, прием проверяет отсутствие посылки вида "линреш(A,a,b)". Уровень его срабатывания равен 2.

Определение множества относящихся к комплексному собственному значению решений при совпадении кратности корня с размерностью собственного подпространства

Для удобства программирования два вещественных линейно независимых частных решения, определяемых по любому из пары комплексно сопряженных корней $a \pm bi$, распределены между этими двумя корнями:

$\forall_{abkptvA}$(собствзначение(A, p, k) & $\forall_y(y \in$ Линкомбинации$(\{; v\}) \to$ собствектор$(A, p, y))$ & $l(v) = k$ & $p = a - bi \to$ линреш$(A, p, \mathrm{set}_x(\exists_c(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \to c(i)$ – число$)$ & $x = \sum_{i=1}^{k} c(i)\exp(at)(-\sin(bt)\mathrm{Re}(v(i)) + \cos(bt)\mathrm{Im}(v(i)))))))$

$\forall_{abkptvA}$(собствзначение(A, p, k) & $\forall_y(y \in$ Линкомбинации$(\{; v\}) \to$ собствектор$(A, p, y))$ & $l(v) = k$ & $p = a + bi \to$ линреш$(A, p, \mathrm{set}_x(\exists_c(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \to c(i)$ – число$)$ & $x = \sum_{i=1}^{k} c(i)\exp(at)(\cos(bt)\mathrm{Re}(v(i)) - \sin(bt)\mathrm{Im}(v(i)))))))$

Приемы аналогичны приему предыдущего подраздела, однако вместо вещественнозначной операции "линкомбинации" используется комплекснозначаная операция "Линкомбинации". Уровень срсбатывания равен 2.

Определение множества относящихся к вещественному собственному значению решений, если кратность корня больше размерности собственного подпространства

В этом случае решение ищется в виде вектора произведений многочленов на экспоненту, причем соответствующие выражения подставляются в систему дифференциальных уравнений, откуда извлекается система линейных уравнений для определения коэффициентов многочленов.

$\forall_{akmntvA}$(собствзначение(A, a, k) & a – число & $\forall_y(y \in$ линкомбинации$(\{;v\}) \to$ собстввектор$(A, a, y))$ & $l(v) = m$ & $0 < k - m$ & $n = l(b)$ & линдиффкоэфф$(A, a, c) = P \to$ линреш$(A, a, \mathrm{set}_x(\exists_c(x = \lambda_{is}((\sum_{j=1}^{k-m+1} c(i,j)t^{j-1}) \cdot \exp(at), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $s \in \{1, \ldots, 1\})$ & $P))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(линдиффсистема(x2 x26 x4))" инициирует его применение так же, как и выше. Первый антецедент берется в контексте и определяет собственное значение a, имеющее кратность k. Второй антецедент проверяет, что a вещественное. Третий антецедент берется в контексте и определяет набор v базисных векторов собственного подпространства, соответствующего значению a. Четвертый антецедент определяет длину m набора v, пятый - устанавливает, что она меньше кратности k. Шестой антецедент определяет длину n вектора неизвестных - размерность системы. Седьмой антецедент обращается к вспомогательной задаче на описание для определения матрицы c коэффициентов многочленов. Его левая часть представляет собой вспомогательное утверждение "линдиффкоэфф(A a c)", построенное по явному выражению A матрицы коэффициентов системы, числу a и явному выражению c для матрицы неизвестных коэффициентов $c(i,j)$. Новые переменные $c(i,j)$ предварительно создаются указателем "элементыматрицы(x3 x14 плюс(x11 минус(x13)1))". Во вспомогательной задаче на описание они играют роль неизвестных. Приемы, преобразующие условие "линдиффкоэфф(...)" в систему линейных уравнений и решающие ее, будут приведены ниже. Правая часть P седьмого антецедента идентифицируется с результатом решения системы. В выводимом утверждении она сопровождает общий вид решения, выраженный через переменные $c(i,j)$. Это позволяет при последующем сканировании задачи исключить зависимости между данными переменными. Заметим, что правая часть равенства для x в выводимом утверждении задает вектор - столбец, что и объясняет диапазон $\{1, \ldots, 1\}$ изменения параметра s. Все матрицы в рассматриваемом приеме задаются термами вида "строки(...)". Уровень срабатывания равен 2.

Определение множества относящихся к комплексному собственному значению решений, если кратность корня больше размерности собственного подпространства

В этом случае будет использоваться только один из двух сопряженных корней. Так как завершающий прием, выписывающий общее решение, предполагает наличие посылок "линреш(...)" для всех корней, то со вторым корнем связывается вырожденное нулевое решение, которое впоследствии отбрасывается.

$\forall_{abkmnpqtvA}$(собствзначение(A, a, k) & $q = a + bi$ & $\forall_y(y \in$ Линкомбинации$(\{;v\}) \to$ собстввектор$(A, q, y))$ & $l(v) = m$ & $0 < k - m$ & $n = l(p)$ & линдиффкоэфф$(A, q, c, d) = P \to$ линреш$(A, q, \mathrm{set}_x(\exists_{cd}(x = \lambda_{is}((\sum_{j=1}^{k-m+1} c(i,j)t^{j-1}) \cdot \cos(bt)\exp(at) + (\sum_{j=1}^{k-m+1} d(i,j)t^{j-1}) \cdot \sin(bt)\exp(at), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $s \in \{1, \ldots, 1\})$ & $P))))$

Заметим, что здесь возникают два семейства многочленов, коэффициенты которых обозначены, соответственно, c и d. Поэтому вспомогательное утверждение "линдиффкоэфф(...)" имеет не три операнда, как в вещественнозначном случае, а четыре. Уровень срабатывания равен 2. Для комплексно сопряженного корня $a - bi$ создан следующий прием, дающий вырожденное нулевое решение:

$\forall_{abkmnpqvA}$(собствзначение(A, q, k) & $q = a - bi$ & $\forall_y(y \in$ Линкомбинации$(\{;v\}) \rightarrow$ собствектор$(A, q, y))$ & $l(v) = m$ & $0 < k - m$ & $l(p) = n \rightarrow$ линреш$(A, q, \{\lambda_{ij}(0, i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, 1\})\}))$

Расшифровка вспомогательного утверждения "линдиффкоэфф"

В случае вещественного собственного значения утверждение "линдиффкоэфф(b, a, c)" имеет три операнда. Оно обрабатывается следующим приемом, составляющим систему линейных уравнений для коэффициентов $c(i, j)$ и решающим ее:

$\forall_{acmnAP}(a -$ число & $(\forall_j(j \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow \lambda_{ik}(ac(i, j) + (0$ при $j = m,$ иначе $jc(i, j + 1)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}) = A\lambda_{ik}(c(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}))$ & $\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow c(i, j) -$ число$)) = P$ & $b = A \rightarrow$ линдиффкоэфф$(b, a, \lambda_{ij}(c(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\})) \leftrightarrow P)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к условию задачи на описание. Указатель "матрица(...)" идентифицирует третий операнд утверждения "линдиффкоэфф(b, a, c)" с термом вида "строки(...)", задающим прямоугольную матрицу, причем фактически определяется массив выражений для элементов $c(i, j)$ этой матрицы. Второй антецедент идентифицируется с равенством из контекста, определяющим матрицу A, обозначенную переменной b. Эта матрица задана термом "строки(...)". Второй антецедент составляет и решает систему матричных уравнений. Кванторы общности в его левой части выделены указателем "развертка". Они выписываются как конъюнкции уравнений и утверждений "$c(i, j) -$ число". Указатели "матрица(...)" определяют выписывание описателей "отображение" в составляемых уравнениях в виде выражений "строки(...)". Указатель "нормвариант" позволяет избежать явного выписывания условных выражений в левых частях уравнений за счет немедленной проверки соответствующих условий. Левая часть второго антецедента разрешается относительно неизвестных c с помощью вспомогательной задачи на описание. При применении приема проверяется, что выражения a, A не содержат неизвестных, а c - содержит. Уровень срабатывания равен 1.

В случае комплексного собственного значения утверждение "линдиффкоэфф(b, a, c, d)" имеет четыре операнда. Здесь составляются уравнения для коэффициентов $c(i, j), d(i, j)$:

$\forall_{abcdmnAPQ}((\forall_j(j \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow \lambda_{ik}(bd(i, j) + (0$ при $j = m,$ иначе $jc(i, j + 1)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}) = A\lambda_{ik}(c(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}))$ & $\forall_j(j \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow \lambda_{ik}(-bc(i, j) + (0$ при $j = m,$ иначе $jd(i, j + 1)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}) = A\lambda_{ik}(d(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}))$ & $\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow c(i, j) -$ число$)$ & $\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow d(i, j) -$ число$)) = P$ & $A = Q \rightarrow$ линдиффкоэфф$(Q, a + bi, \lambda_{ij}(c(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\}), \lambda_{ij}(d(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\})) \leftrightarrow P)$

Этот прием аналогичен предыдущему. Первый антецедент составляет и решает систему уравнений относительно c, d, второй - идентифицируется с равенством из контекста, определяющим матрицу коэффицентов системы дифференциальных уравнений. Уровень срабатывания равен 1.

Определение вектора частного решения системы

Для нахождения частного решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами создан синтезатор "частнлинсист(A b x)". Его входными данными служат: вспомогательная переменная A, обозначающая матрицу системы уравнений, а также набор b остаточных сумм правых частей уравнений, образованных известными слагаемыми. Выходной переменной x присваивается вектор - столбец, элементы которого суть выражения для значений функций, образующих частное решение. Результат обращения к синтезатору регистрируется в посылке "частнлинсист(A b x)". Если система однородная, то эта посылка выписывается сразу же, без обращения к синтезатору:

$\forall_{abck}(c = \lambda_i(0, i \in \{1, \ldots, k\}) \to$ частнлинсист$(b, c, \lambda_{ij}(0, i \in \{1, \ldots, k\}$ & $j \in \{1, \ldots, 1\})))$

Попытка применения приема инициируется усмотрением условия "линдиффсистема(a b c)". Антецедент идентифицирует c с нулевым набором. Одновременно определяется длина k этого набора. Правая часть антецедента выделена указателем "развертка". Указатель "матрица" определяет создание результирующего выражения "строки(...)" для нулевого вектор-столбца. Уровень срабатывания равен 2. В случае неоднородной системы прием обращается к синтезатору:

$\forall_{bcd}($частнлинсист$(b, c, d) \to$ частнлинсист$(b, c, d))$

Как и выше, действия инициируются усмотрением условия "линдиффсистема(a b c)". Перед обращением проверяется отсутствие посылки вида "частнлинсист(b c A)". Указатель "контекст(...)" идентифицирует варьируемую переменную x по набору неизвестных функциональных термов $y(x)$. Информация об этой переменной передается синтезатору через комментарий (переменная x). Уровень срабатывания равен 3. Перечислим приемы синтезатора "частнлинсист":

1. Нулевой вектор.

   $\forall_{abck}(c = \lambda_i(0, i \in \{1, \ldots, k\}) \to$ частнлинсист$(b, c, \lambda_{ij}(0, i \in \{1, \ldots, k\}$ & $j \in \{1, \ldots, 1\})))$

   Этот прием аналогичен приведенному выше приему сканирования задачи. Он используется синтезатором для возникающих при рекурсивных обращениях вырожденных случаев. Уровень срабатывания равен 1.

2. Выделение вектора для заданного экспоненциального множителя.

   Если вектор остаточных сумм образован многочленами, домноженными на один и тот же множитель вида $\exp(cx)$, либо $\exp(cx)\cos(dx)$, либо $\exp(cx)\sin(dx)$, то можно сразу получить частное решение, составив и решив некоторую систему линейных уравнений. Поэтому синезатор прежде всего пытается выделить из вектора остаточных сумм векторные слагаемые такого вида. В данном пункте приводится прием, выделяющий слагаемые с экспоненциальным множителем:

   $\forall_{abcdmnpq}(m = \lambda_i(\exp(bt)c(i){+}d(i),\ i \in \{1, \ldots, n\})$ & частнлинсист$(a, \exp(bt)\lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\}), p)$ & частнлинсист$(a, \lambda_i(d(i), i \in \{1, \ldots, n\}), q) \to$ частнлинсист$(a, m, p + q))$

Указатель "контекст(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в векторе остаточных сумм m выражения вида $\exp(bt)$, где t - переменная, идентифицируемая по входному комментарию (переменная t). Далее первый антецедент представляет каждый разряд вектора m в виде суммы выражения $\exp(bt)c(i)$ и остатка $d(i)$. Указатель "коэффициент", относящийся к этому антецеденту, группирует все члены с множителем $\exp(bt)$, причем при отсутствии таких членов выражение $c(i)$ идентифицируется с нулем. Одновременно первый антецедент идентифицирует размерность n. Второй и третий антецеденты реализуют рекурсивные обращения к рассматриваемому синтезатору. Заметим, что во втором антецеденте вектор $(\exp(bt)c(1), \ldots, \exp(bt)c(n))$ представлен как произведение численного множителя $\exp(bt)$ на вектор c. При этом использована операция "числкоэфф" умножения числа на численный вектор. Именно на такое представление будут ориентированы приемы, выписывающие частное решение в стандартных случаях. Уровень срабатывания равен 1.

3. Выделение вектора для синуса либо косинуса.

   Если вместо множителя вида $\exp(cx)$ выделяется множитель вида $\exp(cx)\sin(dx)$ либо $\exp(cx)\cos(dx)$, быть может, с пропущенной экспонентой, то применяются следующие приемы, аналогичные приему предыдущего пункта:

   $\forall_{abcdkmnpq}(m = \lambda_i(\sin(bt)c(i) + d(i), i \in \{1, \ldots, n\})$ & частнлинсист$(a, (\exp(kt)\sin(bt))\lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\}), p)$ & частнлинсист$(a, \exp(kt)\lambda_i(d(i), i \in \{1, \ldots, n\}), q) \rightarrow$ частнлинсист$(a, \exp(kt)m, p+q))$

   $\forall_{abcdkmnpq}(m = \lambda_i(\cos(bt)c(i) + d(i), i \in \{1, \ldots, n\})$ & частнлинсист$(a, (\exp(kt)\cos(bt))\lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\}), p)$ & частнлинсист$(a, \exp(kt)\lambda_i(d(i), i \in \{1, \ldots, n\}), q) \rightarrow$ частнлинсист$(a, \exp(kt)m, p+q))$

   $\forall_{abcdkmnpq}(m = \lambda_i(\sin(bt)c(i) + d(i), i \in \{1, \ldots, n\})$ & частнлинсист$(a, (\sin(bt))\lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\}), p)$ & частнлинсист$(a, \lambda_i(d(i), i \in \{1, \ldots, n\}), q) \rightarrow$ частнлинсист$(a, m, p + q))$

   $\forall_{abcdkmnpq}(m = \lambda_i(\cos(bt)c(i) + d(i), i \in \{1, \ldots, n\})$ & частнлинсист$(a, (\cos(bt))\lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\}), p)$ & частнлинсист$(a, \lambda_i(d(i), i \in \{1, \ldots, n\}), q) \rightarrow$ частнлинсист$(a, m, p + q))$

   Уровень срабатывания этих приемов равен 1.

4. Частное решение для случая многочленов.

   Если остаточные суммы правых частей уравнений суть многочлены максимальной степени m, то частное решение ищется в виде вектора многочленов степени $m + s$, где s - кратность нуля как корня характеристического уравнения:

   $\forall_{acdemnsA}(a = A$ & $(\forall_j(j \in \{1, \ldots, m + s + 1\} \rightarrow \lambda_{ik}((0$ при $j = m + s + 1,$ иначе $jd(i, j + 1)) + (0$ при $m + 1 < j,$ иначе $-c(i, j)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}) = A\lambda_{ik}(d(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\}))$ & $\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m+s+1\} \rightarrow d(i, j) -$число$)) = \forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m+s+1\} \rightarrow d(i, j) = e(i, j)) \rightarrow$ частнлинсист$(a, \lambda_i(\sum_{j=1}^{m+1}(c(i, j)t^{j-1}), i \in \{1, \ldots, n\}),$ $\lambda_{ik}(\sum_{j=1}^{m+s+1}(e(i, j)t^{j-1}), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, 1\})))$

Переменная t идентифицируется по входному комментарию (переменная t). Указатель "контекст(равно(x13 максимум(операнд(фикс(0 2)x6)видмногочлена(x6 x19 x12)x12))смпосылка(x18 собствзначение(x1 0 x18)0))" сначала идентифицирует m как максимальную степень многочленов от t, перечисленных в наборе остаточных сумм. Затем он идентифицирует s как такое выражение, для которого имеется посылка "собствзначение(a 0 s)". При отсутствии посылок данного вида s идентифицируется с нулем. Идентификация матрицы коэффициентов c обеспечивается указателями "коэфф(x3)", "смодночлен(фикс(0 2 3 1 3)x19)". Первый антецедент извлекает из посылок равенство "$a = A$", задающее матрицу A коэффициентов системы дифференциальных уравнений. Левая часть второго антецедента представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестных $d(i,j)$, введенных для коэффициентов многочленов частного решения. Выбор новых переменных $d(i,j)$ определяется указателем "элементыматрицы(x4 x14 плюс(x13 x18 1))". Левая часть разрешается относительно этих переменных вспомогательной задачей на описание. Правая часть второго антецедента идентифицирует ответ с конъюнкцией равенств, определяющих значения $e(i,j)$ неизвестных $d(i,j)$. Уровень срабатывания равен 2.

5. Частное решение для случая произведений экспоненты на многочлены.

   Здесь остаточные суммы суть произведения одной и той же экспоненты $\exp(bt)$ на многочлены:

   $\forall_{acdemnsA}(a = A \;\&\; (\forall_j(j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to \lambda_{ik}(bd(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } jd(i,j+1)) + (0 \text{ при } m+1 < j, \text{ иначе } -c(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\})) \;\&\; \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) - \text{число})) = \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) = e(i,j)) \to \text{частнлинсист}(a, \exp(bt)\lambda_i(\sum_{j=1}^{m+1}(c(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\}),\ \exp(bt)\lambda_{ik}(\sum_{j=1}^{m+s+1}(e(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\})))$

   Прием аналогичен предыдущему, но s идентифицируется из посылки "собствзначение(a b s)". Уровень срабатывания равен 2.

6. Частное решение для случая произведений тригонометрической функции на многочлены.

   $\forall_{acdefgmnsA}(a = A \;\&\; (\forall_j(j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to \lambda_{ik}(-pe(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } jd(i,j+1)) + (0 \text{ при } m+1 < j, \text{ иначе } -c(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\}) \;\&\; \lambda_{ik}(pd(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } je(i,j+1)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(e(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\})) \;\&\; \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) - \text{число} \;\&\; e(i,j) - \text{число})) = (\forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) = f(i,j)) \;\&\; \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to e(i,j) = g(i,j))) \to$ частнлинсист$(a, \sin(pt)\lambda_i(\sum_{j=1}^{m+1}(c(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\}),$
   $\lambda_{ik}(\sin(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(f(i,j)t^{j-1}) + \cos(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(g(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\})))$

   $\forall_{acdefgmnsA}(a = A \;\&\; (\forall_j(j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to \lambda_{ik}(-pe(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } jd(i,j+1)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\}) \;\&\; \lambda_{ik}(pd(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } je(i,j+1)) + (0 \text{ при } m+1 < j, \text{ иначе } -c(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(e(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; k \in \{1,\dots,1\})) \;\&\; \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) - \text{число} \;\&\; e(i,j) - \text{число})) = (\forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to$

$d(i,j) = f(i,j)) \,\&\, \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to e(i,j) = g(i,j))) \to$ частнлинсист$(a, \cos(pt)\lambda_i(\sum_{j=1}^{m+1}(c(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\}),$
$\lambda_{ik}(\sin(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(f(i,j)t^{j-1}) + \cos(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(g(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\})))$

В первом приеме многочлены домножаются на $\sin(pt)$, во втором - на $\cos(pt)$. Кратность s идентифицируется из посылок "собствзначение(a pi s)", где i - мнимая единица. В остальном приемы аналогичны предыдущим. Уровень срабатывания равен 2.

7. Частное решение для случая произведений экспоненты и тригонометрической функции на многочлены.

   Здесь многочлены домножаются на $\exp(bt)\sin(pt)$ либо на $\exp(bt)\cos(pt)$:

   $\forall_{abcdefgmnsA}(a = A \,\&\, (\forall_j(j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to \lambda_{ik}(bd(i,j) - pe(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } jd(i,j+1)) + (0 \text{ при } m+1 < j, \text{ иначе } -c(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\}) \,\&\, \lambda_{ik}(be(i,j) + pd(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } je(i,j+1)), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(e(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\})) \,\&\, \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) - \text{число} \,\&\, e(i,j) - \text{число})) = (\forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) = f(i,j)) \,\&\, \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to e(i,j) = g(i,j))) \to$ частнлинсист$(a, \exp(bt)\sin(pt)\lambda_i(\sum_{j=1}^{m+1}(c(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\}),$
   $\exp(bt)\lambda_{ik}(\sin(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(f(i,j)t^{j-1}) + \cos(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(g(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\})))$

   $\forall_{abcdefgmnsA}(a = A \,\&\, (\forall_j(j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to \lambda_{ik}(bd(i,j) - pe(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } jd(i,j+1)), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\}) \,\&\, \lambda_{ik}(be(i,j) + pd(i,j) + (0 \text{ при } j = m+s+1, \text{ иначе } je(i,j+1)) + (0 \text{ при } m+1 < j, \text{ иначе } -c(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\}) = A\lambda_{ik}(e(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\})) \,\&\, \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) - \text{число} \,\&\, e(i,j) - \text{число})) = (\forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to d(i,j) = f(i,j)) \,\&\, \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,m+s+1\} \to e(i,j) = g(i,j))) \to$ частнлинсист$(a, \exp(bt)\cos(pt)\lambda_i(\sum_{j=1}^{m+1}(c(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\}),$
   $\exp(bt)\lambda_{ik}(\sin(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(f(i,j)t^{j-1}) + \cos(pt)\sum_{j=1}^{m+s+1}(g(i,j)t^{j-1}), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, k \in \{1,\dots,1\})))$

   Уровень срабатывания приемов равен 2.

8. Определение частного решения методом вариации произвольных постоянных.

   $\forall_{abknpqruAQ}(\forall_i(i \in \{1,\dots,k\} \to$ линреш$(a, p(i), A(i))) \,\&\, \exists_v(\forall_i(i \in \{1,\dots,k\} \to v(i) \in A(i)) \,\&\, \lambda_{ij}(u(i), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,1\}) = \sum_{i=1}^{k} v(i)) = \exists_c(\forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to u(i) = q(i)) \,\&\, Q(c)) \,\&\, (\forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to q(i) = b(i)) \,\&\, Q(c)) = \forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to c(i) = d(i)) \,\&\, \exists_c(\forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to u(i) = q(i)) \,\&\, \forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to c(i) = \int d(i)dt)) = \forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to u(i) = r(i)) \,\&\, n = l(b) \to$ частнлинсист$(a, b, \lambda_{ij}(r(i), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,1\})))$

   Комментарий (переменная t) позволяет идентифицировать варьируемую переменную t. Первый антецедент, выделенный указателем "развертка", извлекает из списка посылок все имеющиеся там фрагменты $A(i)$ пространства решений однородной системы. Заметим, что одновременно идентифицируются соответствующие собственные значения $p(i)$, хотя они далее приемом и не используются. Прочие антецеденты выделены указателем "идентификатор". Последний из них идентифицирует n как длину набора b остаточных сумм правых частей. Указатели "переменные(x21 x11)", "переменные(x20 x14)" формируют наборы новых переменных $v(1), \ldots, v(k)$ и $u(1), \ldots, u(k)$. Левая часть второго антецедента представляет собой параметрическое описание пространства решений однородной системы: в множествах $A(1), \ldots, A(k)$ выбираются произвольные элементы $v(1), \ldots, v(k)$ и рассматривается их векторная сумма, разряды которой обозначены переменными $u(1), \ldots, u(k)$. Заметим, что знак конечной суммы здесь обозначает не символ "суммавсех", а его функциональный аналог "функсуммавсех". Указанная левая часть упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Результат идентифицируется с правой частью, где в качестве параметров c будут выступать уже произвольные постоянные. Выражение $q(i)$ при этом задает i-й разряд вектора u решения однородной системы, $Q(c)$ - сопровождающее ограничение на произвольные постоянные (указание на числовой тип их значений). Левая часть третьего антецедента возникает при подстановке в неоднородную систему решения однородной системы, где произвольные постоянные уже рассматриваются как функции от t. Слагаемые, относящиеся к однородной системе, при этом сокращаются. В правой части остаются остаточные суммы $b(i)$, а в левой - результат замены в выражениях $q(i)$ произвольных постоянных на их производные. Для простоты вычислений, в третьем антецеденте эти производные обозначены теми же переменными $c(i)$, что и сами произвольные постоянные. Левая часть антецедента разрешается относительно неизвестных $c(i)$ вспомогательной задачей на описание. В результате определяются выражения $d(i)$ для производных произвольных постоянных. В левой части четвертого антецедента найденные производные интегрируются, причем результаты интегрирования снова обозначаются через $c(i)$ - теперь это сами произвольные постоянные. Уравнения для них объединяются со списком уравнений $u(i) = q(i)$, определяющих общее решение однородной системы, и результат упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Получается список соотношений $u(i) = r(i)$, определяющих искомое частное решение. Уровень срабатывания равен 3.

Представление решения в виде суммы частного решения неоднородной системы и решений однородной системы, соответствующих различным собственным значениям матрицы системы

$\forall_{abcknpuA}(\text{частнлинсист}(a, b, c)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow \text{линреш}(a, p(i), A(i)))\ \&\ n = l(u) \rightarrow \text{линдиффсистема}(u, a, b) \leftrightarrow \exists_v(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow v(i) \in A(i))\ \&\ \lambda_{ij}(u(i), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, 1\}) = c + \sum_{i=1}^{k} v(i)))$

Прием срабатывает после того, как в посылках задачи возникают утверждения "линреш(...)", определяющие подпространства $A(1), \ldots, A(k)$ решений однородной системы для различных собственных значений, а также посылка "частнлинсист(...)", определяющая частное решение неоднородной системы. Указатель "переменные(x21 x11)" определяет выбор новых переменных $v(1), \ldots, v(k)$, обозначающих произвольные элементы подпространств $A(1), \ldots, A(k)$. В терминах этих переменных строится параметрическое описание для общего решения u как суммы векторов $v(i)$ и частного решения. Перед применением приема проверяется, что для каждого найденного собственного значения удалось определить соответствующее подпространство и что собственные значения вообще удалось найти. Уровень срабатывания равен 3.

Система, не приведенная к нормальному виду

Для приведения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами к нормальному виду служат следующие приемы:

1. Ввод вспомогательной неизвестной для производной.

   $\forall_{yz}(dy(x)/dx - z(x) = 0\ \&\ z -$ функция$)$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Он применяется в задаче на описание, имеющей цель "связка". Попытка применения приема начинается с усмотрения в уравнении подвыражения $d^k y(x)/dx^k$, где y - неизвестная и $k > 1$. Проверяется, что число неизвестных задачи более одной. Переменная x идентифицируется с варьируемой переменной. Чтобы не создавать избыточных обозначений, проверяется отсутствие в условиях задачи равенства нулю линейной комбинации производной $dy(x)/dx$ и значения в точке x какой-либо неизвестной функции. Проверяется также, что система является линейной: каждое неизвестное слагаемое уравнений имеет вид произведения постоянного (не зависящего от x) коэффициента на производную неизвестной функции в точке x либо на ее значение в точке x. Указатель "вспомнеизв(x25)" обеспечивает выбор новой переменной z и регистрацию ее как несущественной неизвестной задачи. Уровень срабатывания равен 1.

2. Понижение порядка производной с помощью вспомогательной неизвестной.

   $\forall_{abnyz}(\neg(a = 0)\ \&\ ady(x)/dx + bz(x) = 0 \to d^n y(x)/dx^n = -(b/a)d^{n-1}z(x)/dx^{n-1})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". В его теореме фигурирует символ "частнпроизв", т.е. $n > 1$. Второй антецедент представляет собой другое условие задачи, причем y, z - неизвестные. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Для обычной производной используется другая версия:

   $\forall_{abyz}(\neg(a = 0)\ \&\ ady(x)/dx + bz(x) = 0 \to dy(x)/dx = -(b/a)z(x))$

   Уровень срабатывания приемов равен 1.

3. Вычитание уравнений для исключения производной.

   Предыдущие приемы позволяли получить систему, в которой отсутствуют кратные производные. Чтобы оставить в каждом уравнении лишь одну производную, служит следующий прием:

   $\forall_{abcpqry}(\neg(a = 0)\ \&\ ady(x)/dx + b = c \to pdy(x)/dx + q = r \leftrightarrow cp - bp + aq - ar = 0)$

   Предполагается, что задача имеет цель (связка ...) и что число неизвестных более одной. Второй антецедент и заменяемое равенство идентифицируются с двумя уравнениями. Переменная y - неизвестная, причем выражения a, c, r не содержат неизвестных. Все производные в уравнениях - обычные. Не существует производной неизвестной функции, которая входила бы в первое уравнение (т.е. в антецедент) и не входила бы во второе. Уровень срабатывания равен 2.

4. Исключение неизвестной из уравнения без производных.

   При выполнении предыдущих преобразований возможно появление уравнения, не содержащего производных. Такое уравнение используется для исключения одной из его неизвестных (предпочтительно, несущественной).

   $\forall_{abcxy}(\neg(a = 0)\ \&\ ay(x) + b = c \to y(x) = (c - b)/a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с не содержащим производных условием задачи на описание, имеющей цель (связка ...). Число неизвестных задачи более единицы. Переменная y - неизвестная. Если она не является несущественной, то рассматриваемое условие не имеет несущественных неизвестных. Выражение b не содержит y, выражение c не содержит неизвестных. Чтобы сделать исключение неизвестных более целенаправленным, прием вводит комментарий (нормпроизводная y). Тогда попытки исключить с помощью данного уравнения (либо других содержащих y уравнений) неизвестную, отличную от y, будут заблокированы. Аналогичный прием исключает y под производной:

$$\forall_{abcxy}(\neg(a(x) = 0)\ \&\ a(x)y(x)+b(x) = c(x) \to dy(x)/dx = d((c(x)-b(x))/a(x))/dx)$$

Уровни срабатывания обоих приемов равны 2. Если уравнение без производных содержит несущественную неизвестную, не встречающуюся в других уравнениях, то оно отбрасывается:

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \to \exists_f(f - \text{функция}\ \&\ af(x) + b = c))$$

Прием имеет заголовок "связка". Несущественная неизвестная f не входит в a, b, c. Все содержащие f условия задачи идентифицируются с конъюнктивными членами утверждения под квантором существования. Уровень срабатывания этого приема равен 1.

5. Группировка неизвестных слагаемых в одной части.

$$\forall_{ay}(dy(x)/dx = a \leftrightarrow dy(x)/dx - a = 0)$$

Задача на описание с целью (связка ...) имеет более одной неизвестной. Переменная y - неизвестная, правая часть содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 0.

6. Исключение вспомогательных неизвестных после интегрирования уравнения.

$$\forall_{PQ}(\exists_y(x(t) = P(y)\ \&\ Q(y)) \leftrightarrow \exists_y(Q(y)))$$

Переменная x представляет собой несущественную неизвестную. Ее явное задание отбрасывается; остается только условие на параметр y. Уровень срабатывания равен 0. Если никаких уравнений для несущественной неизвестной нет, то отбрасываются ограничения на ее тип значения:

$$\forall_x(\exists_y(y - \text{функция}\ \&\ y(x) - \text{число}))$$

Прием имеет заголовок "связка". Уровень срабатывания равен 1.

2.4 Редактирование ответа дифференциального уравнения

Первоначальный вид параметрических описаний неизвестных, получающихся при интегрировании дифференциальных уравнений, часто бывает весьма громоздким. Для его упрощения создано большое количество приемов; некоторые из них применяются при сканировании задачи, некоторые - сгруппированы в нормализаторах "нормили", "нормсуществует", обеспечивающих логическую стандартизацию дизъюнкций и кванторов существования. Приводимый ниже перечень не претендует на полноту - в нем представлены лишь те приемы, которые фактически понадобились в рассмотренных примерах. Начнем с приемов сканирования задачи.

2.4.1 Редактирование параметрического описания

После того, как возникает ответ, имеющий вид параметрического описания (вообще говоря, не обязательно явно разрешенного относительно неизвестной), срабатывает описанный ранее общелогический прием, вводящий вспомогательную задачу для разрешения этого описания относительно неизвестных и упрощения. Условия данной задачи суть конъюнктивные члены утверждения под квантором существования, а также все оставшиеся условия текущей задачи. К списку низвестных присоединяются переменные кванторной приставки. Вводятся цель "учетответа", указывающая на вспомогательную задачу редактирования параметрического описания, и цель (серия ...), в которой перечисляются все переменные кванторной приставки. Если имела место цепочка вложенных обращений к редактированию параметрических описаний, то цель (серия ...) перечисляет также списки переменных всех внешних кванторов существования. В данном подразделе, в основном, собраны приемы, относящиеся к задачам с целью "учетответа".

Отбрасывание при редактировании ответа не представляющих интереса сопровождающих утверждений

$\forall_{ab}(a \leq b)$

$\forall_{ab}(a < b)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Они применяются в условиях задачи на описание, имеющей цели "учетответа", "связка ...", "серия ...". Условие содержит производную неизвестной функции. Таким образом, оно использовалось ранее для указания на о.д.з. условий с производными, и после интегрирования уравнения может быть отброшено. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_a$(производная(a) – число)

Аналогично предыдущему. Выражение a содержит неизвестные.

$\forall_{ab}(\neg(a = b))$

Аналогично предыдущим приемам. Условие содержит производную неизвестной функции в варьируемой точке.

На той же самой теореме основан еще один прием отбрасывания отрицаний равенств - если в задаче не осталось уравнений с неизвестными, а рассматриваемое отрицание равенства содержит варьируемую переменную. Он применяется на завершающем этапе редактирования, выделяемом целью "связпеременная".

Отбрасывание подслучая, фиксирующего значение произвольной постоянной и не содержащего уравнения с неизвестной

Теорема приема имеет вид "$\neg(a = b)$". Здесь a - переменная, выделенная целью "серия", b - выражение без неизвестных. Задача на описание имеет цели "связка ..." и "учетответа". Отстутствует условие, представляющее собой равенство с неизвестными. Уровень срабатывания равен 3.

Переход к новому параметру

1. Исключение экспоненты.

$\forall_c(c - \text{число} \to \exists_d(c = \ln d \ \& \ 0 < d \ \& \ d - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условии задачи на описание выражения вида e^{c+A}, где c - переменная, выделенная целью "серия". Задача имеет цели "связка ..." и "учетответа", причем выражение A содержит варьируемую переменную, а рассматриваемое условие содержит неизвестные. Выведенное утверждение снабжается комментарием "заменапеременной". Этот комментарий вызовет впоследствии срабатывание реализованного на ЛОСе приема, выражающего во всех условиях задачи параметр (фактически - произвольную постоянную) c через параметр a, причем для удобства вычислений за параметром a будет сохранено старое обозначение c.

2. Исключение модуля.

   $\forall_{abc}(b \leq 0 \to c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ c|a| + b = 0 \leftrightarrow ac + b = 0 \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0))$

   Прием заменяет группу условий задачи на описание, имеющей цели "связка ..." и "учетответа". Переменная c выделена целью "серия" и не входит в другие условия задачи. Кроме того, она не входит в выражения a, b. Фактически параметры c в левой и правой частях эквивалентности различны: из истинности правой части для некоторого c вытекает существование, быть может, другого (отличающегося знаком) значения c, при котором истинна левая часть. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcde}(0 \leq ade \to c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ a|b| = cd/e \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ ab = cd/e \ \& \ \neg(c = 0))$

   Прием аналогичен предыдущему. Его уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{bcefn}(c - \text{число} \ \& \ f(c/|b|^n) = e \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(c/b^n) = e)$

   Прием инициируется при усмотрении внутри условия задачи на описание подвыражения $(ac)/(d|b|^n)$, где c - переменная, выделенная целью "серия"; n - рациональная константа с нечетными числителем и знаменателем. Проверяется, что это условие представляет собой равенство. Указатель "новаргумент(x6 x3 извлечение)" определяет идентификацию шаблона $f(\ldots)$, преобразуя левую часть равенства к такому виду, где переменная c встречается только внутри выражений $c/|b|^n$. Проверяется, что c не встречается в выражениях a, b, d, e и не встречается в других условиях задачи, кроме, быть может, условия $\neg(c = 0)$. Как и в предыдущих случаях, фактически прием переходит к новому параметру, за которым сохраняется прежнее обозначение c. Уровень срабатывания равен 2.

3. Переход к обратной величине.

   $\forall_c(\neg(c = 0) \to \exists_d(c = 1/d \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ d - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Он инициируется при усмотрении в условии подвыражения $(ac)/(b(pc + q))$, где c - переменная, выделенная целью "серия". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{abcd}(c - \text{число} \ \& \ f((a(1 - c^2) + c^2 + 1)/(cd)) = b \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f((a(c^2 - 1) + c^2 + 1)/(cd)) = b)$

   Прием заменяет два условия задачи на описание, имеющей цели "связка ..."и "учетответа". Его применение инициируется усмотрением в уравнении подвыражения $(a(1 - c^2) + c^2 + 1)/(cd)$, где c - переменная, выделенная целью "серия".

Эта переменная не входит в a, b, d. Само уравнение будет идентифицироваться со вторым заменяемым условием, откуда и определяется b. Переменная c не должна входить в другие условия задачи. Функциональный шаблон $f(\ldots)$ идентифицируется при помощи указателя "новаргумент(x6 x3 извлечение)". Переменная c в правой части эквивалентности имеет значение, обратное ее значению в левой части. Прием нужен для стандартизации, выявляющей в ответе одинаковые подвыражения. Уровень срабатывания равен 2.

4. Занесение произвольной постоянной под знак логарифма.

$\forall_{abcdf}(\neg(a=0) \to c - \text{число} \ \& \ f(a\ln|b|+c)=d \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(a\ln(bc))=d)$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Его применение инициируется усмотрением в условии задачи подвыражения вида $a\ln|b|+c+A$, где c - переменная, выделенная целью "серия" и не входящая ни в a, b, d, ни в остальные условия.

$\forall_{abcdf}(c - \text{число} \ \& \ f(\ln(a^2)+2\ln(bc))=d \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(2\ln(abc))=d)$

Применение приема инциируется при усмотрении подвыражения $\ln(a^2)+2\ln(bc)+A$, где c - такое же, как выше. Уровни срабатывания приемов равны 2.

5. Исключение минуса.

$\forall_{cdf}(c - \text{число} \ \& \ f(-c)=d \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(c)=d)$

Прием инициируется при усмотрении подвыражения $-(ac)/b$.

$\forall_{abcdef}(c - \text{число} \ \& \ f(((ac)/b-d)^2)=e \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(((ac)/b+d)^2)=e)$

Прием инициируется при усмотрении подвыражения $((ac)/b-d)^2$.

$\forall_{abc}(c - \text{число} \ \& \ f(\cos(c-a))=b \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(\cos(c+a))=b)$

Прием инициируется при усмотрении подвыражения $\cos(c-a)$.

Во всех этих случаях c - переменная, выделенная целью "серия". Уровень срабатывания равен 2.

6. Исключение коэффициента при произвольной постоянной.

$\forall_{acdf}(\neg(a=0) \to c - \text{число} \ \& \ f(ac)=d \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(c)=d)$

Прием инициируется при усмотрении подвыражения acb, где c - переменная, выделенная целью "серия". К подпроизведению a относятся все сомножители, не зависящие от варьируемых переменных и не содержащие переменных, выделенных целью "серия". Проверяется, что это подпроизведение невырожденное.

$\forall_{bcef}(c - \text{число} \ \& \ f(c/b)=e \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(c)=e)$

Прием инициируется при усмотрении подвыражения $(ac)/(bd)$. К невырожденному подпроизведению b относятся все сомножители, не содержащие варьируемых переменных. Проверяется, что выделенная целью "серия" переменная c не входит в a, b, d, e. Уровень срабатывания приемов равен 2.

7. Вынесение минуса за знак суммы.

$\forall_{abcdef}(c - \text{число} \ \& \ f(c(d-bc))=e \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ f(-c(d+bc))=e)$

Прием инициируется при усмотрении подвыражения $ac(d-bc)$. Выделенная целью "серия" переменная c не входит в a, b, d, e и не встречается в остальных условиях задачи, кроме, быть может, условия $\neg(c = 0)$. Если эта переменная встречается в неравенстве $0 \leq c$, то используется аналогичный прием, изменяющий знак неравенства:

$\forall_{abcdef}(c$—число & $f(c(d-bc)) = e$ & $0 \leq c \leftrightarrow c$—число & $f(-c(d+bc)) = e$ & $c \leq 0)$

Уровень срабатывания приемов равен 2.

8. Исключение степени.

   $\forall_{abcf}(c$ – число & $c \leq 0$ & $f(c^a) = b \leftrightarrow c$ – число & $f(c) = b)$

   Прием инициируется при усмотрении подвыражения c^a, где c - переменная, выделенная целью "серия"; a - рациональная константа с четным числителем.

   $\forall_{abcf}(c$ – число & $0 < c$ & $f(c^a) = b \leftrightarrow c$ – число & $0 < c$ & $f(c) = b)$

   $\forall_{abcf}(c$ – число & $f(c^a) = b \leftrightarrow c$ – число & $f(c) = b)$

   Во всех случаях предполагается, что c не встречается в остальных условиях (для последнего приема разрешается вхождение в условие $\neg(c = 0)$). Уровни срабатывания равны 2.

9. Исключение сигнума.

   $\forall_{acdf}(c$ – число & $f(\mathrm{sg}(a)c) = d \leftrightarrow c$ – число & $f(c) = d)$

   Прием инициируется при усмотрении подвыражения $\mathrm{sg}(a)bc$. Переменная c, выделенная целью "серия", не входит в a, d, а также в другие условия, кроме, быть может, условия $\neg(c = 0)$. Уровень срабатывания равен 2.

10. Исключение тригонометрической функции от суммы с арк-функцией.

    $\forall_{abc}(c$ – число & $f(\cos(\arcsin a + c)) = b \leftrightarrow c$ – число & $f((\sqrt{1-a^2}(1-c^2) + 2ac)/(1+c^2)) = b)$

    Прием инициируется при усмотрении подвыражения $\cos(\arcsin(a) + c)$. Условия на c аналогичны указанным в предыдущем пункте. Уровень срабатывания равен 2.

11. Степень под логарифмом.

    $\forall_{abcdf}(c$ – число & $f(\ln((ac)^b)) = d \leftrightarrow c$ – число & $f(b\ln(ac)) = d)$

    Прием инициируется при усмотрении подвыражения $\ln((ac)^b)$. Условия на c - аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 2.

Выделение полного квадрата

$\forall_{abc}(ca^2 + 2abc + cb^2 = c(a+b)^2)$

$\forall_{abc}(ca^2 - 2abc + cb^2 = c(a-b)^2)$

Приемы применяются в условиях задачи на описание, имеющей цели "(связка ...)" и "учетответа". Число слагаемых той суммы, в которой предпринимается группировка, должно быть не более 5. Уровень срабатывания равен 2.

Отбрасывание сопровождающих условий, содержащих варьируемый параметр

$\forall_{ab}(\neg(a = b))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он заменяет на константу "истина" условие $\neg(a = b)$ задачи на описание, имеющей цели "(связка ...)" и "учетответа", если это условие содержит как произвольную постоянную, так и варьируемый параметр. Аналогичным образом отбрасываются неравенства:

$\forall_{ab}(a < b)$

$\forall_{ab}(a \leq b)$

На уровне 5 приемы применяются даже в тех случаях, когда отбрасываемые условия участвуют в сопровождении по о.д.з. Если они не участвуют в таком сопровождении, то уровень срабатывания понижается: в случае неравенств до единицы, в случае отрицания равенства до тройки.

Приведение подобных членов

$\forall_{abc}(ab + ac = a(b + c))$

Прием применяется в условии задачи на описание с той же целевой установкой, что и выше. Указатель "набор(второйтерм)" определяет одновременную обработку всех слагаемых преобразуемой суммы, т.е. в качестве a берется их общий делитель. При этом проверяется, что остающаяся в скобках сумма не содержит неизвестных. Если a представляет собой экспоненту с основанием "e", то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abc}(a|b| + c|b| = (a + c)|b|)$

Здесь уже указатель "набор(второйтерм)" отсутствует, но зато проверяется наличие вхождения в преобразуемое условие произвольной постоянной, не расположенной в двух группируемых слагаемых. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abc}(a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a + c)\sqrt{b})$

Предполагается, что выражение b содержит произвольные постоянные, а выражения a, c - не содержат. Уровень срабатывания равен 4.

Преобразование специальных выражений с радикалами

$\forall_{ax}(0 \leq (x - 1)(x + 1) \to \ln|\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x+1|} + x|\mathrm{sg}(x) = a \leftrightarrow |x| = (\exp(2a) + 1)/(2\exp(a)))$

$\forall_{ax}(0 \leq (x - 1)(x + 1) \to |\sqrt{|x-1|} \cdot \sqrt{|x+1|} + x| = a \leftrightarrow |x| = (a^2 + 1)/(2a))$

Приемы применяются в условиях задачи на описание, имеющей цели "(связка ...)" и "учетответа". Выражение x содержит неизвестные, a - не содержит. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ab}(0 \leq a^2 - b^2 \to (\sqrt{|a-b|} \cdot \sqrt{|a+b|} - b)^2 = (a^2 - 2)b\sqrt{a^2 - b^2})$

Прием применяется в таких же контекстах, что и предыдущий. На выражения a, b специальных условий не накладывается. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ab}(\ln((a + \sqrt{a^2 + b})/|a - \sqrt{a^2 + b}|) = 2\ln|a + \sqrt{a^2 + b}| - \ln|b|)$

Прием применяется в условиях задачи на описание, имеющей цель "(связка ...)". Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение вырожденного подслучая

$\forall_a(a = 0 \leftrightarrow \text{ложь})$

Прием отбрасывает вырожденный случай, фиксирующий значение варьируемой переменной и не содержащий равенств с неизвестными. Заменяемое на константу "ложь" равенство представляет собой условие задачи на описание, имеющей цель "(связка ...)". Оно не содержит неизвестных, но содержит варьируемую переменную. Задача не имеет уравнений. Уровень срабатывания равен 2.

2.4.2 Упрощение ответа дифференциального уравнения нормализатором "нормсуществует"

После обработки параметрического описания задачей на описание, имеющей цель "учетответа", предпринимается обращение к нормализатору "нормсуществует" для окончательного упрощения ответа. К этому же нормализатору обращаются и некоторые приведенные выше приемы интегрирования дифференциальных уравнений, заменяющее утверждение которых содержит квантор существования. Приемам, предназначенным для упрощения ответов дифференциальных уравнений, в нормализаторе отведен целый раздел "Нормализация подкванторного утверждения при решении дифференциальных уравнений". В нем насчитывается свыше сотни приемов. Сразу отметим, что данный список приемов никоим образом не претендует на полноту. Он просто охватывает те преобразования, которые понадобились при редактировании ответов в обучающем материале и имеет достаточно случайный характер. По существу, это материал для последующих обобщений. Впрочем, даже и такой, он часто будет полезен при редактировании ответов новых задач.

Ниже часто используется идентификация функциональных переменных $f(A)$ по стандартной схеме: сначала указатель "контекст(B)" определяет идентификацию всех переменных выражения A, затем f идентифицируется согласно указателю "новаргумент(f ...)". В таких случаях будем ограничиваться ссылкой на использование указателя "контекст(B)".

Исключение модуля

$\forall_{afn}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ f(c|a|^n)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ f(ca^n)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение в преобразуемом утверждении подвыражения $c|a|^n$, где n - рациональная константа с нечетным знаменателем. Указатель "связка(x3)" разрешает применение приема и для кванторов, имеющих в связывающей приставке более одной переменной. Все переменные, отличные от , переносятся в связывающую приставку заменяющего квантора. Такой указатель часто используется в нижеследующих приемах, хотя явно мы о нем больше упоминать не будем. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdefnpxy}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ p(c)\ \&\ y(x) = f(a|e|^n/(b|e|+cd))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ p(c)\ \&\ y(x) = f(ae^n/(be+cd))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a|e|^n/(b|e|+cd)$, где n - нечетная константа. Единственным содержащим c конъюнктивным членом утверждения $p(c)$ может являться утверждение $\neg(c = 0)$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdeA}(0 \leq ad \rightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ 0 < c\ \&\ a|b| = cd/e)\ \&\ A \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ ab = cd/e)\ \&\ A)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем вводится дополнительная посылка A. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abP}(\neg(a=0)\rightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ P(a\ln|b|+c))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ P(a\ln(bc))))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $a\ln|b|+c$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{af}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ f(c/|a|))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ f(c/a)))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $(bc)/(d|a|)$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abd}(\neg(a=0)\rightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ a\ln|b|+d=c)\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ a\ln(bc)+d=0))$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdnP}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ P(|a|^n(cd+\mathrm{sg}(a)b)))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ P(a^n(cd+b))))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $|a|^n(cd+\mathrm{sg}(a)b)$, где n - рациональная константа с нечетными числителем и знаменателем. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdefxy}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ f(a|e|/(b\mathrm{sg}(e)+cd)))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ f(ae/(b+cd))))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $a|e|/(b\mathrm{sg}(e)+cd)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{afn}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ 0<c\ \&\ f(c|a|^n))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ f(ca^n)))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $c|a|^nb$, где n - нечетная целочисленная константа. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdP}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ P(a\ln(cd)+b\ln|d|))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ P((a+b)\ln(cd))))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $a\ln(cd)+b\ln|d$, где a - константа. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abd}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ ac+|b|d=0)\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ ac+bd=0))$

$\forall_{abd}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ 0<c\ \&\ |a|=(bc)/d)\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ a=(bc)/d))$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdefnpxy}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ p(c)\ \&\ y(x)=f((b|e|+cd)/(a|e|^n)))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ p(c)\ \&\ y(x)=f((be+cd)/(ae^n))))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $(b|e|+cd)/(a|e|^n)$, где n - нечетная константа. Единственным содержащим c конъюнктивным членом утверждения $p(c)$ может являться утверждение $\neg(c=0)$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdefxy}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ f((b\mathrm{sg}(e)+cd)/(a|e|)))\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ f((b+cd)/(ae))))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $(b\mathrm{sg}(e)+cd))/(a|e|)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abden}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ a|b|^n=cd/e)\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ ab^n=cd/e))$

Переменная n идентифицируется с рациональной константой, имеющей нечетный знаменатель. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abdeA}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ 0<c\ \&\ a|b|=cd/e\ \&\ B)\ \&\ A\leftrightarrow\exists_c(c-\text{число}\ \&\ ab=cd/e\ \&\ B)\ \&\ A)$

Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcde}(ac(|b|d + ec) = ac(bd + ce))$

Указатель "контекст(...)" проверяет, что преобразуемый нормализатором терм имеет вид $\exists)c(c -$ число & $f(c))$. Так как нормализатор "нормсуществует" не является корневым, то прием будет преобразовывать некоторое подвыражение выражения $f(c)$. Проверяется, что вне этого подвыражения каждое вхождение переменной c либо является непосредственным операндом символов "равно", "существует", "число", либо имеет вид c^2. Проверяется также, что a, b, d, e не содержат c. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afn}(\exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f(c|a|^n)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f(ca^n)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $c|a|^n b$, где n - рациональная константа с нечетным знаменателем. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{af}(\exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f(c/|a|)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f(c/a)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $(bc)/(d|a|)$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdefxy}(\exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f((a|e|)/(b\mathrm{sg}(e) + cd))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f((ae)/(b + cd))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $(a|e|)/(b\mathrm{sg}(e) + cd)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdefxy}(\exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f((b\mathrm{sg}(e) + cd)/(a|e|)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& f((b + cd)/(ae))))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_a(0 \le a \to |a| = a)$

Прием предпринимает "остаточную" попытку исключить модуль и срабатывает на уровне 5.

$\forall_{abdP}(\exists_c(c -$ число $\& |a| = (bc/d) \& P) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& a = bc/d \& P))$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abde}(0 \le bd \& 0 \le e \to \exists_c(c -$ число $\& 0 < c \& |a| = b\sqrt{e}/d) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& 0 < c \& a^2 = (b^2e)/d^2))$

$\forall_{abce}(\exists_d(d -$ число $\& 0 < d \& c = e(d^2 + \exp(2|a|))/(bd\exp(|a|))) \leftrightarrow \exists_d(d -$ число $\& 0 < d \& c = e(d^2 + \exp(2a))/(bd\exp(a))))$

$\forall_{bcex}(\exists_d(d -$ число $\& 0 < d \& c = e(d^2x^{2\mathrm{sg}(x)} - 1)/(bd|x|^{\mathrm{sg}(x)})) \leftrightarrow \exists_d(d -$ число $\& 0 < d \& c = e(d^2x^2 - 1)/(bdx)))$

Уровень срабатывания приемов равен 4.

Отбрасывание сопровождающих утверждений, содержащих варьируемую переменную

Ограничения на о.д.з. для выражения, определяющего значение неизвестной функции, обычно отбрасываются из ответа дифференциального уравнения:

$\forall_{fg}(\neg(f(x) = g(x)) \leftrightarrow$ истина$)$

$\forall_{fg}(f(x) < g(x) \leftrightarrow \text{истина})$

$\forall_{fg}(f(x) \leq g(x) \leftrightarrow \text{истина})$

Здесь x - варьируемая переменная, которая должна входить в отбрасываемое неравенство или отрицание равенства. Уровень срабатывания равен 2.

Изменение знака константы

$\forall_{abxy}(\exists_c(y(x) = -a/(b+c)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ p(c)) \leftrightarrow \exists_c(y(x) = a/(c-b)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ p(-c)))$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abf}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ f(-ca/b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ f(ca/b)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $-ca/b$. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{afxy}(\exists_c(y(x) = f(-(a+c))\ \&\ c-\text{число}\ \&\ p(c)) \leftrightarrow \exists_c(y(x) = f(c-a)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ p(c)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $-(a + c)$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_a(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ a = -c) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ a = c))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abP}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ P(-a/(c - b))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ P(a/(b + c))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $-a/(c-b)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{aqP}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ P((c - a)^q)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ P((c + a)^q)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $(c - a)^q$, где q - рациональная константа с четным числителем. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdP}(\exists_c(c-\text{число}\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ P(-(a-bc)^2/(cd))) \leftrightarrow \exists_c(c-\text{число}\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ P((a+bc)^2/(cd))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $-(a-bc)^2/(cd)$, где переменная c не входит в a, b, d. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abf}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ c < 0\ \&\ f(-ca/b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ 0 < c\ \&\ f(ca/b)))$

$\forall_{abf}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ f(-ca/b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ f(ca/b)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $-ca/b$. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abP}(\exists_c(P(c(-a + bc))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ P(c(a + bc))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $c(-a+bc)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdeP}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ P(ac^2/d - bc/e)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ P(ac^2/d + bc/e)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $ac^2/d - bc/e + f$. Уровень срабатывания равен 3.

Устранение множителя, сопровождающего произвольную постоянную

$\forall_{aP}(a -$ число $\& \neg(a = 0) \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(ac)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(c)))$

$\forall_{aP}(a -$ число $\& \neg(a = 0) \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& P(ac)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \neg(c = 0) \& P(c)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения acd, где множитель a не содержит ни варьируемых переменных, ни вспомогательных параметров (для неявных ответов). Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{adeP}(a -$ число $\& \neg(a = 0) \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(cd/(ae))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(cd/e)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $cd/(ae)$, где a не содержит варируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdP}(\exists_c(c -$ число $\& P(d(c + b)/a)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(db/a + c)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $d(c+b)/a$, где термы a, d не содержат варьируемых переменных и вспомогательных параметров, причем хотя бы один из них отличен от единицы. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ab}(\exists_c(c -$ число $\& P(a/(bc))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(ac/b)))$

$\forall_{ab}(\exists_c(c -$ число $\& 0 < c \& P(a/(bc))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& 0 < c \& P(ac/b)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a/(bc)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abfmn}(n = m^2 \& a = mb \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& f(c(c+a)/n)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& f(c^2 + bc)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $c(c + a)/n$, где n - натуральное. Первый антецедент, выделенный указателем "программа", проверяет, что n есть квадрат натурального числа m. Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", усматривает, что a имеет сомножитель, делящийся на m, и идентифицирует результат b деления a на m. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abnP}(0 < a \& 0 < n \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(a(b+c)^n)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& P((ba^{1/n} + c)^n)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a(b + c)^n$, где n - константа, а терм a не содержит варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abnP}(0 \le a \& 0 < n \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& P((b+c)^n/a) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& P((b/a^{1/n} + c)^n)))$

Аналогично предыдущему.

Устранение константного слагаемого, сопровождающего произвольную постоянную

$\forall_{aP}(\exists_c(c -$ число $\& P(c + a)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& P(c)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a + c + d$, где терм a не содержит варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdxP}(\exists_{cx}(c -$ число $\& P(c + (a + b)/d)) \leftrightarrow \exists_{cx}(c -$ число $\& P(c + b/d)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $c+(a+b)/d+e$, где термы a, d не содержат варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abmnP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(ac/b + ma/(nb))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(ac/b)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $ac/b+(ma)/(nb)+e$, где термы m, n не содержат варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{amP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(ac + ma)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(ac)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $ac+ma+e$, где терм m не содержит варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 4.

Устранение степени произвольной постоянной

$\forall_{bP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(c^b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ P(c)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения c^b где b - рациональная константа, имеющая четный числитель либо знаменатель. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{bP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ P(c^b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ P(c)))$

Аналогично предыдущему, но b - рациональная константа с четным числителем. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{bP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ P(c^b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ P(c)))$

Здесь b - произвольная рациональная константа. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{bP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ P(c^b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ P(c)))$

$\forall_{bP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(c^b)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(c)))$

Переменная b идентифицируется с рациональной константой, имеющей нечетные числитель и знаменатель. Уровень срабатывания равен 4.

Устранение экспоненты от произвольной постоянной

$\forall_P(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(\exp c)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ P(c)))$

Созданы две версии приема. Одна срабатывает на уровне 3 и не использует при идентификации функционального шаблона $P(\ldots)$ нормализатор "извлечение". Другая срабатывает на уровне 5 и использует данный нормализатор.

$\forall_{bP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(\exp(b + c))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ P(c \exp b)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения e^{b+c}. Уровень срабатывания равен 3.

Устранение логарифма от произвольной постоянной либо ее модуля

$\forall_P(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ P(\ln |c|)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(c)))$

$\forall_P(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(\ln |c|)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(c)))$

$\forall_P(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ P(\ln c)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(c)))$

$\forall_P(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(\ln c)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(c)))$

Уровень срабатывания приемов равен 3.

Занесение произвольной постоянной под логарифм

$\forall_{abfxy}(\exists_c(c -$ число $\&\ f(b\ln a + bc)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ f(b\ln(ac))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $b\ln a + bc$. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abfxy}(\exists_c(c -$ число $\&\ f(-b\ln a + bc)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ f(-b\ln(ac))))$

$\forall_{abfxy}(\exists_c(c-$число $\&\ \neg(c = 0)\ \&\ f(b\ln a+bc)) \leftrightarrow \exists_c(c-$число $\&\ \neg(c = 0)\ \&\ f(b\ln(ac))))$

$\forall_{abfxy}(\exists_c(c -$ число $\&\ f(b\ln|a| + bc)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ f(b\ln(ac))))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abcd}(\exists_e(e -$ число $\&\ ad\ln|b| + c = de) \leftrightarrow \exists_e(e -$ число $\&\ ad\ln(be) + c = 0))$

Переменная a идентифицируется с константой. Уровень срабатывания равен 5.

Равенство степени произвольной постоянной

$\forall_{ap}(\exists_c(c -$ число $\&\ a^p = c) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ a = c))$

Переменная p идентифицируется с константным выражением. Уровень срабатывания равен 1.

Вынесение из-под степени коэффициента при варьируемой переменной

$\forall_{afnxy}(\exists_c(c -$ число $\&\ y(x) = f((c + ax)^n)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ y(x) = f(a^n(c + x)^n)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $(c + ax)^n$, где n идентифицируется с натуральной константой, а переменная x не входит в a. Уровень срабатывания равен 3.

Вынесение показателя степени из-под логарифма

$\forall_{an}(\exists_c(c -$ число $\&\ f(\ln(ca^n))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ f(n\ln(ac))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $\ln(ca^n)$, где n - натуральная константа. Уровень срабатывания равен 4.

Сокращение числителя и знаменателя на произвольную постоянную

$\forall_{abdfgp}(\exists_c(c-$число $\&\ g(c)\ \&\ f(ca/(p(cb+d)))) \leftrightarrow \exists_c(c-$число $\&\ g(c)\ \&\ f(a/(p(b+cd)))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $ca/(p(cb+d))$. Утверждение $g(c)$ имеет вид $0 < c$ либо $\neg(c = 0)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdfgp}(\exists_c(c-$число $\&\ g(c)\ \&\ f(p(cb+d)/(ca))) \leftrightarrow \exists_c(c-$число $\&\ g(c)\ \&\ f(p(b+cd)/a)))$

Аналогично предыдущему.

Отбрасывание условия на тип значения функциональной неизвестной

$\forall_y(y -$ функция $\leftrightarrow$ истина$)$

Переменная y идентифицируется с неизвестной текущей задачи, причем эта задача имеет цель (связка ...). Уровень срабатывания равен 5.

Отбрасывание условия на тип значения неизвестной функции от варьируемой переменной

$\forall_{xy}(y(x) - \text{число} \leftrightarrow \text{истина})$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет идентификацию x с варьируемой переменной текущей задачи. Проверяется, что y - неизвестная этой задачи. Уровень срабатывания равен 1.

Устранение дизъюнкции под квантором существования

$\forall_{ABC}(\exists_x(A \,\&\, (B \,\vee\, C)) \leftrightarrow \exists_x(A \,\&\, B) \,\vee\, \exists_x(A \,\&\, C))$

Текущая задача имеет цель (связка $\ldots$). Уровень срабатывания равен 1.

Восстановление ранее исключенного условия на тип значения произвольной постоянной

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \exists_c(c = a) \leftrightarrow \exists_c(c = a \,\&\, c - \text{число}))$

Прием восстанавливает стандартный вид параметрического описания ответа дифференциального уравнения, где явно указывается числовой тип параметра. Он может понадобиться, если ответ не разрешен явно относительно $y(x)$. Уровень срабатывания равен 1.

Перенесение произвольной постоянной из знаменателя в числитель

$\forall_{abd}(\exists_c(c - \text{число} \,\&\, 0 < c \,\&\, d = a/(bc)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, d = ac/b))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_f(\exists_c(c - \text{число} \,\&\, \neg(c = 0) \,\&\, f(c)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, \neg(c = 0) \,\&\, f(1/c)))$

Все вхождения переменной c в $f(c)$ должны являться вхождениями сомножителя знаменателя дроби, причем должно найтись хотя бы одно такое вхождение. Текущая задача имеет цель (связка $\ldots$).

Исключение сигнума

$\forall_{abd}(\exists_c(c - \text{число} \,\&\, \mathrm{sg}(a)b = cd) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, b = cd))$

$\forall_{abde}(\exists_c(c - \text{число} \,\&\, b\mathrm{sg}(a) + d(c + \mathrm{sg}(a)e) = 0) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, b + d(c + e) = 0))$

$\forall_{abd}(\exists_c(c - \text{число} \,\&\, ca + b\mathrm{sg}(d) = 0) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, ca + b = 0))$

$\forall_{abpq}(\neg(q = 0) \rightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, \sqrt{a/b} = p\mathrm{sg}(b)/q + c) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, q\sqrt{ab} = pb + cqb))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afn}(\exists_c(c - \text{число} \,\&\, f(c(\mathrm{sg}(a))^n)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, f(c)))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $c(\mathrm{sg}(a))^n b$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abdP}(\exists_c(c - \text{число} \,\&\, P(((a\mathrm{sg}(b) + c)d)^n)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \,\&\, P(((a + c)d)^n)))$

Указатель "контекст$(\ldots)$" определяет усмотрение подвыражения $((a\mathrm{sg}(b)+c)d)^n$, где n - четная целочисленная константа. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{bcex}(\exists_d(d -$ число $\& \ 0 < d \ \& \ c = e(d^2 - x^{4\mathrm{sg}(x)})/(bdx^{2\mathrm{sg}(x)})) \leftrightarrow \exists_d(d -$ число $\& \ 0 < d \ \& \ c = e(d^2x^4 - 1)/(bdx^2)))$

$\forall_{bcex}(\exists_d(d -$ число $\& \ 0 < d \ \& \ c = e(d^2x^{4\mathrm{sg}(x)} - 1)/(bdx^{2\mathrm{sg}(x)})) \leftrightarrow \exists_d(d -$ число $\& \ 0 < d \ \& \ c = e(d^2x^4 - 1)/(bdx^2)))$

Уровень срабатывания равен 4.

Специальные случаи сокращения с заменой произвольной постоянной

$\forall_{abdfp}(\exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ f(a(cb+d)^2/(cp))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ f(a(b+cd)^2/(cp))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a(cb+d)^2/(cp)$, где выражение d константное, а b - неконстантное, причем переменная c не входит в a, b, p. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdfpq}(\exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ f(q(p^2b + c^2d)/(ap^2c))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ f(q(b + c^2d)/(apc))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $q(p^2b+c^2d)/(ap^2c)$, где p - натуральная константа, отличная от единицы, причем переменная c не входит в выражения a, b, d. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abfpq}(\exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ f(q(ac^2+b)/(pc))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ f(q(a+bc^2)/(pc))))$

$\forall_{abfp}(\exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ f((ac^2 + b)/(pc))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ f((a + bc^2)/(pc))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $q(ac^2 + b)/(pc)$, где b - константное выражение, a - неконстантное, причем переменная c не входит в a, p. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abdfmnkpqr}(r = d \ \& \ a = mp \ \& \ r = mq(c) \ \& \ m = n^2k \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ f(a/(bc^2+d))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ f(kp/(bc^2 + kq(nc)))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a/(bc^2+d)$, где выражение d может содержать переменную c, причем выражения a, b не содержат c. Первый антецедент, выделенный указателем "идентификатор", находит результат r обработки выражения d нормализатором ускоренного разложения на множители "факторизация". Второй антецедент идентифицирует a с произведением целочисленной константы m на некоторое выражение p. Третий антецедент усматривает, что r имеет численный сомножитель, делящийся на m, и находит остаточное произведение $q(c)$. Четвертый антецедент, выделенный указателем "программа", находит наибольший сомножитель числа m, представляющий собой полный квадрат некоторого натурального n. Проверяется, что n отлично от единицы. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abdfp}(\exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ f((p^2b + c^2d)/(ap^2c))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ f((b + c^2d)/(apc))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $(p^2b + c^2d)/(ap^2c)$, где p - натуральная константа, отличная от единицы, а выражения a, b, d не содержат переменной c. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abd}(\exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ c^2a = bc+d) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ \neg(c = 0) \ \& \ a = c(bc+d)))$

Выражение a содержит неизвестные, а выражения b, d - не содержат. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abdeP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P((ac+bd)/(be))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P((ac+d)/e)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $(ac+bd)/(be)$, причем выражение b не содержит варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{cdnP}(\exists_{abx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(a=0) \ \& \ P(a|cd+b|^n)) \leftrightarrow \exists_{abx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(a=0) \ \& \ P(a|d+b|^n)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a|cd+b|^n$ где d составляется из всех сомножителей, содержащих варьируемую переменную либо вспомогательный параметр. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdeP}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ P((ac+b)d/e)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ P(acd+bd/e)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $(ac+b)d/e$, где e не содержит варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abdP}(\exists_e(e - \text{число} \ \& \ P(\ln(a/(be+d)))) \leftrightarrow \exists_e(e - \text{число} \ \& \ P(-\ln(d/a+e))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $\ln(a/(be+d))$, где a, b не содержат варьируемых переменных и вспомогательных параметров. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abde}(\exists_c(c-\text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ f(a(bc+d)/(ec^2))) \leftrightarrow \exists_c(c-\text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ f(ac(b+cd)/e)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $a(bc+d)/(ec^2)$, где a, b, d, e не содержат переменной c. Уровень срабатывания равен 3.

Отбрасывание минуса под косинусом

$\forall_{af}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ f(\cos(-a+c))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ f(\cos(a+c))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $\cos(-a+c)$. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{cdkpq}(\exists_{abv}(p = -\cos(ax+b)d/(ca^k) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ q) \leftrightarrow \exists_{abv}(p = \cos(ax+b)d/(ca^k) \ \& \ a < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число}))$

Уровень срабатывания равен 4.

Переход от синуса к косинусу

$\forall_{af}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ f(\sin(a+c))) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ f(\cos(a+c))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $\sin(a+c)$. Уровень срабатывания равен 4.

Устранение минуса под радикалом

$\forall_f(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ c < 0 \ \& \ f(c)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ f(-c^2)))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $\sqrt{-c}$. Уровень срабатывания равен 1.

Устранение тригонометрической функции от арк-функции

$\forall_{af}(\exists_c(c-$число $\& \ f(\cos(\arcsin(a)+c))) \leftrightarrow \exists_c(c-$число $\& \ f((\sqrt{1-a^2}(1-c^2)+2ac)/(1+c^2))))$

Указатель "контекст(...)" определяет усмотрение подвыражения $\cos(\arcsin(a)+c)$. Уровень срабатывания равен 5.

Извлечение корня

$\forall_{abn}(\exists_c(c-$ число $\& \ a^n/b^n = c) \leftrightarrow \exists_c(c-$ число $\& \ a/b = c))$

Для выделения общего показателя степени n числителя и знаменателя служит указатель "общаястепень(...)". Проверяется, что n представляет собой рациональную константу с нечетными числителем и знаменателем. Уровень срабатывания равен 4.

Дополнительная стандартизация ответа

Кроме перечисленных выше приемов стандартизации ответа, связанных с квантором существования, в нормализатор введен ряд приемов общей стандартизации алгебраических выражений:

1. Устранение вложенных сумм и умножений.

2. Группировка логарифмов.

   $\forall_{abc}(a\ln(b^2) + c\ln|b| = (2a+c)\ln|b|)$

   $\forall_{abcde}(a + b\ln c = b\ln d + e \leftrightarrow a + b\ln(c/d) = e)$

   $\forall_{abc}(a\ln b - a\ln c = a\ln(b/c))$

   Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{abc}(a\ln b + c\ln b = (a+c)\ln b)$

   $\forall_{ab}(\ln a + \ln b = \ln(ab))$

   $\forall_{abc}(\ln(a/b^2) + 2\ln c = 2\ln(c/b) + \ln a)$

   $\forall_{abcde}(\ln(ab) + \ln|c + d/(ae)| = \ln|abc + bd/e|)$

   Уровень срабатывания равен 5. В последнем приеме выражение a неконстантное.

3. Устранение логарифма степени.

   $\forall_{ab}(\ln(a^b) = b\ln|a|)$

   Уровень срабатывания равен 4.

4. Выделение полного квадрата в сумме.

   $\forall_{ab}(a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2)$

   $\forall_{ab}(a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2)$

   $\forall_{abc}(a^2 + 2ab\mathrm{sg}(c) + b^2 = (a\mathrm{sg}(c) + b)^2)$

   $\forall_{abc}(a^2 - 2ab\mathrm{sg}(c) + b^2 = (a\mathrm{sg}(c) - b)^2)$

   Уровень срабатывания равен 5.

   $\forall_{abc}(-a^2 + 2ab = b^2 + c \leftrightarrow -c = (b-a)^2)$

   Уровень срабатывания равен 4.

5. Перенесение всех известных слагаемых в правую часть.

   $\forall_{abc}(a+b=c \leftrightarrow a=c-b)$

   Переменная b идентифицируется с невырожденной суммой всех известных слагаемых левой части. Выражение c не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 4. Для случая, когда c - переменная, связанная внешним квантором существования, к правой части добавляется конъюнктивный член "c – число".

6. Решение линейного уравнения.

   $\forall_{abcd}(ab/c=d \leftrightarrow a=cd/b)$

   Выражение a идентифицируется с невырожденным произведением неизвестных сомножителей. Выражение c не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 5.

7. Группировка слагаемых с общим множителем.

   $\forall_{abc}(ab+ac=a(b+c))$

   Выражение a неконстантное и не имеет своим сомножителем такую степень, что b либо c имеет степень с тем же основанием. Сумма не расположена в области действия квантора существования по нескольким переменным, одна из которых входит в b и не входит в c, а другая - входит в c и не входит в b. Создан также прием, у которого последнее требование заменено на требование расположения суммы в области действия квантора существования, причем a - степень с основанием e, а внутри b, c нет степеней с таким основанием. Уровни срабатывания обоих приемов равны 6. Наконец, на той же самой теореме создан еще один прием, который срабатывает, если неверно, что a - степень с основанием e, а сумма расположена в области действия квантора существования. Этот прием имеет уровень срабатывания 5.

8. Частичное сокращение модуля.

   $\forall_{abcd}((a|b|+c)/(d|b|)=a/d+c/(d|b|))$

   Уровень срабатывания равен 5.

9. Исключение сигнума.

   $\forall_{abc}((\sqrt{|a|}\mathrm{sg}(a)b+c)\sqrt{|a|}=ab+c\sqrt{|a|})$

   Уровень срабатывания равен 1.

10. Извлечение корня из частей равенства.

    $\forall_{abd}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ ca^b-d^b=0) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ ca-d=0))$

    Переменная b идентифицируется с рациональной константой, имеющей нечетный числитель. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{an}(\exists_c(c - \text{число}\ \&\ 0<c\ \&\ a^n=c) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ a=c))$

    Переменная n идентифицируется с рациональной константой, имеющей четный числитель. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{abfg}(a=f(c)\ \&\ b=g(c) \rightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ 0<c\ \&\ ca^2=b^2) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число}\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ cf(c^2)=g(c^2)))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Они определяют функциональные переменные $f(c), g(c)$. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afgp}(\exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ p \ \& \ a^2 = f(c)^2/g(c)^2) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ p \ \& \ a = f(c)/g(c)) \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ p \ \& \ a = f(c)/g(c)))$

Уровень срабатывания равен 4.

11. Усмотрение разности квадратов.

    $\forall_{abc}((a+b)^c(a-b)^c = (a^2-b^2)^c)$

    $\forall_{abc}(|a+b|^c|a-b|^c = |a^2-b^2|^c)$

    Уровень срабатывания равен 1.

12. Приведение подобных членов с произвольной постоянной.

    $\forall_{abc}(ac + bc = (a+b)c)$

    Выражение подчинено квантору существования по c. Уровень срабатывания равен 5.

13. Сложение дробей с равными знаменателями.

    $\forall_{abc}(a/b + c/b = (a+c)/b)$

    Уровень срабатывания равен 5.

14. Раскрывание скобок для устранения дроби.

    $\forall_{abcd}(ab(c/b + d) = ac + abd)$

    Уровень срабатывания равен 1.

15. Раскрывание скобок для перемножения дробных степеней с одинаковым основанием.

    $\forall_{abmnk}(k = m + n \rightarrow a^n(a^m b + c) = a^k b + a^n c)$

    Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражения m, n имеют заголовок "дробь", а k не имеет такого заголовка. Выражение a неконстантное. Уровень срабатывания равен 5.

    $\forall_{abcdef}(f = bd + ce \rightarrow (c\sqrt{a} + b)(d\sqrt{a} + e) = acd + be + f\sqrt{a})$

    Выражение a представляет собой неконстантную сумму. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором разложения на множители "видумножение". Уровень срабатывания приема равен 5.

16. Внесение минуса под знак суммы.

    $\forall_{abc}(-(a+b) + c = -a - b + c)$

    Уровень срабатывания равен 5.

17. Сокращение обеих частей равенства на общий ненулевой множитель.

    $\forall_{abc}(\neg(a = 0) \rightarrow ab = ac \leftrightarrow b = c)$

    $\forall_{abcde}(a/(bc) = d/(be) \leftrightarrow a/c = d/e)$

    Уровень срабатывания равен 5.

18. Перегруппировка для уменьшения длины.

    $\forall_{abcd}((a+b)c+ad=a(c+d)+bc)$

    Выражение c короче выражения a. Если a имеет варьируемые переменные, то и c должно их иметь. Если преобразуемое выражение расположено в области действия квантора существования по переменной, встречающейся в c, то эта переменная должна встречаться хотя бы в одном из выражений a, b, d. Уровень срабатывания равен 5.

19. Перенесение минуса в известную часть равенства.

    $\forall_{ab}(-a=b \leftrightarrow a=-b)$

    Выравжение a содержит неизвестные, а выражение b - содержит. Уровень срабатывания равен 5.

20. Частичное сокращение на степень вспомогательного параметра.

    $\forall_{abcdkp}(a(bp^k+c)/(dp^k)=ab/d+ac/(dp^k))$

    Текущая задача имеет комментарий (параметризация p), указывающий, что ответ найден в неявной форме и p - вспомогательный параметр. Этот параметр не должен входить в выражения a, b, d, причем само преобразуемое выражение должно располагаться внутри терма $y(\ldots)$; y - неизвестная. Уровень срабатывания равен 5.

21. Попытка исключения вспомогательного параметра.

    $\forall_{abfgpxy}((a=x)=(p=b \;\&\; g) \rightarrow y(a)=f(p) \leftrightarrow y(x)=f(b) \;\&\; g)$

    Переменная y идентифицируется с неизвестной текущей задачи, p - вспомогательный параметр, используемый в неявном представлении ответа. Этот параметр имеет единственное вхождение в выражение a. Антецедент разрешает уравнение $a=x$ относительно неизвестной p с помощью вспомогательной задачи на описание. Так как результат может иметь вид дизъюнкции, используются указатель "дизъюнктчлен(1)" и нормализатор "нормдиффпарам", обеспечивающие обработку каждого дизъюнктивного члена по отдельности. Заменяющий терм выписывается как дизъюнкция отдельных подслучаев. Уровень срабатывания равен 1.

22. Вынесение минуса перед произведением.

    $\forall_{ab}(a\cdot(-b)=-ab)$

    Уровень срабатывания равен 4.

23. Внесение минуса под знак логарифма.

    $\forall_{abc}(-a\ln(b/c)=a\ln(c/b))$

    Если нормализуемый терм содержит сигнум, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

24. Отбрасывание избыточного неравенства для произвольной постоянной.

    $\forall_{bc}(0<bc \rightarrow \exists_a(a-\text{число} \;\&\; 0<a \;\&\; b=ac) \leftrightarrow \exists_a(a-\text{число} \;\&\; b=ac))$

    Уровень срабатывания равен 6.

25. Группировка сигнумов.

    $\forall_{abc}(a\mathrm{sg}(c) + b\mathrm{sg}(c) = (a+b)\mathrm{sg}(c))$

    Уровень срабатывания равен 5.

26. Усмотрение числа.

    $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - \text{число})$

    Выражение a не является переменной. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

27. Перегруппировка для приведения подобных членов с варьируемой переменной.

    $\forall_{abpqrst}(a(pq+r) + b(sq+t) = (ap+bs)q + ar + bt)$

    Выражения a, b, p, s не содержат варьируемых переменных, а выражение q - содержит. Уровень срабатывания равен 1.

2.4.3 Упрощение ответа дифференциального уравнения нормализатором "нормили"

В нормализаторе "нормили" выделен подраздел, связанный с упрощением дизъюнктивных конструкций в ответах дифференциальных уравнений. Он существенно меньше, чем аналогичный подраздел нормализатора "нормсуществует". Часть приемов не имеют дизъюнкции в заменяющей части, а лишь дополняют процесс преобразования дизъюнкций. Как и выше, данная коллекция приемов не претендует на полноту, а представляет собой лишь перечень фактически востребованных при работе с обучающими примерами преобразований.

Отбрасывание отрицаний равенств, содержащих варьируемую переменную

$\forall_{fg}(\neg(f(x) = g(x)) \leftrightarrow \text{истина})$

Здесь x - варьируемая переменная; f, g - функциональные переменные. Это преобразование приводит ответ к традиционному виду, отбрасывая сопровождающие ограничения на конкретные точки. Уровень срабатывания равен 1.

Склейка подслучаев для положительного и отрицательного значений произвольной постоянной

$\forall_{afg}(g(-c) = f(c) \rightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ f(c)) \ \& \ a \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ g(c)) \ \& \ a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ g(c)) \ \& \ a)$

$\forall_{afg}(g(-c) = f(c) \rightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ f(c)) \ \& \ a \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ g(c)) \ \& \ a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ g(c)) \ \& \ a)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его части обрабатываются нормализатором "норм", обеспечивающим сквозные обращения к нормализаторам общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{af}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ f(c)) \ \& \ a \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ c < 0 \ \& \ f(c)) \ \& \ a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ f(c)) \ \& \ a)$

$\forall_{af}(\exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ f(c)) \ \& \ a \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ c \leq 0 \ \& \ f(c)) \ \& \ a \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ f(c)) \ \& \ a)$

$\forall_{fg}(\exists_c(c -$ число $\& \ f(c) \ \& \ g(c)) \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ g(c)) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ g(c)))$

Уровень срабатывания равен 3.

Отбрасывание условия на тип значения функциональной переменной

Указатели от том, что значением неизвестной служит функция, обычно из ответа дифференциального уравнения исключаются:

$\forall_x(x -$ функция $\leftrightarrow$ истина$)$

Текущая задача имеет цель (связка ...), причем x - неизвестная. Уровень срабатывания равен 5.

Отбрасывание подслучаев, не содержащих условий на значения неизвестной

$\forall_{ab}(a \ \vee \ b \leftrightarrow b)$

Утверждение a не содержит неизвестных, а b - содержит. Уровень срабатывания равен 2.

Возведение в квадрат для склейки подслучаев

$\forall_{abf}(\exists_c(c-$число $\& \ b\sqrt{a} = f(c)) \vee \exists_c(c-$число $\& \ b\sqrt{a} = -f(c)) \leftrightarrow \exists_c(c-$число $\& \ b^2a = (f(c))^2))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abpq}(\exists_c(c -$ число $\& \ (a-b)^2 = cp/q) \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ (a+b)^2 = cp/q) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ (cp - qa^2 - qb^2)^2 = 4a^2b^2q^2))$

Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abpq}(\exists_c(c -$ число $\& \ f(c) \ \& \ a = pc/q + b) \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ g(c) \ \& \ a = pc/q - b) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ a^2q^2 = (pc + bq)^2))$

$\forall_{abpq}(\exists_c(c -$ число $\& \ f(c) \ \& \ a = (pc + b)/q) \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ g(c) \ \& \ a = (pc - b)/q) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ a^2q^2 = (pc + b)^2))$

Выражение a имеет своим обобщенным множителем либо степень, показателем которой служит простая дробь с четным знаменателем, либо сигнум. Хотя бы одно из утверждений $f(c)$, $g(c)$ вырождается в константу "истина". Уровень срабатывания равен 3.

Исключение сигнума

$\forall_{abfg}(f(-b\mathrm{sg}(a)) - g(b\mathrm{sg}(a)) = 0 \rightarrow \exists_c(c-$число $\& \ f(b\mathrm{sg}(a))) \vee \exists_c(c-$число $\& \ g(b\mathrm{sg}(a))) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ f(b)) \ \vee \ \exists_c(c -$ число $\& \ g(b)))$

Указатель "контекст(...)" начинает идентификацию с усмотрения подвыражения $b\mathrm{sg}(a)$. Левая часть антецедента обрабатывается процедурой "норм". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abd}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ a\text{sg}(b) = c + d) \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ a\text{sg}(b) = -(c + d)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ a = c + d) \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ a = -(c + d)))$

Уровень срабатывания равен 4.

Отбрасывание избыточного подслучая

$\forall_f(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ f(c)) \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ f(c)) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ f(c)))$

$\forall_{abnxy}(0 < n \to y(x) = 0 \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ y(x) = a(c)(cb(c))^n) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ y(x) = a(c)(cb(c))^n))$

Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{dekmpxy}(p^k d/e = m \to y(x) = m \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ y(x) = (c + p)^k d/e) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ y(x) = (c + p)^k d/e))$

Левая часть антецедента обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abdnxy}(0 < n \ \& \ a + d = 0 \to \exists_c(c - \text{число} \ \& \ (y(x) + a)^n b = c) \ \vee \ y(x) = d \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ (y(x) + a)^n b = c))$

Выражение n константное; выражения a, d не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{cxy}(\exists_{ab}(y(x) = ax + b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число}) \ \vee \ y(x) = c \leftrightarrow \exists_{ab}(y(x) = ax + b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число}))$

Выражение c не содержит варьируемой переменной x. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{fgxyF}(F(f(t), g(t)) \to F(x(t), y(t)) \ \vee \ x(t) = f(t) \ \& \ y(t) = g(t) \leftrightarrow F(x(t), y(t)))$

Истинность антецедента устанавливается при помощи вспомогательной задачи на доказательство. Переменные x, y суть неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

Исключение модуля

$\forall_{abdmp}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ p|a| = (b + cm)/d) \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ p|a| = (-b + cm)/d) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ pa = (b + cm)/d) \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ pa = (-b + cm)/d))$

Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abf}(\exists_c(c - \text{число} \ \& \ f(c) \ \& \ a = |c|b) \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ g(c) \ \& \ a = -|c|b) \leftrightarrow \exists_c(c - \text{число} \ \& \ a = bc) \ \vee \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ a = -bc))$

Хотя бы одно из утверждений $f(c), g(c)$ представляет собой константу "истина", причем то из них, которое невырожденное, должно представлять собой отрицание равенства. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_a(0 \leq a \to |a| = a)$

Уровень срабатывания равен 5.

Возведение равенства с радикалом в квадрат

$\forall_{abdmn}(n = m/2 \rightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ a^n = cb/d) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ a^m d^2 = cb^2))$

Показатель степени n идентифицируется при помощи указателя "общаястепень(...)" как общий делитель показателей степени сомножителей левой части равенства. Первый антецедент устанавливает, что n имеет вид $m/2$, где m - натуральная константа. Основание степени a содержит неизвестные. Хотя бы одно из выражений b, d неконстантное. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abd}(\exists_c(\sqrt{a} = b\ \&\ d) \leftrightarrow \exists_c(a = b^2\ \&\ d))$

Выражение a содержит неизвестные, а b - не содержит. Уровень срабатывания равен 5.

Усмотрение случаев, отличающихся только одновременным изменением знаков всех слагаемых

$\forall_{abdefp}(e + f = 0 \rightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ a - b = cd + e)\ \vee\ \exists_c(c -$ число $\&\ p(c)\ \&\ b - a = cd + f) \leftrightarrow \exists_c(c -$ число $\&\ a - b = cd + e))$

Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором "нормплюс". Уровень срабатывания равен 4.

Отбрасывание дизъюнкции неравенств для независимой переменной

$\forall_{abx}(a < x\ \&\ x < b\ \vee\ x < a\ \vee\ b < x \leftrightarrow$ истина$)$

Переменная x не является неизвестной. Выражения a, b не содержат неизвестных. Согласно обычной стандартизации ответа дифференциального уравнения, отбрасываются условия на варьируемую переменную, восстанавливаемые через о.д.з. Уровень срабатывания равен 4.

Склейка линейного и константного решений

$\forall_{xy}(\exists_{ab}(\neg(a = 0)\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ y(x) = ax + b)\ \vee\ \exists_c(c -$ число $\&\ y(x) = c) \leftrightarrow \exists_{ab}(a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ y(x) = ax + b))$

Уровень срабатывания равен 3.

Глава 3

Приемы по элементарной геометрии

Основное внимание при обучении решателя элементарной геометрии уделялось пока вычислительным планиметрическим задачам. В небольшом количестве были рассмотрены также задачи на доказательство, на построение и простейшие стеореометрические задачи. Как правило, логический символ, введенный в планиметрии, точно так же используется и в стереометрической ситуации. Исключения оговариваются особо.

Впрочем, одно существенное отличие планиметрических обозначений от стеореметрических можно указать сразу же: в планиметрии фигуры задаются только через указание своих "опорных точек". Например, "прямая(A B)", "фигура(A B C D)", "окружность(A B)" и т.п. В стереометрии такой подход оказался неудобным из-за его чрезмерной громоздкости, так что тела обычно обозначаются переменными ("куб(a)", "конус(a)"и т.п.). Элементы тела (грани, ребра, вершины) связываются с обозначающей его переменной при помощи вспомогательных отношений.

Чтобы при решении чисто планиметрической задачи решатель не делал попыток применять стереометрические приемы, обычно в список посылок заносится однобуквенный терм "планиметрия". Этот терм является лишь технической пометкой, которая, с одной стороны, блокирует ряд стеореметрических приемов, а с другой стороны, ускоряет проверку принадлежности точек общей плоскости в таких планиметрических приемах, которые без данного ограничения могли бы привести к ошибкам в стереометрии. В подавляющем большинстве случаев решатель добавляет посылку "планиметрия" автоматически, выводя ее из анализа задачи непосредственно при запуске (но до начала сканирования). Подробнее об этом будет сказано ниже. Необходимость вводить эту посылку вручную может возникнуть лишь в исключительных случаях.

3.1 Логические символы, используемые решателем в элементарной геометрии

Логические символы, используемые при формализации утверждений элементарной геометрии, уже были перечислены в первом томе данной монографии. Однако, для удобства работы с приводимыми ниже приемами, напомним эти символы. Заметим, что все приводимые ниже обозначения относятся к внутреннему (скобочному) формату записи решателя. Однако, формульный редактор прорисовывает их точно так же. К числу редких исключений (легко определимых по описанию команд формульного редактора, имеющихся в справочнике по системе) относится утверждение $\Delta(ABC)$, означающее, что A, B, C - вершины некоторого треугольника. Заметим также, что в формульной записи операнды обычно отделяются запятыми - за исключением стандартных геометрических обозначений.

3.1.1 Простейшие геометрические понятия

Утверждение "точка(A)" означает, что A есть точка. Точки планиметрических и стеореометрических задач не различаются: по умолчанию считается, что все планиметрические задачи связаны с некоторой фиксированной плоскостью трехмерного пространства. Выражение "Точки" обозначает множество всех точек трехмерного пространства.

Выражение "прямая(AB)" обозначает прямую, проходящую через точки A, B. Оно имеет смысл при различии данных точек. Формально удобно считать, что даже если точки совпали, данное выражение по-прежнему задает какую-то прямую, проходящую через точку A, но об этой прямой более ничего не известно. Такое соглашение требуется для того, чтобы при усмотрении типа значения выражения "прямая(AB)" не тратить время на доказательство различия точек A, B. В логически корректных контекстах данные точки заведомо будут различными, однако при разборе случаев могут возникать противоречивые контексты, где точки окажутся склеившимися.

Выражение "плоскость(ABC)" обозначает плоскость, проходящую через точки A, B, C. Как и в случае прямых, оно имеет смысл для тройки точек, не лежащих на одной прямой, причем для вырожденных случаев делается аналогичное допущение.

Все стандартные геометрические приемы решателя ориентированы только на задание прямых и плоскостей через опорные точки. Если обозначить прямую либо плоскость переменной, то эти приемы не сработают, и задача решена не будет (впрочем, при дальнейшем обучении системы данный недостаток нетрудно будет устранить).

Одноместные отношения "Прямая(x)" и "Плоскость(x)" истинны, если x является, соответственно, прямой либо плоскостью. В элементарной геометрии, ввиду сделанного выше замечания о явном обозначении прямых и плоскостей, эти отношения решателем практически не используются.

Утверждение "прямаяточек(AB)" означает, что A есть прямая, проходящая через все точки множества B.

Выражения "отрезок(AB)", "интервал(AB)" обозначают отрезок и интервал с концами в точках A, B. Выражения "луч(AB)", "обратныйлуч(AB)" обозначают, соответственно, луч, начинающийся в точке A и проходящий через точку B, и луч, обратный данному лучу. Ограничение на точки A, B - такое же, как при задании прямой.

Выражения "расстояние(AB)", "расстдопрямой(AB)" и "расстдоплоскости(AB)" обозначают, соответственно, расстояние между точками A, B, расстояние от точки A до прямой B и расстояние от точки A до плоскости B. Выражение "расстмежду(AB)" обозначает расстояние между двумя замкнутыми множествами точек A, B.

Выражение "угол(ABC)" обозначает величину угла с вершиной в точке B, стороны которого проходят через точки A, B. Эта величина измеряется от 0 до π. Угол как фигура обозначается "Угол(ABC)". Оба выражения имеют смысл, если точки A, C отличны от точки B. Во втором случае берется та часть плоскости, которая соответствует величине угла, не превосходящей π. Если величина угла равна π, то выбор полуплоскости происходит некоторым не уточняемым образом. Заметим, что для задания полуплоскости служат определяемые ниже символы "полуплоскость", "обрполуплоскость". Как и выше, при совпадении точек типы значений выражений "угол(...)", "Угол(...)" сохраняются (соответственно, число и множество), но сами значения никак не уточняются.

Выражение "минугол(A)" - минимум величин A, $\pi - A$. Используется для обозначения наименьшей из величин угла и смежного с ним угла.

Выражение "уголмежду(AB)" обозначает величину угла между прямыми либо плоскостями A,B, либо между векторами A,B. В качестве величины угла между прямыми либо плоскостями берется та, которая лежит между 0 и $\pi/2$. Выражение "Уголмежду(ABC)" обозначает величину того угла между прямыми A,B, в котором лежит прямая C. Оно имеет смысл, если все три прямые лежат в общей плоскости.

Утверждение "биссектриса($ABCD$)" означает, что луч AD является биссектрисой угла ABC. Прямая, определяемая этим лучом, обозначается "Биссектриса(ABC)". Последний символ практически не встречается в приемах, так что в задачах нужно использовать первое обозначение.

Утверждение "биссектрплоск($ABCD$)" означает, что точка D лежит на биссекторной плоскости угла между полуплоскостями, проходящими через прямую B и (соответственно) через точки A,C.

Утверждения "параллельны(AB)", "перпендикулярно(AB)" используются для указания на параллельность либо перпендикулярность прямых и плоскостей (допускаются любые сочетания: прямая-прямая, прямая-плоскость, плоскость-плоскость). В случае параллельности допускается совпадение рассматриваемых прямых либо плоскостей, а также включение прямой в плоскость. Заметим, что эти символы используются и для векторов, о чем будет сказано отдельно в главе, посвященной аналитической геометрии.

Утверждения "однасторона(ABC)", "разныестороны(ABC)" означают, что точки A и B лежат по одну, либо, соответственно, по разные стороны от прямой C и в одной плоскости с этой прямой. Эти же утверждения могут быть использованы для указания на то, что точки A,B лежат по одну либо по разные стороны от плоскости C. Допускаются вырожденные случаи попадания точки на прямую либо плоскость C.

Утверждение "симметричны(ABC)" означает, что точки A,B симметричны относительно точки, прямой либо плоскости C. Утверждение "осьсимметрии(AB)" означает, что прямая A является осью симметрии плоской фигуры либо тела B. Утверждение "плоскостьсимметрии(AB)" означает, что плоскость A является плоскостью симметрии тела B.

Выражение "полоса(AB)" обозначает полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми A и B (включая эти прямые). Выражения "полуплоскость(AB)" и "обрполуплоскость(A B)" обозначают полуплоскости, лежащие по одну сторону от прямой A. Первая из них содержит точку B, вторая - не содержит точки B, причем ее плоскость проходит через B. Выражение "полупространство(AB)" обозначает полупространство, ограниченное плоскостью A, в котором расположена не лежащая на A точка B. Выражение "обрполупространство(AB)" обозначает противоположное полупространство.

Выражение "плоскостьфигуры(A)" обозначает плоскость, в которой расположена плоская фигура A. Если фигура вырожденная и таких плоскостей много, то берется какая-то одна из них.

3.1.2 Понятия, связанные с геометрическими фигурами

Названия геометрических фигур - "треугольник", "параллелограмм" и т.п., используются в решателе только как символы отношений между точками.

Утверждение "треугольник(ABC)" означает, что точки A, B, C попарно различны и не лежат на одной прямой, Утверждения "параллелограмм($ABCD$)", "ромб($ABCD$)", "прямоугольник($ABCD$)", "квадрат($ABCD$)", "трапеция($ABCD$)" означают, что четверка точек A, B, C, D составляет набор вершин четырехугольника соответствующего типа. В первых четырех случаях допускаются произвольные циклические перестановки и изменение порядка точек на противоположный. В последнем случае вершины A, D должны лежать на нижнем (большем) основании трапеции. Заметим, что рассматриваются два варианта трапеций. Указанное выше обозначение относится только к трапециям, у которых оба угла при нижнем основании не превосходят 90 градусов. Если это ограничение отбрасывается, то используется утверждение "Трапеция($ABCD$)".

Утверждение "четырехугольник($ABCD$)" означает, что четверка точек образует вершины выпуклого четырехугольника.

Если a - набор точек, то утверждения "многоугольник(a)", "правмногоугольник(a)" означают, что данные точки суть последовательно проходимые вершины некоторого многоугольника, не обязательно выпуклого (во втором случае - правильного).

Во всех перечисленных случаях (треугольник, четырехугольники и т.п.) многоугольник как множество точек задается выражением "фигура(a)". Здесь a - набор последовательно проходимых вершин многоугольника. Например, множество вершин треугольника обозначается "фигура(набор(ABC))".

Утверждение "замкнутаяломаная(a)" означает, что a есть набор вершин ломаной линии, у которого первая и последняя точки совпадают. Утверждение "простаяломаная(a)" означает, что a есть набор вершин ломаной линии (замкнутой либо нет), не имеющей самопересечений.

Утверждение "центр($P\ a$)" означает, что точка P есть центр фигуры либо тела a. Оно имеет смысл только для центрально - симметричных объектов: равносторонний треугольник, квадрат, окружность и т.п. Заметим, что это же утверждение используется в механике для указания связи материальных точки P и тела a.

Утверждения "Медиана($ABCD$)" и "Высота($ABCD$)" означают, что точка D является основанием, соответственно, медианы либо высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A. Утверждение "Биссектреуг($ABCD$)" означает, что точка D является основанием биссектрисы этого же треугольника, проведенной из вершины B.

Выражения "площадь(a)" и "периметр(a)" обозначают площадь и периметр фигуры a (во втором случае - только имеющей вид многоугольника). Выражение "длина(a)" обозначает длину линии a.

Окружность и круг в двумерном случае обозначаются, соответственно, выражениями "окружность(AB)" и "круг(AB)", где A - центр, B - произвольная точка окружности либо границы круга. Кроме того, для окружности с центром в точке A, имеющей радиус r, используется обозначение "окр($A\ r$)". Аналогичным образом, для круга введено обозначение "круградиуса($A\ r$)". В трехмерном случае окружность и круг обозначаются другими выражениями, так как приходится доопределять плоскость. Выражение "Окружность(ABC)" обозначает окружность с центром A, проходящую через точку B и лежащую в плоскости ABC. Аналогичным образом вводится обозначение "Круг(ABC)". В трехмерном случае используется также выражение "Окружн(ABr)", обозначающее окружность с центром A, проходящую через точку B и лежащую в плоскости, перпендикулярной вектору r.

Утверждение "окружн(a)" означает, что a есть окружность.

Для задания меньшей из двух дуг окружности с центром A, ограниченных точками B, C, служит выражение "дуга(ABC)". Большая из этих дуг обозначается "большаядуга(ABC)". Если точки B, C диаметрально противоположны, то значениями данных выражений служат две различные полуокружности, выбираемые каким-то неуточняемым образом. Обычно в такой ситуации выражения не используются. Дуга, на которую опирается вписанный угол ABC, обозначается "дугаугла(ABC)". Это выражение обычно используется в ситуациях, когда из контекста следует, что точки A, B, C образуют треугольник.

Область со сложной границей, образованной множеством фрагментов $A_1, \ldots, A_n$ стандартного вида (отрезки прямых, дуги окружностей и т.п.), обозначается "Фигура(перечень(набор($A_1 \ldots A_n$)))". Предполагается, что фрагменты перечисляются в циклической последовательности.

Выражения "сектор(ABC)" и "сегмент(ABC)" обозначают, соответственно, сектор и сегмент круга, имеющего центр A и крайние точки окружности B, C. Выбирается меньшая из дуг с концами в этих точках. При равенстве двух дуг неуточняемым образом берется произвольная. Фактически в данном случае используется выражение "полукруг(ABC)", обозначающее полукруг с центром в точке A, диаметр которого начинается в точке B, а C есть некоторая внутренняя точка полуокружности.

Выражение "кольцо(ABC)" обозначает кольцо с центром в точке A, внутренняя граница которого проходит через точку B, а внешняя - через точку C.

Утверждение "касательная(AB)" означает, что прямая A является касательной к окружности B. Утверждения "внешкасательная(ABC)" и "внутркасательная(ABC)" означают, что прямая A является, соответственно, внешней либо внутренней общей касательной окружностей B и C.

Утверждения "внешкасаются(AB)", "внутркасаются(AB)" означают, что окружности A, B касаются друг друга, соответственно, внешним либо внутренним образом.

Утверждение "вписана(AB)" означает, что окружность A вписана в многоугольник B. Обычно он задается выражением "фигура(...)". Аналогично, утверждение "описана(AB)" означает, что окружность A описана около многоугольника B.

Утверждение "подобны(AB)" означает, что многоугольники, наборы вершин которых суть A и B, подобны. Заметим, что здесь вместо обозначающего многоугольник выражения "фигура(A)" используется выражение A, определяющее набор его вершин. Данное утверждение дополнительно фиксирует соответствие между вершинами, при котором имеет место подобие: вершине A_i соответствует вершина B_i.

Утверждение "выпукло(a)" означает, что a есть выпуклое множество точек пространства.

Выражение "внешность(a)" обозначает дополнение множества точек a до множества точек плоскости.

3.1.3 Понятия, связанные с геометрическими телами

Утверждения "куб(a)", "призма(a)", "параллелепипед(a)", "пирамида(a)", "усечпирамида(a)", "конус(a)", "шар(a)", "сфера(a)", "цилиндр(a)" указывают тип тела либо поверхности a. Дополнительно тип тела либо поверхности может характеризоваться утверждениями "прямой(a)" (случаи прямой призмы и прямого параллелепипеда), "правильный(a)" (случаи правильных призмы, пирамиды либо усеченной пирамиды) и "прямоугольный(a)" (применительно к параллелепипеду).

Объем, полная площадь поверхности и площадь боковой поверхности тела a обозначаются, соответственно, выражениями "объем(a)", "площповерхности(a)" и "боковаяповерхность(a)".

Площадь поверхности a обозначается, как и в плоском случае, посредством выражения "площадь(a)".

Высота тела a (пирамида, конус, цилиндр и т.п.) обозначается "высота(a)".

Радиус шара либо сферы a обозначается "радиус(a)".

Утверждение "грань(a b)" означает, что многоугольник a является гранью многогранника b.

Утверждение "основание(a b)" означает, что плоская фигура a служит основанием тела b.

Утверждения "вершина(a b)", "ребро(a b)" означают, что точка либо, соответственно, отрезок a являются вершиной либо ребром многогранника b. Утверждение "Вершина(a b)" означает, что точка a является вершиной пирамиды либо конуса b.

Утверждение "диагональ(a b)" означает, что отрезок a является главной диагональю параллелепипеда b.

Утверждение "центр(a b)" указывает точку a - центр тела b.

Осевое сечение a цилиндра либо конуса b вводится при помощи утверждения "осевоесечение(a b)".

Плоскость двумерной фигуры a, расположенной в пространстве, обозначается "плоскостьфигуры(a)".

Выражения "полупространство(a b)" и "обрполупространство(a b)" обозначают полупространство, ограниченное плоскостью a и, соответственно, содержащее либо не содержащее точки b.

Выражение "Полоса(a b)" обозначает полосу между двумя параллельными плоскостями a, b.

Двугранный угол обозначается двумя различными способами. Первый из них - выражение "двугрУгол(A B C d)", где A,B - плоскости, ограничивающие угол; C - точка, не лежащая на этих плоскостях; d - указатель размещения данной точки. Если $d = 0$, то точка лежит внутри двугранного угла; если $d = 1$, то она находится в смежном с ним относительно плоскости A двугранном угле; если $d = 2$, то она находится в смежном относительно плоскости B двугранном угле; если $d = 3$, то точка находится в двугранном угле, вертикальном с данным. Второй способ - выражение "двугранУгол(A B C)". Здесь B - прямая, лежащая в вершине двугранного угла; A, C - точки, лежащие вне B на полуплоскостях, являющихся сторонами угла. В первом случае величина двугранного угла обозначается "двугругол(A B C d)", во втором - "двугранугол(A B C)".

Трехгранный угол с вершиной в точке A и направляющими векторами ребер AB, AC, AD обозначается "трехгранугол(A B C D)".

Величина острого угла между прямыми либо плоскостями a и b обозначается "уголмежду(a b)". Величина того угла между двумя прямыми a, b, в котором расположена прямая c (все три прямые проходят через вершину угла), обозначается "Уголмежду(a b c)".

Утверждение "биссектрплоск(A B C D)" означает, что точка D принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла, в вершине которого расположена прямая B, а точки A,C лежат на полуплоскостях - сторонах угла.

3.1.4 Операции, используемые в задачах на построение

При рассмотрении задач на построение возникла потребность в ряде дополнительных операций, выражающих новые элементы чертежа через уже известные. Для этих операций введены следующие обозначения.

Выражение "тчк(A B r)" обозначает точку, отстоящую на прямой AB от точки A на расстоянии r и находящуюся при $r > 0$ на луче AB, иначе - на продолжении этого луча.

Выражение "доляотрезка(A B a)" обозначает точку C ориентированной прямой AB, для которой отношение ориентированных длин отрезков AC,AB равно a.

Выражение "перпендикуляр(A B)" обозначает прямую, проведенную через точку B перпендикулярно прямой A, а выражение "параллелпрямая(A B) прямую, проведенную через указанную точку параллельно прямой A.

Выражение "параллель(A b B)" обозначает прямую, параллельную прямой A, находящуюся от нее на расстоянии b и расположенную в той же полуплоскости, что и точка B.

Наконец, выражение "поворотпрямой(A B C a)" обозначает прямую, получаемую при повороте луча AB на угол a в направлении полуплоскости, содержащей точку C.

3.2 Сопровождение чертежами задач и приемов

При решении геометрических задач решатель не использует чертежа. Однако, для большей наглядности процесса решения предусмотрена возможность сопровождения планиметрической задачи чертежом. Он либо вводится вручную, либо создается автоматически после того, как условие задачи полностью введено. Для автоматического создания чертежа используется реализованный на ГЕНОЛОГе пакетный анализатор "чертеж", который будет описан в конце данной главы. Для ускоренного построения чертежа анализатор запускается сразу, на исходном условии задачи. Однако, в сложных случая можно начать решение задачи до некоторого малого уровня, и лишь затем обратиться к анализатору "чертеж". В большинстве стандартных задач достаточно первого способа, изредка помогает второй, и лишь в особых ситуациях приходится вводить чертеж вручную. Впрочем, обучение анализатора "чертеж" несложно продолжить. Фактически анализатор распадается на две части - логическую и вычислительную. Рассматривая посылки задачи, он составляет схему вычислений для итеративной оптимизации параметров чертежа, которая, по возможности, сразу учитывает возможно большее число ограничений, накладываемых посылками.

В процессе решения задачи чертеж корректируется при дополнительных построениях. Для этого приемы ГЕНОЛОГа, выполняющие построения, имеют специальные указатели, определяющие ввод новых точек и проведение новых линий. Структура данных чертежа закрепляется за задачей на все время ее решения и дублируется при разборе случаев.

Стереометрическую задачу тоже можно сопровождать чертежом, однако пока он вводится только вручную и корректируется в процессе решения лишь частично (при срабатывании планиметрических приемов).

Приемы ГЕНОЛОГа, относящиеся к планиметрии, сопровождаются чертежами исключительно для наглядности. Эти чертежи никак не используются компилятором, однако в сколь-нибудь невырожденных случаях необходимы для понимания выполняемых приемом действий.

3.2.1 Интерфейс геометрического редактора

Интерфейс геометрического редактора уже был описан в первом томе, посвященном общему описанию системы. Однако, его естественно напомнить в данной главе, где геометрический редактор, собственно, и используется.

Геометрический редактор позволяет создавать планиметрические чертежи, составленные из отрезков и дуг окружностей. Эти линии соединяют базисные точки, обозначенные буквами. Предусмотрена также возможность проведения кривых произвольного вида, соединяющих две базисные точки. Кривая определяется последовательностью промежуточных точек, которые буквами не обозначаются и соединяются между собой отрезками либо дугами. Данная возможность была введена для создания эскизов к приемам анализа рисунков и в геометрическом решателе не используется.

Заметим, что окружность может быть прорисована только целиком, причем к базисным точкам должен относиться ее центр и хотя бы одна из ее точек. Это ограничение связано с тем, что в рассматривавшихся геометрических задачах в прорисовке лишь части окружности не возникало необходимости.

Окно геометрического редактора представляет собой прямоугольник, ограниченный линией синего цвета. В правом верхнем углу отделена небольшая область, в которой появляется указатель текущего режима редактирования. Управление сменой режимов осуществляется с помощью меню геометрического редактора, появляющегося в верхней части экрана. Имеются следующие режимы работы:

1. Нейтральный режим.

   Этот режим устанавливается при входе в геометрический редактор. У него прямоугольник указателя режима - пустой. Переход из любого другого режим в этот режим обеспечивается нажатием клавиши пробела. В нейтральном режиме можно выполнять следующие операции:

(a) Перемещение точки либо сопровождающего ее буквенного обозначения.

Для этого точка выделяется нажатием левой клавиши мыши после подведения к ней курсора мыши. Затем можно сдвигать точку нажатием клавиш курсора (постоянное удержание клавиши нажатой приводит к медленному движению точки в выбранном направлении). Аналогично, можно сдвигать обозначение выделенной точки нажатием клавиш "Ctr-курсоры". При движении точки корректируются все ведущие к ней отрезки прямых.

(b) Изменение обозначения точки.

Сначала нажимается буквенная клавиша (быть может, сопровождаемая несколькими цифровыми при указании индекса) для нового обозначения, затем выделяется нужная точка (левая клавиша мыши) и нажимается - ". Как и в случае добавления новой точки (см. ниже), для ввода большой буквы на клавиатуре нажимается малая буква, и наоборот. Старое обозначение заносится в накопитель обозначений точек, и будет использовано при последующих вводе либо коррекции обозначения (если не сбросить накопитель с помощью клавиши "Delete").

Эти операции можно применять и в других режимах (но не в режиме ввода новых точек, так как тогда каждая попытка выделить точку будет приводить к созданию новой точки).

2. Режим ввода новых точек.

Вход в режим ввода новых точек осуществляется при нажатии клавиши "Insert" либо выборе мышью пункта "Точка"меню в верхней части экрана. В прямоугольнике указателя режима появляется слово "точка". Для ввода новой точки следует выбрать курсором мыши ее позицию и нажать левую клавишу мыши. В качестве обозначения точки каждый раз выбирается первая не использованная большая буква. Однако, можно явно указывать обозначения точек, предварительно нажав последовательно некоторые буквенные клавиши. Тогда последующие нажатия левой клавиши мыши на выбранных позициях приведут к использованию для точек обозначений из данной последовательности. Так как обычно точки обозначаются большими буквами, предусмотрено автоматическое преобразование вводимых с клавиатуры малых букв в большие, а больших - в малые. Для сброса накопителя обозначения новых точек нажимается клавиша "Delete".

Обозначения точек можно сопровождать индексами - для этого после нажатия буквенной клавиши нажимаются одна или несколько цифровых клавиш, образующих индекс.

Если нужно удалить ранее введенную точку, то к ней подводится курсор мыши и нажимается правая клавиша мыши. При этом обозначение удаленной точки сохраняется в накопителе обозначений и будет использовано (если не сбросить этот накопитель) при вводе новой точки.

3. Режим сдвига точек.

Переход в этот режим осуществляется нажатием клавиши "Ctr-с" либо выбором мышью пункта "Сдвиг" меню в верхней части экрана. Указатель режима прорисовывает слово "сдвиг". Далее можно изменить положение любой из точек, не прибегая к сравнительно медленному перемещению ее клавишами курсора. Для этого сначала точка выделяется мышью (нажатие левой клавиши после подведения к точке курсора мыши), затем курсор мыши подводится к новой позиции точки, и снова нажимается левая клавиша мыши.

4. Режим проведения отрезка.

   Переход в режим осуществляется при нажатии "Ctr-о"("о кир.) либо выборе мышью пункта "Отрезок"меню в верхней части экрана. Указатель режима прорисовывает слово "отрезок". Для проведения отрезка между двумя точками сначала выделяется первая из них, затем курсор мыши подводится ко второй и нажимается левая клавиша мыши. Если нужно не ввести, а наоборот, удалить ранее введенный отрезок, то после выделения первой точки отрезка на второй точке нажимается правая клавиша мыши.

5. Режим проведения прямой.

   Переход в режим осуществляется при нажатии клавиши "Ctr-п" либо выборе мышью пункта "Прямая" меню в верхней части экрана. Указатель режима прорисовывает слово "прямая". Режим аналогичен режиму проведения отрезков, однако здесь отрезок продолжается вплоть до границ рамки. Режим практически не используется.

6. Режим проведения перпендикуляра.

   Переход в режим осуществляется при нажатии клавиши "Ctr-т" либо выборе мышью пункта "Перпендикуляр" меню в верхней части экрана. Указатель режима прорисовывает слово "перпендикуляр". Возможны две операции: восставить перпендикуляр к прямой в заданной точке этой прямой, либо опустить из заданной точки перпендикуляр на заданную прямую.

   В первом случае левой клавишей мыши выбираются две различные точки на прямой (вторая из них - та, через которую пройдет перпендикуляр). Чтобы доопределить направление перпендикуляра и ввести на нем еще одну точку, курсором мыши выбирается какая-либо из уже введенных ранее точек, и на ней нажимается правая клавиша мыши. Тогда перпендикуляр к прямой, проходящей через первые две точки, будет проведен из второй точки в направлении третьей точки, причем на нем будет введена ближайшая к третьей точке новая точка.

   Во втором случае, как и в первом, сначала левой клавишей мыши выбираются две точки на прямой, к которой требуется провести перпендикуляр, и затем на третьей точке - из которой должен быть опущен перпендикуляр - нажимается левая клавиша мыши. При проведении перпендикуляра вводится новая точка - основание этого перпендикуляра.

7. Режим проведения окружности.

   Переход в режим осуществляется при нажатии клавиши "Ctr-к"("к кир.) либо выборе мышью пункта "Окружность"меню в верхней части экрана. Указатель режима прорисовывает слово "окружность". Для проведения новой окружности сначала левой клавишей мыши выбирается ее центр, затем берется какя-либо точка, через которую должна пройти окружность, и снова нажимается левая клавиша мыши. Чтобы удалить введенную ранее окружность, сначала левой клавишей мыши выбирается ее центр, затем на той точке окружности, с помощью которой она вводилась, нажимается правая клавиша мыши. Последняя операция возможна лишь в том случае, если ранее введенная окружность не перемещалась по экрану (такое перемещение происходит при перемещении ее центра); иначе для удаления окружности нужно удалить ее центр).

8. Режим параллельного перемещения всего изображения.

   Переход в режим осуществляется при нажатии клавиши "Home"либо выборе мышью пункта "Перемещение"меню в верхней части экрана. Указатель режима прорисовывает слово "перемещение". Для задания вектора перемещения сначала на некоторой позиции нажимается клавиша мыши, затем курсор мыши переносится на новую позицию, и снова нажимается клавиша мыши.

9. Режим изменения размеров рамки чертежа.

   Переход в режим осуществляется при выборе мышью пункта "Рамка" меню в верхней части экрана. Возникает подменю, в котором перечисляются названия четырех сторон рамки ("правыйкрай", "левыйкрай", "верхнийкрай"и "нижнийкрай"). После выбора в нем нужной стороны указатель режима повторяет название выбранной стороны. Для выбора нового положения этой стороны курсор мыши перемещается на требуемую позицию и нажимается левая клавиша мыши. Режим обычно используется для увеличения зоны чертежа, под которым размещены другие изображения. Это увеличение относится только к периоду редактирования; по завершении работы геометрического редактора нижняя граница чертежа выбирается автоматически по крайним снизу его точкам.

10. Режим проведения кривых.

    Этот режим будет рассмотрен в разделах монографии, посвященных анализу рисунков.

3.2.2 Создание чертежа, сопровождающего задачу

Ввод новой геометрической задачи обычно проще начинать с перечисления логических условий (посылок задачи), характеризующих чертеж, так как они непосредственно вычитываются из текста задачи. Лишь после этого становится понятно, как выглядит чертеж. В стандартных случаях можно даже не отвлекаться на такого рода анализ задачи, а полностью доверить построение чертежа решателю.

Нажатие клавиши "Ctr-ч" запускает процедуру автоматического построения чертежа, который прорисовывается в верхней части - перед посылками задачи.

Если построенный чертеж не адекватен посылкам, можно попробовать нажать "Ч" для запуска усиленной процедуры, которая начинает решать задачу, а построение чертежа предпринимает лишь после нескольких первых шагов решения.

Наконец, можно ввести чертеж вручную. Для этого нажимается клавиша "ч". Ручное создание чертежа возможно как в самом начале, до ввода посылок, так и в процессе их ввода, и даже по окончании ввода всей задачи. Заметим, что уже созданный (в том числе автоматически) чертеж можно изменить вручную тем же нажатием клавиши "ч".

Для удаления чертежа следует сначала выделить его левой клавишей мыши (чертеж перекрасится в голубой цвет), а затем нажать "Ctr-Del". Заметим, что при вводе новых версий чертежа - вручную либо автоматически - предыдущая версия сохраняется в буфере. При удалении текущей верии чертежа она автоматически заменяется версией, хранящейся в буфере. Поэтому для полного сброса чертежа клавишу "Ctr-Del" придется нажать еще раз.

Указанным способом можно создавать и редактировать чертеж только для последней задачи просматриваемого списка задач. Если нужно работать с промежуточной задачей списка, то ее сначала следует выделить правой кнопкой мыши.

3.2.3 Создание чертежа, сопровождающего прием

Создание геометрического приема на ГЕНОЛОГе обычно начинается с прорисовки чертежа. Для этого нажимается клавиша "Ctr-ч", запускающая геометрический редактор. По окончании набора чертежа нажимается "Enter", если теорема будет набираться формульным редактором, и "Ctr-Enter", если она будет набираться текстовым редактором. При наборе теоремы чертеж на экране сохраняется.

Если в процессе набора теоремы были допущены ошибки, требующие повторного ее ввода, то можно нажать "Esc" и снова нажать "Ctr-ч". При этом чертеж окажется восстановленным, а для перехода к набору теоремы снова нажимается "Enter" либо "Ctr-Enter". Чертеж можно создавать и после ввода приема.

Для изменения чертежа используется клавиша "Ctr-ч". По окончании изменений нажимается "Enter", а далее - для сохранения измененного чертежа - F4.

Для удаления чертежа нажимается "Ctr-минус".

3.2.4 Структуры данных, используемые для хранения чертежа

Описание чертежа представляет собой пару (A_1, A_2), где A_1 - набор, перечисляющий точки чертежа, их буквенные обозначения, а также координаты точек и обозначающих их букв. A_2 - набор, перечисляющий элементы чертежа, которые должны быть прорисованы (точки, отрезки, окружности и т.п.). Эти элементы привязаны к точкам, указанным в первом наборе. Каждый элемент набора A_1 - пятерка: (переменная, обозначающая точку - столбец точки - строка точки - столбец буквы, обозначающей точку - строка буквы, обозначающей точку). Номера столбцов и строк берутся не относительно рамки чертежа, а относительно всего окна решателя. В наборе A_2 допускаются следующие типы элементов:

1. (точка x_i) - прорисовка точки x_i;
2. (отрезок x_i x_j) - прорисовка отрезка с концами x_i,x_j.
3. (окружность x_i a) - прорисовка окружности с центром x_i, имеющей радиус a. Здесь a - символьное натуральное число.
4. (кривая x_i x_j a_1 b_1 $\ldots$ a_n b_n) - прорисовка кривой с концами в точках x_i, x_j и промежуточными точками, смещения которых относительно точки x_i суть (a_1, b_1), …, (a_n, b_n).

5. (линия x a_1 a_2) - прорисовка переменной x, обозначающей кривую, заданную предыдущим элементом (кривая ...). a_1, a_2 - смещения точки прорисовки переменной относительно первой из точек, использованных для задания кривой (символьные числа).

6. (правыйкрай a), (левыйкрай b), (нижнийкрай c), (верхнийкрай d) - указатели на имевшее место при редактировании чертежа изменение размеров его рамки. Передаются во внешнюю процедуру. При обращении к новому редактированию чертежа отбрасываются.

Чертеж, сопровождающий прием, сохраняется в логическом терминале "геомредактор" узла теоремы этого приема (т.е. узла статьи того логического символа, за которым закреплен прием). Элементы описания чертежа кодируются здесь следующими термами:

1. переменная(x_1 a_1 b_1 b_2) - кодирует пятерку ($x_1a_1a_2b_1b_2$) из первого набора описания чертежа.

2. точка(x_i) - кодирует элемент (точка x_i).

3. отрезок(x_i x_j) - кодирует элемент (отрезок x_i x_j).

4. окружность(x_i r) - кодирует элемент (окружность x_i r).

5. начало(a), конец(b), левыйкрай(c), правыйкрай(d) - указатели на верхнюю, нижнюю, левую и правую границы рамки чертежа. Указатели левой и правой границ обычно отсутствуют, так как рамка берется по всей ширине окна решателя.

Чертеж, сопровождающий задачу, регистрируется при ее решении в комментарии (геомредактор A_1 A_2 A_3) к посылкам. Здесь A_1 - описание чертежа, A_2 и A_3 - верхняя и нижняя границы рамки чертежа. По ширине чертеж распространяется на все окно решателя.

Напомним, что задачник хранится во 2-м информационном блоке. Описание задачи достижимо из узла задачи в этом блоке по метке "задача". Оно представляет собой указатель - список, от которого компоненты задачи достижимы по символам "цели", "посылка","условие","комментарии". Переход по метке "точка" от данного указателя ведет к логическому терминалу, хранящему описание чертежа задачи. Типы элементов в терминале - те же, что для чертежей приемов. Добавляется элемент "чертеж", указывающий, что чертеж был создан автоматически.

3.2.5 Программа геометрического редактора

Описанный выше интерфейс геометрического редактора реализуется сравнительно несложной процедурой "геомредактор(x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8)". Ее входные данные суть: x1 и x2 - столбец и строка верхнего левого угла рамки чертежа, x3 и x4 - столбец и строка правого нижнего угла этой рамки, x5 - цвет фона, x6 - цвет линий и букв, x7 - описание чертежа, x8 - указатель на режим изменения чертежа (1) либо только на его прорисовку (0).

Так как никаких принципиальных моментов программа не содержит, дадим здесь лишь очень краткое ее описание.

После удаления из описания чертежа указателей на имевшие место при предыдущем редактировании изменения размеров рамки и переключения драйвера клавиатуры на латиницу создается копия x9 описания чертежа x7. Она и будет изменяться при редактировании, а x7 окажется скорректированным лишь по завершении редактирования.

Инициализируется нулем указатель x10 режима работы геометрического редактора (ввод новых точек, проведение отрезков и т.п.)Инициализируются нулями вспомогательные переменные x11, x13, используемые для сохранения информации о точках в операциях, применяемых к нескольким точкам. При этом x13 указывает обозначение "текущей" точки, которую можно сдвигать курсорами. Инициализируется пустым словом накопитель x12 переменных - обозначений новых точек. Если этот накопитель непуст, то для новой точки обозначение берется из него, иначе выбирается первая неиспользованная большая буква.

Далее идет оператор "повторение", к которому будут происходить откаты для перерисовки чертежа после очередного изменения. Перерисовка начинается с расчистки рамки чертежа. Затем последовательно просматриваются подлежащие перерисовке элементы x15 из описания чертежа, и справочник "геомредактор"выполняет их прорисовку. Потом просматриваются все точки из описания чертежа, и изображаются соответствующие им буквы.

Если x8 равно 0, то драйвер клавиатуры устанавливается на кириллицу (обычное его состояние, необходимое для нормальной работы интерфейсов), и работа геометрического редактора обрывается. Иначе голубым цветом обозначается рамка чертежа, и в правом верхнем углу этой рамки отделяется небольшой прямоугольник, где будет размещаться логический символ, определяющий режим редактирования. При $x10 = 0$ этот прямоугольник остается пустым.

Наконец, после контрольной точки "прием(4)" идет оператор "повторение", к которому происходят откаты для запроса очередной команды. После оператора "автоменю(x15)" начинается цепочка обработки команд. Так как команды весьма просты, мы не будем останавливаться на их реализации. После каждой команды (даже сдвига одной точки на один пиксел) происходит полная перерисовка чертежа. Эта схема, разумеется, чрезвычайно неэкономна. Однако, никакой необходимости в ее развитии до сих пор не возникало: для снабжения чертежами школьных планиметрических задач она вполне достаточна.

Заметим, что сохранение элементов, связывающих точки линиями чертежа, приводит к тому, что при перемещении точек большая (но не вся) часть чертежа автоматически корректируется.

Несколько вспомогательных процедур, используемых при работе с чертежами, вынесены в оператор "блокчертежа(...)".

3.2.6 Коррекция чертежа в процессе решения задачи

Если прием вводит в рассмотрение новые точки либо линии, то для понимания дальнейших действий решателя необходимо корректировать чертеж. Это достигается за счет специальных указателей приема ГЕНОЛОГа, явно определяющих требуемые преобразования чертежа. Хотя такие указатели были перечислены в первом томе монографии, для удобства читатателя повторно приведем здесь их список:

1. "перпендикулярно(x1 x2 x3 x4)" - на чертеже вводится новая точка x1, представляющая собой основание перпендикуляра, опущенного из точки x2 на пря-

мую, проходящую через точки x3 и x4. Здесь x1,x2,x3,x4 - переменные, обозначающие соответствующие точки в теореме приема.

2. "точкапрямой(x1 x2 x3 x4 x5)" - на чертеже вводится новая точка x1 пересечения прямых, проходящих через точки x2,x3 и x4,x5 соответственно.

3. "точкаотрезка(x1 x2 x3)" - вводится новая точка, выбираемая некоторым образом на отрезке с концами x2,x3.

4. "отрезок(x1 x2)" - проводится отрезок, соединяющий точки x1 и x2.

5. "внутркасаются(x1 x2 x3 x4 x5)" - на чертеже вводится новая точка x1, являющаяся точкой внутреннего касания окружности с центром x2, проходящей через точку x3, и окружности с центром x4, проходящей через точку x5.

6. "внешкасаются(x1 x2 x3 x4 x5)" - на чертеже вводится новая точка x1, являющаяся точкой внешнего касания окружности с центром x2, проходящей через точку x3, и окружности с центром x4, проходящей через точку x5.

7. "параллельны(x1 x2 x3 x4 x5 x6)" - на чертеже ввходится новая точка x1 пересечения прямой, проходящей через точки x2 и x3, с прямой, проведенной из точки x4 параллельно прямой, проходящей через точки x5 и x6.

8. "окружность(x1 x2)" - на чертеже изображается окружность с центром x1, проходящая через точку x2.

9. "описана(x1 x2 x3 x4)" - на чертеже вводится новая точка x1, представляющая собой центр окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках x2, x3, x4. Происходит также прорисовка данной окружности.

10. "расстояние(x1 x2 x3 x4 x5)" - на отрезке с концами x2, x3 вводится новая чтока x1, расстояние которой до точки x2 равно расстоянию между точками x4 и x5.

11. "перпендикулярны(x1 x2 x3 x4 x5 x6)" - на чертеже вводится новая точка x1, лежащая на пересечении перпендикуляра к прямой, проходящей через точки x2 и x3, восставленного в точке x4, с прямой, проходящей через точки x5 и x6.

12. "луч(x1 x2 x3 x4)" - на чертеже вводится новая точка x1, лежащая на луче x2-x3, расстояние которой до точки x2, выраженное в пикселях, равно x4. Здесь x4 - символьное число.

13. "прямкоорд(x1 x2 x3 x4 x5)" - вводится новая точка x1, лежащая на перпендикуляре к прямой x2-x3, восставленном в точке x2. Эта точка лежит относительно прямой x2-x3 по ту же сторону, что и точка x4. Расстояние от x1 до x2, выраженное в пикселях, равно x5. Здесь x5 - символьное число.

14. "окрточка(x1 x2 x3 x4 x5)" - на чертеже вводится новая точка x1, лежащая на пересечении луча x2-x3 с окружностью, имеющей центр x4 и проходящей через точку x5. Если точек две, берется более удаленная от начала луча.

15. "точкаокружности(x1 x2 x3 x4 x5 x6)" - на чертеже вводится новая точка x1, лежащая на пересечении луча x2-x3 с окружностью x4-x5 (см. предыдущий пункт) и отличная от точки x6.

16. "середина(x1 x2 x3)" - на чертеже вводится новая точка x1, представляющая собой середину отрезка x2-x3.

Перечисленные указатели используются только в приемах сканирования задачи с заголовком "вывод", а также в приемах пакетных анализаторов, не имеющих указателя "внутрпреобр" (т.е. выполняющих вывод следствий). При создании оператора "вывод(x1 x2 x3)", реализующего действия приема, компилятор обеспечивает регистрацию в списке x3 информационного элемента (геомредактор A), где A - набор указателей перечисленных выше типов. В этих указателях теоремные переменные приема, ссылающиеся на точки, заменены переменными, обозначающими точки в задаче.

Реализующая оператор "вывод(...)" программа, обнаружив в списке x3 элемент (геомредактор A), обращается к процедуре "допчертежа(x1 x2 x3 x4)". Здесь x1 - описание (P,Q) текущего чертежа, x2 - набор A. Эта процедура перечисляет пары (P' Q'), определяющие возможные дополнения к описанию чертежа (P' добавляется к P, Q' - к Q). Обычно результат определяется однозначно, и лишь в особых случаях (выбор произвольной точки на отрезке) возможно рассмотрение нескольких альтернатив. Используется некоторая штрафная функция для излишнего сближения точек, обозначений точек и наложения обозначений точек на линии. При перечислении версий переменной x4 присваивается значение данной функции. Перечисление доводится до конца, отбирается вариант с наименьшим значением штрафной функции, и реализуется пополнение описания чертежа. Заметим, что собственно его прорисовка при каждом срабатывании приема выполняется заново общими средствами трассировки.

При размещении буквенного обозначения точки оператор "допчертежа" использует вспомогательную процедуру "выборпозиции(x1 x2 x3 x4 x5 x6)". Здесь x1 - описание чертежа, x2 и x3 - столбец и строка для положения точки на чертеже. Выбирается позиция x4-x5 для прорисовки буквы, и переменной x6 присваивается значение штрафной функции, оценивающее выбранную позицию. Это значение представляет собой приращение суммарной штрафной функции оператора "допчертежа".

В свою очередь, оператор "выборпозиции", перебирая некоторое количество возможных размещений буквы, использует оператор "оценкапозиции(x1 x2 x3 x4 x5 x6)". У этого оператора x1 - описание чертежа, x2 и x3 - координаты прорисовки новой буквы, x4 и x5 - координаты точки. Переменной x6 присваивается значение штрафной функции.

3.3 Идентифицирующие операторы

Список посылок геометрической задачи, хотя и содержит множество простейших следствий исходных утверждений, но в разумных пределах. Подавляющее большинство тривиальных следствий остается за рамками этого списка. Например, если в задаче упоминается прямая AB, то отбрасываются условия принадлежности ей точек A и B. Могут отсутствовать условия принадлежности прямой точек отрезков и интервалов, концы которых лежат на прямой, и т.п. Поэтому перечисление рассматриваемых в задаче точек заданной прямой оказывается невырожденной процедурой, требующей нескольких (хотя и простых) шагов логического вывода. Однако, при сканировании задачи попытки такого рода перечислений предпринимаются чрезвычайно часто - почти в каждой теореме приема имеются условия принадлежности точек прямым и окружностям, параллельности и перпендикулярности прямых и др.

Если для таких перечислений и проверок использовать обычные синтезаторы и проверочные операторы, то работа решателя сильно замедлится. Чтобы избежать этого, были созданы так называемые идентифицирующие операторы. Они реализованы непосредственно на ЛОСе и используют ряд специальных средств ускоренного поиска нужных объектов либо проверки заданных простейших отношений. Заметим, что пока идентифицирующие операторы понадобились только для геометрических задач.

3.3.1 Адресные структуры, используемые идентифицирующими операторами

Список посылок геометрической задачи обычно бывает достаточно длинным - десятки, а иногда и сотни утверждений. Поиск в этом списке путем непосредственного просмотра (а такой поиск при попытках применения приемов нужен исключительно часто) будет существенно замедлять работу. Поэтому идентифицирующие операторы создают для своих нужд множество вспомогательных подсписков списка посылок, в которых перечисляются лишь утверждения заранее заданного вида. Такой вспомогательный подсписок, будучи однажды инициирован идентифицирующим оператором, автоматически поддерживается процедурами, преобразующими задачу при срабатывании приемов ("вывод", "заменавхождения" и т.п.).

Указанные выше вспомогательные подсписки хранятся в специальных комментариях к посылкам решаемой задачи, называемых адресными структурами. Используются три типа адресных структур:

1. Комментарий (списокпосылок A). В этой адресной структуре регистрируются только посылки, заголовки которых отличны от символов "не", "актив". Набор A состоит из пар $(B_1 B_2)$, где B_1 - логический символ, B_2 - структура данных, в которой регистрируются подсписки посылок, имеющих B_1 своим заголовком. Для B_2 имеются следующие возможности:

   (a) B_2 - список всех посылок, имеющих символ B_1 своим заголовком.

   (b) B_2 - набор пар (C_1, C_2). Здесь C_1 - символ "первыйоперанд" либо "второйоперанд" либо "первыйтерм" либо "второйтерм", C_2 - набор пар $(D_1 D_2)$. Элемент D_2 представляет собой список всех посылок, имеющих заголовок B_1, у которых в случаях "первыйоперанд", "второйоперанд" заголовок соответствующего операнда равен D_1, а в случаях "первыйтерм", "второйтерм" - сам этот операнд равен D_1.

   Таким образом, данная адресная структура представляет собой дерево глубины не более 2. Более глубокой классификации посылок пока не потребовалось, так как вспомогательные подсписки уже получились достаточно маленькие.

   Если посылка P занесена в какие-либо подсписки Q_2 пар (Q_1, Q_2) адресной структуры (списокпосылок ...), то она сопровождается комментарием (списокпосылок R), где R - набор всех указанных пар Q. Это упрощает расчистку адресной структуры при удалении посылки.

2. Комментарий (отр A). В этой адресной структуре регистрируются только посылки вида "не(T)". Фактически, в подсписках перечисляются не сами посылки, а утверждения T. Набор A состоит из пар $(B_1 B_2)$, где B_1 - логический

символ, B_2 - структура данных, в которой регистрируются подсписки термов T, имеющих B_1 своим заголовком. Для B_2 имеются следующие возможности:

(a) B_2 - список всех термов T посылок "не(T)", имеющих символ B_1 своим заголовком.

(b) B_2 - набор пар (C_1, C_2). Здесь C_1 - символ "первыйоперанд" либо "второйоперанд" либо "первыйтерм" либо "второйтерм", C_2 - набор пар $(D_1 D_2)$. Элемент D_2 представляет собой список всех термов T посылок "не(T)", имеющих заголовок B_1, у которых в случаях "первыйоперанд", "второйоперанд" заголовок соответствующего операнда равен D_1, а в случаях "первыйтерм", "второйтерм" - сам этот операнд равен D_1.

Как и выше, если терм P посылки (P) занесен в какие-либо подсписки Q_2 пар (Q_1, Q_2) адресной структуры (отр ...), то данная посылка сопровождается комментарием (отр R), где R - набор всех указанных пар Q.

3. Комментарий (выражение A). В этой адресной структуре регистрируются выражения T, для которых имеется посылка "актив(T)". Набор A состоит из пар $(B_1 B_2)$, где B_1 - логический символ, B_2 - набор всех термов T посылок "актив(T)", имеющих заголовок B_1.

   Посылка "актив(P)" сопровождается комментарием (выражение R), где R - не более чем одноэлементный набор всех пар (B_1, B_2), у которых P входит в B_2.

Адресные структуры перечисленных типов создаются, по мере надобности, самими идентифицирующими операторами. Для уже созданной адресной структуры предпринимается автоматическая ее коррекция при всех последующих изменениях задачи. Если посылка добавляется, коррекция обеспечивается оператором "смпосылка(x1 x2)". Здесь x1 - задача, x2 - вхождение новой посылки. Если посылка удаляется, коррекция обеспечивается оператором "расчистка(x1 x2)", где x1 - задача, x2 - вхождение удаляемой посылки. Если посылка изменяется, последовательно применяются операторы "расчистка" и "смпосылка". Все эти обращения реализуются преобразователями "вывод", "заменавхождения".

3.3.2 Буферы идентифицирующих операторов

В паузе между двумя срабатываниями приемов происходит интенсивный процесс "примерки" начальных отрезков условий применимости десятков и сотен приемов. При этом многократно повторяются обращения к пакетным и идентифицирующим операторам с одними и теми же входными данными. В такой ситуации естественно ввести буферы, сохраняющие результаты обращений и выдающие немедленный результат при повторном запросе. Для пакетных операторов соответствующие буферы были описаны ранее. Создан их аналог и для идентифицирующих операторов.

В качестве буфера, сохраняющего результаты обращений к идентифицирующим операторам, используется комментарий (Буфер A) к текущей задаче. Здесь A - набор пар (R B), где R - заголовок идентифицирующего оператора, B - набор пар (входные данные - результат обращения) для всех результатов обращения, имевших место после последней расчистки буфера. В случае перечисляющего оператора результат обращения - список всех наборов значений выходных переменных, возникших при перечислении. Регистрация такого результата в буфере выполняется только по завершении перечисления. Для идентифицирующего оператора, реализующего проверку некоторого условия, результат равен 0 в случае ложного условия и 1 в случае истинного.

При каждом срабатывании приема комментарий (Буфер ...) удаляется, и заполнение буферов возобновляется сначала. Ввиду таких регулярных расчисток, никаких ограничений на количество сохраняемых в буфере результатов не накладывается. Заметим, что расчистки необходимы для исключения "слепых пятен", которые могут возникнуть из-за того, что при появлении новых посылок добавляются новые связи на чертеже, не учтенные в старых списках выходных данных.

Регистрация результатов обращений в буфере осуществляется оператором "Буфер(x1 x2 x3)", где x1 - текущая задача, x2 - название идентифицирующего оператора, x3 - входные данные обращения, x4 - результат обращения.

Использование буфера идентифицирующих операторов резко ускорило решение геометрических задач. Фактически, этот буфер равнозначен сетевой структуре данных, непосредственно связывающей между собой элементы чертежа по многим типам отношений. Интересно, что такая структура данных является как бы самоорганизующейся: она создается идентифицирующими операторами лишь по мере надобности.

3.3.3 Создание новых идентифицирующих операторов

Для создания нового идентифицирующего оператора последовательно выполняются следующие действия:

1. Определяется, какого вида группа утверждений $T_1, \ldots, T_n$ будет обрабатываться при помощи нового оператора. В этой группе утверждений выделяются входные подвыражения $A_1, \ldots, A_m$ и выходные подвыражения $B_1, \ldots, B_k$. Если $k = 0$, то идентифицирующий оператор просто выполняет проверку истинности утверждений $T_1, \ldots, T_n$. Иначе он перечисляет значения выходных выражений, для которых данные утверждения истинны. К тому моменту, когда компилятор вставляет в программу обращение к идентифицирующему оператору, входные термы $A_1, \ldots, A_m$ должны быть уже идентифицированы - либо как выходные значения ранее примененных идентифицирующих операторов, либо через идентифицированные значения их переменных. Выбирается название f идентифицирующего оператора (обычно вводится новый логический символ).

2. На ЛОСе создается программа идентифицирующего оператора $f(x_1 \ldots x_{m+k-1})$, входные данные которой суть: x_1 - текущая задача, при сканировании которой применяется идентифицирующий оператор (обычно - задача на исследование либо на доказательство); $x_2, \ldots, x_{m+1}$ - термы $A_1, \ldots, A_m$. Выходные переменные $x_{m+2}, \ldots, x_{m+k+1}$ перечисляют значения термов $B_1, \ldots, B_k$.

3. Создаются приемы справочников "усм" и "См", основанные на псевдотеореме вида "усм(f вход($A_1 \ldots A_m$) выход($B_1 \ldots B_k$) усм(T_1 & ... & T_n) $C_1 \ldots C_p$)". Здесь $C_1, \ldots, C_p$ - информационные элементы, используемые компилятором ГЕНОЛОГа при формировании обращений к оператору f. Перечислим типы таких элементов:

   (a) уровень(U). U - уровень приоритетности при обработке компилятором данного идентифицирующего оператора. Заметим, что обычно возможно различное подразбиение антецедентов теоремы на группы, обрабатываемые идентифицирующими операторами, причем порядок идентификации также различен. Естественно в первую очередь обращаться к идентифицирующим операторам, наименее трудоемким и дающим наибольшее отсечение "чужих" контекстов. Для этого и введены уровни приоритетности. Чем меньше значение U, тем выше приоритет.

(b) точкапривязки. В этом случае терм "вход(...)" имеет вид "вход(g)", где g - логический символ привязки приема (символ, с усмотрения которого инициируется попытка применить прием). Оператор получает в качестве входного параметра вхождение символа привязки g, после чего начинает рассматривать серию эквивалентных переформулировок текущей посылки, и выдает значения выходных переменных, соответствующие таким переформулировкам.

Примером оператора данного типа служит оператор "прямыеуглы". Он анализирует условие перпендикулярности двух прямых AB, CD и переходит от них к парам $A'B'$, $C'D'$, где $AB \parallel A'B'$, $CD \parallel C'D'$, причем выделена общая точка E прямых $A'B'$, $C'D'$. В качестве выходных значений выдаются $A'B'$, $C'D'$, E.

(c) терм(D). Терм D встречается в единственном выходном терме B_i и после определения R значения B_i однозначно доопределяется как подтерм терма R. Например, после идентификации окружности "окружность(AB)" могут быть одновременно идентифицированы ее центр A и определяющая точка B.

Справочники "усм", "См" используются компилятором. Первый из них определяет по названию f набор (вход($A_1 \dots A_m$), выход($B_1 \dots B_k$), усм(T_1 & ... & T_n), $C_1, \dots, C_p$), задающий формат оператора.

Второй нужен для поиска идентифицирующих операторов, утверждения T_i которых содержат заданный логический символ s. Этот символ, как наиболее характерный для группы утверждений $T_1, \dots, T_n$, выбирается заранее, и по нему создается прием справочника "См". Справочник имеет единственную входную переменную x_1, которой перед обращением присваивается одноэлементный набор, состоящий из пустого накопителя. Указанный прием заносит в данный накопитель название оператора f.

По завершении перечисленных действий компилятор ГЕНОЛОГа готов к использованию нового идентифицирующего оператора.

3.3.4 Идентифицирующие операторы, используемые в геометрии

Каждый идентифицирующий оператор связан с некоторым логическим символом - тем, в разделе которого размещаются определяющие формат оператора приемы справочников "усм"и "См". В тех случаях, когда выходная переменная оператора принимает в качестве значения выражение не для точки, а для сложного объекта - прямой, плоскости, отрезка и т.п., после срабатывания оператора оказывается идентифицированным сам этот объект, а не опорные точки, через которые он задан. По мере надобности, такие точки доопределяются на последующих этапах идентификации.

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "прямая"

Начнем с операторов, обрабатывающих условие "$A \in$ прямая(BC)" принадлежности точки A прямой BC. Здесь имеются три оператора: оператор "прямыеточки", перечисляющий прямые, проходящие через заданную точку; оператор "точкипрямой", перечисляющий точки заданной прямой, и оператор "точкапрямой", проверяющий принадлежность заданной точки заданной прямой. Компилятор выбирает один из указанных операторов в зависимости от того, какие объекты оказались идентифицированы к текущему моменту.

Начнем с оператора "прямыеточки(x1 x2 x3)". Здесь x1 - текущая задача, x2 - выражение, значением которого служит точка. Переменная x3 перечисляет выражения для прямых, проходящих через данную точку. Уровень приоритетности при компиляции равен 3. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Прежде всего, ищется комментарий (Буфер A) к посылкам задачи x1, в наборе A ищется пара (прямыеточки B), и в наборе B - пара (x2 C). Если набор C найден, то оператор перечисляет в качестве значений x3 все его элементы. Если такого набора нет, то переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (выражение A), и в ее наборе A - пара (прямая B). Если их не было, то они вводятся, причем в наборе A регистрируется пара (прямая B), где B - список всех выражений "прямая(CD)", для которых задача имеет посылку "актив(прямая(CD))". Вводится пустой накопитель результата x6. В него будут заноситься все найденные значения выходной переменной x3, и по завершении перечисления данный накопитель будет зарегистрирован в комментарии (Буфер $\ldots$). Просматриваются все элементы "прямая(CD)"списка B, у которых x2 есть C либо D. Они последовательно выдаются в качестве значений переменной x3 и регистрируются в накопителе x6. Затем - переход к пункту 3.

3. Ищется адресная структура (списокпосылок A), в наборе A ищется пара (принадлежит B), в наборе B - пара (первыйтерм C). Если их не было, то они вводятся, причем в наборе C регистрируются всевозможные пары (P, Q), где Q - непустой список всех посылок вида "принадлежит(P $\ldots$)". В списке C ищется пара (x2, D), и просматриваются всевозможные элементы d списка D. Каждый такой элемент имеет вид "принадлежит(x2 E)". Если E - выражение "прямая($\ldots$)", еще не занесенное в накопитель x6, то оно регистрируется в x6 и выдается в качестве значения переменной x3. Иначе - переход к пункту 4.

4. Если E - выражение "отрезок(FG)" либо "интервал(FG)", то рассматривается выражение H вида "прямая(FG)". Если это выражение зарегистрировано в адресной структуре (выражение $\ldots$), т.е. данная прямая уже рассматривается в задаче, то проверяется, входит ли она в x6. Если не входит, то прямая регистрируется в x6 и выдается в качестве значения x3. Если выражение "прямая(FG)" еще не рассматривается в задаче, то переход к пункту 5.

5. В списке C ищется пара (F K), и в K просматриваются утверждения вида "принадлежит(F прямая(MN)))", где "прямая(MN)" еще не зарегистрирована в накопителе x6. Если одна из точек M, N совпадает с G, то прямая MN регистрируется в x6 и выдается в качестве результата. Иначе - в списке C ищется пара (G L), и в наборе L ищется утверждение вида "принадлежит(G прямая(MN)".

Если оно имеется, то прямая MN также регистрируется в x6 и выдается в качестве результата. По окончании просмотра списка K - переход к пункту 6.

6. В списке C ищется пара (G K), и в K просматриваются утверждения вида "принадлежит(G прямая(MN)))", где "прямая(MN)" еще не зарегистрирована в накопителе x6. Если одна из точек M, N совпадает с F, то прямая MN регистируется в x6 и выдается в качестве результата.

7. По завершении всех указанных выше циклов перечисления - обращение к процедуре "Буфер" для регистрации накопителя x6.

Оператор "точкипрямой(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными текущую задачу x1 и выражение x2 вида "прямая(AB)". Переменная x3 перечисляет выражения для точек данной прямой. Уровень приоритетности при компиляции равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результаты в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x5. В него последовательно заносятся точки A, B, причем каждая из них выдается в качестве результата. Затем - переход к пункту 3.

3. В списке посылок ищутся утверждения вида "равно(прямая(CD)прямая(AB))". Те из точек C, D, которые еще не занесены в накопитель x5, заносятся в него и выдаются в качестве результата. Затем - переход к пункту 4.

4. Ищется адресная структура (списокпосылок C), в наборе C ищется пара (принадлежит D), в наборе D - пара (второйтерм E). Если их не было, то они вводятся, причем в наборе E регистрируются всевозможные пары (P, Q), где Q - непустой список всех посылок вида "принадлежит(... P)". В списке E ищется пара (прямая(AB), F). Все элементы списка F суть утверждения вида "принадлежит(G прямая(AB))". Те точки G которые еще не зарегистрированы в накопителе x5, регистрируются в нем и выдаются в качестве результата. По окончании просмотра списка E - переход к пункту 5.

5. В списке E просматриваются всевозможные пары (отрезок(MN), F) либо (интервал(MN), F) где точки M, N принадлежат списку x5. Просматриваются утверждения "принадлежит(G ...)" набора F. Те точки G, которые еще не зарегистрированы в накопителе x5, регистрируются в нем и выдаются в качестве результата. По окончании просмотра - обращение к оператору "Буфер" для регистрации результата перечисления.

Оператор "точкапрямой(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1, выражение x2 для точки и выражение x3 вида "прямая(AB)". Он истинен, если удается усмотреть принадлежность точки x2 прямой AB, и ложен в противном случае. Уровень приоритетности при компиляции равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Если x2 равно A либо B, то выход по значению "истина". Иначе - переход к пункту 2.

2. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере (1 - "истина", 0 - "ложь"). Если это не удалось, переход к пункту 3.

3. Ищется адресная структура (списокпосылок C), в наборе C ищется пара (принадлежит D), в наборе D - пара (первыйтерм E). Если их не было, то они вводятся, причем в наборе E регистрируются всевозможные пары (P, Q), где Q - непустой список всех посылок вида "принадлежит(P ...)". Просматриваются всевозможные посылки вида "равно(прямая(MN)прямая(AB))". Если x2 совпадает с M либо N, то выход по "истина", причем результат регистрируется в буфере. Затем в списке E ищется пара вида(x2 F). Если в F имеется утверждение вида "принадлежит(... прямая(AB))", то выход по "истина" и регистрация результата в буфере. Иначе - переход к пункту 4.

4. Просматриваются утверждения списка F, имеющие вид "принадлежит(... отрезок(MN))" либо вид "принадлежит(... интервал(MN))". Проверяется, что каждая из точек $P \in \{M, N\}$ либо есть одна из точек A, B, либо в списке E для нее имеется пара (P Q), где Q содержит утверждение вида "принадлежит(... прямая(AB))". Если это так, то выход по "истина" и регистрация результата.

5. Если указанные выше попытки усмотреть принадлежность точки прямой оказались безрезультатными, то выход по "ложь" и регистрация в буфере значения 0.

Для обработки пары условий "$A \in$ прямая$(BC), A \in$ прямая(DE)" используется оператор "общаяточка(x1 x2 x3 x4)". Здесь x1 - задача, x2 и x3 - выражения "прямая(BC)", "прямая(DE)". Выходная переменная x4 перечисляет выражения для общих точек этих прямых. Обычно она принимает лишь одно значение, однако, даже если прямые различны, в задаче может оказаться несколько обозначений их общей точки, и все они будут перечислены. Уровень приоритетности при компиляции равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. Так как входными данными служит пара прямых, то предварительно эта пара лексикографически переупорядочивается. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x5. Оператор "точкипрямой" используется для перечисления точек первой прямой. Для каждой найденной точки оператор "точкапрямой" проверяет ее принадлежность второй прямой. Результат регистрируется в накопителе и выдается в качестве значения переменной x4. По завершении перечисления - накопитель x5 регистрируется в комментарии "Буфер".

Для обработки пары условий "$A \in$ прямая$(CD), B \in$ прямая(CD)" используется оператор "общаяпрямая(x1 x2 x3 x4)". Здесь x1 - задача, x2 и x3 - выражения A, B. Выходная переменная x4 перечисляет выражения для прямых, проходящих через точки A, B. Как и выше, режим перечисления объясняется возможным совпадением точек либо наличием различных обозначений одной и той же прямой. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x5. Оператор "прямыеточки" используется для перечисления прямых, проходящих через точку A. Для каждой найденной прямой оператор "точкапрямой" проверяет принадлежность ей точки B. Результат регистрируется в накопителе и выдается в качестве значения переменной x4. По завершении перечисления - накопитель x5 регистрируется в комментарии "Буфер".

Для обработки тройки условий "$A \in$ прямая$(DE), B \in$ прямая$(DE), C \in$ прямая(DE)" используется оператор "лежатнапрямой(x1 x2 x3 x4 x5)". Здесь x1 - задача; x2, x3 и x4 - выражения A, B, C. Выходная переменная x5 перечисляет выражения для прямых, проходящих через точки A, B, C. Объяснение режима перечисления - то же, что и выше. Уровень приоритетности равен 0. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x6. Оператор "прямыеточки" используется для перечисления прямых, проходящих через точку A. Для каждой найденной прямой операторы "точкапрямой" проверяют принадлежность ей точек B, C. Результат регистрируется в накопителе и выдается в качестве значения переменной x5. По завершении перечисления - накопитель x5 регистрируется в комментарии "Буфер".

Для обработки условия "точкалуча$(A\ B\ C)$", означающего, что точки A, B различны и точка C лежит на луче AB, используются операторы "точкилуча" и "точкалуча". Первый перечисляет точки луча, второй - проверяет расположение точки на луче.

У оператора "точкилуча(x1 x2 x3 x4)" входные данные суть: x1 - задача; x2, x3 - выражения для точек A, B. Выходная переменная x4 перечисляет выражения для точек C, причем точка A в перечисление не включается. Уровень приоритетности равен 3. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Выдается результат B, и переход к пункту 3.

3. Ищется адресная структура (списокпосылок D), в наборе D ищется пара (принадлежит E), в наборе E - пара (второйсимвол F). Если их не было, то они вводятся, причем в наборе F регистрируются всевозможные пары (P, Q), где Q - непустой список всех посылок вида "принадлежит$(\ldots P(\ldots))$". Ищется адресная структура (отр G), в наборе G ищется пара (принадлежит H). Если их не было, то они вводятся. На основе списка F находятся список x10 всех посылок, имеющих вид принадлежности отрезку, а также список x11 всех посылок, имеющих вид принадлежности интервалу. Вводятся накопитель x12 точек луча, заведомо отличных от его начала, а также накопитель всех точек луча x13. В первый заносится точка B, во второй - точки A, B. Далее - переход к пункту 4.

4. Просматриваются утверждения "принадлежит$(K$ отрезок$(MN))$", "принадлежит$(K$ интервал$(MN))$" списков x10, x11. Если точки M, N входят в список

x13, а точка K - не входит, то она регистрируется в списке x13 и выдается в качестве результата. Если одна из точек M, N совпадает с A, а другая - отсутствует в списке x13, причем K входит в x12, то отличная от A точка пары M, N регистрируется в списках x12, x13 и выдается в качестве результата. По исчерпании возможностей применения данного пункта - переход к пункту 5.

5. С помощью списка H просматриваются всевозможные посылки вида "не(принадлежит(A P))", где P - выражение "отрезок(MN)" либо "интервал(MN)"; точки M, N отличны от A, причем одна из них входит в x13, а другая - не входит. С помощью оператора "лежатнапрямой" проверяется, что точки A, M, N лежат на одной прямой. После этого та из точек M, N которая не входила в список x13, регистрируется в этом списке и выдается в качестве результата. Далее - откат к пункту 4. По исчерпании возможностей применения данного пункта - переход к пункту 6.

6. Накопитель x13 с отброшенной точкой A регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "точкалуча(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными задачу x1 и точки A, B, C. Его программа обращается к оператору "точкилуча" для перечисления точек луча и сравнения их с точкой C. Применение буфера результатов для этого оператора не предусмотрено. Уровень приоритетности равен 3.

Условие "однасторона(A B прямая(CD))", означающее, что точки A, B лежат в одной плоскости с прямой CD и по одну сторону от этой прямой (включая случаи попадания точек на прямую), обрабатывается идентифицирующими операторами "поодносторону", "Однасторона".

Оператор "поодносторону(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными задачу x1, выражение x2 для точки A и выражение x3 для прямой CD. Выходная переменная x4 перечисляет точки, лежащие по ту же сторону от прямой CD, что и точка A. Уровень приоритетности равен 3. Оператор почти не используется, и буфер результатов для него не предусмотрен. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. В качестве результата выдается точка A. Она же заносится в накопитель результата x5. Хотя буфер результатов и не используется, этот накопитель нужен для отбрасывания повторяющихся результатов. Далее - переход к пункту 2.

2. Вводится накопитель x6 прямых, параллельных прямой CD (сама прямая в него не заносится). При помощи идентифицирующего оператора "параллелпрямые" (см. ниже) перечисляются прямые $C'D'$, параллельные прямой CD; сама прямая CD отбрасывается. При помощи оператора "точкипрямой" составляется список x8 точек прямой $C'D'$. Проверяется, что он содержит точку A. После этого все точки списка x8, не входящие в список x5, выдаются в качестве значения переменной x4 и регистрируются в списке x5. Затем прямая $C'D'$ регистрируется в списке x6. По окончании просмотра параллельных прямых - переход к пункту 3.

3. Ищутся адресная структура (списокпосылок E), и в ее наборе E - пара (однасторона F). Если их не было, то они вводятся. Просматриваются утверждения списка F имеющие вид "однасторона(M N прямая(CD))", где A совпадает с M либо с N. Если оставшаяся точка P пары M, N не входит в список x5, то она

регистрируется в данном списке и выдается в качестве значения переменной x4. Далее просматриваются прямые списка x6, в названии которых упоминается точка P. Другая точка данного названия, если она еще не входит в список x5, регистрируется в нем и выдается в качестве результата. По исчерпании возможностей применения данного пункта - переход к пункту 4.

4. Просматриваются посылки вида "центр(P фигура(набор($Q_1 \dots Q_n$)))". Если две смежные точки Q_i, Q_{i+1} лежат на прямой CD, причем центр P либо некоторая точка Q_j входят в список x5, то просматриваются не входящие в список x5 и отличные от Q_i, Q_{i+1} точки Q_k и точка P, которые регистрируются в списке x5 и выдаются в качестве результата. Если какая-то из них встречается в названии прямой списка x6, то оставшаяся точка этого названия тоже регистрируется в списке x5 и выдается в качестве результата. Если в данном пункте была найдена хотя бы одна новая точка, то откат к пункту 3. Иначе - завершение перечисления.

Оператор "Однасторона(x1 x2 x3 x4)" проверяет, что точки x2, x3 лежат по одну сторону от прямой x4. Для этого он обращается к перечисляющему оператору "пооднусторону"(x1 x2 x4 x5)" и сравнивает результаты перечисления x5 с точкой x3.

Условие "разныестороны(A B прямая(CD))", означающее, что точки A, B лежат в одной плоскости с прямой CD и по разные стороны от этой прямой (включая случаи попадания точек на прямую), обрабатывается идентифицирующими операторами "поразныестороны", "Разныестороны". Первый из них усматривает посылку "разныестороны(...)", и пытается использовать оператор "пооднусторону" для дальнейшего перечисления. Второй оператор проверяет расположение точек по разныее стороны от прямой, используя перечисление точек первым оператором. Заметим, что практически везде антецеденты "однасторона(...)", "разныестороны(...)" в теоремах приемов выполняют только проверку и обрабатываются одноименными проверочными операторами. Хотя эти операторы работают медленнее идентифицирующих, зато они на порядок более мощные. Обычно они активируются в самом конце применения приема, когда идентификация точек уже выполнена. Такие ситуации сравнительно редки, и существенного замедления не происходит.

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "Плоскость"

Для обработки условия "принадлежит(A плоскость(BCD))" созданы операторы "точкиплоскости", "точкаплоскости","плоскоститочки".

Оператор "точкиплоскости(x1 x2 x3)" получает входные данные x1 (задача) и x2 (выражение "плоскость(BCD)"). Выходная переменная x3 перечисляет выражения для точек плоскости x2. Уровень приоритетности равен 3. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Если задача x1 имеет посылку "планиметрия", то переменная x3 перечисляет все выражения P для посылок "точка(P)", и на этом работа оператора завершается. Иначе - переход к пункту 2.

2. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 3.

3. Вводится пустой накопитель результата x5. В качестве значений переменной x3 выдаются точки B, C, D которые при этом регистрируются в накопителе x5. Затем - переход к пункту 4.

4. Ищется адресная структура (списокпосылок E), в наборе E ищется пара (принадлежит F), в наборе F - пара (второйтерм G). Если их не было, то они вводятся. В списке G просматриваются пары (плоскость(BCD), H), и в списке H - утверждения "принадлежит(P ...)". Если точка P отсутствует в накопителе x5, то она регистрируется в нем и выдается в качестве результата. Для каждой такой точки просматриваются пары (K, Q) списка G, у которых выражение K имеет заголовок "прямая" либо "отрезок". Проверяется, что один из операндов выражения K равен P. Рассматривается другой операнд M и с помощью оператора "точкаплоскости" проверяется, что он принадлежит плоскости BCD. После этого просматриваются утверждения "принадлежит(N ...)" списка Q. Не входящие в список x5 точки N регистрируются в данном списке и выдаются в качестве результата. По завершении перечисления - регистрация накопителя x5 в комментарии (Буфер ...).

Оператор "точкаплоскости(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1, выражение x2 для точки A и выражение x3 вида "плоскость(BCD)". Он проверяет принадлежность точки A плоскости BCD. Уровень приоритетности равен 3. Использование буфера результатов не предусмотрено. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Если задача x1 имеет посылку "планиметрия", то выход по значению "истина". Иначе - переход к пункту 2.

2. Если точка A совпадает с одной из точек B, C, D, то выход по "истина". Иначе - переход к пункту 3.

3. Ищется адресная структура (списокпосылок E), в наборе E ищется пара (принадлежит F), в наборе F - пара (первыйтерм G). Если их не было, то они вводятся. В списке G находится пара (A, H), и в списке H просматриваются утверждения "принадлежит(A M)". Если выражение M совпадает с выражением "плоскость(BCD)", то выход по "истина". Если M имеет вид "прямая(KN)", то с помощью рекурсивного обращения к оператору "точкаплоскости" проверяется принадлежность точек K, N плоскости BCD. При положительном результате - выход по "истина". По окончании просмотра списка H либо отсутствии пары (A, H) - выход по "ложь".

Оператор "плоскоститочки(x1 x2 x3)" имеет входные переменные x1 (задача) и x2 (выражение для точки A). Выходная переменная x3 перечисляет выражения для плоскостей, которым принадлежит точка A. Уровень приоритетности равен 4. Буфер результатов не предусмотрен. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Если задача x1 имеет посылку "планиметрия", то выдается единственное значение переменной x3 - однобуквенный терм "планиметрия". Заметим, что операторы "точкиплоскости", "точкаплоскости" в этом случае игнорируют терм, задающий плоскость, так что выбор его конкретного вида несущественен. Если задача не имеет указанной посылки, то переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (выражение E), и в ее списке E - пара (плоскость F). Если их не было, то они вводятся. Вводится пустой накопитель результата x6, используемый для исключения повторов. В списке F просматриваются отсутствующие в накопителе x6 выражения "плоскость(...)", у которых один из операндов равен A. Они регистрируются в накопителе x6 и выдаются в качестве результата. По окончании просмотра - переход к пункту 3.

3. Ищется адресная структура (списокпосылок E), в наборе E ищется пара (принадлежит F), в наборе F - пара (первыйтерм G). Если их не было, то они вводятся. В списке G просматриваются пары (A, H), и в списке H - утверждения "принадлежит(A M)", где выражение M имеет заголовок "плоскость". Если M не входит в список x6, то оно регистрируется в x6 и выдается в качестве результата.

Для проверки утверждения "общаяплоскость(A B)", означающего, что прямые A, B лежат в одной плоскости, служит оператор "общаяплоскость(x1 x2 x3)". Здесь x1 - задача, x2 и x3 - выражения для прямых A, B. Уровень приоритетности равен 3. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Если задача x1 имеет посылку "планиметрия", то выход по "истина". Иначе - переход к пункту 2.

2. При помощи оператора "точкипрямой" перечисляются имеющие различные обозначения точки C, D прямой A, а также точки E, F прямой B. Рассматривается результат M обработки нормализатором "нормплоскость"выражения "плоскость(CDE)". При помощи оператора "точкаплоскости"проверяется принадлежность точки F плоскости M. При помощи проверочного оператора "разныеточки" устанавливается различие точек C, D и E, F. После этого - выход по "истина".

Для обработки утверждения $A \in$ плоскость(DEF) & $B \in$ плоскость(DEF) & $C \in$ плоскость(DEF) создан оператор "общплоскость(x1 x2 x3 x4 x5)". Здесь x1 - задача; x2,x3 и x4 - выражения для точек A, B, C; x5 - выходная переменная, перечисляющая выражения для плоскости DEF. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x6. При помощи оператора "плоскоститочки" перечисляются плоскости P, проходящие через точку A. При помощи оператора "точкаплоскости" проверяется принадлежность этой плоскости точек B, C. Выражение P регистрируется в накопителе x6 и выдается в качестве результата. По окончании перечисления накопитель x6 регистрируется в комментарии "Буфер".

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "отрезок"

Для обработки утверждения "$A \in$ отрезок(BC)" созданы операторы "точкиотрезка" (перечисление точек отрезка), "точкаотрезка" (проверка принадлежности точки отрезку), "конецотрезка" (определение противоположного конца отрезка, если заданы точка отрезка и первый конец). Заметим, что эти идентифицирующие операторы сами по себе весьма слабые; чтобы эффективно определять взаимное расположение точек на прямой с их помощью, необходимо заблаговременно в явном виде выводить следствия - утверждения о принадлежности или непринадлежности точек отрезкам и интервалам.

Оператор "точкиотрезка(x1 x2 x3 x4)" имеет входными данными задачу x1 и выражения x2,x3 для точек B, C. Выходная переменная x4 перечисляет выражения для точек отрезка BC. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищется адресная структура (списокпосылок D), в наборе D ищется пара (принадлежит E), в наборе E - пара (второйсимвол F). Если их не было, то они вводятся. При помощи набора F составляется список x8 всех посылок вида "принадлежит(... отрезок(...))", а также список x9 всех посылок вида "принадлежит(... интервал(...))". Вводится накопитель результата x10, в который сразу же заносятся точки B, C. Однако, в качестве результатов они будут выдаваться лишь в конце перечисления. Далее - переход к пункту 3.

3. Просматриваются утверждения "принадлежит(P отрезок(MN))" и "принадлежит(P интервал(MN))", имеющиеся в списках x8 и x9. Если точки M, N входят в список x10, а точка P не входит, то она регистрируется в накопителе x10 и выдается в качестве результата. Если точки M, N не входят в накопитель x10, но одна из них равна B либо C, то рассматриваются оставшаяся точка K и отличный от M, N конец Q отрезка BC. Если в списке x8 имеется утверждение "принадлежит(Q отрезок(PK))", причем точка P не входит в накопитель x10, то она регистрируется в этом накопителе и выдается в качестве результата. В обоих случаях после выдачи результата - откат к началу данного пункта. По исчерпании возможностей - переход к пункту 4.

4. В качестве результатов выдаются точки B, C. Затем накопитель x10 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "точкаотрезка(x1 x2 x3 x4)" имеет входными данными задачу x1, выражение x2 для точки A и выражения x3, x4 для точек B, C. Проверяется принадлежность точки A отрезку BC. Уровень приоритетности равен 1. Буфер результатов не используется. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Если A совпадает с B либо C, то выход по "истина". Иначе - переход к пункту 2.

2. При помощи оператора "точкиотрезка" перечисляются точки отрезка BC. Если хотя бы одна из них равна A, то выход по "истина". Иначе - выход по "ложь".

Оператор "конецотрезка(x1 x2 x3 x4)" имеет входными данными задачу x1 и выражения x2, x3 для точек B,A. Выходная переменная x4 перечисляет выражения для таких точек C, что A принадлежит отрезку BC. Уровень приоритетности равен 2. Буфер результатов не используется. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищется адресная структура (списокпосылок D), в наборе D ищется пара (принадлежит E), в наборе E - пара (второйсимвол F). Если их не было, то они вводятся. При помощи набора F составляется список x8 всех посылок вида "принадлежит(... отрезок(...))", а также список x9 всех посылок вида "принадлежит(... интервал(...))". Вводится накопитель результата x10, в который сразу же заносится точка A. Однако, в качестве результата она будет выдана лишь в конце перечисления. Далее - переход к пункту 3.

3. Просматриваются утверждения "принадлежит(P отрезок(MN))" и "принадлежит(P интервал(MN))", имеющиеся в списках x8 и x9. Если B совпадает с M либо с N, причем P входит в накопитель x10, то отличная от B точка пары M, N регистрируется в накопителе x10 и выдается в качестве результата. Если точки M, N отличны от B, P совпадает с A, утверждение "принадлежит(B отрезок(AM))" входит в список x8, причем точка N еще не занесена в накопитель x10, то она заносится в этот накопитель и выдается в качестве результата. В обоих случаях после выдачи результата - откат к началу данного пункта. По исчерпании возможностей - переход к пункту 4.

4. Точка A выдается в качестве результата. Затем накопитель x10 регистрируется в комментарии "Буфер".

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "расстояние"

Для обработки утверждения "актив(расстояние(AB))", означающего, что расстояние между точками A, B введено в рассмотрение, используются операторы "расстояния" и "смрасстояние". Первый из них перечисляет точки B, для которых в задаче упоминается расстояние до точки A, второй - проверяет, что в задаче упоминается расстояние от A до B.

Оператор "расстояния(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для точки A. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для точки B. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. В случае неудачи - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (выражение C), и в ее списке C - пара (расстояние D). Если их не было, то они вводятся. Вводится пустой накопитель результата x6. Просматриваются выражения списка D имеющие (с точностью до перестановки операндов) вид "расстояние(A P)". Точка P заносится в список x6 и выдается в качестве результата. По окончании просмотра - регистрация накопителя x6 в комментарии "Буфер".

Оператор "смрасстояние(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражения x2, x3 для точек A, B. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора проверяет наличие в списке посылок задачи x1 утверждения "актив(расстояние(AB))". предварительно операнды A, B лексикографически переупорядочиваются.

Утверждение "равно(расстояние(AB) расстояние(CD))" обрабатывается оператором "равныедлины(x1 x2 x3 x4 x5)". Здесь x1 - задача, x2 и x3 - выражения для точек A, C. Выходные переменные x4, x5 перечисляют выражения для точек B, D. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищется адресная структура (списокпосылок E), в наборе E ищется пара (равно F), в наборе F - пара (первыйсимвол G). Если их не было, то они вводятся. Вводится пустой накопитель результата x9. В списке G находится пара (расстояние H). В списке H просматриваются утверждения "равно(расстояние(PQ)K)", у которых операнд P либо Q равен A либо C. Без ограничения общности далее считаем, что это операнд P и что он равен A. Перечисляются выражения "расстояние(MN)", равные K, либо такие, что в списке H имеется утверждение "равно(расстояние(MN)K)". Проверяется, что один из операндов M, N равен C. Без ограничения общности далее считаем, что это операнд M. Пара (Q, N) регистрируется в накопителе x9 и выдается в качестве результата. Если $A = C$ и $Q \neq N$, то дополнительно пара (N, Q) регистрируется в буфере и выдается в качестве результата. По оконачании перечисляения накопитель x9 регистрируется в комментарии "Буфер".

Утверждение "равно(расстояние(A C)расстояние(B C))", хотя и является частным случаем предыдущего утверждения, обрабатывается своими операторами "равноудалена", "равноудалены", имеющими уровень приоритетности 0. Первый из этих операторов по точкам A, B перечисляет точки C, второй - проверяет равноудаленность точек A, B от точки C.

Оператор "равноудалена(x1 x2 x3 x4)" имеет входными данными задачу x1 и выражения x2, x3 для точек A, B. Выходная переменная x4 перечисляет точки C. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x6. Просматриваются посылки P задачи, имеющие вид "равно(расстояние(...)...)", причем такие, что один из операндов S данного равенства имеет вид "расстояние(A Q)" (с точностью до перестановки операндов A, Q). Проверяется, что Q не входит в x6. Если S - первый операнд, то рассматривается второй операнд T, и в списке посылок ищется утверждение вида "равно(расстояние(BQ)T)". Выражение Q регистрируется в накопителе x6 и выдается в качестве результата. Если такого утверждения найти не удалось, то проверяется, не имеет ли T вид "расстояние(BQ)". Если имеет, то тоже выражение Q регистрируется в x6 и выдается в качестве результата. Наконец, если S - второй операнд, то проверяется, не имеет ли первый операнд равенства вид "расстояние(BQ)", и далее - как выше. По окончании перечисления предпринимается регистрация накопителя x6 в комментарии "Буфер".

Оператор "равноудалены(x1 x2 x3 x4)" имеет входными данными задачу x1 и выражения x2,x3,x4 для точек A, B, C. Его программа обращается к оператору "равноудалена" для перечисления точек, равноудаленных от A, B. Если среди них обнаруживается точка C, то выход по "истина", иначе - выход по "ложь".

Утверждение "и(равно(расстояние(AB) расстояние(BC)) принадлежит(A прямая(DE)) принадлежит(B прямая(DE)) принадлежит(C прямая(DE)))" обрабатывается оператором "двойнаядлина(x1 x2 x3 x4 x5)". Здесь x1 - задача, x2 - выражение для точки A. Выходные переменные x3,x4,x5 перечисляют, соответственно, выражения для точек B, C и прямой DE. Уровень приоритетности равен 0. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x7, и предпринимается просмотр всех посылок вида "равно(расстояние(...)...))", причем таких, что один из операндов S данного равенства имеет вид "расстояние(A B)" (с точностью до перестановки операндов A, B). Если S - первый операнд, то рассматривается второй операнд T, и в списке посылок ищется утверждение вида "равно(расстояние(BC) T)", где B отлично от A. При помощи оператора "лежатнапрямой" проверяется, что точки A, B, C лежат на одной прямой и определяется название "прямая(DE)" этой прямой. Если тройка (B, C, прямая(DE)) не входит в накопитель x7, то она регистрируется в нем и выдается в качестве результата. Если ни одной такой тройки найти не удалось, то проверяется, не имеет ли T вид "расстояние(BC)", и далее - как в предыдущем случае. Наконец, если S - второй операнд, то проверяется, что первый операнд имеет вид "расстояние(BC)", и далее - снова как в предыдущих случаях. По завершении перечисления - регистрация накопителя x7 в комментарии "Буфер".

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "угол"

Утверждение "актив(угол(ABC))" обрабатывается операторами "углывершины" и "усмугол". Первый из них перечисляет углы с вершиной B, второй - проверяет, что угол ABC уже рассматривается в задаче.

Оператор "углывершины(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для точки B. Выходные переменные x3, x4 перечисляют вершины A, C, такие, что задача имеет посылку "актив(угол(ABC))" (с точностью до перестановки A, C). Уровень приоритетности равен 2. Оператор выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (выражение D), и в ее списке D - пара (угол E). Если их не было, то они вводятся. Вводится пустой накопитель результата x7. Просматриваются выражения списка E имеющие вид "угол(ABC)". Пара (A, C) регистрируется в накопителе x7. Затем выдаются сначала результат (A,C), а затем - (C,A). По завершении перечисления - регистрация накопителя x7 в комментарии "Буфер".

Оператор "усмугол(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражения x2, x3, x4 для точек A, B, C. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора проверяет, входит ли в посылки задачи утверждение "актив(угол(ABC))". Предварительно точки A, C лексикографически переупорядочиваются.

Обычно теорема приема перед компиляцией преобразуется так, что упоминаемый в ней угол ABC идентифицируется не непосредственно, а с некоторым явно присутствующим в задаче углом DBE, на лучах BD, BE которого лежат точки A, C. Это существенным образом обобщает прием. В данной ситуации приходится обрабатывать утверждения вида "и(актив(угол(DBE)) принадлежит(D P) принадлежит(E Q) точкалуча(BAD) точкалуча(BCE))". Здесь P, Q - идентифицированные предварительно прямые BA, BC. Указанное утверждение обрабатывается оператором "имяугла(x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8)", где x1 - задача; x2, x3, x4 - выражения для точек B, A, C; x5 и x6 - выражения для прямых BA, BC. Выходные переменные x7, x8 перечисляют выражения для точек D, E. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x9. При помощи оператора "углывершины" перечисляются упоминаемые в задаче углы DBE с вершиной B. При помощи операторов "точкапрямой" проверяется, что точки D, E лежат на прямых BA. BC. При помощи операторов "точкалуча" проверяется, что точка D лежит на луче BA, а точка E - на луче BC. После этого пара (D, E) регистрируется в накопителе x9 и выдается в качестве результата. По окончании перечисления - регистрация накопителя x9 в комментарии "Буфер".

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "параллельны"

Утверждение "параллельны(прямая(AB)прямая(CD))" обрабатывается операторами "параллелпрямые" (перечисление прямых, параллельных данной) и "усмпараллельны" (проверка параллельности двух прямых). Напомним, что прямая считается параллельной самой себе.

Оператор "параллелпрямые(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 вида "прямая(AB)". Выходная переменная x3 перечисляет выражения "прямая(CD)" для прямых, параллельных AB. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. В качестве значения переменной x3 выдается выражение "прямая(AB)", и переход к пункту 2.

2. Предпринимается попытка усмотреть оставшиеся результаты в буфере. При неудаче - переход к пункту 3.

3. Ищутся адресная структура (списокпосылок E),и в наборе E - пара (параллельны F). Если их не было, то они вводятся. Вводится пустой накопитель результата x6. Переменной x7 присваивается выражение "прямая(AB)".

   Если имеется несколько прямых, параллельных прямой AB, то утверждения о параллельности обычно стандартизируются таким образом, что выделяется некоторая "главная" прямая P данного списка, и указываются утверждения "параллельны(P Q)" для всех остальных прямых Q. Переменная x7 вводится для того, чтобы ей оказалось переприсвоено выражение для "главной" прямой P.

В списке F ищется утверждение "параллельны(прямая(CD)прямая(AB))". Если оно найдено, то x7 заменяется на выражение "прямая(CD)", причем последнее выражение регистрируется в накопителе x6 и выдается в качестве результата. В обоих случаях далее - переход к пункту 4.

4. Просматриваются утверждения "параллельны(... прямая(MN))" списка F, у которых первый операнд равен x7. Если выражение "прямая(MN)" отлично от выражения "прямая(AB)", то оно регистрируется в накопителе x6 и выдается в качестве результата. По окончании перечисления накопитель x6 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "усмпараллельны(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражения x2, x3 для прямых AB, CD. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора обращается к оператору "параллелпрямые", перечисляющему прямые, параллельные прямой AB. Если среди них встречается прямая CD, то выход по "истина", иначе - выход по "ложь".

Если нужно найти пару параллельных прямых, проходящих через заданные точки, то рассматривается утверждение "и(параллельны(прямая(AB)прямая(CD)) принадлежит(M прямая (AB))принадлежит(N прямая(CD)))". Оно обрабатывается оператором "параллели(x1 x2 x3 x4 x5)". Здесь x1 - задача, x2 и x3 - выражения для точек M, N. выходные переменные x4,x5 перечисляют выражения для параллельных прямых AB, CD, первая из которых проходит через точку M, а вторая - через точку N. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x6. При помощи оператора "прямыеточки" перечисляются прямые AB, проходящие через точку M. С помощью оператора "параллелпрямые" перечисляются прямые CD, параллельные AB и отличные от AB. При помощи оператора "точкапрямой" проверяется, что N принадлежит прямой CD. Результирующая пара (прямая(AB, "прямая(CD)" заносится в накопитель x6 и выдается в качестве результата. Чтобы учесть одновременно как случай входных данных M, N, так и случай входных данных N, M, в накопителе x6 используется лексикографическое переупорядочение. По окончании перечисления накопитель x6 регистрируется в комментарии "Буфер".

Утверждение "параллельны(плоскость(ABC)плоскость(DEF))" обрабатывается операторами "параллелплоскости" и "усмпараллплоскости". Первый из них перечисляет плоскости, параллельные данной, второй - проверяет параллельность заданных плоскостей.

Оператор "параллелплоскости(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для плоскости ABC. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для плоскостей DEF, равных плоскости ABC либо параллельных ей. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора аналогична программе "параллелпрямые". Она выполняет следующие действия:

1. В качестве результата выдается плоскость ABC, и переход к пункту 2.

2. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 3.

3. Ищутся адресная структура (списокпосылок G),и в наборе G - пара (параллельны H). Если их не было, то они вводятся. Вводится пустой накопитель результата x6. Переменной x7 присваивается выражение "поскость(ABC)". В списке H ищется утверждение "параллельны(плоскость(DEF)плоскость(ABC))". Если оно найдено, то x7 заменяется на выражение "плоскость(DEF)", причем последнее выражение регистрируется в накопителе x6 и выдается в качестве результата. В обоих случаях далее - переход к пункту 4.

4. Просматриваются утверждения "параллельны(... плоскость(KMN))" списка H, у которых первый операнд равен x7. Если выражение "плоскость(KMN)" отлично от выражения "пплоскость(ABC)", то оно регистрируется в накопителе x6 и выдается в качестве результата. По окончании перечисления накопитель x6 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "усмпараллплоскости(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражения x2, x3 для плоскостей ABC, DEF. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора обращается к оператору "параллелплоскости", перечисляющему плоскости, параллельные плоскости ABC. Если среди них встречается плоскость DEF, то выход по "истина", иначе - выход по "ложь".

Утверждение "параллельны(прямая(AB) плоскость(CDE))" обрабатывается операторами "паралпрямплоскости", "паралпрямплоск". Первый из них перечисляет прямые AB, параллельные плоскости CDE, второй - проверяет параллельность прямой AB плоскости CDE.

Оператор "паралпрямплоскости(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для плоскости CDE. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для прямых AB, параллельных плоскости CDE. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок F),и в наборе F - пары (параллельны G), (принадлежит H). В наборе H ищется пара (второйтерм P). Если этих объектов не было, то они вводятся. При помощи списка P переменной x8 присваивается список всех посылок вида "принадлежит(... плоскость(CDE))". Затем - переход к пункту 3.

3. Вводится пустой накопитель результата x9. В списке G просматриваются утверждения вида "параллельны(прямая(MN) плоскость(CDE))". Если выражение "прямая(MN)" не входит в накопитель x9, то оно регистрируется в накопителе и выдается в качестве результата. Кроме того, в списке G просматриваются утверждения вида "параллельны(прямая(...)прямая(...))". Если для одной из параллельных прямых усматривается, что ее опорные точки, согласно списку x8, принадлежат плоскости CDE, причем другая прямая не входит в накопитель x9, то она регистрируется в x9 и выдается в качестве результата. По окончании просмотров - переход к пункту 4.

4. Вводится пустой накопитель x10 дополнительных результатов. Просматривается накопитель x9, и для каждой его прямой MN ри помощи списка G просматриваются прямые, параллельные MN и еще не зарегистрированные в x9, x10. Они регистрируются в накопителе x10 и выдаются в качестве результата. По окончании просмотра объединение накопителей x9, x10 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "паралпрямплоск(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражения x2, x3 для прямой AB и плоскости CDE. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора обращается к оператору "паралпрямплоскости", перечисляющему прямые, параллельные плоскости CDE. Если среди них встречается прямая AB, то выход по "истина", иначе - выход по "ложь".

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "перпендикулярно"

Утверждение "перпендикулярно(прямая(AB)прямая(CD))" обрабатывается операторами "перпендикуляры" (перечисление прямых, перпендикулярных данной), "перпендикулярны" (проверка перпендикулярности двух прямых) и "перпендикпрямые" (перечисление пар прямых AB, CD, параллельных двум заданным перпендикулярным прямым).

Оператор "перпендикуляры(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для прямой AB. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для прямых CD, перпендикулярных прямой AB. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок E),и в наборе E - пара (параллельны F). Если их не было, то они вводятся. Если в списке F имеется утверждение "параллельны(прямая(MN)прямая(AB))", то x2 заменяется на выражение "прямая(MN)". Это означает, что обозначение AB не было "главным" обозначением для группы попарно параллельных прямых, и теперь оно заменено на "главное" обозначение MN. Далее - переход к пункту 3.

3. В набор E ищется пара (перпендикулярно G). Если ее не было, то она вводится. Вводится пустой накопитель результата x7. Просматриваются утверждения списка G, имеющие вид "перпендикулярно(x2 прямая(CD))" (с точностью до перестановки операндов). Выражение "прямая(CD)" регистрируется в накопителе x7 и выдается в качестве результата. Кроме того, просматриваются всевозможные утверждения списка F, имеющие вид "параллельны(прямая(CD)прямая(PQ))". Выражение "прямая(PQ)" тоже регистрируется в накопителе x7 и выдается в качестве результата. Наконец, просматриваются утверждения списка G, имеющие вид "перпендикулярно(x2 плоскость(PQR))". Если в списке F имеется утверждение вида "параллельны(плоскость(PQR)прямая(CD))", то выражение "прямая(CD)" регистрируется в x7 и выдается в качестве результата. По завершении перечисления - регистрация накопителя x7 в комментарии "Буфер".

Оператор "перпендикулярны(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражения x2,x3 для прямых AB, CD. Он истинен, если удается усмотреть перпендикулярность данных прямых, в противном случае - ложен. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок E),и в наборе E - пара (параллельны F). Если их не было, то они вводятся. Если в списке F имеется утверждение "параллельны(прямая(MN)прямая(AB))", то x2 заменяется на выражение "прямая(MN)". Если в F имеется утверждение "параллельны(прямая(PQ) прямая(CD))", то x3 заменяется на выражение "прямая(PQ)". Затем - переход к пункту 3.

3. В набор E ищется пара (перпендикулярно G). Если ее не было, то она вводится. Если в G имеется утверждение вида "перпендикулярно(x2 x3)" (с точностью до перестановки операндов), то выход по значению "истина". Иначе - выход по значению "ложь".

Оператор "перпендикпрямые(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными задачу x1 и вхождение x2 утверждения "перпендикулярно(прямая(MN)прямая(PQ))" в посылку задачи x1. Выходные переменные x3, x4 перечисляют выражения для прямых AB, CD, параллельных (включая случай равенства) прямым MN и PQ. Допускаются перестановки, т.е. AB может быть параллельной как MN, так и PQ. Такой оператор оказывается необходим, если антецедент "перпендикулярно(прямая(AB) прямая(CD))" является точкой привязки приема. В этом случае попытка применения приема начинается с усмотрения посылки "перпендикулярно(прямая(MN) прямая(PQ))". Затем сразу же применяется оператор "перпендикпрямые", который и определяет фактически используемые версии прямых AB, CD. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Проверяется, что вхождение x2 корневое. Затем поочередно в качестве результатов выдаются пары прямых MN, PQ и PQ, MN. Далее - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок E),и в наборе E - пара (параллельны F). Если их не было, то они вводятся. В списке F просматриваются утверждения вида "параллельны(прямая(PQ)прямая(CD))". Поочередно в качестве результатов выдаются пары прямых PQ, CD и CD, PQ. Далее, при фиксации прямой CD, в списке F просматриваются утверждения вида "параллельны(прямая(MN)прямая(AB))". Поочередно в качестве результатов выдаются пары прямых AB, CD и CD, AB. По окончании просмотра - переход к пункту 3.

3. В списке F просматриваются утверждения вида "параллельны(прямая(MN) прямая(AB))". Поочередно в качестве результатов выдаются пары прямых AB, MN и MN, AB.

Утверждение "и(перпендикулярно(прямая(AB)прямая(CD))принадлежит(E прямая(AB))принадлежит(E прямая(CD)))" обрабатывается оператором "прямыеуглы", аналогичным оператору "перпендикпрямые". В дополнение к паре перпендикулярных прямых, здесь идентифицируется также вершина E прямого угла.

Входными данными оператора "прямыеуглы(x1 x2 x3 x4 x5)" служат задача x1 и вхождение x2 утверждения "перпендикулярно(прямая(MN)прямая(PQ))" в посылку задачи. Выходные переменные x3, x4 перечисляют пары прямых AB, CD, параллельных прямым MN, PQ (с точностью до перестановки). При этом переменная x5 перечисляет общие точки данных прямых. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x8. При помощи операторов "параллельпрямые" перечисляются прямые AB, CD, параллельные, соответственно, MN и PQ. При помощи оператора "точкипрямой" перечисляются точки E прямой CD, и при помощи оператора "точкапрямой" отбираются те их них, которые принадлежат прямой AB. После этого тройка (прямая(AB), прямая(CD), E) регистрируется в накопителе x8 и выдается в качестве результата. В качестве результата выдается также тройка с измененным порядком прямых. По окончании перечисления накопитель x8 регистрируется в комментарии "Буфер".

Утверждение "перпендикулярно(прямая(AB)плоскость(CDE))" обрабатывается операторами "Перпендикуляры" (перечисление прямых, перпендикулярынх плоскости), "перпендикплоскости" (перечисление плоскостей, перпендикулярных прямой), "Перпендикулярны" (проверка перпендикулярности прямой и плоскости), а также "Перпендикпрямые" (перечисление пар (прямая - плоскость), параллельных заданной паре перпендикулярных прямой и плоскости).

Оператор "Перпендикуляры(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для плоскости CDE. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для прямых AB. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок F), и в наборе F - пара (параллельны G). Если их не было, то они вводятся. Если в списке G имеется утверждение "параллельны(плоскость(PQR)плоскость(CDE))", то x2 заменяется на выражение "плоскость(PQR))". Далее - переход к пункту 3.

3. В наборе F ищется пара (перпендикулярно H). Если ее не было, то она вводится. Вводится пустой накопитель результата x7. Просматриваются утверждения списка H, имеющие вид "перпендикулярно(прямая(AB)x2)" (с точностью до перестановки операндов). Выражение "прямая(AB)" регистрируется в накопителе x7 и выдается в качестве результата. По списку G определяются прямые, параллельные прямой AB, которые тоже регистрируются в накопителе x7 и выдаются в качестве результатов. По окончании перечисления накопитель x7 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "перпендикплоскости(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для прямой AB. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для плоскостей CDE. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок F), и в наборе F - пара (параллельны G). Если их не было, то они вводятся. Если в списке G имеется утверждение "параллельны(прямая(PQ)прямая(AB))", то x2 заменяется на выражение "прямая(PQ))". Далее - переход к пункту 3.

3. В наборе F ищется пара (перпендикулярно H). Если ее не было, то она вводится. Вводится пустой накопитель результата x7. Просматриваются утверждения списка H, имеющие вид "перпендикулярно(плоскость(CDE)x2)" (с точностью до перестановки операндов). Выражение "плоскость(CDE)" регистрируется в накопителе x7 и выдается в качестве результата. По списку G определяются плоскости, параллельные плоскости CDE, которые тоже регистрируются в накопителе x7 и выдаются в качестве результатов. По окончании перечисления накопитель x7 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "Перпендикулярны(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражения x2,x3 для прямой AB и плоскости CDE. Если удается усмотреть их перпендикулярность, то оператор истинен, иначе - ложен. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок F), и в наборе F - пара (параллельны G). Если их не было, то они вводятся. Если в списке G имеется утверждение "параллельны(прямая(PQ)прямая(AB))", то x2 заменяется на выражение "прямая(PQ))". Если в этом списке имеется утверждение "параллельны(плоскость(KMN)плоскость(CDE))", то x3 заменяется на выражение "плоскость(KMN)". Далее - переход к пункту 3.

3. В наборе F ищется пара (перпендикулярно H). Если ее не было, то она вводится. Если в списке H имеется утверждение "перпендикулярно(x2 x3)" (с точностью до перестановки операндов), то выход по "истина", иначе - выход по "ложь". В обоих случаях результат регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "Перпендикпрямые(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными задачу x1 и корневое вхождение x2 в посылку "перпендикулярно(прямая(PQ)плоскость(KMN))". Выходные переменные x3 и x4 перечисляют, соответственно, выражения для прямой AB и плоскости CDE параллельных (либо равных) PQ и KMN. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. В качестве результатов выдается прямая PQ и плоскость KMN. Затем - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок F), и в наборе F - пара (параллельны G). Если их не было, то они вводятся. Просматриваются утверждения U списка G, имеющие вид "параллельны(плоскость(KMN)плоскость(CDE))". Пара (прямая(PQ), плоскость(CDE)) выдается в качестве результата. При

фиксированном U просматриваются утверждения списка G, имеющие вид "параллельны(прямая(PQ)прямая(AB))", и пары (прямая(AB), плоскость(CDE)) выдаются в качестве результатов. По окончании перечисления - переход к пункту 3.

3. Просматриваются утверждения списка G, имеющие вид "параллельны(прямая(PQ)прямая(AB))". Пары (прямая(AB), плоскость(KMN)) выдаются в качестве результатов.

Если требуется идентифицировать в точке привязки не только пару перпендикулярных прямой и плоскости, но и их общую точку, то рассматривается утверждение "и(перпендикулярно(прямая(AB)плоскость(CDE))принадлежит(F прямая(AB))принадлежит(F плоскость(CDE)))". Это утверждение обрабатывается оператором "Прямыеуглы(x1 x2 x3 x4 x5)". Здесь x1 - задача, x2 - вхождение корня посылки "перпендикулярно(прямая(PQ)плоскость(KMN))". Выходные переменные x3, x4, x5 перечисляют, соответственно, выражения для прямой AB, плоскости CDE и точки F. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Вводится пустой накопитель результата x10. С помощью операторов "параллелпрямые", "параллелплоскости" перечисляются прямые AB и плоскости CDE, параллельные (либо равные) PQ, KMN. При помощи оператора "точкипрямой" просматриваются точки F прямой AB, и при помощи оператора "точкаплоскости" проверяется принадлежность точки F плоскости CDE. Тройка (прямая(AB), плоскость(CDE),F) регистрируется в накопителе x10 и выдается в качестве результата. По завершении перечисления накопитель x10 регистрируется в комментарии "Буфер".

Утверждение "перпендикулярны(плоскость(ABC)плоскость(DEF))" обрабатывается оператором "Перпендикплоскости(x1 x2 x3)". Здесь x1 - задача, x2 - выражение для плоскости ABC. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для плоскости DEF. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищутся адресная структура (списокпосылок G), и в наборе G - пара (параллельны H). Если их не было, то они вводятся. Если в списке H имеется утверждение "параллельны(плоскость(PQR)плоскость(ABC))", то x2 заменяется на выражение "плоскость(PQR))". Далее - переход к пункту 3.

3. В наборе G ищется пара (перпендикулярно S). Если ее не было, то она вводится. Вводится пустой накопитель результата x7. Просматриваются утверждения списка S, имеющие вид "перпендикулярно(плоскость(DEF)x2)" (с точностью до перестановки операндов). Выражение "плоскость(DEF)" регистрируется в накопителе x7 и выдается в качестве результата. По списку H определяются плоскости, параллельные плоскости DEF, которые тоже регистрируются в накопителе x7 и выдаются в качестве результатов. По окончании перечисления накопитель x7 регистрируется в комментарии "Буфер".

Идентифицирующие операторы, связанные с символом "окружность"

Для обработки утверждения "принадлежит(A окружность(BC))" созданы операторы "точкиокружности" (перечисление точек окружности), "окружноститочки" (перечисление окружностей, проходящих через заданную точку), "точкаокружности" (проверка принадлежности точки заданной окружности).

Оператор "точкиокружности(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для окружности BC. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для точек A. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. В качестве результата выдается точка C, и переход к пункту 2.

2. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 3.

3. Ищется адресная структура (списокпосылок D), в наборе D ищется пара (принадлежит E), в наборе E - пара (второйтерм F). Если их не было, то они вводятся. Создается пустой накопитель результата x8. В наборе F находится пара (окружность(BC),G). Для каждого утверждения "принадлежит(A окружность(BC))" из списка G, где A отлично от C, предпринимается регистрация выражения A в накопителе x8 и выдача его в качестве результата. По окончании просмотра - переход к пункту 4.

4. В наборе D ищется пара (описана H). Если такой пары не было, то она вводится. В списке H просматриваются утверждения вида "описана(окружность(BC)фигура(набор($M_1 \ldots M_n$)))". Каждая точка M_i, отсутствующая в накопителе x8, заносится в него и выдается в качестве результата. По окончании просмотра накопитель x8 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "окружноститочки(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для точки A. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для окружностей BC. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищется адресная структура (списокпосылок D), в наборе D ищется пара (принадлежит E), в наборе E - пара (второйсимвол F). Если их не было, то они вводятся. Создается пустой накопитель результата x7. В наборе F находится пара (окружность G). Просматриваются утверждения набора G имеющие вид "принадлежит(A окружность(BC))". Если выражение "окружность(BC)" отсутствует в накопителе x7, то оно регистрируется в нем и выдается в качестве результата. По окончании просмотра - переход к пункту 3.

3. Ищутся адресная структура (выражение H), и в ее списке H - пара (окружность K). Если их не было, то они вводятся. Просматриваются выражения списка K, имеющие вид "окружность(BA)" и не входящие в x7. Они регистрируются в накопителе x7 и выдаются в качестве результата. По окончании просмотра - переход к пункту 4.

4. В наборе D ищется пара (описана N). Если такой пары не было, то она вводится. В списке N просматриваются утверждения вида "описана(окружность(BC)фигура(набор($\ldots A \ldots$)))". Если выражение "окружность(BC)" отсутствует в накопителе x7, то оно регистрируется в нем и выдается в качестве результата. По окончании просмотра накопитель x7 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "точкаокружности(1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1, выражение x2 для точки A и выражение x3 для окружности BC. Если удается усмотреть принадлежность точки окружности, то оператор истинен, иначе - ложен. Уровень приоритетности равен 1. Программа оператора выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. При помощи оператора "точкиокружности" перечисляются точки окружности BC. Если какая-либо из них совпадает с A. то выход по "истина", иначе - выход по "ложь". В обоих случаях результат регистрируется в комментарии "Буфер".

В трехмерном случае окружность задается выражением "Окружность(BCD)", где B - центр, C - точка окружности, D - дополнительная точка, фиксирующая плоскость окружности. Для обработки утверждения "принадлежит(A Окружность(BC D))" используются операторы "точкиОкружности" (перечисление точек окружности), "Окружноститочки"(перечисление окружностей, проходящих через заданную точку), "точкаОкружности" (проверка принадлежности точки окружности).

Оператор "точкиОкружности(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для окружности. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для точек этой окружности. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора просто обращается к оператору "точкиокружности" и сразу выдает результат.

Оператор "Окружноститочки(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1 и выражение x2 для точки A. Выходная переменная x3 перечисляет выражения для окружностей BCD. Уровень приоритетности равен 2. Программа оператора аналогична программе "окружноститочки". Она выполняет следующие действия:

1. Предпринимается попытка усмотреть результат в буфере. При неудаче - переход к пункту 2.

2. Ищется адресная структура (списокпосылок E), в наборе E ищется пара (принадлежит F), в наборе F - пара (второйсимвол G). Если их не было, то они вводятся. Создается пустой накопитель результата x7. В наборе G находится пара (Окружность H). Просматриваются утверждения набора G имеющие вид "принадлежит(A Окружность(BCD))". Если выражение "Окружность(BCD)" отсутствует в накопителе x7, то оно регистрируется в нем и выдается в качестве результата. По окончании просмотра - переход к пункту 3.

3. Ищутся адресная структура (выражение J), и в ее списке J - пара (Окружность K). Если их не было, то они вводятся. Просматриваются выражения списка K, имеющие вид "Окружность(BAD)" и не входящие в x7. Они регистрируются в накопителе x7 и выдаются в качестве результата. По окончании просмотра - переход к пункту 4.

4. В наборе E ищется пара (описана N). Если такой пары не было, то она вводится. В списке N просматриваются утверждения вида "описана(Окружность(BCD) фигура(набор($\ldots A \ldots$)))". Если выражение "Окружность(BCD)" отсутствует в накопителе x7, то оно регистрируется в нем и выдается в качестве результата. По окончании просмотра накопитель x7 регистрируется в комментарии "Буфер".

Оператор "точкаОкружности(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными задачу x1, выражение x2 для точки A и выражение x3 для окружности BCD. Уровень приоритетности равен 1. Программа этого оператора обращается к оператору "точкаокружности" и сразу выдает результат.

3.4 Преобразование теоремы геометрического приема перед компиляцией

При формулировке теоремы геометрического приема прямые, окружности, углы и другие элементы обозначаются с помощью опорных точек. Обычно эти точки выбираются так, чтобы они участвовали сразу в нескольких условиях. Например, если на прямой выделена точка A, для которой рассматривается расстояние до другой точки B то прямую естественно обозначить AC. В то же время, в задаче прямая может быть обозначена через какие-то совсем другие опорные точки, и при непосредственном наложении на нее теоремы приема идентификации не произойдет из-за искусственной "связки" между точкой A и обозначением прямой. Для устранения таких связок теорема приема непосредственно перед компиляцией обрабатывается процедурой "развязка". Фактически, теорема обобщается (хотя и тривиальным образом) и оказывается способной идентифицировать значительно больший класс ситуаций.

Процедура "развязка" уже была описана в первом томе монографии при рассмотрении схемы компиляции приема сканирования задачи. Она применяется к теоремам любых приемов. Однако, изменяет она лишь теоремы геометрических приемов. Для удобства читателя мы напомним ее функционирование.

Оператор "развязка(x1 x2 x3 x4 x5)" имеет своими входными данными исходную версию теоремы приема x1, заголовок приема x2, описание приема x3. Выходной переменной x4 присваивается новая версия теоремы приема, переменной x5 - новая версия описания приема. Чтобы войти в начальную точку программы "развязка", можно использовать пункт "Компилятор ГЕНОЛОГа" - "Процедура РАЗВЯЗКА" оглавления программ.

Сначала выполняется просмотр всех не корневых и не расположенных непосредственно под заголовками "контекст" и "число" указателей идентификации вида "усм($\ldots$)". Например, таковыми могут быть вхождения фильтров вида "усм($\ldots$)" либо "не(усм($\ldots$))". Чтобы сделать процесс компиляции более единообразным, такие указатели A заменяются на "контекст(A)". Тогда они будут компилироваться как идентифицирующие термы.

После контрольной точки "прием(14)" составляется список x7 всех переменных, встречающихся в теореме приема и в термах его описания. Далее переменной x1 вместо кванторной импликации "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ Am \to A_0)$" присваивается терм "набор($A_0 A_1 \ldots A_m$)". Такое представление теоремы приема упростит ее преобразования. Переменной x9 присваивается список фильтров приема, переменной x10 - оставшаяся после отбрасывания фильтров часть описания приема. В нее входят указатели и нормализаторы.

После контрольной точки "прием(16)" располагается оператор "повторение", к которому будут происходить откаты в цикле преобразований, выполняющих развязку. Цикл основан на просмотре вхождений в теорему и в элементы описания приема. Переменная x12 имеет своим значением вхождение либо в теорему (тогда переменной x11 присваивается 0), либо в терм x11 списков x9, x10. В последнем случае вхождение должно быть расположено внутри подтерма "усм(...)". Анализируются лишь вхождения символов "прямая", "плоскость", "угол", "окружность", "круг", связанные с неоднозначностью в задании объекта через опорные точки. Если подтерм x12 обрабатывается нормализаторами, то он исключается из рассмотрения, так как предположительно не идентифицируется, а создается приемом. Исключение составляют случаи вхождений x12 непосредственно под символом "актив", не расположенных в консеквенте теоремы приема. Не рассматриваются также подтермы x12, содержащие новые переменные, выбираемые приемом при срабатывании.

Начиная с контрольной точки "прием(2)", происходит рассмотрение различных случаев развязки. В каждом подслучае переменной x13 будет присваиваться заменяющий терм для подтерма x12, а переменной x14 - набор сопровождающих его утверждений. Подтерм x12 далее обозначаем T. Выделяются следующие случаи:

1. T имеет вид "прямая(AB)" либо "плоскость(ABC)". Если существует вхождение в теорему приема либо в терм описания приема (в последнем случае - внутри подтерма "усм(...)") одной из переменных A, B, C, которое не расположено внутри экземпляра терма T либо внутри терма, обрабатываемого нормализаторами общей стандартизации "нормпрямая", "нормплоскость", то принимается решение о развязке. Выбираются новые переменные D, E, F и создается заменяющий терм R вида "прямая(DE)" либо, соответственно, "плоскость(DEF)". Создается также список сопровождающих утверждений "принадлежит($A\ R$)", "принадлежит($B\ R$)", "принадлежит($C\ R$)". Если различие точек A, B, C не усматривается из контекста, то к нему добавляются утверждения "несовп(AB)", "несовп(AC)", "несовп(BC)". Они используются для создания фильтров, отсекающих случаи совпадения обозначений соответствующих точек.

2. T имеет вид "угол(ABC)". Если существует вхождение в теорему приема либо в терм описания приема (в последнем случае - внутри подтерма "усм(...)") одной из переменных A, C, которое не расположено внутри экземпляра терма T либо внутри обрабатываемого нормализатором обозначения прямой, то принимается решение о развязке. Выбираются новые переменные D, E, F, G, P, Q, и создается заменяющий терм "угол(DBE)". Создается список сопровождающих утверждений "принадлежит(B прямая(FG))", "принадлежит(A прямая(FG))", "принадлежит(D прямая(FG))", "принадлежит(B прямая(PQ))", "принадлежит(C прямая(PQ))", "принадлежит(E прямая(PQ))", "точкалуча($B\ D\ A$)", "точкалуча($B\ E\ C$)". Если прием имеет указатель "нормугол(угол(ABC)", означающий, что при идентификации несущественна ориентация лучей угла, то последние два сопровождающих утверждения отбрасываются.

3. T имеет вид "окружность(AB)" либо "круг(AB)". Если существует вхождение переменной B в теорему приема либо в терм описание приема (в последнем случае - внутри подтерма "усм(...)"), не расположенное внутри экземпляра терма T либо внутри обрабатываемого нормализатором подтерма, то принимается решение о развязке. Выбирается новая переменная C и создается заменяющий

терм R вида "окружность(AC)" либо, соответственно, "круг(AC)". Создается сопровождающее утверждение "принадлежит($B\ R$)".

После определения заменяющего терма x13 и списка x14 сопровождающих утверждений - откат к переходу через оператор "ветвь 3", расположенный перед контрольной точкой "прием(2)".

Здесь проверяется, что развязка имела место. Если текущее вхождение x12 расположено внутри подтерма "контекст(...)" либо "число(...)" некоторого терма описания приема, то переход через "иначе 1". В противном случае выполняется замена на x13 всех вхождений терма T в теорему, в фильтры и в указатели приема.

Если терм T имел вид "угол(ABC)", то одновременно с переобозначением угла переобозначаются прямые, соответствующие его сторонам. Переобозначение распространяется на теорему приема, фильтры и указатели. После него проверяется, входят ли переменные A, C в теорему и описание приема. Если не входят, то из x14 исключаются все утверждения с соответствующей переменной.

Наконец, список фильтров x9 пополняется термами "усм(A)" для всех утверждений A списка x14. Затем - откат к повторному просмотру вхождений x12.

Если имел место указанный выше переход через "иначе 1", то переменной x15 присваивается вхождение внешнего терма "контекст(...)" либо "число(...)", а переменной x16 - набор операндов этого терма. Предпринимается замена в термах списка x16 всех вхождений терма T на x13. Исключение составляют фрагменты "терм(...)", выделяющие создаваемые новые копии термов. Если T - угол, то, как и выше, выполняется сопутствующее переобозначение прямых, являющихся сторонами угла. После преобразования термов списка x16 к ним присоединяются утверждения "усм(A)" для всех A из x14. Наконец, старый вариант содержащего x15 фильтра либо указателя заменяется на новый, и откат к повторному просмотру вхождений x12.

По завершении просмотра всех вхождений x12 - переход через оператор "иначе 2" (см. фрагмент с контрольной точкой "прием(16)"). Здесь переменной x12 присваивается консеквент преобразованной теоремы, переменной x13 - список ее антецедентов. Находятся все фильтры вида "усм(A)", и утверждения A присоединяются к списку x13. К списку x10 добавляется указатель "усм(...)", ссылающийся на добавленнные антецеденты, и определяется список x16 фильтров, полученных при отбрасывании элементов "усм(...)". Далее - переход через "ветвь 1".

Здесь предпринимается удаление избыточных элементов, введенных при развязке. Сначала осуществляется просмотр антецедентов x19, имеющих вид "актив(A)" и выделенных указателем "усм(...)", у которых выражение A встречается в другом антецеденте, также выделенном указателем "усм(...)". Такие антецеденты x19 исключаются; соответственно корректируется нумерация антецедентов в указателях приема.

Затем - переход через "иначе 2", где выполняется просмотр фильтров приема, содержащих идентифицирующие термы "усм(... актив(A) ...)", расположенные внутри подтермов "контекст(...)" либо "число(...)". Если терм A встречается внутри антецедента, выделенного указателем "усм(...)", либо рассматриваемое вхождение идентифицирующего терма "усм(...)" расположено внутри подтерма "контекст(...)" или "число(...)", имеющего другой содержащий A идентифицирующий терм "усм(...)", то происходит исключение элемента "актив(A)" из первого идентифицирующего терма.

Далее - переход через "иначе 1". Здесь устраняются избыточные обозначения для одной и той же прямой. Если имеются антецеденты x19, x21 вида "принадлежит(A

прямая(EF))" и "принадлежит(B прямая(EF))", выделенные указателями "усм(...)"; имеется антецедент "несовп(A B)"; имеются два других антецедента "принадлежит(A прямая(GH))", "принадлежит(B прямая(GH))", причем выражение "прямая(GH)" лексикографически предшествует выражению "прямая(EF)", то выполняется замена в приеме всех вхождений "прямая(EF)" на "прямая(GH)". Антецеденты x19, x21 удаляются, и корректируется нумерация антецедентов в оставшихся указателях.

По завершении перечисленных действий - откат к оператору "ветвь 1" перед меткой "прием(1 1)". Здесь переменной x17 присваивается результат сборки кванторной импликации для теоремы приема (она создается по списку антецедентов x13 и ранее выделенному консеквенту x12); создается скорректированное описание приема x18, и выдается результат.

3.5 Атомарные численные выражения и связанные с ними фильтры

В геометрии, физике и прочих разделах встречаются численные параметры нечисленных объектов: длина, площадь, масса, и т.п. Решение задачи обычно имеет характер вывода соотношений для таких численных параметров, причем важно бывает уметь отделить существенные параметры, связанные с искомыми величинами прямо либо косвенно, от несущественных, рассмотрение которых лежит в стороне от правильного пути решения. Для оценки степени существенности численных параметров приходится использовать множество различных средств. В этом разделе начнем с рассмотрения простейших таких средств - непосредственно проверяемых фильтров.

Прежде всего, введем терминологию, используемую в дальнейшем при работе с численными параметрами. Если задан некоторый список утверждений A, определяющих текущий контекст, то числовыми атомами относительно A назовем, во-первых, переменные, принимающие численные значения, и, во-вторых, принимающие численные значения выражения $f(t_1 \dots t_n)$, у которых хотя бы один из операндов $t_1, \dots, t_n$ нечисловой. Числовые атомы первого типа называем вырожденными, второго типа - невырожденными. Примерами невырожденных числовых атомов в геометрии служат выражения "расстояние(AB)", "угол(ABC)", "площадь(A)", и т.п.

Обычно перечисление числовых атомов, содержащихся в заданном терме t, выполняется оператором "числовойатом(x1 x2 x3)". Здесь x1 - терм t, x2 - список утверждений, определяющий контекст. Выходная переменная x3 перечисляет без повторений неконстантные числовые атомы (как вырожденные, так и невырожденные), входящие в x1.

В фильтрах приемов, заданных на ГЕНОЛОГе, для обращения к перечислению числовых атомов a терма t, используется идентифицирующий терм "числовойатом(t a)". Компилятор реализует его с помощью одноименного оператора.

Таким образом, остается лишь обеспечить ГЕНОЛОГ некоторым запасом предикатов, проверяющих различные свойства числовых атомов, упоминаемых в теореме. Простейшие предикаты - "усм(актив(a))" и "известно(терм(a))" - уже имеются. Первый из них проверяет, что числовой атом a встречается в задаче, второй - что его значение известно.

Указатель "терм" здесь означает, что проверка отсутствия неизвестных будет выполняться не для самого выражения a (в невырожденных случаях оно задано через заведомо неизвестные нечисловые объекты, например, точки), а для результата обработки его указанными в приеме нормализаторами, т.е., собственно, для значения этого атома, усматриваемого в контексте. В случае переменной a указатель "терм" опускается. Для числовых атомов "расстояние(...)", "угол(...)", "площадь(...)" обычно используются нормализаторы общей стандартизации "нормрасстояние", "нормугол", "нормплощадь".

Обычно характеризация числовых атомов требуется в задаче на исследование, являющейся блоком анализа внешней задачи на вычисление. Последняя имеет тип "описать", и ее неизвестные нужно выразить через заданные целью (известно ...) известные параметры. К числу неизвестных блока анализа, помимо неизвестных самой задачи на вычисление, относятся также все переменные посылок, не учтенные в цели (известно ...). Таким образом, в геометрических задачах неизвестными окажутся переменные, обозначающие точки чертежа. В данной ситуации важную роль играют числовые атомы, выраженные через неизвестные только внешней задачи. В геометрических задачах это численные неизвестные. Получая соотношение для них, мы фактически делаем шаг от геометрии к алгебре. Чтобы распознавать такие атомы, введен оператор "внешнеизв(x1)". В качестве значения переменной x1 ему передается выражение для числового атома, уже найденное в задаче; обычно - результат обработки числового атома нормализатором общей стандартизации. Если в посылках имеется равенство для числового атома, то x1 станет равно его правой части, иначе - (кроме редких особых случаев) значением x1 будет само название атома. Оператор "внешнеизв" истинен в следующих двух случаях:

1. Текущая задача имеет тип "исследовать". Выражение x1 содержит ее неизвестные, причем каждая такая неизвестная является также неизвестной внешней задачи на описание.

2. Текущая задача имеет тип "доказать". Выражение x1 неконстантное. Каждая его переменная, не указанная в комментарии (известно A) к текущей задаче, указана в комментарии (неизвестные A) к данной задаче. Заметим, что комментарии (известно ...), (неизвестные ...) вводятся по ходу решения задачи на доказательство. Они направляют процесс выражения одних переменных задачи через другие.

Предикат "внешнеизв(t)" можно использовать непосредственно в фильтрах приема ГЕНОЛОГа; компилятор реализует его с помощью оператора "внешнеизв".

Помимо числовых атомов, непосредственно выраженных через неизвестные внешней задачи, важную роль играют числовые атомы, связанные с неизвестными внешней задачи косвенно, через цепочку уже выведенных соотношений. Для характеризации таких атомов созданы операторы "неизв(x1)" и "Неизв(x1)". Как и выше, значением x1 служит результат обработки числового атома указанными в приеме нормализаторами. Оператор "неизв" истинен в следующих случаях:

1. Текущая задача имеет тип "исследовать", причем выражение x1 содержит хотя бы одну неизвестную внешней задачи на описание.

2. Текущая задача имеет тип "исследовать". Находятся все подвыражения выражения x1, заголовки которых принадлежат списку "расстояние", "расстмежду", "высота", "площадь", "угол", "длина", пополненному рядом понятий из физики и химии. В этом списке фигурируют также некоторые нечисленные объекты, например, "вектор". Таким образом, фильтр "неизв" оказывается применим для характеризации не только числовых, но и некоторых нечисловых атомарных объектов. Хотя бы одно из найденных подвыражений должно входить

в уравнение текущей задачи, содержащее также неизвестную внешней задачи на описание.

3. Текущая задача имеет тип "исследовать", причем x1 - переменная, для которой имеется посылка "число(x1)". Существует уравнение, содержащее как переменную x1, так и неизвестную внешней задачи на описание.

4. Текущая задача имеет тип "доказать", причем выражение x1 - неконстантное и имеет хотя бы одну переменную, не указанную в комментарии (известно A). Находится список x3 всех подвыражений выражения x1, заголовки которых принадлежат списку "расстояние", "высота", "площадь", "угол". Выполнено одно из следующих требований:

   (a) Одно из выражений списка x3 входит в условие задачи.

   (b) Задача имеет комментарий (неизвестные ...). Либо x1 содержит неизвестную, либо существует уравнение, содержащее как подвыражение списка x3, так и неизвестную.

Оператор "Неизв" допускает цепочки соотношений длины 2, связывающие числовой атом с неизвестными внешней задачи. Он истинен в следующих случаях:

1. Текущая задача имеет тип "исследовать", причем выражение x1 содержит хотя бы одну неизвестную внешней задачи на описание.

2. Текущая задача имеет тип "исследовать". Составляется список x5 всех подвыражений выражения x1, имеющих заголовки "расстояние", "угол", "площадь". Выполнено одно из двух требований:

   (a) Хотя бы одно из этих подвыражений входит в уравнение, содержащее неизвестную внешней задачи на описание.

   (b) Существуют уравнения U_1, U_2, такие, что подвыражение списка x5 входит в U_1, неизвестная внешней задачи на описание входит в U_2, причем U_1, U_2 имеют общее подвыражение с заголовком "расстояние", "угол" либо "площадь".

3. Текущая задача имеет тип "доказать". У нее введен комментарий (неизвестные A). Выражение x1 не константное и имеет хотя бы одну переменную, не указанную в комментарии (известно ...). При этом выполнено одно из приведенных выше требований для задач типа "исследовать", где роль неизвестных внешней задачи играют переменные списка A.

   (a) Выражение x1 содержит переменную списка A.

4. Выражение x1 имеет заголовок "угол" либо "расстояние", причем существует посылка "актив(x1)" текущей задачи, выделенная комментарием "неизв". Такие комментарии вводятся приемами, имеющими основания считать тот или иной числовой атом важным для нахождения значений неизвестных.

Обычно характеризуется не каждый числовой атом в отдельности, а некоторая группа числовых атомов, упоминаемых в теореме приема. Например, важными для решения часто бывают соотношения для группы числовых атомов, в которых все атомы, кроме единственного, уже определены в контексте, а единственный не определенный атом имеет тип "неизв". Такие соотношения суть уравнения, позволяющие немедленно определить значение атома "неизв". Априори все числовые атомы теоремы равноправны - заранее неизвестно, какой из них окажется типа "неизв", а какие будут известны. Поэтому фильтр должен быть симметричным. Явное перечисление всех вариантов достаточно громоздко, и для сокращенной записи фильтров были созданы две специальные конструкции.

Первая из них имеет вид "числатомы(набор(терм(A_1) ... терм(A_n))B)". В ней перечисляются учитываемые фильтром числовые атомы $A_1, \dots, A_n$ (обычно - все невырожденные числовые атомы консеквента теоремы приема, но не обязательно) и указывается условие B, накладываемое на эти атомы. Это условие должно представлять собой дизъюнкцию (возможно, вырожденную) конъюнкций элементарных условий следующих типов:

1. Указание минимального количества m числовых атомов заданного типа в группе $A_1, \dots, A_n$. Условия имеют вид "известно(m)", "внешнеизв(m)", "неизв(m), "Неизв(m)", "актив(m)".

2. Условие "Внешнеизв". Значением каждого из числовых атомов A_i, после обработки нормализаторами приема, служит либо выражение без неизвестных (называем такие выражения известными), либо выражение "внешнеизв". При этом хотя бы одно выражение - "внешнеизв".

3. Условие "Числпарам". Все значения числовых атомов A_i суть выражения без невырожденных числовых атомов.

4. Условие "числпарам". Все значения числовых атомов A_i либо известны, либо имеют тип "внешнеизв".

5. Условие "смактив". Все числовые атомы A_i же встречаются в задаче.

6. Условие "смнеизв". Все содержащие неизвестные значения числовых атомов A_i имеют тип "неизв", причем существует хотя бы одно значение "неизв".

7. Условие "смНеизв". Все содержащие неизвестные значения числовых атомов A_i имеют тип "Неизв", причем существует хотя бы одно значение "Неизв".

8. Условие "опред(Q)", где Q - один из символов "актив", "неизв", "Неизв", "фикс". Все значения числовых атомов A_i кроме одного, известны, а этот оставшийся атом не известен и имеет тип Q (в случае символа "фикс" - произвольный неизвестный атом).

9. Условие "Числопред(Q)", где Q - один из логичексих символов "актив", "внешнеизв", "неизв", "Неизв", "фикс". Рассматривается набор выражений - значений числовых атомов A_i в котором исключены повторения. Все выражения этого набора, кроме единственного, выразимы через численные параметры (известные либо неизвестные), причем оставшееся выражение имеет тип Q. Хотя бы одно из выражений должно содержать неизвестную.

10. Условие "смпропорц". Хотя бы два из атомов $A_1, \ldots, A_n$ пропорциональны с известными коэффициентами.

Приведенный список используемых условий B неполон; ряд других возможностей будет указан по мере рассмотрения приемов.

Значения числовых атомов $A_1, \ldots, A_n$, определяемые с помощью нормализаторов приема, часто бывают выражены через какие-то другие содержащие неизвестные числовые атомы $C_1, \ldots, C_m$. Чтобы характеризовать выводимое соотношение в терминах атомов $C_1, \ldots, C_m$, используются фильтры второго типа - "Числатомы(набор(терм(A_1) ... терм(A_n))B)". Условие B здесь относится к группе атомов $C_1, \ldots, C_m$. Оно должно представлять собой дизъюнкцию следующих элементарных условий:

1. Условие "неизв(n)". Подгруппа невырожденных числовых атомов C_i состоит ровно из n элементов, каждый из которых имеет тип "неизв".

2. Условие "внешнеизв". $m = 1$, причем C_1 - переменная.

3. Условие "опред". $m = 1$.

4. Условие "связнеизв". $m = 2$, причем ровно один из атомов C_1, C_2 - переменная.

5. Условие "смактив". $m = 1$, причем атом C_1 уже встречается в задаче.

6. Условие "нормуравн". Все атомы C_i суть переменные.

В заключение списка простейших фильтров, используемых в геометрических приемах для характеризации числовых атомов, приведем фильтр "пропорцуравн(t_1 t_2)". Он истинен, если равенство $t_1 = t_2$ представляет собой соотношение пропорциональности, позволяющее, быть может, при использовании некоторых других уравнений текущей задачи, получить невырожденное уравнение для числовых параметров. В частности, оператор истинен, если $t_1 = t_2$ уже является численным уравнением.

3.6 Пакетные индикаторы

В предыдущем разделе рассматривались простейшие условия на числовые атомы: наличие выражения через известные параметры, наличие выражения через численные неизвестные, связь с численными неизвестными посредством уравнений задачи. Все эти условия непосредственно проверялись по имеющимся посылкам задачи.

Однако, данной информации для принятия решения о целесообразности вывода нового соотношения часто бывает недостаточно. Нужно уметь усматривать связь между параметрами задачи и тогда, когда она не выражается текущими посылками. Для этого используются специальные проверочные операторы, названные пакетными индикаторами. В частности, они позволяют усмотреть возможность выразить числовой атом через известные параметры, возможность использовать значение заданного атома для определения неизвестных, возможность выразить один числовой атом через другой и т.п. Полезными оказываются и проверочные операторы заведомо эвристического характера, оценивающие наличие лишь косвенной связи числового атома с известными параметрами либо с неизвестными.

Приемы пакетных индикаторов, как и приемы вывода соотношений, реализованы на ГЕНОЛОГе. Отличие состоит в том, что прием пакетного индикатора не выписывает соотношения, а лишь устанавливает факт его существования. Это дает существенное уменьшение трудоемкости, так как не происходит сканирование рассматриваемых соотношений. Применять пакетные индикаторы в приемах сканирования задачи на малых (3-5) значениях текущего уровня не очень целесообразно, ввиду ощутимого, хотя и не очень большого замедления. Обычно здесь работают простейшие фильтры, дающие сильно мотивированные срабатывания. Однако, начиная со средних (7-8) уровней мелкое замедление с лихвой окупается повышенной избирательностью вывода следствий. Чтобы уменьшить трудоемкость, в состав пакетного индикатора включается лишь необходимый минимум приемов. Состав пакетных индикаторов, дающих эвристические оценки связи числовых атомов, и вовсе определяется эмпирически.

Создание нового пакетного индикатора отличается от создания нового проверочного оператора лишь добавлением приема справочника "определимо". Теорема этого приема имеет вид "определимо(A)", где A - название индикатора.

Пакетный индикатор часто прибегает к рекурсии, сводя рассмотрение исходного числового атома A к новым числовым атомам $B_1, \ldots, B_n$. Чтобы в этом процессе не происходило зацикливание, используется комментарий (стоп $\ldots$). При обращении к рассмотрению атома B_i проверяется отсутствие комментария (стоп B_i), причем тому пакетному индикатору, который будет обрабатывать B_i, передается комментарий (стоп A). Иногда комментарий (стоп $\ldots$) естественно вводить помимо этого, для исключения из рассмотрения цепочек соотношений, проходящих через заданные атомы.

Некоторые приемы индикаторов требуют для своего срабатывания наличия дополнительных входных комментариев. Таким образом возникают различные усиленные версии обращения к индикатору. Обычно здесь используются комментарии "плюс" либо "Плюс".

Перейдем к более подробному рассмотрению пакетных индикаторов, применяемых в геометрических приемах.

Пакетный индикатор "определимо"

Начнем с индикатора "определимо(x1 x2 x3 x4)". Здесь x1 - числовой атом, x2 - список посылок, x3 - список комментариев, x4 - выходная переменная, которой присваивается список использованных посылок. Это - стандартный формат проверочного оператора с одним входным выражением. Индикатор истинен, если удается усмотреть возможность выразить числовой атом x1 через известные параметры текущей задачи.

В фильтре приема ГЕНОЛОГа обращение к индикатору имеет вид "легковидеть(определимо(A))", где A - соответствующий числовой атом. Заметим, что конструкция "терм(A)" здесь (как и для других пакетных индикаторов) не используется. В теореме приема индикатора консеквент имеет вид "определимо(A)", и аналогичный вид имеют антецеденты, реализующие рекурсивные обращения. Приемы индикатора "определимо" таковы:

1. Усмотрение результата из буфера. Стандартный прием проверочных операторов, извлекающий результат из буфера. Сохранение результатов в буфере существенно удешевляет пакетные индикаторы.

2. Выражение без неизвестных.

   $\forall_a$(определимо(a))

   Здесь выражение a не имеет неизвестных текущей задачи.

3. Равенство, задающее значение величины.

   $\forall_{ab}(a = b \to$ определимо$(a))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, выражение b не содержит неизвестных текущей задачи.

4. Соотношение пропорциональности для расстояний.

   $\forall_{ABCDab}(al(AB) = bl(CD)$ & определимо$(l(AB)) \to$ определимо$(l(CD)))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Выражения a, b не содержат неизвестных. Для блокировки повторного применения приема используется комментарий "пропорциональны". Уровень срабатывания равен 3.

5. Умножение на известный коэффициент.

   $\forall_{ab}$(определимо$(b) \to$ определимо$(ab))$

   Выражение a не содержит неизвестных. Указатель "спуск" блокирует альтернативные попытки. Уровень срабатывания равен 1.

6. Равенство углов, имеющееся в посылках.

   $\forall_{ABCDEF}(\angle(ABC) = \angle(DEF)$ & определимо$(\angle(ABC)) \to$ определимо$(\angle(DEF)))$

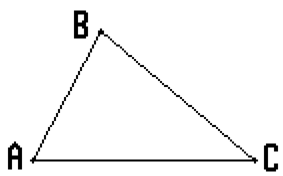
   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Требуется наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.

7. Выдача отказа при отсутствии известных расстояний.

   $\forall_{AB}(\neg$(определимо$(l(AB))))$

   Среди посылок нет утверждений вида "$l(PQ) = a$, где выражение a не содержит неизвестных. Кроме того, нет посылок, содержащих символ "коорд". Указатель "не" определяет немедленный выход из проверочного оператора по значению "ложь". Уровень срабатывания равен 1.

8. Теорема синусов.

   $\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BCA))$ & определимо$(l(AB))$ & определимо$(\angle(BAC))$ & определимо$(\angle(BCA)) \to$ определимо$(l(BC)))$

   $\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BCA))$ & определимо$(l(AB))$ & определимо$(\angle(BAC))$ & определимо$(\angle(BCA)) \to$ определимо$(l(AC)))$

$\forall_{ABC}$(актив($l(AC)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(BCA)$) & определимо($l(AC)$) & определимо($\angle(BAC)$) & определимо($\angle(BCA)$) $\rightarrow$ определимо($l(AB)$))

Если в треугольнике определимы два угла и одна сторона, то любая из оставшихся сторон тоже определима. Во всех случаях определимость проверяется только для расстоянй и углов, уже рассматриваемых в задаче. Для блокировки повторного применения данного приема (даже к другому числовому атому) используется комментарий "синус". Первый антецедент идентифицируется непосредственно, второй и третий выделены указателем "усм", остальные - реализуют рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($l(BC)$) & определимо($\angle(BAC)$) $\rightarrow$ определимо($\angle(BCA)$))

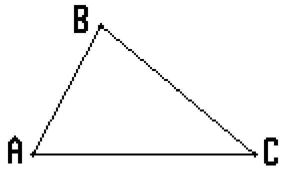
Если известны две стороны AB, BC и определим угол, не лежащий между ними, то определим другой угол, не лежащий между ними. Первые три антецедента выделены указателем "усм". Прием применяется только при наличии комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 2.

9. Разбиение отрезка на два подотрезка.

   $\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & $C \in$ прямая(AB) $\rightarrow$ определимо($l(BC)$))

   Если известны расстояния от точки A до точек B, C, причем C лежит на прямой AB то расстояние BC определимо. Антецеденты обратываются идентифицирующими операторами. Уровень срабатывания равен 2.

10. Теорема косинусов.



   $\forall_{ABC}$(актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & $\angle(ACB) = a \rightarrow$ определимо($l(AB)$))

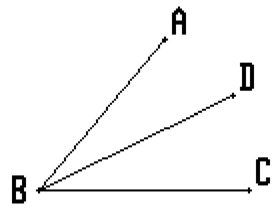
   Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - идентифицируется с посылкой. Обе стороны AC, BC и угол между ними известны. Тогда противоположная сторона определима. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & определимо($l(AC)$) $\rightarrow$ определимо($\angle(BAC)$))

   $\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & определимо($l(AC)$) $\rightarrow$ определимо($\angle(ABC)$))

   Если две стороны известны, а третья определима, то определим любой из углов. Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - выполняет рекурсивное обращение. При идентификации угла ориентация лучей не учитывается. Уровень срабатывания равен 3.

11. Определение угла через сумму двух подуглов.

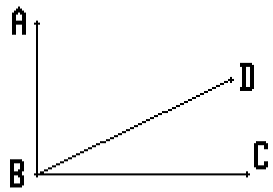


$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(BD)) & актив(прямая(BA)) & актив(прямая(BC)) & определимо($\angle(ABD)$) & определимо($\angle(CBD)$) $\to$ определимо($\angle(ABC)$))

$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(BD)) & актив(прямая(BA)) & определимо($\angle(ABD)$) & определимо($\angle(CBD)$) $\to$ определимо($\angle(ABC)$))

Первый прием применяется при отсутствии комментария "Плюс"; второй, у которого ослаблены антецеденты (прямая BC не обязательно должна уже рассматриваться в задаче) - при наличии комментария "Плюс". Обозначение прямой BD не совпадает с обозначениями прямых BA, BC. В задаче должна рассматриваться прямая, проходящая через какие-то отличные от B точки прямых BA, BD. Первые антецеденты выделены указателем "усм", два последних - реализуют рекурсивные обращения. Для блокировки повторного применения приема используются комментарии "углы", "(углы прямая(BD))". Уровень срабатывания равен 3.

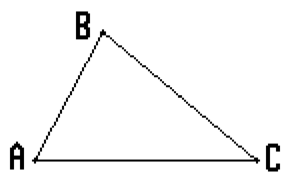
Заметим, что прием игнорирует проверку того, суммой либо разностью двух известных углов является результирующий угол. Так как заранее неизвестно, понадобится ли вообще факт определимости угла, это дает существенную экономию. Если использование пакетного индикатора приведет к срабатыванию приема, то указанная проверка, включая возможный разбор случаев, будет выполняться другими приемами сканирования задачи.



$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(BD)) & актив(прямая(BA)) & актив(прямая(BC)) & прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & определимо($\angle(ABD)$) $\to$ определимо($\angle(CBD)$))

Обозначение прямой BD не совпадает с обозначениями прямых BA, BC. Имеется комментарий "плюс". Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - выполняет рекурсивное обращение. Для блокировки повторного применения приема используется комментарий "углы". Уровень срабатывания равен 3.

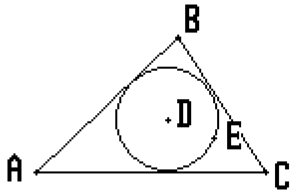
12. Определение угла по боковым сторонам и площади треугольника.



$\forall_{ABC}$(актив($l(AC)$) & актив($l(AB)$) & S(фигура(ABC)) $= a \rightarrow$ определимо($\angle(BAC)$))

Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - идентифицируется с посылкой. Длины сторон AC, AB и площадь a известны. Уровень срабатывания равен 1.

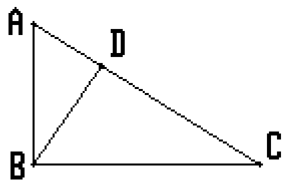
13. Расстояние до центра вписанной окружности.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$ определимо($l(AD)$))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "список(фикс(1 2 1))" разрешает идентификацию вершин A, B, C в произвольном порядке. Длины сторон AB, BC, AC и радиус окружности DE известны. Уровень срабатывания равен 3.

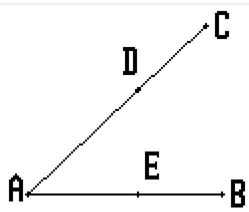
14. Высота, опущенная на гипотенузу.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & актив($l(AD)$) & актив($l(CD)$) $\rightarrow$ определимо($l(BD)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Известны длины отрезков AD, CD. Для ускорения идентификации введен фильтр о несовпадении точки D с точками A, C. Заметим, что это требование относится не к самим точкам, а только к их обозначениям. При необходимости гарантировать отличие точек в антецедентах теоремы приема используется утверждение "разныеточки(...)", которое обрабатывается проверочным оператором. Поэтому всюду далее требование о различии точек либо прямых, явно не представленное в теореме приема, понимается как требование различия их обозначений. Уровень срабатывания равен 3.

15. Два угла с общими прямыми.

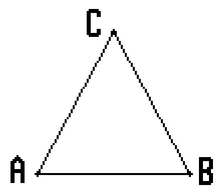


$\forall_{ABCDE}(D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) & актив$(\angle(DAE)) \rightarrow$ определимо$(\angle(BAC)))$

Указатель "развязка" блокирует обработку теоремы приема процедурой "развязка". Антецеденты выделены указателем "усм". Угол DAE, отличающийся от анализируемого угла BAC только выбором точек D, E на прямых AC, AB, известен. Заметим, что не требуется размещение этих точек на лучах AC, AB. Точка A должна отличаться от точек D, E. Кроме того, либо C должно отличаться от D, либо B - от E.

Созданы две версии приема, отличающиеся лишь использованием нормализатора "нормпрямая" для обработки обозначений прямых AB, AC. Нормализатор сводит данные обозначения к фактически используемым в задаче. Версия, использующая нормализатор, требует наличия комментария "плюс"; в другой версии требуется отсутствие этого комментария. Уровни срабатывания приемов равны 3.

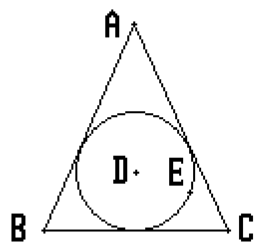
16. Углы равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABCa}($актив$(\angle(ACB))$ & $l(AC) = l(BC) \rightarrow$ определимо$(\angle(CAB)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Угол ACB известен. Обозначения точек A, B должны быть различны. Уровень срабатывания равен 3.

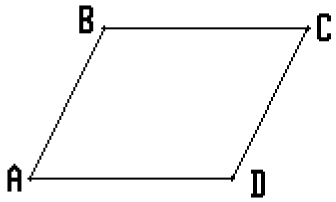
17. Определение основания равнобедренного треугольника по радиусу вписанной окружности и углу.



$\forall_{ABCDE}($окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(AC)$ & актив$(\angle(ABC)) \rightarrow$ определимо$(l(BC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок точек A, B, C игнорируется. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Радиус DE и угол ABC известны. Уровень срабатывания равен 2.

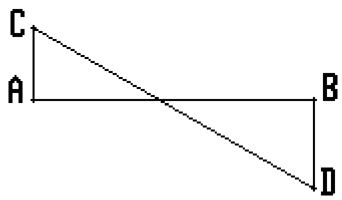
18. Равенство отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на параллельных прямых.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & определимо$(l(AB)) \rightarrow$ определимо$(l(CD)))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - реализует рекурсивное обращение. Обозначения параллельных прямых в каждой паре должны быть различны. Расстояние AB не должно встречаться в посылках задачи. Для блокировки повторного применения приема используется комментарий "параллелограмм". Уровень срабатывания равен 3.

19. Определение расстояния между двумя точками, лежащими по разные стороны от некоторой прямой, с помощью расстояний их до этой прямой и расстояния между проекциями.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(AB) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AB) & актив$(l(AC))$ & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BD)) \rightarrow$ определимо$(l(CD)))$

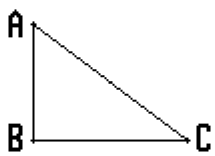
Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором "разныестороны", который будет описан впоследствии. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Длины отрезков AC, AB, BD известны. Уровень срабатывания равен 3.

20. Угол, для которого известен синус.

$\forall_{ABCa}(\sin(\angle(ABC)) = a \rightarrow$ определимо$(\angle(ABC)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

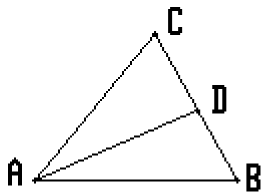
21. Теорема Пифагора.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(BC))$ & определимо$(l(AB)) \rightarrow$ определимо$(l(AC)))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - реализует рекурсивное обращение. Длина катета BC известна. Требуется наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.

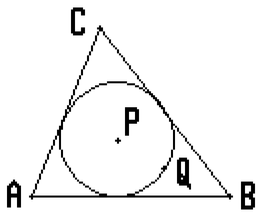
22. Отрезки, на которые биссектриса делит сторону треугольника.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(CAD)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & $D \in$ отрезок(BC) & $\angle(CAD) = \angle(BAD)$ & актив($l(AB)$) $\rightarrow$ определимо($l(CD)$))

Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол", определяющим уже найденное к текущему моменту выражение для угла. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "конец(5)" уточняет, что проверка равенства углов, как более трудоемкое действие, выполняется после идентификации прочих антецедентов. Проверяется, что не усматривается принадлежность точки A прямой CD. Длины сторон AC, AB, BC известны. Уровень срабатывания приема равен 3.

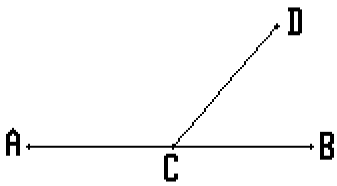
23. Усмотрение биссектрисы в прямой, соединяющей вершину треугольника с центром вписанной окружности.



$\forall_{ABCPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура(ABC) & определимо($\angle(ABC)$) $\rightarrow$ определимо($\angle(ABP)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин треугольника несущественен. Второй антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

24. Смежные углы.



$\forall_{ABCD}$($A \in$ прямая(BC) & определимо($\angle(ACD)$) $\rightarrow$ определимо($\angle(BCD)$))

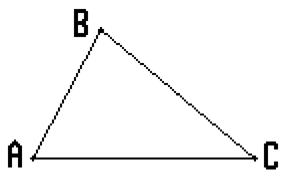
Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - реализует рекурсивное обращение. Прямые CD, BC уже рассматриваются в задаче. Обозначение точки C отлично от обозначений точек A, B. Не усматривается, что точка B лежит на луче CA. Требуется наличие комментария "плюс". Для блокировки повторного обращения к приему используется комментарий "углы". Уровень срабатывания равен 2.

25. Расстояние между точками, координаты которых известны.

$\forall_{ABKab}$(коорд$(A, K) = a$ & коорд$(B, K) = b \to$ определимо$(l(AB)))$

Антцеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

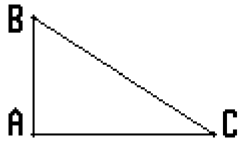
26. Сумма углов треугольника.



$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(ACB)) \to$ определимо$(\angle(BAC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Величины углов ABC, ACB известны. Обозначения точек A, B, C различны. Прямые AB, AC, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

27. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $pl(AC) = ql(BC) \to$ определимо$(\angle(ACB)))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения p, q не содержат неизвестных. Расстояния AC, BC уже рассматриваются в задаче. Требуется наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.

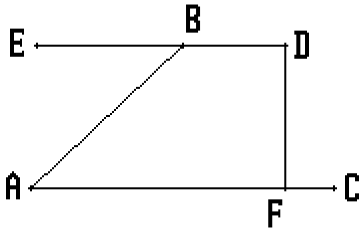
$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $pl(AB) = ql(BC) \to$ определимо$(\angle(ACB)))$

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $pl(AC) = ql(AB) \to$ определимо$(\angle(ACB)))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$ определимо$(l(AC)))$

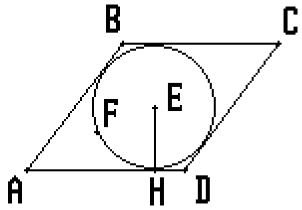
Антецеденты выделены указателем "усм". Длина катета AB и величина угла ABC известны. Требуется наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(DF) $\perp$ прямая(AC) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & $B \in$ прямая(DE) & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB))$ $\rightarrow$ определимо$(l(DF))$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Длина отрезка AB и величина угла BAC известны. Уровень срабатывания равен 3.

28. Угол ромба, в который вписана окружность.



$\forall_{ABCDEFGH}$(ромб$(ABCD)$ & окружность(EF) вписана в фигура$(ABCD)$ & $H \in$ окружность(EF) & $H \in$ отрезок(AD) & $al(EF) = bl(DH)$ $\rightarrow$ определимо$(\angle(BCD))$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками. При этом допускается циклическая перестановка вершин ромба. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Расстояние DH должно уже рассматриваться в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

29. Периметр треугольника.

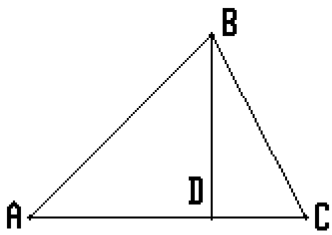
$\forall_{ABC}$(определимо$(l(AB))$ & определимо$(l(AC))$ & определимо$(l(BC))$ $\rightarrow$ определимо(периметр(фигура(ABC))))

Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания приема равен 2.

30. Площадь треугольника.

$\forall_{ABC}$(определимо$(l(AB))$ & определимо$(l(AC))$ & определимо$(l(BC))$ $\rightarrow$ определимо$(S$(фигура(ABC))))

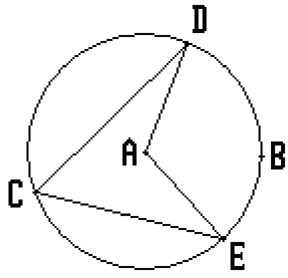
Аналогично предыдущему пункту.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & определимо$(l(AC))$ & определимо$(l(BD)) \to$ определимо$(S($фигура$(ABC))))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последние два - реализуют рекурсивные обращения. Вершины треугольника идентифицируются без учета порядка. Уровень срабатывания равен 3.

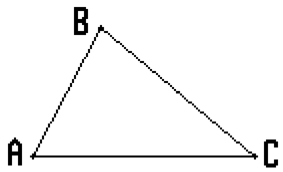
31. Вписанный и центральный углы.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(DCE)) \to$ определимо$(\angle(DAE)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Величина угла DCE известна. Уровень срабатывания равен 3.

32. Расстояние от точки до прямой.

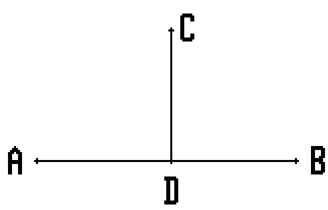


$\forall_{ABC}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB)) \to$ определимо(расстдопрямой$(C,$ прямая$(AB))))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Длины отрезков AC, AB, BC известны. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}(A \in$ прямая$(BC) \to$ определимо(расстдопрямой$(A,$ прямая$(BC))))$

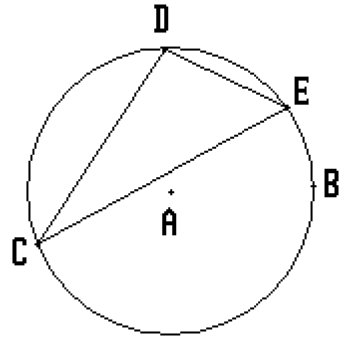
Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & актив$(l(CD)) \to$ определимо(расстдопрямой$(C,$ прямая$(AB))))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Длина отрезка CD известна. Уровень срабатывания равен 3.

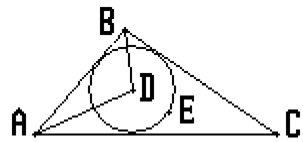
33. Длина хорды, на которую опирается вписанный угол.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(DCE)) \to$ определимо$(l(DE)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Длина отрезка AB и величина угла DCE известны. Уровень срабатывания равен 3.

34. Угол, под которым из центра вписанной окружности видны вершины треугольника.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & актив$(\angle(ACB)) \to$ определимо$(\angle(ADB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин треугольника несущественен. Второй антецедент выделен указателем "усм". Прямые AB, BC, AC уже рассматриваются в задаче. Величина угла ACB известна. Уровень срабатывания равен 3.

35. Соотношения для векторов.

   (a) Противоположные векторы.

   $\forall_{ABa}$(вектор$(AB) = a \to$ определимо(вектор(BA)))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Сумма векторов.

   $\forall_{ABCa}$(вектор$(AB) = a$ & определимо(вектор(BC)) $\to$ определимо(вектор(AC)))

   $\forall_{ABCa}$(вектор$(CB) = a$ & определимо(вектор(BA)) $\to$ определимо(вектор(AC)))

   $\forall_{ABCa}$(вектор$(BA) = a$ & определимо(вектор(BC)) $\to$ определимо(вектор(AC)))

   $\forall_{ABCa}$(вектор$(BC) = a$ & определимо(вектор(BA)) $\to$ определимо(вектор(AC)))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

Пакетный индикатор "применимо"

Обращение к индикатору имеет вид "применимо(x1 x2 x3 x4)". Здесь x1 - числовой атом, x2 - список посылок, x3 - список комментариев, x4 - выходная переменная, которой присваивается список использованных посылок. Индикатор истинен, если удается усмотреть возможность вычислить какие-либо числовые атомов "неизв", зная значение атома x1. Приемы индикатора таковы:

1. Выражение типа "неизв".

   $\forall_a$(применимо(a))

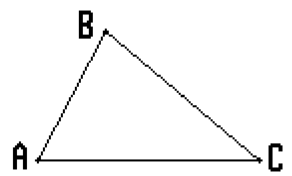
   Выражение a имеет тип "неизв" относительно текущей задачи. Уровень срабатывания равен 1.

2. Линейное уравнение, связывающее углы.

   $\forall_{abcABCDEF}(a\angle(ABC) + b\angle(DEF) = c \rightarrow$ применимо$(\angle(ABC)))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Выражение для угла DEF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

3. Теорема синусов.



   $\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BCA))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow$ применимо$(\angle(ABC)))$

   $\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BCA))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow$ применимо$(\angle(BAC)))$

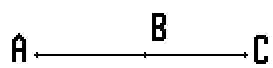
   $\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow$ применимо$(\angle(BCA)))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Одно из тройки выражений для угла BCA и расстояний AB, AC имеет тип "неизв", два других - известны. Обозначения точек A, B, C различны, обозначения прямых AB, AC тоже различны. Последний прием применяется только при наличии комментария "плюс". Уровень срабатывания приемов равен 1.

   $\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(ABC)) \rightarrow$ применимо$(l(AB)))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Существует уравнение в посылках, связывающее расстояния AB, AC и не имеющее других числовых атомов. Выражение для угла BAC не содержит неизвестных, выражение для угла ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

4. Разбиение отрезка.



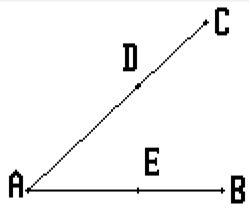
$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & $A \in$ прямая(BC) $\rightarrow$ применимо($l(BC)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". На теореме созданы два приема. Первый прием применяется при отсутствии комментария "плюс". Одно из расстояний AB, AC известно, другое - имеет тип "неизв". Должно усматриваться расположение каких-то конкретных двух точек по одну сторону от третьей. Второй прием применяется при наличии комментария "плюс". Каждое из расстояний AB, AC должно либо иметь тип "неизв", либо быть известным, причем хотя бы одно - иметь тип "неизв". Уровни срабатывания равны 1.

$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & $B \in$ отрезок(AC) $\rightarrow$ применимо($l(AC)$))

Расстояния AB, BC имеют тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 3.

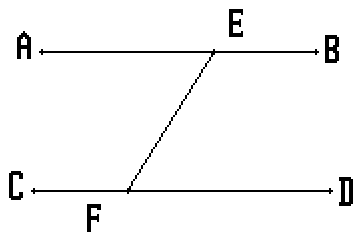
5. Два угла с общими прямыми.



$\forall_{ABCDE}$($D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) & актив($\angle(DAE)$) $\rightarrow$ применимо($\angle(BAC)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Обозначение точки A отличается от обозначений точек B, C. Либо обозначения точек C, D различны, либо обозначения точек B, E различны. Выражение для угла DAE имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

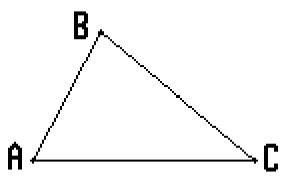
6. Углы при параллельных прямых и секущей.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & актив($\angle(BEF)$) $\rightarrow$ применимо($\angle(DFE)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения прямых AB, CD различны. Выражение для угла BEF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

7. Теорема косинусов.



$\forall_{ABC}$(актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & актив($\angle(BAC)$) $\to$ применимо($l(AB)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний AC, BC имеет тип "неизв", другое - не содержит неизвестных. Величина угла BAC известна. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Уровень срабатывания равен 2.

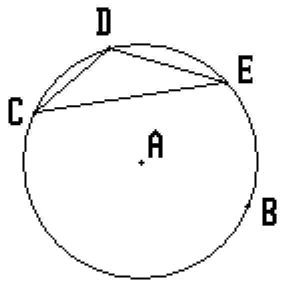
$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AC)) & актив($l(BC)$) & актив($\angle(BAC)$) & определимо($l(AC)$) $\to$ применимо($l(AB)$))

Первые три антецедента выделены указателем "усм", последний - реализует рекурсивное обращение. Расстояние BC известно, выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AC)$) $\to$ применимо($\angle(BAC)$))

Расстояния AB и AC известны, выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

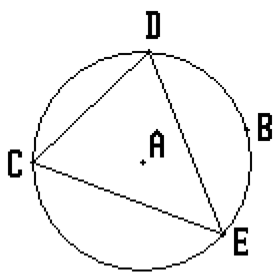
8. Стороны треугольника и радиус описанной окружности.



$\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив($l(CE)$) & актив(окружность(AB)) & определимо($l(DE)$) $\to$ применимо($l(CD)$))

Последний антецедент реализует рекурсивное обращение, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние CE известно, выражение для радиуса окружности AC имеет тип "неизв". Обозначения точек C, D, E различны. Уровень срабатывания равен 2.

9. Вписанный угол, опирающийся на хорду.

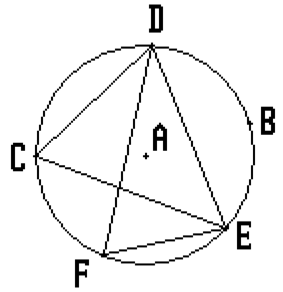


$\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив($\angle(DCE)$) & актив($l(AC)$) $\to$ применимо($l(DE)$))

Радиус AC известен, выражение для угла DCE имеет тип "неизв".

$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow$ применимо$(\angle(CED)))$

Длина хорды CD известна, выражение для радиуса AC имеет тип "неизв". Введен указатель "развязка", блокирующий преобразование теоремы при компиляции.

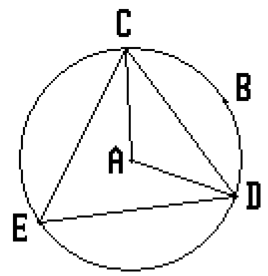


$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(DCE)) \rightarrow$ применимо$(\angle(DFE)))$

Обозначения точек C, D, E, F различны. Выражение для угла DCE имеет тип "неизв".

В перечисленных приемах антецеденты выделены указателем "усм", а уровень срабатывания равен 2.

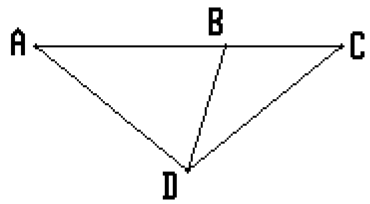
10. Вписанный и центральный углы.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CAD)) \rightarrow$ применимо$(\angle(CED)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла CAD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

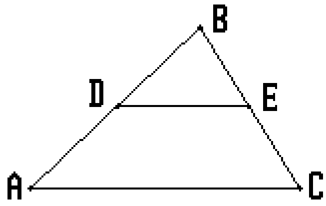
11. Двукратное применение теоремы косинусов.



$\forall_{ABCD}(B \in$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AD)) \rightarrow$ применимо$(l(BD)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения точек A, B, C, D различны. Не усматривается принадлежность точки D прямой AC. Расстояния AB, AC, CD известны; выражение для расстояния AD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

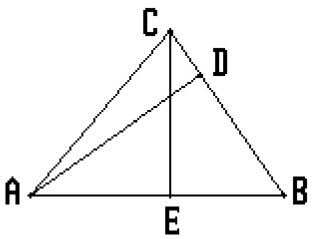
12. Средняя линия треугольника.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(DE) $\parallel$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $l(AD) = l(BD)$ & $l(BE) = l(CE) \rightarrow$ применимо$(l(DE))$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначение прямой DE отлично от обозначений прямых AB, AC и BC. Не усматривается принадлежность точки B прямой AC. Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

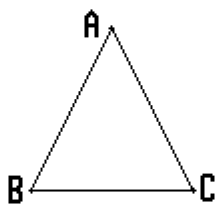
13. Высоты треугольника и длины сторон, на которые они опущены.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AD) $\perp$ прямая(BC) & прямая(CE) $\perp$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AB) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CE))$ & актив$(l(AD))$ $\rightarrow$ применимо$(l(BC))$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки A прямой BC. Длины стороны AB и проведенной к ней высоты CE известны, выражение для длины высоты AD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

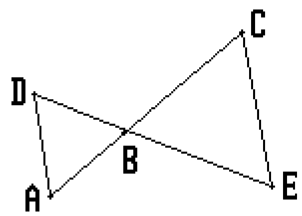
14. Равнобедренный треугольник.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(AC)$ & актив$(\angle(BAC)) \rightarrow$ применимо$(l(BC)))$

Не усматривается принадлежность точки A прямой BC. Величина угла BAC известна, выражение для длины боковой стороны AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

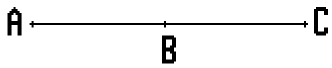
15. Пропорциональные отрезки на параллельных прямых.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AD) \parallel$ прямая(CE) & $B \in$ отрезок(AC) & $B \in$ отрезок(DE) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(CE)) \to$ применимо$(l(AB)))$

Два из расстояний BC, AD, CE известны, выражение для третьего - имеет тип "неизв". Обозначение точки B отлично от обозначений точек C, D, E. Не усматривается принадлежность точки D прямой AC. Уровень срабатывания равен 3.

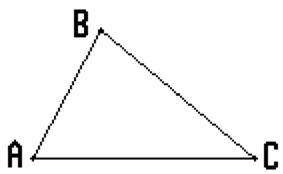
16. Деление отрезка в заданном отношении.



$\forall_{ABCab}(al(AB) = bl(BC)$ & $B \in$ отрезок(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \to$ применимо$(l(AC)))$

Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат неизвестных, выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

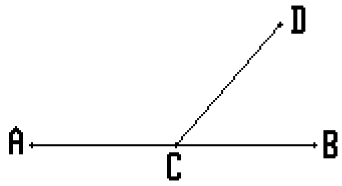
17. Сумма углов треугольника.



$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(ABC))$ & применимо$(\angle(ACB)) \to$ применимо$(\angle(BAC)))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - реализует рекурсивное обращение. Величина угла ABC известна. Не усматривается равенство длин сторон BC, AB. Для блокировки повторного применения приема используется комментарий (треугольник A). Уровень срабатывания равен 2.

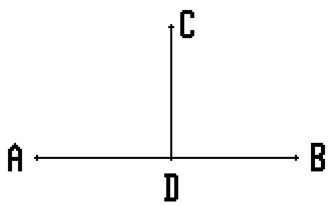
18. Смежные углы.



$\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(AB) & применимо$(\angle(ACD)) \rightarrow$ применимо$(\angle(BCD)))$

Уровень срабатывания равен 2.

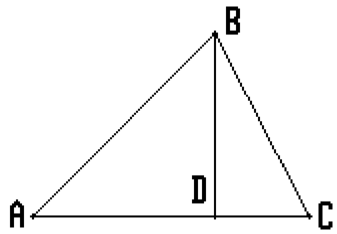
19. Расстояние от точки до прямой.



$\forall_{ABCD}($прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & актив$(l(CD)) \rightarrow$ применимо(расстдопрямой$(C,$ прямая$(AB))))$

Выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

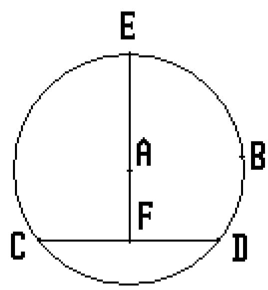
20. Площадь треугольника, у которого проведена высота.



$\forall_{ABCD}($прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BD))$ & $D \in$ прямая$(AC) \rightarrow$ применимо$(S($фигура$(ABC))))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Одно из расстояний AC, BD известно, выражение для другого - имеет тип "неизв". При идентификации вершин A, B, C порядок несущественен. Уровень срабатывания равен 3.

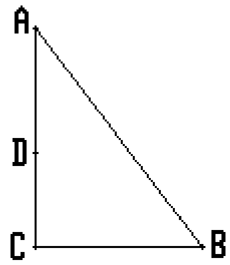
21. Радиус, перпендикулярный хорде.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(CD) & $A \in$ прямая(EF) & актив$(l(CD)) \to$ применимо$(l(EF)))$

Длина хорды CD известна, выражение для радиуса AB имеет тип "неизв".

22. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.



ABCD(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB)) \to$ применимо$(\angle(DAB)))$

Длина катета BC известна, выражение для длины гипотенузы AB имеет тип "неизв". При идентификации угла игнорируется направление лучей. Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный индикатор "смуравн"

Обращение к пакетному индикатору имеет стандартный вид - "смуравн(x1 x2 x3 x4)". Оператор истинен, если усматривается возможность выразить числовой атом x1 через известные параметры и численные неизвестные внешней задачи на описание. Он применяется в приемах сканирования задачи для вывода таких соотношений, которые позволяют получить новое уравнение в численных переменных. Индикатор используется крайне редко и имеет совсем мало приемов:

1. Величина выражена через известные параметры и неизвестные внешней задачи.

   $\forall_a$(смуравн(a))

   Выражение a содержит только такие неизвестные, которые являются численными неизвестными внешней задачи.

   $\forall_{AB}$(смуравн$(l(AB))$)

   Выражение для расстояния AB, полученное с помощью нормализатора "нормрасстояние", содержит только такие неизвестные, которые являются численными неизвестными внешней задачи. Уровень срабатывания приемов равен 1.

2. Отбрасывание коэффициента.

   $\forall_{aAB}$(смуравн$(l(AB)) \to$ смуравн$(al(AB))$)

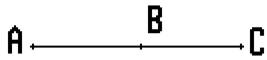
   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Указатель "спуск" блокирует альтернативные попытки. Выражение a содержит только такие неизвестные, которые являются численными неизвестными внешней задачи. Уровень срабатывания равен 1.

3. Использование линейного соотношения для расстояния, имеющегося в посылках.

   $\forall_{abAB}(al(AB) = b \to$ смуравн$(l(AB)))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражения a, b содержат только такие неизвестные, которые являются численными неизвестными внешней задачи. Уровень срабатывания равен 2.

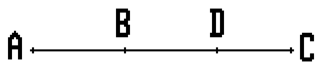
4. Разбиение отрезка на два подотрезка.

   $\forall_{ABC}(B \in$ прямая(AC) & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB))$ & смуравн$(l(BC))$ & смуравн$(l(AB)) \to$ смуравн$(l(AC)))$

   Первые три антецедента выделены указателем "усм", последние два - реализуют рекурсивные обращения. Обозначения точек A, B, C различны. Для блокировки повторного обращения к приему используется комментарий "отрезок". Уровень срабатывания равен 3.

5. Разбиение отрезка на три подотрезка.

   $\forall_{ABCD}(B \in$ прямая(AC) & актив$(l(CD))$ & $D \in$ прямая(AC) & актив$(l(BD))$ & актив$(l(AB))$ & смуравн$(l(AB))$ & смуравн$(l(BD))$ & смуравн$(l(CD)) \to$ смуравн$(l(AC)))$

   Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", последние три - реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный индикатор "сводимо"

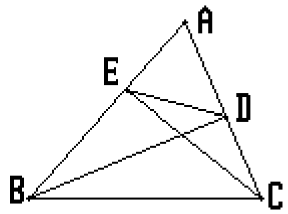
Вывод нового соотношения может оказаться целесообразным, если один из двух его числовых атомов выражается через другой. Тогда далее будет получено уравнение с единственным числовым атомом, которое позволит найти этот атом. Для усмотрения возможности выразить атом x1 через атом x2 используется пакетный индикатор "сводимо(x1 x2 x3 x4 x5)". Здесь x3 - список посылок, x4 - список комментариев. Выходной переменной x5 в случае успеха присваивается список использованных посылок. Как и индикатор "смуравн", данный индикатор используется редко, а число его приемов невелико:

1. Совпадение атомов.

   $\forall_a($сводимо$(a, a))$

   Уровень срабатывания равен 1.

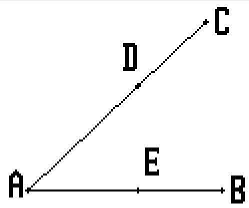
2. Отрезок, соединяющий основания высот треугольника.



$\forall_{ABCDEa}$(прямая(CE) $\perp$ прямая(AB) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AC) & актив$(l(BC))$ & сводимо$(\angle(BAC), a)$ $\rightarrow$ сводимо$(l(DE), a)$)

Последний антецедент реализует рекурсивное обращение, остальные - выделены указателем "усм". Длина стороны BC известна. Уровень срабатывания равен 2.

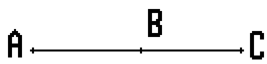
3. Два угла с общими прямыми.



$\forall_{ABCDEa}$($D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) $\rightarrow$ сводимо$(\angle(DAE), \angle(BAC))$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначение точки A отлично от обозначений точек D, E. Уровень срабатывания равен 1.

4. Разбиение отрезка.



$\forall_{ABC}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & $C \in$ прямая(AB) $\rightarrow$ сводимо$(l(BC), l(AB))$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние AC известно. Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный индикатор "существпропорц"

Предыдущие пакетные индикаторы имели "почти гарантирующий" характер - в случае их истинности соответствующие выражения можно было вычислить, выразить через них неизвестные, свести одно выражение к другому, и т.п. В худшем случае, здесь пришлось бы предпринимать разбор случаев. Начиная с этого момента, будут рассматриваться пакетные индикаторы более эвристического характера, прослеживающие лишь косвенные связи числовых атомов. Какие косвенные связи считать важными, а какие - нет, определялось при проработке примеров эмпирически. Первоначально эвристические признаки формулировались для отдельных приемов, аккумулируя в себе особенности тех задач, где они применялись, а затем эти признаки были "вынесены за скобки" из приемов и сгруппированы в пакетных индикаторах.

Пакетный индикатор "существпропорц(x1 x2 x3 x4 x5)" проверяет, что соотношение пропорциональности для числовых атомов x1 и x2 может оказаться ценным при решении задачи. Он имеет следующие приемы:

1. Определение частей отрезка.

   $\forall_{ABC}(A \in$ прямая(BC) & актив$(l(BC)) \to$ существпропорц$(l(AB), l(AC)))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние BC либо известно, либо выражено через неизвестные внешней задачи. Уровень срабатывания равен 1.

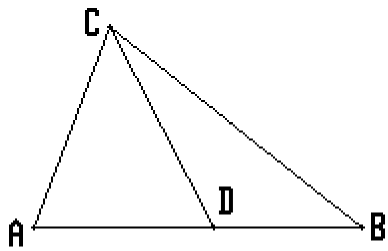
2. Площадь треугольника.

   $\forall_{ABCD}($актив$(S($фигура$(CDB)))$ & $C \in$ прямая$(AB) \to$ существпропорц$(l(AB),$ $l(BC)))$

   $\forall_{ABCD}($актив$(S($фигура$(ADB)))$ & $C \in$ прямая$(AB) \to$ существпропорц$(l(AB),$ $l(BC)))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем вершины треугольника идентифицируются без учета порядка. Второй антецедент выделен указателем "усм". Предполагается, что соотношение пропорциональности для AB, BC позволит вывести соотношение пропорциональности для площадей треугольников. Уровень срабатывания равен 2.

3. Отношение сторон треугольника, в котором проведена биссектриса.

   $\forall_{ABCD}($актив$($прямая$(AB))$ & актив$(\angle(ACD))$ & актив$(\angle(BCD))$ &
   $D \in$ прямая(AB) & $\angle(ACD) = \angle(BCD) \to$ существпропорц$(l(AC), l(BC)))$

   Последний антецедент выделен указателем "идентификатор", его операнды обрабатываются нормализатором "нормугол". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный индикатор "существатом"

Этот индикатор усматривает возможность связать заданный числовой атом с числовыми атомами, входящими в уравнения с численными неизвестными. Обращение к нему имеет вид "существатом(x1 x2 x3 x4)", где x1 - анализируемый атом, x2 - список посылок, x3 - список комментариев. Обычно индикатор применяется в тех случаях, когда вывод соотношения оправдан даже при слабых дополнительных мотивировках. Приемы его таковы:

1. Выражение, связанное с неизвестными.

   $\forall_a$(существатом(a))

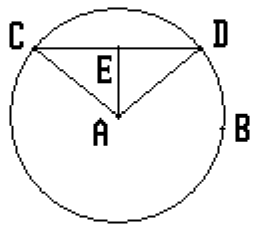
   Здесь a - выражение типа "Неизв". Уровень срабатывания равен 1.

2. Использование индикатора "применимо".

   $\forall_a$(применимо(a) $\to$ существатом(a))

   Антецедент обрабатывается пакетным индикатором. Уровень срабатывания равен 1.

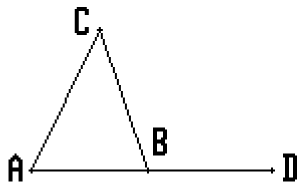
3. Высота, опущенная из центра окружности на середину хорды, и величина центрального угла.



   $\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив($l(AE)$) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(CD) $\to$ существатом($\angle(CAD)$))

   Антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния AE имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

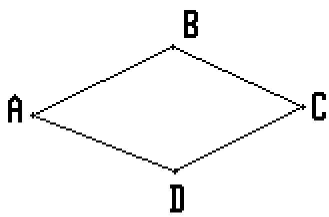
4. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника, имеющего угол при вершине "неизв".



   $\forall_{ABCD}$($l(AC) = l(BC)$ & $B \in$ отрезок(AD) & актив($\angle(ACB)$) $\to$ существатом($\angle(CBD)$))

   Антецеденты выделены указателем "усм". Прямая AB уже рассматривается в задаче. Обозначения точек A, B различны. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Выражение для угла ACB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

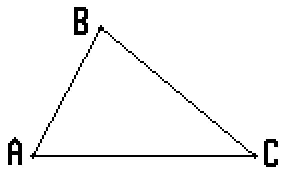
5. Угол ромба, имеющего площадь "неизв".



$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD)$ & актив$(S($фигура$(ABCD)))$ $\to$ существатом$(\angle(ABC)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускается циклическая перестановка вершин ромба. Выражение для площади ромба имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

6. Сторона треугольника, имеющего площадь "неизв".

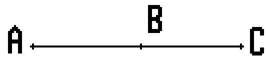


$\forall_{ABC}$(актив$(S($фигура$(ABC)))$ $\to$ существатом$(\angle(ABC)))$

$\forall_{ABC}$(актив$(S($фигура$(ABC)))$ $\to$ существатом$(l(AB)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок расположения вершин треугольника несущественен. Выражение для площади имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 1.

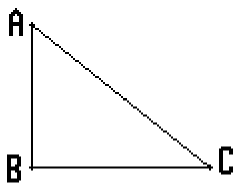
7. Длина отрезка, примыкающего к отрезку "неизв".



$\forall_{ABC}$(актив$(l(AC))$ & $B \in$ прямая(AC) $\to$ существатом$(l(BC)))$

Антецеденты выдлены указателем "усм". Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

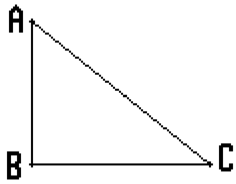
8. Катет прямоугольного треугольника, имеющего угол "неизв".



$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(BC))$ $\to$ существатом$(l(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение для угла имеет тип "неизв". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

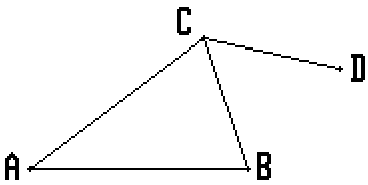
9. Гипотенуза прямоугольного треугольника, имеющего катет "неизв".



$\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & актив$(l(AB))$ $\rightarrow$ существатом$(l(AC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для длины катета AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 1.

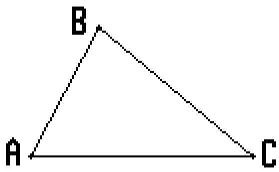
10. Определение по теореме косинусов стороны угла "неизв".



$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив(прямая(BC)) & актив$(\angle(BCD))$ $\rightarrow$ существатом$(\angle(BAC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AC, AB известны, а расстояние BC - не известно. Выражение для угла BCD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

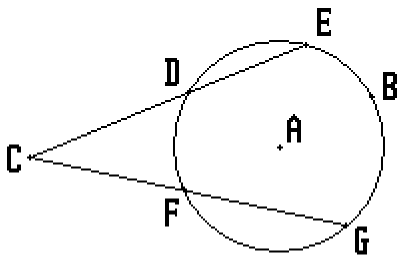
11. Сторона треугольника, у которого одна из оставшихся сторон известна, а другая сторона - "неизв".



$\forall_{ABC}$(актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB))$ $\rightarrow$ существатом$(l(AC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Длина стороны BC известна, а выражение для длины стороны AB имеет тип "неизв". Прямые BC, AB уже встречаются в посылках задачи. Не усматривается принадлежность точки A прямой BC. Уровень срабатывания равен 1.

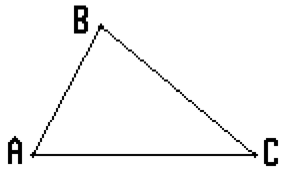
12. Длины отрезков секущих, проведенных из одной точки.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ прямая(CE) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CG) & актив$(l(CD))$ &актив$(l(CF)) \to$ существатом$(l(CE)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения точек D, E, F, G различны. Расстояние CD известно, выражение для расстояния CF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

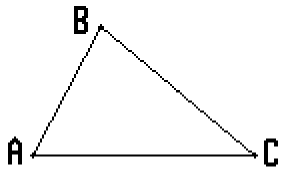
13. Угол треугольника, у которого одна сторона известна, а другая - "неизв".



$\forall_{ABC}($актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB)) \to$ существатом$(\angle(BAC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Прямая AB уже рассматривается в задаче. Не усматривается принадлежность точки A прямой BC. Созданы две версии приема. В первой версии одно из расстояний BC, AB известно, а выражение для другого имеет тип "неизв". Во второй верии аналогичным образом рассматриваются расстояния AC, AB, причем она срабатывает лишь при наличии комментария "плюс". Уровни срабатывания равны 1.

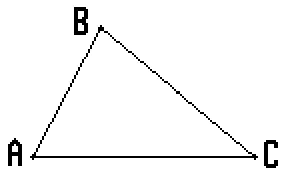
14. Сторона треугольника, лежащая против угла "неизв".



$\forall_{ABC}($актив$(\angle(BAC))$ & актив(прямая$(BC)) \to$ существатом$(l(BC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Требуется наличие комментария "Плюс". Уровень срабатывания равен 3.

15. Угол тругольника, в котором другой угол - "неизв", а длины двух сторон уже введены в рассмотрение.



$\forall_{ABC}($актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC)) \to$ существатом$(\angle(ABC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

16. Площадь треугольника, у которого каждая не известная длина стороны - "неизв".

    $\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) $\to$ существатом(S(фигура(ABC))))

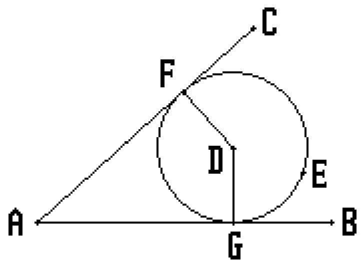
    Антецеденты выделены указателем "усм". Каждое не содержащее неизвестных выражение для длины стороны треугольника имеет тип "неизв", причем хотя бы одна из длин сторон не известна. Уровень срабатывания равен 2.

17. Периметр треугольника, у которого каждая не известная длина стороны - "неизв".

    $\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) $\to$ существатом(периметр(фигура(ABC))))

    Аналогично предыдущему.

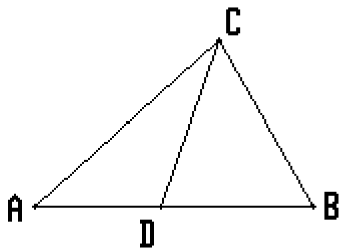
18. Величина угла, в который вписана окружность с радиусом "неизв".

    $\forall_{ABCDEFG}$($F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая(AC) & $G \in$ окружность(DE) & $G \in$ прямая(AB) & прямая(DF) $\perp$ прямая(AC) & прямая(DG) $\perp$ прямая(AB) $\to$ существатом($\angle(BAC)$))

    Антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для радиуса DG имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

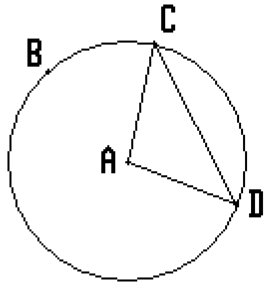
19. Площади треугольников, имеющих общую высоту.

    $\forall_{ABCD}$(актив(S(фигура(ACD))) & $A \in$ прямая(BD) $\to$ существатом(S(фигура(BCD))))

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Вершины треугольников идентифицируются без учета порядка. Выражение для площади треугольника ACD имеет тип "неизв". Обозначение точки A отлично от обозначений точек B, D. Уровень срабатывания равен 3.

20. Центральный угол, опирающийся на хорду.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD)) \rightarrow$ существатом$(\angle(CAD)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для длины хорды CD имеет тип "неизв". Обозначения точек C, D различны, причем прямая CD уже рассматривается в задаче (последние два условия, конечно, вытекают из первого, однако они проверяются в программе приема до него и играют роль ускоряющих фильтров). Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный индикатор "квазиактив"

Индикатор усматривает возможность непосредственно выразить новый числовой атом через числовые атомы, уже рассматриваемые в задаче. Обращение к нему имеет вид "квазиактив(x1 x2 x3 x4)", где x1 - рассматриваемый атом, x2 - список посылок, x3 - список комментариев.

Если нужно отбрасывать случаи, когда числовой атом сразу же выражается через известные параметры задачи, то обращение совпровождается комментарием "неизв". Такие обращения возникают при оценке целесообразности вывода соотношений, у которых прочие параметры известны.

Индикатор имеет следующие приемы:

1. Усмотрение старого атома.

   $\forall_a($актив$(a) \rightarrow$ квазиактив$(a))$

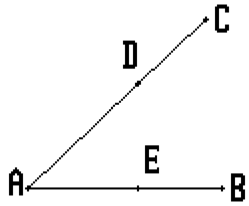
   Антецедент идентифицируется с посылкой. При наличии комментария "неизв" проверяется отсутствие посылки вида $a = c$, где c не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

2. Перестановка лучей угла.

   $\forall_{ABC}($актив$(\angle(ABC)) \rightarrow$ квазиактив$(\angle(CBA)))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. При наличии комментария "неизв" проверяется отсутствие посылки вида $\angle(ABC) = c$, где c не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

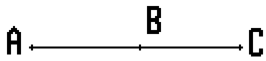
3. Два угла с общими прямыми.



$\forall_{ABCDE}(D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{актив}(\angle(DAE)) \to$ $\text{квазиактив}(\angle(BAC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Введен указатель "развязка". Обозначение точки A отлично от обозначений точек D, E. Обзначения точек C, D и B, E одновременно не совпадают. Если имеется комментарий "неизв", то выражение для угла DAE содержит неизвестные. Уровень срабатывания приема равен 2.

4. Разбиение отрезка на два равных подотрезка.



$\forall_{ABC}(B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ l(AB) = l(BC) \to \text{квазиактив}(l(AC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

5. Перестановка концов вектора.

$\forall_{AB}(\text{актив}(\text{вектор}(AB)) \to \text{квазиактив}(\text{вектор}(BA)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

6. Неатомарное выражение.

$\forall_a(\text{квазиактив}(a))$

Выражение a либо представляет собой переменную, либо имеет заголовком один из символов "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "степень", "умножвект", "плюсвект". Такая ситуация может возникнуть, если числовой атом перед обращением к данному индикатору обрабатывался нормализатором общей стандартизации и был изменен. Очевидно, тогда атом в задаче уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 1.

Пакетный индикатор "возмактив"

Данный индикатор усматривает лишь слабые косвенные признаки того, что числовой атом, пока не введенный в рассмотрение, может оказаться полезным. Обращение к нему имеет вид "возмактив(x1 x2 x3 x4)", где x1 - рассматриваемый атом, x2 - список посылок, x3 - список комментариев. Приемы индикатора таковы:

1. Усмотрение старого атома.

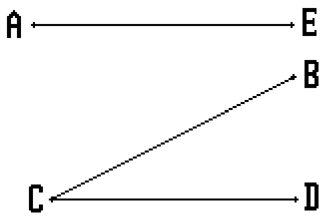
$\forall_a(\text{актив}(a) \to \text{возмактив}(a))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_a$(возмактив(a))

Выражение a - либо переменная, либо не числовой атом. Это означает, что перед обращением к индикатору числовой атом был изменен нормализатором общей стандартизации и, таким образом, уже присутствовал в посылках. Уровень срабатывания тоже равен 1.

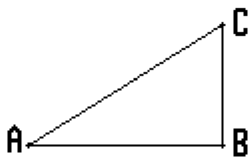
2. Углы при параллельных прямых.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AE) $\parallel$ прямая(CD) $\rightarrow$ возмактив($\angle$(BCD)))

Антецедент выделен указателем "усм". Прямые BC, CD уже рассматриваются в задаче. Обозначения прямых AE, CD различны. Обозначения точек B, C различны. Для ускорения идентификации ориентация лучей угла BCD игнорируется. Уровень срабатывания равен 1.

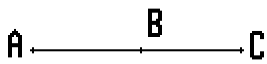
3. Угол прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) $\rightarrow$ возмактив($\angle$(BAC)))

Антецедент выделен указателем "усм". Прямые AB, AC уже рассматриваются в задаче. Обозначения точек A, B, C различны. Имеется комментарий "неизв", который в данном индикаторе играет роль указателя на подключение дополнительных приемов. Уровень срабатывания равен 1.

4. Разбиение отрезка на два подотрезка.



$\forall_{ABC}$($B \in$ прямая(AC) & актив(l(AB)) & актив(l(BC)) $\rightarrow$ возмактив(l(AC)))

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначение точки B отлично от обозначений точек A, C. Уровень срабатывания равен 2.

5. Площадь треугольника.

$\forall_{ABC}$(актив(l(AB)) $\rightarrow$ возмактив(S(фигура(ABC))))

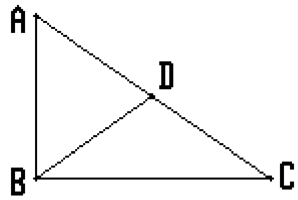
Антецедент выделен указателем "усм". Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания равен 1.

6. Периметр треугольника.

   $\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) $\rightarrow$ возмактив(периметр(фигура(ABC))))

   Антецедент выделен указателем "усм". Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания равен 1.

7. Гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого выделена медиана.



   $\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & актив($l(BD)$) $\rightarrow$ возмактив($l(AC)$))

   Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначение точки D отлично от обозначений точек A, C. Не усматривается, что точка A лежит на прямой BC. Уровень срабатывания равен 2.

Пакетный индикатор "возмсвяз"

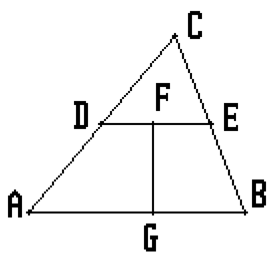
Этот индикатор оценивает перспективность попыток установления связи числового атома с уже имеющимися в задаче числовыми атомами. Он аналогичен предыдущему, но накладывает на атом несколько более сильные требования. Приемы индикатора таковы:

1. Усмотрение старого атома.

   $\forall_a$(возмсвяз(a))

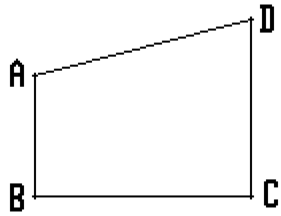
   Выражение a не является числовым атомом, отличным от переменной. Уровень срабатывания равен 1.

2. Отрезок перпендикуляра между двумя параллельными прямыми.



   $\forall_{ABCDEFG}$(прямая(FG) $\perp$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(DE) & $G \in$ прямая(AB) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BC) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(DE)$) & актив($l(AB)$) $\rightarrow$ возмсвяз($l(FG)$))

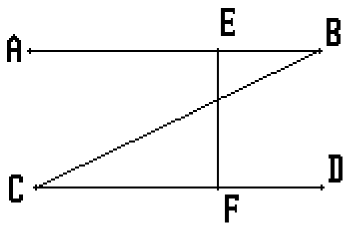
   Антецеденты выделены указателем "усм". Одно из расстояний AB, DE известно, а выражение для другого имеет тип "неизв". Обозначение точки D отлично от обозначений точек A, C, а обозначение точки E - от обозначений точек B, C. Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(BC) \perp$ прямая(CD) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AD)) \rightarrow$ возмсвяз$(l(BC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Либо текущая задача имеет тип "доказать", либо не менее двух из расстояний AB, CD, AD известны. Обозначения точек A, B, а также точек C, D различны. Уровень срабатывания равен 1.

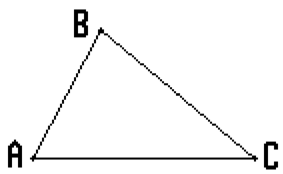
3. Отрезок наклонной между двумя параллельными прямыми.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(AB) \rightarrow$ возмсвяз$(l(BC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние EF имеет тип "квазиактив", а угол ABC определим. Не усматривается принадлежность точки A прямой CD. Уровень срабатывания равен 3.

4. Сторона треугольника, углы которого известны.



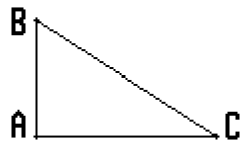
$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(ABC)) \rightarrow$ возмсвяз$(l(AC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Величины углов ABC, BAC известны. Длины сторон AB, BC уже рассматриваются в задаче. Не усматривается принадлежность точки A прямой BC. Для срабатывания приема необходимо наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(ACB)) \rightarrow$ возмсвяз$(l(AC)))$

Аналогично предыдущему.

5. Катет прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(BC))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$ возмсвяз$(l(AC)))$

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(BC))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$ возмсвяз$(l(AB)))$

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$ возмсвяз$(l(AC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Либо выражение для длины гипотенузы BC имеет тип "неизв", либо применим угол ABC. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$ возмсвяз$(l(AB)))$

Аналогично предыдущему, но вместо длины гипотенузы тип "неизв" должна иметь длина катета AC.

6. В задаче уже выделен угол, имеющий ту же вершину.

$\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(ABC)) \to$ возмсвяз$(\angle(DBE)))$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

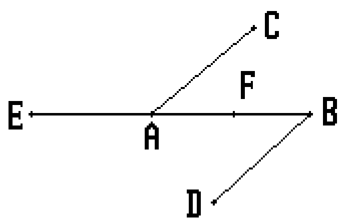
Пакетный индикатор "возмопределимо"

Этот пакетный индикатор представляет собой незначительное ослабление индикатора "определимо". Пока он имеет единственный дополнительный прием, усматривающий "возможную определимость" острого угла прямоугольного треугольника, если известна длина противолежащего катета.

Пакетный индикатор "существравно"

Индикатор отбирает представляющие интерес равенства, хотя бы одна из частей которых представляет собой числовой атом. Обращение к нему имеет вид "существравно(x1 x2 x3 x4)", где x1 - анализируемое равенство, x2 - список посылок, x3 - список комментариев. Приемы индикатора таковы:

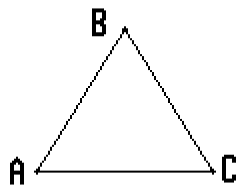
1. Равенство углов, позволяющее усмотреть параллельные прямые.



$\forall_{ABCDEFa}$(актив($\angle(FAC)$) & $A \in$ прямая(BE) & $\angle(FAC) = a$ &
$F \in$ прямая(BE) & точкалуча(A, B, F) & точкалуча(B, A, E) &
разныестороны(C, D, прямая(BE)) $\rightarrow$ существравно($a = \angle(EBD)$))

Третий антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, прочие - выделены указателем "усм". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы перед компиляцией. Не усматривается параллельность прямых AC, BD. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение равнобедренного треугольника.



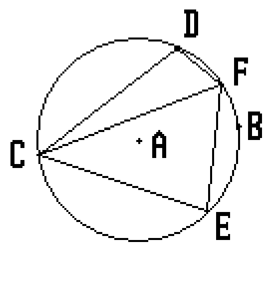
$\forall_{ABC}$(актив($l(AC)$) $\rightarrow$ существравно($l(AB) = l(BC)$))

Антецедент выделен указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Обозначения точек A, C различны. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, у которой выделена лишь прямая основания, а не его длина:

$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AC)) $\rightarrow$ существравно($l(AB) = l(BC)$))

Для срабатывания этой версии необходим комментарий "плюс". Уровень срабатывания равен 2.

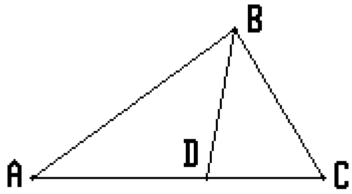
3. Равенство двух хорд окружности, к концам которых уже проведены стороны вписанных углов.



$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB)
& $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(DF)) & актив(прямая(FE))
& актив(прямая(CF)) $\rightarrow$ существравно($l(CD) = l(CE)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначение точки F отлично от обозначений точек C, D, E. Обозначения точек D, E тоже различны. Уровень срабатывания равен 2.

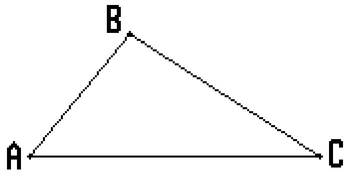
4. Усмотрение биссектрисы треугольника.



$\forall_{ABCD}(D \in$ отрезок(AC) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(CD)) \rightarrow$ существравно$(\angle(ABD) = \angle(DBC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначение точки D отлично от обозначений точек A, C. Прямая AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

5. Усмотрение треугольника, у которого один угол вдвое больше другого.



$\forall_{ABCab}(\angle(BAC) = a$ & $a - 2b = 0 \rightarrow$ существравно$(\angle(ACB) = b))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 2.

Пакетный индикатор "неизвпарам"

Индикатор служит для усмотрения возможности выразить числовой атом через численные параметры, содержащие хотя бы одну неизвестную. Он имеет два приема, связанных с площадью и периметром:

1. Площадь треугольника, стороны которого выражены через численные параметры.

   $\forall_{ABC}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow$ неизвпарам$(S($фигура$(ABC))))$

   Каждая из длин сторон AB, AC, BC либо известна, либо выражена через численные неизвестные, причем хотя бы одна из них не известна.

2. Периметр треугольника, стороны которого выражены через численные параметры.

   $\forall_{ABC}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow$ неизвпарам(периметр(фигура$(ABC))))$

   Аналогично предыдущему.

Пакетный индикатор "квазиактивы"

Индикатор проверяет, что либо один из двух числовых атомов уже рассматривается в задаче, либо они связаны друг с другом через атом, уже рассматриваемый в задаче. Имеется всего два приема:

1. Усмотрение старого атома.

   $\forall_{ab}(\text{квазиактивы}(a, b))$

   Один из атомов a, b уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 1.

2. Разбиение отрезка на два подотрезка.

   $\forall_{ABC}(A \in \text{прямая}(BC) \ \& \ \text{актив}(l(AC)) \to \text{квазиактивы}(l(AB), l(BC)))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

3.7 Обычный и усиленный режимы решателя

Процесс решения задачи человеком редко имеет прямолинейный характер. После первой, зачастую неудачной, попытки решить задачу "в лоб", предпринимается возвращение к исходному условию и реализуются повторные попытки, в которых каждый шаг анализируется более глубоко и связан с привлечением дополнительных средств. Фактически, на каждом шаге здесь имеет место определенный перебор, направленный на усмотрение какого-то локального выигрыша. Трудоемкость перебора на повторных попытках может достигать весьма значительной величины, а привлекаемые средства могут оказаться весьма удаленными от исходных понятий задачи. Иногда для решения задачи приходится временно отвлекаться от нее и развивать примыкающие разделы теории.

Соответственно, и при обучении решателя нет смысла ограничиваться только лобовым подходом к решению задачи. Впрочем, при первичном обучении проще всего начинать все-таки именно с него. Когда эксперт разбивает ход решения задачи на шаги, ему уже известны все подводные камни предметной области, и вполне естественным является желание вводить такие приемы, срабатывание которых являлось бы хорошо мотивированным. К сожалению, часто хорошо мотивированным оказывается применение сразу целого блока логических переходов, в то время как мотивировка отдельных шагов внутри блока трудно объяснима. В результате появляются приемы, имеющие характер "заготовок" для специальных ситуаций. В задачниках это явление хорошо известно: предыдущая задача иногда может рекомендоваться как прием для решения следующей. Естественно, ее имеет смысл запомнить и сохранить в базе приемов решателя. Такое накопление "стандартных заготовок" может выглядеть, как некоторый обман, однако он подсказан самой логикой усиления лобового режима решателя. Результатом оказывается существенное ускорение получения ответов для стандартных задач. Оправданием может служить и то, что эксперты тоже обычно располагают большим запасом стандартных заготовок и сразу усматривают их в задачах.

С другой стороны, решатель все же должен справляться с задачами и без искусственных заготовок, которые для всех случаев жизни заранее запасти в базе приемов не удастся. Поэтому какие-то слабо мотивированные приемы ему нужны. Чтобы подключить их к решению задачи, имеются две возможности.

Первая - поднять уровень срабатывания слабо мотивированных приемов. В общем, иногда это удается сделать безболезненно, и за счет таких приемов решаются многие задачи. Однако, здесь имеются две трудности. Первая заключается в том, что на высоких уровнях срабатывания часто размещаются и сильно мотивированные действия. Они попадают туда из-за проблем, связанных с переключением внимания: проще бывает не понижать веса посылок для обеспечения срабатывания приема, так как это всегда притормаживает процесс решения, а продублировать прием, чтобы он мог сработать и на высоком текущем уровне сканирования. В этой ситуации поднятые даже на очень высокий уровень слабо мотивированные приемы будут сильно "зашумлять" работу системы. Вторая трудность заключается в том, что иногда локальный перебор, использующий слабо мотивированные переходы, необходимо применять в самом начале решения задачи. Он позволит найти какой-то ключевой момент, без которого стандартными средствами задача быстро окажется заведенной в тупик, и тогда подключение того же перебора на последующих этапах уже не поможет.

Вторая возможность подключения слабо мотивированных приемов заключается в том, чтобы после неудачной лобовой попытки решения возвратиться к исходной формулировке задачи и повторить попытку, разрешая теперь пользоваться дополнительными приемами. Такие приемы не должны предпринимать каких-либо скоропалительных изменений задачи, тем более слабо мотивированных. Однако, они могут обращаться к различного рода циклам локального перебора для поиска очередного "сильного" хода решения. Внутри этих циклов и будут допускаться слабо мотивированные попытки. Данный режим решения, в отличие "обычного" лобового режима решателя, условимся называть усиленным. Хотя пока рассматривается только один уровень усиления, впоследствии, видимо, понадобится целая шкала таких уровней, с постепенным подключением все более мощных дополнительных средств, но и со все более медленным временным масштабом процессов.

Еще раз подчеркнем, что смысл усиленного режима состоит не в ослаблении фильтрации срабатываний приемов - такое ослабление сделает систему неспособной решать даже простые задачи. Эффект усиления достигается за счет более осмотрительного, с анализом на достаточно большую глубину, каждого отдельного шага преобразований задачи. Хотя эти шаги могут оказаться весьма трудоемкими и в разы замедлят решение задачи, но замедление не будет иметь экспоненциального характера, а списки посылок и условий не окажутся захламлены огромным числом ненужных утверждений. Видимо, на достаточно высоких уровнях усиления придется прибегать к синтезу дополнительных приемов по имеющимся теоремам, а также к циклам исследований в базе теорем.

Развитие усилителя было начато на примере геометрических вычислительных задач. Чтобы подключить усиленный режим, вводится комментарий "усиление" к посылкам исходной задачи. Он может появиться, если изначально задача из задачника имела в качестве дополнительной посылки символ "усиление", либо если имел место откат к повторной попытке после неудачной лобовой попытки. Для геометрических задач такой откат предпринимается автоматически - если был получен отказ либо если был превышен заданный лимит трудоемкости. Сейчас этот лимит составляет 350 млн. шагов работы интерпретатора, что превышает наибольшую трудоемкость решения геометрических задач, собранных в задачнике.

Наиболее эффективным средством усиления решателя в планиметрии оказались пакетные анализаторы. Они получают в качестве входного данного копию текущей задачи на исследование и преобразуют ее с помощью собственного списка приемов, существенно меньшего, чем вся база приемов сканирования задач. Это обеспечивает значительное ускорение и позволяет провести перебор на сравнительно большую глубину. Источником усиления здесь является ограничение применяемых средств. В одном анализаторе акцент делается на применение теоремы косинусов, в другом - на анализ равных углов и фигур, в третьем - на соотношения пропорциональности, и т.д. Обращения к пакетным анализаторам реализуются приемами сканирования задач, срабатывающими на различных уровнях, в том числе на совсем маленьких. По мере повышения уровня увеличиваются ресурсы, отводимые на попытку обращения. При завершении работы анализатора в его списке посылок отбираются новые ценные факты, которые переносятся в список посылок текущей задачи. Таким образом, несмотря на большое количество выводимых анализаторами вспомогательных утверждений, размеры списка посылок основной задачи растут умеренным образом.

Подробное описание пакетных анализаторов, используемых усилителем в планиметрии, мы оставим на конец данной главы. Здесь же ограничимся краткой их характеризацией.

1. Анализатор "смчертеж". Этот анализатор выполняет усиленный качественный анализ чертежа, расматривая всевозможные равенства для углов и расстояний. В частности, он пытается применять всеми возможными способами признаки равенства треугольников. В некоторых задачах важные особенности чертежа могут не обнаруживаться стандартными "сильно мотивированными" приемами, а усматриваться лишь после полного выписывания всех или почти всех возможных простейших связей между углами и расстояниями. Эту работу желательно не откладывать до более высоких уровней, так как она может пустить ход решения по совсем другому руслу. Соответственно, обращение к анализатору происходит уже на уровне 3. Оно подкрепляется обращением на уровне 5, имеющим увеличенный лимит трудоемкости. Применение анализатора в "обычных" задачах, где все особенности чертежа усматриваются стандартными приемами, бесполезно и лишь замедляет решение.

2. Анализатор "смпропорции". Рассматриваются всевозможные соотношения пропорциональности, которые можно выписать для расстояний.

   В действительности список его приемов значительно шире, так как для усмотрения ценных следствий, кроме слабо мотивированных "собственных" приемов анализатора, необходимо иметь большой запас сопровождающих действий, выполняющих текущую стандартизацию контекста. В частности, анализатор должен выполнять простейшую стандартизацию алгебраических выражений. Он также должен выводить новые соотношения для числовых атомов, используя не связанные непосредственно с его спецификой приемы, если эти соотношения необходимы как завершающий шаг для получения искомого ценного факта. Обычно здесь требуются сильно мотивированные приемы основного решателя, которые приходится копировать в анализаторе.

   Сделанное замечание в полной мере относится и к другим анализаторам усилителя. Их приемы составляются из двух частей: собственно слабо мотивированные приемы для предпринимаемого анализатором поиска в глубину, и сопровождающие сильно мотивированные приемы, необходимые для усмотрения ценных находок. Вторая часть обычно значительно больше первой, причем ее укомплектование имеет характер дублирования приемов основного решателя. Для уменьшения дублирования созданы "подананализаторы", в которых собраны наиболее часто применяемые сопровождающие приемы. Необходимость долгое время пополнять при обучении шлейф сопровождающих приемов анализатора является существенным недостатком данной версии усилителя. Вместе с тем, полное отсечение основной базы приемов оказывается ее бесспорным достоинством, так как сильно ускоряет вычисления.

3. Анализатор "окружности". Рассматриваются соотношения для углов и расстояний, связанные с окружностью (пересекающиеся хорды, касательные и секущие, вписанные и центральные углы). Это самый большой из анализаторов усилителя, использующий множество сопровождающих приемов.

4. Анализатор "синусы". Рассматриваются соотношения для синусов углов (теорема синусов, острый угол прямоугольного треугольника).

5. Анализатор "косинусы". Рассматриваются соотношения, определяемые теоремой косинусов.

6. Анализатор "тангенсы". Рассматриваются соотношения для тангенсов углов (главным образом - в прямоугольных треугольниках).

7. Анализатор "проекции". Рассматриваются соотношения, возникающие при ортогональном проектировании для точек параллельных прямых.

8. Анализатор "геомразличия". Рассматриваются качественные связи между элементами чертежа, извлекая из них утверждения о различии точек и прямых.

9. Анализатор "смотрезок". Рассматриваются утверждения о принадлежности точек отрезкам и лучам.

10. Анализатор "смуглы". Рассматриваются утверждения о равенстве углов и параллельности прямых.

Перечисленные анализаторы обращаются к двум "поданализаторам" - "общгеом" и "общалг", в которых собраны простейшие общие геометрические и алгебраические приемы. Такие "поданализаторы" называются блоками анализаторов. По своей архитектуре они несколько отличаются от анализаторов: обращение к блоку анализатора происходит относительно уже выделенной точки сканирования, выполняемого анализатором. Поэтому блоку анализатора не нужно заботиться об организации сканирования. В остальном приемы блока анализатора такие же, как у анализатора.

3.8 Схема решения геометрических задач на вычисление

Переходя к перечислению приемов решения геометрических задач, будем сначала иметь в виду задачи двух типов - на вычисление и на доказательство. В последних разделах данной главы будут затронуты также задачи на построение. Примеры формулировок геометрических задач различных типов были приведены в первом томе монографии. Геометрические задачи на доказательство решаются так же, как любые другие задачи на доказательство. Схема решения геометрических задач на вычисление требует небольших пояснений.

Напомним, что задача на вычисление формализуется как задача на описание, имеющая цель "известно $a_1 \ldots a_n$", где $a_1, \ldots, a_n$ - переменные для всех известных параметров. Если таковых нет, то задача имеет цель "известно". Как и обычно, цель "неизвестные $x_1 \ldots x_n$" перечисляет все неизвестные задачи. В ответе должно содержаться их явное выражение через известные параметры. Посылки задачи дают логическое описание исходных данных - связей между точками, прямыми, окружностями и пр. В них, кроме известных параметров, могут встречаться другие переменные, не имеющие права войти в ответ. Условия задачи, как правило, суть равенства, выражающие неизвестные через параметры посылок (например, $x = l(AB)$).

Решение задачи на описание, Z имеющей цель "известно ...", почти сразу сводится к решению вспомогательной задачи Z' на исследование - блока анализа задачи Z. Задача Z' имеет своими неизвестными все неизвестные задачи Z, а также все переменные ее посылок, не представленные в цели "известно ...". Известными параметрами задачи Z' оказываются только переменные, указанные в этой цели. Посылки задачи Z' получаются объединением посылок и условий задачи Z. Вместо цели "известно ...", задаче Z' придается цель "известно", без явного указания параметров. Решение задачи Z' представляет собой вывод следствий, иногда прерываемый обращением к вспомогательным задачам (например, для решения найденных систем уравнений). Вывод дизъюнкций в задаче Z' порождает откат для разбора случаев в задаче Z, который реализуется по стандартной схеме. При этом текущий блок анализа Z' дублируется для каждого из подслучаев. Если в задаче Z' удается вывести равенства, выражающие значения неизвестных через известные параметры, то предпринимается упрощение найденного ответа, возвращение к внешней задаче Z и немедленная выдача ответа. Это делается реализованным на ЛОСе стандартным приемом, символа "равно", завершающим решение задач с целью "известно" и рассмотренным во втором томе.

3.9 Приемы, связанные с символом "точка"

Переходим к рассмотрению основной части геометрического решателя - приемам сканирования задач. Начнем с приемов, относящихся к символу "точка".

Усмотрение различия точек

Во многих геометрических приемах обоснование корректности связано с доказательством различия точек. Такое доказательство обычно выполняется проверочным оператором "разныеточки", насчитывающим более сотни приемов и описываемым ниже. Фактически проверяемое условие имеет вид $\neg(A = B)$, однако приемы оператора относятся только к точкам, и чтобы не смешивать их с приемами операторов, усматривающих различие объектов других типов, приходится использовать синоним - "разныеточки(A B)". Сразу заметим, что для усмотрения различия прямых введен аналогичный оператор "разныепрямые".

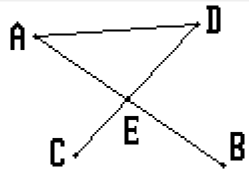
Следующий прием использует проверочный оператор "разныеточки" для усмотрения истинности условия задачи на доказательство, выражающего различие двух точек:

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{разныеточки}(A, B) \to \neg(A = B))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм", т.е. заменяет условие различия точек на константу "истина". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0. На этой же теореме основаны еще два приема. Первый применяется к условию задачи на описание, причем выражения A, B не содержат неизвестных, и имеет место этап редактирования ответа. Его уровень срабатывания равен 0. Второй прием применяется в условии задачи любого типа, причем отрицание равенства точек не обязательно корневое. Блокируется применение приема в задачах на преобразование, имеющих цель "класс" (исключение уравнений кривых), а также в задачах на описание, имеющих цель "замещение" (переформулировка утверждений без использования заданных переменных). Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}(0 < l(AB) - l(AC) \to \neg(B = C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDE}(\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)$
$\&\ \neg(A = E)\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(AD)) \to \neg(A = D))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Прочие антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения точек D, E различны. Уровень срабатывания равен 4.

Отождествление двух точек по принадлежности их двум пересекающимся прямым

$\forall_{ABCDEF}(E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&$
$F \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)) \to E = F)$

Прием имеет заголовок "вывод". Так как в планиметрии подавляющее большинство приемов имеют такой заголовок, то начиная с этого момента будем уточнять его лишь в особых случаях. Точно так же, по умолчанию подразумеваем, что прием применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование.

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Проверяется, что обозначения точек E,F, а также прямых AB, CD различны. Кроме того, не усматривается, что точки A, B лежат на прямой CD либо точки C, D лежат на прямой AB. Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение противоречия в условии совпадения двух точек

$\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ A = B\ \&\ \text{разныеточки}(A, B) \to \text{ложь})$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Такая цель означает, что ранее имел место разбор случаев, и текущая задача соответствует одному из подслучаев. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "точкапривязки(равно)" обеспечивает начало попытки применения приема с посылки вида $A = B$. Введен исключительно сильный ограничитель трудоемкости. Для блокировки повторной попытки используется комментарий "разныеточки". Уровень срабатывания равен 0.

Усмотрение точки

$\forall_{BK}$(тчкоорд(K, B) – точка)

$\forall_{ABa}$(тчк(A, B, a) – точка)

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Указатель "смравно" обеспечивают применение приема в ситуации, когда точка обозначена переменной, а в посылках содержится равенство данной переменной выражению "тчк(...)" либо "тчкоорд(...)". Указатель "точкапривязки(точка)" необходим, чтобы первый указатель не оказался проигнорирован. Уровень срабатывания равен 2.

Выдача ответа задачи на описание

Теорема приема имеет вид "A – точка". Заголовок приема - "ответзадачи". Переменная A идентифицируется с неизвестной. Указатель "смответ(1)" означает, что условие задачи на описание идентифицируется с первым конъюнктивным членом теоремы приема. Указатель "исключнеизв(x26)" определяет проверку отсутствия других условий с A и переход к задаче, полученной из текущей исключением неизвестной A. Уровень срабатывания равен 1.

Существование точки

$\forall_A(A$ – точка $\rightarrow \exists_B(B$ – точка $\& \neg(A = B)))$

Прием имеет заголовок "связка". Он применяется в условии задачи на описание, решаемой для исключения своих несущественных неизвестных. Переменная B идентифицируется с неизвестной, причем для этой неизвестной имеется всего два условия - B – точка и $\neg(A = B)$. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_B(\exists_A(A$ – точка))

Аналогично предыдущему. Фиктивный внешний квантор по переменной B введен для соблюдения понятного компилятору формата теоремы приема.

Проверочный оператор "разныеточки"

Оператор предназначен для проверки утверждения "разныеточки(A B)", эквивалентного утверждению $\neg(A = B)$, но рассматриваемого только в таких контекстах, где A, B - точки. В посылках и условиях задач символ "разныеточки" не используется. Обращение к оператору имеет вид "разныеточки(x1 x2 x3 x4 x5)", где x1, x2 - выражения для точек A, B. Как и обычно, x3 - список посылок, x4 - список комментариев, а выходной переменной x5 присваивается список использованных посылок. Так как отношение "разныеточки(A, B)" симметричное, то компилятор вставляет в начале программы каждого приема оператор, перечисляющий обе перестановки операндов A, B. В пакете имеются следующие приемы:

1. Вершины многоугольников.

(a) Треугольник.

$\forall_{ABC}(\triangle(ABC) \to \text{разныеточки}(A, B))$

Указатель, разрешающий перестановки операндов при идентификации, не требуется, так как символ "треугольник" охарактеризован как коммутативный. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Прямоугольник.

$\forall_{ABCD}(\text{прямоугольник}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, B))$

$\forall_{ABCD}(\text{прямоугольник}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, C))$

В первом приеме разрешены произвольные циклические перестановки операндов, во втором - только однократный циклический сдвиг, позволяющий рассматривать точки B, D. Уровни срабатывания равны 1.

(c) Квадрат.

$\forall_{ABCD}(\text{квадрат}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, B))$

$\forall_{ABCD}(\text{квадрат}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, C))$

Здесь и для других четырехугольников - аналогично предыдущему.

(d) Трапеция.

$\forall_{ABCD}(\text{трапеция}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, B))$

$\forall_{ABCD}(\text{трапеция}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, C))$

(e) Параллелограмм.

$\forall_{ABCD}(\text{параллелограмм}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, B))$

$\forall_{ABCD}(\text{параллелограмм}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, C))$

(f) Ромб.

$\forall_{ABCD}(\text{ромб}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, B))$

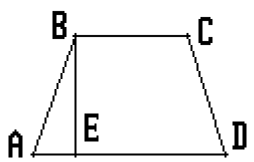
$\forall_{ABCD}(\text{ромб}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, C))$

(g) Четырехугольник.

$\forall_{ABCD}(\text{четырехугольник}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, B))$

$\forall_{ABCD}(\text{четырехугольник}(ABCD) \to \text{разныеточки}(A, C))$

(h) Основание высоты равнобедренной трапеции отличается от конца ее большего основания.



$\forall_{ABCDE}(\text{трапеция}(ABCD) \,\&\, l(AB) = l(CD) \,\&\, \text{прямая}(BE) \perp \text{прямая}(AD)$
$\to \text{разныеточки}(A, E))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем для второго введен указатель "равно", позволяющий усматривать равенство по транзитивности. Третий антецедент выделен указателем "усм". Указатель "контрсерия" обеспечивает попытку идентификации трапеции с изменением порядка точек на противоположный. Уровень срабатывания равен 3.

(i) Точка пересечения диагоналей четырехугольника отлична от его вершины.

$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник($ABCD$) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) $\to$ разныеточки(E, A))

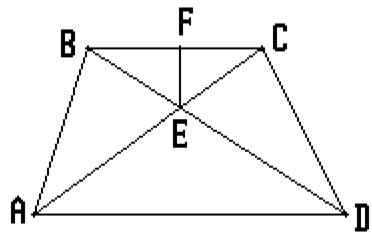
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка точек. Допускается также замена заголовка на символы "ромб", "квадрат", "прямоугольник", "параллелограмм", "трапеция". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(j) Вершины правильного многоугольника.

$\forall_{ABDij}$(правмногоугольник(D) & $A = D(i)$ & $B = D(j) \to$ разныеточки(A, B))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Заметим, что D - выражение вида "набор($C_1 \ldots C_n$)", перечисляющее вершины многоуольника $C_1, \ldots, C_n$. Для перечисления элементов набора D компилятор использует идентифицирующий оператор "смэлемент". Фильтр "не(равно(x9 x10))" проверяет различие значений i, j. Уровень срабатывания равен 3.

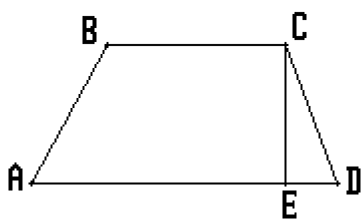
(k) Проекция точки пересечения диагоналей трапеции на ее сторону.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция($ABCD$) & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(AC) & прямая(EF) $\perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(BC) $\to$ разныеточки(C, F))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка точек на противоположный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(l) Проекция конца верхнего основания трапеции на нижнее основание.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция($ABCD$) & прямая(CE) $\perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AD) $\to$ разныеточки(A, E))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

2. Различие точек, взятых на противоположных сторонах четырехугольника.

$\forall_{ABCDEF}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая$(AD) \to$ разныеточки(E,F))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки точек и замена заголовка на символы "ромб", "прямоугольник", "квадрат". Последние два антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая$(AD) \to$ разныеточки(E,F))

Аналогично предыдущему, но циклические перестановки не допускаются. Вместо заголовка "трапеция" возможен заголовок "Трапеция".

$\forall_{ABCDEF}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ отрезок$(AD) \to$ разныеточки(E,F))

Аналогично предыдущему. Допускаются циклические перестановки вершин и замена заголовка на символы "трапеция", "Трапеция".

3. Усмотрение положительного расстояния между точками.

   $\forall_{AB}(\neg(l(AB)=0) \to$ разныеточки(A,B))

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем подставляется выражение для расстояния, полученное с помощью нормализатора "нормрасстояние". Обычно это значение, определяемое равенством из посылок. Во избежание обратного перехода от проверочных операторов "усмне0" и "усмменьше" к оператору "разныеточки", при обращении вводится комментарий "разныеточки". Аналогичным образом используется комментарий "усмне0", блокирующий прием, если обращение к оператору "разныеточки" произошло из оператора "усмне0". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDab}(ab=l(CD)$ & $l(AB)=a$ & $\neg(A=B)$ & $\neg(b=0) \to$ разныеточки(C,D))

   Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Выражение b константное. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDab}(l(CD)=al(AB)/b$ & $\neg(C=D) \to$ разныеточки(A,B))

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ABCDEFabcd}(l(EF)=cl(AB)/d$ & $l(CD)=al(AB)/b$ & $\neg(C=D)$ & $\neg(c=0) \to$ разныеточки(E,F))

   Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Ускоряющие фильтры проверяют вхождение переменных E,F в левую часть первого антецедента и переменных A,B во второй антецедент. Блокируются попытки перестановки частей равенств при идентификации. Уровень срабатывания равен 5.

   $\forall_{ABCDab}(l(AB)=al(CD)/b$ & $\neg(C=D)$ & $\neg(a=0) \to$ разныеточки(A,B))

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит символа "расстояние". Уровень срабатывания равен 5.

   $\forall_{ABCDEab}(ab=l(CD)$ & $l(AB)=a$ & $\triangle(ABE)$ & $\neg(b=0) \to$ разныеточки(C,D))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Выражение b константное. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFGabcd}(l(EF) = cl(AB)/d \ \& \ l(CD) = al(AB)/b \ \& \ \triangle(CDG) \ \& \ \neg(c = 0) \to$ разныеточки$(E, F))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDab}(l(CD) = al(AB)/b \ \&$ разныеточки$(C, D) \to$ разныеточки$(A, B))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выполняет рекурсивное обращение. Для блокировки повторного обращения к приему используется комментарий (разныеточки пропорциональны). Обращение к приему предпринимается только при наличии комментария "разныеточки", указывающего на усиленную проверку. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

4. Условия принадлежности и непринадлежности.

   $\forall_{ABD}(\neg(A \in B) \ \& \ D \in B \to$ разныеточки$(A, D))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

5. Окружность.

   (a) Отличие центра окружности от точки на окружности.

   $\forall_{ABC}(C \in$ окружность$(AB) \to$ разныеточки$(A, C))$

   $\forall_{ABCD}(C \in$ Окружность$(ABD) \to$ разныеточки$(A, C))$

   Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Отличие центров касающихся окружностей.

   $\forall_{ABCD}($внешкасаются(окружность(AB), окружность$(CD)) \to$ разныеточки$(A, C))$

   $\forall_{ABCD}($внутркасаются(окружность(AB), окружность$(CD)) \to$ разныеточки$(A, C))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приемов равен 1.

   (c) Отличие центра окружности от точек, лежащих на сторонах описанного около нее треугольника либо их продолжениях.

   $\forall_{ABCDPQ}($окружность(PQ)вписана в фигура$(ABC) \ \& \ D \in$ прямая$(AB) \to$ разныеточки$(P, D))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем идентификация вершин треугольника происходит без учета их порядка. Второй антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

   (d) Различие точек окружности, на которые опирается ненулевой центральный угол.

   $\forall_{ABCD}(A \in$ окружность$(BC) \ \& \ D \in$ окружность$(BC) \ \& \ \neg(\angle(ABD) = 0) \to$ разныеточки$(A, D))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCD}(A \in$ окружность(BC) & $D \in$ окружность(BC) &
$\neg$(длина(дуга$(BAD)) = 0) \to$ разныеточки$(A, D))$

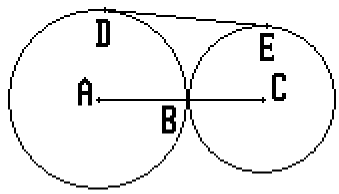
Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Должна существовать посылка, содержащая выражение "длина(дуга(BAD))". Уровень срабатывания равен 2.

(e) Различие концов диаметра.

$\forall_{ABC}(C \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок$(BC) \to$ разныеточки$(B, C))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

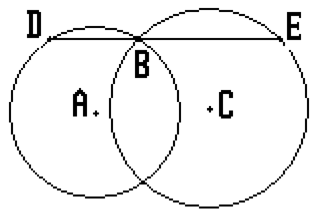
(f) Отличие точки касания общей касательной двух внешним образом касающихся окружностей от точки касания этих окружностей.



$\forall_{ABCDE}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CB)) &
прямая(DE) – касательная к окружность(AB) & прямая(DE) –
касательная к окружность(CB) & разныеточки(D, E) & $D \in$
окружность(AB) & $E \in$ окружность$(CB) \to$ разныеточки$(B, E))$

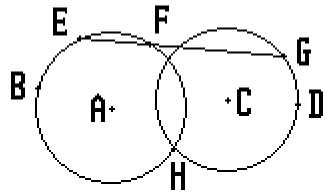
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Ускоряющий фильтр проверяет различие обозначений точек D, E. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Отличие центров пересекающихся окружностей, имеющих с некоторой прямой три общие точки.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AF) & актив(окружность(CG)) &
$D \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) & $E \in$ окружность(CG) &
$B \in$ окружность(CG) & $B \in$ прямая(DE) & разныеточки(B, D) &
разныеточки$(D, E) \to$ разныеточки$(A, C))$

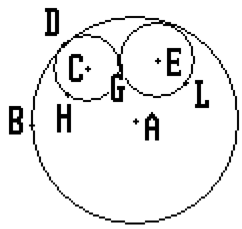
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Ускоряющие фильтры проверяют различие обозначений точек B, D, E. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFGH}(E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) & $G \in$ прямая(EF) & разныеточки(E, F) & разныеточки(F, G) & разныеточки(E, G) & актив(окружность(AB)) & актив(окружность(CD)) & $H \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность$(CD) \rightarrow$ разныеточки$(A, C))$

Антецеденты "актив(...)" идентифицируются с посылками, антецеденты "разныеточки(...)" реализуют рекурсивные обращения. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

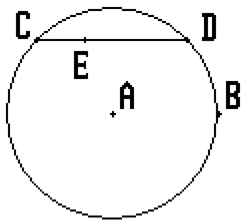
(h) Отличие точек внешнего и внутреннего касания для двух окружностей, расположенных внутри третьей.



$\forall_{ABCDEGHL}$(внешкасаются(окружность(CH), окружность(EL)) & внутркасаются(окружность(CH), окружность(AB)) & внутркасаются(окружность(EL), окружность(AB)) & $D \in$ окружность(CH) & $D \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CH) & $G \in$ окружность$(EL) \rightarrow$ разныеточки$(D, G))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

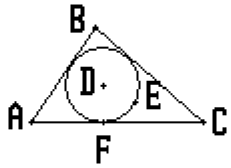
(i) Отличие центра окружности от точки на хорде, не являющейся ее серединой.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(CD) & $\neg(l(DE) - l(CE) = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, E))$

Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Ускоряющие фильтры проверяют, что расстояния CE, DE уже введены в рассмотрение, причем выражения для них различны. Уровень срабатывания равен 5.

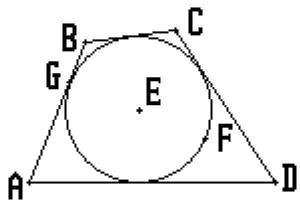
(j) Отличие точки касания вписанной в треугольник окружности от вершины треугольника.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая$(AC) \to$ разныеточки(A, F))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Идентификация вершин треугольника происходит без учета их порядка. Уровень срабатывания равен 3.

(k) Отличие точки касания вписанной в четырехугольник окружности от вершины четырехугольника.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ &
$G \in$ окружность(EF) & $G \in$ прямая$(AB) \to$ разныеточки(G, B))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 1.

(l) Отличие центра окружности, описанной около правильного треугольника, от точки, взятой на его стороне или ее продолжении.

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(AB) описана около фигура(CDE) & $l(CD) = l(CE)$& $l(CD) = l(DE)$ & $F \in$ прямая$(CD) \to$ разныеточки(A, F))

$\forall_{ABCDEFG}$(Окружность(ABG) описана около фигура(CDE) & $l(CD) = l(CE)$ & $l(CD) = l(DE)$ & $F \in$ прямая$(CD) \to$ разныеточки(A, F))

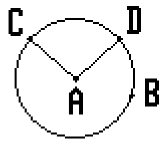
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - выделен указателем "усм". Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор"; обе их части обрабатываются нормализатором "нормрасстояние". Уровень срабатывания равен 4.

(m) Отличие центра окружности, описанной около прямоугольника, квадрата либо ромба, от точки на его стороне.

$\forall_{ABCDEFG}$(квадрат$(ABCD)$ & окружность(EF)описана около фигура($ABCD$) & $G \in$ прямая$(AB) \to$ разныеточки(E, G))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Указатель "вариант" разрешает вместо символа "квадрат" рассматривать при идентификации символы "прямоугольник" и "ромб". Уровень срабатывания равен 4.

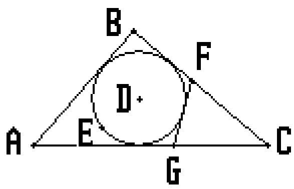
(n) Различие точек окружности, принадлежащих различным прямым, проходящим через ее центр.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(AD)) \to$ разныеточки$(C, D))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

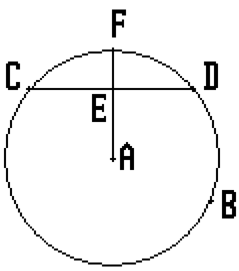
(o) Касательная к вписанной окружности, пересекающая две стороны треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}($окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & $F \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(AC) & разныеточки$(C, F) \to$ разныеточки$(A, G))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий и четвертый - выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

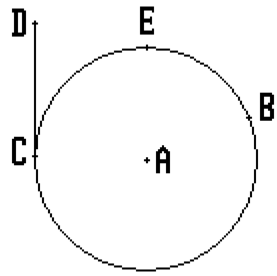
(p) Различие концов хорды, пересекающейся с радиусом в точке, не лежащей на окружности.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность & $D \in$ окружность & $F \in$ окружность & $E \in$ отрезок(CD) & $E \in$ прямая(AF) & $0 < l(AF) - l(EF)$ & разныеточки$(E, F) \to$ разныеточки$(C, D))$

Последние два антецедента обрабатываются проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

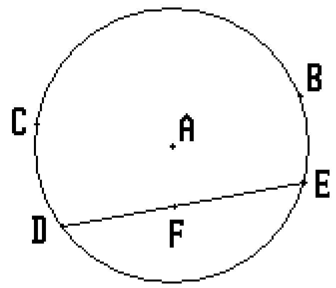
(q) Отличие точки на касательной от точки окружности.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & $C \in$ окружность(AB) & разныеточки(C, D) & $E \in$ окружность$(AB) \to$ разныеточки$(D, E))$

Третий антецедент реализует рекурсивное обращение, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

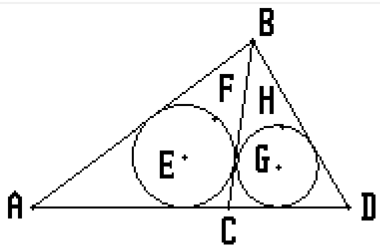
(r) Отличие точки окружности от внутренней точки хорды.



$\forall_{ABCDEF}(F \in$ отрезок(DE) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & разныеточки(D, F) & разныеточки$(F, E) \to$ разныеточки$(F, C))$

Первые антецеденты выделены указателем "усм", два последних - реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 5.

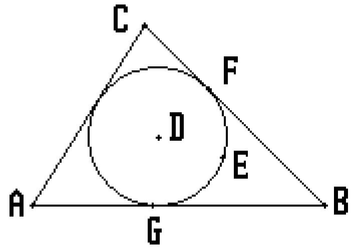
(s) Различие центров окружностей, вписанных в смежные треугольники.



$\forall_{ABCEFGH}$(окружность(EF)вписана в фигура(ABC) & окружность(GH) вписана в фигура(BCD) & $C \in$ отрезок$(AD) \to$ разныеточки$(E, G))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем порядок вершин треугольников игнорируется. Последний антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

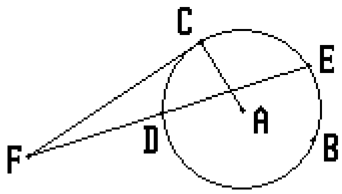
(t) Различие точек касания вписанной окружности со сторонами треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ прямая(BC) & $F \in$ окружность(DE) & $G \in$ прямая(AB) & $G \in$ окружность(DE) $\to$ разныеточки(F, G))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин треугольника игнорируется. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

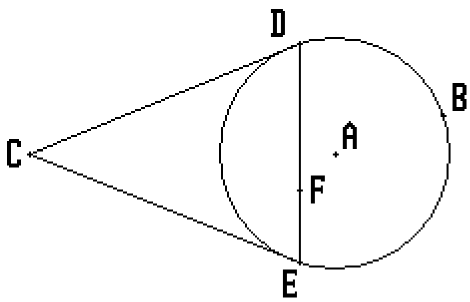
(u) Отличие точки касания от точки окружности, лежащей на секущей.



$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & прямая(CF) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & разныеточки(D, E) $\to$ разныеточки(C, E))

Последний антецедент выделен проверочным оператором, прочие - выделены указателем "усм". Ускоряющие фильтры проверяют отличие обозначения точки D от обозначений точек C, E. Уровень срабатывания равен 3.

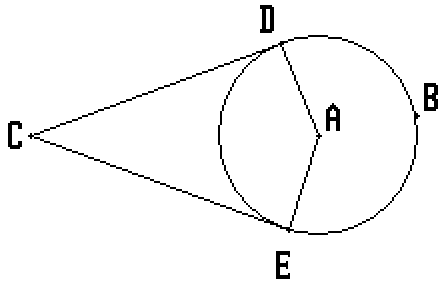
(v) Центр окружности не лежит на прямой, проходящей через точки касания двух касательных, проведенных из общей точки.



$\forall_{ABCDEF}$($D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая(CD) $\perp$ прямая(AD) & прямая(CE) $\perp$ прямая(AE) & $F \in$ прямая(DE) & разныеточки(D, E) $\to$ разныеточки(A, F))

Последний антецедент обрабатывается проверчным оператором, прочие - выделены указателем "усм". Проверяется различие обозначений точек D, E, F. Уровень срабатывания равен 4.

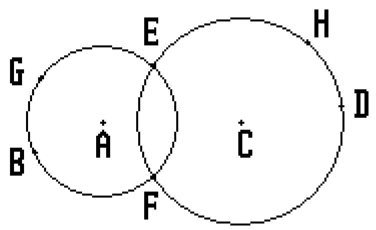
(w) Различие точек касания с двумя касательными, проведенными из общей точки.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & прямая$(AD) \perp$ прямая(CD) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) &
разныепрямые(прямая(CD), прямая$(CE)) \to$ разныеточки$(D, E))$

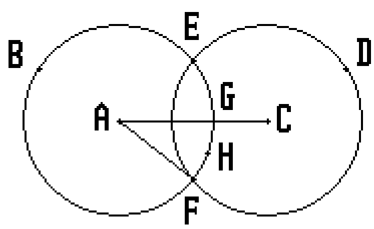
Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, прочие - выделены указателем "усм". Проверяется различие обозначений прямых CD, CE и различие обозначений точек D, E. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

(x) Две пересекающиеся окружности.



$\forall_{ABCDEFGH}(G \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & разныеточки(E, H) & разныеточки(F, H) & разныеточки$(A, C) \to$ разныеточки$(G, H))$

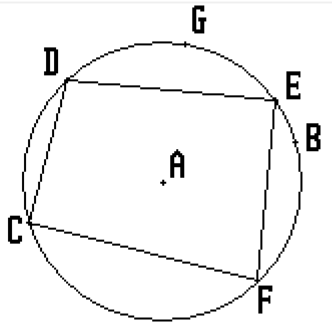
Последние четыре антецедента реализуют рекурсивные обращения, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEFGH}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $H \in$ дуга(AGF)
& разныеточки(E, F) & разныеточки(A, C) & точкалуча(A, C, G) & $G \in$ окружность$(AB) \to$ разныеточки$(E, H))$

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, шестой и седьмой - реализуют рекурсивные обращения. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

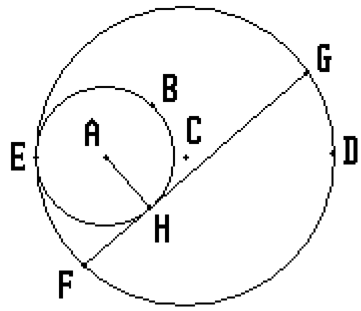
(y) Вписанный четырехугольник.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(AB)описана около фигура$(CDEF)$ &
$G \in$ дуга$(ADE) \to$ разныеточки$(G,F))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. При этом допускается циклическая перестановка веришин и изменение их порядка на обратный. Уровень срабатывания равен 5.

(z) Две окружности, касающиеся внутренним образом.



$\forall_{ABCDEFGH}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)) &
$E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $H \in$ окружность(AB)
& прямая$(FG) \perp$ прямая(AH) & $H \in$ прямая(FG) & $F \in$ окружность(CD)
& $G \in$ окружность(CD) & разныеточки$(F,G) \to$ разныеточки$(E,G))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - реализует рекурсивное обращение. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

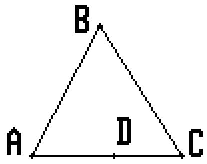
6. Треугольник

(a) Различие вершин треугольной фигуры, в которую вписана окружность.

Заметим, что само по себе упоминание в задаче о "фигуре ABC" не означает, что эта фигура является треугольником, так как точки могут лежать на одной прямой и даже совпадать. Однако, если имеется утверждение о том, что в фигуру вписана окружность, появляется возможность сделать вывод о различии ее вершин:

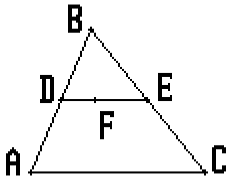
$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура$(ABC) \to$ разныеточки$(A, B))$
Антецедент идентифицируется с посылкой; порядок вершин игнорируется. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Отличие вершины треугольника от точки, лежащей на противоположной стороне.



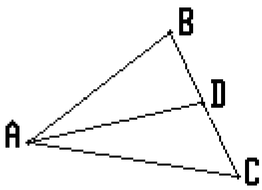
$\forall_{ABCD}(\triangle(ABC)$ & $D \in$ прямая$(AC) \to$ разныеточки$(B, D))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Отличие вершин треугольника от точки, лежащей на средней линии.



$\forall_{ABCDEF}(\triangle(ABC)$ & $F \in$ прямая(DE) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) & $l(AD) = l(BD) \to$ разныеточки$(B, F))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

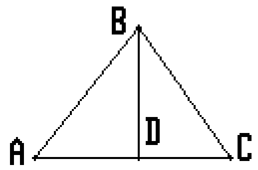
(d) Усмотрение отличия основания биссектрисы угла треугольника от вершины треугольника.



$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(BACD)$ & $D \in$ прямая(BC) & разныеточки(A, B)
& разныеточки$(A, C) \to$ разныеточки$(A, D))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", два последних - реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}(\angle(BAD) = \angle(CAD)$ & актив$(\angle(BAD))$ & актив$(\angle(CAD))$ & $D \in$ отрезок(BC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC))$ &
разныеточки(A, B) & разныеточки$(A, C) \to$ разныеточки$(B, D))$
Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", причем обе части равенства обрабатываются нормализатором "нормугол". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

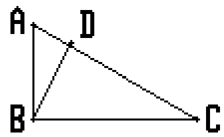
(e) Основание высоты треугольника.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & $\neg(l(BC)^2 - l(AB)^2 - l(AC)^2 = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, D))$

Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, AC, BC константные. Уровень срабатывания равен 5.

(f) Усмотрение отличия основания высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, от конца гипотенузы.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $\triangle(ABC) \rightarrow$ разныеточки$(A, D))$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Первые два антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow$ разныеточки$(A, D))$

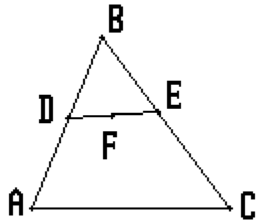
Второй и третий антецеденты реализуют рекурсивные обращения, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

(g) Различие вершин треугольной фигуры, имеющей ненулевую площадь.

$\forall_{ABCa}(S($фигура$(ABC)) = a$ & $0 < a \rightarrow$ разныеточки$(A, B))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин игнорируется. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

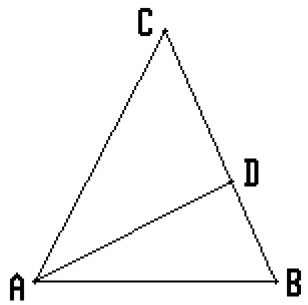
(h) Отличие вершины треугольника от точки, лежащей на прямой, пересекающей его боковые стороны.



$\forall_{ABCDEF}(\triangle(ABC)$ & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ прямая(DE) & разныеточки(B, D) & разныеточки$(B, E) \rightarrow$ разныеточки$(B, F))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - реализуют рекурсивные обращения. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

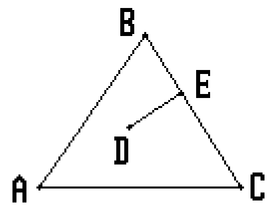
(i) Конец высоты, опущенной на боковую сторону равнобедренного треугольника, отличен от нижней вершины треугольника.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $l(AC) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(BC))$ & разныеточки$(A, C) \rightarrow$ разныеточки$(B, D))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Введен ускоряющий фильтр, проверяющий, что не усматривается принадлежность точки A прямой BC. Уровень срабатывания равен 4.

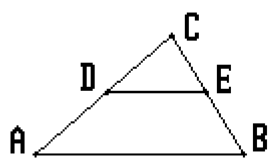
(j) Отличие проекции внутренней точки треугольника на сторону от прилегающей вершины острого угла.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ фигура(ABC) & прямая$(DE) \perp$ прямая(BC) & $0 < \pi/2 - \angle(ABC)$ & разныеточки$(D, E) \rightarrow$ разныеточки$(B, E))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

(k) Усмотрение отличия от вершины треугольника конца отрезка, параллельного его основанию и имеющего ненулевую длину.



$\forall_{ABCDE}(\triangle(ABC)$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BC) & разнылеточки$(D, E) \to$ разныеточки$(C, E))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

7. Точка, равноудаленная от двух различных точек.

   $\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & разныеточки$(A, C) \to$ разныеточки$(A, B))$

   Первый антецедент выделен указателем "равно". Таким образом, он будет идентифицирован либо с одной посылкой, либо с парой посылок "$l(AB) = a$", "$l(BC) = a$". Второй антецедент реализует рекурсивное обращение. Для блокировки повторного обращения к приему используется комментарий "смрасст". Чтобы уменьшить число попыток применения приема, введен фильтр, проверяющий, что C лежит на прямой AB. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & $\neg(A = C) \to$ разныеточки$(A, B))$

   В этом случае второй антецедент идентифицируется с посылкой, а первый попрежнему выделен указателем "равно". Уровень срабатывания равен 3.

8. Известно отношение расстояний точки до двух различных точек.

   $\forall_{abABC}(al(AB) = bl(BC)$ & разныеточки(A, C) & $\neg(b = 0) \to$ разныеточки$(A, B))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

9. Отрезок разделен на три равные части.

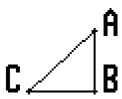
   

   $\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(BC) & $l(AC) = l(CD)$ & $l(CD) = l(BD)$ & разныеточки$(A, B) \to$ разныеточки$(B, C))$

   $\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(BC) & $l(AC) = l(CD)$ & $l(CD) = l(BD)$ & разныеточки$(A, B) \to$ разныеточки$(A, C))$

   Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 3.

10. Различие точек, лежащих на перпендикулярных прямых.

    $\forall_{ABC}($разныеточки(A, B) & прямая$(BC) \perp$ прямая$(AB) \to$ разныеточки$(A, C))$

    Второй антецедент выделен указателем "усм", первый - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 3.

11. Различие концов невырожденного отрезка.

    $\forall_{ABC}(A \in$ отрезок(BC) & разныеточки$(A, B) \to$ разныеточки$(B, C))$

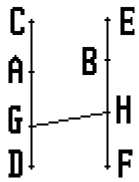
    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 3.

12. Различие точек, расположенных на различных сторонах невырожденного угла.

    $\forall_{ABC}(\angle(ABC) = a$ & $0 < a$ & $0 < \pi - a$ & разныеточки$(A, B) \to$ разныеточки$(A, C))$

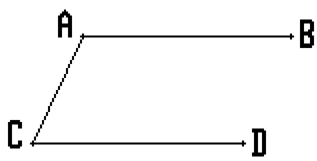
    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Выражение a константное. Уровень срабатывания равен 2.

13. Различие точек, лежащих на параллельных прямых.



    $\forall_{ABCDEFGH}(A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(EF) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(EF) & $G \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(EF) & разныепрямые(прямая(GH), прямая$(EF))$ & разныеточки$(G, H) \to$ разныеточки$(A, B))$

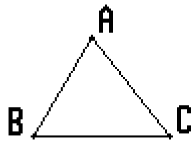
    Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Они обеспечивают различие параллельных прямых. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Используются ускоряющие фильтры, проверяющие различие обозначений прямых и точек. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.



    $\forall_{ABCDabcde}($прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $l(AC) = a$ & $l(AB) = b$ & $l(CD) = c$ & $d = a - |b - c|$ & $\neg(d = 0)$ & $e = a - b - c$ & $\neg(e = 0) \to$ разныеточки$(B, D))$

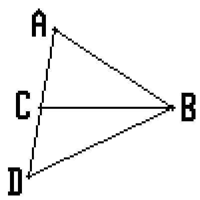
    Первый антецедент выделен указателем "усм", отрицания равенств обрабатываются проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левые части первых трех из них обрабатываются нормализатором "нормрасстояние", правые части двух последних - обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

14. Различие точек пересечения с прямой двух других различных прямых, проходящих через точку вне данной прямой.



$\forall_{ABC}$(разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $\neg$($A \in$ прямая(BC)) $\rightarrow$ разныеточки(B, C))

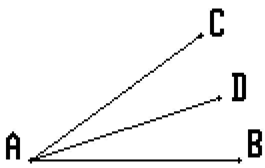
Процедура "развязка" добавляет теореме приема антецеденты, определяющие при помощи идентифицирующих операторов общую прямую, проходящую через точки B, C, а также прямые, проходящие через точки B, C и пересекающиеся в некоторой точке A. После идентификации этих прямых и точки A первый и второй антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Введены ускоряющие фильтры, проверяющие различие всех трех прямых. Имеется сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}$(разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AB)) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(BD)) & $C \in$ прямая(AD) $\rightarrow$ разныеточки(C, D))

Последний антецедент выделен указателем "усм". Кроме того, введены фильтры вида "усм(актив(прямая(...)))", обеспечивающие идентификацию прямых AB, BC, CD с помощью идентифицирующих операторов. Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, причем для каждого из них введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания приема равен 5.

15. Усмотрение отличия точки на биссектрисе угла от точки на его стороне.



$\forall_{ABCD}$(биссектриса($BACD$) & разныеточки(A, C) $\rightarrow$ разныеточки(C, D))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

16. Отличие от конца интервала, в котором содержится точка.

$\forall_{ABC}$($A \in$ интервал(BC) $\rightarrow$ разныеточки(A, B))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

17. Центр квадрата отличен от его вершины.

    $\forall_{ABCDE}$(центр$(A,$ фигура$(BCDE))$ & квадрат$(BCDE) \rightarrow$ разныеточки$(A,B))$

    Антецеденты идентифицируются с посылками, причем в каждом из них допускаются циклические перестановки точек. Уровень срабатывания равен 2.

18. Различие точек, находящихся на различных расстояниях от другой точки.

    $\forall_{ABCab}(l(AB) = a \ \& \ l(AC) = b \ \& \ \neg(a - b = 0) \rightarrow$ разныеточки$(B,C))$

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b константные и различные. Уровень срабатывания равен 5.

    $\forall_{ABCabcde}(l(AB) = ac/b \ \& \ l(AC) = dc/e \ \& \ \neg(ae - bd = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \rightarrow$ разныеточки$(B,C))$

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем переменные b, d, e могут принимать вырожденное единичное значение. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, d, e константные. Уровень срабатывания равен 5.

    $\forall_{ABCDabc}(l(AB) = a \ \& \ l(BC) = b \ \& \ l(AD) = c \ \& \ 0 < c - a - b \rightarrow$ разныеточки$(C,D))$

    Первые три антецедента идентифицируются с посылками, причем выражения a, b, c суть десятичные константы. Последний антецедент выделен указателем "программа". Уровень срабатывания равен 5.

19. Точка, определяющая биссектрису угла, отлична от его вершины.

    $\forall_{ABCD}$(биссектриса$(ABCD) \rightarrow$ разныеточки$(B,D))$

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

20. Точка, равноудаленная от двух других точек, и точка, не равноудаленная от них.

    $\forall_{ABCD}(l(AC) = l(BC) \ \& \ \neg(l(AD) = l(BD)) \rightarrow$ разныеточки$(C,D))$

    Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Его левая и правая части обрабатываются нормализатором "нормрасстояние". Уровень срабатывания равен 1.

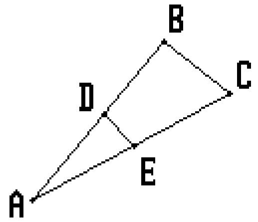
21. Различие точек, лежащих на различных прямых.

    $\forall_{ABC}$(разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC))$ & разныеточки$(A,B) \rightarrow$ разныеточки$(B,C))$

    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Фильтры "усм(актив(прямая(...)))" определяют идентификацию прямых AB, AC и их общей точки A. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ABC}$(разныепрямые(прямая(AD), прямая$(AC))$ & $B \in$ интервал$(AD) \rightarrow$ разныеточки$(B,C))$

    Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с посылкой. Ограничитель трудоемкости такой же, как в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 4.



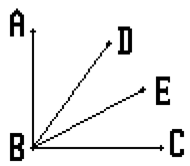
$\forall_{ABCDE}$(разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) & разныеточки(A, D) & разныеточки$(B, C) \to$ разныеточки(D, E))

Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}(\neg(A \in$ прямая$(BC)) \to$ разныеточки$(A, B))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

22. Использование известных величин углов, лучи которых проходят через сравниваемые точки.



$\forall_{ABCDEab}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $\angle(ABD) = a$ & $\angle(CBE) = b$ & $\neg(a + b - \pi/2 = 0)$ & $0 \leq \pi/2 - a$ & $0 \leq \pi/2 - b$ & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость$(ABC) \to$ разныеточки(D, E))

Первый и два последних антецедента выделены указателем "усм", второй и третий антецеденты - указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В идентификации участвуют также фильтры "усм(актив(угол(...)))", устанавливающие, что углы ABD и CBE уже выделены в задаче. Таким образом, из-за условий на о.д.з. для углов, необходимость проверять различие точек B, D и B, E отпадает. Проверяется, что выражения a, b константные. Уровень срабатывания равен 5.

23. Точки по разные стороны от прямой.

$\forall_{ABCD}$(разныестороны$(A, B$, прямая$(CD))$ & $\neg(A \in$ прямая$(CD)) \to$ разныеточки(A, B))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

24. Центр кривой второго порядка не лежит на этой кривой.

$\forall_{ABE}$(центр(A, E) & $B \in E$ & гипербола$(E) \to$ разныеточки(A, B))

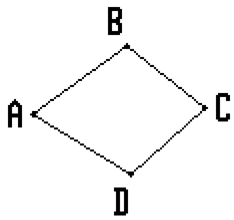
Антецеденты идентифицируются с посылками, причем вместо символа "гипербола" допускается символ "эллипс". Уровень срабатывания равен 4.

25. Соотношение пропорциональности позволяет сравнить два подотрезка.

    $\forall_{ABCDEab}(A \in$ отрезок(CD) & $B \in$ отрезок(CD) & $E \in$ отрезок(CD) & $bl(AC) = al(BE)$ & $0 < b - a$ & $0 < a$ & $0 < b \rightarrow$ разныеточки$(A, D))$

    Первые два антецедента и четвертый антецедент идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Последние три антецедента выделены указателем "программа". Прием усматривает на отрезке CD три точки A, B, E. Из соотношения пропорциональности вытекает, что длина отрезка BE больше длины отрезка AC. Поэтому точка A "не дотягивается" до точки D. Выражения a, b идентифицируются с десятичными константами. Уровень срабатывания равен 5.

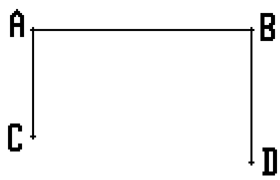
26. Различие точек, для которых различны величины углов с вершинами в этих точках, опирающихся на один и тот же отрезок.

    $\forall_{ABCDab}(\angle(BAD) = a$ & $\angle(BCD) = b$ & $\neg(a - b = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, C))$

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b константные. Уровень срабатывания равен 4.

27. Точки, лежащие на перпендикулярах к прямой, восставленных в разных точках.

    $\forall_{ABCD}($прямая$(AC) \perp$ прямая(AB) & прямая$(BD) \perp$ прямая$(AB) \rightarrow$ разныеточки$(C, D))$

    Антецеденты выделены указателем "усм". Фильтр "контекст(посылка(x1)вид(x1 не(равно(x26 x27))))" обеспечивает существование посылки, указывающей на различие точек A, B. Заметим, что если ввести антецедент "$\neg(A = B)$", то прием начинал бы свою работу не с усмотрения перпендикулярных прямых, а с перебора всевозможных пар отрицаний равенств точек. Это привело бы к большим неоправданным затратам времени. Уровень срабатывания равен 5.

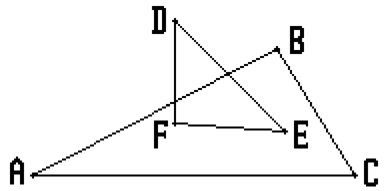
28. Точки в пространстве

(a) Вершины параллелепипеда.

$\forall_{ABa}$(параллелепипед(a) & ребро(отрезок$(AB), a) \rightarrow$ разныеточки(A, B))

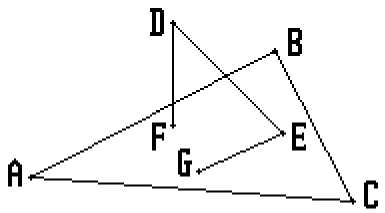
Антецеденты идентифицируются с посылками. Вместо заголовка "ребро" посылка, идентифицируемая со вторым антецедентом, может иметь заголовок "диагональ". Уровень срабатывания равен 3.

(b) Отличие проекции конца наклонной, проведенной под острым углом к плоскости, от основания наклонной.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ плоскость(ABC) & прямая$(DF) \perp$ плоскость(ABC) & разныеточки(D, E) & $0 < \pi/2 -$ уголмежду(прямая(DE), плоскость(ABC)) & $F \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ разныеточки(E, F))

Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". При наличии посылки "планиметрия" прием блокируется. Это замечание относится к большинству чисто стереометрических приемов и в дальнейшем принимается по умолчанию. Таким образом достигается сравнительно ощутимое ускорение при решении планиметрических задач. Уровень срабатывания приема равен 3.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ плоскость(ABC) & прямая$(DF) \perp$ плоскость(ABC) & разныеточки(D, E) & актив(прямая(GE)) & $G \in$ плоскость(ABC) & $0 < \pi/2 - \angle(DEG)$ & $F \in$ плоскость(ABC) & разныеточки$(G, E) \rightarrow$ разныеточки(E, F))

Третий, шестой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(c) Различие концов ребер, выходящих из одной вершины многогранника.

$\forall_{ABCDa}$(грань(фигура$(ABC), a)$ & ребро(отрезок$(AD), a)$ & прямая$(AD) \perp$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ разныеточки(B, D))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем вместо символа "грань" допускается символ "основание", а порядок точек A, B, C игнорируется. Третий антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

29. Координаты точек.

    $\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & $\neg(d - a = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, B))$

    $\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A, K) = (b, a, c)$ & коорд$(B, K) = (e, d, f)$ & $\neg(d - a = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, B))$

    $\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A, K) = (b, c, a)$ & коорд$(B, K) = (e, f, d)$ & $\neg(d - a = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, B))$

    $\forall_{ABKabcd}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (d, e)$ & $\neg(c - a = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, B))$

    $\forall_{ABKabcd}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (d, e)$ & $\neg(d - b = 0) \rightarrow$ разныеточки$(A, B))$

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

Проверочный оператор "усмточка"

Оператор служит для проверки истинности утверждения "точка(A)". Применяется он крайне редко. Приемы оператора таковы:

1. Элемент отрезка.

   $\forall_{ABC}(A \in$ отрезок$(BC) \rightarrow A -$ точка)

2. Элемент прямой.

   $\forall_{ABC}(A \in$ прямая$(BC) \rightarrow A -$ точка)

3. Элемент интервала.

   $\forall_{ABC}(A \in$ интервал$(BC) \rightarrow A -$ точка)

4. Положение материальной точки.

   $\forall_{at}$(Место$(a, t) -$ точка)

5. Конец вектора.

   $\forall_{ab}$(конецвектора$(a, b) -$ точка)

   Здесь "конецвектора(a, b)" обозначает точку, полученную из точки a переходом вдоль вектора b.

Уровень срабатывания приемов равен 1.

3.10 Приемы, связанные с символом "прямая"

Упорядочение операндов

На уровне 0 срабатывает прием, выполняющий лексикографическое упорядочение операндов выражения "прямая(AB)". Теорема приема - "коммутативно(прямая)".

Элемент прямой - точка

$\forall_{ABC}(A \in \text{прямая}(BC) \to A - \text{точка})$

Прием имеет заголовок "вывод"и срабатывает на уровне 0. Заметим, что посылки B – точка, C – точка составляют условие на о.д.з. для выражения "прямая(BC)" и заносятся в список посылок задачи автоматически в начале ее решения.

Регистрация прямой в активе

В геометрических задачах иногда бывает удобно инициировать применение приема при усмотрении выражения для какого-либо элемента чертежа (прямая, окружность) либо для какого-либо параметра чертежа (расстояние, угол и т.п.). Чтобы такое выражение t можно было явно указать в теореме приема, используются фиктивные посылки "актив(t)". Они вводятся сразу же, как только в задаче усматривается выражение t. Применение посылок "актив" дает некоторую экономию времени, так как попытка применить прием выполняется однократно, а не на каждом вхождении t в задачу.

$\forall_{AB}(\text{актив}(\text{прямая}(AB)))$

Указатель "контрольвывода(прямая(x26 x27))" инициирует применение приема вывода при усмотрении в посылке задачи выражения "прямая(AB)", переменные которого не связаны внешними кванторами либо описателями. Допускаются задачи на доказательство, исследование либо преобразование. На той же теореме создан еще один прием, срабатывающий при усмотрении выражения "прямая(AB)" в условии задачи на доказательство. Уровни срабатывания приемов равны 0.

Исключение тавтологичного условия принадлежности прямой

$\forall_{AB}(A \in \text{прямая}(AB))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Отождествление прямых по паре общих точек

$\forall_{ABCDEF}(C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ C \in \text{прямая}(DE)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$F \in \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{разныеточки}(C, F) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(DE))$

$\forall_{ABCDEF}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ C \in \text{прямая}(DE)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$F \in \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{разныеточки}(C, F) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(DE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Проверяется различие обозначений прямых AB, DE. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}(\text{актив}(\text{прямая}(AB))\ \&\ A \in \text{прямая}(CD)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Обозначения прямых AB, CD различны. Строго говоря, оснований для отождествления прямых в этом приеме недостаточно, так как не установлено различие точек A, B. Однако, условием применения приема служит требование отсутствия в задаче каких-либо упоминаний о прямой AB, кроме посылки "актив(прямая(AB))". В этой ситуации выражение "прямая(AB)" просто обозначает какую-то прямую, проходящую через точки A, B, и ее без органичения общности можно отождествить с прямой CD. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(AB)) & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & разныеточки$(A, B) \to$ прямая$(AB) =$ прямая(CD))

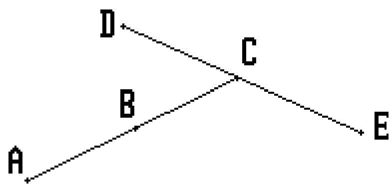
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Обозачения прямых AB, CD должны различаться, причем в задаче должно иметься еще какое-либо упоминание первой из этих прямых. В противном случае может сработать предыдущий прием, и более трудоемкая попытка применения данного приема нецелесообразна. Уровень срабатывания равен 1.

Замена условия равенства двух прямых на условие принадлежности точки прямой

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) =$ прямая$(CD) \leftrightarrow A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Уровень срабатывания равен 1.

Расположение на прямой трех точек, две из которых лежат по одну сторону от другой прямой, а третья - точка пересечения данных прямых



$\forall_{ABCDE}$(однасторона$(A, B,$ прямая$(DE))$ & $C \in$ прямая(AB) & $C \in$ прямая(DE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(DE)) $\to \neg(C \in$ интервал(AB)))

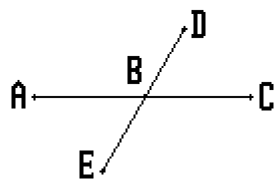
Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

Усмотрение противоречия в принадлежности вершины треугольника его противоположной стороне

$\forall_{ABC}(\triangle(ABC) \to \neg(B \in$ прямая$(AC)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

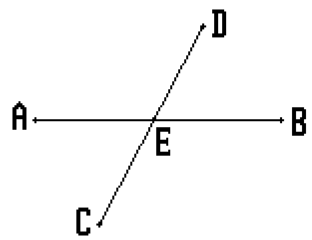
Доказательство принадлежности прямой путем установления равенства вертикальных углов



$\forall_{ABCDE}(B \in \text{прямая}(AC)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ \text{разныестороны}(D, E, \text{прямая}(AC))$ $\&\ \text{разныеточки}(A, B)\ \&\ \text{разныеточки}(B, C)\ \&\ \angle(DBC) = \angle(ABE) \rightarrow$ $B \in \text{прямая}(DE))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Консеквент идентифицируется с условием задачи на доказательство. Первые два антецедента выделены указателем "усм", следующие три - обрабатываются проверочными операторами. Истинность последнего антецедента устанавливается при помощи вспомогательной задачи на доказательство. Попытка применить прием предпринимается лишь в тех случаях, когда некоторый угол $\angle PCD$ уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 8.

Выражение неизвестной точки через пересечение двух известных прямых

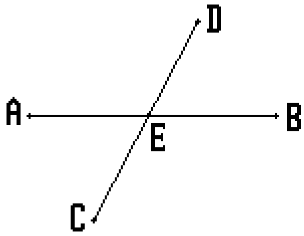


$\forall_{ABCDE}(\text{актив}(\text{прямая}(AB))\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(CD))\ \&\ E \in\ \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in$ $\text{прямая}(CD)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD))\ \&\ E - \text{точка} \rightarrow$ $E \in \text{прямая}(AB) \cap \text{прямая}(CD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Он применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно". Обычно это задачи на построение. В них часть точек известна, а часть - являются неизвестными, которые нужно выразить через известные точки и параметры.

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, причем E - неизвестная. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для прямых AB, CD известны. Введен ускоряющий фильтр, проверяющий, что точка C не лежит на прямой AB. Уровни срабатывания равны 2, 3 и 5.

Разбор случаев для совпадения либо различия двух известных прямых, содержащих неизвестную точку



$\forall_{ABCDE}$(актив(прямая(AB) & актив(прямая(CD)) & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & E – точка $\rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) $\vee$ прямая(AB) = прямая(CD))

Прием имеет заголовок "вывод". Как и в предыдущем случае, он применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно". Последний антецедент идентифицируется с посылкой, причем E - неизвестная. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для прямых AB, CD не содержат неизвестных и вспомогательных параметров. Обозначения этих прямых различны, причем из контекста не усматривается несовпадение прямых. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

Вывод условия различия двух известных точек, по которым определена прямая

В процессе решения задачи на построение могут оказаться полезными явные ограничения на исходные данные, указывающие условия выполнимости построения. Они включаются в ответ задачи. Простейшим примером вывода таких ограничений является следующий прием:

$\forall_{AB}$(актив(прямая(AB)) & разныеточки$(A, B) \rightarrow \neg(A = B)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Выражения для точек A, B не содержат неизвестных. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка "треугольник(...)", включающая переменные A, B. Указатель "развязка" блокирует модификацию теоремы приема при компиляции. Уровень срабатывания равен 2.

Пересечение двух прямых

$\forall_{ABCDE}$($E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) $\rightarrow$ прямая$(AB) \cap$ прямая$(CD) = \{E\}$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$($C \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ прямая$(AB) \cap$ перпендикуляр(прямая$(AB), C) = \{C\}$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Выражение неизвестной прямой через две известные точки на ней

$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(AB)) & $C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & разныеточки(C, D) $\rightarrow$ прямая(CD) = прямая(AB))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения для точек C, D не содержат неизвестных, а выражение для прямой AB - содержит. Уровень срабатывания равен 2.

Попытка описать неизвестную точку как произвольную точку заданной известной прямой

Прием используется в тех вырожденных случаях, когда положение неизвестной точки на заданной прямой можно выбирать произвольным образом. Чтобы исключить срабатывания в невырожденных случаях, его уровень выбран достаточно высоким.

$\forall_{ABC}(C \in$ прямая$(AB) \rightarrow \emptyset)$

Прием имеет заголовок "замечание". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Выражение для прямой AB не содержит неизвестных. Переменная C идентифицируется с неизвестной внешней задачи на описание. Указатель "найдено(x28)" переводит переменную C в разряд известных параметров задачи. Уровень срабатывания равен 7.

Усмотрение того, что прямая - множество

$\forall_A$(Прямая$(A) \rightarrow A -$ set)

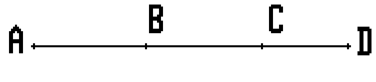
Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Отнесение точки к одной из двух симметричным образом входящих в задачу прямых

$\forall_{ABCDEFPQR}(A \in F$ & $A \in$ плоскость(PQR) & прямая(BC) $\cup$ прямая(DE) $= F \cap$ плоскость$(PQR) \rightarrow A \in$ прямая(BC))

Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, второй - выделен указателем "усм". Фильтр "симметрично(терм(прямая(x27 x28)) терм(прямая(x29 x30))списокпосылок)" проверяет, что прямые BC и DE встречаются в списке посылок симметричным образом. Проверяетя также отсутствие посылок "$A \in$ прямая(BC)", "$A \in$ прямая(DE)". Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение принадлежности прямой из сравнения расстояний



$\forall_{ABCDabcdp}(l(AB) = ap$ & $l(BC) = bp$ & $l(CD) = cp$ & $l(AD) = dp$ & $a < d$ & $b < d$ & $c < d$ & $d - a - b - c = 0 \rightarrow B \in$ отрезок(AD) & $C \in$ отрезок(AD) & $B \in$ отрезок(AC) & $C \in$ отрезок(BD))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последние четыре - выделены указателем "программа". Переменные a, b, c, d идентифицируются с десятичными константами. Не усматривается принадлежность точки B либо точки C прямой AD. Обозначение точки C отлично от обозначений точек B, D, а обозначение точки A - от обозначения точки D. Выражения для расстояний не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABDabcdp}(l(AB) = ap \ \& \ l(BD) = bp \ \& \ l(AD) = dp \ \& \ a < d \ \& \ b < d \ \& \ d - a - b = 0 \rightarrow B \in \text{отрезок}(AD))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 12.

Усмотрение различия точек

$\forall_{ABCD}(\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)) \rightarrow \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)))$

Заголовок приема - "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Существование точки прямой, не лежащей на другой прямой

$\forall_{ABCD}(D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ C-\text{точка} \rightarrow \exists_E(E-\text{точка} \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ D \in \text{прямая}(CE) \ \& \ \neg(E \in \text{прямая}(AB))) \leftrightarrow \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \ \vee \ C = D)$

Прием имеет заголовок "связка". Утверждения под квантором существования идентифицируются с условиями задачи на описание, причем неизвестная E в других условиях не встречается. Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор общей стандартизации "нормпрямая"

Так как одну и ту же прямую можно задавать при помощи различных пар точек, то возникает необходимость в простейшей стандартизации обозначений прямых, встречающихся в заменяющих либо выводимых термах. Для этого создан нормализатор "нормпрямая". Он имеет следующие приемы:

1. Усмотрение ранее имевшегося обозначения прямой.

   $\forall_{ABCD}(A \in \text{прямая}(BC) \ \& \ D \in \text{прямая}(BC) \rightarrow \text{прямая}(AD) = \text{прямая}(BC))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения прямых AD и BC различны. Прямая AD не встречается в посылках, отличных от посылки "актив(прямая(AD))". Указатель "выход"обеспечивает немедленную выдачу ответа после срабатывания приема. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{AB}(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AB))$

   Имеется посылка "актив(прямая(AB))". Указатель "выход" обеспечивает немедленную выдачу ответа. Уровень срабатывания равен 1, причем попытка применить предыдущий прием выполняется раньше.

$\forall_{ABCD}(A \in \text{прямая}(BC)\ \&\ D \in \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{разныеточки}(A, D) \rightarrow \text{прямая}(AD) = \text{прямая}(BC))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Перед обработкой последнего антецедента проверяется различие обозначений прямых AD, BC и наличие содержащей подтерм "прямая(AD)" посылки, не имеющей заголовка "актив". Указатель "выход" приводит к немедленной выдаче ответа. Уровень срабатывания равен 2.

2. Лексикографическое упорядочение операндов.

   Прием имеет теорему "коммутативно(прямая)" и заголовок "замена(лексупорядочение нормпрямая)". Он срабатывает на уровне 1.

Проверочный оператор "разныепрямые"

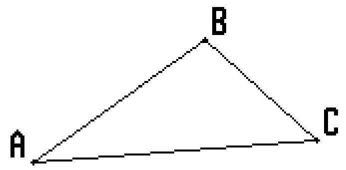
Оператор аналогичен оператору "разныеточки"; он проверяет различие двух прямых. Это различие выражается с помощью утверждения "разныепрямые(прямая(AB) прямая(CD))", используемого только в рамках приемов ГЕНОЛОГа. Оператор имеет следующие приемы:

1. Усмотрение из посылки.

   $\forall_{ab}(\neg(a = b) \rightarrow \text{разныепрямые}(a, b))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

2. Усмотрение из различия точек пересечения с третьей прямой.



   $\forall_{ABC}(\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(BC))\ \&\ \text{разныеточки}(B, C) \rightarrow \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC)))$

   $\forall_{ABC}(\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AC), \text{прямая}(BC))\ \&\ \text{разныеточки}(B, C) \rightarrow \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC)))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Прямые AB, AC, BC должны уже рассматриваться в задаче. Перед обработкой антецедентов проверяется, что не усматривается принадлежность точки B прямой AC и точки A - прямой BC. Для ограничения числа вложенных попыток применения приема используется комментарий "разныепрямые". Уровень срабатывания равен 4.

3. Усмотрение из условий принадлежности и непринадлежности.

   $\forall_{ABCDE}(E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \neg(E \in \text{прямая}(CD)) \rightarrow \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))$

   Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

4. Усмотрение из перпендикулярности.

   $\forall_{ab}(a \perp b \to \text{разныепрямые}(a, b))$

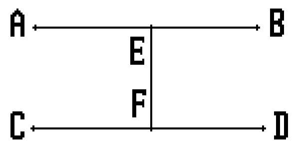
   Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

5. Угол между прямыми больше 0 и меньше пи.

   $\forall_{ABCDEPQ}(A \in \text{прямая}(BC)\ \&\ A \in \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{актив}(\angle(PAQ))\ \&\ P \in \text{прямая}(BC)\ \&\ Q \in \text{прямая}(DE)\ \&\ 0 < \angle(PAQ)\ \&\ 0 < \pi - \angle(PAQ) \to \text{разныепрямые}(\text{прямая}(BC), \text{прямая}(DE)))$

   Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами.Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 4.

6. Различие параллельных прямых, расстояние между которыми положительно.

   $\forall_{ABCDEFa}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(EF)\ \&\ l(EF) = a\ \&\ 0 < a \to \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))$

   Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", пятый - указателем "идентификатор". Выражение a константное. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Используется ускоряющий фильтр, проверяющий, что расстояние EF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

7. Использование параллельности для перехода к паре пересекающихся прямых.

   $\forall_{ABCDE}(\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC))\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC) \to \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(DE)))$

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем прямая AC предварительно идентифицируется выделенным указателем "усм" вторым антецедентом. Проверяется отличие обозначения прямой DE от обозначения прямой AC, а прямой AB - от прямой AC. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDE}(\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC))\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямая}(PQ) \parallel \text{прямая}(AB) \to \text{разныепрямые}(\text{прямая}(PQ), \text{прямая}(DE)))$

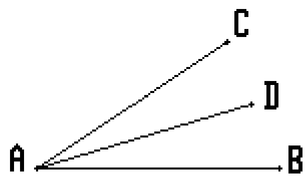
   Аналогично предыдущему.

8. Сведение к паре пересекающихся прямых, перпендикулярных исходным.

   $\forall_{ABCDEFG}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(EF)\ \&\ \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(EG)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(EF), \text{прямая}(EG))\ \&\ A \in \text{плоскость}(EFG)\ \&\ B \in \text{плоскость}(EFG) \to \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))$

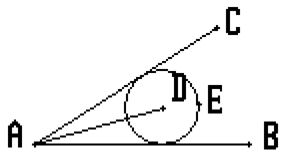
   Третий антецедент реализует рекурсивное обращение, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Проверяется отличие обозначения прямой EF от обозначения прямой EG. Уровень срабатывания равен 3.

9. Отличие биссектрисы невырожденного угла от его стороны.



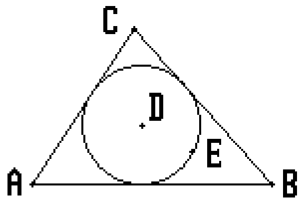
$\forall_{ABCD}$(биссектриса($BACD$) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) $\rightarrow$ разныепрямые(прямая(AD), прямая(AB)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE) вписана в Угол(BAC) $\rightarrow$ разныепрямые(прямая(AD), прямая(AB)))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$ разныепрямые(прямая(AC), прямая(AD)))

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин треугольника игнорируется. Уровень срабатывания равен 4.

10. Стороны и диагонали многоугольников.

   (a) Треугольник.
   $\forall_{ABC}$($\triangle$(ABC) $\rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)))
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 1.

   (b) Параллелограмм.
   $\forall_{ABCD}$(параллелограмм($ABCD$) $\rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)))
   $\forall_{ABCD}$(параллелограмм($ABCD$) $\rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)))
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ прямая$(AD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(BE), прямая$(AD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Второй антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Ромб.

$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDE}$(ромб$(ABCD)$ & $E \in$ прямая$(AD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(BE), прямая$(AD)))$

Аналогично предыдущему пункту.

(d) Трапеция.

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AD), прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AC), прямая$(BD)))$

Допускается циклическая перестановка вершин. Возможна идентификация при заголовке "Трапеция". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Четырехугольник.

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AC), прямая$(BD)))$

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)))$

Допускается циклическая перестановка вершин. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Квадрат.

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)))$

Аналогично предыдущему пункту.

(g) Правильный многоугольник.

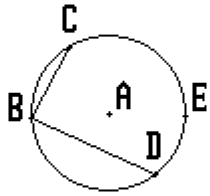
$\forall_{ABCDEFPijkln}$(правмногоугольник(D) & $A = D(i)$ & $B = D(j)$ & $E = D(k)$ & $\neg(i-j=0)$ & $\neg(i-k=0)$ & $\neg(j-k=0) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AE)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Последовательность идентификации такова. Прежде всего, находится общая точка A рассматриваемых прямых. Затем оператор "смэлемент", соответствующий второму антецеденту, перечисляет номера i элементов набора D, равных A. Далее операторы "смнабор", соответствующие третьему и четвертому антецедентам, перечисляют номера j, k

прочих элементов набора D, проверяя, что эти элементы лежат на прямых AB, AE. Уровень срабатывания равен 3.

11. Окружность.

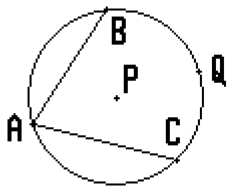
(a) Усмотрение из различия расстояний до точек пересечения с окружностью.



$\forall_{ABCDE}(B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) &
$D \in$ окружность(AE) & $\neg(l(BC) - l(BD) = 0)$ & $\neg(l(BC) = 0)$ &
$\neg(l(BD) = 0) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(BC), прямая(BD)))

Первые три антецедента выделены указателем "усм", последние три - обрабатываются проверочным оператором. Ускоряющие фильтры проверяют, что обозначения точек B, C, D различны и что выражения для расстояний BC, BD не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

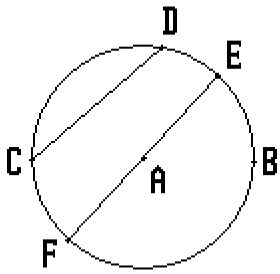
(b) Усмотрение из различия точек пересечения с окружностью.



$\forall_{ABCPQ}(A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) &
$C \in$ окружность(PQ) & разныеточки(B, C) & разныеточки(A, B) &
разныеточки$(A, C) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)))

Первые три антецедента выделены указателем "усм", три последних - обрабатываются проверочными операторами. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Усмотрение из различия длин диаметра и хорды, отсекаемых окружностью.

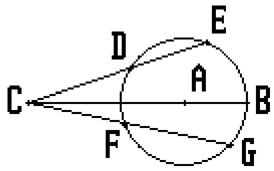


$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $C \in$ прямая(MN) &

$D \in$ прямая(MN) & $E \in$ прямая(PQ) & $F \in$ прямая(PQ) &
$A \in$ отрезок(EF) & $a = l(AE)$ & $b = l(CD)$ & $0 < b$ & $\neg(b - 2a = 0) \rightarrow$
разныепрямые(прямая(MN), прямая(PQ)))

Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", десятый и одиннадцатый - указателем "идентификатор". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

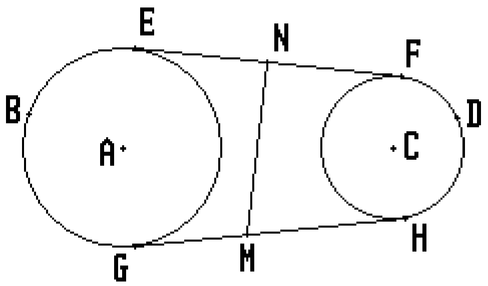
(d) Две секущих к окружности, проведенных из одной точки.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
$D \in$ отрезок(CE) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) &
$F \in$ отрезок(CG) & разныеточки(D, E) & разныеточки(F, G) &
разныеточки$(D, F) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(CE), прямая(CG)))

Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

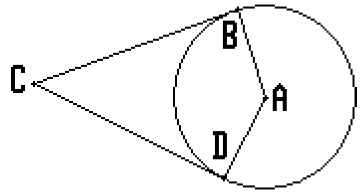
(e) Прямая, проходящая через точку на одной внешней касательной и через точку отрезка между точками касания другой.



$\forall_{ABCDEFGHMN}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) &
прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & прямая(GH) –
касательная к окружность(AB) & прямая(GH) – касательная к
окружность(CD) & $M \in$ прямая(GH) & $N \in$ отрезок(EF) &
$E \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD)&
$H \in$ окружность(CD) & однасторона$(A, C$, прямая$(EF))$ &
однасторона$(A, C$, прямая$(GH))$ & разныеточки$(A, C) \rightarrow$
разныепрямые(прямая(MN), прямая(GH)))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указатеелем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

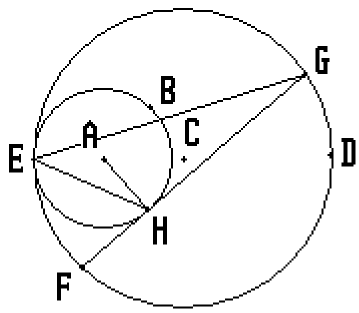
(f) Две касательных к окружности, проведенных из одной точки.



$\forall_{ABCD}$(прямая(BC) – касательная к окружность(AE) & прямая(CD) – касательная к окружность(AE) & $B \in$ окружность(AE) & $D \in$ окружность(AE) & разныеточки$(B, D) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(BC), прямая(CD)))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

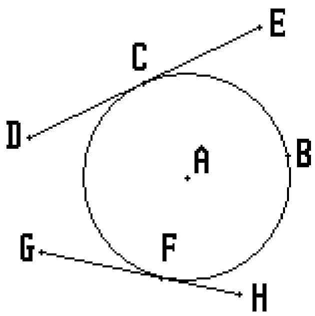
(g) Две окружности, касающиеся внутренним образом.



$\forall_{ABCDEFGH}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $H \in$ окружность(AB) & прямая$(FG) \perp$ прямая(AH) & $H \in$ прямая(FG) & $F \in$ окружность(CD) & $G \in$ окружность(CD) & разныеточки$(F, G) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(EG), прямая(EH)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(h) Две касательные к окружности, имеющие разные точки касания.



$\forall_{ABCDEFGH}$($C \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AF) &

$C \in$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(GH) & разныеточки$(C, F) \to$ разныепрямые(прямая(DE), прямая(GH)))

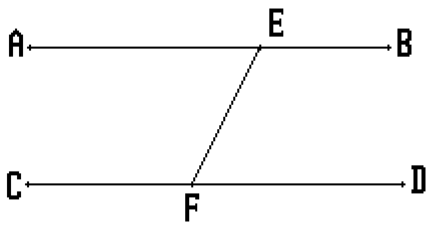
Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Чтобы отсечь рассмотренный выше случай двух касательных, проведенных из общей точки, проверяется отсутствие выделенной в задаче точки, принадлежащей прямым DE, GH. Уровень срабатывания приема равен 4.

12. Одна из двух прямых перпендикулярна третьей, а другая - нет.

    $\forall_{ABCDPQ}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(PQ) & $\neg$(прямая(CD) $\perp$ прямая(PQ)) $\to$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)))

    Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором "усмнеортог", который будет описан ниже. Введен ускоряющий фильтр, проверяющий наличие общей точки прямых CD, PQ. Это условие существенно для усмотрения неортогональности. Уровень срабатывания равен 4.

13. Различие параллельных прямых, имеющих различные точки пересечения с третьей прямой.

    $\forall_{ABCDEF}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & актив(прямая(EF)) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(EF)) & разныеточки$(E, F) \to$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)))

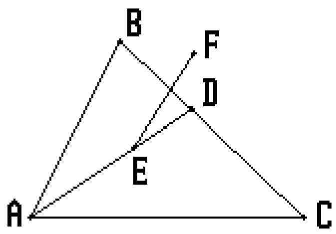
    Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Проверяется различие обозначений прямых AB, CD, EF. Уровень срабатывания равен 4.

14. Использование неравенства треугольника.

    $\forall_{ACDGH}$(параллелпрямая(прямая(AD), C) = прямая(GH) & $0 < l(AD) + l(CD) - l(AC)$ & $0 < l(AD) + l(AC) - l(CD)$ & $0 < l(CD) + l(AC) - l(AD) \to$ разныепрямые(прямая(CD), прямая(GH)))

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Заметим, что выражения "параллелпрямая(...)" возникают в задачах на построение для задания прямых через известные параметры. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

15. Сторона треугольника и пересекающая ее прямая.



$\forall_{ABCDEF}(D \in \text{отрезок}(BC)$ & $E \in \text{отрезок}(AD)$ & разныеточки(D, E) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(EF), прямая(BC))))

Первые два антецедента выделены указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Введены ускоряющие фильтры, проверяющие различие обозначений прямых AB, AC и непринадлежность точки A прямой BC. Уровень срабатывания равен 4.

16. Использование координат точек, задающих прямые.

    $\forall_{ABCKabcdef}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & коорд$(C, K) = (e, f)$ & $\neg((a-c)(f-d)-(e-c)(b-d) = 0) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC))))

    Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Предварительно левая часть отрицания равенства обрабатывается нормализаторами "стандплюс" и "видумножение". Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

17. Прямые в пространстве.

    (a) Если прямая перпендикулярна плоскости, то она отличается от любой прямой в этой плоскости.

    $\forall_{ABCDEPQ}$(прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & $P \in$ плоскость(CDE) & $Q \in$ плоскость$(CDE) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(PQ))))

    Антецеденты выделены указателем "усм". Отсутствует посылка "планиметрия", указывающся на планиметрическую задачу. Уровень срабатывания равен 4.

    (b) Одна из прямых проведена к плоскости пирамиды, а другая лежит в плоскости основания.

    $\forall_{ABCDEFap}$(пирамида(a) & Вершина(A, a) & основание(p, a) & плоскость$(BCD) =$ плоскостьфигуры(p) & $E \in$ плоскость(BCD) & $F \in$ плоскость(BCD) & $G \in$ плоскость$(BCD) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AG), прямая(EF))))

    Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", причем его правая часть обрабатывается нормализатором "нормплоскостьфигуры". Последние антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

    (c) Прямая плоскости и прямая, проходящая через не лежащую на плоскости точку.

    $\forall_{ABCDPQR}(\neg(C \in$ плоскость$(PQR))$ & $A \in$ плоскость(PQR) & $B \in$ плоскость$(PQR) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD))))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Проверочный оператор "усмпрямая"

Этот оператор проверяет утверждение "Прямая(a)". Он практически не используется и имеет единственный прием $\forall_{AB}$(Прямая(прямая(AB))).

3.11 Приемы, связанные с символом "плоскость"

Регистрация плоскости в активе

$\forall_{ABC}$(актив(плоскость(ABC)))

Указатель "контрольвывода(...)" инициирует применение приема при усмотрении выражения "плоскость(ABC)" в посылке задачи на доказательство, исследование либо описание. Предварительно проверяется отсутствие созданной ранее посылки "актив(плоскость(ABC))". Кроме того, прием блокируется, если точка привязки представляет собой операнд равенства двух плоскостей. Таким образом устраняется избыточная регистрация в "активе" обозначения плоскости, сведенного к другому обозначению этой же плоскости. Уровень срабатывания равен 0.

Отождествление плоскостей по тройке точек

$\forall_{ABCDEF}$(актив(плоскость(ABC)) & $A \in$ плоскость(DEF) & $B \in$ плоскость(DEF) & $C \in$ плоскость(DEF) $\to$ плоскость(ABC) $=$ плоскость(DEF))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - выделены указателем "усм". Так как обозначения плоскостей ABC, DEF уже были введены ранее, предположительно корректным образом, то проверка различия точек не предпринимается. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. При идентификации точек A, B, C первым антецедентом допускаются циклические перестановки. Уровень срабатывания равен 2.

Замена условия равенства плоскостей на условия принадлежности точек

$\forall_{ABCDEF}$(плоскость(ABC) $=$ плоскость(DEF) $\leftrightarrow$ $A \in$ плоскость(DEF) & $B \in$ плоскость(DEF) & $C \in$ плоскость(DEF))

Уровень срабатывания равен 1.

Точки одной грани лежат в общей плоскости

$\forall_{ABCDa}$(грань(фигура($ABCD$), a) $\to$ $D \in$ плоскость(ABC))

$\forall_{ABCDa}$(основание(фигура($ABCD$), a) $\to$ $D \in$ плоскость(ABC))

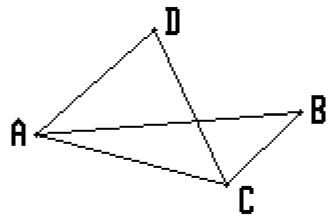
Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abniABC}$(основание(фигура(b), a) & $l(b) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & плоскость(ABC) $=$ плоскостьфигуры(фигура(b)) $\to$ $b(i) \in$ плоскость(ABC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение b имеет заголовок "набор". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором "нормдлинанабора" и вычисляет число n

элементов набора b. Третий антецедент выделен указателем "программа". Он перечисляет номера i от 1 до n. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормплоскостьфигуры". В результате идентифицируется обозначение "плоскость(ABC)" для плоскости рассматриваемого основания. Перед выводом следствия проверяется, что принадлежность точки $b(i)$ плоскости ABC идентифицирующими операторами пока не усматривается. Уровень срабатывания равен 1.

Ввод в рассмотрение прямой, по которой пересекаются две плоскости



$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(AD)) & актив(прямая(CD)) & актив$(\angle(ADC))$ $\rightarrow$ актив(прямая(AC)))

Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, причем эта задача не должна иметь посылки "планиметрия". Первые четыре антецедента выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки D плоскости ABC, причем эта плоскость уже встречается в задаче. Не усматривается принадлежность точки B прямой AD либо прямой CD. Уровень срабатывания равен 4.

Ввод в рассмотрение плоскости, содержащей выделенный угол

$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BC)) & актив$(\angle(BAC))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) $\rightarrow$ актив(плоскость(ABC)))

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм", последние три - обрабатываются проверочными операторами. Задача не имеет посылки "планиметрия". Не усматривается принадлежность точки C какой-либо выделенной в задаче плоскости, проходящей через точки A, B. В аналитической геометрии прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

Вывод условий принадлежности плоскости

В приводимых ниже трех приемах вывода предполагается отсутствие у задачи посылки "планиметрия".

1. Точка отрезка принадлежит той же плоскости, что и его концы.

   $\forall_{ABCDEF}$($F \in$ отрезок(DE) & актив(плоскость(ABC)) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) $\rightarrow$ $F \in$ плоскость(ABC))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки F плоскости ABC. Уровень срсбатывания равен 2.

2. Точка прямой, две различные точки которой принадлежит плоскости.

   $\forall_{ABCDEF}(F \in \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{актив}(\text{плоскость}(ABC))\ \&\ D \in \text{плоскость}(ABC)$ $\&\ E \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ \text{разныеточки}(D,E) \to F \in \text{плоскость}(ABC))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки F плоскости ABC. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

   $\forall_{ABCDE}(\text{прямая}(AB) \subseteq \text{плоскость}(CDE) \to A \in \text{плоскость}(CDE))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Если в задаче рассматриваются координаты точек, то уровень срабатывания приема равен 6, иначе он равен 2.

Нормализатор общей стандартизации "нормплоскость"

Нормализатор используется для стандартизации обозначения плоскости. Он имеет всего три приема:

1. Учет посылки "планиметрия". При наличии этой посылки преобразуемое обозначение плоскости немедленно заменяется на символ "планиметрия", и таким образом все рассматриваемые в планиметрической задаче плоскости совпадают с некоторой условной плоскостью. Прием реализован на ЛОСе.

2. Лексикографическое упорядочение операндов.

3. Усмотрение ранее использованного обозначения плоскости.

   $\forall_{ABCDEF}(A \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ B \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ C \in \text{плоскость}(DEF)$ $\to \text{плоскость}(ABC) = \text{плоскость}(DEF))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. При идентификации заменяемого терма перестановки точек не предпринимаются. Проверяется различие обозначений ABC и DEF. Кроме того, проверяется отсутствие посылки задачи, содержащей обозначение плоскости ABC, за исключением, быть может, посылки "актив(плоскость(ABC))". Указатель "выход" определяет немедленную выдачу результата в случае срабатывания приема.

Нормализатор общей стандартизации "нормплоскостьфигуры"

Нормализатор находит обозначение для плоскости, в которой расположен заданный многоугольник.

1. Треугольник.

   $\forall_{ABC}(\text{плоскостьфигуры}(\text{фигура}(ABC)) = \text{плоскость}(ABC))$

   Заменяющее выражение обрабатывается нормализатором "нормплоскость".

2. Четырехугольник.

   $\forall_{ABCD}(\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(BC)) \to$ $\text{плоскостьфигуры}(\text{фигура}(ABCD)) = \text{плоскость}(ABC))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

3. Правильный многоугольник.

   $\forall_a$(правмногоугольник$(a) \to$ плоскостьфигуры(фигура$(a)) =$ плоскость$(a(1)a(2)a(3)))$

   Выражения $a(1), a(2), a(3)$ обрабатываются нормализатором "нормзначение", выделяющим, соответственно, первый, второй и третий элементы набора a.

Анализатор "планиметрия"

При решении планиметрической задачи обычно имеется посылка "планиметрия", указывающая, что все рассматриваемые точки принадлежат общей плоскости. Эта посылка блокирует попытки применения стереометрических приемов и таким образом ускоряет решение. Кроме того, она упрощает обоснование корректности применения приемов, общих в планиметрии и стеореометрии, так как проверка принадлежности точек плоскости идентифицирующими операторами вырождается. Посылку "планиметрия" можно вводить вручную, однако обычно она создается процедурами интерфейса автоматически. Это обеспечивает процедура "завершзадачи", обращение к которой происходит по окончании редактирования задачи. В свою очередь, процедура "завершзадачи" использует пакетный анализатор "планиметрия". Ему передается вспомогательная задача на исследование, посылки которой копируют посылки новой задачи. Анализатор выводит утверждения о принадлежности точек задачи некоторой "базисной" плоскости, и если оказывается, что все они попадают на данную плоскость, то выводится следствие "планиметрия". На этом работа анализатора обрывается, а посылка "планиметрия" передается в основную задачу. Заметим, что если задача содержала символ "окружность" либо "круг", то процедура "завершзадачи" вводит посылку "планиметрия", даже не обращаясь к анализатору, так как эти символы можно корректно использовать только в планиметрии (для трехмерного случая служат символы "Окружность", "Круг", требующие дополнительного указания третьей точки, фиксирующей плоскость). Перечислим приемы анализатора:

1. Выбор базисной плоскости.

   Приемы выбирают базисную плоскость ABC, выводя посылку "актив(плоскость(ABC))". Все они предварительно проверяют, что задача еще не имеет посылки вида "актив(плоскость$(\ldots)$)".

   (a) Треугольник
   $\forall_{ABC}(\triangle(ABC) \to$ актив(плоскость$(ABC)))$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Четырехугольники.
   $\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \to$ актив(плоскость$(ABC)) \;\&\; D \in$ плоскость$(ABC))$
   Аналогичные приемы введены для символов "ромб", "квадрат", "прямоугольник", "параллелограмм", "трапеция". Уровень срабатывания приема равен 1.

   (c) Точка вне прямой.
   $\forall_{ABC}(\neg(A \in$ прямая$(BC)) \to$ актив(плоскость$(ABC)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Равенство для угла.
$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \to$ актив(плоскость$(ABC)))$
Уровень срабатывания равен 2.

2. Учет точек прямой.

   $\forall_{ABCDEF}$(актив(плоскость(DEF)) & $A \in$ плоскость(DEF) &
   $B \in$ плоскость(DEF) & $C \in$ прямая$(AB) \to C \in$ плоскость(DEF))

   $\forall_{ABCDEF}$(актив(плоскость(DEF)) & $A \in$ плоскость(DEF) &
   $C \in$ плоскость(DEF) & $C \in$ прямая$(AB) \to B \in$ плоскость(DEF))

   Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - выделены указателем "усм". В последнем антецеденте вместо символа "прямая" допускаются символы "отрезок" и "интервал". Имеется указатель "развязка". Уровень срабатывания равен 1.

3. Учет параллельности.

   $\forall_{ABCDEFG}$(актив(плоскость(EFG)) & $A \in$ плоскость(EFG) &
   $B \in$ плоскость(EFG) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $C \in$ плоскость$(EFG) \to$
   $D \in$ плоскость(EFG))

   Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателями "усм". Введен указатель "развязка". Уровень срабатывания равен 1.

4. Учет биссектрисы, высоты и медианы.

   $\forall_{ABCDEFG}$(актив(плоскость(EFG) & $A \in$ плоскость(EFG) &
   $B \in$ плоскость(EFG) & $C \in$ плоскость(EFG) & биссектриса$(ABCD) \to$
   $D \in$ плоскость(EFG))

   Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками. При этом в последнем антецеденте вместо символа "биссектриса" может находиться любой из символов "Биссектреуг", "Высота", "Медиана". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Введен указатель "развязка". Уровень срабатывания равен 1.

5. Учет условий "однасторона", "разныестороны".

   $\forall_{ABCDEFG}$(актив(плоскость(EFG)) & $A \in$ плоскость(EFG) &
   $B \in$ плоскость(EFG) & $C \in$ плоскость(EFG) & однасторона$(C, D,$
   прямая$(AB)) \to D \in$ плоскость(EFG))

   Аналогично предыдущему, причем вместо символа "однасторона"может находиться символ "разныестороны". Уровень срабатывания равен 1.

6. Усмотрение планиметрической задачи.

   $\forall_{ABC}$(актив(плоскость(ABC)) $\to$ планиметрия)

   Проверяется отсутствие посылки "точка(D)", такой, что D отлично от точек A, B, C, и в задаче нет посылки "$D \in$ плоскость(ABC)". Введена еще одна версия приема, в которой проверяется, что число рассматриваемых в задаче точек меньше 4. Обе версии имеют указатель "обрыв", обеспечивающий немедленный обрыв работы анализатора и перенесение посылки "планиметрия" во внешнюю задачу. Роль последней играет указанная выше вспомогательная задача на исследование (напомним, что анализатор во время работы создает еще одну, собственную задачу на исследование, копирующую исходную). Уровень срабатывания равен 1.

3.12 Приемы, связанные с символом "отрезок"

Упорядочение операндов

На уровне 0 применяется прием, выполняющий лексикографическое упорядочение операндов в выражении "отрезок(AB)". Теорема приема - "коммутативно(отрезок)".

Учет прямой

Для регистрации определяемой отрезком прямой служит прием вывода с теоремой $\forall_{AB}$(актив(прямая(AB))). Указатель "контрольвывода(отрезок(x26 x27))" инициирует его применение при усмотрении в посылке выражения "отрезок(AB)". Проверяется, что переменные этого выражения не связаны внешними кванторами и описателями и что явное упоминание о прямой, проходящей через точки A, B, еще не появилось в задаче. Уровень срабатывания равен 0.

Усмотрение точки

$\forall_{ABC}(A \in$ отрезок$(BC) \rightarrow A -$ точка$)$

Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 0.

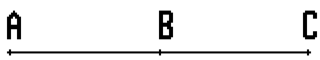
Концевая точка отрезка

$\forall_{AB}(A \in$ отрезок$(AB))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Равенство длины отрезка сумме длин двух подотрезков

На этом свойстве отрезка основано множество приемов. Они срабатывают на разных уровнях и имеют различную степень мотивированности. Объясняется данное обстоятельство тем, что неограниченное выписывание соотношений для длин подотрезков зачастую порождает много ненужных новых расстояний между точками, анализ которых может увести ход решения далеко в сторону. Приводимая ниже шкала уровней срабатывания приемов в зависимости от степени мотивированности была установлена в процессе обучения системы.



$\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & $B \in$ отрезок$(AC) \rightarrow l(AC) = l(AB) + l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Требуется, чтобы расстояние BC тоже было введено в рассмотрение, причем выражения для расстояний AB, BC не содержали неизвестных. Кроме того, расстояние AC должно иметь тип "существатом", т.е. приведенный выше пакетный индикатор "существатом" усматривает достаточно сильную его связь с неизвестными. Проверяется отличие обозначения точки B от обозначений точек A, C. В такой ситуации применение приема равнозначно определению значения "существенного" расстояния AC. Это представляется оправданным, даже если расстояние AC еще не рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

На той же теореме создана следующая серия версий приема:

1. Все три расстояния AB, BC, AC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

2. Расстояния AB, AC рассматриваются в задаче, а выражения для них не содержат неизвестных. В задаче рассматривается прямоугольная система координат, причем существуют понятия, относящиеся к физике. Уровень срабатывания равен 3.

3. Расстояния AB, AC рассматриваются в задаче, а расстояние BC - нет. При этом выражение для расстояния AC не содержит неизвестных, а выражение для расстояния AB имеет тип "неизв", т.е. связано через цепочку уравнений с численными неизвестными. Кроме того, пакетный индикатор "определимо" усматривает возможность вычислить расстояние BC. Таким обрзаом, применение приема позволяет, в некоторой перспективе, составить уравнение для численных неизвестных. Уровень срабатывания равен 5.

4. Расстояния AB, BC рассматриваются в задаче, а AC - нет. Расстояние AC определимо, причем усматривается пропорциональность расстояний AB, BC с известными коэффициентами. Выражение для расстояния AB содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 5.

5. Расстояния AB, AC рассматриваются в задаче, а BC - нет. При этом расстояние BC имеет тип "возмсвяз", т.е. пакетный индикатор "возмсвяз" усматривает перспективность попыток связать его с уже рассматриваемыми в задаче величинами. Уровень срсбатывания равен 6.

6. Рассотяния AB, BC рассматриваются в задаче, а расстояние AC имеет тип "возмсвяз". Уровень срабатывания равен 6.

7. Расстояния AB, BC рассматриваются в задаче, причем расстояние AC определимо, и хотя бы одно из выражений для расстояний AB, BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 8.

8. Расстояния AB, BC рассматриваются в задаче; расстояние AC - не рассматривается и имеет тип "возмсвяз", причем при обращении к пакетному индикатору используется усиливающий комментарий "плюс". Уровень срабатывания приема равен 9.

9. Расстояния AB, BC рассматриваются в задаче, а расстояние AC - нет. Выражения для расстояний AB, BC не содержат неизвестных. Расстояние AC имеет

тип "существатом". Уровень срабатывания равен 9. Заметим, что данный прием, по существу, дублирует первый прием данного раздела, срабатывавший на уровне 3. Такое дублирование позволяет ему сработать без специального переключения внимания - принудительного понижения веса посылки до 3. Высокий уровень срабатывания приема в ситуациях, аналогичных данной, означает не слабую мотивированность действия, а попытку активировать его, когда веса посылок стали уже достаточно большими. Часто это приводит к более быстрому получению ответа, чем при понижении весов.

10. Предыдущий прием еще раз продублирован, но теперь уже варьируется точка привязки: он активируется не при усмотрении посылки "актив(расстояние(AB))", а при усмотрении посылки "$B \in$ отрезок(AC)". Уровень срабатывания тоже равен 9.

11. Расстояния AB, AC, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 9. Этот случай, как и предыдущий, связан с дублированием приемов.

12. Расстояния AB, AC рассматриваются в задаче, причем выражение для первого из них не содержит неизвестных, а для второго - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 11.

13. Расстояния AB, BC рассматриваются в задаче, а расстояние AC - нет. Уровень срабатывания равен 15.

$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(A))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC) \to l(AC) = l(AB) + l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Расстояния AB, AC, BC уже рассматриваются в задаче. Отличие от аналогичного приема, приведенного выше, заключается в ином выборе точки привязки: прием инициируется при усмотрении расстояния AC, а не AB. Уровень срабатывания равен 3. На этой же теореме создан еще один прием, срабатывающий на уровне 15. Он проверяет, что выражение для AC либо известно, либо имеет тип "неизв", причем оба расстояния AB, BC имеют тип "существатом".

$\forall_{ABCpq}(\text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$pl(AC) = ql(BC) \to l(AB) = (q-p)l(AC)/q)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается синтезатором "пропорциональны", усматривающим пропорциональную зависимость расстояний AC, BC с известными коэффициентами p, q. Прочие антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние AB в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB) \to$
$l(AC) = l(AB) + l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AC, BC не содержат неизвестных, расстояние AB в задаче пока не рассматривается. На этой же теореме создана еще одна версия приема, в которой требуется. чтобы выражения для расстояний AC, BC имели тип "внешнеизв". Уровни срабатывания обеих версий равны 7.

$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB) \to$
$l(AB) = l(AC) - l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния AC не содержит неизвестных, выражение для расстояния BC имеет тип "внешнеизв". Расстояние AB в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABC}(B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ l(AC) = 2l(AB)\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(AC)) \to l(AB) = l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор", два последних - выделены указателем "усм". Таким образом, сначала усматривается, что расстояния AB, AC уже встречаются в задаче, а затем проверяется, что второе вдвое больше первого. Уровень срабатывания равен 4.

Сразу заметим, что столь большое число версий приемов, основанных на одном геометрическом соотношении - явление в решателе достаточно редкое. Вообще, короткие теоремы часто требуют гораздо более изощренного управления, чем длинные. Возможность применения такой теоремы встречается значительно чаще, а неоправданное рассмотрение "посторонних" параметров может повести решение по ошибочному пути. Бороться с этим можно двумя способами - либо пытаться с помощью пакетных индикаторов предвосхитить отдаленные последствия применения приема, либо отодвинуть его на более высокие уровни. На малых уровнях прием сильно ограничен по своей трудоемкости, и здесь годятся лишь наиболее очевидные случаи целесообразности срабатываний. Так или иначе, на более высоких уровнях приходится примириться с эвристическим характером мотивировок.

Приведенную серию приемов можно рассматривать как эмпирически полученную аппроксимацию решающего правила. При этом потенциально допустимые стандартные "уровни мотивированности" срабатывания, или "типы приема" можно аккумулировать в некоторой таблице, построенной путем анализа ранее созданных приемов, и использовать ее для автоматической калибровки версий приема на примерах.

Разумеется, приведенный список приемов рассчитан лишь на лобовой режим решения. Если задача решается в режиме усилителя, использующего ограниченные локальные переборы, то потребность в детальном описании контекстов срабатывания, размножающих версии приема, резко сокращается, так как неоправданные срабатывания здесь уже не имеют существенных последствий.

Два различных разбиения отрезка на подотрезки

$\forall_{ABCD}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BD))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AD)\ \&\ C \in \text{отрезок}(AD)\ \&\ \text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{актив}(l(CD)) \to l(AB) + l(BD) - l(AC) - l(CD) = 0)$

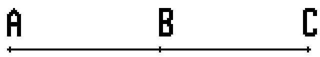
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Проверяется различие обозначений рассматриваемых точек. Расстояния AB, BD, AC, CD уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы одно из них имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7. На той же теореме создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 10. В ней просто проверяется, что среди выражений для расстояний AB, BD, AC, CD имеется хотя бы одно, содержащее неизвестные.

Отождествление точек по условию принадлежности вырожденному отрезку

$\forall_{AB}(A \in \text{отрезок}(BB) \leftrightarrow A = B)$

Уровень срабатывания равен 0.

Разбор случаев для взаимного расположения трех точек на прямой



$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{актив}(l(AC))\ \&\ C \in \text{прямая}(AB) \to B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ l(AC) = l(AB) + l(BC)\ \vee\ \neg(B \in \text{отрезок}(AC))\ \&\ l(AC) = |l(AB) - l(BC)|)$

Указатель "контрольвывода(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении расстояния AC. Выражения для расстояний AB, BC не содержат неизвестных. Текущая посылка представляет собой равенство, содержащее численную неизвестную и имеющее единственный невырожденный числовой атом - расстояние AC. Таким образом, уточнение взаимного расположения точек A, B, C позволило бы найти AC и перейти к уравнению для численных неизвестных. Проверяется, что не усматривается ни принадлежность точки B отрезку AC, ни расположение точки C на луче AB. Выводимая дизъюнкция здесь и в последующих приемах данного подраздела сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания рассматриваемого приема равен 5.

$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(AC))\ \&\ B \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ l(AC) - l(AB) \leq 0 \to C \in \text{отрезок}(AB)\ \vee\ A \in \text{отрезок}(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний AB, AC, BC имеет тип "неизв", а два других - известны. Не усматривается ни одно из утверждений: "C лежит на луче AB", "B лежит на отрезке AC", "A лежит на отрезке BC", "C лежит на отрезке AB", "A лежит на луче CB". Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 8. В ней требуется, чтобы одно из выражений для расстояний AB, AC, BC содержало неизвестные, а два другие - не содержали.

$\forall_{ABC}(B \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, C) \to B \in \text{отрезок}(AC)\ \vee\ C \in \text{отрезок}(AB))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния BC имеет тип "внешнеизв". Более того, некоторая численная неизвестная, встречающаяся в этом выражении, входит в единственное уравнение задачи. Таким образом, ценность соотношений с расстоянием BC существенно возрастает. Проверяется также, что расстояния AB, AC уже встречаются в уравнениях задачи. Уровень срабатывания равен 8. Имеется также версия приема, срабатывающая на уровне 11. В ней требуется, чтобы выражение для расстояния BC не содержало неизвестных, а выражения для расстояний AB, AC имели тип "неизв".

$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ B \in \text{прямая}(AC) \to B \in \text{отрезок}(AC)\ \vee\ C \in \text{отрезок}(AB)\ \vee\ A \in \text{отрезок}(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для расстояний AB, AC, BC не содержит неизвестных, а два других - имеют тип "Неизв". На прямой AC выделена еще хотя бы одна точка, для которой рассматривается ее расстояние до точки A. Уровень срабатывания равен 10. На той же теореме созданы еще две версии приема. Первая из них срабатывает на уровне 12. В ней требуется, чтобы одно из выражений для расстояний AB, AC, BC не содержало неизвестных, другое - имело тип "неизв", а третье расстояние - уже встречалось в задаче. Вторая версия срабатывает на уровне 15. В ней требуется, чтобы одно из указанных выражений было известно, другое - имело тип "неизв", а третье расстояние имело тип "определимо".

Разбор случаев для взаимного расположения четырех точек на прямой

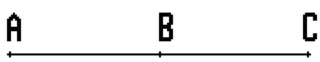
$\forall_{ABCD}$(точкалуча(A,B,D) & точкалуча(D,A,C) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CD))$ & актив$(l(BC)) \to C \in$ отрезок(BD) & $B \in$ отрезок(AD) & $l(BC) = l(AD)-l(AB)-l(CD) \vee$ точкалуча(C,B,D) & точкалуча(B,A,C) & $l(BC) = l(AB)+l(CD)-l(AD))$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Точка B лежит на луче AD, точка C - на луче DA. Разбираются два случая: либо отрезок AD распадается на подотрезки AB, BC, CD, либо отрезки AB, CD пересекаются по отрезку BC. Проверяется, что хотя бы два из расстояний AB, AD, BC, CD выражены через численные параметры. Кроме того, проверяется, что не усматривается ни один из рассматриваемых подслучаев взаимного расположения точек B,C. Уровень срсбатывания равен 12.

$\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AD) & $C \in$ отрезок(AD) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BD))$ & актив$(l(CD)) \to$ актив$(l(BC))$ & $(B \in$ отрезок(AC) & $C \in$ отрезок$(BD) \;\vee\; C \in$ отрезок(AB) & $B \in$ отрезок$(CD)))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Известно, что точки B,C находятся на отрезке A,D, и рассматриваются два случая их размещения друг относительно друга. Расстояния AB, AC, BD, CD выражены через численные параметры. Не усматривается взаимное расположение точек B,C. Уровень срабатывания равен 13.

Расстояние между концами налегающих отрезков, противоположные концы которых совпадают



$\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & $l(AC) = a$ & $l(BC) = b$ & $B \in$ прямая(AC) & точкалуча$(C,A,B) \to l(AB) = |a-b|)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a,b не содержат неизвестных, выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Не усматривается взаимное расположение точек A, B. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & $C \in$ прямая(AB) & актив$(l(BC))$ & точкалуча$(A,B,C) \to l(BC) = |l(AB) - l(AC)|$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв"; выражения для расстояний AC, BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & $B \in$ прямая(AC) & точкалуча$(C,A,B) \to l(AB) = |l(AC) - l(BC)|$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв", выражение для расстояния AC - не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & $\in$ прямая(AB) & точкалуча$(C,A,B) \to l(AB) = |l(AC) - l(BC)|$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв", выражение для расстояния AC - не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCD}$(актив$(l(CD))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AD))$ & $B \in$ отрезок(AC) & $B \in$ отрезок(AD) & разныеточки$(A,B) \to l(CD) = |l(AC) - l(AD)|$)

В этом приеме введена в рассмотрение дополнительная точка B, позволяющая определить размещение точки C на луче AD. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния CD имеет тип "неизв", выражения для расстояний AC и AD не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & $B \in$ отрезок(AD) & $C \in$ отрезок$(AD) \to l(BC) = |l(AC) - l(AB)|$)

Вспомогательная точка D играет ту же роль, что в предыдущем приеме. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния BC имеет тип "неизв", выражения для расстояний AB и AC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

Усмотрение принадлежности отрезку

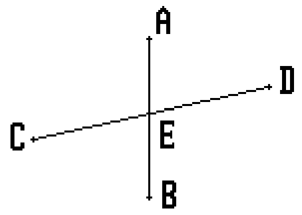
Приемы этого раздела выводят следствия о принадлежности точек отрезкам.

1. Точка, равноудаленная от концов отрезка.

   $\forall_{ABC}(B \in$ прямая(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & разныеточки$(A,C) \to$
   $B \in$ отрезок$(AC))$

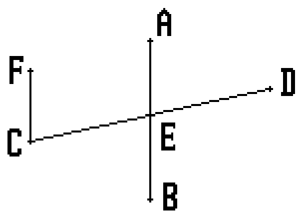
   Второй антецедент выделен указателем "равно". Он идентифицируется с одной посылкой либо с двумя равенствами в посылках, правые части которых совпадают, а левые соответствуют $l(AB)$ и $l(BC)$. Первый антецедент выделен указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1 и 3.

2. Усмотрение принадлежности отрезку из расположения двух точек по разные стороны от прямой.



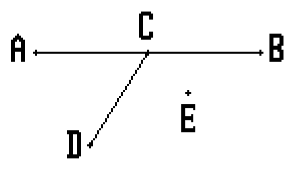
$\forall_{ABCDE}(E \in$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & разныестороны$(C, D,$ пря-$mbox(AB))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)) \rightarrow E \in$ отрезок$(CD))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Два первых антецедента выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 2 и 8. На той же теореме создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. У нее первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в первом антецеденте. Эта версия нужна в тех случаях, когда точка пересечения E вводится в рассмотрение позднее, чем появляется посылка "разныестороны(...)".



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & разныестороны$(F, D,$ прямая$(AB))$ & прямая$(CF) \parallel$ прямая(AB) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)) \rightarrow E \in$ отрезок$(CD))$

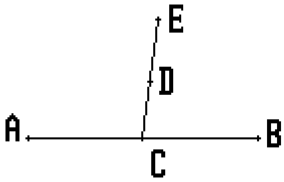
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 2 и 8.



$\forall_{ABCDE}$(разныестороны$(A, E,$ прямая$(CD))$ & однасторона$(B, E,$ прямая$(CD))$ & $C \in$ прямая(AB) & $\neg(E \in$ прямая$(CD)) \rightarrow C \in$ отрезок$(AB))$

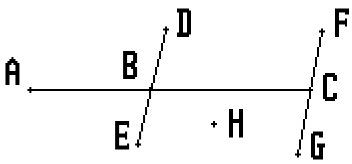
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий антецедент выделен указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

3. Усмотрение принадлежности отрезку при помощи оператора "однасторона".



$\forall_{ABCDEab}(l(CD) = a$ & $l(CE) = b$ & $0 \leq b - a$ & $D \in$ прямая(CE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CE)) & однасторона(E, D, прямая(AB)) & $C \in$ прямая$(AB) \to D \in$ отрезок(CE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". При этом выражения a, b не содержат неизвестных. Третий, пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прием применяется только в режиме усилителя, что объясняется относительно высокой его трудоемкостью. Уровень срабатывания равен 4. На этой же теореме создан другой прием, отличающийся лишь тем, что требование режима усилителя снимается, зато уровень срабатывания поднимается до 6.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая$(DE) \parallel$ прямая(FG) & $B \in$ прямая(AC) & $B \in$ прямая(DE) & $C \in$ прямая(FG) & однасторона(A, H, прямая(FG)) & разныестороны(A, H, прямая(DE)) & точкалуча(A, B, C) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(DE)) $\to B \in$ отрезок(AC))

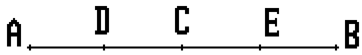
Антецедент ("разныестороны(...)") идентифицируется с посылкой. Антецеденты "однасторона(...)" и "разныепрямые(...)" обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

4. Усмотрение принадлежности отрезку при помощи оператора "разныестороны".

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & актив(прямая(FG)) &
$E \in$ прямая(FG) & разныестороны(E, A, прямая(CD)) $\to G \in$ отрезок(EF))

Первый антецедент иденифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.

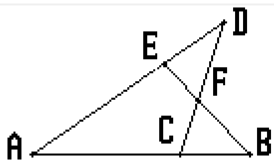
5. Усмотрение принадлежности точки отрезку из принадлежности концов этого отрезка двум смежным отрезкам с концами в данной точке.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BC) & $C \in$ отрезок$(AB) \to C \in$ отрезок$(DE))$

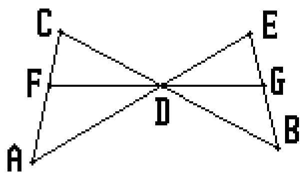
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

6. Усмотрение принадлежности отрезку путем центрального проектирования точек на другую прямую.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(BE) & $E \in$ прямая(AD) &
$F \in$ отрезок(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) &
разныеточки(A, B) & разныеточки$(A, E) \to E \in$ отрезок$(AD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEFG}(F \in$ отрезок(AC) & $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ отрезок(AE) &
$D \in$ прямая(FG) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) &
разныепрямые(прямая(AC), прямая(AE)) & $G \in$ прямая$(BE) \to$
$G \in$ отрезок(BE) & $D \in$ отрезок$(FG))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

7. Перекрывающиеся отрезки.

$\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(BD) & $B \in$ отрезок(AC) & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
$C \in$ отрезок$(AD))$

$\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(BD) & $B \in$ отрезок(AC) & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
$B \in$ отрезок$(AD))$

Первый и второй антецеденты идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AD) & $C \in$ отрезок$(BD) \rightarrow C \in$ отрезок$(AD))$

На этой теореме созданы две версии приема. У одной из них первый антецедент идентифицируется с посылкой, а второй выделен указателем "усм"; у другой - второй идентифицируется с посылкой, а первый выделен указателем "усм". Уровни срабатывания равны 1.

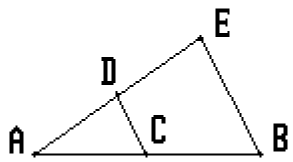
$\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(AD) & $B \in$ отрезок$(AC) \rightarrow C \in$ отрезок$(BD))$

Здесь созданы четыре версии приема. Первые две срабатывают на уровне 2. Как и выше, они отличаются выбором точки привязки. Еще две аналогичные версии срабатывают на уровне 12.

$\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(BD) & $\neg(C \in$ интервал$(AB))$ & актив$(l(AC))$ &
актив$(l(CD))$ & $C \in$ прямая(AB) & разныеточки$(B, C) \rightarrow C \in$ отрезок$(AD))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

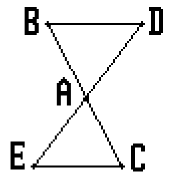
8. Параллельное перенесение условия принадлежности отрезку.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ отрезок(AB) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(BE) & $D \in$ прямая(AE) &
разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AE)) \rightarrow D \in$ отрезок$(AE))$

$\forall_{ABCDE}(C \in$ отрезок(AB) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(BE) & $D \in$ прямая(AE) &
разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)) \rightarrow D \in$ отрезок$(AE))$

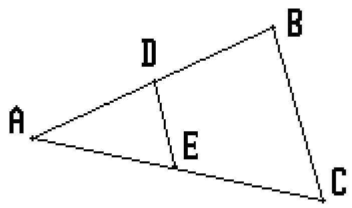
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 2, 4 и 6.



$\forall_{ABCDE}(A \in$ отрезок(BC) & прямая$(BD) \parallel$ прямая(EC) & $A \in$ прямая(DE) &
актив(прямая(DE)) & разныепрямые(прямая(BC), прямая$(BD))$ &
разныеточки$(B, C) \rightarrow A \in$ отрезок$(DE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

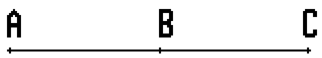
9. Усмотрение взаимного расположения трех точек из сравнения длин параллельных отрезков с концами в этих точках.



$\forall_{ABCDE}$(актив($l(DE)$) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(DE) & точкалуча(A, D, B) & $0 \leq l(BC) - l(DE)$ & $B \in$ прямая(AD) & $C \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(AC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый и последний - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 4 и 5.

10. Уточнение взаимного расположения на луче двух точек из сравнения их расстояний до начала луча.



$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & $B \in$ прямая(AC) & $0 \leq l(AC) - l(AB)$ & точкалуча(A, B, C) $\rightarrow B \in$ отрезок(AC))

$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & $B \in$ прямая(AC) & $l(AC) - l(AB) \leq 0$ & точкалуча(A, B, C) $\rightarrow C \in$ отрезок(AB))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Разность в четвертом антецеденте упрощается с помощью вспомогательной задачи. Заметим, что хотя приемы почти идентичны, но каждый из них нужен: первый инициируется рассмотрением более короткого отрезка, второй - более длинного. В задачах на доказательство приемы применяются без ограничений, а в задачах на исследование предварительно проверяется, что выражения для расстояний AB, AC пропорциональны с известными коэффициентами. Уровни срабатывания каждого приема равны 6 и 8.

На первой из приведенных теорем основаны еще два приема. Условием применимости первого из них является наличие в посылках задачи неравенства с расстоянием AB либо AC. Уровень срабатывания его равен 6. Второй прием применяется только в задачах на доказательство. Уровень срабатывания его равен 4.

11. Усмотрение принадлежности отрезку с использованием двух условий непринадлежности интервалам.

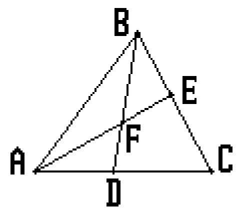
$\forall_{ABCD}(B \in \text{отрезок}(AD)\ \&\ \neg(A \in \text{интервал}(BC))\ \&\ \text{точкалуча}(D,B,C)\ \&$ $\text{разныеточки}(A,B)\ \&\ \text{разныеточки}(B,D) \to C \in \text{отрезок}(AD))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Во втором антецеденте вместо символа "интервал" может находиться символ "отрезок". Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABC}(B \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \neg(A \in \text{интервал}(BC))\ \&\ \neg(C \in \text{интервал}(AB)) \to$ $B \in \text{отрезок}(AC))$

Два последних антецедента идентифицируются с посылками, первый антецедент выделен указателем "усм". В последнем антецеденте вместо символа "интервал" допускается символ "отрезок". Уровень срабатывания равен 3.

12. Внутренняя точка треугольника лежит на отрезке с концами на его границе.

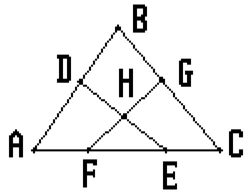


$\forall_{ABCDEF}(D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ F \in \text{отрезок}(BD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BC)\ \&$ $F \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC))\ \&$ $\text{разныеточки}(A,B)\ \&\ \text{разныеточки}(A,C) \to F \in \text{отрезок}(AE))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEF}(D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ F \in \text{прямая}(AE)\ \&$ $F \in \text{прямая}(BD)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AC), \text{прямая}(BC)) \to$ $F \in \text{отрезок}(BD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

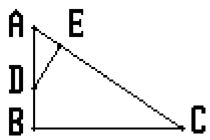


$\forall_{ABCDEFGH}(H \in \text{отрезок}(FG)\ \&\ G \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ F \in \text{отрезок}(AC)\ \&$ $D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ H \in \text{прямая}(DE)\ \&$

разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки$(B, C) \to H \in$ отрезок(DE))

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срсбатывания равен 4.

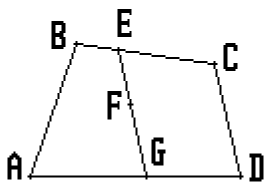
13. Проекция на гипотенузу точки, расположенной на катете.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(AC) \to E \in$ отрезок(AC))

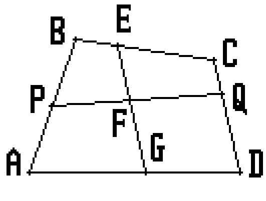
Антецеденты выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд(1)" определяет выбор точки привязки по первому из них. Фактически сначала идентифицируется какое-то условие перпендикулярности, а затем идентифицирующий оператор "прямыеуглы" перечисляет пары прямых AB, BC, параллельных либо равных исходным, находя также их общую точку B. Расстояния AC и CE должны уже упоминаться в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

14. Точка внутри выпуклого четырехугольника лежит на отрезке проходящей через нее прямой, концы которого находятся на границе.



$\forall_{ABCDEFG}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(EG) & $F \in$ фигура$(ABCD) \to F \in$ отрезок(EG))

Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки находится в пятом антецеденте. Вместо символа "параллелограмм" допускаются символы "трапеция", "прямоугольник", "квадрат", "ромб", "четырехугольник". Допускаются циклические перестановки вершин четырехугольника и изменение их порядка на противоположный. Второй, третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Если расстояния EF, FG уже рассматриваются в задаче, то дополнительно выводится следствие $l(EG) = l(EF) + l(FG)$. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(AD) & $P \in$ отрезок(AB) & $Q \in$ отрезок(CD) & $F \in$ отрезок(PQ) & $F \in$ прямая$(EG) \to F \in$ отрезок(EG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6. Аналогичные приемы созданы для символов "трапеция", "прямоугольник", "квадрат", "ромб", "четырехугольник".

15. Усмотрение взаимного расположения на отрезке двух точек из сравнения их расстояний до концов отрезка.

$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(BD))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CD))$ & $0 \le l(AB) - l(AC) - l(BD)$ & точкалуча(A,B,C) & точкалуча$(B,D,A) \to C \in$ отрезок(AD) & $D \in$ отрезок(BC) & $l(AB) = l(CD) + l(AC) + l(BD)$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

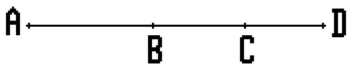
$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AD))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB))$ & $C \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(AB) & $0 \le l(AD) + l(BC) - l(AB) \to C \in$ отрезок(AD) & $D \in$ отрезок(BC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(CD))$ & $pl(AC) = ql(CD)$ & $C \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(AB) & $0 < p - q \to C \in$ отрезок(AD) & $D \in$ отрезок(BC))

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "значения" и обрабатывается пакетным синтезатором "пропорциональны". Он усматривает пропорциональность выражений для расстояний AC, CD с коэффициентами p, q. Эти коэффициенты суть какие-то выражения с численными параметрами (возможно, неизвестными). Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 10.

16. Использование условия принадлежности отрезку и непринадлежности интервалу.



$\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AD) & точкалуча$(B,C,D) \to B \in$ отрезок(AC))

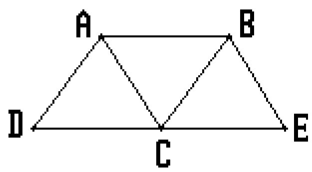
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

17. Разбиение отрезка на три равные части.

$\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(AB) & $l(AC) = l(CD)$ & $l(CD) = l(BD)$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow C \in$ отрезок(AD) & $D \in$ отрезок$(BC))$

Третий антецедент, выделенный указателем "равно", идентифицируется с одним равенством либо с парой равенств вида $l(AC) = a$, $l(CD) = a$. Первые два антецедента выделены указателем "усм", четвертый антецедент - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

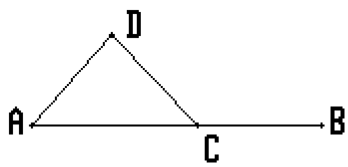
18. Усмотрение двух параллелограммов с общей стороной.



$\forall_{ABCDE}($прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $C \in$ прямая(DE) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(BC) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(BE) & разныеточки(A, B) & $\neg(C \in$ прямая$(AB)) \rightarrow C \in$ отрезок$(DE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

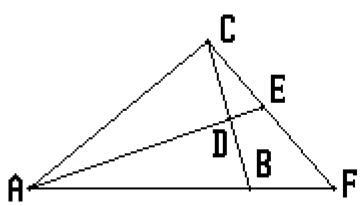
19. Сравнение длин подотрезка и ломаной.



$\forall_{ABCD}(C \in$ прямая(AB) & $l(AB) = a$ & $l(AD) = b$ & $l(CD) = c$ & точкалуча(A, B, C) & $0 \leq a - b - c \rightarrow C \in$ отрезок$(AB))$

Второй, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, причем выражения a, b, c константные. Первый и пятый антецеденты выделены указателем "усм", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

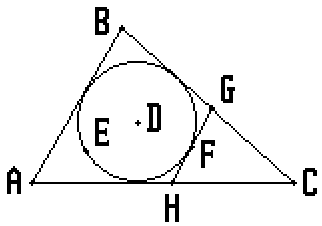
20. Перпендикуляр и наклонная к биссектрисе.



$\forall_{ABCDEF}(l(AC) = l(AB)$ & прямая$(BC) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AD) & $D \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AB) & $0 \leq l(EF) - l(CE)$ & точкалуча(A, D, E) & разныеточки(B, C) & $E \in$ отрезок$(CF) \to B \in$ отрезок$(AF))$

Проверка неравенства и условия "разныеточки" обеспечивается проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". При этом точка привязки находится во втором антецеденте, выделенном также указателем "теквхожд". Уровень срабатывания равен 4.

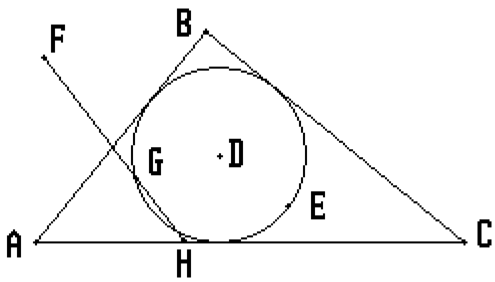
21. Точка касания вписанной в треугольник окружности и прямой, пересекающей две стороны треугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & прямая(GH) – касательная к окружность(DE) & $G \in$ отрезок(BC) & $H \in$ отрезок(AC) & $F \in$ прямая(GH) & $F \in$ окружность(DE) & (разныеточки(C, H) $\vee$ разныепрямые(прямая(BC), прямая(GH))) & (разныеточки(C, G) $\vee$ разныепрямые(прямая(AC), прямая(GH))) $\to F \in$ отрезок(GH))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

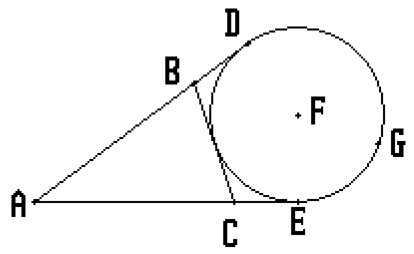
22. Точка пересечения прямой со вписанной окружностью.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $G \in$ прямая(FH) & $G \in$ окружность(DE) & $H \in$ отрезок(AC) & разныестороны$(F, H,$ прямая$(AB))$ & $\neg(F \in$ прямая$(AB)) \to G \in$ отрезок(FH))

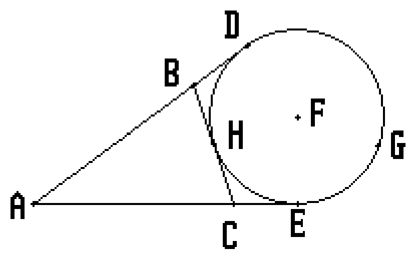
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Вершины треугольника идентфицируются без учета порядка. Уровень срабатывания равен 5.

23. Вершины треугольника и точка касания вневписанной окружности.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(BC) – касательная к окружность(FG) & прямая(AB) – касательная к окружность(FG) & прямая(AC)–касательная к окружность(FG) & точкалуча(D, A, B) & точкалуча(E, C, A) & $D \in$ прямая(AB) & $D \in$ окружность(FG) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ окружность(FG) $\to$ $B \in$ отрезок(AD))

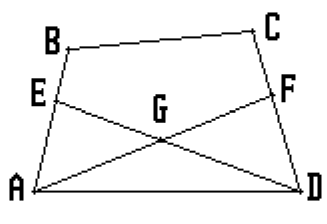
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AD) $\perp$ прямая(DF) & $D \in$ окружность(FG) & прямая(AE) $\perp$ прямая(FE) & $E \in$ окружность(FG) & прямая(BC) $\perp$ прямая(HF) & $H \in$ прямая(BC) & $H \in$ окружность(FG) & $C \in$ отрезок(AE) & $B \in$ прямая(AD) & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AE)) $\to$ $B \in$ отрезок(AD))

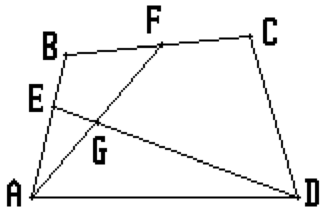
Восьмой антецедент "$C \in$ отрезок(AE)" идентифицируется с посылкой. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

24. Точка пересечения двух отрезков, соединяющих смежные вершины выпуклого четырехугольника с точками на других сторонах.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция($ABCD$) & $F \in$ отрезок(CD) & $E \in$ отрезок(AB) & $G \in$ прямая(DE) & $G \in$ прямая(AF) & (разныеточки(A, E) $\vee$ разныеточки(D, F)) $\to$ $G \in$ отрезок(AF))

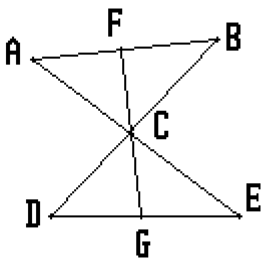
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на противоположный. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4. Так как символом привязки приема служит "трапеция", то для остальных типов четырехугольников - "четырехугольник", "параллелограмм", "ромб", "квадрат", "прямоугольник", - созданы аналогичные приемы.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $E \in$ отрезок(AB) & $G \in$ прямая$(AF) \rightarrow G \in$ отрезок(AF))

Аналогично предыдущему приему. Точно так же, для других типов четырехугольников созданы его отдельные версии.

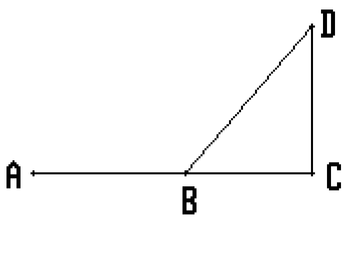
25. Прямая, пересекающая два треугольника с вертикальными углами.



$\forall_{ABCDEFG}$($C \in$ отрезок(AE) & $C \in$ отрезок(DB) & $F \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(DE) & $C \in$ прямая(FG) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(DE)) $\rightarrow C \in$ отрезок(FG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

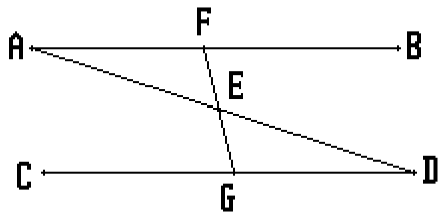
26. Вершина тупого угла и основание перпендикуляра.



$\forall_{ABCDa}(\angle(ABD) = a$ & $0 \leq a - \pi/2$ & прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $C \in$ прямая$(AB) \rightarrow B \in$ отрезок(AC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

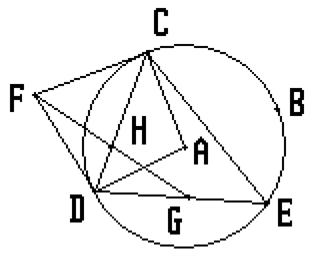
27. Общая точка двух отрезков с концами на параллельных прямых.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(AD) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(FG) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)) \to E \in$ отрезок(FG))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

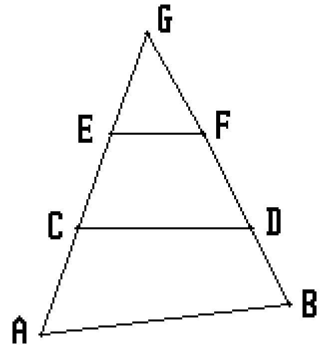
28. Касательные, проведенные в вершинах вписанного треугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AD) & $H \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(DE) & $(0 \leq l(DE) - l(CD) \ \vee \ 0 \leq l(CE) - l(CD))$ & $G \in$ прямая(FH) & разныеточки$(C, D) \to H \in$ отрезок$(FG))$

Дизъюнкция неравенств и утверждение "разныеточки(C, D)" обрабатываются проверочными операторами; остальные антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в четвертом антецеденте. Расстояние CD и хотя бы одно из расстояний CE, DE должны уже рассматриваться в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

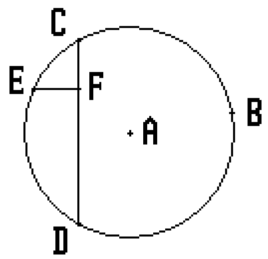
29. Параллельные прямые, проведенные из точек на одной стороне треугольника до пересечения с другой стороной.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ отрезок(AE) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(CD) & $D \in$ отрезок(BG) & $E \in$ отрезок(AG) & $F \in$ прямая(BG) & разныепрямые(прямая(CD), прямая$(BG)) \to D \in$ отрезок$(BF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

30. Проекции точки окружности на хорду.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CD) & разныеточки(C, D) & разныестороны$(A, E,$ прямая$(CD)) \to F \in$ отрезок$(CD))$

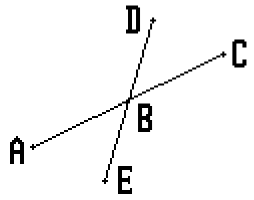
Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Уровень срабатывания равен 7.

31. Длина отрезка равна сумме расстояний точки до его концов.

$\forall_{ABCabc}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & $A \in$ прямая(BC) & $l(AB) = a$ & $l(AC) = b$ & $l(BC) = c$ & $c - a - b = 0 \to A \in$ отрезок$(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние антецеденты выделены указателем "идентификатор". Сначала с помощью нормализатора "нормрасстояние" вычисляются выражения a, b, c. Проверяется, что они не содержат неизвестных, и далее - проверяется, что результат обработки нормализатором "нормплюс" суммы $c-a-b$ равен нулю. Уровень срабатывания равен 8.

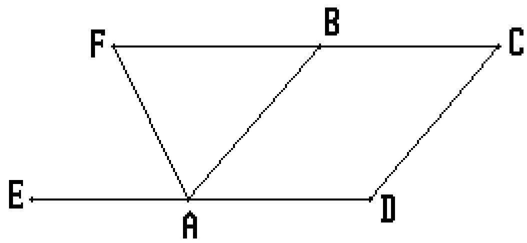
32. Усмотрение принадлежности отрезку из равенства углов.



$\forall_{ABCDE}(\angle(DBC) = \angle(ABE)$ & $B \in$ отрезок(AC) & разныестороны$(D, E,$ прямая$(AC))$ & разныепрямые(прямая(BD), прямая$(AC)) \rightarrow B \in$ отрезок$(DE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно". Он идентифицируется с одной либо двумя посылками - вида $\angle(DBC) = a, \angle(ABE) = a$. Второй антецедент выделен указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 7.

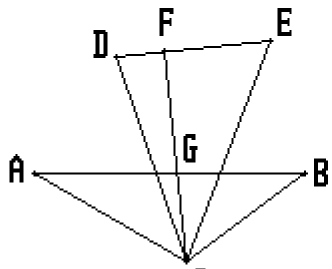
33. Биссектриса внешнего угла параллелограмма.



$\forall_{ABCDEF}(A \in$ отрезок(DE) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & биссектриса$(EABF)$ & $F \in$ прямая(BC) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AD)) \rightarrow B \in$ отрезок$(CF))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

34. Два треугольника с общей вершиной и отрезок, соединяющий эту вершину с основаниями треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}(F \in$ отрезок(DE) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(CE))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(\angle(DCE))$ & актив$(\angle(ACD))$ & актив$(\angle(BCE))$ & $G \in$ прямая(CF) & $G \in$ прямая(AB) & разныестороны$(A, E,$ прямая$(CD))$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(CE))$ & $0 < \pi - \angle(ACD) - \angle(DCE) - \angle(BCE)$ & $0 \leq l(CE) - l(BC) \rightarrow G \in$ отрезок(CF) & $G \in$ отрезок$(AB))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний пять антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

Усмотрение принадлежности прямой из принадлежности отрезку

$\forall_{ABC}(A \in \text{отрезок}(BC) \to C \in \text{прямая}(AB))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "коммутативно(...)" блокирует попытки перестановки точек B, C при идентификации. Прямая AB уже рассматривается в задаче, причем не усматривается принадлежность ей точки C. Уровень срабатывания равен 0. Для специальных случаев (восстановление списка обоснований корректности при анализе протокола решения) создана еще одна версия приема, отличающаяся лишь консеквентом - "$A \in \text{прямая}(BC)$".

Рассмотрение трех подотрезков для определения длины отрезка

Как и в случае разбиения отрезка на два подотрезка, здесь создано множество приемов вывода, уровень срабатывания которых зависит от степени мотивированности.

$\forall_{ABCD}(\text{актив}(l(AD))\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{актив}(l(CD))\ \&$
$B \in \text{отрезок}(AD)\ \&\ C \in \text{отрезок}(BD) \to l(AD) = l(AB) + l(BC) + l(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Каждое из выражений для расстояний AD, AB, BC, CD либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы одно - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4. На той же теореме созданы еще три приема. Первый применим, если одно из указанных расстояний не известно, а остальные выражаются через численные параметры. Второй применим, если какие-то два из этих расстояний не выражаются через численные параметры (известные либо неизвестные), а другие два - выражаются. Уровень срабатывания обоих приемов равен 8. Третий прием применяется, если выражение для расстояния AD имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания его равен 11.

$\forall_{ABCD}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{актив}(l(CD))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AD)\ \&$
$C \in \text{отрезок}(BD) \to l(AD) = l(AB) + l(BC) + l(CD))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, BC, CD не содержат неизвестных; выражение для расстояния AD имеет тип "существатом". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDab}(\text{актив}(l(AD))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{вычислениедлины}(l(AB), a)\ \&$
$\text{вычислениедлины}(l(CD), b)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ C \in \text{отрезок}(BD)\ \&$
$B \in \text{прямая}(AD) \to a\ \&\ b\ \&\ l(AD) = l(AB) + l(BC) + l(CD))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются пакетным синтезатором "вычислениедлины", определяющим конъюнкции a, b соотношений, необходимых для непосредственного вычислений расстояний AB, CD. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния BC не содержит неизвестных; выражение для расстояния AD имеет тип "неизв". Таким образом, прием выводит систему соотношений, позволяющих непосредственно вычислить AD. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{ABCD}$(актив($l(AD)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(CD)$) & $B \in$ отрезок(AC) & $C \in$ отрезок(BD) & $B \in$ прямая(AD) $\rightarrow l(AD) = l(AB) + l(BC) + l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Какие-то два из расстояний AD, AB, BC, CD не выражаются через численные параметры (известные либо неизвестные), а другие два - выражаются. Уровень срабатывания равен 8. На той же самой теореме создана еще одна версия приема. Она имеет тот же уровень срабатывания и применима, если одно из указанных расстояний не известно, а остальные выражаются через численные параметры.

$\forall_{ABCD}$(актив($l(AD)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) & актив($l(BC)$) & точкалуча(B, C, D) & точкалуча(C, A, B) & точкалуча(A, C, D) & точкалуча(D, A, B) $\rightarrow l(AD) = l(AC) + l(BD) - l(BC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Какие-то два из расстояний AD, AB, BC, CD не выражаются через численные параметры (известные либо неизвестные), а другие два - выражаются. Уровень срабатывания равен 8.

Равенство длин отрезков, возникающих при исключении равных отрезков на концах равных отрезков

$\forall_{ABCDEF}(l(AE) = l(DE)$ & $C \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(DE) & $l(AC) = l(DF) \rightarrow l(BC) = l(EF)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Равенство "$l(BC) = l(EF)$ имеет тип "существравно", т.е. одноименный пакетный индикатор выдает на нем ответ "истина". Уровень срабатывания равен 9.

Отождествление двух точек отрезка, равноудаленных от его концов

$\forall_{ABCD}(l(AC) = l(BC)$ & $l(AD) = l(BD)$ & $D \in$ прямая(AB) & $C \in$ прямая(AB) & разныеточки(A, B) $\rightarrow C = D$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

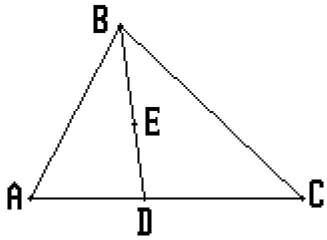
Отождествление двух точек, принадлежащих отрезкам, лежащим на пересекающихся различных прямых

$\forall_{ABCDE}(C \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(CD) & $\neg(D \in$ прямая(AB)) $\rightarrow C = E$)

Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием применяется только в задачах на исследование, имеющих цель "контроль", т.е. возникших при разборе случаев. Он ускоряет усмотрение нереализуемых ситуаций. Предварительно проверяется, что задача уже имеет посылку, представляющую собой равенство двух точек. Уровень срсбатывания равен 2.

Усмотрение противоречия с непринадлежностью точки треугольнику

Все приемы этого подраздела применяются в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Уровень срабатывания их равен 2. На более высоких уровнях уже может быть выдан ответ, и усмотреть противоречие нужно до этого.



$\forall_{ABCDE}(\neg(E \in \text{фигура}(ABC))\ \&\ D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BD) \to \text{ложь})$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. На той же теореме создан еще один прием, у которого точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Здесь указателем "усм" выделен только второй антецедент.

$\forall_{ABCDE}(\neg(E \in \text{фигура}(ABC))\ \&\ D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ \text{точкалуча}(B, D, E)\ \&\ l(BE) = a\ \&\ l(BD) = b\ \&\ 0 \leq b - a \to \text{ложь})$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Расстояния BE, BD уже рассматриваются в задаче, причем выражения a, b не содержат неизвестных. Введен сильный ограничитель трудоемкости, выделяемой на проверку последнего антецедента.

Длина отрезка равна расстоянию между его концами

$\forall_{AB}(\text{длина}(\text{отрезок}(AB)) = l(AB))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Включение в прямую

$\forall_{ABCD}(\text{отрезок}(AB) \subseteq \text{прямая}(CD) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(CD)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD))$

Уровень срабатывания равен 1.

Включение в плоскость

$\forall_{ABCDE}$(отрезок$(AB) \subseteq$ плоскость$(CDE) \leftrightarrow A \in$ плоскость(CDE) &
$B \in$ плоскость(CDE))

Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение противоречия: расстояние от конца отрезка до точки отрезка больше длины отрезка

Все приемы этого подраздела применяются в посылках задачи на исследование, имеющей цель "контроль".

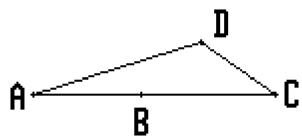
$\forall_{ABCabcde}(l(AB) = ab/c$ & $l(AC) = bd/e$ & $B \in$ отрезок(AC) & $0 < b$ &
$0 < a/c - d/e \rightarrow$ ложь)

$\forall_{ABCabcde}(l(AB) = bd/e$ & $l(AC) = ab/c$ & $B \in$ отрезок(AC) & $0 < b$ &
$0 < a/c - d/e \rightarrow$ ложь)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем для исключения симметричных рассмотрений требуется, чтобы вторая посылка располагалось в списке посылок после первой. Третий антецедент выделен указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, c, d, e константные. Введен сильный ограничитель трудоемкости для обработки четвертого антецедента. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCpq}(A \in$ отрезок(BC) & $0 < ps - qr \rightarrow (rl(AB)/s = pl(BC)/q) \leftrightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражения p, q, r, s не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AC) & $l(BC) = a$ & $l(AD) = b$ & $l(CD) = c$ &
$0 < a - b - c \rightarrow$ ложь)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Фильтры "усм(актив(расстояние(x26 x29)))", "усм(актив(расстояние(x28 x29)))" фактически присоединяются к антецедентам и определяют идентификацию переменной D с некоторой точкой, такой, что уже рассматриваются ее расстояния до точек A, C. Выражения a, b, c должны быть константными. Уровень срабатывания равен 7.

Ориентация равенства

$\forall_{ABa}$(отрезок$(AB) = a \leftrightarrow a =$ отрезок(AB))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к посылке задачи на исследование. Переменная a идентифицируется с некоторой переменной задачи. Либо преобразуемая посылка еще не имеет комментария "ориентацияравенства", либо она не ориентирована требуемым образом (т.е. слева - переменная, справа - отрезок). При выполнении преобразования посылка сопровождается комментарием "ориентация-равенства". Уровень срабатывания равен 2.

Концы отрезка

$\forall_{AB}$(концы(отрезок(AB)) $= \{A, B\}$)

Уровень срабатывания равен 0.

Усмотрение различия точек деления отрезка на равные части

$\forall_{ABCD}$($C \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(AB) & $l(AC) = l(CD)$ & $l(CD) = l(BD) \to \neg(A = C)$ & $\neg(C = D)$ & $\neg(B = D)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

Нормализатор общей стандартизации "нормотрезок"

Нормализатор имеет прием лексикографического переупорядочения операндов (концов отрезка) и прием, использующий равенство из посылок вида "отрезок(AB)=C" для замены обозначения отрезка на выражение C.

3.13 Приемы, связанные с символом "интервал"

Упорядочение операндов

На уровне 0 применяется прием, выполняющий лексикографическое упорядочение операндов в выражении "интервал(AB)". Теорема приема - "коммутативно(интервал)".

Усмотрение принадлежности прямой из принадлежности интервалу

$\forall_{ABC}$($A \in$ интервал(BC) $\to A \in$ прямая(BC))

Уровень срабатывания равен 0.

Конец отрезка не принадлежит его интервалу

$\forall_{ABC}$($A \in$ отрезок(BC) $\to \neg$($B \in$ интервал(AC)))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Интервал с совпадающими концами

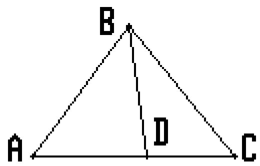
$\forall_A$(интервал(AA) $= \emptyset$)

Уровень срабатывания равен 0.

Усмотрение непринадлежности интервалу

Непринадлежность точки A интервалу BC означает, если все эти точки лежат на общей прямой, что точки B, C лежат по одну сторону от A. Если одна из точек B, C отлична от A, то другая лежит на определяемом ею луче с началом A. По этой причине, заблаговременное усмотрение непринадлежности точки интервалу является важным для последующего быстрого анализа взаимного размещения точек на прямой. Перечислим приемы, выводящие следствия такого вида.

1. Усмотрение непринадлежности интервалу из сравнения величин углов.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(ABD)$) & $D \in$ прямая(AC) & $0 \leq \angle(ABC) - \angle(ABD)$ & $\neg(B \in$ прямая$(AC)) \rightarrow \neg(C \in$ интервал$(AD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается принадлежность точки D лучу CA. Введен сильный ограничитель трудоемкости для проверки четвертого антецедента. Уровень срабатывания равен 8.

2. Усмотрение непринадлежности точки разности двух отрезков с общим концом, содержащих эту точку.

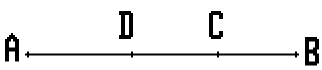
$\forall_{ABCD}(D \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(AC) & точкалуча$(A, B, C) \rightarrow$ $\neg(D \in$ интервал$(BC)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки лучу DB. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCD}(D \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(AC) & разныеточки$(A, D) \rightarrow$ $\neg(D \in$ интервал$(BC)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается принадлежность точки C лучу DB. Уровень срабатывания равен 5.

3. Усмотрение непринадлежности интервалу из принадлежности точки двум отрезкам с общим концом.



$\forall_{ABCD}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ C \in \text{отрезок}(DB)\ \&\ \text{разныеточки}(C, B) \rightarrow \neg(B \in \text{интервал}(AD)))$

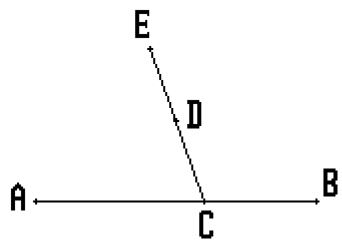
Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 6.

4. Конец отрезка не принадлежит интервалу, концы которого лежат на отрезке.

   $\forall_{ABCD}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ \text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{актив}(l(AD)) \rightarrow \neg(A \in \text{интервал}(CD)))$

   Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Прием срабатывает только в задачах, имеющих цель "чертеж". Такие цели возникают при построении эскиза, сопровождающего условие планиметрической задачи. Уровень срабатывания равен 1.

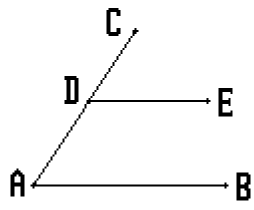
5. Усмотрение непринадлежности интервалу с использованием оператора "однасторона".



   $\forall_{ABCDE}(\text{актив}(\text{прямая}(CD))\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD))\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{однасторона}(D, E, \text{прямая}(AB)) \rightarrow \neg(C \in \text{интервал}(DE)))$

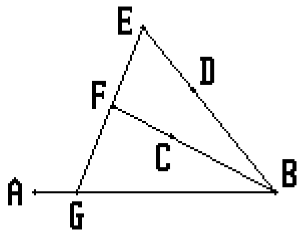
   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и четвертый - выделены указателем "усм". Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Введен сильный ограничитель трудоемкости обработки пятого антецедента. Уровень срабатывания равен 4.

6. Усмотрение непринадлежности интервалу из расположения двух точек по одну сторону от прямой.



   $\forall_{ABCDE}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{однасторона}(E, C, \text{прямая}(AB))\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC)) \rightarrow \neg(A \in \text{интервал}(CD)))$

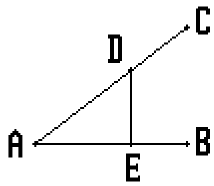
   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEFG}$(однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & $C \in$ отрезок(FB) & $D \in$ отрезок(BE) & $G \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(GE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(GE)) \to \neg(G \in$ интервал$(EF)))$

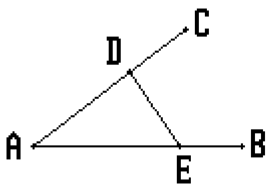
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

7. Проекция на сторону острого угла точки, лежащей на другой его стороне.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(BAC))$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, C, D) & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAC) \to$ $\neg(A \in$ интервал$(BE)))$

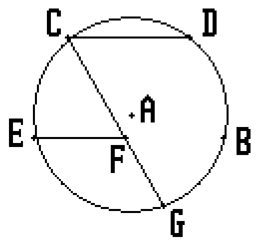
Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд(3)" определяет выбор точки привязки в третьем антецеденте. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости этой обработки. Уровень срабатывания равен 12.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(BAC))$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, C, D) & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAC) \to$ $\neg(A \in$ интервал$(BE)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 9.

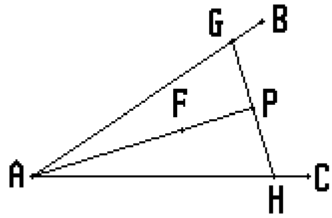
8. Пересечение с окружностью отрезка, соединяющего конец хорды с точкой на параллельной хорде.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) & разныеточки(C, D) & разныеточки(C, E) & $G \in$ прямая(CF) & $G \in$ окружность(AB) & однасторона$(D, F,$ прямая$(CE))$ & разныепрямые(прямая(CD), прямая$(CE)) \rightarrow \neg(C \in$ интервал$(FG)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой; антецеденты с заголовками "разныеточки", "разныепрямые", "однасторона" обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

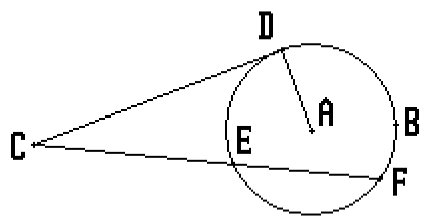
9. Пересечение биссектрисы с отрезком, концы которого находятся на сторонах угла.



$\forall_{ABCFGHP}$(биссектриса$(BACF)$ & точкалуча(A, B, G) & точкалуча(A, H, C) & $P \in$ прямая(AF) & $P \in$ прямая(GH) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow \neg(A \in$ интервал$(FP)))$

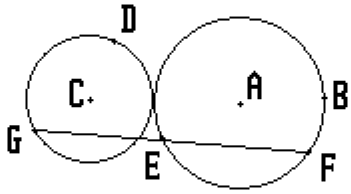
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

10. Секущая, проведенная к окружности из внешней точки.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая$(CE) \rightarrow \neg(C \in$ интервал$(EF)))$

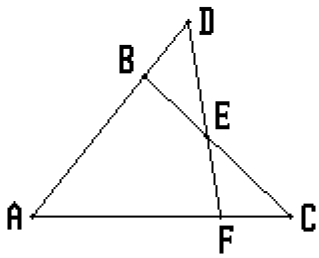
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFG}$(внешкасаются(окружность(CD), окружность(AB)) & $G \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая$(GE) \to \neg(G \in$ интервал$(EF)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

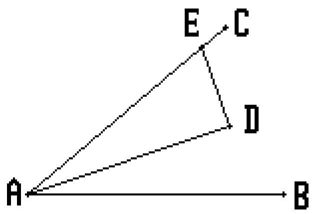
11. Пересечение прямой, проходящей через две стороны треугольника, с продолжением третьей стороны.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AC) & $D \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(EF) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) & разныеточки(E, F) & разныеточки(C, B) & разныеточки$(A, C) \to$ $\neg(D \in$ интервал$(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четыре последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

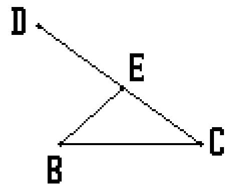
12. Точка пересечения со стороной угла перпендикуляра, проведенного к биссектрисе.



$\forall_{ABCDE}(\angle(CAD) = \angle(BAD)$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AD) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & разныестороны$(B, C,$ прямая$(AD))$ & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ плоскость$(ABC) \to \neg(A \in$ интервал$(CE)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно"; он идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

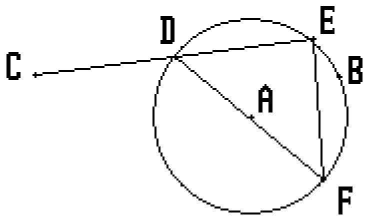
13. Сравнение расстояний до точки на противоположной стороне острого угла.



$\forall_{BCDE}$(актив($\angle(BCD)$ & $\angle(BCD) = a$ & $0 < \pi - 2a$ & актив($l(BC)$) & актив($l(BE)$) & $E \in$ прямая(CD) & $l(BE) = b$ & $l(BC) = c$ & $0 < c - b \to$ $\neg(C \in$ интервал(DE)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты с четвертого по шестой выделены указателем "усм". Второй, седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор"; их левые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Наконец, третий и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Введен средний ограничитель трудоемкости обработки девятого антецедента. Уровень срабатывания равен 7.

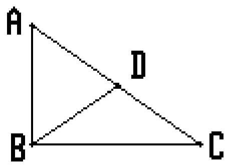
14. Секущая, проведенная из внешней точки.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $D \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(DF) & $E \in$ прямая(CD) & прямая(CD) $\perp$ прямая(EF) & $\neg(C \in$ внутренность(круг(AB))) $\to$ $\neg(C \in$ интервал(DE)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

15. Усмотрение острого угла прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) & $\angle(BAD) = a$ & $0 < \pi/2 - a \to \neg(A \in$ интервал$(CD)))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки взята в первом из них. Третий антецедент идентифицируется с посылкой; выражение a не содержит неизвестных. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 7.

Нормализатор общей стандартизации "норминтервал"

Нормализатор имеет единственный прием - лексикографическое упорядочение операндов.

3.14 Приемы, связанные с символом "луч"

Усмотрение принадлежности прямой

$\forall_{ABC}$(точкалуча$(A, B, C) \to B \in$ прямая$(AC))$

$\forall_{ABC}(B \in$ луч$(AC) \to B \in$ прямая$(AC))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Не усматривается принадлежность точки B прямой AC. Уровень срабатывания равен 1.

Отождествление двух точек луча, удаленных от его начала на одно и то же расстояние

$\forall_{ABC}(l(AB) = l(AC)$ & точкалуча$(A, B, C) \to B = C)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент выделен указателем "равно" и идентифицируется с одной либо двумя посылками. Второй антецедент выделен указателем "усм". Перед его обработкой проверяется принадлежность точки B прямой AC. Уровень срабатывания равен 5.

Усмотрение непринадлежности интервалу

$\forall_{ABC}(A \in$ луч$(BC) \to \neg(B \in$ интервал$(AC)))$

$\forall_{ABC}$(точкалуча$(B, A, C) \to \neg(B \in$ интервал$(AC)))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение принадлежности лучу с помощью идентифицирующих операторов

$\forall_{ABC}$(точкалуча$(A, B, C) \to$ точкалуча$(A, B, C))$

$\forall_{ABC}(B \in$ отрезок$(AC) \to$ точкалуча$(A, B, C))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм", причем антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

3.15 Приемы, связанные с символом "расстояние"

Упорядочение операндов

На уровне 0 применяется прием, выполняющий лексикографическое упорядочение операндов в выражении "расстояние(AB)". Теорема приема - "коммутативно(расстояние)".

Регистрация в активе

$\forall_{AB}$(актив($l(AB)$))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(расстояние(x26 x27))" определяет его применение при усмотрении в задаче выражения $l(AB)$. Допускаются задачи на доказательство, на исследование либо задачи на преобразование, имеющие цель "класс". Последние возникают в аналитической геометрии при попытке исключить описатели "класс", участвующие в задании кривых с помощью уравнений, и перейти к бескоординатному заданию. Выражение $l(AB)$ не должно находиться под связывающим его квантором либо описателем. Уровень срабатывания равен 0.

Учет прямой

$\forall_{AB}$(актив(прямая(AB)))

Прием инициируется при усмотрении посылки "актив($l(AB)$)". Проверяется отсутствие выделенного в задаче отрезка AC, содержащего отличную от C точку B, а также отрезка BC, содержащего точку A. Если такие отрезки есть, то прямая будет регистрироваться по ним. Уровень срабатывания равен 0.

Отличие расстояния от нуля

$\forall_{AB}(\neg(l(AB) = 0) \leftrightarrow \neg(A = B))$

Уровень срабатывания равен 0.

Совпадающие точки

$\forall_{A}(l(AA) = 0)$

Уровень срабатывания равен 0.

Совпадение точек, расстояние между которыми равно 0

$\forall_{AB}(l(AB) = 0 \leftrightarrow A = B)$

Уровень срабатывания равен 0.

Неотрицательность расстояния

$\forall_{ABa}(0 < a \rightarrow \neg(l(AB) = -a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". На целесообразность попытки его применения указывает наличие минуса перед выражением для расстояния. При этом проверяется, что выражение a не содержит неизвстных. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABa}(0 \leq a \rightarrow l(AB) = -a \leftrightarrow a = 0 \ \& \ A = B)$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABa}(l(AB) = a \ \& \ a < 0 \rightarrow \text{ложь})$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Выражение a не содержит неизвестных и в нем встречается символ "минус". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABa}(\text{разныеточки}(A, B) \ \& \ l(AB) = a \rightarrow 0 < a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Он применяется в задаче на исследование, не имеющей цели "известно". В геометрии это бывает для задач на построение. Второй антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит неизвестных и неконстантное. Оно имеет только численные переменные. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABabc}(\text{разныеточки}(A, B) \ \& \ l(AB) = a|b|/c \rightarrow \neg(b = 0))$

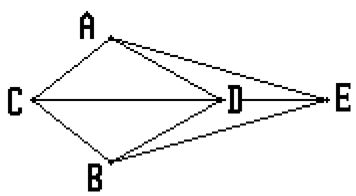
Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Выражение a не содержит неизвестных, выражение b - неконстантное и имеет только численные переменные. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

Исключение регистрации вырожденного расстояния

$\forall_A(\text{актив}(l(AA)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

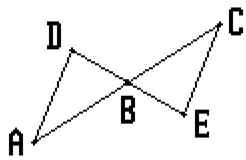
Три точки, равноудаленные от двух заданных точек, лежат на общей прямой



$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(BC) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ \text{разныеточки}(C, D) \ \& \ \text{разныеточки}(A, B) \ \& \ l(AE) = l(BE) \ \& \ E \in \text{плоскость}(ACD) \rightarrow E \in \text{прямая}(CD))$

Первый антецедент выделен указателем "равно". Он идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 11.

Две точки, центрально симметричные двум другим точкам



$\forall_{ABCDE}(B \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & $B \in$ отрезок(DE) & $l(BD) = l(BE)$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(CE)) \to l(AD) = l(CE))$

Второй антецедент выделен указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 7.

Вывод условия неотрицательности для переменной - коэффициента пропорциональности расстояний

$\forall_{ABCDabc}(l(AB)ab = l(CD)c$ & $0 \leq c$ & $0 < b$ & разныеточки$(A, B) \to 0 \leq a)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем a - переменная. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Допускаются вырожденные единичные b, c. Проверочный оператор не должен усматривать неотрицательность значения a. Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение ненулевой суммы коэффициентов пропорциональности

$\forall_{ABCDpq}(l(AB) = pl(CD)/q \to \neg(p + q = 0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой, причем p, q - переменные. Уровень срабатывания равен 6.

Попытка применить теорему синусов при усмотрении соотношения пропорциональности для двух расстояний

$\forall_{abcdefmnpqrsABCDPQR}(al(AB)/b = cl(CD)/d$ & Пропорцрасст$(l(AB), r, p, q)$ & Пропорцрасст$(l(CD), s, m, n)$ & $r = l(PQ)$ & $s = l(PR)$ & парамугол$(\angle(PQR), e)$ & парамугол$(\angle(PRQ), f) \to admq \sin f = bcpn \sin e)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй и третий антецеденты обрабатываются синтезаторами, перечисляющими расстояния r, s, пропорциональные, соответственно, расстояниям $l(AB)$ и $l(CD)$. При этом p, q - коэффициенты пропорциональности при $l(AB)$ и r; m, n - коэффициенты пропорциональности при $l(CD)$ и s. Приемы синтезатора "Пропорцрасст" будут приведены в конце данного раздела. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор"; они идентифицируют точки P, Q, R по выражениям r, s. Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются синтезаторами, определяющими выражения e, f для углов $\angle(PQR)$, $\angle(PRQ)$ через численные параметры. Проверяется, что выражения a, b, c, d не содержат неизвестных, а хотя бы одно из выражений e, f - содержит. Выражения p, q, m, n не будут содержать неизвестных ввиду того, что такими их подбирают приемы синтезатора. Обозначения точек P, Q, R должны быть различными, причем не должна усматриваться принадлежность точки R прямой PQ. Проверяется также, что треугольник PQR - не равнобедренный. Комментарии "синус", передаваемые синтезатору "парамугол", разрешают находить выражение для угла с точностью до перехода к дополнительному углу. Уровень срабатывания равен 5.

Исключение регистрации расстояния между точками, заданными сложными выражениями

$\forall_{AB}(\text{актив}(l(AB)))$

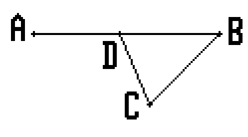
Прием имеет заголовок "второйтерм". Либо A, либо B не является переменной. Уровень срабатывания равен 0. Типичные случаи срабатывания - ссылка $A(i)$ на точку, являющуюся элементом набора A; ссылка на геометрическое место материальной точки в механике, и т.п.

Выбор в задаче на построение двух опорных точек на основе известного расстояния между ними

$\forall_{ABa}(A - \text{точка} \ \& \ l(AB) = a \to B \in \text{окр}(A, a))$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Обычно это блок анализа задачи на описание, решаемой для выполнения построения. Ответом такой задачи будет служить совокупность утверждений, последовательно определяющих искомые точки через произвольным образом выбираемые "опорные точки". Последние необходимы, так как обычно построения выполняются с точностью до параллельных переносов и поворотов. Данный прием как раз выбирает две опорные точки A, B, усматривая в посылках равенство, определяющее известное расстояние a между ними. Переменные A, B суть неизвестные, причем задача пока не имеет ни одной известной точки. Указатель "найдено(x26 x27)" обеспечивает перевод точек A, B из неизвестных в категорию известных параметров. Выводимая посылка помечается комментарием (найдено B), позволяющим впоследствии выделить ее из списка посылок для перенесения в ответ. Он означает, что данная посылка определяет способ "построения" точки B. Напомним, что выражение "окр(A, a)" обозначает окружность радиуса a с центром в точке A. Аналогичным образом, посылка, идентифицированная с первым антецедентом, помечается комментарием (найдено A). Уровень срабатывания равен 5.

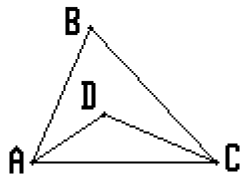
Ввод вспомогательной точки на отрезке при доказательстве равенства расстояния сумме других расстояний



$\forall_{ABCDab}(l(AB) = a \ \& \ l(BC) = b \ \& \ 0 \leq l(AB) - l(BC) \to D - \text{точка} \ \&$
$D \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ l(BD) = l(BC) \ \& \ \text{актив}(l(CD)) \ \& \ a = b + l(AD))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство, причем a, b - переменные. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "новыйсимвол(x29 фикс(0 1)фикс(0 2)фикс(0 3))" определяет выбор новой переменной D и передачу в список посылок внешней задачи на описание первых трех конъюнктивных членов выводимого утверждения. Условие задачи должно иметь вид $b - a = d$ либо $a - b = d$. Проверяется также отсутствие выделенной на отрезке AB точки, расстояние которой до точки B равно b. Уровень срабатывания равен 12.

Усмотрение противоречия из сравнения расстояний точки внутри треугольника до вершин с длинами сторон



$\forall_{ABCD}(D \in \text{фигура}(ABC)\ \&\ l(AD) = a\ \&\ l(CD) = b\ \&\ l(AB) = c\ \&\ l(AC) = d\ \&$
$0 < a - c\ \&\ 0 < b - d \to \text{ложь})$

Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Выражения a, b, c, d константные. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

Противоположные знаки в соотношении пропорциональности для расстояний

$\forall_{abcdeABCD}(0 < a\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < e\ \&\ al(AB)/c = -dl(CD)/e \to A = B\ \&$
$C = D)$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Для каждого из них введен сильный ограничитель трудоемкости. Текущая задача на исследование имеет цель "контроль". Уровень срабатывания равен 2.

Ввод вспомогательного параметра

В геометрических задачах часто бывает полезно обозначить какой-либо числовой атом (расстояние, угол и т.п.) вспомогательной переменной и временно считать ее известной. Это активирует приемы, выражающие различные величины через расширенный список известных величин. После того, как неизвестная оказывается выражена через такие вспомогательные "известные" параметры, они переводятся в разряд вспомогательных неизвестных. В данном подразделе мы перечислим несколько приемов ввода вспомогательных параметров для расстояний.

1. Ввод вспомогательного параметра для длины отрезка, встречающейся в знаменателе.

   $\forall_{abcdnAB}(a = b/(cl(AB)^n) \to d = l(AB))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Выражение a имеет тип "внешнеизв", выражение b содержит символ "расстояние". Таким образом, прием может оказаться полезным при определении неизвестных отношений двух расстояний. Расстояние AB будет обозначено вспомогательным "известным" параметром d, и решатель попытается выразить через него расстояние из числителя. Указатель "вспомпараметр(x4 фикс(0))" и является тем дополнением к описанию приема вывода, которое обеспечивает действия по вводу нового параметра d. Информация о том, что d - вспомогательный параметр, сохраняется в комментарии (вспомпараметр d) к списку посылок задачи. Уровень срабатывания равен 7.

2. Ввод вспомогательного параметра для длины отрезка, встречающейся в соотношении пропорциональности.

   $\forall_{abcxAB}(axl(AB) = b \to c = l(AB))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Переменная x представляет собой неизвестную внешней задачи на описание. Она не встречается в других уравнениях, имеющихся в списке посылок. Указатель "вспомпараметр(...)" используется так же, как в предыдущем приеме. Выражение b содержит символ "расстояние". Если имеется несколько вхождений этого символа в b, то уровень срабатывания равен 7, иначе он равен 12. Имеется еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 14. Она разрешает вхождения переменной x в другие уравнения, но только такие, которые содержат символ "расстояние" и не имеют вхождений $l(AB)$.

3. Ввод вспомогательного параметра для расстояния, входящего в условие задачи на доказательство.

   $\forall_{ABa}(l(AB) = a)$

   Прием имеет заголовок "вывод", причем указатель "контрольвывода(...)" определяет его инициализацию при усмотрении вхождения выражения $l(AB)$ в условие задачи на доказательство. Проверяется, что либо это вхождение расположено внутри равенства, содержащего хотя бы один из символов "угол", "расстояние", "площадь", либо задача имеет комментарий (неизвестные A), выделяющий переменные A, рассматриваемые в задаче как неизвестные. Разумеется, здесь речь идет не о нахождении значений неизвестных, а лишь о том, чтобы воспользоваться в задачах на доказательство механизмами управления выводом следствий, разработанными для задач на исследование. Разделение переменных на "неизвестные" и "известные параметры" играет при этом существенную роль. Наконец, проверяется, что нет другого выражения $l(CD)$, встречающегося в большем числе уравнений задачи, чем $l(AB)$. Уровень срабатывания равен 5.

4. Ввод вспомогательного параметра для целочисленного расстояния.

   $\forall_{ABd}(l(AB) - \text{целое} \to d = l(AB))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Уровень срабатывания равен 5. Геометрические параметры с целочисленными параметрами крайне редки - в задачнике решателя имеется всего один пример такого рода. Данный прием активизирует попытки вывода новых уравнений с целочисленными параметрами, и в итоге дает возможность воспользоваться условием их целочисленности.

5. Ввод вспомогательного параметра для длины отрезка, встречающейся в исходном соотношении для линейной комбинации двух расстояний.

$\forall_{abcABCD}(l(AB) = al(CD) + b \rightarrow c = l(AB))$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Эта посылка не имеет комментария "следствие", т.е. встречалась в исходной формулировке задачи, с точностью до тождественных или эквивалентных преобразований. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 13.

Ввод вспомогательной неизвестной

Другой способ привлечь внимание решателя к некоторому числовому атому - ввести для него вспомогательную неизвестную. Во время решения задачи на исследование она приравнивается к прочим неизвестным, так что активируется вывод соотношений для указанного числового атома и существенно повышается вероятность его определения. Никакого изменения статуса вспомогательных неизвестных даже после нахождения их значений не происходит. Однако, они игнорируются при составлении ответа задачи - в него включаются только равенства для основных неизвестных. При этом не требуется, чтобы значения всех вспомогательных неизвестных тоже были найдены. Вспомогательные неизвестные x регистрируются в комментариях (вспомнеизвестная x) к посылкам текущей задачи.

1. Ввод вспомогательной неизвестной для расстояния с целью получения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

   $\forall_{ABa}(l(AB) = a \ \& \ a - \text{число})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(расстояние(x26 x27))" определяет инициализацию его применения при усмотрении выражения $l(AB)$ в уравнении задачи на исследование, имеющей цель "известно". Должна существовать неизвестная x внешней задачи на описание, входящая в данное уравнение, причем оно не имеет атомарных неизвестных подвыражений, отличных от x, $l(AB)$. Кроме того, проверяется существование еще одного уравнения, имеющего в точности такие атомарные неизвестные подвыражения. Указатель "вспомнеизвестная(x1)" определяет действия, необходимые для регистрации новой переменной a как вспомогательной неизвестной. Уровень срабатывания равен 13.

2. Ввод вспомогательной неизвестной для расстояния, входящего в условие задачи на доказательство.

   $\forall_{ABa}(l(AB) = a \ \& \ a - \text{число})$

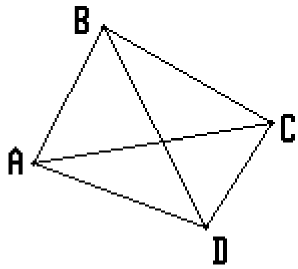
   Указатель "контрольвывода(расстояние(x26 x27))" определяет инициализацию применения приема при усмотрении выражения $l(AB)$ в условии задачи на доказательство. Требуется, чтобы эта задача еще не имела комментария "(неизвестные ...)". Не должно существовать посылки вида $l(AB) = c$, где c - переменная. Наконец, проверяется, что либо рассматриваемое вхождение выражения $l(AB)$ расположено внутри равенства, не имеющего других числовых атомов с заголовками "угол", "расстояние", "площадь", либо оно имеет особое положение в равенстве $P = 0$ - является слагаемым выражения P, с точностью до знака "минус", а прочие слагаемые P не имеют заголовков "расстояние", "угол". Уровень срабатывания равен 5.

3. Ввод вспомогательной неизвестной для расстояния, если имеется уравнение для определения этого расстояния.

   $\forall_{ABa}(l(AB) = a \ \& \ a -$ число$)$

   Инициализация применения приема происходит при усмотрении выражения $l(AB)$ в уравнение задачи на исследование, имеющей цель "известно". Проверяется, что данное уравнение имеет более одного такого вхождения и не имеет других атомарных неизвестных подвыражений. Длина уравнения должна быть менее 50. Проверяется также наличие уравнения, в котором встречаются как $l(AB)$, так и некоторая неизвестная внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 7.

4. Ввод вспомогательной неизвестной для второй диагонали четырехугольника.

   $\forall_{ABCDx}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(CD))$ & актив$(l(BD))$ & актив(прямая$(AD)) \to l(AC) = x \ \& \ x -$ число & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(CAD)))$

   Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой; остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прием срабатывает в задачах на исследование. Выражения для расстояний AB, BC, CD и угла $\angle(ADC)$ не содержат неизвестных; выражение для диагонали BD имеет тип "неизв". Проверяется, что расстояние AC пока не известно, не имеет типа "определимо" и что отсутствует посылка вида $l(AC) = y$, где y - переменная. Отбрасываются случаи вырожденных размещений точек A, B, C, D. Уровень срабатывания равен 9.

Преобразования равенств, содержащих расстояния

При решении геометрических задач часто бывают нужны алгебраические преобразования соотношений, возникающих в посылках. Они не содержат ничего принципиально нового по сравнению с преобразованиями, используемыми для решения задач элементарной алгебры. Это исключение дробей, приведение подобных членов, определение расстояния либо угла из линейного уравнения, или выражение с помощью такого уравнения одного числового атома через другой, и т.д. Однако, принципы управления данными преобразованиями в геометрии совсем другие. Нетрудно представить себе, какие нагромождения возникнут в списке посылок, если начать произвольным образом выражать из имеющихся соотношений одни числовые атомы через другие, подставляя результаты в оставшиеся соотношения. При обучении решателя была выявлена некоторая эвристическая граница между "плохими" и "хорошими" алгебраическими преобразованиями в геометрических задачах. Оказалось, что для каждого типа числовых атомов (расстояний, углов, и пр.) возникает своя конкретизация одного и того же алгебраического преобразования, и даже она порождает несколько приемов, срабатывающих на разных уровнях и в разных контекстах. В данном подразделе перечислим преобразования соотношений, содержащих расстояния.

1. Выражение расстояния через числовые параметры.

   $\forall_{abcAB}(\neg(a=0) \to al(AB)+b=c \leftrightarrow l(AB)=(c-b)/a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором, левая часть консеквента идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Выражения a, b, c не имеют невырожденных (т.е. отличных от переменных) числовых атомов, причем либо a не равно 1, либо b не равно 0. Существует другое уравнение в посылках, содержащее $l(AB)$, но не имеющее вида "$l(AB) = \ldots$". Если c - неизвестная, а левая часть преобразуемого равенства не содержит неизвестных (так может случиться, например, в задачах на построение), то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2. Имеются копии данного приема, срабатывающие на уровнях 5 и 7.

   Кроме того, созданы еще две версии приема. В первой из них преобразуемое равенство является посылкой задачи на доказательство, причем выражения a, b, c не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2. Во второй - преобразуемое равенство является посылкой задачи на исследование. Выражения a, b, c не содержат терма $l(AB)$. Кроме $l(AB)$, рассматриваемое равенство имеет ровно один невырожденный числовой атом X. При этом существует еще одно уравнение задачи, имеющее единственное вхождение атома $l(AB)$, вхождение атома X и не имеющее других невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 10.

   $\forall_{abcAB}(\neg(a=0) \to al(AB)/c=b \leftrightarrow l(AB)=bc/a)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных, а выражение c не содержит невырожденных числовых атомов. Должно существовать еще одно уравнение, содержащее $l(AB)$ и не имеющее вида "$l(AB) = \ldots$". Созданы две версии этого приема, срабатывающие на уровнях 2 и 5.

   На той же теореме создана еще одна версия. Она срабатывает в задачах на исследование, имеющих понятия, относящиеся к физике. Выражения a, b, c не должны содержать невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания здесь равен 4. Учет фильтрами приема предметной области (в данном случае - физики) используется крайне редко. Однако, различие между степенями целесообразности одного и того же преобразования в различных предметных областях, видимо, имеет объективный характер, так что применение подобных фильтров может, в конечном счете, оказаться совершенно оправданным.

   $\forall_{abcdAB}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(b=0) \to a(bl(AB)+c)=d \leftrightarrow l(AB)=(d-ac)/(ab))$

   Антецеденты обрабатываются проверочным оператором, левая часть консеквента идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Выражения a, b, c, d не имеют невырожденных числовых атомов. Должно существовать еще одно уравнение, содержащее $l(AB)$ и не имеющее других невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{abcdkmpqsnABCD}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ pl(AB)+ql(CD)=r\ \&\ (ml(CD)^2+n)/k = s \to (al(AB)^2+b)/c=d \leftrightarrow l(AB)=\sqrt{(cd-b)/a})$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, первые два антецедента обрабатываются проверочными операторми. Выражения $a, b, c, d, k, m, n, p, q, r$ не содержат невырожденных числовых атомов. Второй, третий и четвертый антецеденты, очевидно, не нужны для обоснования корректности данного преобразования. Фактически, они представляют собой фильтры - уточняют контекст срабатывания. Однако, для большей наглядности их оказалось удобнее разместить не в третьем окне описания приема, а непосредственно в теореме. Наличие двух дополнительных уравнений означает, что выражение через численные параметры расстояния $l(AB)$ позволит впоследствии выразить через численные параметры также и расстояние $l(CD)$. Заметим, что указатель "теквхожд(3)" определяет выбор точки привязки в третьем антецеденте, т.е. попытка применить прием произойдет, как только появится линейное соотношение, связывающее $l(AB)$ и $l(CD)$. Уровень срабатывания равен 6. На той же теореме создана еще одна версия приема, отличающаяся лишь выбором точки привязки в четвертом антецеденте.

$$\forall_{abcAB}(\neg(c - b = 0) \to al(AB) + b = c \leftrightarrow l(AB) = (c - b)/a \ \& \ \neg(a = 0))$$

Этот прием отличается от первого приема данного подраздела лишь тем, что отличие от нуля коэффициента a усмотреть не удается, зато усматривается отличие от нуля разности $c - b$, равной произведению a на $l(AB)$. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов; существует другое уравнение с $l(AB)$, не имеющее вида "$l(AB) = \ldots$". Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 7.

$$\forall_{abcdAB}(\neg(a = 0) \to (al(AB) + b)/c = d \leftrightarrow l(AB) = (cd - b)/a)$$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Должно существовать еще одно уравнение, единственным невырожденным числовым атомом которого служит $l(AB)$. Уровень срабатывания равен 7.

$$\forall_{abcdAB}(\neg(a = 0) \to al(AB)^2/c + d = b \leftrightarrow l(AB) = \sqrt{(b - d)c/a} \ \& \ 0 \leq a(b - d)c)$$

Прием применяется к посылке задачи на доказательство. Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 8. На той же теореме создан прием, применяемый к посылке задачи на исследование. В этом случае должно найтись еще одно уравнение, содержащее $l(AB)$ и не имеющее вида "$l(AB) = \ldots$". Уровень срабатывания равен 10.

$$\forall_{abcAB}(\neg(c = 0) \to al(AB)/b = c \leftrightarrow l(AB) = bc/a \ \& \ \neg(a = 0))$$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов, причем хотя бы один из них имеет тип "внешнеизв". Существует еще одно уравнение, содержащее $l(AB)$ и не имеющее других невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 8.

$$\forall_{abAB}(\neg(a = 0) \to al(AB) = b \leftrightarrow l(AB) = b/a)$$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражения a, b не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 15.

2. Переход от равенства нулю линейной комбинации расстояний к равенству величин, пропорциональных этим расстояниям.

$\forall_{abABCD}(al(AB) - bl(CD) = 0 \leftrightarrow al(AB) = bl(CD))$

Прием применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abABCD}(al(AB) + bl(CD) = 0 \leftrightarrow al(AB) = -bl(CD))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 5. Заметим, что в обоих приемах указатели "заменазнака" отсутствуют.

3. Определение длин отрезков, на которые в заданной пропорции разбивается отрезок заданной длины.

   $\forall_{apqABCD}(0 < p + q \rightarrow l(AB) + l(CD) = a \ \& \ pl(AB) = ql(CD) \leftrightarrow l(AB) = aq/(p + q) \ \& \ l(CD) = ap/(p + q))$

   Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)". Он применяется к двум посылкам задачи на доказательство либо на исследование, причем выражения a, p, q не содержат неизвестных. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3. На этой же теореме создан еще один прием, срабатывающий на уровне 4. У него выражение a может содержать неизвестные, однако оно не должно содержать $l(AB)$, $l(CD)$.

4. Выражение одного расстояния через другое.

   $\forall_{abABCD}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) = bl(CD) \leftrightarrow l(AB) = bl(CD)/a)$

   На этой теореме созданы несколько приемов. Во-первых, имеется прием, применяемый к посылке задачи на доказательство, у которого выражение a не содержит неизвестных, а выражение b - либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Кроме того, если a неконстантное, то и b должно быть неконстантным.

   Другой прием применяется к посылке задачи на исследование. Здесь оба выражения a, b не должны содержать неизвестных, причем если a неконстантное, то и b неконстантное. Требуется наличие еще одного уравнения, содержащего $l(AB)$, $l(CD)$ и не имеющего других невырожденных числовых атомов.

   Третий прием отличается от второго лишь тем, что дополнительное уравнение может содержать другие невырожденные числовые атомы, но оно должно также содержать неизвестную внешней задачи на описание.

   Четвертый прием отличается от второго тоже лишь условиями на дополнительное уравнение. Здесь оно должно иметь вид $pl(AB)/q = rl(CD)/s$, где хотя бы одно из выражений p, q, r, s содержит неизвестные.

   В пятом приеме дополнительное уравнение должно иметь вид $l(\ldots) = pl(CD)/q$.

   В шестом приеме требуется, чтобы a, b не содержали неизвестных и не существовало других уравнений, содержащих $l(AB)$. Все шесть приемов имеют уровень срабатывания 3.

   В седьмом приеме требуется, чтобы a не содержало неизвестных, а b - либо не содержало неизвестных, либо имело тип "внешнеизв". Должно существовать дополнительное уравнение с $l(AB)$, $l(CD)$, не имеющее других невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

   Восьмой прием отличается от седьмого лишь тем, что дополнительному уравнению разрешается иметь другие невырожденные числовые атомы, но при этом оно должно содержать неизвестную внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 6.

Девятый прием требует, чтобы a, b не содержали неизвестных, причем никаких требований на существование дополнительных уравнений не накладывается. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{abABCD}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) + bl(CD) = 0 \leftrightarrow l(AB) = -bl(CD)/a)$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражение a не содержит неизвестных, выражение b - не содержит неизвестных либо имеет тип "внешнеизв". Существует дополнительное уравнение, содержащее $l(AB), l(CD)$ и какую-либо неизвестную внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcAB}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) + b = c \leftrightarrow l(AB) = (c - b)/a)$

Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a либо известно, либо имеет тип "внешнеизв". Выражение b содержит невырожденный числовой атом, отличный от $l(AB)$, но не содержит $l(AB)$. Выражение c не является невырожденным числовым атомом и не содержит $l(AB)$. Должно существовать другое уравнение, содержащее все неизвестные числовые атомы, входящие в текущее уравнение. На той же теореме создана еще одна версия приема. В ней требуется, чтобы выражение a не содержало неизвестных; выражение c не являлось невырожденным числовым атомом; терм $l(AB)$ не входил в b, c, причем нашлось бы другое уравнение, содержащее как $l(AB)$, так и некоторый другой невырожденный числовой атом текущего уравнения. Уровни срабатывания обеих версий равны 13.

$\forall_{abcdeABCD}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(d = 0)\ \&\ \text{разныеточки}(C, D) \rightarrow al(AB) = b(ac + d)l(CD) \leftrightarrow \neg(a = 0)\ \&\ l(AB) = b(ac + d)l(CD)/a)$

Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Каждое из выражений a, b, c, d либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Должно существовать другое уравнение, содержащее $l(AB)$, $l(CD)$ и какую-либо неизвестную внешней задачи на описание. Уровень срабатывания приема равен 10.

$\forall_{abcdABCD}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) = (bl(CD) + c)/d \leftrightarrow l(AB) = (bl(CD) + c)/(ad))$

Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Должно существовать другое уравнение, имеющее ровно два невырожденных числовых атома - $l(AB)$ и $l(CD)$. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abcABCD}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) + bl(CD) = c \leftrightarrow l(AB) = (c - bl(CD))/a)$

Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Условие на дополнительное уравнение - то же, что в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCDp}(l(AB) - l(CD) = p \leftrightarrow l(AB) = l(CD) + p)$

Прием применяется в задаче на исследование. Выражение p не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{bcABCD}(l(AB) + bl(CD) = c \leftrightarrow l(AB) = c - bl(CD))$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражения b, c не содержат неизвестных. Существует дополнительное уравнение, в которое входят $l(AB)$, $l(CD)$ и какая-либо неизвестная внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{cABCD}(l(AB) + l(CD) = c \leftrightarrow l(AB) = c - l(CD))$

Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Выражение c не содержит неизвестных. Должны существовать два дополнительных уравнения, одно из которых содержит $l(AB)$, другое $l(CD)$, связанные между собой также некоторой численной переменной x, причем не имеющие других неизвестных числовых атомов. На той же теореме создана еще одна версия приема, в которой требуется лишь одно дополнительное уравнение. Оно должно содержать ровно два невырожденных числовых атома - $l(AB)$ и $l(CD)$. Уровни срабатывания обеих версий равны 9.

5. Выражение квадрата расстояния из линейного уравнения.

   $\forall_{abcAB}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB)^2 + b = c \leftrightarrow l(AB)^2 = (c - b)/a)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражение a не содержит неизвестных. Выражения b, c не содержат терма $l(AB)$, причем выражение c не является невырожденным числовым атомом либо квадратом расстояния. Существует другое уравнение, содержащее выражение $l(AB)^2$ и какую-либо неизвестную внешней задачи на описание. Каждый невырожденный числовой атом текущего уравнения должен встречаться в этом дополнительном уравнении. Уровень срабатывания равен 8.

6. Извлечение квадратного корня из условия пропорциональности квадрата расстояния квадрату некоторого неизвестного выражения.

   $\forall_{abcdAB}(0 \leq a \,\&\, 0 \leq b \,\&\, 0 \leq d \,\&\, c = d^2 \rightarrow al(AB)^2 - bc = 0 \leftrightarrow \sqrt{a}l(AB) - \sqrt{b}d = 0)$

   $\forall_{abcdAB}(0 \leq a \,\&\, 0 \leq b \,\&\, 0 \leq d \,\&\, c = d^2 \rightarrow al(AB)^2 = bc \leftrightarrow \sqrt{a}l(AB) = \sqrt{b}d)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Выражения a, b не содержат неизвестных, причем c группируется как произведение всех неизвестных множителей. Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, последний - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

7. Использование равенства для линейной комбинации расстояний.

   $\forall_{abcdpqABCD}(al(AB) + bl(CD) = c \,\&\, p = ad \,\&\, q = bd \rightarrow pl(AB) + ql(CD) = cd)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с другой посылкой, прочие антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражение c не имеет невырожденных числовых атомов. Созданы две версии приема, одна из которых срабатывает на уровне 2, а другая - на уровне 5.

   $\forall_{abcdpqABCD}(pl(AB) + ql(CD) = c \,\&\, p = ad \,\&\, q = bd \,\&\, \neg(d = 0) \rightarrow al(AB) + bl(CD) = c/d)$

   Аналогично предыдущему, но дополнительно требуется, чтобы выражение d не содержало невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{abABCDEFPQ}(l(AB)l(CD) = al(EF) + bl(PQ) \rightarrow l(AB)l(CD) = al(EF) + bl(PQ))$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование либо на доказательство. Она позволяет "упростить" текущее произведение расстояний, заменив его на линейную комбинацию каких-то других расстояний. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Требуется, чтобы преобразуемая посылка уже содержала, вне рассматриваемого произведения, выражения $l(EF$, $l(PQ)$. Уровень срабатывания равен 5.

8. Устранение дроби, содержащей расстояние.

   $\forall_{abcAB}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(l(AB) = 0)\ \&\ \neg(d = 0) \to a/(bl(AB)) = c/d \leftrightarrow ad = bcl(AB))$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Либо d отлично от единицы, либо c не является невырожденным числовым атомом. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \to a/b = c \leftrightarrow a = bc)$

   Контекст срабатывания тот же, что у предыдущего приема. Выражения a, c должны содержать общий терм вида $l(AB)$. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abckAB}(\neg(b = 0) \to al(AB)^k/b = c \leftrightarrow al(AB)^k = bc)$

   Контекст срабатывания прежний. Выражение b не содержит неизвестных, выражение c не является невырожденным числовым атомом и (в случае задачи на исследование) не является неизвестной. Уровень срабатывания равен 5.

9. Раскрывание скобок в выражениях с расстояниями.

   $\forall_{abcdefAB}(f = (al(AB) + b)(cl(AB) + d) \to (al(AB) + b)(cl(AB) + d) = e \leftrightarrow f = e)$

   Заменяемый терм входит в посылку задачи на исследование либо на доказательство. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Выражение e не равно 0 и не имеет невырожденных числовых атомов. Антецедент выделен указателем "идентификатор", причем его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcAB}(a(bl(AB) + c) = abl(AB) + ac)$

   Заменяющий терм обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов. Расстояние $l(AB)$ имеет еще хотя бы одно вхождение в текущую посылку, расположенное вне заменяемого терма. Заменяемый терм не является числителем либо знаменателем дробного выражения или левой частью равенства нулю. Либо выражение a содержит неизвестные, либо заменяемый терм не является левой частью равенства, у которого правая часть не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 8. В ней не обязательно повторное вхождение терма $l(AB)$.

   $\forall_{abcAB}(a(bl(AB) + cl(CD)) = abl(AB) + acl(CD))$

   Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Прочие ограничения на контекст - те же, что и выше, но не обязательно повторное вхождение терма $l(AB)$. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcdefmABCD}(m = al(AB)(bl(AB) + cl(CD)) - dl(CD)(el(AB) + fl(CD)) \to$
   $(al(AB)(bl(AB) + cl(CD)) = dl(CD)(el(AB) + fl(CD)) \leftrightarrow m = 0))$

Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором раскрывания скобок. Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcn}((al(AB)^n + b)c = d \leftrightarrow ac(l(AB)^n) + bc - d = 0)$

Выражение $l(AB)$ входит в терм d. Каждое из выражений a, c либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Левая часть заменяющего равенства обрабатывается нормализатором "стандплюс". Допускается вырожденное значение $n = 1$. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abcnAB}(a(b(l(AB)^n) + c) = ab(l(AB)^n) + ac)$

Показатель степени n не равен единице. Выражение $l(AB)$ имеет хотя бы одно вхождение в текущую посылку, расположенное вне заменяемого терма. Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов. Ограничения на контекст, связанные с внешней дробью либо внешним равенством, - те же, что у второго приема данного пункта. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abcdeABCD}(e = d(al(AB) + bl(CD))^2 + c \rightarrow d(al(AB) + bl(CD))^2 + c = e)$

Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "стандплюс". Текущая посылка имеет вхождение произведения расстояний AB и CD. Уровень срабатывания равен 12.

10. Два различных соотношения пропорциональности расстояний с неизвестными коэффициентами.

    $\forall_{abcdABCD}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(l(AB) = 0)\ \&\ al(AB) = bl(CD) \rightarrow cl(AB) = dl(CD) \leftrightarrow ad = bc)$

    Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование либо на доказательство. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов, не входящих в c, d. Кроме того, выражения a, b, c, d не содержат расстояний $l(AB)$ и $l(CD)$. Уровень срабатывания равен 6.

11. Использование соотношения для суммы, произведения и суммы квадратов двух расстояний.

    $\forall_{abcdpABCD}(l(AB)^2 + l(CD)^2 = a\ \&\ l(AB) + l(CD) + b = c\ \&\ p = (c - b)^2 - a - 2d \rightarrow l(AB)^2 + l(CD)^2 = a \leftrightarrow p = 0)$

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Выражения a, b, c, d не содержат расстояний $l(AB)$, $l(CD)$. Результирующее соотношение имеет не более одного невырожденного числового атома. Уровень срабатывания равен 7.

    $\forall_{abcABCD}(l(AB)^2 + l(CD)^2 = a\ \&\ l(AB)l(CD) = b \rightarrow cl(AB) = cl(CD) = c\sqrt{a + 2b})$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 6.

    $\forall_{abcdpABCD}(l(AB)l(CD) = d\ \&\ l(AB) + l(CD) + b = c\ \&p = (c - b)^2 - a - 2d \rightarrow l(AB)^2 + l(CD)^2 = a \leftrightarrow p = 0)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 6.

12. Приведение подобных членов с расстояниями.

$\forall_{abcdAB}(al(AB)/b + cl(AB)/d = (a/b + c/d)l(AB))$

Выражения a, b, c, d не содержат символов "расстояние", "длина". Ввиду симметрии слагаемых введен фильтр "постпозиция(...)", отсекающий двойственную попытку идентификации. Разрешаются вырожденные единичные значения знаменателей и коэффициентов числителей. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdAB}(al(AB) + b = cl(AB) + d \leftrightarrow (a - c)l(AB) + b = d)$

Каждое из выражений a, c либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcAB}((a + b)l(AB) + cl(AB) = (a + b + c)l(AB))$

Ограничения на коэффициенты отсутствуют. Уровень срабатывания равен 6.

13. Усмотрение квадратного уравнения для расстояния.

$\forall_{abcdeABF}(e - g = al(AB)^2/b + cl(AB)/d + f \rightarrow al(AB)^2/b + cl(AB)/d + f = 0)$

Указатель "контекст(...)" определяет инициализацию попытки применения приема при усмотрении выражения $l(AB)$ в посылке задачи на исследование. Сразу же проверяется, что число вхождений этого выражения в текущее уравнение $e = g$ больше одного и что каждая неизвестная встречается в нем только внутри таких вхождений. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Разность частей уравнения обрабатывается нормализатором "стандплюс". После этого происходит идентификация коэффициентов a, b, c, d, f. Проверяется, что они не содержат неизвестных. Заменяющий терм обрабатывается нормализатором "квадруравн", решающим квадратные уравнения. Дополнительно проверяется, что либо выражение $l(AB)$ имеет тип "Неизв", либо из неравенств $0 < abcd$ или $0 < abf$ усматривается единственность корня для расстояния. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abcdAB}(al(AB) + b = cl(AB)^2 + d \leftrightarrow cl(AB)^2 - al(AB) = b - d)$

Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Прием не решает квадратное уравнение, а лишь подготавливает решение его предыдущим приемом. Уровень срабатывания равен 9.

14. Соотношение для квадрата расстояния и косинуса неизвестного угла.

$\forall_{abcdAB}(\neg(b = 0) \rightarrow a + bl(AB)^2 = c\cos d \leftrightarrow l(AB) = \sqrt{(c\cos d - a)/b})$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражения a, b, c не содержат неизвестных, выражение d имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 11.

15. Усмотрение пропорциональности двух уравнений с расстояниями при помощи двух дополнительных уравнений.

$\forall_{abcpqmnABCDEF}($разныеточки(A, B) & разныеточки(C, D) & разныеточки(E, F) & $\neg(p = 0)$ & $cl(EF) = al(AB)^n$ & $cl(CD) = bl(AB)^m$ & $d = al(AB)^{n-1} +$

$bl(AB)^{m-1} + c \ \& \ d = p \to l(AB) + l(CD) + l(EF) = q \leftrightarrow cq = pl(AB) \ \&$
$al(AB)^{n-1}q = pl(EF) \ \& \ bl(AB)^{m-1}q = pl(CD))$

Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Пятый, шестой и восьмой антецеденты идентифицируются с другими посылками. Выражения p, q не содержат неизвестных. Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор". Правая часть его обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Фактически, он и усматривает пропорциональность левых частей текущего уравнения и уравнения, идентифицированного с последним антецедентом. Первые четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 12.

16. Линейная комбинация двух уравнений для исключения расстояний.

$\forall_{abcpqAB}(al(AB) + b = c \ \& \ \neg(a = 0) \to pl(AB) = q \leftrightarrow pc - pb = aq)$

Заменяемый терм и первый антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Выражение a не содержит неизвестных. Выражения b, c, p, q не содержат невырожденных числовых атомов, причем хотя бы одно из них содержит неизвестную внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcpqABCD}(pl(AB) = ql(CD) \ \& \ \neg(q = 0) \to al(AB) + c = bl(CD) \leftrightarrow$
$(aq - bp)l(AB) + cq = 0)$

Заменяемое утверждение и первый антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование. Выражения a, b, p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abcdmpqrABCDEFMN}(\neg(a = 0) \ \& \ al(AB) + bl(CD) + ml(RS) = cl(EF) \ \&$
$aq - bp = 0 \ \& \ ar - mp = 0 \to pl(AB) + ql(CD) + rl(RS) = dl(MN) \leftrightarrow$
$pcl(EF) = adl(MN))$

Заменяемое утверждение и второй антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор"; их левые части обрабатываются указателями общей стандартизации. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, c, d, p не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abcdAB}(al(AB) + b = 0 \ \& \ \neg(a = 0) \to cl(AB) + d = 0 \leftrightarrow ad - bc = 0)$

Заменяемое утверждение и первый антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование, причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом антецеденте. Выражения a, c не содержат невырожденных числовых атомов. Выражения b, d не содержат терма $l(AB)$. Каждый невырожденный числовой атом выражения b входит в выражение d. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abcpqrABCDEF}(al(AB) + bl(CD) = cl(EF) \ \& \ aq - bp = 0 \ \& \ \neg(l(EF) = 0) \ \&$
$\neg(a = 0) \ \& \ \neg(p = 0) \to pl(AB) + ql(CD) = rl(EF) \leftrightarrow pc - ar = 0)$

Заменяемое утверждение и первый антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом антецеденте. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, p, q, r не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abcdAB}(al(AB) = b \ \& \ cl(AB) + d = 0 \to ad + bc = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Выражения a, c не содержат невырожденных числовых атомов, кроме, быть может, выражений "крд(...)". Выражения b, d имеют одни и те же невырожденные числовые атомы, причем ни один из них не содержит терма $l(AB)$. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abcABCD}(\neg(a = 0) \ \& \ al(AB) = b \to al(CD) = c \leftrightarrow bl(CD) = cl(AB))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование либо на доказательство. Выражение a меет невырожденный числовой атом; выражения b, c не имеют таких атомов. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{mnpqrsABCD}(\neg(n = 0) \ \& \ ml(AB) + nl(CD) + s = c \ \& \ pn - mq = 0 \to$
$pl(AB) + ql(CD) + r = d \leftrightarrow nr - qs = dn - cq)$

Заменяемый терм и второй антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", причем его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения c, d, m, n, s, p, q, r не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{abcdABCD}(\neg(l(CD) = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a = bl(CD)^2 \ \& \ (bc - ad = 0) = (p = 0) \to$
$c = d(l(CD)^2) \leftrightarrow p = 0)$

Заменяемый терм и третий антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть представляет собой равенство, обрабатываемое нормализатором общей стандартизации числовых равенств "нормчисло". Предварительно в левой части этого равенства сначала раскрываются скобки, а затем предпринимается ослабленная попытка разложения на множители. Выражения a, b, c, d не содержат терма $l(CD)$. Результирующее уравнение $p = 0$ должно содержать ровно один неизвестный числовой атом. Уровень срабатывания равен 13.

17. Линейная комбинация четырех уравнений для исключения суммы расстояний.

$\forall_{bcdepqABCDMNPQ}(l(AB) + l(CD) = p \ \& \ l(AB) + l(MN) + b = c \ \&$
$l(MN) + l(PQ) = q \to l(CD) + l(PQ) + d = e \leftrightarrow p + q + b + d - c - e = 0)$

Заменяемый терм и антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Выражения b, c, d, e, p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 7.

18. Два уравнения с квадратами выражений, содержащих расстояния.

$\forall_{abcdepABCD}(l(AB) + l(CD) = p \ \& \ a + b(l(AB))^2 + cl(AB) = d \ \& \ \neg(d - e = 0) \to$
$a + bl(CD)^2 + cl(CD) = e \leftrightarrow l(AB) - l(CD) = (d - e)/(bp + c) \ \& \ \neg(bp + c = 0))$

Заменяемый терм и первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование. Указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом антецеденте. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения b, c, d, e, p не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcdeAB}(a+(b+l(AB))^2 = c \to a+(d-l(AB))^2 = e \leftrightarrow 2(b+d)l(AB) = c-e-b^2+d^2)$

Заменяемый терм и антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Выражения b, c, d, e не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 8.

19. Сокращение равенства с расстояниями.

    $\forall_{abcnAB}(\text{разныеточки}(A, B) \to al(AB) + bl(AB) = cl(AB)^n \leftrightarrow a + b = cl(AB)^{n-1})$

    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Уровень срабатывания равен 5.

    $\forall_{abcdmnpq}(al(AB) + bl(CD) = cd \;\&\; pb - aq = 0 \;\&\; \neg(a = 0) \;\&\; \neg(d = 0) \to (pl(AB) + ql(CD))m = dn \leftrightarrow mpc = an)$

    Заменяемый терм и первый антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, c не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

    $\forall_{abAB}(al(AB) = bl(AB) \leftrightarrow \neg(A = B) \;\&\; a = b \;\vee\; A = B)$

    Уровень срабатывания равен 14.

20. Использование равенства, выражающего произведение двух расстояний через числовые параметры.

    $\forall_{abcpqrABCD}(\neg(a = 0) \;\&\; al(AB)l(CD)/b = c \to pl(AB)l(CD)+q = r \leftrightarrow bcp/a+q = r)$

    Заменяемый терм и второй антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 6.

21. Вывод биквадратного уравнения для расстояния, если имеются уравнения для суммы квадратов расстояний и произведения расстояний.

    $\forall_{abcdeABCD}(al(AB)^2+bl(CD)^2 = c \;\&\; dl(AB)l(CD) = e \to ad^2l(AB)^4-cd^2l(AB)^2 = -be^2)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Выражения a, b, c, d, e не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 7.

22. Ориентация равенства с расстоянием.

    $\forall_{aAB}(l(AB) = a \leftrightarrow a = l(AB))$

Прием применяется к посылке задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Он бывает нужен в задачах по аналитической геометрии, где некоторое геометрическое место точек определяется при помощи координат. Сначала оно задается при помощи описателя "класс". Чтобы избавиться от описателя, решается задача на преобразование, имеющая цель "класс". В ней предпринимается переформулировка геометрического места точек через координаты, а затем - выполняется переход к бескоординатному заданию, с одновременным исключением описателя. На втором этапе вводится комментарий "прямкоорд".

Прием относится именно ко второму этапу: перед применением проверяется наличие данного комментария. Проверяется также, что выражение a содержит вспомогательный известный параметр. Указатель "коммутативно" блокирует перестановку частей равенства при идентификации. Результат преобразования сопровождается комментарием "ориентацияравенства", блокирующим перестановку частей равенства "по умолчанию". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{aAB}(l(AB) = a \leftrightarrow l(AB) = a)$

Прием применяется к посылке задачи на преобразование, имеющей цель "класс", но не на втором, а на первом этапе. Соответственно, требуется отсутствие комментария "прямкоорд". Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов. Указатель "коммутативно"отсутствует, так что прием будет срабатывать даже в случаях, когда расстояние уже расположено в левой части равенства. Это срабатывание не будет вырожденным, так как в результате появится коментарий "ориентацияравенства", закрепляющий данную ориентацию и блокирующий попытки ее изменения "по умолчанию". Уровень срабатывания приема равен 0.

23. Усмотрение равенства расстояний из двух равенств для произведений.

    $\forall_{acABCD}(al(AB) = c \;\&\; \neg(a = 0) \rightarrow al(CD) = c \leftrightarrow l(AB) = l(CD))$

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование либо на доказательство; заменяемый терм может располагаться как в посылке, так и в условии. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

24. Извлечение квадратного корня из линейного двучлена с расстоянием.

    $\forall_{abcdpqAB}(\neg(a = 0) \rightarrow a(pl(AB)+q)^2/c+d = b \leftrightarrow |pl(AB)+q| = \sqrt{(b-d)c/a} \;\&\; 0 \leq a(b-d)c)$

    Прием применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, p, q не имеют невырожденных числовых атомов. Должно существовать еще одно уравнение, содержащее $l(AB)$ и не имеющее других невырожденных числовых атомов. Модуль в заменяющем терме обрабатывается нормализатором "норммодуль". Требуется, чтобы в результате этот терм не содержал модулей. Уровень срабатывания равен 10.

25. Изменение знаков обеих частей равенства для исключения минуса перед расстоянием.

    $\forall_{abABCD}(-l(AB) = (a-b)l(CD) \leftrightarrow l(AB) = (b-a)l(CD))$

Прием применяется к посылке задачи на исследование либо на доказательство. Уровень срабатывания равен 4.

26. Усмотрение выражения для линейной комбинации расстояний из равенства в посылках.

    $\forall_{abcdmnpqABCD}(al(AB) + bl(CD) = r \; \& \; pb - aq = 0 \; \& \; \neg(a = 0) \; \& \; \neg(d = 0) \; \& \; r = cd \to (pl(AB) + ql(CD))m/(dn) = cpm/(an))$

    Прием имеет заголовок "веторойтерм". Он применяется к подвыражению посылки задачи на исследование. Первый антецедент идентифицируется с другой посылкой, причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в этом антецеденте. Второй и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализаторами общей стандартизации, левая часть пятого - нормализатором ослабленного разложения на множители "факторизация". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, m, n, p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

27. Деление уравнений для сокращения на общий множитель, содержащий невырожденный числовой атом, не встречающийся вне этого множителя.

    $\forall_{mnqrsAB}(nl(AB)r = s \; \& \; ml(AB)^2r = q \to msl(AB) = nq)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, причем точка привязки выбрана в первом из них. Указатели "коммутативно" блокируют перестановки частей равенств при идентификации. Выражения m, n, q не содержат невырожденных числовых атомов, а выражение r содержит некоторый невырожденный числовой атом, отличный от $l(AB)$ и не встречающийся в s. Уровень срабатывания равен 6.

Нормализатор общей стандартизации "нормрасстояние"

Этот нормализатор используется в геометрии настолько часто, что даже небольшие добавления к нему могут заметно повлиять на суммарную трудоемкость по соответствующему разделу задачника. Поэтому он имеет совсем немного приемов, причем часть из них активируется лишь при наличии дополнительного комментария. Перечислим приемы нормализатора:

1. Совпадающие точки.

   $\forall_A(l(AA) = 0)$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Использование равенства из посылок.

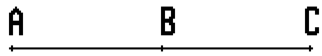
   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем указатель "коммутативно" блокирует попытку перестановки частей равенства при идентификации. Заголовком выражения a является символ "расстояние". Это выражение не должно являться подвыражением выражения b. Уровень срабатывания равен 1.

3. Упорядочение операндов.

   Прием имеет заголовок "замена(лексупорядочение нормрасстояние)" и теорему "коммутативно(расстояние)". Он выполняет перестановку операндов, если они не упорядочены лексикографически по возрастанию. Уровень срабатывания равен 1.

4. Представление длины отрезка в виде суммы двух пропорциональных длин подотрезков.

   $\forall_{pqABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & $B \in$ отрезок(AC) & $pl(AB) = ql(BC) \rightarrow l(AC) = l(AB) + l(BC)$)

   Прием применяется при наличии комментария "отрезок". Первые три антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается пакетным синтезатором "пропорциональны". Он усматривает пропорциональную зависимость расстояний AB, BC и находит коэффициенты p, q данной зависимости. Эти коэффициенты суть некоторые выражения, не имеющие невырожденных числовых атомов. Если расстояние AC уже рассматривается в задаче, то для него обычно имеется соотношение, связывающее с расстояниями AB, BC. Поэтому попытка применить прием предпринимается, лишь если $l(AC)$ еще не рассматривалось. Уровень срабатывания равен 1.

5. Длина координатного вектора прямоугольной системы координат.

   $\forall_{ABCK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C) \rightarrow l(AB) = 1$)

   $\forall_{ABCK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C) \rightarrow l(AC) = 1$)

   Уровень срабатывания приемов равен 2.

6. Использование равенства для квадрата расстояния.

   $\forall_{aAB}(l(AB)^2 = a \rightarrow l(AB) = \sqrt{a})$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Прием применяется при наличии комментария "квадркорень". Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов и не является суммой. Уровень срабатывания равен 2.

Синтезатор усмотрения пропорциональности "пропорциональны"

Синтезатор обрабатывает утверждения вида $xa = yb$, где a, b - входные переменные; x, y - выходные. Он имеет следующие приемы:

1. Непосредственное усмотрение пропорциональности из посылок.

   $\forall_{abcd}(c = a \ \& \ d = b \rightarrow bc = ad)$

   Для входных выражений c, d имеются посылки, определяющие их через выражения a, b, содержащие только численные неизвестные. Более точно, каждое из выражений a, b либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcd}(ac = bd \rightarrow ac = bd)$

$\forall_{abcd}(ac - bd = 0 \to ac = bd)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Каждое из выражений a, b либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdexyz}(ax = bz \to (bd)(cz/d) = (ac)x)$

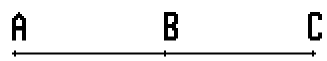
Прием применяется при наличии комментария "плюс". Антецедент идентифицируется с посылкой. Входные выражения суть (cz/d), x. Каждое из выражений a, b, c, d либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Допускаются вырожденные единичные значения b, c, d. Уровень срабатывания равен 3.

2. Перестановка операндов.

   $\forall_{abcd}(da = cb \to cb = da)$

   Предпринимается попытка рекурсивного обращения после перестановки местами входных данных. Она объясняется тем, что некоторые приемы синтезатора асимметричны. Антецедент выделен указателем "значения". Уровень срабатывания равен 2.

3. Сложение либо вычитание отрезков.



   $\forall_{pqABC}(B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ pl(AB) = ql(BC) \to ql(AC) = (p+q)l(AB))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Выражения p, q не содержат неизвестных. На этой же теореме создан еще один прием, срабатывающий при наличии комментария "отрезки". В нем дополнительно разрешается тип "внешнеизв" выражений p, q.

   $\forall_{pqABC}(B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ pl(AB) = ql(AC) \to ql(BC) = (p-q)l(AB))$

   Аналогично предыдущему, но создан только прием, срабатывающий при наличии комментария "отрезки". Уровни срабатывания приемов равны 1.

4. Пропорциональные исходные выражения.

   $\forall_{abcd}((b/e) \cdot (ac/d) = (c/d) \cdot (ab/e))$

   Выражения ac/d, ab/e - входные. Выражения b, c, d, e не имеют невырожденных неизвестных числовых атомов. Допускаются вырожденные единичные значения a, b, c, d, e.

5. Пропорциональные дроби с суммами в числителе.

   $\forall_{abcdefABCD}(bd - ae = 0\ \&\ g = af\ \&\ h = cd \to g \cdot ((dl(AB) + el(CD))/f) = h \cdot ((al(AB) + bl(CD))/c))$

   Дробные выражения консеквента - входные. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Они обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

6. Отбрасывание минуса.

   $\forall_{abcd}(ab = cd \to ab = (-c)(-d))$

   Реализуется рекурсивное обращение для обработки входного данного с отброшенным знаком "минус". Уровень срабатывания равен 1.

Синтезатор "вычислениедлины"

При решении планиметрической задачи происходит вывод соотношений для параметров чертежа - расстояний, углов и т.п. Иногда эти соотношения явно разрешаются относительно некоторого параметра и дают выражение его через известные величины. Однако, помимо прямого логического вывода, бывает полезно применять также обратный вывод - фиксировать, например, некоторое расстояние и рассмотреть какой-либо способ выразить его через другие параметры чертежа; вычисление последних - аналогичным образом свести к новым параметрам, и т.д., пока не будут найдены все рассматриваемые значения. При разумных ограничениях на перебор можно надеяться быстрее найти нужные величины, чем при прямом выводе, где в рассмотрение будет вовлечено множество "лишних" параметров.

В качестве естественного технического средства реализации обратного вывода выступают пакетные синтезаторы. В данном разделе мы рассмотрим один из них - синтезатор "вычислениедлины", используемый при вычислении расстояний. Чтобы ускорить процесс поиска, синтезатор будет определять не само выражение для расстояния, а лишь конъюнкцию соотношений, обеспечивающих последовательное его вычисление. Такой подход позволяет упростить и сам синтезатор, так как в нем не нужно дублировать чисто алгебраические приемы. В теоремах приемов обращение к синтезатору имеет вид "вычислениедлины($l(AB)$ x)", где x - выходная переменная для конъюнкции соотношений.

Начнем с перечисления приемов, обращающихся к синтезатору из сканирования задачи.

$\forall_{pAB}$(актив($l(AB)$) & вычислениедлины($l(AB), p$) $\to p$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование либо на доказательство, второй - обрабатывается синтезатором. Выражение для расстояния $l(AB)$ должно иметь тип "неизв". Синтезатору передаются всевозможные комментарии (расстояния $l(CD)$), где некоторая посылка имеет вид пропорциональности расстояний $l(AB)$, $l(CD)$ с неизвестными коэффициентами. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 9. На той же теореме создана версия приема, срабатывающая на уровне 12. Как и в первой версии, выражение для $l(AB)$ должно иметь тип "неизв". Кроме того, должно существовать уравнение, содержащее единственное вхождение $l(AB)$ и не имеющее других неизвестных числовых атомов, кроме, быть может, неизвестных внешней задачи на описание. Ограничитель трудоемкости существенно ослаблен. Наконец, имеется версия приема, срабатывающая в режиме усилителя на уровне 4. В ней требуется, чтобы выражение $l(AB)$ имело тип "Неизв". Ограничитель трудоемкости здесь слабый.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & актив($l(DF)$) & актив($l(BC)$) & вычислениедлины($l(AB), p$) $\to p$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство, последний - обрабатывается синтезатором. Выражение для расстояния BC не содержит неизвестных, выражение для расстояния $l(DF)$ имеет тип "неизв". Радиус окружности DE и расстояние AB не известны. Не усматривается принадлежность точки F окружности DE. В такой ситуации вычисление длин двух оставшихся сторон треугольника может позволить определить радиус окружности, а через него далее - получить соотношения для $l(DF)$. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 9.

Перед перечислением приемов синтезатора заметим, что чрезмерное его развитие, во-первых, может ощутимо замедлить работу решателя, а во-вторых, привести к возникновению громоздких ответов, найденных на нерациональных цепочках вычислений. Поэтому обратный вывод в планиметрии применяется пока весьма ограниченным образом.

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD)$ & вычислениедлины$(l(AB), a) \rightarrow$ вычислениедлины$(l(CD), a))$

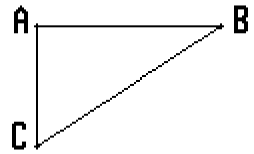
   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Уровень срабатывания равен 3. Заметим, что зацикливание по обратному переходу от $l(AB)$ к $l(CD)$ блокируется автоматически: ссылка на использованное равенство сохраняется в комментарии "исключение $\ldots$" рекурсивного обращения, и далее эта посылка уже не рассматривается.

2. Известное расстояние.

   $\forall_a$(вычислениедлины$(a,$ истина$))$

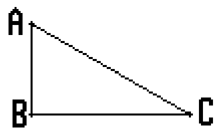
   Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

3. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.



   $\forall_{ABC}$(вычислениедлины$(l(AC), a)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(\angle(ABC)) \rightarrow$ вычислениедлины$(l(AB), l(AC) = \mathrm{tg}(\angle(ABC))l(AB)$ & $a))$

   Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", первый - реализует рекурсивное обращение. Выражение для угла ABC не содержит неизвестных, расстояние AC уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.



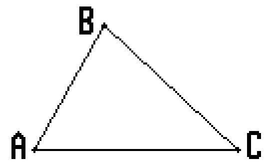
   $\forall_{ABCp}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & вычислениеугла$(\angle(BAC), p) \rightarrow$ вычислениедлины$(l(AC), l(AB) = \cos(\angle(BAC))l(AC)$ & $p))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обращается к синтезатору "вычислениеугла", аналогичному рассматриваемому синтезатору. Выражение для расстояния AB не содержит неизвестных; прямые AB и BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCp}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & вычислениеугла$(\angle(BAC), p) \rightarrow$
вычислениедлины$(l(AB), l(AB) = \cos(\angle(BAC))l(AC)$ & $p))$

Соотношение, регистрируемое в выходных данных синтезатора, не изменяется. Однако, оно используется для нахождения расстояния AB по известному расстоянию AC. Уровень срабатывания прежний.

4. Теорема синусов.



$\forall_{ABC}$(вычислениеугла$(\angle(ABC), a)$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow$
вычислениедлины$(l(AC), a$ & $\sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))l(AC) =$
$\sin(\angle(ABC))l(AB)))$

Первый антецедент реализует обращение к синтезатору, два последних выделены указателем "усм". Выражения для расстояния AB и угла BAC не содержат неизвестных. Углы ABC и BCA не известны. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow$
вычислениедлины$(l(AC), \sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(AB)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояния AB и углов BAC, ABC не содержат неизвестных. Угол BCA не известен. Прямые AB, AC, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(ACB))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow$
вычислениедлины$(l(AC), \sin(\angle(BAC) + \angle(ACB))l(AB) = \sin(\angle(ACB))l(AC)))$

Аналогично предыдущему, но известны углы ACB, BAC, а угол ABC не известен. Уровень срабатывания равен 3.

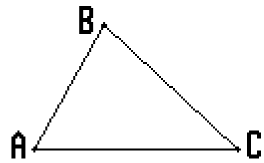
$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(ACB))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow$
вычислениедлины$(l(AC), \sin(\angle(ABC))l(AB) = \sin(\angle(ACB))l(AC)))$

Известны расстояние AB и углы ABC, ACB. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{ABC}$(вычислениеугла$(\angle(BAC), a)$ & актив$(\angle(ABC))$ &
вычислениедлины$(l(AB), b) \rightarrow$ вычислениедлины$(l(AC), a$ & b &
$\sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(AB)))$

Первый и третий антецеденты обрабатываются синтезаторами, второй антецедент выделен указателем "усм". Перед обращениями к синтезаторам проверяется, что угол ABC известен, а углы ACB, BAC не известны. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания приема равен 4.

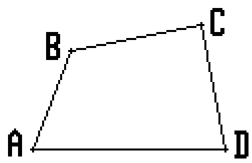
5. Теорема косинусов для треугольника.



$\forall_{aABC}$(вычислениеугла($\angle(ABC), a$) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) $\rightarrow$ вычислениедлины($l(AC), a$ & $l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2 - 2l(AB)l(BC)\cos(\angle(ABC))$))

Первый антецедент реализует обращение к синтезатору, два последних - выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

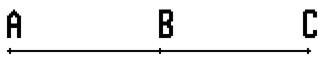
6. Теорема косинусов для четырехугольника.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AD)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(CD)$) & однасторона(B, C, прямая(AD)) & вычислениеугла($\angle(BAD), a$) & вычислениеугла($\angle(ADC), b$) $\rightarrow$ вычислениедлины($l(BC), a$ & b & $l(BC)^2 = l(AD)^2 + l(CD)^2 + l(AB)^2 - 2l(AD)l(CD)\cos(\angle(ADC)) - 2l(AD)l(AB)\cos(\angle(BAD)) + 2l(AB)l(CD)\cos(\angle(BAD) + \angle(ADC))$ & $0 \leq l(BC)$)))

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Пятый и шестой антецеденты реализуют обращения к синтезаторам. Выражения для расстояний AB, CD, AD не содержат неизвестных внешней задачи. Не более чем одно из них может содержать неизвестное расстояние, но лишь такое, для которого имеется посылка, выражающая его пропорциональность искомому расстоянию. Последний факт определяется по комментарию (расстояния ...), вводимому при обращении к синтезатору. Прямые AB, CD, AD, BC до срабатывания приема уже рассматривались в задаче. Не усматривается вырожденная конфигурация, когда одна из точек лежит на прямой, проходящей через две другие. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

7. Равенство длины отрезка сумме длин двух подотрезков.



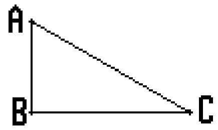
$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & $B \in$ отрезок(AC) $\rightarrow$ вычислениедлины($l(AC), l(AC) = l(AB) + l(BC)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & точкалуча(A, B, C) & вычислениедлины($l(AC), p$) $\rightarrow$ вычислениедлины($l(BC), l(BC) = |l(AC) - l(AB)|$ & p))

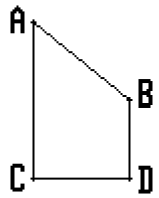
Прием срабатывает лишь при наличии комментария "плюс" и отсутствии комментария "отрезок". Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - реализует рекурсивное обращение. Выражение для расстояния AB не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

8. Теорема Пифагора.



$\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) $\rightarrow$ вычислениедлины($l(AC), l(AC)^2 = l(BC)^2 + l(AB)^2$))

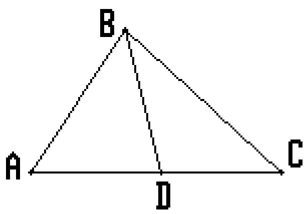
Антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(CD) & однасторона(A, B, прямая(CD)) & актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) & актив($l(CD)$) & прямая(BD) $\perp$ прямая(CD) $\rightarrow$ вычислениедлины($l(AB), l(AB)^2 = (l(AC) - l(BD))^2 + l(CD)^2$))

Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AC, BD, CD не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

9. Соотношение для длин сторон треугольника и длины медианы.



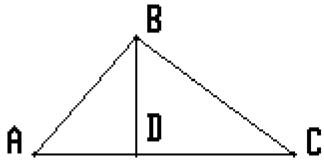
$\forall_{abcABCD}$($D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & вычислениедлины($l(AB), a$) & вычислениедлины($l(BC), b$) & вычислениедлины($l(AC), c$) $\rightarrow$ вычислениедлины($l(BD), 2l(AD)^2 + 2l(BD)^2 - l(AB)^2 - l(BC)^2 = 0$ & a & b & c))

Данный и следующий приемы применяются при наличии комментария "Высота". Первые два антецедента выделены указателем "усм", остальные - реализуют обращения к синтезаторам. Прямая AC уже встречается в задаче, причем не усматривается, что на ней лежит точка B. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcpqABCD}(D \in$ отрезок(AC) & $pl(AD) = ql(CD)$ & вычислениедлины$(l(AB),$ $a)$ & вычислениедлины$(l(BC), b)$ & вычислениедлины$(l(AC), c) \rightarrow$ вычислениедлины$(l(BD), (p^2 + pq)l(AD)^2 + (q^2 + pq)l(BD)^2 - q^2 l(BC)^2 -$ $pql(AB)^2 = 0$ & a & b & $c))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", остальные - реализуют обращения к синтезаторам. Предварительно проверяется, что расстояния AD, CD встречаются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

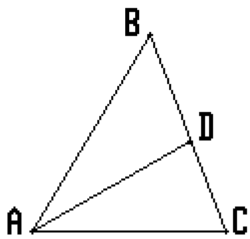
10. Соотношение для высоты треугольника и длин его сторон.



$\forall_{abcABCD}($актив$(l(BD))$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & вычислениедлины$(l(AB), a)$ & вычислениедлины$(l(BC), b)$ & вычислениедлины$(l(AC), c) \rightarrow$ вычислениедлины$(l(BD), 4l(AC)^2 l(BD)^2 =$ $4l(BC)^2 l(AC)^2 - l(AC)^2 + (l(BC)^2 - l(AB)^2)^2$ & a & b & $c))$

Прием срабатывает при наличии комментария "Высота". Первые три антецедента выделены указателем "усм", остальные - реализуют обращения к синтезаторам. Уровень срабатывания равен 4.

11. Соотношение для длины биссектрисы треугольника и длин его сторон.



$\forall_{abcABCD}(\angle(BAD) = \angle(DAC)$ & $D \in$ отрезок(BC) & вычислениедлины$(l(AB),$ $a)$ & вычислениедлины$(l(AC), b)$ & вычислениедлины$(l(BC), c) \rightarrow$ вычислениедлины$(l(AD), l(AD)^2(l(AB)+l(AC))^2 = l(AB)l(AC)(l(AB)+l(AC)+$ $l(BC))(l(AB) + l(AC) - l(BC)))$ & a & b & $c)$

Должен иметься комментарий "Высота". Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Три последних антецедента реализуют обращения к синтезаторам. Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор сумм с расстояниями "нормрасстояний"

В приеме, выражающем длину отрезка через сумму длин двух подотрезков, используется нормализатор "нормрасстояний", предпринимающий попытку выразить эту сумму через численные параметры с помощью равенства из посылок. Нормализатор имеет единственный прием:

$\forall_{abcpqABCD}(\neg(a = 0)\ \&\ aq - bp = 0\ \&\ al(AB) + bl(CD) = c \rightarrow pl(AB) + ql(CD) = cp/a)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый выделен указателем "усм", второй - указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, p, q не имеют невырожденных числовых атомов.

Нормализатор "вычрасст" усмотрения выражения для расстояния из уравнения контекста

Данный нормализатор аналогичен предыдущему, но использует посылку для определения единственного расстояния, а не линейной комбинации расстояний:

$\forall_{abAB}(al(AB) = b\ \&\ \neg(a = 0) \rightarrow l(AB) = b/a)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Каждое из выражений a, b либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв".

Синтезатор "пропорцотрезки" усиленного усмотрения пропорциональных отрезков

Синтезатор реализует вспомогательный предикат "пропорцотрезки($l(AB)$, $l(CD)$, a, b)", где a, b - выходные переменные, отношение значений которых равно $l(AB)/l(CD)$. Он представляет собой усиление синтезатора "пропорциональны", однако ищет только такие a, b, которые не содержат неизвестных. Перечислим приемы синтезатора:

1. Вырожденный отрезок.

   $\forall_{ABC}$(пропорцотрезки$(l(AA), l(BC), 0, 1)$)

   $\forall_{ABC}$(пропорцотрезки$(l(BC), l(AA), 1, 0)$)

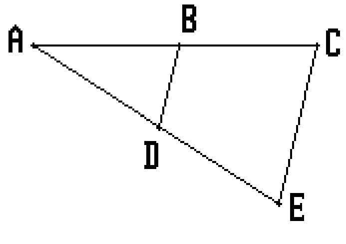
   Уровень срабатывания равен 1.

2. Использование синтезатора "пропорциональны".

   $\forall_{abABCD}(al(AB) = bl(CD) \rightarrow$ пропорцотрезки$(l(AB), l(CD), b, a))$

   Антецедент обрабатывается синтезатором "пропорциональны", которому передается комментарий "отрезки". Предварительно при помощи нормализатора "нормрасстояние" определяются выражения для расстояний $l(AB)$, $l(CD)$. Проверяется, что найденные коэффициенты a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

3. Соотношения пропорциональности для отрезков, отсекаемых параллельными прямыми.



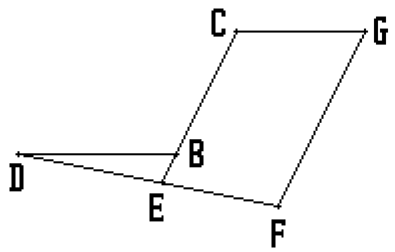
$\forall_{ABCDE}$(прямая(BD) $\parallel$ прямая(CE) & $D \in$ прямая(AE) & $B \in$ прямая(AC) & пропорцотрезки$(l(AB), l(BC), a, b)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AE)) $\to$ пропорцотрезки$(l(AD), l(DE), a, b)$)

Первые три антецедента выделены укзателем "усм", четвертый - реализует рекурсивное обращение, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(прямая(BD) $\parallel$ прямая(CE) & $D \in$ прямая(AE) & $B \in$ прямая(AC) & $al(AB) = bl(AC)$ & пропорцотрезки$(p, l(CE), c, d)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AE)) $\to$ пропорцотрезки$(l(BD), p, bd, ac)$)

$\forall_{ABCDE}$(прямая(BD) $\parallel$ прямая(CE) & $D \in$ прямая(AE) & $B \in$ прямая(AC) & $al(AB) = bl(AC)$ & пропорцотрезки$(p, l(CE), c, d)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AE)) $\to$ пропорцотрезки$(p, l(BD), ac, bd)$)

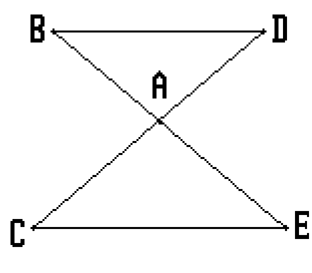
Аналогично первому приему, но пакетными синтезаторами обрабатываются два антецедента - четвертый и пятый. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{pqBCDEFG}$(прямая(CE) $\parallel$ прямая(FG) & прямая(BD) $\parallel$ прямая(CG) & $B \in$ прямая(CE) & $E \in$ прямая(DF) & пропорцотрезки$(l(DE), l(EF), p, q)$ & разныепрямые(прямая(DF), прямая(FG)) $\to$ пропорцотрезки$(l(BD), l(CG), p, q)$)

$\forall_{pqBCDEFG}$(прямая(CE) $\parallel$ прямая(FG) & прямая(BD) $\parallel$ прямая(CG) & $B \in$ прямая(CE) & $E \in$ прямая(DF) & пропорцотрезки$(l(DE), l(EF), p, q)$ & разныепрямые(прямая(DF), прямая(FG)) $\to$ пропорцотрезки$(l(CG), l(BD), q, p)$)

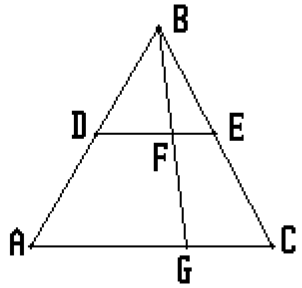
Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", пятый - реализует рекурсивное обращение. Шестой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(BD) $\parallel$ прямая(CE) & $A \in$ отрезок(BE) & $A \in$ отрезок(CD) & $al(BD) = bl(CE)$ & разныепрямые(прямая(BD), прямая(CE)) $\to$ пропорцотрезки$(l(AD), l(CD), b, a + b)$)

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BD) \parallel$ прямая(CE) & $A \in$ отрезок(BE) & $A \in$ отрезок(CD) & $al(BD) = bl(CE)$ & разныепрямые(прямая(BD), прямая(CE)) $\to$ пропорцотрезки$(l(CD), l(AD), a+b, b)$)

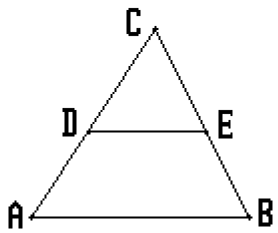
Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый реализует обращение к синтезатору "пропорциональны", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не должны содержать неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{abABCDEFG}$(прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(DE) & $G \in$ прямая(AC) & $F \in$ отрезок(BG) & $al(BF) = bl(BG)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\to$ пропорцотрезки$(l(DE), l(AC), b, a)$)

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", седьмой - обращается к синтезатору "пропорциональны", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

4. Площади треугольников.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & $D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ прямая(BC) & актив(S(фигура(ABC))) & актив(S(фигура(CDE))) & aS(фигура(ABC)) $=$ bS(фигура(CDE)) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) $\to$ пропорцотрезки$(l(CD), l(AD), \sqrt{a/b}, 1-\sqrt{a/b})$)

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & $D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ прямая(BC) & актив(S(фигура(ABC))) & актив(S(фигура(CDE))) & aS(фигура(ABC)) $=$ bS(фигура(CDE)) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) $\to$ пропорцотрезки$(l(AD), l(CD), 1-\sqrt{a/b}, \sqrt{a/b})$)

Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, первые три - выделены указателем "усм". Шестой антецедент реализуется синтезатором "пропорциональны", последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BC) & актив(S(фигура(ABC))) & актив(S(фигура(CDE))) & aS(фигура(ABC)) $=$ bS(фигура(CDE)) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) $\rightarrow$ пропорцотрезки($l(DE), l(AB), \sqrt{a}, \sqrt{b}$))

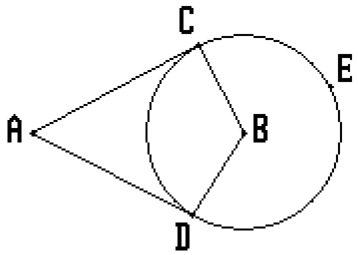
Аналогично предыдущим приемам.

Синтезатор "Пропорцрасст"

Синтезатор перечисляет выделенные в задаче расстояния, пропорциональные заданному расстоянию, указывая также коэффициенты пропорциональности. Используется он в приеме, выписывающем соотношение теоремы синусов при усмотрении пропорциональности двух расстояний. Первоначально такая пропорциональность может относиться к двум расстояниям, не являющимися сторонами какого-либо треугольника, а синтезатор позволяет перейти от них к длинам двух сторон треугольника. Реализуемое синтезатором утверждение имеет вид "Пропорцрасст($l(AB)$,x,a,b)", где x - выходная переменная для расстояния; a, b - выходные переменные для коэффициентов при $l(AB)$ и x. Пока синтезатор имеет всего два приема. Первый из них выдает исходное расстояние:

$\forall_{AB}$(Пропорцрасст($l(AB), l(AB), 1, 1$))

Второй прием использует равенство длин отрезков касательных, проведенных из одной точки:



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность(BE) $\rightarrow$ Пропорцрасст($l(AC), l(AD), 1, 1$))

Антецеденты выделены указателем "усм".

3.16 Приемы, связанные с символом "угол"

Выражение "угол($A\ B\ C$)" симметрично относительно переменных A, C. Однако, специальных приемов, выполняющих лексикографическую стандартизацию углов путем перестановки операндов A, C, не создано. Это объясняется тем, что идентифицирующие операторы, усматривающие углы, игнорируют порядок таких операндов.

Регистрация в активе

$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(угол(x26 x27 x28))" определяет срабатывание его при усмотрении в задаче на доказательство либо на исследование выражения $\angle(ABC)$. Отбрасывается случай задач на анализ текста, в которых символ "угол" обычно используется некорректным образом. Проверяется также, что переменные A, B, C не являются связанными. Указатель "развязка" блокирует попытку преобразования теоремы приема при компиляции. Выводимое утверждение "актив(угол(ABC))" используется как для инициализации приемов, связанных с углами, так и для ускоренной проверки того, что угол уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 0.

Учет сторон угла

Прямые, являющиеся сторонами рассматриваемых углов, тоже регистрируются в посылках вида "актив(...)". Это обеспечивается следующим приемом:

$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) $\to$ актив(прямая(AB)))

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 0. Заметим, что ввиду учитываемой идентифицирующими операторами симметрии в актив будут последовательно занесены обе стороны.

Диапазон значений для невырожденного угла

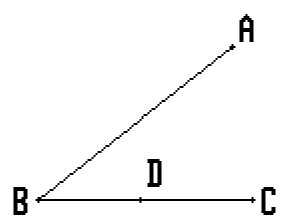
Если задача имеет известные параметры, связанные с углами, то бывает полезно сразу же добавить в посылки неравенства, ограничивающие область их изменения. Для этого служит следующий прием вывода:

$\forall_{ABCd}(\angle(ABC) = d\,\&$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\to 0 < d\,\&\,0 < \pi - d)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение d неконстантное и не содержит неизвестных, причем положительность его не усматривается. Если это выражение имеет вид ax/b, где a, b - десятичные константы, x - переменная, для которой уже существует посылка $0 < x$, то прием блокируется. Указатель "нормугол(угол(x26 x27 x28))" означает, что при идентификации не контролируется принадлежность точек A, C лучам угла, а проверяется лишь принадлежность их прямым этих лучей. В данном приеме он приобретает смысл после применения процедуры "развязка", преобразующей теорему. После развязки точки A, C берутся произвольным образом на соответствующих сторонах угла $A'BC'$, упоминаемого в посылке $\angle(A'BC') = d$. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

В случае задач на исследование, не имеющих цели "известно", добавляется еще одна версия приема, созданная на той же теореме. В ней не требуется, чтобы не усматривалась положительность значения выражения d, зато требуется, чтобы это выражение не содержало невырожденных числовых атомов.

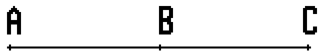
Идентификация углов, отличающихся выбором точек на лучах



$\forall_{ABCD}$(актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(ABD))$ & $D \in$ отрезок$(BC) \rightarrow$
$\angle(ABD) = \angle(ABC))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Существует посылка, не имеющая заголовка "актив" и содержащая угол ABD. Обозначения точек C и D различны. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Уровень срабатывания равен 3. Имеется также копия данного приема, срабатывающая на уровне 8.

Три точки, образующие угол, равный пи, лежат на одной прямой



$\forall_{ABC}(\angle(ABC) = \pi \rightarrow B \in$ отрезок(AC) & $l(AC) = l(AB) + l(BC))$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Расстояния AB, BC и AC уже рассматриваются в задаче. Идентифицирующий оператор не усматривает принадлежность точки B отрезку AC. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}(\angle(ABC) = \pi \rightarrow B \in$ отрезок$(AC))$

Аналогично предыдущему, но не требуется, чтобы перечисленные выше расстояния встречались в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

Равенство угла нулю

$\forall_{ABC}(\angle(ABC) = 0 \leftrightarrow C \in$ прямая(AB) & $\neg(B \in$ отрезок$(AC)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{AB}(\angle(ABA) = 0)$

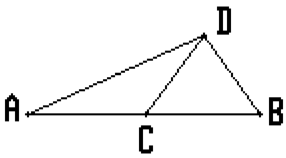
Прием имеет заголовок "второйтерм" и срабатывает на уровне 1.

Усмотрение развернутого угла

$\forall_{ABC}(B \in$ отрезок$(AC) \rightarrow \angle(ABC) = \pi)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо исследование, не имеющей вид "актив$(\angle(ABC))$". Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Усмотрение тупого угла



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ADB)$) & актив($l(CD)$) & $C \in$ отрезок(AB) & $l(AC) = l(BC)$ &
$0 < l(AC) - l(CD) \to 0 < \angle(ADB) - \pi/2$)

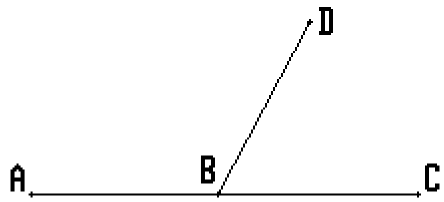
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, и для него введен сильный ограничитель трудоемкости. Выражение для угла ADB имеет тип "неизв". В начале применения приема проверяется, что не усматривается равенство расстояний CD, AC. Уровень срабатывания равен 9.

Заметим, что данный прием применяется крайне редко. Обычно для усмотрения тупого либо острого угла применяются проверочные операторы "усмменьше" и "усмменьшеилиравно". При описании этих операторов в разделах, относившихся к элементарной алгебре, геометрические приемы были опущены. Они будут приведены ниже.

Группа углов с общей вершиной

Все приемы данного раздела имеют заголовок "вывод".

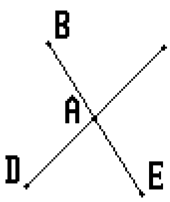
1. Смежные углы.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABD)$) & $B \in$ отрезок(AC) $\to \angle(ABD) + \angle(DBC) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй выделен указателем "усм". Угол DBC уже встречается в задаче. Не усматриваются ни принадлежность точки D прямой AB, ни перпендикулярность прямых AB, BD. Для блокировки повторных срабатываний используется комментарий (величинаугла ...). Уровень срабатывания равен 3. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 15. В ней не требуется, чтобы угол DBC встречался в задаче, но требуется, чтобы выражение для угла ABD имело тип "неизв".

2. Вертикальные углы.



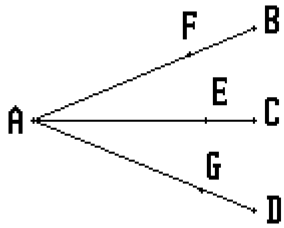
$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(DAE)$) & актив($\angle(BAC)$) & $A \in$ отрезок(BE) &
$A \in$ отрезок(CD) $\to \angle(BAC) = \angle(DAE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(DAE)$) & $A \in$ отрезок(BE) & $A \in$ отрезок(CD) $\rightarrow$ $\angle(BAC) = \angle(DAE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Созданы три версии приема. Первая из них срабатывает на уровне 7. В ней требуется, чтобы выражение для угла DAE не содержало неизвестных. Во второй версии, срабатывающей на уровне 8, требуется, чтобы выражение для угла BAC имело тип "возмактив". Наконец, в версии, срабатывающей на уровне 10, требуется, чтобы выражение для угла DAE имело тип "неизв".

3. Равенство угла сумме двух составляющих его углов.

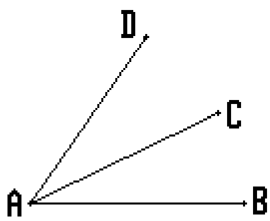


$\forall_{ABCDEFG}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(EAD)$) & $E \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, E) & актив($\angle(FAG)$) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, B, F) & точкалуча(A, D, G) & разныестороны(B, D, прямая(AC)) & однасторона(B, C, прямая(AD)) & $B \in$ плоскость(ACD) $\rightarrow$ $\angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, десятый и одиннадцатый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Теорема приема создана таким образом, чтобы развязка переменных не требовалась. Поэтому введен указатель "развязка", блокирующий преобразование теоремы при компиляции. Соотношение между углами выписывается, если все они уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFG}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(EAD)$) & $E \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, E) & актив($\angle(FAG)$) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, B, F) & точкалуча(A, D, G) & разныестороны(B, D, прямая(AC)) & $0 \leq \pi - \angle(BAC) - \angle(CAD)$ & $B \in$ плоскость(ACD) $\rightarrow$ $\angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD)$)

Аналогично предыдущему, но проверка условия "однасторона(...)" заменена проверкой неравенства. Уровень срабатывания прежний.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAD)$) & актив($\angle(CAD)$) & $\angle(BAD) = a$ & $\angle(CAD) < b$ & $0 \leq a - b$ & однасторона(C, B, прямая(AD)) $\rightarrow$ $\angle(CAD) = a - \angle(BAC)$)

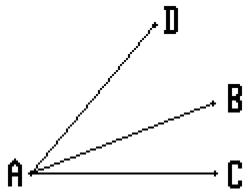
Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускается случай нестрогого неравенства. Два первых антецедента выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "развязка" отсутствует. Выражение a не содержит неизвестных; выражение для угла BAC имеет тип "определимо", а для угла CAD - тип "неизв". Введен сильный ограничитель трудоемкости при обработке пятого антецедента. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BA)$) & актив($\angle(CAD)$) & $\angle(BA) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & однасторона(C, D, прямая(AB)) & разныестороны(B, D, прямая(AC)) $\rightarrow$ $\angle(BAD) = a + b$)

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Как и в предыдущем приеме, первые два антецедента выделены указателем "усм", а последние два - обрабатываются проверочным оператором. Выражение a имеет тип "внешнеизв", выражение b - не содержит неизвестных. Выражение для угла BAD имеет тип "определимо". Имеется сильный ограничитель трудоемкости при обработке пятого антецедента. Уровень срабатывания равен 8.

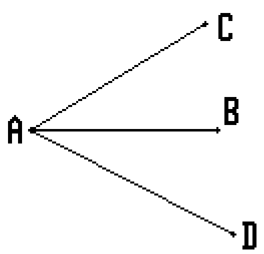
$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(CAD)$) & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & $0 \leq \pi - a - b$ & разныестороны(B, D, прямая(AC)) $\rightarrow \angle(BAD) = a + b$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат неизвестных, выражение для угла BAD имеет тип "существатом". Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(CAD)$) & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & однасторона(B, D, прямая(AC)) $\rightarrow \angle(BAD) = |a - b|$)

Аналогично предыдущему приему (за исключением того, что отсутствует шестой антецедент). Уровень срабатывания равен 9.

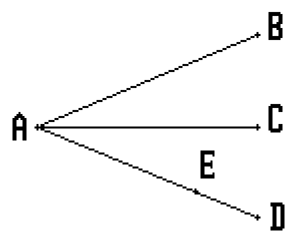


$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(BAD)$) & разныестороны(C, D, прямая(AB)) & $0 \leq \pi - \angle(BAC) - \angle(BAD) \rightarrow \angle(CAD) = \angle(BAC) + \angle(BAD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения для углов BAC, BAD не содержат неизвестных, а выражение для угла CAD имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 11.

$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(AD)) & разныестороны(C, D, прямая(AB)) & однасторона(B, D, прямая(AC)) & однасторона(B, C, прямая(AD)) $\to \angle(CAD) = \angle(BAC) + \angle(BAD)$)

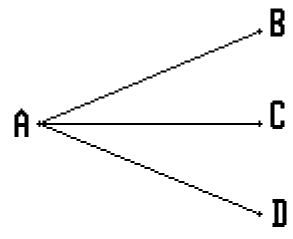
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "неизв", для угла CAD - тип "определимо", для угла BAD - тип "возмопределимо". Уровень срабатывания равен 14.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(BAD)$) & актив($\angle(CAE)$) & $E \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, D, E) & разныестороны(B, D, прямая(AC)) & $0 \le \pi - \angle(CAE) - \angle(BAC) \to \angle(BAC) = \angle(BAD) - \angle(CAE)$)

$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(BAD)$) & актив($\angle(CAE)$) & $E \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, D, E) & разныестороны(B, D, прямая(AC)) & однасторона(B, C, прямая(AD)) $\to \angle(BAC) = \angle(BAD) - \angle(CAE)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство, третий и четвертый - выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. У первого приема введен сильный ограничитель трудоемкости при обработке последнего антецедента. Уровни срабатывания равны 12.

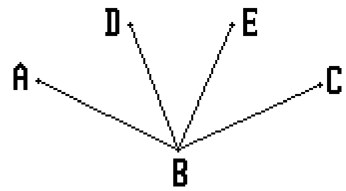


$\forall_{abABCD}$(актив($\angle(BAD)$) & актив(прямая(AC)) & разныестороны(B, D, прямая(AC)) & вычислениеугла($\angle(BAC), a$) & вычислениеугла($\angle(CAD), b$) $\to$ $\cos(\angle(BAD)) = \cos(\angle(BAC) + \angle(CAD))$ & a & b)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование либо на доказательство, два последних - обрабатываются пакетными синтезаторами.

Они определяют конъюнкции a, b соотношений, позволяющих вычислить углы BAC, CAD. Второй антецедент выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражение для угла BAD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 15.

4. Равенство угла сумме трех составляющих его углов.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & $\angle(ABD) = \angle(DBE)$ & $\angle(DBE) = \angle(EBC)$ & однасторона(A, E, прямая(BC)) & разныестороны(A, E, прямая(BD)) & разныестороны(C, D, прямая(BE)) & однасторона(E, D, прямая(BC)) $\rightarrow$ $\angle(ABC) = 3\angle(ABD)$)

Второй и третий антецеденты, выделенные указателем "равно", идентифицируются с посылками либо с парами посылок. Первый антецедент выделен указателем "усм". Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 7. На той же теореме создана еще одна версия приема, у которой точка привязки выбрана в первом антецеденте. Она имеет уровень срабатывания 13.

$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(ABD)$) & актив($\angle(EBC)$) & однасторона(A, E, прямая(BC)) & однасторона(A, D, прямая(BC)) & однасторона(C, D, прямая(AB)) & однасторона(C, E, прямая(AB)) & $a = \angle(ABD) + \angle(EBC) \rightarrow \angle(DBE) = |\angle(ABC) - a|$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два следующих - выделены указателем "усм". Антецеденты с четвертого по седьмой обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации, причем результат a не содержит неизвестных. Выражение для угла ABC тоже не содержит неизвестных; выражение для угла DBE имеет тип "применимо". Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 7.

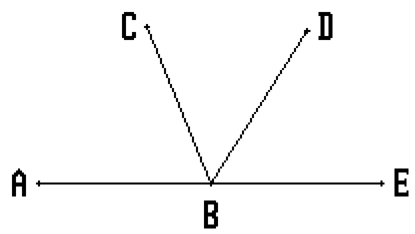
$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(DBE)$) & актив($\angle(ABD)$) & актив($\angle(EBC)$) & однасторона(A, E, прямая(BC)) & разныестороны(A, E, прямая(BD)) & разныестороны(C, D, прямая(BE)) & $0 \leq \pi/2 - \angle(CBE)$ $\rightarrow$ $\angle(ABC) = \angle(ABD) + \angle(DBE) + \angle(EBC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние пять антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Ограничитель трудоемкости такой же, как в предыдущем приеме. Выражение для угла ABC имеет тип "Неизв". Все углы ABD, DBE, EBC уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы два из них известны. Уровень срабатывания равен 13.

$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(DBE)$) & однасторона(A, E, прямая(BC)) & разныестороны(A, E, прямая(BD)) & разныестороны(C, D, прямая(BE)) & однасторона(E, D, прямая(BC)) $\rightarrow$ $\angle(ABC) = \angle(ABD) + \angle(DBE) + \angle(EBC)$)

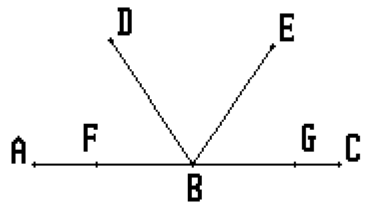
Аналогично предыдущему, но с другими ограничениями на типы выражений для углов: один из углов ABC, DBE должен быть известен, а другой - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания прежний.

5. Рассмотрение двух углов, дополняющих неизвестный угол до развернутого.



$\forall_{ABCDE}(\angle(CBD) = a$ & $\angle(DBE) = b$ & $B \in$ отрезок(AE) &
разныестороны$(C, E,$ прямая$(BD))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AE)) \rightarrow$
$\angle(ABC) = \pi - a - b)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Третий антецедент выделен указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Величина угла ABC не известна. Уровень срабатывания равен 6.



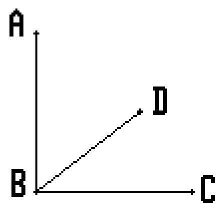
$\forall_{ABCDEFG}($актив$(\angle(DBE))$ & $B \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) &
$G \in$ прямая(AC) & $B \in$ отрезок(FG) & однасторона$(D, E,$ прямая$(AC))$ &
разныеточки(B, F) & разныеточки(B, G) & разныестороны$(F, E,$ прямая$(BD))$
$\rightarrow \angle(DBE) = \pi - \angle(FBD) - \angle(GBE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последние четыре - обрабатываются проверочными операторами. Антецеденты со второго по пятый выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для углов DBE, FBD, GBE имеет тип "неизв". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 9. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 12. В ней требуется, чтобы величина угла DBE была известна, а выражения для углов FBD, GBE имели тип "существатом". Уровень срабатывания равен 12.

$\forall_{ABCDEFGp}($актив$(\angle(DBE))$ & $B \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) &
$G \in$ прямая(AC) & $B \in$ отрезок(FG) & однасторона$(D, E,$ прямая$(AC))$ &
разныеточки(B, F) & разныеточки$(B, G) \rightarrow \angle(DBE) = |\pi - \angle(FBD) - \angle(GBE)|)$

Аналогично предыдущему, но требуется, чтобы выражение для угла DBE имело тип "неизв", а величины углов FBD, GBE были известны. Уровень срабатывания равен 12.

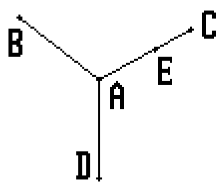
6. Два угла с общей вершиной, составляющие прямой угол.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(ABD))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(A, D,$прямая$(BC))$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow \angle(ABD) + \angle(DBC) = \pi/2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и пятый - выделены указателем "усм". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла ABD имеет тип "неизв", а для угла DBC - тип "существатом". На этой же теореме создана еще одна версия приема, у которой точка привязки выбрана во втором антецеденте. Обе версии срабатывают на уровне 10.

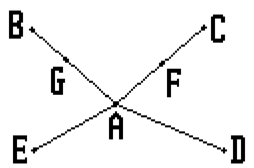
7. Три угла с общей вершиной, составляющие полный угол.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(DAC))$ & актив$(\angle(BAE))$ & $E \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, E, C) & разныестороны$(B, C,$прямая$(AD))$ & разныестороны$(B, D,$прямая$(AC)) \rightarrow \angle(BAD) + \angle(BAE) + \angle(DAC) = 2\pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла DAC имеет тип "неизв". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 9.

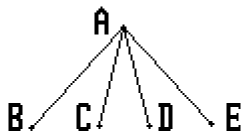
8. Четыре угла с общей вершиной, составляющие полный угол.



$\forall_{pABCDEFG}$(актив$(\angle(DAC))$ & актив$(\angle(BAF))$ & актив$(\angle(EAG))$ & точкалуча(A, F, C) & точкалуча(A, B, G) & разныестороны$(B, D,$прямая$(AC))$ & разныестороны$(E, C,$прямая$(AB))$ & $p = \angle(DAC) + \angle(BAF) + \angle(EAG)$ & $0 \leq p - \pi$ & $0 \leq 2\pi - p \rightarrow p + \angle(EAD) = 2\pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четыре следующих - выделены указателем "усм". Восьмой антецедент выделен указателем "идентификатор"; его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла EAD имеет тип "Неизв". Углы DAC, BAF, EAG уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы два из них известны. Имеется указатель "развязка". Уровень срабатывания равен 13.

9. Усмотрение равенства двух частично перекрывающихся углов с общей вершиной.

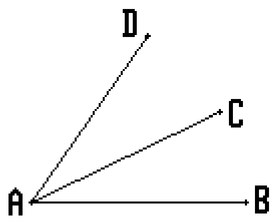


$\forall_{ABCDE}(\angle(BAC) = \angle(DAE)$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ & разныестороны$(C, E,$ прямая$(AD))$ & актив$(\angle(BAD)) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 13. Для частного случая, когда угол BAD равен $\pi/2$, создан отдельный прием, срабатывающий на уровне 6:

$\forall_{ABCDE}(\angle(BAC) = \angle(DAE)$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ & разныестороны$(C, E,$ прямая$(AD))$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow$ прямая$(AC) \perp$ прямая$(AE))$

10. Разбор случаев для двух углов с общим лучом: лежат ли они по одну либо по разные стороны от этого луча.



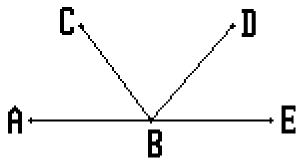
$\forall_{ABCD}($актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(DAC))$ & актив$(\angle(BAD))$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ однасторона$(B, D,$ прямая$(AC)) \ \vee$ разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Углы BAC и DAC известны, выражение для угла BAD имеет тип "неизв". С помощью проверочных операторов не усматривается ни расположение точек B, D по разные стороны от прямой AC, ни расположение их по одну сторону от этой прямой. Выведенная дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". По умолчанию, это относится ко всем последующим приемам разбора случаев. Уровень срабатывания равен 9. Создана еще одна версия приема, у которой точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Ее уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDab}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(CAD)$) & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & $0 \le \pi - a - b \to$ однасторона($B, D,$ прямая(AC)) & $\angle(BAD) = |a - b|$ $\vee$ разныестороны($B, D,$ прямая(AC)) & $\angle(BAD) = a + b$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормугол". Выражения a, b не содержат неизвестных. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Для него введен сильный ограничитель трудоемкости. Выражение для угла BAD имеет тип "существатом". Не усматривается взаимное расположение точек B, D относительно прямой AC. Уровень срабатывания равен 10.

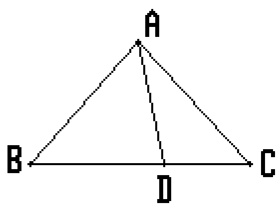
11. Разбор случаев для расположения общей вершины трех углов на прямой, содержащей лучи двух из этих углов.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(CBD)$) & актив($\angle(DBE)$) & $B \in$ прямая(AE) & $D \in$ плоскость(ACE) $\to B \in$ отрезок(AE) $\vee$ $\neg(B \in$ отрезок(AE)))

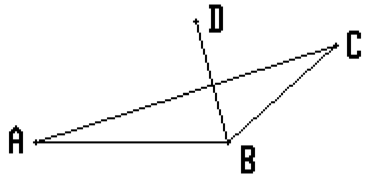
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Углы ABC и DBE известны, выражение для угла CBD имеет тип "неизв". Идентифицирующие операторы не усматривают ни расположение точки B на отрезке AE, ни расположение ее вне этого отрезка. Уровень срабатывания равен 10.

12. Разбор случаев для взаимного расположения точек на прямой, от которого зависит представление угла в виде суммы либо разности двух других углов.



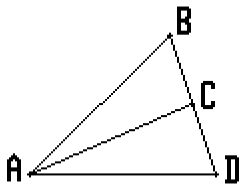
$\forall_{ABCD}(D \in$ прямая(BC) & актив($\angle(DAC)$) & актив($\angle(BDA)$) $\to$ $D \in$ отрезок(BC) & $\angle(DAC) = \angle(BDA) - \angle(ACB)$ $\vee$ $C \in$ отрезок(BD) & $\angle(DAC) = \angle(ACB) - \angle(BDA)$ $\vee$ $\angle(DAC) = \pi - \angle(BDA) - \angle(ACB)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для угла DAC имеет тип "неизв", выражения для углов ACB и BDA - тип "определимо". Не усматриваются ни принадлежность точки D отрезку BC, ни принадлежность точки C отрезку BD, ни принадлежность точки B отрезку CD. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDpq}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AC)$) & актив($\angle(ABD)$) & вычислениеугла($\angle(ABD), p$) & вычислениеугла($\angle(DBC), q$) & актив(прямая(BD)) $\rightarrow$ (разныестороны($A, C,$ прямая(BD)) $\vee$ однасторона($A, C,$ прямая(BD))) & p & q)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый и шестой - обрабатываются пакетными синтезаторами, находящими конъюнкции p, q соотношений для вычисления углов ABD, DBC. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB и BC известны, выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Не усматривается расположение точек A, C относительно прямой BD. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 9.



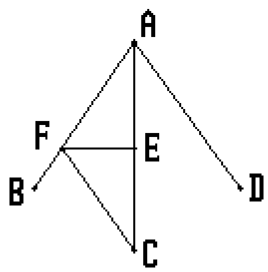
$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAD)$) & актив($\angle(CAD)$) & актив($\angle(BAC)$) & $C \in$ прямая(BD) & точкалуча$(D, B, C) \rightarrow C \in$ отрезок(BD) & $\angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD)$ $\vee$ $B \in$ отрезок(CD) & $\angle(CAD) = \angle(BAC) + \angle(BAD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделлены указателем "усм". Не усматриваются ни принадлежность точки C отрезку BD, ни принадлежность точки B отрезку CD. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAD)$) & актив($\angle(CAD)$) & $C \in$ прямая$(BD) \rightarrow$ $\neg(D \in$ отрезок$(BC))$ $\vee$ $D \in$ отрезок(BC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Каждое из выражений для углов BAD, CAD либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Не усматривается расположение точки D относительно отрезка BC. Уровень срабатывания равен 13.

13. Ввод в рассмотрение вспомогательного равнобедренного треугольника при доказательстве равенства двух углов с общим лучом.



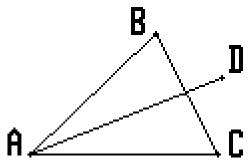
$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(AC) & $l(AE) = l(CE)$ & однасторона$(B, C,$ прямая$(AD))$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC)) \to F$ – точка & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AC) & $l(AF) = l(CF)$ & $\angle(BAC) = \angle(FCA)$ & точкалуча$(A, B, F))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении равенства $\angle(BAC) - \angle(DAC) = 0$ в условии задачи на доказательство. Первый и второй антецеденты идентифицируются с посылками, третий и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "новыйсимвол" определяет выбор новой переменной F для вспомогательной точки. Смысл дополнительного построения состоит в том, чтобы доказательство равенства углов свести к доказательству параллельности прямых AD и CF. Уровень срабатывания равен 7.

Ввод в рассмотрение нового угла

Обычно новый угол при решении задачи вводится в рассмотрение в связи с каким-либо новым соотношением, где он упоминается. Тогда он сразу же будет зарегистрирован в посылке "актив(угол(...))". Однако, иногда рассмотрение угла активируется непосредственным выводом такой посылки. Приведем несколько приемов подобного типа. Сразу отметим, что ввод в рассмотрение любого нового параметра чертежа - угла, расстояния, и т.п., требует достаточной осторожности, так как может вызвать лавинообразное загромождение задачи ненужными соотношениями.

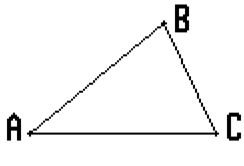
1. Ввод в рассмотрение угла, объединяющего два других угла с общей вершиной.



$\forall_{ABCD}$(актив$(\angle(BAD))$ & актив$(\angle(DAC))$ & актив$(l(BC))$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ актив$(\angle(BAC)))$

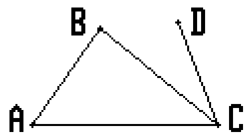
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для углов BAD, DAC имеет тип "неизв". Через точку B проходит прямая, перпендикулярная прямой AC, т.е. новый угол BAC может оказаться полезным как острый угол прямоугольного треугольника. Уровень срабатывания равен 7. На той же теореме создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы углы BAD и DAC, а также хотя бы один из углов ABC, ACB были известны, причем выражение для расстояния BC имело тип "неизв". Ее уровень срабатывания равен 8.

2. Ввод в рассмотрение внутреннего угла треугольника, уже имеющего один выделенный угол.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BC)) $\rightarrow$ актив($\angle(ACB)$))

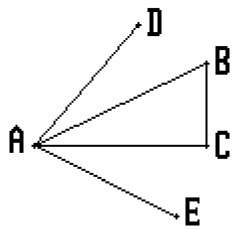
Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для угла BAC либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Должен существовать уже рассматриваемый в задаче угол вида $\angle(DCB)$ либо $\angle(ACD)$. Уровень срабатывания равен 12.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & актив(прямая(AB))& актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BC)) & актив($\angle(ACD)$) & актив($\angle(BCD)$) & $D \in$ плоскость(ABC) $\rightarrow$ актив($\angle(ACB)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование либо на доказательство, остальные выделены указателем "усм". Углы ACD и BCD известны, выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 13.

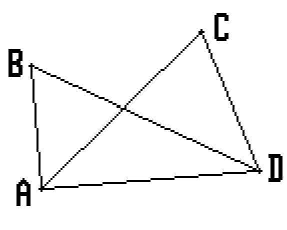
3. Ввод в рассмотрение угла прямоугольного треугольника, если имеется выделенный неизвестный угол с той же вершиной.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) & актив($l(BC)$) & актив($l(AC)$) & актив($\angle(DAE)$) $\rightarrow$ актив($\angle(BAC)$))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом антецеденте. Расстояния AC и BC известны, выражение для угла DAE имеет тип "неизв". Углы DAB и CAE уже введены в рассмотрение. Уровень срабатывания равен 9.

4. Углы двух треугольников с общей стороной.

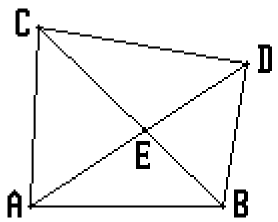


$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAD)$) & актив($\angle(CAD)$) & актив($\angle(BDC)$) $\rightarrow$ актив($\angle(ABD)$) & актив($\angle(ADC)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Расстояния BD и CD уже рассматриваются в задаче, угол CAD известен.

Усмотрение равных вписанных углов

Этот прием можно было бы отнести к разделу "окружности", но он усматривает вписанные углы при отсутствии явно заданной окружности, и поэтому приведен в данном разделе.

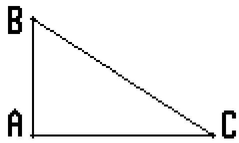


$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ACB)$) & $E \in$ отрезок(AD) & $E \in$ отрезок(BC) & $\angle(ACB) = \angle(ADB)$ & актив($\angle(ABC)$) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(AB)) & разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(BC)) $\rightarrow \angle(ABC) = \angle(ADC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Его левая и правая части обрабатываются нормализатором "нормугол". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Чтобы избежать пересечения с приемами, введенными для окружности, введен ускоряющий фильтр, проверяющий отсутствие рассматриваемой в задаче окружности, проходящей через точки A, B, C, D. До обработки четвертого антецедента проверяется, что углы ACB и ADB уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике

1. Синус.



$\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(AC) & актив($\angle(ABC)$) $\rightarrow$ $l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом из них. Указатель "нормугол($\angle(ABC)$)" разрешает идентификацию угла ABC без учета ориентации лучей, т.е. с точностью до смежного угла. Расстояния AC, BC уже рассматриваются в задаче, и выражения для них имеют тип "неизв". Выражение для угла ABC имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 3. На данной теореме созданы еще несколько приемов. Перечислим их в порядке возрастания уровня срабатывания:

(a) Два из трех выражений AC, BC, $\angle(ABC)$ известны, а третье уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Угол ABC известен, а хотя бы одно из выражений для расстояний AC, BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

(c) Копия предыдущего приема, срабатывающая на уровне 4.

(d) Хотя бы одно из расстояний AC, BC известно, а выражение для угла ABC имеет тип "неизв".

(e) Выражение для угла ABC либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Расстояния AC, BC не известны. Усматривается возможность преобразования выводимого равенства в такое соотношение пропорциональности для двух невырожденных числовых атомов, которое позволит исключить один из них в некотором уравнении задачи, имеющем более двух невырожденных атомов. Уровень срабатывания равен 4.

(f) Два из трех выражений $l(AC)$, $l(BC)$, $\angle(ABC)$ содержат только численные (известные либо неизвестные) параметры, а третье - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

(g) Два из трех выражений $l(AC)$, $l(BC)$, $\angle(ABC)$ известны, а третье - нет. Уровень срабатывания равен 6.

(h) Угол ABC известен, а хотя бы одно из выражений $l(AC)$, $l(BC)$ имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(i) Хотя бы одно из расстояний AC, BC известно, а выражение для угла ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(j) Выражение для угла ABC, а также хотя бы одно из выражений для расстояний AC, BC имеют тип "Неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(k) Два из трех выражений AC, BC, $\angle(ABC)$ известны, а третье уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

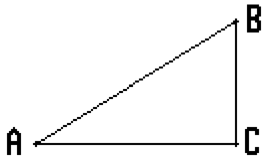
(l) Угол ABC известен, а хотя бы одно из выражений $l(AC)$, $l(BC)$ имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

В целом, с увеличением уровня срабатывания ограничения ослабляются. Однако, для ускорения срабатываний ряд приемов "малых уровней" продублированы на высоких уровнях. Без этого для их активации понадобилось бы принудительное уменьшение весов посылок, соответствующих точкам привязки.

Продолжим перечисление приемов, связанных с синусом.

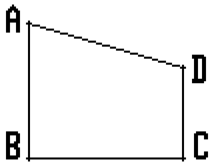
$\forall_{aABC}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC)\ \&\ \sin(\angle(ABC)) = a \to l(AC) = al(BC))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных. Одно из выражений для расстояний AC и BC не содержит неизвестных, другое - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCpqr}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BAC))$ & $l(AB) = m$ &
$m = pr/t$ & $l(BC) = qr/s \rightarrow \angle(BAC) = \arcsin(qt/ps))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Они усматривают пропорциональность расстояний AB, BC с известными коэффициентами $p/t, q/s$. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BAD))$ &
прямая$(DC) \parallel$ прямая$(AB) \rightarrow l(BC) = \sin(\angle(BAD))l(AD))$

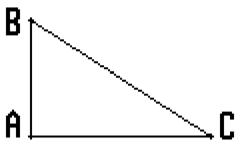
Антецеденты выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом из них. Расстояния AD и BC уже рассматриваются в задаче. Проверяется, что выводимое равенство, при помощи некоторого другого уравнения задачи, может быть преобразовано в невырожденное соотношение для численных параметров. Уровень срабатывания приема равен 3. На данной теореме созданы еще несколько приемов:

(a) Два из трех выражений $l(BC)$, $\angle(BAD)$, $l(AD)$ известны, а третье - не известно и уже рассматривалось в задаче. Имеются три копии приема, первая из которых срабатывает на уровне 3, вторая - на уровне 4, а третья - на уровне 6.

(b) Одно из трех выражений $l(BC)$, $\angle(BAD)$, $l(AD)$ известно, другое - имеет тип "неизв", а третье уже встречалось в задаче. Имеются три копии, срабатывающие на уровнях 3,4 и 6.

(c) Одно из трех выражений $l(BC)$, $\angle(BAD)$, $l(AD)$ известно, а два других имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

2. Косинус.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(\angle(ABC)) \rightarrow l(AB) =$
$\cos(\angle(ABC))l(BC))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом из них. Угол ABC известен; хотя бы одно из выражений для расстояний AB, BC имеет тип "неизв". Оба эти расстояния уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3. На данной теореме созданы еще несколько приемов:

(a) Одно из трех выражений $l(AB)$, $\angle(ABC)$, $l(BC)$ известно, а два других имеют тип "неизв". Имеются копии приема, срабатывающие на уровнях 3 и 4.

(b) Два из трех выражений $l(AB)$, $\angle(ABC)$, $l(BC)$ известны, а третье уже рассматривается в задаче. Имеются копии приема, срабатывающие на уровнях 3 и 4.

(c) Все три выражения $l(AB)$, $\angle(ABC)$, $l(BC)$ имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

(d) Угол ABC известен, а выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Не требуется чтобы расстояние AB уже рассматривалось в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

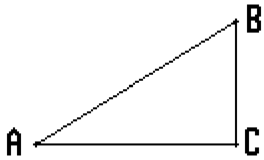
(e) Выражение для угла ABC имеет тип "внешнеизв". Одно из выражений $l(AB)$, $l(BC)$ имеет тип "неизв", а другое - тип "применимо". Имеются копии приема, срабатывающие на уровнях 6 и 9.

(f) Среди трех выражений $l(AB)$, $\angle(ABC)$, $l(BC)$ имеется одно известное и одно типа "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(g) Два из трех выражений $l(AB)$, $\angle(ABC)$, $l(BC)$ известны, а третье - не известно и не обязательно рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

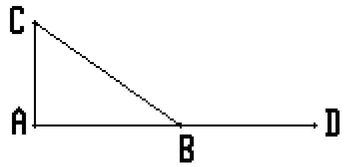
(h) Выражения для расстояний AB, BC имеют тип "неизв", причем эти выражения не отличаются друг от друга лишь известными коэффициентами. Уровень срабатывания равен 7.

Продолжаем перечисление приемов, связанных с косинусом.



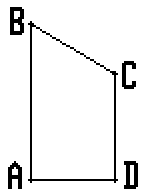
$\forall_{ABCpqr}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BAC))$ & $l(AC) = m$ &
$m = pr$ & $l(AB) = qr \to \angle(BAC) = \arccos(p/q))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения p, q не содержат неизвестных, выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AB)$) & прямая(AB) $\perp$ прямая(AC) & актив($\angle(CBD)$) &
$B \in$ отрезок(AD) $\to l(AB) = -\cos(\angle(CBD))l(BC)$)

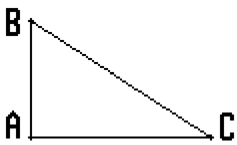
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол CBD известен, а выражения для расстояний AB и BC имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(AD) & прямая(CD) $\perp$ прямая(AD) &
актив($\angle(ABC)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AB)$) $\to l(CD) =$
$|l(AB) - l(BC)\cos(\angle(ABC))|$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом из них. Три из четырех выражений $l(CD)$, $l(AB)$, $l(BC)$, $\angle(ABC)$ известны, а одно - имеет тип "неизв". Уровни срабатывания равны 5 и 7.

3. Тангенс.



$\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(AC) & актив($\angle(ABC)$) $\to l(AC) =$
$\mathrm{tg}(\angle(ABC))l(AB)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Расстояния AC и AB известны, выражение для угла ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3. На данной теореме созданы еще несколько приемов:

(a) Два из трех выражений $l(AC)$, $l(AB)$, $\angle(ABC)$ известны, третье - имеет тип "неизв". Оба антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 4.

(b) Угол ABC известен; одно из выражений $l(AB)$, $l(AC)$ известно, а другое - не известно, но уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Выражение для угла ABC имеет тип "внешнеизв"; хотя бы одно из расстояний $l(AB)$, $l(AC)$ выражено через численные параметры. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Угол ABC известен; хотя бы одно из выражений $l(AB)$, $l(AC)$ имеет тип "неизв". Имеются копии приема, срабатывающие на уровнях 4 и 6.

(e) Выражения для $l(AB)$, $l(AC)$ имеют только численные параметры. Выражение для угла ABC содержит невырожденный числовой атом, встречающийся в одном из исходных уравнений задачи. Уровень срабатывания равен 5.

(f) Выражения для угла ABC и хотя бы одного из расстояний AB, AC имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

(g) Расстояния AB, AC уже встречаются в задаче. Усматривается возможность преобразования выводимого равенства в такое соотношение пропорциональности для двух невырожденных числовых атомов, которое позволит исключить один из них в некотором уравнении задачи, имеющем более двух невырожденных атомов. Уровень срабатывания равен 10.

(h) Существует посылка вида $x = \angle(ABC)$, где x - неизвестная внешней задачи на описание, не встречающаяся в других уравнениях задачи. Уровень срабатывания равен 10.

(i) Хотя бы одно из расстояний AB, AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 14.

Продолжаем перечисление приемов, связанных с тангенсом.

$\forall_{ABC}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{актив}(l(AB)) \rightarrow l(AC) = \mathrm{tg}(\angle(ABC))l(AB))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Расстояние AB известно. Выражение для угла ABC имеет тип "определимо", для расстояния AC - тип "применимо". Уровень срабатывания равен 7.

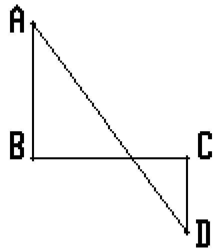
$\forall_{ABCabp}(bl(AB) = al(AC)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow a = b\,\mathrm{tg}(\angle(ACB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражения a, b не содержат неизвестных; выражение для угла ACB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCabp}(bl(AB) = al(AC)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow b = a\,\mathrm{tg}(\angle(ABC)))$

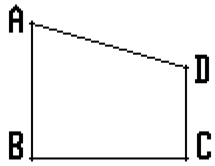
Аналогично предыдущему.

4. Котангенс.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BAD))$ &
прямая$(DC) \parallel$ прямая(AB) & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)) \rightarrow$
$l(AB) + l(CD) = \mathrm{ctg}(\angle(BAD))l(BC))$

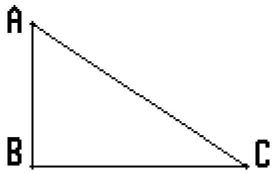
Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Угол BAD и расстояние BC известны; выражения для расстояний AB и CD имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BAD))$ &
прямая$(DC) \parallel$ прямая(AB) & однасторона$(A, D,$ прямая$(BC)) \rightarrow$
$l(AB) = l(CD) + \mathrm{ctg}(\angle(BAD))l(BC))$

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Угол BAD известен. Каждое из выражений $l(AB)$, $l(CD)$, $l(BC)$ либо известно, либо имеет тип "неизв". На той же теореме создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы выражения для расстояний имели тип "неизв", а выражение для угла - тип "определимо". Уровни срабатывания обеих версий равны 7.

5. Использование равенства, определяющего значение тригонометрической функции острого угла в прямоугольном треугольнике.



(a) Синус.

$\forall_{aABC}(\sin(\angle(BCA)) = a$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(AB) = al(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, второй - выделен указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных. Хотя бы одно из расстояний AC, AB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{aABC}(\sin(\angle(BCA)) = a$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow$
$l(BC) = \sqrt{1 - a^2}l(AC))$

Аналогично предыдущему, но вместо расстояний AC, AB в задаче должны встречаться расстояния AC, BC. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abABC}(\sin b = a$ & $\angle(BCA) = b$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow$
$l(AB) = al(AC))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - выделен указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных; расстояния AC и BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания приема равен 5.

$\forall_{abABC}(\sin b = a \ \& \ \angle(BCA) = b \ \&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to$
$l(BC) = \sqrt{1-a^2}l(AC))$

Аналогично предыдущему, но вместо расстояний AC, AB в задаче должны встречаться расстояния AC, BC. Уровень срабатывания равен 5.

(b) Косинус.

$\forall_{aABC}(\cos(\angle(BCA)) = a \ \&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to l(BC) = al(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, второй - выделен указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных. Хотя бы одно из расстояний AC, BC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Тангенс.

$\forall_{aABC}(\mathrm{tg}(\angle(BCA)) = a \ \&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to l(AB) = al(BC))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{aABC}(\mathrm{tg}(\angle(BCA)) = a \ \&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to$
$l(A) = \sqrt{1+a^2}l(BC))$

Выражние a и выражение $l(AC)$ не содержат неизвестных. Расстояния AB, BC в задаче не рассматриваются. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Котангенс.

$\forall_{aABC}(\mathrm{ctg}(\angle(BCA)) = a \ \&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to l(BC) = al(AB))$

Выражение a не содержит неизвестных; хотя бы одно из расстояний BC и AB уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

6. Выражение одной тригонометрической функции через другие.

Приемы этого раздела усматривают в посылках задачи на доказательство либо на исследование равенство, определяющее значение некоторой тригонометрической операции, и используют его для вычисления значения другой тригонометрической операции. Все они имеют заголовок "второйтерм". Хотя рассматриваемые приемы относятся, по существу, к элементарной алгебре, но для "обычных" алгебраических задач они оказались нетипичными и стали нужны лишь в геометрических задачах на вычисление.

(a) Выражение синуса через тангенс.

$\forall_{ab}(\mathrm{tg}\, a = b \to \sin a = |b|/\sqrt{1+b^2})$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a содержит неизвестные, b - не содержит. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

(b) Выражение косинуса через синус.

$\forall_{ab}(0 \le a \ \& \ 0 \le \pi - 2a \ \& \ \sin a = b \to \cos a = \sqrt{1-b^2})$

Аналогично предыдущему. Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "вывод" обеспечивает вывод сопровождающего по о.д.з. неравенства $0 \le 1 - b^2$.

$\forall_{ab}(\sin a = b \to (\cos a)^2 = 1 - b^2)$

Уровни срабатывания обоих приемов равны 1 и 4.

(c) Выражение косинуса половинного угла через косинус угла.
$\forall_{abc}(a = b/2 \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ \cos b = c \rightarrow \cos a = \sqrt{(1+c)/2})$
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормдробь". Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение a содержит неизвестные, выражение c - не содержит. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Выражение синуса двойного угла через синус угла.
$\forall_{ab}(0 \leq \pi - 2a \ \& \ \sin a = b \rightarrow \sin(2a) = 2b\sqrt{1-b^2})$
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

(e) Выражение косинуса двойного угла через синус угла.
$\forall_{ab}(\sin a = b \rightarrow \cos(2a) = 1 - 2b^2)$
Аналогично предыдущему.

(f) Выражение косинуса двойного угла через косинус угла.
$\forall_{ab}(\cos a = b \rightarrow \cos(2a) = 2b^2 - 1)$
Аналогично предыдущему.

7. Определение величины угла, для которого известно значение некоторой тригонометрической функции.

Общие тригонометрические приемы, разрешающие уравнение относительно неизвестного аргумента тригонометрической операции, выдают всю серию значений. По этой причине, пользоваться ими в геометрических задачах неудобно. Кроме того, они срабатывают в условиях задачи на описание, а не в посылках задачи на исследование. В данном разделе приводятся приемы с заголовком "второйтерм", определяющие конкретное значение аргумента и применяемые в задачах на исследование.

(a) Синус.
$\forall_{ax}(0 \leq x - \pi/2 \ \& \ 0 \leq \pi - x \rightarrow \sin x = a \leftrightarrow x = \pi - \arcsin a)$
$\forall_{ax}(0 \leq \pi/2 - x \ \& \ 0 \leq \pi/2 + x \rightarrow \sin x = a \leftrightarrow x = \arcsin a)$
$\forall_{ax}(0 \leq \pi/2 - x \ \& \ 0 \leq \pi + x \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \sin x = a \leftrightarrow x = \arcsin a)$
Посылки обрабатываются проверочными операторами. Выражение a не содержит неизвестных, а x содержит. Проверяется, что нет аналогичного уравнения с более короткой правой частью. Уровень срабатывания приемов равен 1.
$\forall_{ax}(0 \leq x \ \& \ 0 \leq \pi - x \ \& \ \sin x = a \rightarrow \min(x, \pi - x) = \arcsin a)$
$\forall_{ax}(0 \leq x \ \& \ 0 \leq \pi - x \ \& \ \sin x = a \rightarrow \max(x, \pi - x) = \pi - \arcsin a)$
Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, последний - идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит неизвестных, x - содержит. Уровни срабатывания равны 3, 5 и 7.

(b) Косинус.
$\forall_{ax}(0 \leq x \ \& \ 0 \leq \pi - x \rightarrow \cos x = a \leftrightarrow x = \arccos a \ \& \ 0 \leq 1 - a \ \& \ 0 \leq 1 + a)$
Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Тангенс.

$\forall_{ax}(0 \leq \pi/2 - x \ \& \ 0 \leq x \to \operatorname{tg} x = a \leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a \ \& \ 0 \leq a)$

$\forall_{ax}(0 \leq \pi + x \ \& \ x \leq 0 \ \& \ 0 \leq a \to \operatorname{tg} x = -a \leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} a)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Либо выражение x имеет тип "неизв", либо в задаче рассматривается прямоугольная система координат. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ax}(0 \leq x \ \& \ 0 \leq \pi - x \to \operatorname{tg} x = a \leftrightarrow x = (\operatorname{arctg} a \text{ при} 0 \leq a, \text{иначе} \pi + \operatorname{arctg} a))$

Созданы две версии приема. На уровне 2 срабатывает версия, в которой требуется, чтобы либо выражение x имело тип "неизв", либо имелся комментарий (неизв x). На уровне 9 срабатывает версия, в которой это ограничение снято.

(d) Котангенс.

$\forall_{ax}(0 \leq a \ \& \ 0 \leq \pi - a \to \operatorname{ctg} x = a \leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a)$

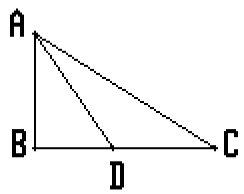
Если выражение x имеет тип "неизв", то прием срабатывает на уровне 2, иначе - на уровне 5.

8. Синус нулевого либо развернутого угла.

$\forall_{ABC}(A \in \text{прямая}(BC) \to \sin(\angle(ABC)) = 0)$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

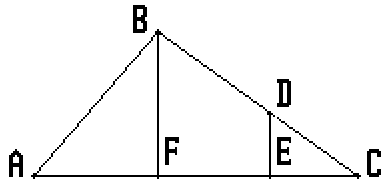
9. Разбор случаев по взаимному расположению точек, подготавливающий возможность применения тригонометрических соотношений.



$\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \ \& \ D \in \text{прямая}(BC) \ \& \ \text{актив}(\angle(ACD)) \to C \in \text{отрезок}(BD) \ \vee \ \neg(C \in \text{отрезок}(BD)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояния AB, CD и AD уже рассматриваются в задаче. Из контекста не усматривается взаимное расположение точек B, C, D. Уровень срабатывания равен 14.

10. Проведение перпендикуляра к стороне угла, подготавливающее возможность применения тригонометрических соотношений.



$\forall_{ABCDEFpq}(\text{актив}(\angle(BAC)) \ \& \ \text{актив}(l(AB)) \ \& \ D \in \text{прямая}(BC) \ \& \ ql(CD) = pl(BC) \ \& \ \text{прямая}(DE) \perp \text{прямая}(AC) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \to F - \text{точка} \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(BF) \perp \text{прямая}(AC) \ \& \ pl(BF) = ql(DE))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол BAC идентифицируется без учета направления лучей, причем выражение для него (или смежного с ним) не содержит неизвестных. Расстояние DE уже рассматривается в задаче; расстояние AB не известно. Прием проводит из точки B перпендикуляр BF к прямой AC, так как длину его можно сначала выразить через $l(DE), p, q$, а затем связать с длиной гипотенузы AB. Уровень срабатывания равен 5.

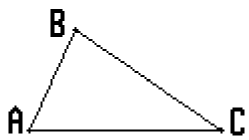
Ввод вспомогательных параметров и неизвестных

1. Ввод вспомогательной неизвестной для угла, определяемого из тригонометрического соотношения.

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \ \&\ a -$ число$)$

   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении выражения $\angle(ABC)$ в уравнении - посылке задачи на исследование. Проверяется, что все неизвестные встречаются в этом уравнении только внутри подтермов $\angle(ABC)$, причем число вхождений таких подтермов более одного и меньше 5. Проверяется также, что рассматриваемое уравнение имеет вхождение терма $\angle(ABC)$, расположенное под тригонометрической операцией. Указатель "вспомнеизвестная(x1)" определяет выбор в качестве a новой переменной и регистрацию ее как вспомогательной неизвестной. Если уже имелась другая вспомогательная неизвестная, прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 11. В ней число вхождений подтермов $\angle(ABC)$ сверху не ограничено.

2. Ввод вспомогательного параметра для длины отрезка, которой пропорциональны длины сторон треугольника с неизвестным углом.



   $\forall_{ABCDEabcd}($актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ &
   актив(прямая$(BC))$ & $al(AB) = bl(AC)$ & $l(AB) = cl(DE) \to l(DE) = d)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается пакетным синтезатором "пропорциональны", шестой - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". После того, как установлена пропорциональность расстояний AB и AC с известными коэффициентами a, b, шестой антецедент выделяет в выражении для расстояния AB сомножитель $l(DE)$. Проверяется, что остаточное произведение c не содержит символа "расстояние" и что выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Указатель "вспомпараметр" определяет выбор в качестве d новой переменной и регистрацию ее как вспомогательного параметра. Если уже имелся какой-либо вспомогательный параметр, то прием блокируется. Отбрасывается также вырожденный случай $a = b = 1$. Уровень срабатывания равен 8.

3. Ввод вспомогательной неизвестной для угла с целью получения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \ \& \ a -$ число$)$

   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения $\angle(ABC)$ в уравнении - посылке задачи на исследование. Проверяется, что это уравнение, помимо неизвестных подвыражений $\angle(ABC)$, содержит лишь единственную неизвестную x, и она является неизвестной внешней задачи на описание. Проверяется также, что имеется другое уравнение, содержащее лишь неизвестные подвыражения x, $\angle(ABC)$, причем последнее подвыражение встречается внутри тригонометрической операции. Уровень срабатывания равен 7.

4. Ввод вспомогательного параметра - величины угла, входящего в условие задачи на доказательство.

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a)$

   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения $\angle(ABC)$ в условии задачи на доказательство. Проверяется, что это выражение расположено внутри равенства, имеющего вхождение некоторого другого подтерма с заголовком "расстояние", "угол" либо "площадь". Уровень срабатывания равен 8.

5. Ввод вспомогательной неизвестной для угла типа "неизв".

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \ \& \ a -$ число$)$

   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении угла ABC в уравнении задачи на исследование. Выражение для данного угла содержит невырожденные числовые атомы и имеет тип "неизв". Количество вхождений терма $\angle(ABC)$ в уравнения задачи не менее 15. Уровень срабатывания равен 13.

Эквивалентные преобразования равенств, содержащих углы

Все приемы данного раздела имеют заголовок "второйтерм". Как и в случае расстояний, явное выражение угла через прочие параметры задачи может нарушить естественный ход решения и требует определенной осторожности. Поэтому приемы, получающие такое выражение путем решения имеющихся уравнений, снабжаются рядом ограничений.

1. Выражение угла через численные параметры.

   $\forall_{ABCab}(\angle(ABC) + a = b \leftrightarrow \angle(ABC) = b - a)$

   Прием применяется к посылке задачи на доказательство. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{abcABC}(\neg(a = 0) \rightarrow a\angle(ABC) + b = c \leftrightarrow \angle(ABC) = (c - b)/a)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов, причем либо b отлично от 0, либо a отлично от единицы. Существует еще одно уравнение задачи, содержащее единственный невырожденный числовой атом - терм $\angle(ABC)$. Таким образом, применение приема ведет к получению уравнения для численных параметров. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 6. В ней от дополнительного уравнения, содержащего угол ABC, требуется лишь, чтобы оно не имело вид равенства двух числовых атомов.

2. Подстановка явного выражения для угла, извлекаемого из посылки.

   $\forall_{abcABC}(\neg(a = 0)\ \&\ a\angle(ABC) + b = c \rightarrow \angle(ABC) = (c - b)/a)$

   Прием применяется к подвыражению уравнения задачи на исследование. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с другим уравнением. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Проверяется, что текущее уравнение не имеет невырожденных числовых атомов, отличных от угла ABC и что вхождение этого угла единственное. Уровень срабатывания равен 9.

   $\forall_{abcdABC}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ a(b + c\angle(ABC)) = d \rightarrow \angle(ABC) = (d - ab)/(ac))$

   Заменяемое выражение входит в уравнение задачи на исследование. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, третий - идентифицируется с другим уравнением. Выражения a, b, c, d не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 10.

3. Извлечение явного выражения для угла из равенства для суммы этого угла с некоторой величиной.

   $\forall_{ABCab}(\angle(ABC) + a = b \leftrightarrow \angle(ABC) = b - a)$

   Прием применяется к исходной посылке задачи на исследование. Выражение a не содержит подтерма $\angle(ABC)$; выражение b не является числовым атомом. Уровень срабатывания равен 2. На этой же теореме создан ряд других приемов, в которых не предполагается, что преобразуемая посылка является исходной:

   (a) Существует другое содержащее угол ABC уравнение, не являющееся равенством двух числовых атомов. Каждый входящий в выражения a, b невырожденный числовой атом встречается в некотором другом уравнении, не являющемся равенством двух числовых атомов. Выражение b не является невырожденным числовым атомом. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Существует другое содержащее угол ABC уравнение, не имеющее вида $\angle(ABC) = \ldots$. Выражение b не является невырожденным числовым атомом. Уровень срабатывания равен 5.

   (c) Аналогично предыдущему, но условие на другое уравнение немного ослаблено: оно не должно иметь вида равенства двух числовых атомов. Уровень срабатывания равен 7.

4. Группировка пропорциональных углов в противоположных частях равенства.

   $\forall_{abABCDEF}(a\angle(ABC) - b\angle(DEF) = 0 \leftrightarrow a\angle(ABC) = b\angle(DEF))$

   Прием применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 0.

5. Деление двух уравнений для исключения косинуса угла.

   $\forall_{abcdABC}(\neg(a = 0)\ \&\ a\cos(\angle(ABC)) = b \rightarrow c\cos(\angle(ABC)) = d \leftrightarrow ad - bc = 0)$

Прием применяется к подутверждению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент идентифицируется с другой посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Хотя бы одно из них имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 4.

6. Устранение дроби, содержащей угол.

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \rightarrow a/b = c \leftrightarrow a = bc)$

   Прием применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, c содержат равные углы. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcABC}(\neg(b = 0) \rightarrow a\angle(ABC)/b = c \leftrightarrow a\angle(ABC) = bc)$

   Выражение c не является невырожденным числовым атомом, выражение b не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 6.

7. Выражение одного угла через другой.

   $\forall_{abABCDEF}(\neg(a = 0) \rightarrow a\angle(ABC) = b\angle(DEF) \leftrightarrow \angle(ABC) = b\angle(DEF)/a)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование. Каждое из выражений a, b либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Существует другое уравнение задачи, содержащее оба угла и не имеющее других невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 11.

8. Раскрывание скобок для приведения подобных членов с углами.

   $\forall_{abcABC}(c(a\angle(ABC) + b) = ac\angle(ABC) + bc)$

   Преобразуемое выражение входит в уравнение - посылку задачи на доказательство либо на исследование. Оно не является числителем либо знаменателем дроби. Выражение c не содержит невырожденных числовых атомов. Текущее уравнение имеет вхождение угла ABC вне преобразуемого терма. Прием блокируется, если преобразуемое выражение является одной из частей равенства, причем либо другая часть равна 0, либо c не содержит неизвестных. Заменяющий терм обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 2.

Линейная комбинация двух уравнений для определения котангенса угла

$\forall_{abcABC}(p = am \;\&\; q = an \;\&\; p\cos(\angle(ABC)) + d = e \;\&\; q\sin(\angle(ABC)) + b = c \;\&\; \neg(q = 0) \;\&\; \neg(\sin(\angle(ABC)) = 0) \rightarrow m\,\mathrm{ctg}(\angle(ABC)) = n(e - d)/(c - b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, первые два - выделены указателем "идентификатор". Они определяют общий множитель a коэффициентов p, q. Какие-либо нормализаторы при этом не используются. Выражения b, c, d, e, m, n не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 11.

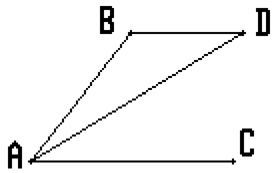
Усмотрение противоречивых условий на величину угла

1. Отрицательная величина угла.

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \;\&\; a < 0 \rightarrow \text{ложь})$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль", второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение a константное и содержит символ "минус". Уровень срабатывания равен 0.

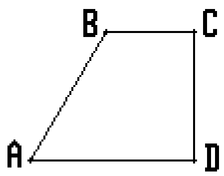
2. Взаимное расположение точек относительно прямой противоречит известным величинам двух углов.



$\forall_{ABCDab}(\angle(BAC) = a \ \& \ \angle(DAC) = b \ \& \ \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ 0 < b - a \ \& \ \text{одностороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \to \text{ложь})$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Третий антецедент выделен указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

3. Угол при меньшем основании прямоугольной трапеции оказался острым.



$\forall_{ABCDabc}(\angle(ABC) = a \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ l(BC) = b \ \& \ l(AD) = c \ \& \ 0 \leq c - b \ \& \ 0 < \pi/2 - a \ \& \ \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \to \text{ложь})$

Второй антецедент, выделенный указателем "равно", идентифицируется с посылкой (либо с двумя посылками) задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Третий антецедент выделен указателем "усм". Первый, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор"; их левые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Результирующие выражения a, b, c не содержат неизвестных. Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

4. Косинус острого угла оказался отрицателен.

$\forall_{ab}(\cos a = b \ \& \ b < 0 \ \& \ 0 \leq \pi/2 - a \ \& \ 0 \leq a \to \text{ложь})$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение b константное и содержит символ "минус". При обработке двух последних антецедентов используются сильные ограничители трудоемкости. Уровень срабатывания равен 0.

5. Косинус двойного угла, лежащего в основании равнобедренного треугольника, оказался отрицателен.

   $\forall_{ABCa}(\angle(BAC) = a \ \& \ \angle(BCA) = a \ \&$ разныеточки$(A, C) \rightarrow \cos(2a) < 0 \leftrightarrow$ ложь$)$

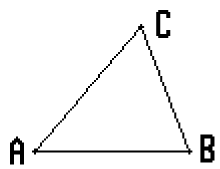
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль", третий - обрабатывается проверочным оператором. Обозначения точек A, C различны. Уровень срабатывания равен 2.

6. Стороны угла лежат на общей прямой, а величина угла отлична от 0 и от пи.

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < \pi - a \rightarrow \neg(A \in$ прямая$(BC)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражение a константное. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 2.

7. Сумма двух углов треугольника оказалась большей пи.

   $\forall_{ABCa}(\angle(BAC) = a \ \& \ 0 < \angle(ABC) - \pi + a \rightarrow$ ложь$)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль", второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит неизвестных. Угол ABC встречается в некотором неравенстве - посылке задачи. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

8. Нулевой угол между диагональю и стороной трапеции.

   $\forall_{ABCD}($Трапеция$(ABCD) \ \& \ \angle(ADB) = 0 \rightarrow$ ложь$)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль", причем точка привязки выбрана во втором из них. Вершины трапеции могут идентифицироваться в противоположном порядке. Уровень срабатывания равен 0.

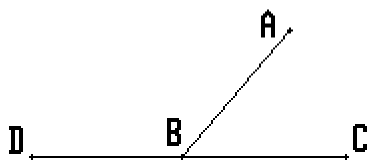
Отбрасывание вырожденного угла

При разборе случаев часто возникает ситуация, когда в противоречивом контексте рассматриваются обозначения вырожденных углов. Чтобы ускорить усмотрение противоречия, равенства для таких углов отбрасываются:

$\forall_{ABc}(\angle(AAB) = c)$

Прием имеет заголовок "второйтерм", причем указатель "эквивалентно" определяет замену всего равенства на константу "истина". Это равенство должно входить в посылку задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Уровень срабатывания равен 0.

Разбор случаев для взаимного расположения на прямой точек, от которого зависит, равны ли углы или дополняют друг друга до развернутого

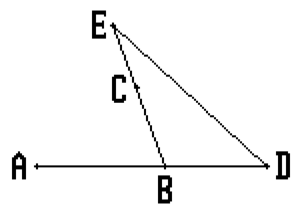


$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABD)$) & актив($\angle(ABC)$) & $D \in$ прямая(BC) $\rightarrow$
$B \in$ отрезок(DC) & $\angle(ABD) + \angle(ABC) = \pi \ \vee \ \neg(B \in$ отрезок(DC)) &
$\angle(ABD) = \angle(ABC)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Угол ABC известен, а выражение для угла ABD имеет тип "неизв". Не усматривается взаимное расположение точек B, C, D. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

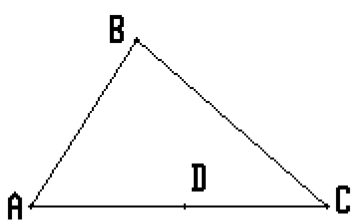
$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABD)$) & $D \in$ прямая(BC) $\rightarrow B \in$ отрезок(DC) &
$\angle(ABD) + \angle(ABC) = \pi \ \vee \ \neg(B \in$ отрезок(DC)) & $\angle(ABD) = \angle(ABC)$))

Аналогично предыдущему, но относительно угла ABC предполагается лишь, что он имеет тип "определимо". Этот угол может не встречаться в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 12.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & $B \in$ отрезок(AD) & $E \in$ прямая(BC) &
актив(прямая(DE)) & разныеточки(B, E) $\rightarrow B \in$ отрезок(CE) &
$\angle(DBE) = \angle(ABC) \ \vee \ \neg(B \in$ отрезок(CE)) & $\angle(DBE) + \angle(ABC) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол ABC известен. Расстояния BD и BE уже рассматриваются в задаче, причем одно из них известно, а выражение для другого - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABC)$) & $D \in$ прямая(AC) $\to$ точкалуча(A, C, D) & $\angle(BAC) = \angle(BAD)$ $\vee$ $A \in$ отрезок(CD) & $\angle(BAC) = \pi - \angle(BAD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Угол ABC и расстояние AB известны. Угол BAD имеет тип "определимо". Расстояние BC не известно, и выражение для него имеет тип "существатом". Не усматривается взаимное расположение точек A, C, D. Уровень срабатывания приема равен 10.

Разбор случаев для рассмотрения развернутого либо нулевого угла

$\forall_{ABC}$($A \in$ прямая(BC) & актив($\angle(BAC)$) $\to$ $A \in$ отрезок(BC) & $\angle(BAC) = \pi$ $\vee$ $\neg$($A \in$ интервал(BC)) & $\angle(BAC) = 0$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "усм". Не усматривается взаимное расположение точек A, B, C. Уровень срабатывания равен 6.

Минимум величин угла и смежного с ним угла

В некоторых задачах удобно бывает игнорировать различие между углом и смежным с ним углом, рассматривая вместо этих углов их минимум. По нему однозначно определяется значение синуса каждого из углов. Для обозначения минимума угла a и смежного с ним угла служит выражение "минугол(a)". Перечислим несколько простых приемов, позволяющих исключать данное выражение.

1. Нормализация аргумента.

   $\forall_a$(минугол($\pi - a$) = минугол(a))

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Косинус.

   $\forall_a$($\cos$(минугол(a)) = $|\cos a|$)

   $\forall_a$($\cos$(2минугол(a)) = $\cos(2a)$)

   Уровень срабатывания равен 0.

3. Синус.

   $\forall_a$($\sin$(минугол(a)) = $\sin a$)

   Уровень срабатывания равен 0.

4. Синус двойного угла.

   $\forall_a$($\sin$(2минугол) = $|\sin(2a)|$)

   Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор общей стандартизации "нормугол"

Этот нормализатор, как и нормализатор "нормрасстояние", используется чрезвычайно часто. Поэтому количество его приемов сведено к минимуму. Большинство из них срабатывает только при наличии дополнительного комментария, усиливающего обращение.

1. Перестановка операндов.

   $\forall_{ABC}(\angle(CAB) = \angle(BAC))$

   Прием применяется, если символ B лексикографически предшествует символу C. Указатель "коммутативно" отменяет попытку перестановки операндов B, C при идентификации. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема в процессе компиляции. Уровень срабатывания равен 1.

2. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет заголовок "угол". Указатель "коммутативно" блокирует попытку перестановки операндов равенства при идентификации. Уровень срабатывания равен 1.

3. Усмотрение альтернативного обозначения угла.

   $\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(BAC))$ & точкалуча(A, D, B) & точкалуча$(A, E, C) \to$ $\angle(DAE) = \angle(BAC))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". В начале попытки применения приема проверяется, что задача не имеет посылки "актив$(\angle(DAE))$". Введен ускоряющий указатель "коммутативно", блокирующий попытки перестановки операндов D, E при идентификации угла DAE. Имеется также указатель "развязка". Уровень срабатывания приема равен 1.

4. Усмотрение величины данного либо смежного угла.

   $\forall_{aABCDE}$(актив$(\angle(BAC))$ & $B \in$ прямая(AD) & $C \in$ прямая(AE) & $\angle(BAC) = a \to \angle(DAE) = a)$

   Прием применяется при наличии комментария "угол", разрешающего получать выражение для данного либо смежного углов (безразлично, какого именно). Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками, причем указатель "нормугол" разрешает при идентификации не уточнять размещение точек B, C на прямых - сторонах угла. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "развязка" отсутствует. Выражение a не имеет своим заголовком символ "угол". Указатель "коммутативно" блокирует попытку перестановки операндов D, E при идентификации угла DAE. Уровень срабатывания равен 1.

5. Усмотрение прямого угла.

   $\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \to \angle(BAC) = \pi/2)$

   Антецедент выделен указателем "усм". Прием применяется при наличии комментария "величина". Уровень срабатывания равен 2.

6. Усмотрение развернутого угла.

   $\forall_{ABC}(A \in$ отрезок$(BC) \to \angle(BAC) = \pi)$

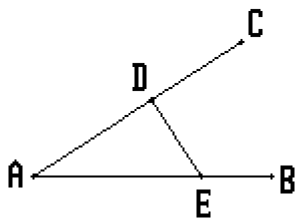
   Аналогично предыдущему.

7. Использование линейного уравнения.

   $\forall_{abABC}(\neg(a = 0)\ \&\ a\angle(ABC) = b \to \angle(ABC) = b/a)$

   Прием применяется при наличии комментария "умножение". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

8. Равенство острых углов, стороны которых расположены вдоль одних и тех же прямых.

   $\forall_{ABCDEp}(\angle(CAB) = p\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(DE)\ \&\ 0 < \pi/2 - p \to \angle(DAE) = p)$

   Прием применяется при наличии комментария "прямыеуглы". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение p не содержит неизвестных текущей задачи. Идентифицирующие операторы не усматривают размещение точек D, E на тех же либо противоположных лучах, что и точки B, C. Уровень срабатывания равен 2.

9. Угол равен нулю.

   $\forall_{AB}(\angle(BAB) = 0)$

   Прием срабатывает при наличии комментария "величина". Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор "величинаугла"

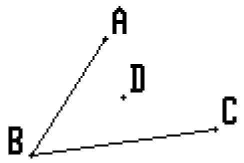
Нормализатор предпринимает попытку найти величину угла, выражая его через другие известные углы с той же вершиной. Чтобы определить величину угла, прием нормализатора представляет его в виде суммы либо разности двух углов. Один из них известен, а величина другого определяется рекурсивным обращением к тому же самому нормализатору. Таким образом, прием нормализатора срабатывает лишь один раз, непосредственно определяя искомую величину. Фактически, он реализует обратный вывод и в этом отношении напоминает пакетные синтезаторы.

1. Непосредственное усмотрение величины угла.

   $\forall_{aABC}(\angle(ABC) = a \to \angle(ABC) = a)$

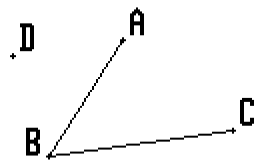
   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть последовательно обрабатывается нормализаторами "нормугол" и "значугол". Второй нормализатор, описываемый ниже, содержит несколько простых приемов вычисления величины угла из других соображений. Он будет применяться лишь при наличии комментария "значугол". После применения нормализаторов должно получаться выражение a, не содержащее неизвестных. Если имеется комментарий (разныестороны ...), то прием блокируется. Уровень срабатывания приема равен 1.

Наличие комментария (разныестороны P Q) при определении угла ABC означает, что реализуется рекурсивное обращение к нормализатору, где углы становятся ориентированными. Ориентация определяется первым шагом при алгебраическом суммировании цепочки углов. Точка P лежит на луче BA, а точка Q - где-то вне прямой BA. Если точка C окажется с точкой Q по разные стороны от прямой BA, то угол нужно брать со знаком "плюс", иначе - со знаком "минус". При непосредственном усмотрении величины ориентированного угла ABC необходимо еще доопределить знак угла. Это делают следующие приемы.



$\forall_{ABCDEa}$(однасторона$(D, C,$ прямая$(AB))$ & $\angle(ABC) = a$ &
точкалуча$(B, A, E) \rightarrow \angle(ABC) = -a)$

Указатель "контекст(...)" идентифицирует комментарий (разныестороны E D). Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, последний - выделен указателем "усм". Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", вычисляет величину угла a с помощью нормализаторов "нормугол", "значугол". Проверяется, что a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

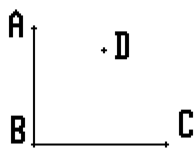


$\forall_{ABCDEa}$(разныестороны$(D, C,$ прямая$(AB))$ & $\angle(ABC) = a$ &
точкалуча$(B, A, E) \rightarrow \angle(ABC) = a)$

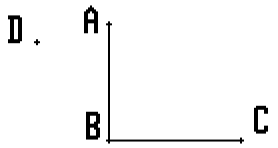
Аналогично предыдущему.

2. Угол между перпендикулярными прямыми.

   Если усматривается перпендикулярность сторон угла, то применяются следующие два приема, аналогичных приемам предыдущего раздела:



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & однасторона$(D, C,$ прямая$(AB))$ & точкалуча$(B, A, E) \to \angle(ABC) = -\pi/2)$

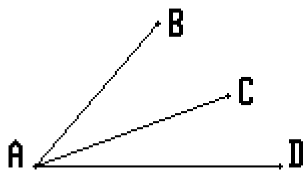


$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & разныестороны$(D, C,$ прямая$(AB))$ & точкалуча$(B, A, E) \to \angle(ABC) = \pi/2)$

Указатель "контекст(...)" инициирует применение приема с усмотрения комментария (разныестороны D E). Первый и третий антецеденты выделены указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Суммирование углов с общей стороной.

Переходим к рассмотрению суммирования углов. Начнем с приемов, инициализирующих суммирование. В этой ситуации комментарий (разныестороны ...) отсутствует, и прием прежде всего устанавливает данный факт.



$\forall_{abdABCD}$(актив$(\angle(BAC))$ & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & $d = |a + b|$ & $0 \leq \pi - d \to \angle(BAD) = d)$

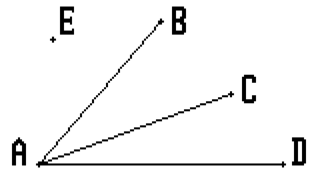
Первый антецедент выделен указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "нормугол". Результирующее выражение a не содержит неизвестных. Третий антецедент реализует рекурсивное обращение к нормализатору "величинаугла", причем вводится комментарий (разныестороны C B). Результат b будет иметь знак "минус", если точки B, D лежат по одну сторону от луча AC и знак "плюс" в противном случае. Проверяется, что выражение b не содержит неизвестных. Четвертый антецедент вычисляет модуль суммы a и b, используя нормализаторы общей стандартизации. После проверки того, что этот модуль не превосходит π, реализуется замена. Уровень срабатывания равен 2. Для случаев, когда $d > \pi$, созданы еще два аналогичных приема, имеющих тот же уровень срабатывания:

$\forall_{abdABCD}$(актив$(\angle(BAC))$ & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & $d = |a + b|$ & $0 \leq d - \pi$ & $0 \leq 2\pi - d \to \angle(BAD) = 2\pi - d)$

$\forall_{abdABCD}$(актив$(\angle(BAC))$ & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & $d = |a + b|$ & $0 \leq d - 2\pi$ & $0 \leq 3\pi - d \to \angle(BAD) = d - 2\pi)$

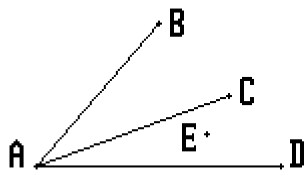
Если для определения угла нужно несколько раз обойти вокруг вершины A, то алгебраическая сумма углов может оказаться большей, чем допустимо в данных приемах. Однако, эти случаи в "обычных" задачах не встречались, и обработка их пока не предусмотрена.

Переходим к приемам суммирования углов, продолжающим уже начатую цепочку. Они срабатывают при наличии комментария (разныестороны $F\ E$), фиксирующего ориентацию углов.



$\forall_{ABCDEF}$(актив($\angle(BAC)$) & разныестороны($E, C,$ прямая(AB)) &
$\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & точкалуча$(A, B, F) \to \angle(BAD) = a + b$)

Первый и пятый антецеденты выделены указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть третьего антецедента обрабатывается нормализатором "нормугол"; результат a не содержит неизвестных. Четвертый антецедент реализует рекурсивное обращение к нормализатору "величинаугла". При обращении старый комментарий (разныестороны ...) заменяется на комментарий (разныестороны $C\ B$). Кроме того, вводится комментарий "точка C", блокирующий повторное прохождение через луч AC. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEF}$(актив($\angle(BAC)$) & однасторона($E, C,$ прямая(AB)) &
$\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & точкалуча$(A, B, F) \to \angle(BAD) = -(a + b)$)

Аналогично предыдущему.

Обращение к нормализатору "величинаугла"

Кроме вспомогательных обращений к нормализатору "величинаугла" при обработке антецедентов различных приемов, созданы два приема вывода, использующих его для непосредственного нахождения угла.

$\forall_{ABCDEab}(\angle(ABC) = a$ & актив($\angle(DBE)$) & $\angle(DBE) = b \to \angle(DBE) = b)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, причем точка привязки выбрана в первом из них. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "величинаугла". Выражения a, b не содержат неизвестных; выражение для угла DBE имеет тип "Неизв". Отсутствует посылка вида $\angle(DBE) = d$, где выражение d не содержит неизвестных, однако существуют посылки $\angle(DBP) = p$, $\angle(EBQ) = q$, где p, q известны. Вес второго антецедента не менее 5. Если в задаче рассматривается прямоугольная система координат, то прием блокируется. Для блокировки повторных попыток используется комментарий "величинаугла". Введен средний ограничитель трудоемкости. Указатель "развязка" отменяет преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCd}(\text{актив}(\angle(ABC))\ \&\ d = \angle(ABC) \to \angle(ABC) = d)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует обращение к нормализатору "величинаугла". Выражение для угла ABC имеет тип "Неизв". Отсутствует посылка вида $\angle(ABC) = d$, где d известно, однако имеется посылка вида $\angle(PBQ) = m$ с известным m. В остальном аналогично предыдущему приему. Уровень срабатывания равен 5.

Синтезатор "вычислениеугла"

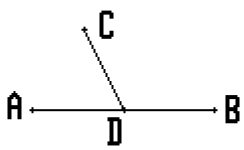
Этот синтезатор, как и синтезатор "вычислениедлины", находит конъюнкцию соотношений, позволяющих вычислить величину заданного угла. Обращение к нему из теоремы приема имеет вид "вычислениеугла($\angle(ABC)$, x)", где x - переменная для результирующей конъюнкции. Применение синтезатором обратного вывода часто сильно ускоряет определение нужных углов. Однако, чрезмерное усиление обратного вывода приводит к тому, что решатель начинает быстро находить длинные цепочки вычислений, дающие неприемлемо громоздкий ответ. В то же время, продолжение прямого вывода позволило бы выявить дополнительные особенности задачи и получить простой ответ. Исходя из этого, список приемов синтезатора приходится ограничивать.

1. Известный угол.

   $\forall_a(\text{вычислениеугла}(a, \text{истина}))$

   Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

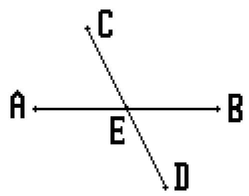
2. Смежные углы.

   $\forall_{ABCD}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ \text{вычислениеугла}(\angle(CDB), a) \to$
   $\text{вычислениеугла}(\angle(ADC), \angle(ADC) = \pi - \angle(CDB)\ \&\ a))$

   Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Для блокировки зацикливания здесь и в последующих приемах используются комментарии (вычислениеугла $\angle(ADC)$), (вычислениеугла $\angle(CDB)$). Уровень срабатывания равен 4.

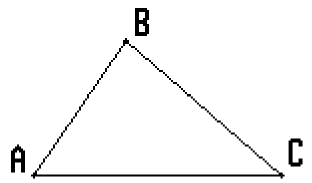
3. Вертикальные углы.



$\forall_{ABCDE}(E \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ E \in \text{отрезок}(CD)\ \&\ \text{вычислениеугла}(\angle(AEC), a) \rightarrow$ $\text{вычислениеугла}(\angle(BED), a\ \&\ \angle(BED) = \angle(AEC)))$

Первые два антецеденты выделены указателем "усм", третий - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 3.

4. Теорема синусов.



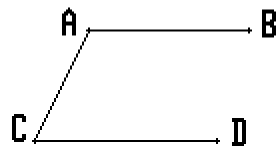
$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{вычислениеугла}(\angle(BCA), p) \rightarrow$ $\text{вычислениеугла}(\angle(BAC), p\ \&\ l(AB)\sin(\angle(BAC)) = l(BC)\sin(\angle(BCA))))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм". Третий антецедент реализует рекурсивное обращение. Выражения для расстояний AB, BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCp}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{вычислениеугла}(\angle(ABC), p) \rightarrow$ $\text{вычислениеугла}(\angle(BAC), p\ \&\ l(AC)\sin(\angle(BAC)) = l(BC)\sin(\angle(ABC))\ \&$ $l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2 - 2l(AB)l(BC)\cos(\angle(ABC))))$

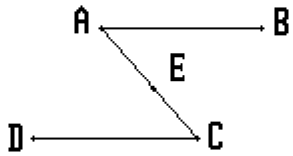
Аналогично предыдущему, причем известны расстояния AB, BC, а для нахождения расстояния AC использована теорема косинусов. Уровень срабатывания равен 5.

5. Углы при параллельных прямых и секущей.



$\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(AC))\ \&$ $\text{вычислениеугла}(\angle(ACD), p) \rightarrow \text{вычислениеугла}(\angle(CAB), p\ \&$ $\angle(CAB) + \angle(ACD) = \pi))$

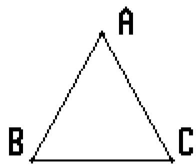
Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ & $C \in$ прямая(AE) & точкалуча(A, E, C) & вычислениеугла$(\angle(ACD), p) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BAE), p$ & $\angle(CAB) = \angle(ACD)))$

Первый, третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

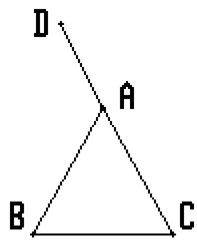
6. Угол при вершине равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(AC)$ & вычислениеугла$(\angle(ABC), p)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BAC), p$ & $\angle(BAC) + 2\angle(ABC) = \pi))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая и правая части обрабатываются нормализатором общей стандартизации. Второй антецедент реализует рекурсивное обращение; два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

7. Угол, смежный с углом при вершине равнобедренного треугольника.

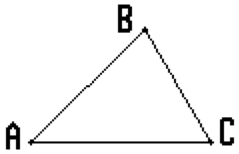


$\forall_{ABCD}(A \in$ отрезок(DC) & $l(AB) = l(AC)$ & вычислениеугла$(\angle(ABC), p)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(DAB), p$ & $\angle(DAB) = 2\angle(ABC)))$

$\forall_{ABCD}(A \in$ отрезок(DC) & $l(AB) = l(AC)$ & вычислениеугла$(\angle(ACB), p)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(DAB), p$ & $\angle(DAB) = 2\angle(ACB)))$

Первый и два последних антецедента выделены указателем "усм". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор"; обе его части обрабатываются нормализатором общей стандартизации. Третий антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Проверка различия точек B, C опущена: так как угол ABC либо ACB удается вычислить данным синтезатором, то он введен корректным образом. Уровень срабатывания равен 2.

8. Теорема косинусов.



$\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ $\rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BAC)$,
$\angle(BAC) = \arccos((l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)/(2l(AB)l(AC)))))$

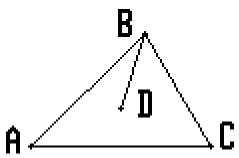
Антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AC, BC, AB не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & $\angle(ACB) = a$ & разныеточки(A, B) &
$d = l(AC)^2 + l(BC)^2 - 2l(AC)l(BC)\cos a \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BAC)$,
$(l(AC) - l(BC)\cos a)/\sqrt{d} = \cos(\angle(BAC))$ & $\neg(d = 0)))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - идентифицируется с посылкой. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором, последний - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Выражение a, а также выражения для расстояний AC и BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCp}$(актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & вычислениеугла$(\angle(ABC), p) \rightarrow$
вычислениеугла$(\angle(BAC), p$ & $l(AB) = l(AC)\cos(\angle(BAC)) + l(BC)\cos(\angle(ABC))$
& $l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2 - 2l(AB)l(BC)\cos(\angle(ABC))))$

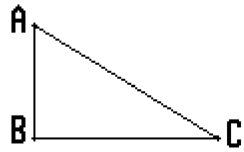
Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - реализует рекурсивное обращение. Выражения для расстояний AB, BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ &
вычислениеугла$(\angle(ABD),\ p)$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \rightarrow$
вычислениеугла$(\angle(DBC), p$ & $\angle(DBC) = |\angle(ABC) - \angle(ABD)|$ &
$\angle(ABC) = \arccos((l(AB)^2 + l(BC)^2 - l(AC)^2)/(2l(AB)l(BC)))))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - реализует рекурсивное обращение. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения для расстояний AB, AC, BC не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 6.

9. Прямоугольный треугольник.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & $pl(AB) = ql(BC) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BAC), \angle(BAC) = \mathrm{arctg}(p/q)))$

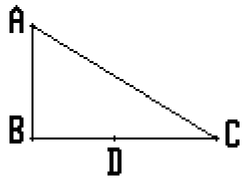
Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается синтезатором "пропорциональны". Выражения p, q не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(AB))$ & вычислениедлины$(l(BC), a) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BCA), \angle(BCA) = \mathrm{arctg}(l(AB)/l(BC))$ & $a))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - реализует обращение к синтезатору. Выражение для расстояния AB не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(BC))$ & вычислениедлины$(l(AB), a) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BCA), \angle(BCA) = \mathrm{arctg}(l(AB)/l(BC))$ & $a))$

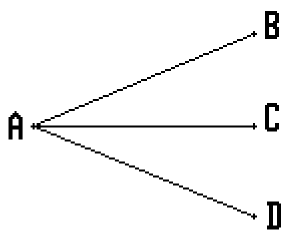
Аналогично предыдущему, но расстояние BC известно, а соотношения для вычисления расстояния AB находятся синтезатором.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(BC) & актив$(l(CD))$ & вычислениеугла$(\angle(ACD), a) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BCA), \cos(\angle(BCA)) = |\cos(\angle(ACD))|$ & $a))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - реализует рекурсивное обращение. Выражение для расстояния CD не содержит неизвестных; расстояние BC не известно. Не усматривается взаимное расположение точек B, C, D. Уровень срабатывания равен 4.

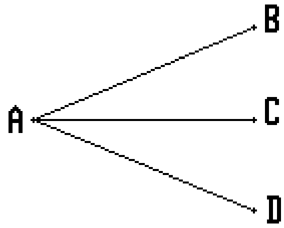
10. Определение косинуса угла через косинусы двух составляющих углов.



$\forall_{ABCDab}$(актив(прямая(AC)) & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ & вычислениеугла$(\angle(BAC), a)$ & вычислениеугла$(\angle(CAD), b) \rightarrow$ вычислениеугла$(\angle(BAD), \cos(\angle(BAD)) = \cos(\angle(BAC) + \angle(CAD))$ & a & $b))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий и четвертый антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

11. Представление угла в виде разности двух углов с общей вершиной.

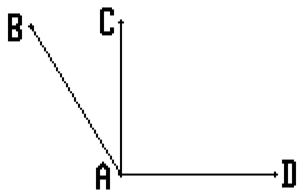


$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(DAB)$) & актив($\angle(CAD)$) & разныестороны($B, D,$ прямая(AC)) & односторона($B, C,$ прямая(AD)) $\to$ вычислениеугла($\angle(BAC), \angle(BAC) = \angle(DAB) - \angle(CAD)$))

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Углы DAB, CAD известны. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(DAB)$) & актив($\angle(CAD)$) & односторона($B, C,$ прямая(AD)) $\to$ вычислениеугла($\angle(BAC), \angle(BAC) = |\angle(DAB) - \angle(CAD)|$))

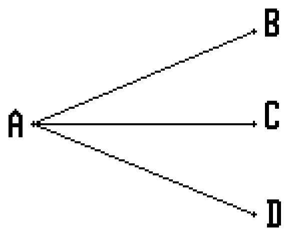
Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(DAB)$) & прямая$(AC) \perp$ прямая(AD) & односторона($B, C,$ прямая(AD)) $\to$ вычислениеугла($\angle(BAC), \angle(BAC) = |\angle(DAB) - \pi/2|$))

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Угол DAB известен. Введен сильный органичитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

12. Представление угла в виде суммы двух углов с общей вершиной.



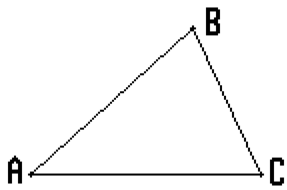
$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(CAD)$) & разныестороны($B, D,$ прямая(AC)) & $0 \leq \pi - \angle(BAC) - \angle(CAD) \to$ вычислениеугла($\angle(BAD), \angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD)$))

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочным оператором. Углы BAC, CAD известны. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}(\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & разныестороны($B, D,$ прямая(AC)) & $0 \leq \pi - a - b \to$ вычислениеугла($\angle(BAD), \angle(BAD) = a + b$))

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормугол", а также нормализатором "значугол", которому передается комментарий "усиление". Последний нормализатор будет описан ниже; он имеет несколько приемов для быстрого вычисления угла. Выражения a, b не содержат неизвестных. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

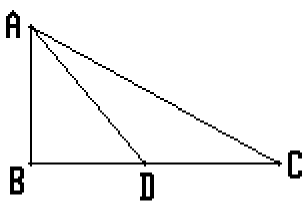
13. Сумма углов треугольника.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(BAC)$) $\to$ вычислениеугла($\angle(ACB)$, $\angle(ACB) = \pi - \angle(ABC) - \angle(BAC)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Углы ABC, BAC известны. Уровень срабатывания равен 4.

14. Отрезок, проведенный из острого угла прямоугольного треугольника к его катету.



$\forall_{ABCDab}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(BC) & $al(BD) = bl(CD)$ & вычислениеугла($\angle(ACB), c$) $\to$ вычислениеугла($\angle(ADB), c$ & $b\,\mathrm{tg}(\angle(ADB)) = (a+b)\,\mathrm{tg}(\angle(ACB))$)))

Первые два антецедента выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются пакетными синтезаторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

Обращение к синтезатору "вычислениеугла"

Кроме вспомогательных обращений к синтезатору "величинаугла" из различных приемов, созданы три приема вывода, использующие его для непосредственного нахождения угла.

$\forall_{ABCp}$(актив($\angle(ABC)$) & вычислениеугла($\angle(ABC), p$) $\to p$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обращается к синтезатору. Выражение для угла ABC имеет тип "неизв", причем существуют равенства в посылках, определяющие значения каких-либо углов. Если имеется посылка вида $\sin(\angle(ABC)) = b$, где b не содержит неизвестных, то прием блокируется. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCp}$(актив(S(фигура(ABC))) & вычислениеугла($\angle(ABC), p$) $\to p$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй обрабатывается синтезатором. Угол ABC не известен, причем выражение для площади треугольника имеет тип "Неизв". Прием срабатывает только в режиме усилителя. Имеется слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 8.

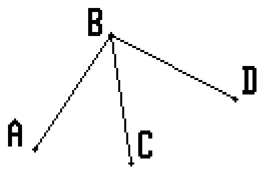
$\forall_{ABCp}$(актив($l(AB)$) & $l(AC) = l(BC)$ & вычислениеугла($\angle(ACB), p$) $\to p$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Последний антецедент обращается к синтезатору. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв", расстояние AC известно. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 12.

Синтезатор "дополнительныйугол"

Синтезатор аналогичен нормализатору "величинаугла". Он составляет из уже введенных в рассмотрение углов дополнение заданного угла до полного. Обращение к синтезатору имеет вид "дополнительныйугол($\angle(ABC)$, a)", где $\angle(ABC)$ - исходный угол, a - результирующее выражение для дополнительного угла.

1. Первый шаг отсчета углов.

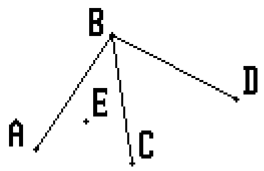


$\forall_{ABCDa}$(актив($\angle(CBD)$) & разныестороны(A, D, прямая(BC)) & дополнительныйугол($\angle(ABD), a$) $\to$ дополнительныйугол($\angle(ABC)$, $a + \angle(CBD)$))

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором, третий - реализует рекурсивное обращение. Чтобы задать ориентацию отсчета углов, при рекурсивном обращении вводятся комментарии (точка A C) и (точка D C). Первый из них означает, что точка C находится по отношению к лучу BA в той полуплоскости, которая уже "пройдена" при составлении дополнительного угла. Второй аналогичным образом характеризует точку C по отношению к лучу BD. Вводятся также комментарии (прямая

A), (прямая C), (прямая D), блокирующие повторное рассмотрение лучей BA, BC, BD на промежуточных шагах. Проверяется, что на момент применения данного приема комментарии (точка ...) отсутствуют. Уровень срабатывания равен 1.

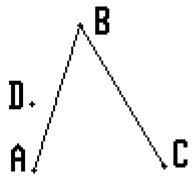
2. Промежуточный шаг отсчета углов.



$\forall_{ABCDEa}$(актив($\angle(CBD)$) & разныестороны($E, D,$ прямая(BC)) & дополнительныйугол($\angle(ABD), a$) $\rightarrow$ дополнительныйугол($\angle(ABC)$, $a + \angle(CBD)$))

Указатель "контекст" идентифицирует комментарий (точка b E). Проверяется, что точка b лежит на луче BC. Второй антецедент, обрабатываемый проверочным оператором, убеждается, что точка D лежит по отношению к лучу BC в еще не "пройденной"полуплоскости. Третий антецедент реализует рекурсивное обращение, котрому передаются дополнительные комментарии (точка D C) и (прямая D). Уровень срабатывания равен 2.

3. Завершение цикла отсчета углов.

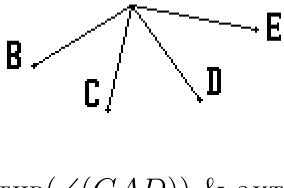


$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABC)$) & разныестороны($C, D,$ прямая(AB)) $\rightarrow$ дополнительныйугол($\angle(ABC), \angle(ABC)$))

Как и в предыдущем случае, идентифицируется комментарий (точка a D), где точка a лежит на луче BA. После проверки того, что точки C, D лежат по разные стороны от прямой AB, констатируется тот факт, что угол ABC целиком заполняет оставшуюся часть плоскости. Уровень срабатывания равен 1.

Обращение к синтезатору "дополнительныйугол"

Синтезатор "дополнительныйугол" используется пока в единственном приеме:



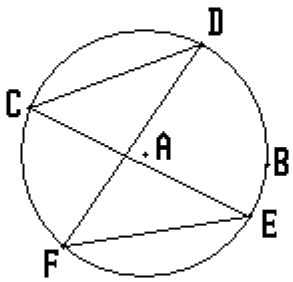
$\forall_{ABCDEa}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(CAD)$) & актив($\angle(DAE)$) & разныестороны($B, D,$ прямая(AC)) & разныестороны($C, E,$ прямая(AD)) & дополнительныйугол($\angle(BAE), a$) $\rightarrow a + \angle(BAC) + \angle(CAD) + \angle(DAE) = 2\pi$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый и третий - выделены указателем "усм", четвертый и пятый - обрабатываются проверочными оператормми. Последний антецедент обращается к синтезатору. Величина угла CAD не известна. При обращении синтезатору передаются комментарии (точка B C), (точка E D), (прямая B), (прямая C), (прямая D), (прямая E). Имеется средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор вычисления углов "значугол"

Этот нормализатор обычно используется для небольшого усиления нормализатора "нормугол". Каждый его прием срабатывает лишь в том случае, если удается непосредственно вычислить величину угла. Так как в формате нормализатора отсутствует элемент "неизвестные", то его комментариям не передается список неизвестных текущей задачи. Поэтому в фильтрах "известно(...)" необходима явная ссылка на текущую задачу.

1. Равенство вписанных углов.



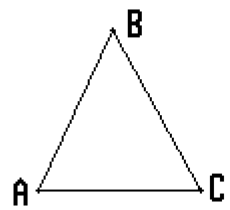
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $0 \leq \pi/2 - \angle(DCE)$ & $\angle(DFE) = a$ & $0 \leq \pi/2 - a \rightarrow \angle(DCE) = a)$

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм". Пятый и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $\angle(DFE) = a$ & однасторона$(C, F,$ прямая$(DE)) \rightarrow \angle(DCE) = a)$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", пятый - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализаторами "нормугол", "значугол". Для блокировки повторной попытки применения данного приема при рекурсивном обращении вводится комментарий "окружность". Последний антецедент обрабатывается проверочным ооератором. Прием применяется только при наличии комментария "усиление". Уровень срабатывания равен 4.

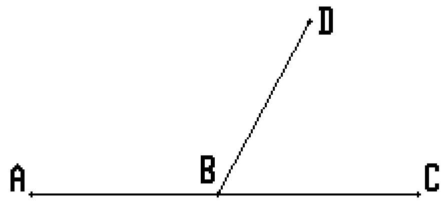
2. Угол при основании равнобедренного треугольника, стороны которого известны.



$\forall_{ABCab}(l(AB) = l(BC)$ & $l(AB) = a$ & $l(AC) = b$ & разныеточки$(A, C) \to \angle(BAC) = \arccos(b/2a))$

Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор", причем расстояния в них обрабатываются нормализатором "нормрасстояние". Выражения a, b не содержат неизвестных. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

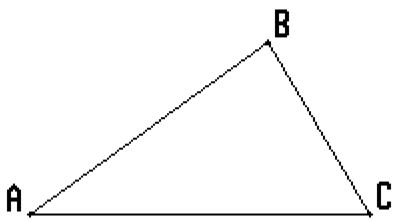
3. Смежные углы.



$\forall_{ABCD}($актив$(\angle(ABD))$ & $B \in$ отрезок$(AC) \to \angle(DBC) = \pi - \angle(ABD))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Угол ABD известен. Уровень срабатывания равен 2.

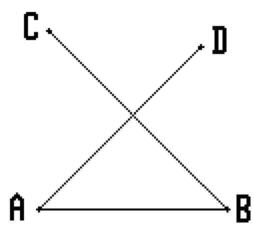
4. Теорема косинусов.



$\forall_{ABC}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC)) \to \angle(BAC) = \arccos((l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)/(2l(AB)l(AC))))$

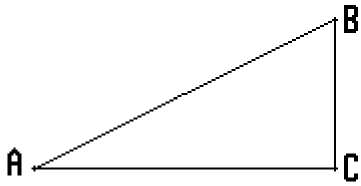
Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB, AC, BC известны. Необходимо наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.

5. Углы прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $\angle(ABC) = a$ & $0 < \pi/2 - a$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \rightarrow \angle(BAD) = \pi/2 - a)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Первый антецедент выделен указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Требуется наличие комментария "усиление". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow \angle(BAC) = \arcsin(l(BC)/l(AB)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB, BC известны. Имеется комментарий "плюс". Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор общей стандартизации "нормминугол"

Нормализатор имеет несколько простых приемов, исключающих символ "минугол". Все уровни срабатывания равны 1.

1. Острый угол.

   $\forall_{ABC}(0 \leq \pi/2 - \angle(ABC) \rightarrow$ минугол$(\angle(ABC)) = \angle(ABC))$

   $\forall_{ABC}(0 \leq \pi/2 - \angle(ABC) \rightarrow$ минугол$(\pi/2 - \angle(ABC)) = \pi/2 - \angle(ABC))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

   $\forall_{ABC}$(минугол$(\angle(ABC)/2) = \angle(ABC)/2)$

2. Тупой угол.

   $\forall_{ABC}(0 \leq \angle(ABC) - \pi/2 \rightarrow$ минугол$(\angle(ABC)) = \pi - \angle(ABC))$

   $\forall_a(0 \leq a \rightarrow$ минугол$(pi/2 + a) = \pi/2 - a)$

3. Константа.

   $\forall_a(0 \leq a$ & $0 \leq \pi - 2a \rightarrow$ минугол$(a) = a)$

   $\forall_a(\pi - 2a \leq 0$ & $0 \leq \pi - a \rightarrow$ минугол$(a) = \pi - a)$

   Выражение a константное. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

Синтезатор "соотношугол"

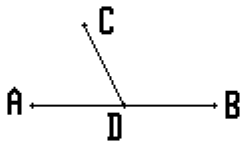
Синтезатор позволяет выразить заданный угол через некоторые другие уже рассматриваемые углы. Обращение к нему из теоремы приема имеет вид "соотношугол$(\angle(ABC)$, $a)$", где $\angle(ABC)$ - новый угол, a - найденное выражение этого угла через старые углы. При обращении синтезатору передаются комментарии (начало угол(ABC)) и (начало угол(CBA)), блокирующие попытки выразить угол сам через себя.

1. Усмотрение упоминания об угле в посылках.

   $\forall_{ABC}$(актив($\angle(DBE)$) & точкалуча(B, D, A) & точкалуча(B, E, C) $\to$ соотношугол($\angle(ABC), \angle(DBE)$))

   Антецеденты выделены указателем "усм". Проверяется отсутствие комментариев (начало угол(ABC), (начало угол(CBA). Уровень срабатывания равен 1.

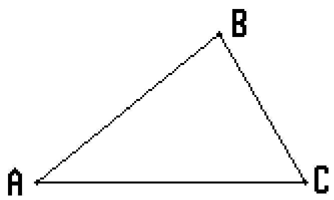
2. Смежные углы.



   $\forall_{ABCD}$($D \in$ отрезок(AB) & соотношугол($\angle(CDB), a$) $\to$ соотношугол($\angle(ADC)$, $\pi - a$))

   Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - реализует рекурсивное обращение. Для блокировки зацикливания при рекурсивных обращениях здесь и далее используются комментарии (соотношугол $\angle(\ldots)$), указывающие уже пройденные углы. Уровень срабатывания равен 4.

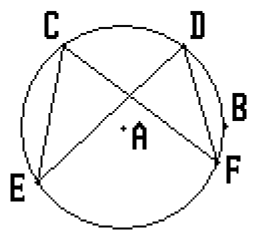
3. Сумма углов треугольника.



   $\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)) & соотношугол($\angle(BAC), a$) & соотношугол($\angle(ABC), b$) $\to$ соотношугол($\angle(ACB), \pi - a - b$))

   Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и третий - реализуют рекурсивные обращения. Если глубина обращений достаточно велика (число комментариев "соотношугол" более 5), то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

4. Вписанные углы, опирающиеся на равные хорды.

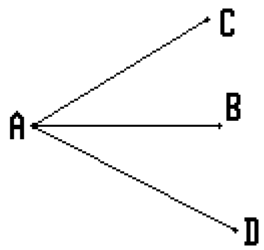


   $\forall_{aABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) &

соотношугол($\angle(CED), a$) & однасторона(E, F, прямая(CD)) $\rightarrow$
соотношугол($\angle(CFD), a$))

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм". Шестой антецедент реализует рекурсивное обращение, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Если число комментариев "соотношугол" более 7, то прием блокируется. Это же относится к нижеследующим приемам. Уровень срабатывания равен 3.

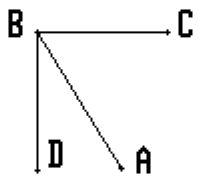
5. Равенство угла разности двух углов с той же вершиной.



$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(AD)) & актив($\angle(CAD)$) & соотношугол($\angle(BAD), a$) & разныестороны(C, D, прямая(AB)) & однасторона(B, D, прямая(AC)) & однасторона(B, C, прямая(AD)) $\rightarrow$ соотношугол($\angle(BAC), \angle(CAD) - a$))

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", пятый - реализует рекурсивное обращение. Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

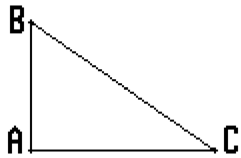
6. Вычитание из прямого угла примыкающего к нему угла с той же вершиной.



$\forall_{ABCD}$(прямая(BC) $\perp$ прямая(BD) & однасторона(A, C, прямая(BD)) & однасторона(A, D, прямая(BC)) & $A \in$ плоскость(BCD) & соотношугол($\angle(ABD), a$) $\rightarrow$ соотношугол($\angle(ABC), \pi/2 - a$))

Первый и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Пятый антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

7. Углы прямоугольного треугольника.

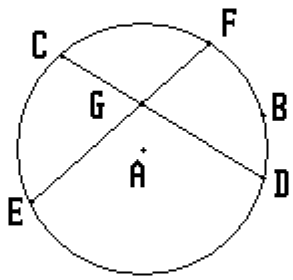


$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & соотношугол$(\angle(ABC), a) \rightarrow$ соотношугол$(\angle(ACB), \pi/2 - a))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй реализует рекурсивное обращение. Уровень обращения равен 2.

Обращение к синтезатору "соотношугол"

Синтезатор используется в единственном приеме:



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(EF) & актив$(\angle(CGE))$ & соотношугол$(\angle(CGE), p) \rightarrow \angle(CGE) = p)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - реализует обращение к синтезатору. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол CGE либо известен, либо имеет тип "внешнеизв". Таким образом, обращение к синтезатору позволяет связать известные параметры либо численные неизвестные с некоторыми другими углами, уже рассматриваемыми в задаче. Заметим, что передаваемые синтезатору комментарии "(начало $\angle(CGE)$)", "(начало $\angle(EGC)$)" блокируют попытки выразить угол CGE через него самого. Прием имеет средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 8.

Синтезатор "парамугол"

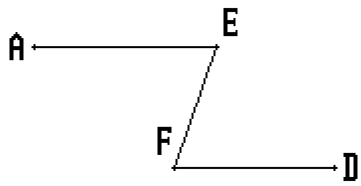
Синтезатор создан для тех случаев, когда достаточно выразить через численные параметры либо заданный угол, либо дополнение его до развернутого угла. Например, это имеет место, если в приеме используется только синус угла. Обращение из теоремы приема имеет вид "парамугол($\angle(ABC)$,a)", где первый аргумент - входное данное, второй - найденное значение. Пока синтезатор имеет всего три приема:

1. Использование равенства в посылках.

   $\forall_{abcABC}(\neg(a = 0)$ & $a\angle(ABC) + b = c \rightarrow$ парамугол$(\angle(ABC), (c - b)/a))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов.

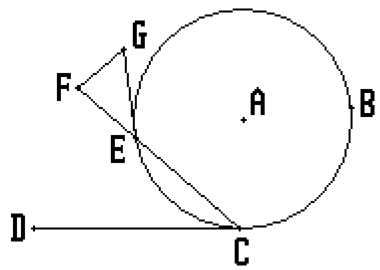
2. Углы при параллельных прямых и секущей.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AE) \parallel$ прямая(FD) & парамугол$(\angle(AEF), a) \rightarrow$ парамугол$(\angle(EFD), a))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - реализует рекурсивное обращение. Указатели "нормугол" обеспечивают идентификацию углов AEF и EFD без учета ориентации лучей (т.е. с точностью до перехода к смежному углу). Уровень срабатывания равен 2.

3. Углы, образуемые секущей с касательными, проведенными в ее концах.



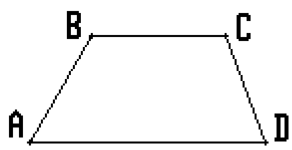
$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(CD) & $C \in$ окружность(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(GE) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(FCD))$ & $E \in$ отрезок(CF) & парамугол$(\angle(FCD), a) \rightarrow$ парамугол$(\angle(FEG), a))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, последний - реализует рекурсивное обращение. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

Приемы усмотрения острых и тупых углов, используемые оператором "усмменьшеилиравно"

Для усмотрения острых и тупых углов в решателе применяются проверочные операторы "усмменьшеилиравно" и "усмменьше". Соответствующие антецеденты имеют вид неравенств, например $0 \le \pi/2 - \angle(ABC)$. Ранее эти приемы были пропущены. Перечисление их начнем с оператора "усмменьшеилиравно":

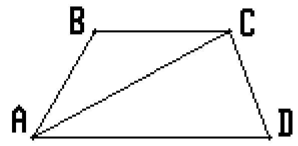
1. Углы трапеции.



$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \rightarrow 0 \le \pi/2 - \angle(BAD))$

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \rightarrow 0 \leq \angle(ABC) - \pi/2)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "контрсерия" разрешает идентификацию с изменением порядка вершин на противоположный. Фильтр "входит(угол фикс(0 2))" играет роль ускорителя. Он размешается в начале программы приема и сразу же отсекает рассмотрение неравенств, правая часть которых не содержит символа "угол". Этот фильтр используется и в нижеследующих приемах. Уровень срабатывания равен 2.

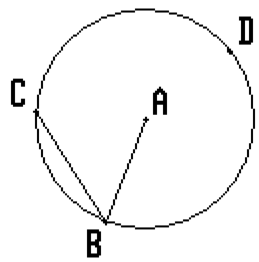


$\forall_{aABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $0 \leq a - \pi/2 \rightarrow 0 \leq a - \angle(CAD))$

$\forall_{aABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $0 \leq a - \pi/2 \rightarrow 0 \leq a - \angle(BCA))$

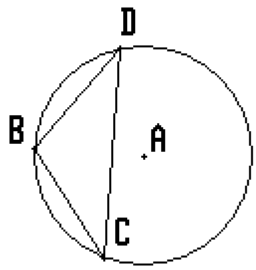
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. В остальном аналогично предыдущим приемам.

2. Вписанные углы.



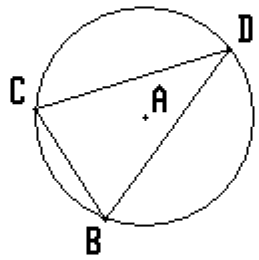
$\forall_{ABCD}(B \in$ окружность(AD) & $C \in$ окружность$(AD) \rightarrow 0 \leq \pi/2 - \angle(CBA))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.



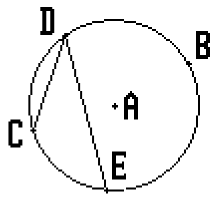
$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
разныестороны$(A, B,$ прямая$(CD)) \rightarrow 0 \leq \angle(CBD) - \pi/2)$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & однасторона$(A, C,$ прямая$(BD)) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(BCD))$

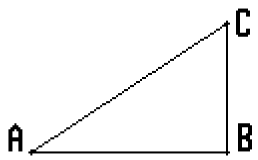
Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & разныестороны$(A, C,$ прямая$(DE)) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(CDE))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

3. Усмотрение прямоугольного треугольника, имеющего данный угол.



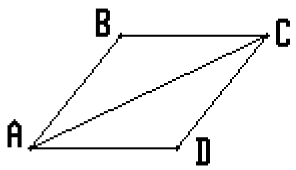
$\forall_{ABC}($прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(ABC))$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCa}(a = \angle(BAC)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to 0 \leq \pi - 2a)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

4. Угол между стороной и диагональю параллелограмма.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAD)$) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAD) \rightarrow 0 \leq \pi/2 - \angle(BAC)$)

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - реализует рекурсивное обращение. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

5. Переход к вспомогательному углу с помощью равенства из посылок.

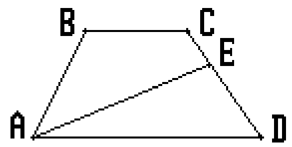
   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \ \& \ 0 \leq \pi/2 - \angle(ABC) \rightarrow 0 \leq \pi/2 - a)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Введен ускоряющий фильтр, проверяющий, что правая часть проверяемого неравенства содержит пи. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \ \& \ 0 \leq \pi/2 - \angle(ABC) \rightarrow 0 \leq \pi - 2a)$

   Аналогично предыдущему.

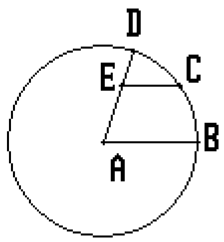
6. Угол между боковой стороной трапеции и отрезком, проведенным к точке на противоположной стороне.

   $\forall_{ABCDE}$(трапеция($ABCD$) & $E \in$ отрезок(CD) $\rightarrow 0 \leq \pi/2 - \angle(BAE)$)

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

7. Центральный угол, опирающийся на конец хорды, параллельной другой его стороне.

   $\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(AD) & прямая(EC) $\parallel$ прямая(AB) & однасторона($B, C,$ прямая(AD)) $\rightarrow 0 \leq \pi/2 - \angle(BAC)$)

   Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

8. Переход от неравенства с пи к неравенству с половиной пи.

   Так как большинство перечисляемых приемов ориентированы на случай, когда в проверяемом неравенстве явно фигурирует половина пи, понадобились два простых стандартизирующих приема:

$\forall_a(0 \le \pi/2 - a \to 0 \le \pi - 2a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем знак неравенства в этой посылке может быть строгим. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}(0 \le \pi/2 - \angle(ABC) \to 0 \le \pi - 2\angle(ABC))$

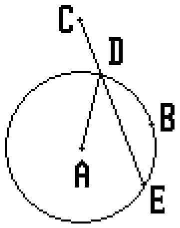
Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 3.

9. Рассмотрение дополнительного угла.

   $\forall_{ABCDEF}(\angle(ABC) + \angle(DEF) = \pi \ \& \ 0 < \pi/2 - \angle(DEF) \to 0 \le \angle(ABC) - \pi/2)$

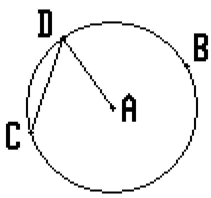
   Антецеденты идентифицируются с посылками, причем знак неравенства во второй посылке может быть нестрогим. Уровень срабатывания равен 4.

10. Угол между секущей и радиусом.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ отрезок(CE) & разныеточки$(D,E) \to 0 \le \angle(CDA) - \pi/2)$

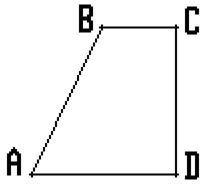
Первые три антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность$(AB) \to 0 \le \pi/2 - \angle(CDA))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

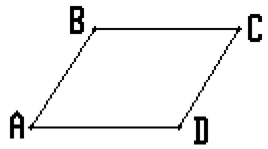
11. Усмотрение прямоугольной трапеции.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $0 \le l(AD) - l(BC) \to 0 \le \pi/2 - \angle(BAD))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AD, BC уже рассматриваются в задаче. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

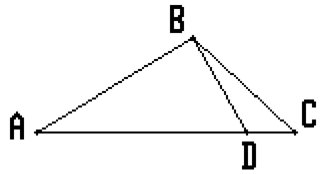
12. Переход к противоположному углу ромба либо параллелограмма.



$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD)$ & актив$(\angle(ADC))$ & $0 \leq \angle(ADC) - \pi/2 \to 0 \leq \angle(ABC) - \pi/2)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Последний антецедент реализует рекурсивное обращение. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

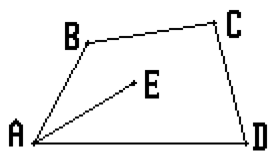
13. Усмотрение прямого подугла.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BD) & $D \in$ отрезок$(AC) \to 0 \leq \angle(ABC) - \pi/2)$

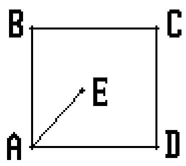
Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

14. Внутренняя точка четырехугольника.



$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура$(ABCD)$ & четырехугольник$(ABCD)$ &
$0 \leq \pi/2 - \angle(BAD) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(DAE))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - реализует рекурсивное обращение. При идентификации наборов точек допускаются произвольные циклические перестановки и изменение порядка на противоположный. Указатель "вариант" разрешает рассмотрение не только заголовка "четырехугольник", но и заголовков "ромб", "трапеция", "параллелограмм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4. Для квадрата и прямоугольника созданы два отдельных приема:

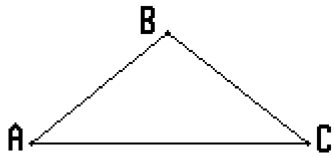


$\forall_{ABCDE}(E \in \text{фигура}(ABCD)$ & $\text{квадрат}(ABCD) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(DAE))$

$\forall_{ABCDE}(E \in \text{фигура}(ABCD)$ & $\text{квадрат}(ABCD) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(BAE))$

Антецедент идентифицируются с посылками. Допускаются циклические перестановки точек. Указатель "вариант" разрешает вместо квадратов рассматривать прямоугольники. Уровень срабатывания равен 3.

15. Угол при основании равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(BAC))$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

16. Угол, величина которого менее половины величины другого угла.

$\forall_{ABCamn}(0 \leq n - 2m$ & $a = \angle(ABC) \to 0 \leq \pi/2 - am/n)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные m, n идентифицированы с числовыми константами, a - с переменной. Первый антецедент выделен указателем "программа", т.е. реализуется путем непосредственных вычислений. Уровень срабатывания равен 4.

17. Угол между вектором и плоскостью.

$\forall_{ABCDE}(0\pi/2 - \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{плоскость}(CDE)))$

Уровень срабатывания равен 1.

18. Угол между двумя прямыми либо двумя плоскостями.

$\forall_{ABCD}(0 \leq \pi/2 - \text{уголмежду}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))$

$\forall_{ABCDEF}(0 \leq \pi/2 - \text{уголмежду}(\text{плоскость}(ABC), \text{плоскость}(DEF)))$

$\forall_{ABCDE}(0 \leq \pi/2 - \text{уголмежду}(\text{плоскость}(ABC), \text{прямая}(DE)))$

Уровни срабатывания равны 1.

$\forall_{aABCDE}(a = \text{уголмежду}(\text{плоскость}(ABC), \text{прямая}(DE)) \to 0 \leq \pi/2 - a)$

$\forall_{aABCDEF}(a = \text{уголмежду}(\text{плоскость}(ABC), \text{плоскость}(DEF)) \to 0 \leq \pi/2 - a)$

$\forall_{aABCD}(a = \text{уголмежду}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)) \to 0 \leq \pi/2 - a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровни срабатывания равны 3.

19. Использование соотношений, имеющихся в посылках.

$\forall_{ABC}(\pi/4 < \angle(ABC) \to 0 \leq 2\angle(ABC) - \pi/2)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCa}(a = \angle(ABC)$ & $\angle(ABC) < \pi/2 \to 0 \leq \pi/2 - a)$

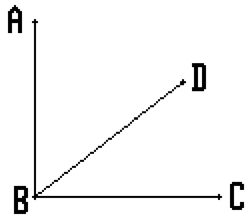
Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) + \angle(CAB) < a$ & $0 \leq \pi/2 - a \to 0 \leq \angle(ACB) - \pi/2)$

$\forall_{ABCpq}(p\angle(ABC) = q\angle(ACB)\ \&\ 0 \le p - q \to 0 \le \pi/2 - \angle(ABC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 4.

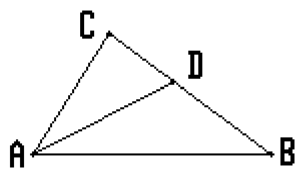
20. Точка внутри прямого угла.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & однасторона$(A, D,$ прямая$(BC))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \to 0 \le \pi/2 - \angle(ABD))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Для каждого из них введен свой достаточно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

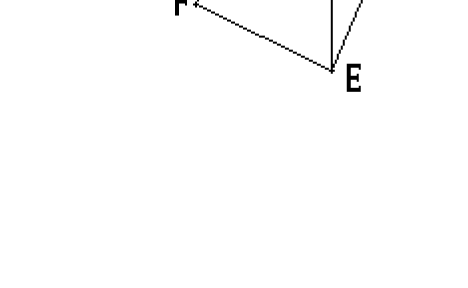
21. Известные длины сторон треугольника.



$\forall_{ABCDabc}(D \in$ отрезок(BC) & $l(AC) = a$ & $l(AB) = b$ & $l(BC) = c$ & $0 \le b^2 - a^2 - c^2 \to 0 \le \angle(ADB) - \pi/2)$

Второй, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, причем выражения a, b, c не содержат неизвестных. Первый антецедент выделен указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Для него введен сильный ограничитель трудоемкости. Попытка применить прием предпринимается только при наличии комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 4.

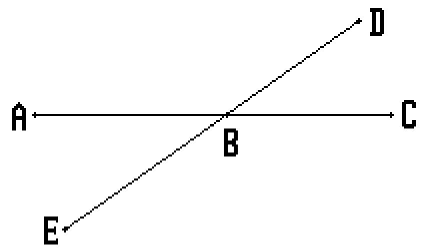
22. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на прямую, проходящую через его противоположную сторону.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ прямая(AB) & параллелограмм$(CDEF)$ &
прямая$(EG) \perp$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AB) & однасторона$(D, F,$
прямая$(AB)) \to 0 \leq \pi/2 - \angle(GEF))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем разрешаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на противоположный. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

23. Вертикальные углы.



$\forall_{ABCDE}(B \in$ отрезок(AC) & $B \in$ отрезок(DE) & $0 \leq \pi/2 - \angle(ABE) \to$
$0 \leq \pi/2 - \angle(DBC))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - реализует рекурсивное обращение. Для блокировки зацикливания используется комментарий "отрезки". Уровень срабатывания равен 4.

Приемы усмотрения острых и тупых углов, используемые оператором "усмменьше"

Обычно в теоремах приемов достаточно бывает усмотреть "нестрогие" острый либо тупой угол. Поэтому в операторе "усмменьше" накопилось совсем немного приемов, относящихся к усмотрению острых и тупых углы. Перечислим эти приемы:

1. Использование соотношений, имеющихся в посылках.

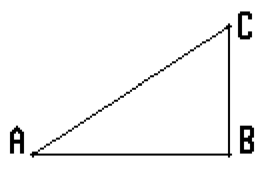
   $\forall_{ABC}(\pi/4 < \angle(ABC) \to 0 < 2\angle(ABC) - \pi/2)$

   $\forall_{ABC}(\angle(ABC) < \pi/4 \to 0 < \pi/2 - 2\angle(ABC))$

   $\forall_{ABCa}(a = \angle(ABC)$ & $\angle(ABC) < \pi/2 \to 0 < \pi/2 - a)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. У первых двух приемов уровень срабатывания равен 3, у последнего - 4.

2. Усмотрение угла прямоугольного треугольника.

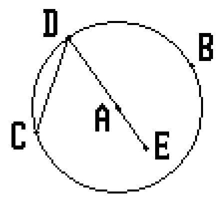


$\forall_{ABC}($прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to 0 < \pi - 2\angle(BAC))$

$\forall_{ABCa}(a = \angle(BAC)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow 0 < \pi - 2a)$

Первый антецедент второго приема идентифицируется с посылкой, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 4.

3. Вписанный угол.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ прямая(DE) & точкалуча(D, A, E) & разныеточки$(C, D) \rightarrow 0 < \pi/2 - \angle(CDE))$

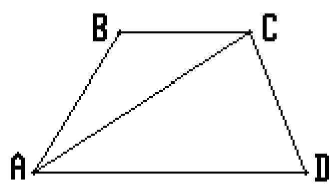
Первые четыре антецеденты выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

4. Угол, лежащий против стороны треугольника, не являющейся наибольшей.

$\forall_{ABC}(l(AB) = a$ & $l(BC) = b$ & $0 \leq a - b$ & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow$ $0 < \pi/2 - \angle(ABC))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

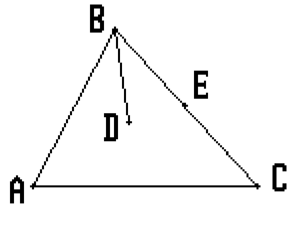
5. Угол между основанием и диагональю трапеции.



$\forall_{ABCD}($трапеция$(ABCD) \rightarrow 0 < \pi/2 - \angle(CAD))$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Уровень срабатывания равен 4.

6. Угол между стороной острого угла треугольника и лучом, проведенным к внутренней точке.



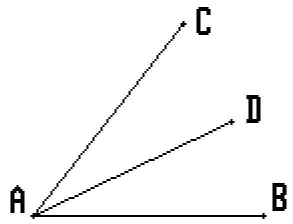
$\forall_{ABCDE}(D \in$ фигура(ABC) & $E \in$ прямая(BC) & точкалуча(B, E, C) &
$0 < \pi/2 - \angle(ABC) \to\ 0 < \pi/2 - \angle(DBE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - реализует рекурсивное обращение. Остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

3.17 Приемы, связанные с символом "биссектриса"

Запись "биссектриса$(A\ B\ C\ D)$" означает, что точка D отлична от точки B и задает луч BD, являющийся биссектрисой угла ABC. Из нее выводится равенство величин углов. Обратный переход от равенства углов к утверждению "биссектриса$(\ldots)$" практически не применяется. Тем не менее, при первичном усмотрении биссектрисы обычно сначала выводится именно такое утверждение, так как оно сокращает запись теоремы приема. Если нужно создать прием, срабатывающий при наличии биссектрисы, то лучше в его антецедентах использовать равенство углов, которое в любом случае будет выведено, в то время как наличие посылки "биссектриса$(\ldots)$" не обязательно.

Вывод соотношений между углами

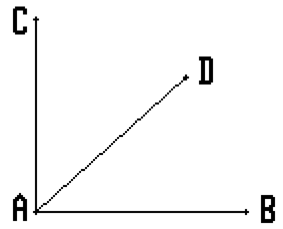


$\forall_{ABCD}($биссектриса$(BACD) \to \angle(CAD) = \angle(DAB)$ & $\angle(BAC) = 2\angle(CAD))$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCD}(\angle(CAD) = \angle(DAB)$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ &
разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \to \angle(BAC) = 2\angle(DAB))$

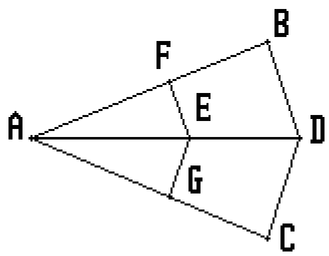
Первый антецедент выделен указателем "равно". Он идентифицируется с одной либо двумя посылками задачи, причем проверяется, что эти посылки на указывают на равенство угла $\pi/2$. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла BAC должно иметь тип "существатом". Если усматривается принадлежность точки B прямой AC, то прием блокируется. Он блокируется также, если угол BAC уже рассматривается в задаче, так как тогда будет срабатывать приведенный ранее прием для суммы двух углов. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCD}(\angle(CAD) = \pi/4$ & $\angle(BAD) = \pi/4$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Если идентифицирующие операторы усматривают перпендикулярность прямых AC, AB, то прием не применяется. Уровень срабатывания равен 3.

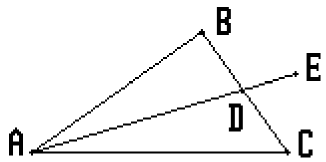
Точки, равноудаленные от сторон угла, лежат на одной прямой



$\forall_{ABCDEFG}(l(BD) = l(DC)$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DC) \perp$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, G) & прямая$(GE) \perp$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(FE) \perp$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, F) & $l(FE) = l(EG)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow E \in$ прямая$(AD))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", десятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Принадлежность основания биссектрисы угла треугольника его противоположной стороне

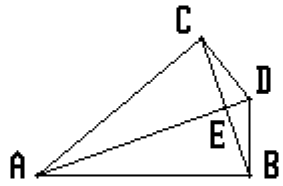


$\forall_{ABCDE}$(биссектриса$(BACE)$ & $D \in$ прямая(AE) & $D \in$ прямая$(BC) \rightarrow$ $D \in$ отрезок$(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

Перпендикуляр, опущенный на сторону угла из точки на биссектрисе

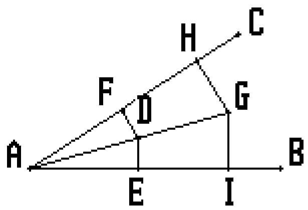
1. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных на стороны угла из точки биссектрисы.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(CD) & прямая$(AB) \perp$ прямая(DB) & $l(CD) = l(DB)$ & актив$(l(BC))$ & актив(прямая(AD)) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & $D \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ $E -$ точка & $E \in$ отрезок(AD) & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BC) = 2l(CE)$ & $l(CE) = l(BE)$ & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC))

Третий антецедент выделен указателем "равно", предпоследний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прием усматривает равенство длин перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны AC, AB. Проверяется, что расстояние между точками B, C уже рассматривается в задаче и известно. Кроме того, проверяется, что прямая AD - биссектриса угла BAC - тоже введена в рассмотрение. Тогда делается дополнительное построение: выбирается новая переменная для точки E пересечения отрезков AD, BC, и выводятся соотношения для расстояний от нее до B, C. Выводится также условие перпендикулярности прямой BC биссектрисе. Уровень срабатывания равен 5.

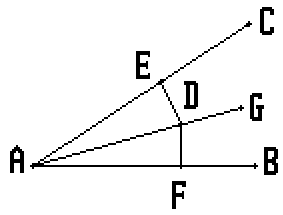
2. Усмотрение принадлежности биссектрисе двух точек, равноудаленных от сторон угла.



$\forall_{ABCDEFGHI}(l(DF) = l(DE)$ & $l(HG) = l(GI)$ & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) & $H \in$ прямая(AC) & $I \in$ прямая(AB) & прямая$(AC) \perp$ прямая(FD) & прямая$(AC) \perp$ прямая(HG) & прямая$(AB) \perp$ прямая(DE) & прямая$(GI) \perp$ прямая(AB) & однасторона$(D, G,$ прямая$(AC))$ & однасторона$(D, G,$ прямая$(AB))$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & $D \in$ плоскость(ABC) & $G \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow \neg(A \in$ интервал$(FH))$ & $D \in$ прямая(AG))

Первый антецедент выделен указателем "равно", три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прием усматривает две точки D, G, каждая из которых равноудалена от прямых AB, AC. Так как они лежат по одну сторону от каждой из этих прямых, то делается вывод, что точка G лежит на прямой AD и что точка H лежит на луче AF. Уровень срабатывания равен 7.

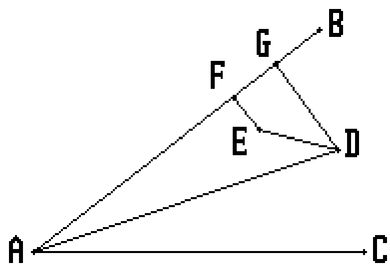
3. Равенство длин перпендикуляров, опущенных на стороны угла из точки биссектрисы.



$\forall_{ABCDEFG}$(биссектриса$(BACG)$ & $D \in$ прямая(AG) & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow l(DE) = l(DF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

4. Проведение перпендикуляра к стороне угла из точки биссектрисы.

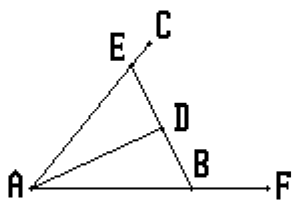


$\forall_{ABCDEFG}$(биссектриса$(BACD)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AB) & актив(прямая(DE)) $\rightarrow G -$ точка & прямая$(DG) \perp$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AB) & актив($l(DG)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Прием усматривает, что уже имеется перпендикуляр к стороне угла, проведенный из некоторой точки, соединенной прямой с точкой биссектрисы. После этого он проводит перпендикуляр из точки биссектрисы, вводя на стороне угла новую точку G. Прием применяется в задачах на доказательство. Уровень срабатывания равен 12.

Прямая, перпендикулярная биссектрисе

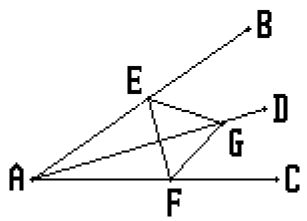
1. Продолжение перпендикуляра, опущенного на биссектрису из точки на стороне угла, до пересечения с другой стороной угла.



$\forall_{ABCDEF}$(актив($\angle(CAF)$) & $\angle(CAD) = \angle(DAF)$ & точкалуча(A, B, F) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AF)) & $D \in$ плоскость$(AFC) \rightarrow E -$ точка & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) & $\neg(A \in$ интервал$(CE))$ & $D \in$ отрезок(BE) & $l(DE) = l(DB)$ & $l(AE) = l(AB)$)

Первый, третий, четвертый и шестой антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки находится в четвертом антецеденте. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор"; обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием усматривает, что из точки D проведена перпендикулярная биссектрисе прямая, пересекающаяся со стороной угла в точке B. Затем он вводит в рассмотрение точку E пересечения этой прямой с другой стороной угла, сопровождая ее рядом простых соотношений. Имеется эвристическое ограничение на целесообразность построения: в задаче должно рассматриваться расстояние от точки A до некоторой точки прямой AC, причем величина угла CAD не должна быть известна. Уровень срабатывания приема равен 7.

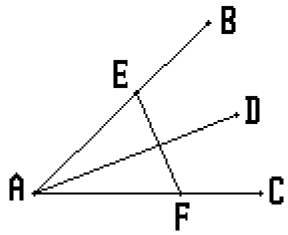
2. Равноудаленность точки биссектрисы от точек пересечения перпендикуляра к биссектрисе со сторонами угла.



$\forall_{ABCDEFG}$(биссектриса$(BACD)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая$(AD) \rightarrow l(EG) = l(GF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния EG имеет тип "неизв", а для расстояния GF - тип "существатом". Уровень срабатывания равен 5.

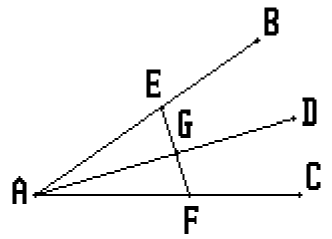
3. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла в 60 градусов.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \pi/3$ & биссектриса$(BACD)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая$(AC) \rightarrow l(EF) = l(AE)$ & $l(AF) = l(AE)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

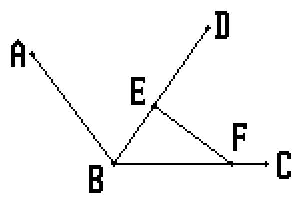
4. Ввод в рассмотрение точки пересечения биссектрисы с прямой, перпендикулярной биссектрисе.



$\forall_{ABCDEFG}$(биссектриса($BACD$) & прямая(EF) $\perp$ прямая(AD) &
$E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) $\rightarrow G$ – точка & $G \in$ отрезок(EF) &
$G \in$ прямая(AD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Прием выбирает новую переменную G для точки пересечения биссектрисы с отрезком EF и выводит сопровождающие утверждения. Предварительно проверяется, что такая точка не была введена ранее. Проверяется также, что на биссектрисе существует отличная от A точка, для которой рассматриваются расстояния до точек E, F. Уровень срабатывания равен 8.

5. Проекция на биссектрису угла точки, лежащей на его стороне, лежит на самой биссектрисе, а не на ее продолжении.



$\forall_{ABCDEF}$(биссектриса($ABCD$) & $F \in$ прямая(BC) & точкалуча(B, C, F) &
прямая(EF) $\perp$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(BD) $\rightarrow \neg(B \in$ интервал(DE)))

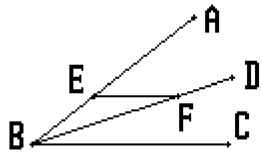
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Идентифицирующие операторы не усматривают расположение точки E на луче BD. Уровень срабатывания равен 6.

Взаимное расположение основания биссектрисы треугольника и точки, делящей основание в заданном отношении

$\forall_{ABCDE}$(биссектриса($BACD$) & $D \in$ отрезок(BC) & $E \in$ отрезок(BC) &
$al(BE) = bl(CE)$ & $0 < a$ & $0 \leq b$ & $0 \leq al(AB) - bl(AC) \rightarrow E \in$ отрезок(BD) &
$D \in$ отрезок(CE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором; он находит отношение длин отрезков BE, CE. Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень сраатывания равен 8.

Усмотрение равнобедренного треугольника при пересечении биссектрисы с прямой, параллельной стороне угла

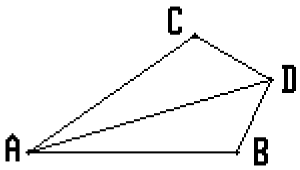


$\forall_{ABCDEF}$(биссектриса$(ABCD)$ & $F \in$ прямая(BD) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(BC) & $E \in$ прямая$(AB) \to l(BE) = l(EF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Проверяется различие обозначений прямых EF и BC. Уровень срабатывания равен 4.

Усмотрение биссектрисы

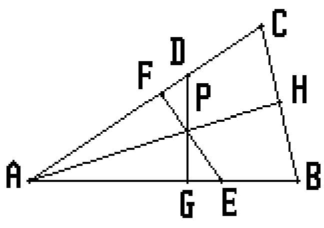
1. Усмотрение биссектрисы из равенства расстояний до точек, равноудаленных от вершин угла.



$\forall_{ABCD}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(DAC))$ & $l(AC) = l(AB)$ & $l(CD) = l(BD)$ & разныеточки(A, B) & $0 \leq \pi/2 - \angle(DAC)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $D \in$ плоскость$(ABC) \to \angle(BAC) = 2\angle(DAC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой; антецеденты с пятого по седьмой обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Проверка неравенства в шестом антецеденте предпринимается при сильном ограничении трудоемкости. Уровень срабатывания приема равен 5.

2. Усмотрение биссектрисы в прямой, проходящей через точку пересечения перпендикуляров к сторонам угла, опущенных из равноудаленных от вершины точек.

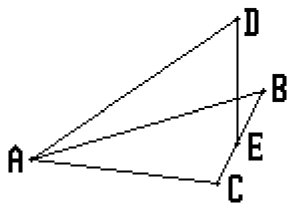


$\forall_{ABCDEFGHP}$(прямая$(EF) \perp$ прямая(AC) & прямая$(DG) \perp$ прямая(AB) & $P \in$ прямая(EF) & $P \in$ прямая(DG) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $l(AE) = l(AD)$ & точкалуча(A, D, C) & точкалуча(A, E, B) & разныеточки(A, D) & разныеточки(A, E) & $E \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(AP) & $H \in$ прямая$(BC) \to$ биссектриса$(BACH)$)

Антецеденты "разныеточки", "разныепрямые" обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". При этом точка привязки выбрана в первом антецеденте. Прямая AP уже рассматривается в задаче. Обозначения точек P, H различны. Уровень срабатывания равен 7.

3. Усмотрение биссектрисы в проекции наклонной, образующей равные углы со сторонами плоского угла.

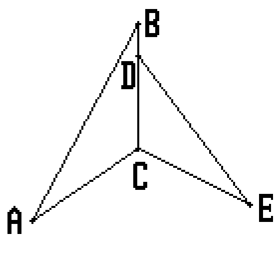
   Этот прием относится к стереометрии:



$\forall_{ABCDE}(\angle(BAD) = \angle(DAC)$ & прямая$(DE) \perp$ плоскость(ABC) & $E \in$ прямая(BC) & разныеточки(A, B) & разныеточки$(A, C) \to$ биссектриса$(BACE)$)

Первый антецедент, выделенный указателем "равно", идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Прием применяется при отсутствии посылки "планиметрия". Не должна усматриваться принадлежность точки D плоскости ABC. Уровень срабатывания равен 3.

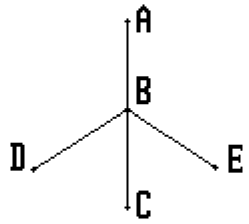
4. Усмотрение биссектрисы из двух примыкающих подобных треугольников.



$\forall_{ABCDE}(\angle(BAC) = \angle(CDE)$ & $\angle(ABC) = \angle(CED)$ & точкалуча(C, D, B) & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(CDE))$ & актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(CED)) \to \angle(ACB) = \angle(DCE)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно" и идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 10.

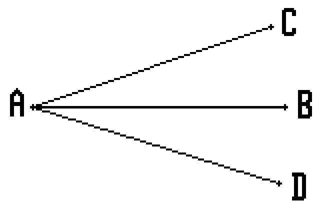
5. Усмотрение биссектрисы при переходе к смежным углам.



$\forall_{ABCDE}(B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(ABE) \rightarrow \angle(DBC) = \angle(CBE))$

Идентификация начинается со второго антецедента, выделенного указателем "равно". Первый антецедент выделен указателем "усм". Равенство $\angle(DBC) = \angle(CBE)$ имеет тип "существравно". Уровень срабатывания равен 7.

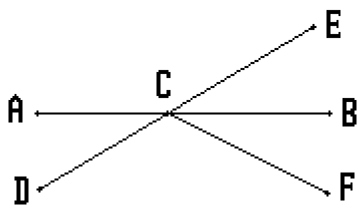
6. Усмотрение биссектрисы из соотношения для углов.



$\forall_{ABCD}(\text{актив}(\angle(CAD))\ \&\ \text{актив}(\angle(BAC))\ \&\ \angle(CAD) = 2\angle(BAC)\ \&$ $\text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(BAC))$

Идентификация начинается с третьего антецедента, выделенного указателем "равно". Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

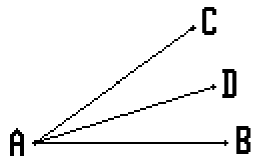
7. Усмотрение биссектрисы через вертикальные углы.



$\forall_{ABCDEF}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ C \in \text{отрезок}(DE)\ \&\ \text{актив}(\angle(ACD))\ \&$ $\text{актив}(\angle(BCF))\ \&\ \angle(ACD) = \angle(BCF)\ \&\ \text{однасторона}(D, F, \text{прямая}(AB))\ \&$ $\text{однасторона}(B, F, \text{прямая}(DE)) \rightarrow \text{биссектриса}(ECFB))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - выделен указателем "идентификатор". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами, прочие - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

Доказательство принадлежности биссектрисе



$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB)$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC)))$

Прием эквивалентной замены применяется в условии задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 3.

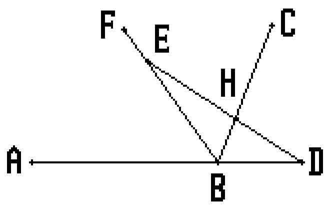
Внутренняя точка биссектрисы не лежит на стороне невырожденного угла

$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(ABCD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow \neg(C = D))$

$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(ABCD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow \neg(A = D))$

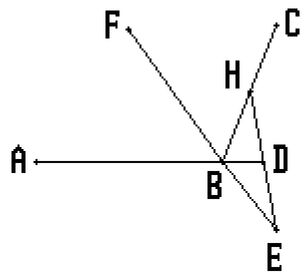
Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются в условии задачи на описание. Обычно это связано с предварительной расчисткой списка условий и предшествует обращению к блоку анализа. Первый антецедент идентифицируется с утверждением контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Точки пересечения прямой с биссектрисой и продолжением стороны, либо с продолжением биссектрисы и стороной



$\forall_{ABCDEFH}$(биссектриса$(ABCF)$ & $E \in$ прямая(BF) & точкалуча(B, E, F) & $B \in$ отрезок(AD) & $H \in$ прямая(DE) & $H \in$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(BC), прямая$(AB)) \rightarrow H \in$ отрезок$(DE))$

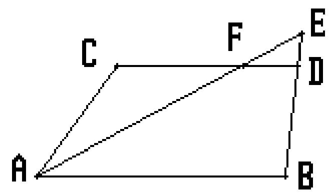
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEFH}$(биссектриса$(ABCF)$ & $B \in$ отрезок(EF) & точкалуча(B, C, H) & $D \in$ прямая(EH) & $D \in$ прямая(AB) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow$ $D \in$ отрезок(EH))

Аналогично предыдущему.

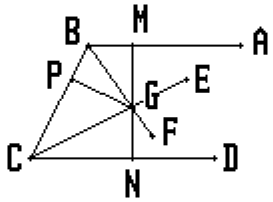
Ввод в рассмотрение точки пересечения биссектрисы с прмяой, параллельной стороне



$\forall_{ABCDEF}$(биссектриса$(BACE)$ & прямая$(CD) \parallel$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(BE) & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ $F -$точка & $F \in$ прямая(AE) & $F \in$ прямая(CD) & $\neg(C \in$ интервал$(DF))$ & $l(AC) = l(CF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "новыйсимвол(...)" определяет выбор новой переменной для точки F. Чтобы точка оказалась прорисована на экране, введен указатель "точкапрямой(...)". Указатели "отрезок(...)" определяют прорисовку отрезков AF, CF. Уровень срабатывания равен 6.

Точка пересечения биссектрис внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей



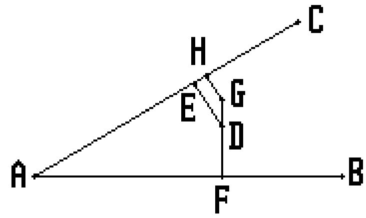
$\forall_{ABCDEFGMNP}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & биссектриса$(ABCF)$ & биссектриса$(BCDE)$ & $G \in$ прямая(CE) & $G \in$ прямая(BF) $\rightarrow$ $M -$ точка & $N -$ точка & $P -$ точка & $M \in$ прямая(AB) & прямая$(MN) \perp$ прямая(AB) & $G \in$ отрезок(MN) & $N \in$ прямая(CD) & $P \in$ отрезок(BC) &

прямая$(PG) \perp$ прямая(BC) & $l(GM) = l(GN)$ & $l(MN) = 2l(GM)$ & $l(CP) = l(CN)$ & $l(BP) = l(BM)$ & $\neg(B \in$ интервал$(AM))$ & $\neg(C \in$ интервал$(DN)))$

Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Усматривая таким образом биссектрисы при внутренних односторонних углах и их точку пересечения G, прием опускает из нее перпендикуляры GM, GN, GP на параллельные прямые и секущую. Выводятся утверждения о равенстве длин этих перпендикуляров. Указатели "новыйсимвол" определяют выбор новых переменных для точек M, N, P. Уровень срабатывания равен 9.

Отождествление двух точек на перпендикуляре к прямой, если каждая лежит на биссектрисе

.



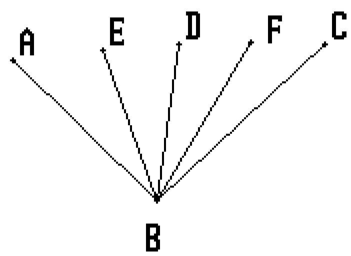
$\forall_{ABCDEFGH}($прямая$(DF) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(DE) & $G \in$ прямая(DF) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AC) & $H \in$ прямая(AC) & $l(DE) = l(DF)$ & точкалуча(A, H, E) & $l(GH) = l(GF)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow H = E)$

Восьмой антецедент выделен указателем "равно"; он идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3. Создана версия, в которой вместо условия принадлежности точки E лучу AH используются условия размещения точек D, G по одну сторону от прямых AB, AC:

$\forall_{ABCDEFGH}($прямая$(DF) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(DE) & $G \in$ прямая(DF) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AC) & $H \in$ прямая(AC) & $l(DE) = l(DF)$ & однасторона$(D, G,$ прямая$(AC))$ & однасторона$(D, G,$ прямая$(AB))$ & $l(GH) = l(GF)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow H = E$ & $D = G)$

Уровень срабатывания тоже равен 3.

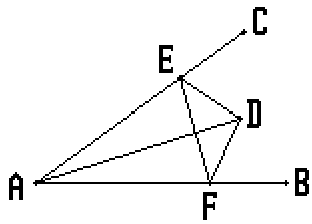
Общая биссектриса двух различных углов



$\forall_{ABCDEF}(\angle(ABD) = \angle(DBC)$ & разныестороны$(A, C,$ прямая$(BD))$ &
$\angle(EBD) = \angle(DBF)$ & однасторона$(A, E,$ прямая$(BD))$ &
однасторона$(C, F,$ прямая$(BD)) \rightarrow \angle(ABE) = \angle(FBC))$

Первый и третий антецеденты выделены указателем "равно", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 12.

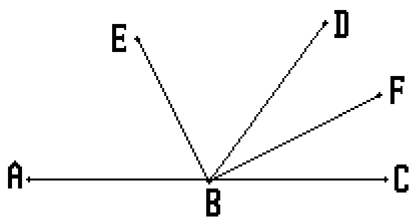
Отрезки равной длины, проведенные к сторонам угла из точки биссектрисы



$\forall_{ABCDEF}(\angle(CAD) = \angle(BAD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC))$ &
$E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AB) & $l(DE) = l(DF)$ & актив$(\angle(AEF)) \rightarrow$
$l(AE) = l(AF) \ \vee \ \angle(AEF) = \angle(ADF))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла AEF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 8.

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны



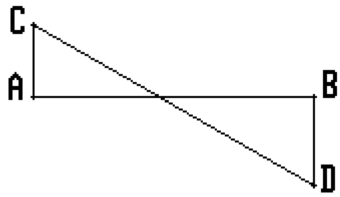
$\forall_{ABCDEF}(B \in$ отрезок(AC) & $\angle(ABE) = \angle(EBD)$ & $\angle(DBF) = \angle(FBC)$ &
актив$(\angle(FBC))$ & актив$(\angle(DBF))$ & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BE))$ &
разныестороны$(C, D,$ прямая$(BF))$ & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) &
разныеточки(B, E) & разныеточки$(B, F) \rightarrow$ прямая$(BE) \perp$ прямая$(BF))$

Второй антецедент выделен указателем "равно" и идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Он убеждается в равенстве углов с помощью нормализатора "нормугол". Первый, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 8.

3.18 Приемы, связанные с символом "разныестороны"

Утверждение "разныестороны($A\ B\ C$)" означает, что точки A, B лежат по разные стороны от прямой либо плоскости C, причем в первом случае A, B, C расположены в общей плоскости. Допускаются случаи попадания этих точек на C. Кроме того, данное утверждение может относиться к векторам A, B, C. Тогда оно означает, что векторы A, B лежат в общей плоскости с ненулевым вектором C, по разные стороны от прямой вектора C.

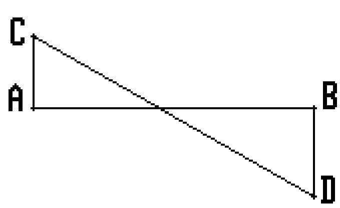
Определение расстояния между точками, лежащими по разные стороны от некоторой прямой, с помощью расстояний их до этой прямой



$\forall_{ABCD}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(AB) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AB) & актив($l(AC)$) & разныестороны($C, D,$ прямая(AB)) $\rightarrow l(CD)^2 = l(AB)^2 + (l(AC) + l(BD))^2$)

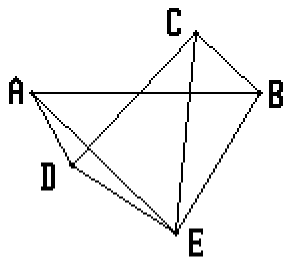
Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем указатель "теквхожд" определяет выбор точки привязки в первом из них. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AC, BD, AB известны; выражение для расстояния CD имеет тип "применимо". Созданы две идентичных версии приема, одна из которых срабатывает на уровне 6, а другая - на уровне 7. Уровень срабатывания равен 6. На той же теореме созданы еще две версии приема. Первая требует, чтобы среди выражений AC, BD, AB, CD нашлись два известных, одно - типа "определимо" и одно - типа "неизв". Вторая требует, чтобы среди них нашлось не более одного неизвестного выражения, не имеющего типа "неизв", причем прямая CD должна уже рассматриваться в задаче. Уровни срабатывания равны 9.

Разбор случаев по расположению двух точек относительно прямой, если выделены их расстояния до точек этой прямой



$\forall_{ABCD}$(актив($l(CD)$) & актив($l(AB)$) & прямая(AC) $\perp$ прямая(AB) &
прямая(BD) $\perp$ прямая(AB) & актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) &
$D \in$ плоскость(ABC) $\rightarrow$ однасторона($C, D,$ прямая(AB)) $\vee$
разныестороны($C, D,$ прямая(AB)))

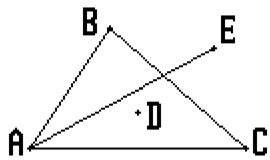
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Среди выражений для расстояний AC, BD, AB, CD имеется не более одного не известного и не имеющего типа "неизв". Хотя бы одно из них имеет тип "неизв". Не усматривается размещение точек C, D по одну либо по разные стороны от прямой AB. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 11.



$\forall_{ABCDEPQR}$(актив($l(AE)$) & актив($l(BE)$) & актив($l(DE)$) & актив($l(CE)$) & актив($l(AD)$) & актив($l(BC)$) & разныестороны(C, D, прямая(AB)) & $A \in$ плоскость(PQR) & $B \in$ плоскость(PQR) & $C \in$ плоскость(PQR) & $D \in$ плоскость(PQR) & $E \in$ плоскость(PQR) $\rightarrow$ разныестороны(C, E, прямая(AB)) $\vee$ разныестороны(D, E, прямая(AB)))

Первый, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AE, BE, DE, AD, BC известны. Выражения для расстояний DE, CE имеют тип "неизв". Не усматриваются размещение по разные стороны от прямой AB ни точек C, E, ни точек D, E. Уровень срабатывания равен 14.

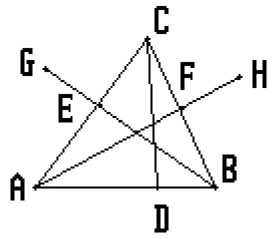
Усмотрение противоречия найденных величин площади и расстояний условию размещения по разные стороны от прямой



$\forall_{ABCDEabc}$(S(фигура(ABC)) $= a$ & $l(AE) = c$ & $l(BC) = b$ & разныестороны(D, E, прямая(BC)) & $0 < 2a - bc$ & однасторона(A, D, прямая(BC)) $\rightarrow$ ложь)

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c константные. Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания равен 2.

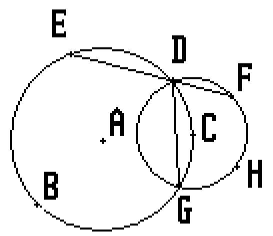
Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками на противоположных сторонах



$\forall_{ABCDEFGH}(D \in \text{отрезок}(AB)$ & $E \in \text{отрезок}(AC)$ & $F \in \text{отрезок}(BC)$ & $E \in \text{отрезок}(BG)$ & $F \in \text{отрезок}(AH)$ & $\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AC), \text{прямая}(AB))$ & $\text{разныеточки}(A, C)$ & $\text{разныеточки}(A, B) \to \text{разныестороны}(G, H, \text{прямая}(CD)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, три последние - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение размещения точек по разные стороны от общей хорды двух окружностей, если центр одной окружности лежит на другой



$\forall_{ABCDEFGH}(C \in \text{окружность}(AB)$ & $D \in \text{окружность}(AB)$ & $D \in \text{окружность}(CH)$ & $G \in \text{окружность}(AB)$ & $G \in \text{окружность}(CD)$ & $E \in \text{окружность}(AB)$ & $F \in \text{окружность}(CH)$ & $D \in \text{отрезок}(EF)$ & $\text{разныеточки}(D, G)$ & $\text{актив}(\text{окружность}(AB)) \to \text{разныестороны}(E, C, \text{прямая}(DG)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Последний антецедент идентифицируется с посылкой, предпоследний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

Проверочный оператор "разныестороны"

Обращения к этому оператору, как и к оператору "однасторона", происходят весьма часто. Поэтому, чтобы избежать замедления решателя, пришлось экономить на списках их приемов. Тем не менее, в процессе обучения эти списки, вынужденным образом, оказались достаточно большими. Наиболее эффективным средством ускорения данных операторов стало ограничение рекурсивных обращений, обеспечиваемое рядом специальных комментариев.

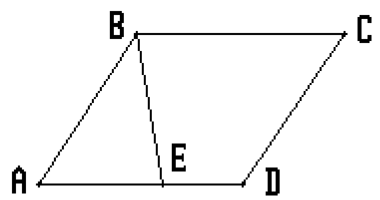
Заметим, что те точки, для которых требуется установить размещение по разные стороны от прямой, являются значениями первой и второй входных переменных программы оператора. Хотя предикат симметричен относительно их перестановки, жесткая привязка к входным переменным заставляет дублировать многие приемы, рассматривая оба варианта упорядочения данных точек.

1. Усмотрение при помощи идентифицирующего оператора.

   $\forall_{abc}$(разныестороны(a,b,c) $\rightarrow$ разныестороны(a,b,c))

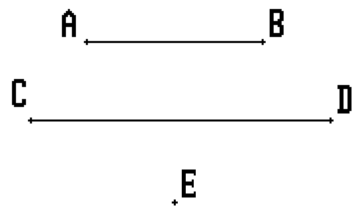
   Антецедент выделен указателем "усм". Идентифицирующий оператор "поразныестороны" использует посылки "разныестороны" и "однасторона". Уровень срабатывания равен 1.

2. Учет параллельности прямых.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) &
   $E \in$ прямая(AD) & точкалуча$(A,D,E) \rightarrow$ разныестороны$(A,C,$прямая$(BE)))$

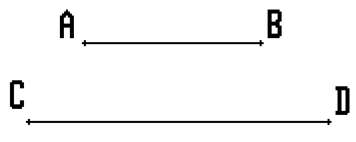
   Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABEc}$(разныестороны(A,E,c) & прямая$(AB) \parallel c \rightarrow$ разныестороны(B,E,c))

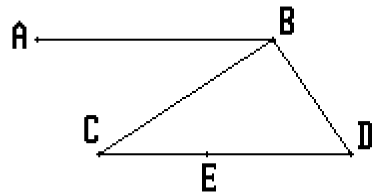
   $\forall_{ABEc}$(разныестороны(E,A,c) & прямая$(AB) \parallel c \rightarrow$ разныестороны(E,B,c))

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "усм". Указатель "внешобрыв(1)" форсирует обрыв работы проверочного оператора и выдачу отказа при неустановлении истинности первого антецедента. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \rightarrow \neg$(разныестороны$(A,B,$прямая$(CD))))$

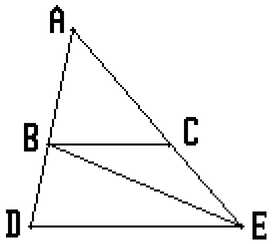
   Антецедент выделен указателем "усм". Указатель "не" означает, что прием используется для усмотрения ложности проверочного оператора: если антецедент истинен, то сразу выдается отказ. Это несколько ускоряет работу решателя. Вырожденные случаи совпадения прямых отбрасываются, но практически они и не нужны.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(CD) & однасторона$(A, E,$ прямая$(BD))$ & разныеточки$(D, E) \rightarrow$ разныестороны$(A, E,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(CD) & однасторона$(A, E,$ прямая$(BD))$ & разныеточки$(D, E) \rightarrow$ разныестороны$(E, A,$ прямая$(BC)))$

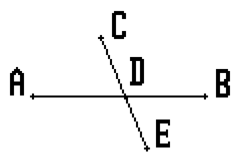
Первые два антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Проверочному оператору "однасторона" передается комментарий "параллелпрямые", причем данный прием при наличии такого комментария блокируется. Это предотвращает возможные зацикливания. Той же цели служит проверка отсутствия комментария "параллелограмм". Уровень срабатывания равен 4



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(DE) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, B, D) & точкалуча$(A, C, E) \rightarrow$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(BE)))$

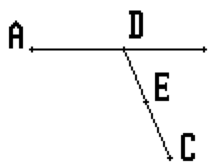
Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

3. Учет расположения точек на прямой, пересекающейся с данной.



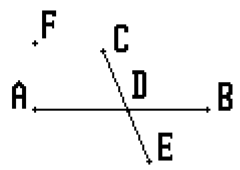
$\forall_{ABCDE}(D \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(CE) & $D \in$ отрезок$(CE) \rightarrow$ разныестороны$(C, E,$ прямая$(AB)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDE}(D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D \in \text{прямая}(CE)\ \&\ \text{точкалуча}(D, C, E) \rightarrow \neg(\text{разныестороны}(C, E, \text{прямая}(AB))))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Прием имеет указатель "не" и используется для ускоренной выдачи отказа. Уровень срабатывания равен 1.

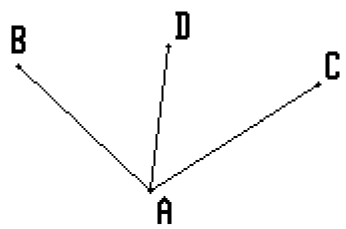


$\forall_{ABCDEF}(\text{однасторона}(C, F, \text{прямая}(AB))\ \&\ D \in \text{отрезок}(CE)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{разныеточки}(C, D) \rightarrow \text{разныестороны}(E, F, \text{прямая}(AB)))$

$\forall_{ABCDEF}(\text{однасторона}(C, F, \text{прямая}(AB))\ \&\ D \in \text{отрезок}(CE)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{разныеточки}(C, D) \rightarrow \text{разныестороны}(F, E, \text{прямая}(AB)))$

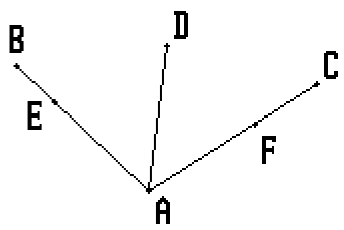
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные два - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

4. Учет биссектрисы.



$\forall_{ABCD}(\text{биссектриса}(BACD) \rightarrow \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)))$

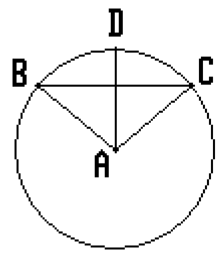
Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEF}(\text{биссектриса}(BACD)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, E)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, F) \rightarrow \text{разныестороны}(E, F, \text{прямая}(AD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

5. Биссектриса центрального угла.

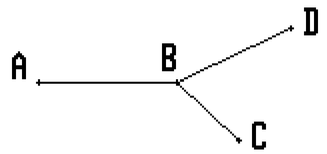


$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(BACD)$ & $D \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность$(AB) \to$ разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(BACD)$ & $D \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность$(AB) \to$ разныестороны$(D, A,$ прямая$(BC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

6. Усмотрение размещения по разные стороны путем вычисления углов.



$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p\ \&\angle(CBD) = q\ \&\ 0 \le \pi - q\ \&\ 0 \le p + q - \pi\ \&$ $C \in$ плоскость$(ABD) \to$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)))$

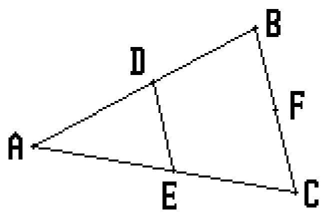
$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p\ \&\angle(CBD) = q\ \&\ 0 \le \pi - q\ \&\ 0 \le p + q - \pi\ \&$ $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ разныестороны$(D, C,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p\ \&\angle(CBD) = q\ \&\ p + q \le 0\ \&\ 0 \le p + q + \pi\ \&$ $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ разныестороны$(D, C,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p\ \&\angle(CBD) = q\ \&\ p + q \le 0\ \&\ 0 \le p + q + \pi\ \&$ $C \in$ плоскость$(ABD) \to$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "величинаугла", рассматривающим группу углов с вершиной B. Обращения к нормализатору сопровождаются сравнительно сильным ограничением трудоемкости. Проверяется, что результаты p, q суть константы. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, пятый - выделен указателем "усм". Уровни срабатывания равны 4.

7. Три условия принадлежности отрезку.

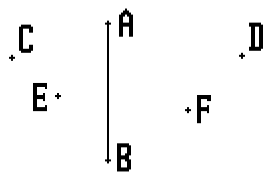


$\forall_{ABCDEF}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ F \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ \text{разныеточки}(D,E) \to \text{разныестороны}(A,F,\text{прямая}(DE)))$

$\forall_{ABCDEF}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ F \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ \text{разныеточки}(D,E) \to \text{разныестороны}(F,A,\text{прямая}(DE)))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

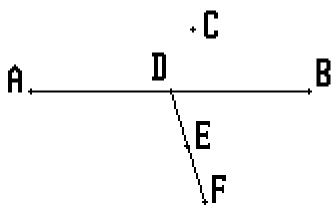
8. Трехкратный переход через прямую.



$\forall_{ABCDEF}(\text{разныестороны}(C,D,\text{прямая}(AB))\ \&\ \text{разныестороны}(C,F,\text{прямая}(AB))\ \&\ \text{разныестороны}(D,E,\text{прямая}(AB))\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB))\ \&\ \neg(D \in \text{прямая}(AB)) \to \text{разныестороны}(E,F,\text{прямая}(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Для второго и третьего антецедентов введены сильные ограничители трудоемкости.

9. Использование принадлежности точки отрезку с концом на разделяющей прямой.

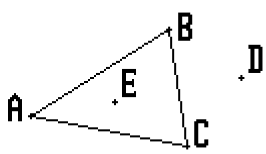


$\forall_{ABCDEF}(D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(D,E,F)\ \&\ \text{разныестороны}(C,F,\text{прямая}(AB))\ \&\ E \in \text{плоскость}(ABC) \to \text{разныестороны}(C,E,\text{прямая}(AB)))$

$\forall_{ABCDEF}(D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(D,E,F)\ \&\ \text{разныестороны}(F,C,\text{прямая}(AB))\ \&\ E \in \text{плоскость}(ABC) \to \text{разныестороны}(E,C,\text{прямая}(AB)))$

Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

10. Использование принадлежности точки треугольнику, одна сторона которого лежит на заданной прямой.



$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура(ABC) & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)) \rightarrow$ разныестороны$(E, D,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура(ABC) & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)) \rightarrow$ разныестороны$(D, E,$ прямая$(BC)))$

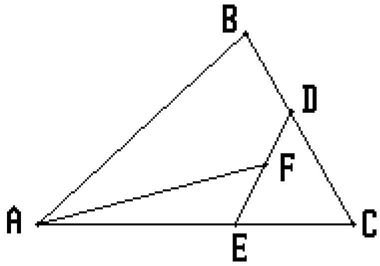
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Вершины треугольника идентифицируются без учета порядка. Уровень срабатывания равен 2.

11. Точка внутри угла либо треугольника.

$\forall_{ABCD}(A \in$ Угол$(BCD) \rightarrow$ разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCD}(A \in$ фигура$(BCD) \rightarrow$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Вершины треугольника идентифицируются без учета порядка. Уровень срабатывания приемов равен 2.

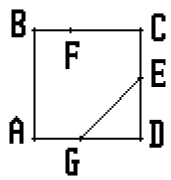


$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(AC) & $D \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок$(DE) \rightarrow$ разныестороны$(B, C,$ прямая$(AF)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

12. Многоугольники.

   (a) Прямая, проходящая через две точки на сторонах, смежных с вершиной четырехугольника, отделяет эту вершину от точки на несмежной с ней стороне.



$\forall_{ABCDEFG}($квадрат$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок$(BC) \rightarrow$ разныестороны$(D, F,$ прямая$(GE)))$

$\forall_{ABCDEFG}($квадрат$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок$(BC) \rightarrow$ разныестороны$(F, D,$ прямая$(GE)))$

$\forall_{ABCDEFG}($квадрат$(DCBA)$ & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок$(BC) \rightarrow$ разныестороны$(D, F,$ прямая$(GE)))$

$\forall_{ABCDEFG}($квадрат$(DCBA)$ & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок$(BC) \rightarrow$ разныестороны$(F, D,$ прямая$(GE)))$

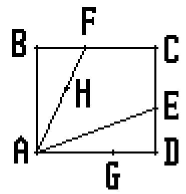
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Указатель "вариант" разрешает рассмотрение вместо символа "квадрат" символов "ромб", "параллелограмм", "прямоугольник", "Трапеция", "трапеция". Указатель "циклупорядочение" разрешает циклические перестановки вершин при идентификации первого антецедента. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Правильный многоугольник.

$\forall_{ABCDEFanijkl}$(правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $D = a(l)$ & $i < k$ & $i < j$ & $k < j$ & $(l < i \ \vee \ j < l) \rightarrow$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем переменная a идентифицируется с выражением вида "набор$(\ldots)$", перечисляющим вершины многоугольника. Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", при помощи нормализатора "нормдлинанабора" вычисляет длину n данного набора. Антецеденты с третьего по шестой выделены указателем "усм". Они определяют номера k, l ранее идентифицированных точек C, D, а также перечисляют всевозможные элементы A, B набора вершин одновременно с их номерами i, j. Заметим, что прямая AB, являющаяся входным данным оператора, после развязки теоремы оказывается задана через какие-то другие точки. Поэтому дополнительно проверяется, что точки A, B лежат на этой прямой. Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. По номерам точек A, B, C, D они устанавливают факт размещения C, D по разные стороны от прямой AB. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Прямая, проходящая через вершину четырехугольника и точку на несмежной стороне.

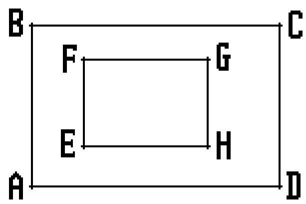


$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(ABCD)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $H \in$ отрезок(AF) & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок$(AD) \rightarrow$ разныестороны$(G, H,$ прямая$(AE)))$

$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(ABCD)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $H \in$ отрезок(AF) & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок$(AD) \rightarrow$ разныестороны$(H, G,$ прямая$(AE)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Указатели "вариант", "циклупорядочение" используются так же, как и выше. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Два вложенных прямоугольника, стороны которых параллельны.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямоугольник($ABCD$) & прямоугольник($EFGH$) & фигура($EFGH$) $\subseteq$ фигура($ABCD$) & прямая(EF) $\parallel$ прямая(AB) $\to$ разныестороны(A, D, прямая(EF)))

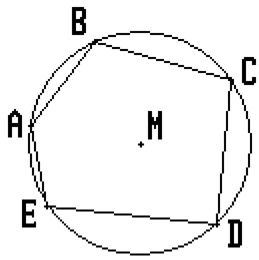
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "усм".

$\forall_{ABCDEFGH}$(прямоугольник($ABCD$) & прямоугольник($EFGH$) & фигура($EFGH$) $\subseteq$ фигура($ABCD$) & прямая(EF) $\parallel$ прямая(AB) & однасторона(B, F, прямая(GH)) $\to$ разныестороны(C, F, прямая(GH)))

$\forall_{ABCDEFGH}$(прямоугольник($ABCD$) & прямоугольник($EFGH$) & фигура($EFGH$) $\subseteq$ фигура($ABCD$) & прямая(EF) $\parallel$ прямая(AB) & однасторона(B, F, прямая(GH)) $\to$ разныестороны(F, C, прямая(GH)))

Аналогично предыдущему; пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Вписанный в окружность пятиугольник.

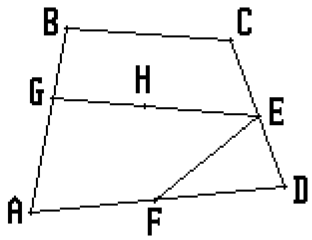


$\forall_{ABCDEM}$(окружность(MN)описана около фигура($ABCDE$) $\to$ разныестороны(C, E, прямая(AD)))

$\forall_{ABCDEM}$(окружность(MN)описана около фигура($ABCDE$) $\to$ разныестороны(B, D, прямая(AD)))

Уровень срабатывания равен 3.

(f) Отрезок, соединяющий точки на смежных сторонах четырехугольника.

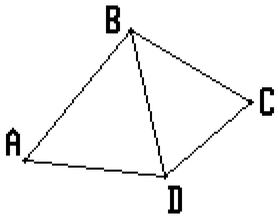


$\forall_{ABCDEFGH}$(четырехугольник($ABCD$) & $F \in$ отрезок(AD) & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AB) & $H \in$ отрезок(GE) $\to$ разныестороны(H, D, прямая(EF)))

$\forall_{ABCDEFGH}$(четырехугольник($ABCD$) & $F \in$ отрезок(AD) & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AB) & $H \in$ отрезок(GE) $\to$ разныестороны(D, H, прямая(EF)))

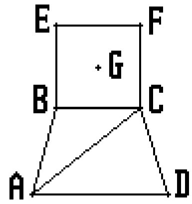
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм".

(g) Диагональ выпуклого четырехгольника.



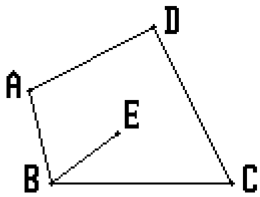
$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \to$ разныестороны$(A, C,$ прямая$(BD)))$
$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \to$ разныестороны$(C, A,$ прямая$(BD)))$
Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "вариант" разрешает рассматривать все остальные типы четырехугольников: трапеции, параллелограммы и т.п. Уровень срабатывания равен 1.

(h) Квадрат, построенный на основании трапеции.



$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(BEFC)$ & центр$(G,$ фигура$(BEFC))$ &
трапеция$(ABCD)$ & разныестороны$(E, A,$ прямая$(BC))$ &
разныестороны$(B, H,$ прямая$(AC)) \to$ разныестороны$(G, H,$ прямая$(AC)))$
$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(BEFC)$ & центр$(G,$ фигура$(BEFC))$ &
трапеция$(ABCD)$ & разныестороны$(E, A,$ прямая$(BC))$ &
разныестороны$(B, H,$ прямая$(AC)) \to$ разныестороны$(H, G,$ прямая$(AC)))$
$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(BEFC)$ & центр$(G,$ фигура$(BEFC))$ &
трапеция$(CDAB)$ & разныестороны$(E, A,$ прямая$(BC))$ &
разныестороны$(B, H,$ прямая$(AC)) \to$ разныестороны$(G, H,$ прямая$(AC)))$
$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(BEFC)$ & центр$(G,$ фигура$(BEFC))$ &
трапеция$(CDAB)$ & разныестороны$(E, A,$ прямая$(BC))$ &
разныестороны$(B, H,$ прямая$(AC)) \to$ разныестороны$(H, G,$ прямая$(AC)))$
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

(i) Точка внутри выпуклого четырехугольника.



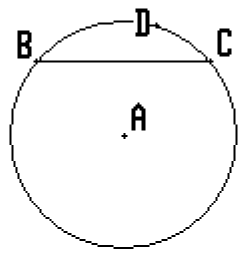
$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура$(BADC)$ & четырехугольник$(BADC) \to$
разныестороны$(A, C,$ прямая$(BE)))$

$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура$(DCBA)$ & четырехугольник$(DCBA) \rightarrow$ разныестороны$(A, C,$ прямая$(BE)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

13. Окружность.

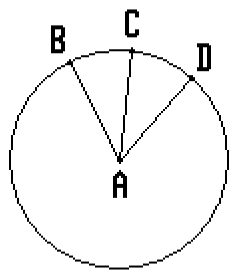
(a) Точка дуги и центр окружности лежат по разные стороны от хорды.



$\forall_{ABCD}(D \in$ дуга$(ABC) \rightarrow$ разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)))$

Уровень срабатывания равен 3.

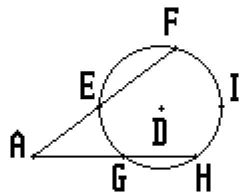
(b) Концы дуги лежат по разные стороны от радиуса, проведенного к точке этой дуги.



$\forall_{ABCD}(C \in$ дуга$(ABD) \rightarrow$ разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC)))$

Уровень срабатывания равен 3.

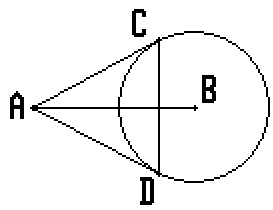
(c) Взаимное расположение точки вне окружности и центра окружности по отношению к хорде с концами в точках пересечения секущих с окружностью.



$\forall_{ADEFGHI}(E \in$ окружность(DI) & $F \in$ окружность(DI) & $G \in$ окружность(DI) & $H \in$ окружность(DI) & $E \in$ отрезок(AF) & $G \in$ отрезок(AH) & разныеточки(G, H) & разныеточки(E, F) & разныепрямые(прямая(AF), прямая$(AH)) \rightarrow$ разныестороны$(A, D,$ прямая$(EG)))$

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", последние три - обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 4.

(d) Общая точка двух внешних касательных и центр окружности лежат по разные стороны от хорды.

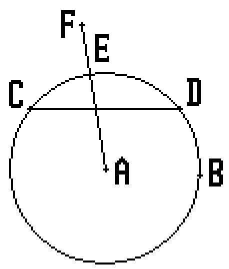


$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & $D \in$ окружность(BC) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ разныестороны$(A, B,$ прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & $D \in$ окружность(BC) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ разныестороны$(B, A,$ прямая$(CD)))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Учет тупого угла, опирающегося на хорду.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $\angle(CED) - \pi/2$ & актив$(\angle(CED))$ & $E \in$ отрезок(AF) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ разныестороны$(A, F,$ прямая$(CD)))$

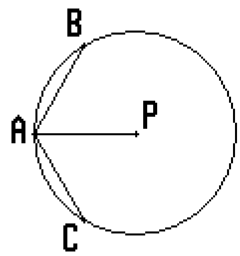
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $\angle(CED) - \pi/2$ & актив$(\angle(CED))$ & $E \in$ отрезок(AF) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ разныестороны$(F, A,$ прямая$(CD)))$

Четвертый и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Обработка четвертого антецедента сопровождается сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFa}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $\angle(CED) = a$ & $0 < a - \pi/2$ & актив$(\angle(CED))$ & однасторона$(E, F,$ прямая$(CD))$ & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ разныестороны$(A, F,$ прямая$(CD)))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой; пятый и два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение a константное. Обработка двух последних антецедентов сопровождается сильными ограничителями трудоемкости. Предполагается наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 4.

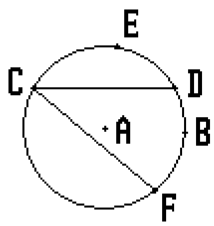
(f) Концы двух хорд равной длины лежат по разные стороны от радиуса, проведенного к их общему концу.



$\forall_{ABCP}(A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) &
$C \in$ окружность(PQ) & $l(AB) = l(AC)$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
разныестороны$(B, C,$ прямая$(AP)))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

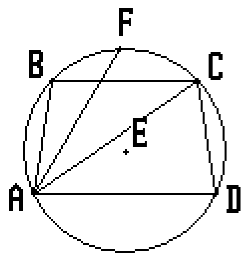
(g) Точка дуги и точка окружности, расстояние которой от конца хорды не меньше длины этой хорды.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ дуга(ACD) &
$0 \leq l(CF) - l(CD) \rightarrow$ разныестороны$(E, F,$ прямая$(CD)))$

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(h) Трапеция, вписанная в окружность.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура($ABCD$) & трапеция($ABCD$) & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ разныестороны(B, C, прямая(AF)))

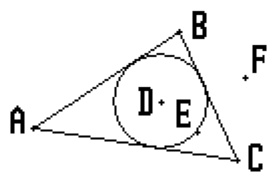
$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура($ABCD$) & трапеция($ABCD$) & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ разныестороны(F, D, прямая(AC)))

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура($ABCD$) & трапеция($ABCD$) & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ разныестороны(B, D, прямая(AF)))

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура($ABCD$) & трапеция($ABCD$) & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ разныестороны(D, B, прямая(AF)))

При идентификации вершин трапеции разрешается изменение порядка вершин на противоположный; при идентификации терма "фигура(...)" - возможны циклические перестановки операндов. Уровень срабатывания равен 2.

(i) Окружность, вписанная в треугольник.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & разныестороны(A, F, прямая(BC)) $\rightarrow$ разныестороны(F, D, прямая(BC)))

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & разныестороны(A, F, прямая(BC)) $\rightarrow$ разныестороны(D, F, прямая(BC)))

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & разныестороны(D, F, прямая(BC)) $\rightarrow$ разныестороны(F, A, прямая(BC)))

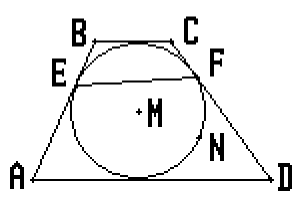
$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & разныестороны(D, F, прямая(BC)) $\rightarrow$ разныестороны(A, F, прямая(BC)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин треугольника несущественен. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$ $\neg$(разныестороны(D, C, прямая(AB))))

Прием имеет указатель "не" и используется для немедленной выдачи отказа. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Окружность, вписанная в трапецию.



$\forall_{ABCDEFMN}$(окружность(MN) вписана в фигура$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(AB) & $E \in$ окружность(MN) & $F \in$ отрезок(CD) & $F \in$ окружность$(MN) \to$ разныестороны$(M, B,$ прямая$(EF)))$

$\forall_{ABCDEFMN}$(окружность(MN) вписана в фигура$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(AB) & $E \in$ окружность(MN) & $F \in$ отрезок(CD) & $F \in$ окружность$(MN) \to$ разныестороны$(B, M,$ прямая$(EF)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(k) Вершины многоугольника, вписанного в окружность.

$\forall_{ABCDEFaijkln}$(окружность(EF) описана около фигура(a) & многоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $D = a(l)$ & $i < k$ & $i < j$ & $k < j$ & $(l < i \lor j < l) \to$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)))$

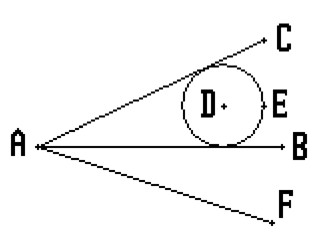
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем выражение a имеет заголовок "набор". Третий антецедент определяет длину n этого набора с помощью нормализатора "нормдлинанабора". Антецеденты с четвертого по седьмой выделены указателем "усм". Они определяют номера i, j, k, l вершин A, B, C, D. Четыре последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCEFaijkn}$(окружность(EF) описана около фигура(a) & правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $(2i - 2 \leq n$ & $(j < i \lor 2i + n < 2j)$ & $i < k$ & $2k < 2i + n \lor n < 2i - 2$ & $(2j < 2i - n \lor i < j)$ & $2i - n < 2k$ & $k < i) \to$ разныестороны$(C, B,$ прямая$(EA)))$

$\forall_{ABCEFaijkn}$(окружность(EF) описана около фигура(a) & правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $(2i - 2 \leq n$ & $(j < i \lor 2i + n < 2j)$ & $i < k$ & $2k < 2i + n \lor n < 2i - 2$ & $(2j < 2i - n \lor i < j)$ & $2i - n < 2k$ & $k < i) \to$ разныестороны$(B, C,$ прямая$(EA)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Антецеденты с четвертого по шестой выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(l) Окружность, вписанная в угол.

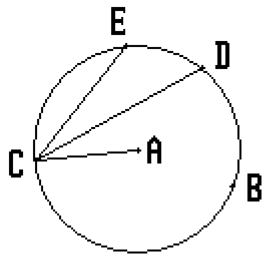


$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в Угол(BAC) & разныестороны$(C, F,$ прямая$(AB)) \to$ разныестороны$(F, D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в Угол(BAC) & разныестороны$(C, F,$ прямая$(AB)) \to$ разныестороны$(D, F,$ прямая$(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(m) Сравнение длин двух хорд, имеющих общий конец.

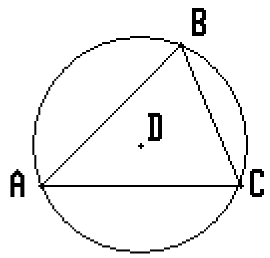


$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $0 < l(CD) - l(CE)$ & однасторона$(E, D,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ разныестороны$(A, E,$ прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $0 < l(CD) - l(CE)$ & однасторона$(E, D,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ разныестороны$(E, A,$ прямая$(CD)))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Для них введены сильные ограничители трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

(n) Центр описанной около треугольника окружности.



$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $0 < d$ & однасторона$(B, F,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ разныестороны$(F, D,$ прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $0 < d$ & однасторона$(B, F,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ разныестороны$(D, F,$ прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $d < 0$ & разныестороны$(B, F,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ разныестороны$(F, D,$ прямая$(AC)))$

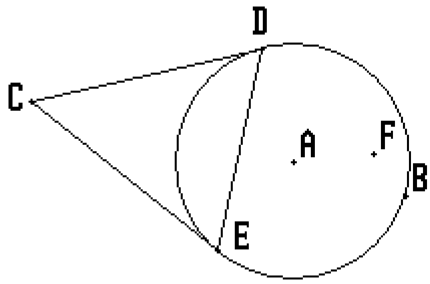
$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $d < 0$ & разныестороны$(B, F,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ разныестороны$(D, F,$ прямая$(AC)))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой; первые три и пятый - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c константные. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $0 \leq d \rightarrow$ разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC)))$

Аналогично предыдущему.

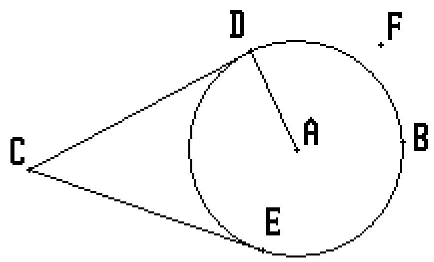
(o) Точка пересечения двух касательных и центр окружности лежат по разные стороны от хорды, соединяющей точки касания.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) & разныеточки(D, E) & однасторона$(A, F,$ прямая$(DE)) \rightarrow$ разныестороны$(C, F,$ прямая$(DE)))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

(p) Две касательных, проведенных из общей точки, и радиус, проведенный в точку касания.

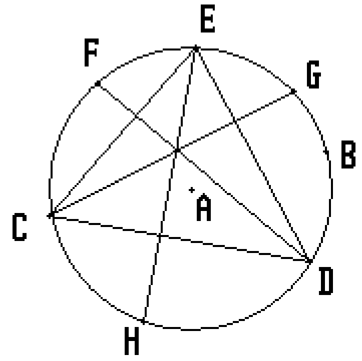


$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CE) & разныеточки(D, E) & разныестороны$(C, F,$ прямая$(AD)) \rightarrow$ разныестороны$(F, E,$ прямая$(AD)))$

$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CE) & разныеточки(D, E) & разныестороны$(C, F,$ прямая$(AD)) \rightarrow$ разныестороны$(E, F,$ прямая$(AD)))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Для шестого антецедента имеется сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

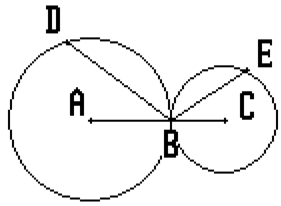
(q) Высоты вписанного остроугольного треугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CG) \perp$ прямая(DE) & прямая$(CE) \perp$ прямая(DF) & прямая$(EH) \perp$ прямая(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(CDE))$ & актив$(\angle(DCE))$ & $0 < \pi/2 - \angle(CED)$ & $0 < \pi/2 - \angle(CDE)$ & $0 < \pi/2 - \angle(DCE) \to$ разныестороны$(F, H,$ прямая$(CG)))$

Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Требуется наличие комментария "усиление". Уровень срабатывания равен 3.

(r) Учет внешнего касания окружностей.

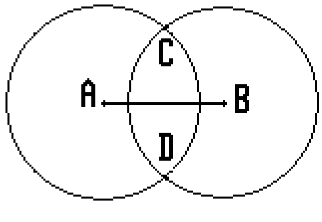


$\forall_{ABCDE}($внешкасаются$($окружность$(AB),$ окружность$(CB))$ & однасторона$(D, E,$ прямая$(AC))$ & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность$(CB) \to$ разныестороны$(A, E,$ прямая$(BD)))$

$\forall_{ABCDE}($внешкасаются$($окружность$(AB),$ окружность$(CB))$ & однасторона$(D, E,$ прямая$(AC))$ & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность$(CB) \to$ разныестороны$(E, A,$ прямая$(BD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

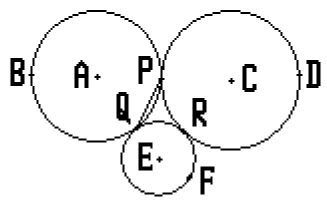
(s) Точки пересечения двух окружностей лежат по разные стороны от прямой, соединяющей их центры.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AD) & $C \in$ окружность(BD) & разныеточки(C, D) & разныеточки$(A, B) \to$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Два первых антецедента выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания приема равен 2.

(t) Три окружности, касающиеся внешним образом.

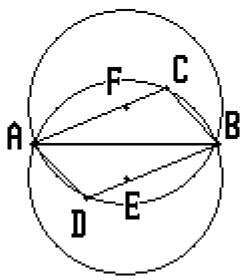


$\forall_{ABCDEFPQR}($внешкасаются$($окружность$(AB),$ окружность$(CD))$ & внешкасаются$($окружность$(AB),$ окружность$(EF))$ & внешкасаются$($окружность$(CD),$ окружность$(EF))$ & $P \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(CD) & $Q \in$ окружность(AB) & $Q \in$ окружность(EF) & $R \in$ окружность(CD) & $R \in$ окружность$(EF) \to$ разныестороны$(A, R,$ прямая$(PQ)))$

$\forall_{ABCDEFPQR}($внешкасаются$($окружность$(AB),$ окружность$(CD))$ & внешкасаются$($окружность$(AB),$ окружность$(EF))$ & внешкасаются$($окружность$(CD),$ окружность$(EF))$ & $P \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(CD) & $Q \in$ окружность(AB) & $Q \in$ окружность(EF) & $R \in$ окружность(CD) & $R \in$ окружность$(EF) \to$ разныестороны$(R, A,$ прямая$(PQ)))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

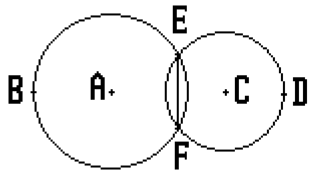
(u) Центры окружностей, описанных около треугольников, центрально симметричных относительно точки прямой.



$\forall_{ABCDEF}($окружность(FP) описана около фигура(ABC) & окружность(EQ) описана около фигура(ABD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(BD) & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)) \to$ разныестороны$(E, F,$ прямая$(AB)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий и четвертый - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(v) Центр окружности, лежащей вне другой окружности, лежит от ее центра по другую сторону от общей хорды.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F)
& $\neg(C \in$ круг$(AB))$ & $\neg(A \in$ круг$(CD)) \to$ разныестороны$(A, C,$
прямая$(EF)))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последние три - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

14. Векторы.

Напомним, что в случае векторов утверждение "разныестороны$(a\ b\ c)$" означает размещение векторов a, b в одной плоскости с ненулевым вектором c, причем по разные стороны от прямой, определяемой этим вектором.

(a) Учет однонаправленности векторов.
$\forall_{abcd}($однонаправлены(a, b) & разныестороны$(c, d, a) \to$
разныестороны$(c, d, b))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

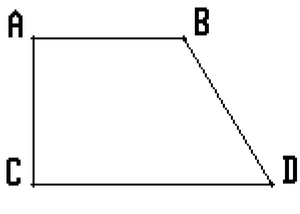
(b) Минус-вектор.
$\forall_{abc}($разныестороны$(a, b, c) \to$ разныестороны$(a, b, -c))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3.19 Приемы, связанные с символом "однасторона"

Утверждение "однасторона$(A\ B\ C)$" означает, что точки A, B лежат по одну сторону от прямой либо плоскости C, причем в первом случае A, B, C расположены в общей плоскости. Допускаются случаи попадания этих точек на C. Содержимое данного раздела аналогично содержимому предыдущего раздела.

Определение расстояния между двумя точками, лежащими по одну сторону от некоторой прямой, с помощью расстояний их до этой прямой



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC)) \to l(BD)^2 = l(AC)^2 + (l(CD) - l(AB))^2)$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Расстояния AC, CD, AB известны; выражение для расстояния BD имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 8. Для той же теоремы созданы еще две версии приема, срабатывающие на уровне 9. В первой из них предполагаются известными расстояния BD, CD и AB, причем выражение для расстояния AC должно содержать неизвестные. Во второй версии требуется, чтобы расстояние BD равнялось расстоянию CD либо расстоянию AB. Результирующее соотношение должно иметь не более двух неизвестных числовых атомов.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & $l(AB) = a$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC)) \to l(BD)^2 = l(AC)^2 + (l(CD) - l(AB))^2)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Расстояния BD, AC, CD уже введены в рассмотрение, причем два из них известны, а третье - нет. Уровень срабатывания равен 8.

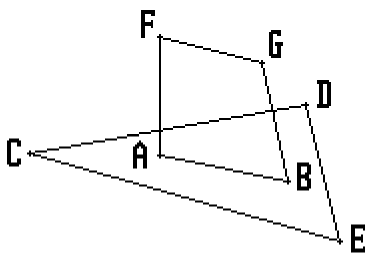
$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & $p = l(CD) - l(AB) \to l(BD)^2 = l(AC)^2 + p^2)$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки располагается в первом из них. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором, пятый - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Результат p не содержит неизвестных. Одно из расстояний BD, AC известно, а выражение для другого - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & $p = l(AC)^2 + (l(CD) - l(AB))^2 \to l(BD)^2 = p)$

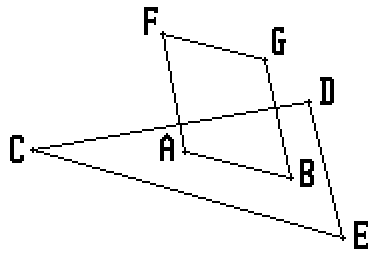
Обработка антецедентов аналогична предыдущему случаю, но правая часть пятого антецедента дополнительно обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Каждое из выражений для расстояний AB, CD имеет тип "применимо" либо "определимо". Расстояние BD либо известно, либо выражение для него имеет тип "неизв". Выражение p содержит числовой атом типа "применимо". Уровень срабатывания равен 10.

Если две точки лежат по одну сторону от плоскости, то они лежат по одну сторону от прямой, по которой содержащая их плоскость пересекается с первой плоскостью



$\forall_{ABCDEFG}(A \in$ плоскость(CDE) & $B \in$ плоскость(CDE) & разныеточки(A, B) & однасторона$(F, G,$ плоскость$(CDE))$ & $F \in$ плоскость(ABG) & $\neg(G \in$ плоскость$(CDE)) \to$ однасторона$(F, G,$ прямая$(AB)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой; третий и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В планиметрических задачах прием блокируется. Уровни срабатывания равны 4 и 9.



$\forall_{ABCDEFG}(A \in$ плоскость(CDE) & $B \in$ плоскость(CDE) & разныеточки(A, B) & однасторона$(F, G,$ плоскость$(CDE))$ &прямая$(AF) \parallel$ прямая(BG) & $\neg(G \in$ плоскость$(CDE)) \to$ однасторона$(F, G,$ прямая$(AB)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 5.

Если точка одновременно лежит по одну сторону и по другую сторону от данной точки вне прямой, то она лежит на прямой

$\forall_{ABCD}($однасторона$(A, B,$ прямая$(CD))$ & разныестороны$(A, B,$ прямая$(CD))$ & $\neg(B \in$ прямая$(CD)) \to A \in$ прямая$(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

Обращение к оператору "однасторона" для доказательства того, что две точки лежат по одну сторону от прямой

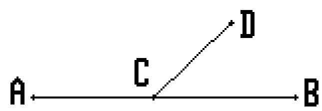
$\forall_{ABCD}($однасторона$(A, B,$ прямая$(CD)) \to$ однасторона$(A, B,$ прямая$(CD)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор "однасторона"

Оператор аналогичен оператору "разныестороны".

1. Одна из точек лежит на рассматриваемой прямой.



$\forall_{ABCD}(C \in$ прямая$(AB) \to$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}(C \in \text{прямая}(AB) \to \text{однасторона}(D, C, \text{прямая}(AB)))$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

2. Использование идентифицирующего оператора.

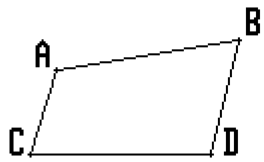
   $\forall_{abc}(\text{однасторона}(a, b, c) \to \text{однасторона}(a, b, c))$

   Антецедент выделен указателем "усм". Он обрабатывается идентифицирующим оператором "Однасторона". Уровень срабатывания равен 1.

3. Учет параллельности.

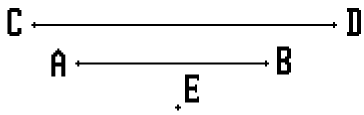
   $\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \to \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$

   Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}(\text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD))\ \&\ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(BD)\ \&$ $\text{разныепрямые}(\text{прямая}(CD), \text{прямая}(BD)) \to \text{однасторона}(D, C, \text{прямая}(AB))))$

Первый и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами, второй - выделен указателем "усм". Для блокировки повторного использования приема при рекурсивном обращении используется комментарий "параллелограмм". Уровень срабатывания равен 2.

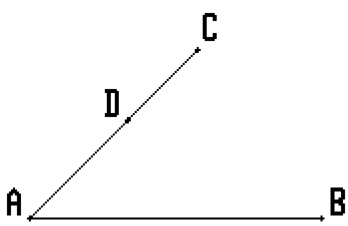


$\forall_{ABcE}(\text{однасторона}(E, A, \text{прямая}(CD))\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \to$ $\text{однасторона}(B, E, \text{прямая}(CD)))$

$\forall_{ABcE}(\text{однасторона}(E, A, \text{прямая}(CD))\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \to$ $\text{однасторона}(E, B, \text{прямая}(CD)))$

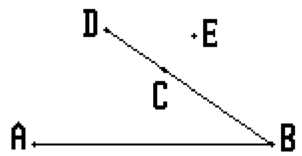
Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "усм". Для блокировки повторного применения приема при рекурсивном обращении используется комментарий (параллельны прямая(AB)). Уровень срабатывания равен 2.

4. Усмотрение из взаимного расположения точек на прямой, пересекающейся с данной.



$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(CD)) & $A \in$ прямая(CD) & точкалуча(A, C, D) $\rightarrow$ однасторона(D, C, прямая(AB)))

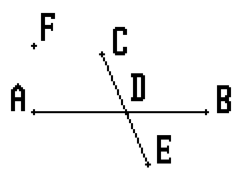
Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDE}$($C \in$ отрезок(BD) & однасторона(D, E, прямая(AB)) $\rightarrow$ однасторона(C, E, прямая(AB)))

$\forall_{ABCDE}$($C \in$ отрезок(BD) & однасторона(D, E, прямая(AB)) $\rightarrow$ однасторона(E, C, прямая(AB)))

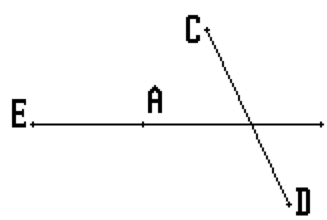
Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Для него введен очень сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}$(разныестороны(F, E, прямая(AB)) & $D \in$ отрезок(CE) & $D \in$ прямая(AB) $\rightarrow$ однасторона(C, F, прямая(AB)))

$\forall_{ABCDEF}$(разныестороны(F, E, прямая(AB)) & $D \in$ отрезок(CE) & $D \in$ прямая(AB) $\rightarrow$ однасторона(F, C, прямая(AB)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

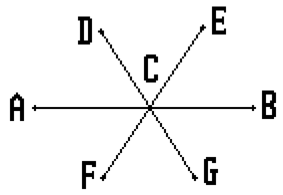


$\forall_{ABCDE}$(разныестороны(A, B, прямая(CD)) & $A \in$ отрезок(BE) $\rightarrow$ однасторона(E, A, прямая(CD)))

$\forall_{ABCDE}$(разныестороны(A, B, прямая(CD)) & $A \in$ отрезок(BE) $\rightarrow$ однасторона(A, E, прямая(CD)))

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с посылкой. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

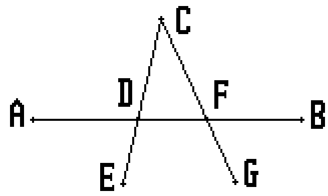
5. Переход к точкам по другую сторону прямой.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ прямая(AB) & $C \in$ отрезок(DG) & $C \in$ отрезок(EF) & однасторона$(F, G,$ прямая$(AB))$ & разныеточки(C, F) & разныеточки$(C, G) \rightarrow$ однасторона$(D, E,$ прямая$(AB)))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", последние три - обрабатываются проверочными операторами. Для обработки четвертого антецедента введен сильный органичитель трудоемкости. Блокировка повторного использования приема при рекурсивном обращении обеспечивается комментарием "(центр отрезок)". Уровень срабатывания равен 4.

6. Двойной переход через прямую.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ отрезок(CE) & $F \in$ отрезок(CG) & $D \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ однасторона$(E, G,$ прямая$(AB)))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

7. Использование третьей точки, не лежащей на прямой.

$\forall_{ABCDE}($однасторона$(A, B,$ прямая$(CD))$ & однасторона$(E, B,$ прямая$(CD))$ & $\neg(B \in$ прямая$(CD)) \rightarrow$ однасторона$(A, E,$ прямая$(CD)))$

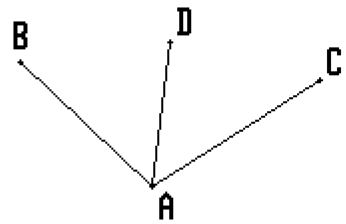
Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

8. Учет биссектрисы угла.

$\forall_{ABCDE}($биссектриса$(ABCD)$ & однасторона$(E, C,$ прямая$(AB)) \rightarrow$ однасторона$(E, D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCDE}($биссектриса$(ABCD)$ & однасторона$(C, E,$ прямая$(AB)) \rightarrow$ однасторона$(D, E,$ прямая$(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

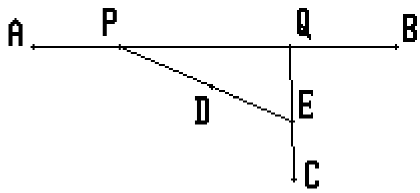


$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(BACD) \to$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(BACD) \to$ однасторона$(B, D,$ прямая$(AB)))$

Уровень срабатывания равен 2.

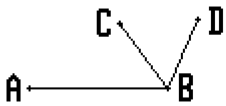
9. Рассмотрение двух прямых, пересекающихся с данной.



$\forall_{ABCDEPQ}(P \in$ прямая(AB) & $Q \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(QC) & $D \in$ прямая(PE) & точкалуча(Q, E, C) & точкалуча$(P, D, E) \to$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

10. Усмотрение путем вычисления углов.



$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p$ & $\angle(CBD) = q$ & $0 \leq p + q$ & $0 \leq \pi - p - q$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

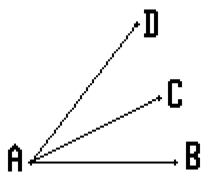
$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p$ & $\angle(CBD) = q$ & $0 \leq p + q$ & $0 \leq \pi - p - q$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "величинаугла", причем имеются сильные ограничители трудоемкости. Выражение p константное. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами; последний антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p$ & $\angle(CBD) = q$ & $\pi - p - q < 0$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ $\neg$однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = p$ & $\angle(CBD) = q$ & $\pi - p - q < 0$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ $\neg$однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Аналогично предыдущему, но приемы используются для немедленной выдачи отказа. Это достигается с помощью указателя "не". Уровень срабатывания равен 4.

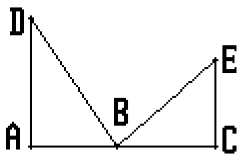


$\forall_{ABCD}$(разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(CAD) \rightarrow$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}$(разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(CAD) \rightarrow$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами; для подготовки операндов используются только нормализаторы общей стандартизации. Проверка первого антецедента сопровождается сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

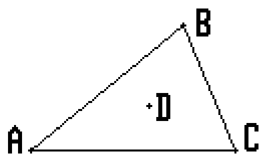
11. Точки лежат на перпендикулярах, проведенных к рассматриваемой прямой.



$\forall_{ABCDE}(B \in$ отрезок(AC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AC) & $0 < \pi/2 - \angle(DBE)$ & $E \in$ плоскость$(ABD) \rightarrow$ однасторона$(D, E,$ прямая$(AC)))$

Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Имеется сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

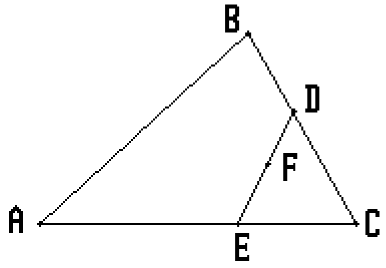
12. Усмотрение из принадлежности треугольнику.



$\forall_{ABCD}(D \in$ фигура$(ABC) \rightarrow$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}(D \in$ фигура$(ABC) \rightarrow$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Первый прием имеет уровень срабатывания 2, второй - 4.



$\forall_{ABCDEF}(E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ F \in \text{отрезок}(DE) \to \text{однасторона}(C, F, \text{прямая}(AB)))$

$\forall_{ABCDEF}(E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ F \in \text{отрезок}(DE) \to \text{однасторона}(F, C, \text{прямая}(AB)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

13. Точка внутри угла.

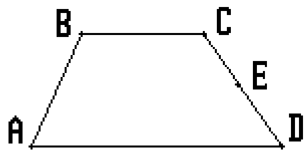
$\forall_{ABCDE}(A \in \text{Угол}(BCD)\ \&\ \text{однасторона}(E, B, \text{прямая}(CD)) \to \text{однасторона}(E, A, \text{прямая}(CD)))$

$\forall_{ABCDE}(A \in \text{Угол}(BCD)\ \&\ \text{однасторона}(E, B, \text{прямая}(CD)) \to \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

14. Многоугольники.

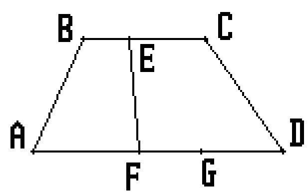
(a) Трапеция.



$\forall_{ABCDE}(\text{трапеция}(ABCD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(CD) \to \text{однасторона}(D, E, \text{прямая}(AB)))$

$\forall_{ABCDE}(\text{трапеция}(ABCD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(CD) \to \text{однасторона}(E, D, \text{прямая}(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Второй антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

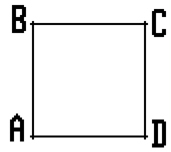


$\forall_{ABCDEFG}(\text{трапеция}(ABCD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ F \in \text{отрезок}(AD)\ \&\ \text{точкалуча}(F, G, D)\ \&\ G \in \text{прямая}(AD) \to \text{однасторона}(C, G, \text{прямая}(EF)))$

$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AD) & точкалуча(F, G, D) & $G \in$ прямая$(AD) \to$ однасторона$(G, C,$ прямая$(EF)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

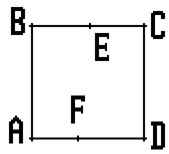
(b) Квадрат.



$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \to$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \to$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 2.

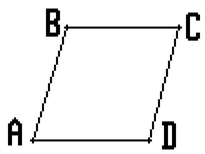


$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AD) & квадрат$(ABCD) \to$ однасторона$(E, F,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AD) & квадрат$(ABCD) \to$ однасторона$(F, E,$ прямая$(AB)))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Параллелограмм.

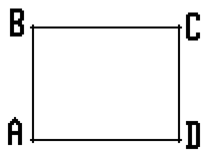


$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD) \to$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD) \to$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

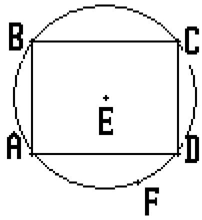
Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

(d) Прямоугольник.



$\forall_{ABCD}$(прямоугольник$(ABCD) \rightarrow$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 2.

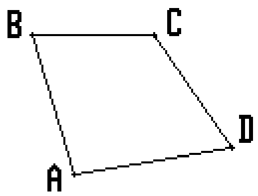


$\forall_{ABCDEF}$(прямоугольник$(ABCD)$ & окружность(EF) описана около фигура$(ABCD) \rightarrow$ однасторона$(A, E,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCDEF}$(прямоугольник$(ABCD)$ & окружность(EF) описана около фигура$(ABCD) \rightarrow$ однасторона$(E, A,$ прямая$(BC)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

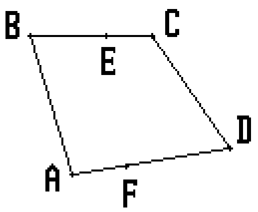
(e) Четырехугольник.



$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & точкалуча(B, E, C) & точкалуча$(A, D, F) \rightarrow$ однасторона$(E, F,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & точкалуча(B, E, C) & точкалуча$(A, D, F) \rightarrow$ однасторона$(F, E,$ прямая$(AB)))$

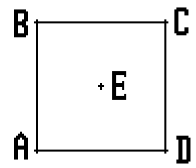
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(f) Правильный многоугольник.

$\forall_{ABCDEFaijkln}$(правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $D = a(l)$ & $i < j$ & $(i \leq k$ & $i \leq l$ & $k \leq j$ & $l \leq j \ \vee$ $(l \leq i \ \vee \ j \leq l)$ & $(k \leq i \ \vee \ j \leq k)) \rightarrow$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

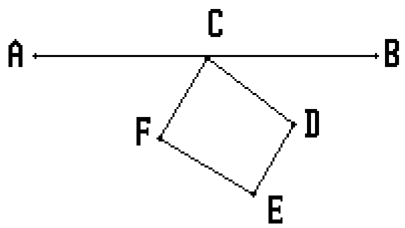
(g) Центр квадрата.



$\forall_{ABCDE}$(квадрат$(ABCD)$ & центр$(E,$ фигура$(ABCD)) \to$ однасторона$(E, B,$ прямая$(AD)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускается циклическая перестановка вершин. Уровень срабатывания равен 3.

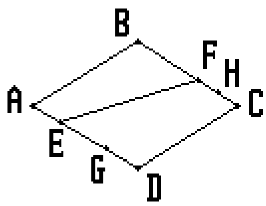
(h) Одна вершина четырехугольника лежит на прямой, а две смежные вершины - по одну сторону от этой прямой.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ прямая(AB) & четырехугольник$(CDEF)$ & однасторона$(D, F,$ прямая$(AB)) \to$ однасторона$(D, E,$ прямая$(AB)))$

Два последних антецедента идентифицируются с посылками, причем вместо символа "четырехугольник" может располагаться любой из символов для частных случаев четырехугольника - "квадрат", "трапеция", и т.д. Допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на обратный. Первый антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

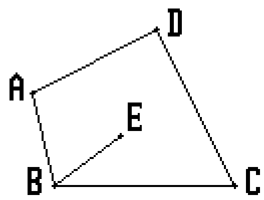
(i) Отрезок, соединяющий точки на противоположных сторонах четырехугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}$(ромб$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(ED) & $H \in$ отрезок$(FC) \to$ однасторона$(G, H,$ прямая$(EF)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем вместо символа "ромб" может использоваться любой другой тип четырехугольника. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(j) Точка внутри выпуклого четырехугольника.

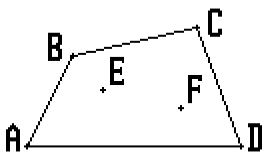


$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура$(BADC)$ & четырехугольник$(BADC) \rightarrow$ однасторона$(E, C,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура$(DCBA)$ & четырехугольник$(DCBA) \rightarrow$ однасторона$(E, C,$ прямая$(AB)))$

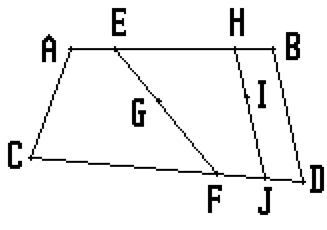
Антецеденты идентифицируются с посылками, причем вместо символа "четырехугольник" может использоваться любой другой тип четырехугольника. Допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на обратный. Уровень срабатывания равен 3.

(k) Две точки внутри выпуклого четырехугольника.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ фигура$(ABCD)$ & $F \in$ фигура$(ABCD)$ & четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ однасторона$(E, F,$ прямая$(AD)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем вместо символа "четырехугольник" может использоваться любой другой тип четырехугольника. Допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 3.

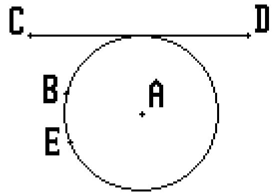


$\forall_{ABCDEFGIJ}($четырехугольник$(CABD)$ & $G \in$ отрезок(EF) & $I \in$ отрезок(HJ) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & $H \in$ отрезок(AB) & $J \in$ отрезок$(CD) \rightarrow$ однасторона$(I, G,$ прямая$(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются другие типы четырехугольников, а вершины можно циклически переставлять. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

15. Окружность.

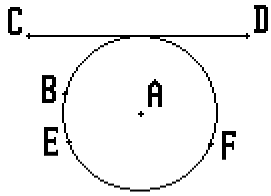
(a) Касательная к окружности.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) &
$E \in$ окружность$(AB) \to$ однасторона$(E, A,$ прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDE}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) &
$E \in$ окружность$(AB) \to$ однасторона$(A, E,$ прямая$(CD)))$

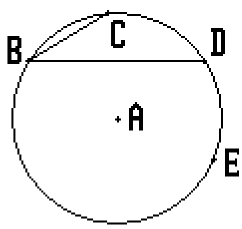
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность$(AB) \to$ однасторона$(E, F,$ прямая$(CD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

(b) Переход к рассмотрению большей хорды.

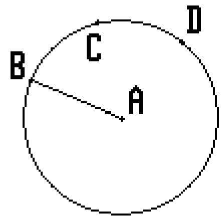


$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & разныестороны$(C, A,$ прямая$(BD))$ &
однасторона$(A, E,$ прямая$(BD)) \to$ однасторона$(E, A,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & разныестороны$(C, A,$ прямая$(BD))$ &
однасторона$(A, E,$ прямая$(BD)) \to$ однасторона$(A, E,$ прямая$(BC)))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Точка дуги лежит по ту же сторону от радиуса, проведенному к концу дуги, что и другой конец.

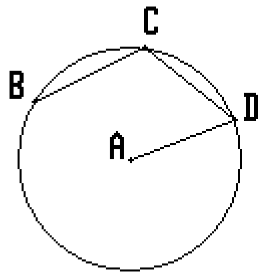


$\forall_{ABCD}(C \in \text{дуга}(ABD) \to \text{однасторона}(D, C, \text{прямая}(AB)))$

$\forall_{ABCD}(C \in \text{дуга}(ABD) \to \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приемов равен 3.

(d) Тупой вписанный угол.

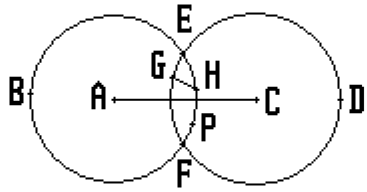


$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AE)) & $C \in$ окружность(AE) & $B \in$ окружность(AE) & $D \in$ окружность(AE) & $0 \leq \angle(BCD) - \pi/2 \to$ однасторона$(D, C,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AE)) & $C \in$ окружность(AE) & $B \in$ окружность(AE) & $D \in$ окружность(AE) & $0 \leq \angle(BCD) - \pi/2 \to$ однасторона$(B, C,$ прямая$(AD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

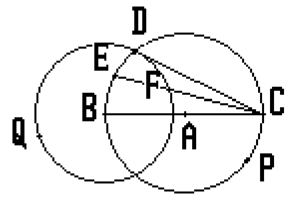
(e) Две пересекающиеся окружности.



$\forall_{ABCDEFGHP}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & $G \in$ дуга(CEF) & $H \in$ дуга(AEF) & $P \in$ дуга(AHF) & $l(AE) = l(CE)$ & разныеточки$(A, C) \to$ однасторона$(P, F,$ прямая$(GH)))$

$\forall_{ABCDEFGHP}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & $G \in$ дуга(CEF) & $H \in$ дуга(AEF) & $P \in$ дуга(AHF) & $l(AE) = l(CE)$ & разныеточки$(A, C) \to$ однасторона$(F, P,$ прямая$(GH)))$

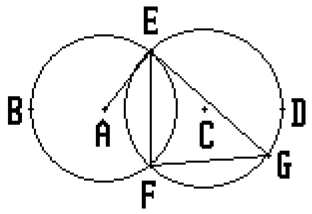
Утверждения о принадлежности точек дугам идентифицируются с посылками. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", девятый - выделен указателем "идентификатор". Пятый и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания приемов равен 4.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AP) & $B \in$ окружность(AP) & $A \in$ отрезок(BC) & $C \in$ окружность(AP) & $D \in$ окружность(BQ) & $F \in$ прямая(CE) & $F \in$ окружность$(BQ) \rightarrow$ однасторона$(A, E,$ прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AP) & $B \in$ окружность(AP) & $A \in$ отрезок(BC) & $C \in$ окружность(AP) & $D \in$ окружность(BQ) & $F \in$ прямая(CE) & $F \in$ окружность$(BQ) \rightarrow$ однасторона$(E, A,$ прямая$(CD)))$

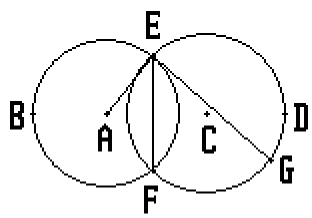
Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AE) & $G \in$ окружность(CD) & разныестороны$(A, C,$ прямая$(EF)) \rightarrow$ однасторона$(C, E,$ прямая$(FG)))$

$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AE) & $G \in$ окружность(CD) & разныестороны$(A, C,$ прямая$(EF)) \rightarrow$ однасторона$(E, C,$ прямая$(FG)))$

Пятый и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Для восьмого антецедента введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания приемов равен 3.

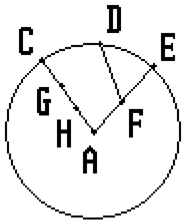


$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) &

прямая$(EG) \perp$ прямая(AE) & $G \in$ окружность(CD) &
разныестороны$(A, C,$ прямая$(EF)) \to$ однасторона$(D, C,$ прямая$(EF)))$
$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) &
прямая$(EG) \perp$ прямая(AE) & $G \in$ окружность(CD) &
разныестороны$(A, C,$ прямая$(EF)) \to$ однасторона$(C, D,$ прямая$(EF)))$

Аналогично предыдущему.

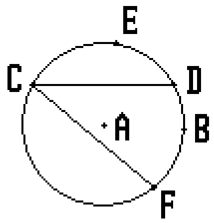
(f) Точки на радиусе лежат по одну сторону от прямой, соединяющей точку дуги с точкой на другом радиусе.



$\forall_{ABCDEFGH}(D \in$ дуга(ACE) & $G \in$ отрезок(AC) & $H \in$ отрезок(AC) &
$F \in$ отрезок$(AE) \to$ однасторона$(G, H,$ прямая$(DF)))$

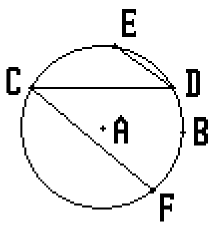
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(g) Точка дуги и точка окружности, расстояние которой от конца хорды не меньше длины этой хорды.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ дуга(ACD) &
$0 \leq l(CF) - l(CD) \to$ однасторона$(D, E,$ прямая$(CF)))$

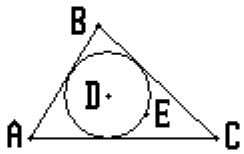
Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", пятый - идентифицируется с посылкой. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ дуга(ACD) &
$0 \leq l(CF) - l(CD) \to$ однасторона$(C, F,$ прямая$(DE)))$

Аналогично предыдущему.

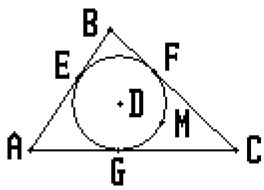
(h) Центр вписанной в треугольник окружности.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) $\to$ однасторона($C, D,$ прямая(AB)))

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) $\to$ однасторона($D, C,$ прямая(AB)))

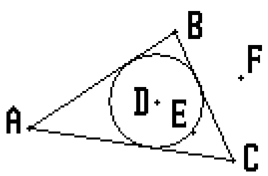
Антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок перечисления вершин несущественен. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(DE) & $E \in$ окружность(DM) & $E \in$ прямая(AB) & прямая(BC) $\perp$ прямая(DF) & $F \in$ окружность(DM) & $F \in$ прямая(BC) & $G \in$ окружность(DM) & прямая(AC) $\perp$ прямая(DG) & $G \in$ прямая(AC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) & актив(окружность(DM)) $\to$ однасторона($D, F,$ прямая(EG)))

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(DE) & $E \in$ окружность(DM) & $E \in$ прямая(AB) & прямая(BC) $\perp$ прямая(DF) & $F \in$ окружность(DM) & $F \in$ прямая(BC) & $G \in$ окружность(DM) & прямая(AC) $\perp$ прямая(DG) & $G \in$ прямая(AC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) & актив(окружность(DM)) $\to$ однасторона($F, D,$ прямая(EG)))

Антецеденты с заголовком "разныепрямые" обрабатываются проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & однасторона($D, F,$ прямая(BC)) $\to$ однасторона($A, F,$ прямая(BC)))

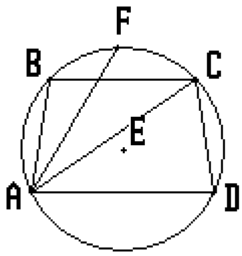
$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & однасторона($D, F,$ прямая(BC)) $\to$ однасторона($F, A,$ прямая(BC)))

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & однасторона$(A, F,$ прямая$(BC))$ $\rightarrow$ однасторона$(F, D,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) & однасторона$(A, F,$ прямая$(BC))$ $\rightarrow$ однасторона$(D, F,$ прямая$(BC)))$

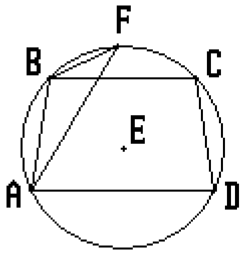
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(i) Трапеция, вписанная в окружность.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура$(ABCD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ однасторона$(B, F,$ прямая$(AC)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем в первом из них допускаются циклические перестановки вершин, а во втором - изменение порядка вершин на обратный. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура$(ABCD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ однасторона$(A, D,$ прямая$(BF)))$

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура$(ABCD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ однасторона$(D, A,$ прямая$(BF)))$

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура$(ABCD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ однасторона$(C, A,$ прямая$(BF)))$

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG) описана около фигура$(ABCD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $F \in$ дуга(EBC) $\rightarrow$ однасторона$(A, C,$ прямая$(BF)))$

Аналогично предыдущему.

(j) Вершины многоугольника, вписанного в окружность.

$\forall_{ABCDEFaijkln}$(окружность(EF) описана около фигура(a) & многоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $D = a(l)$ & $i < j$ & $(i \leq k$ & $i \leq l$ & $k \leq j$ & $l \leq j \;\vee\; (l \leq i \;\vee\; j \leq l)$ & $(k \leq i \;\vee\; j \leq k))$ $\rightarrow$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор"; он определяет число вершин

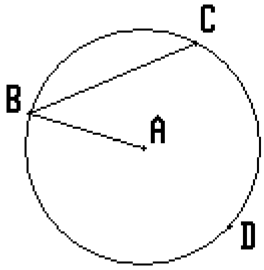
n. Антецеденты с четвертого по седьмой выделены указателем "усм". Первые два из них перечисляют вершины многоугольника, идентифицируемые с A, B; последние два - определяют номера вершин C, D. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCEFaijkn}$(окружность(EF) описана около фигура(a) & правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $j < k$ & $(n < 2k - 2j$ & $j \leq i$ & $i \leq k \ \vee \ 2k - 2j \leq n$ & $(i \leq j \ \vee \ k \leq i)) \rightarrow$ однасторона$(A, E,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCEFaijkn}$(окружность(EF) описана около фигура(a) & правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & $C = a(k)$ & $j < k$ & $(n < 2k - 2j$ & $j \leq i$ & $i \leq k \ \vee \ 2k - 2j \leq n$ & $(i \leq j \ \vee \ k \leq i)) \rightarrow$ однасторона$(E, A,$ прямая$(BC)))$

Аналогично предыдущему.

(k) Конец хорды и точка на окружности лежат по разные стороны от радиуса, проведенного к другому концу хорды.

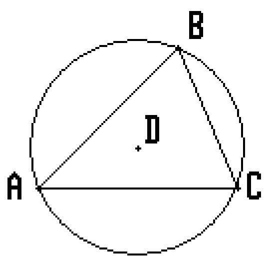


$\forall_{ABCD}(B \in$ окружность(AP) & $C \in$ окружность(AP) & $D \in$ окружность(AP) & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)) \rightarrow$ однасторона$(A, D,$ прямая$(BC)))$

$\forall_{ABCD}(B \in$ окружность(AP) & $C \in$ окружность(AP) & $D \in$ окружность(AP) & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)) \rightarrow$ однасторона$(D, A,$ прямая$(BC)))$

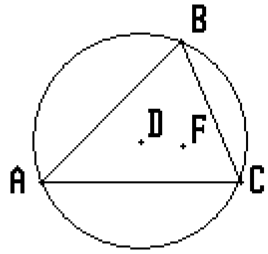
Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(l) Центр описанной около треугольника окружности.



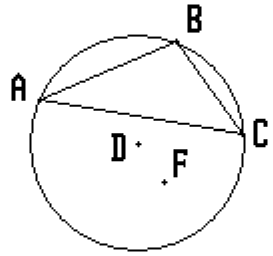
$\forall_{ABCDEabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $d \leq 0 \rightarrow$ однасторона$(B, D,$ прямая$(AC)))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты с номерами 1,2,3,5 выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c константные. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $d < 0$ & однасторона$(B, F,$ прямая$(AC)) \rightarrow$ однасторона$(D, F,$ прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $d < 0$ & однасторона$(B, F,$ прямая$(AC)) \rightarrow$ однасторона$(F, D,$ прямая$(AC)))$

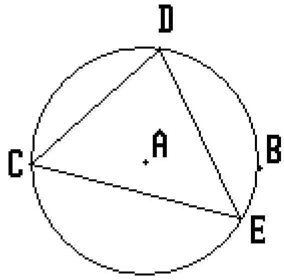


$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $0 < d$ & разныестороны$(B, F,$ прямая$(AC)) \rightarrow$ однасторона$(F, D,$ прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCDEFabcd}(a = l(AB)$ & $b = l(BC)$ & $c = l(AC)$ & окружность(DE) описана около фигура(ABC) & $d = c^2 - a^2 - b^2$ & $0 < d$ & разныестороны$(B, F,$ прямая$(AC)) \rightarrow$ однасторона$(D, F,$ прямая$(AC)))$

Аналогично предыдущему.

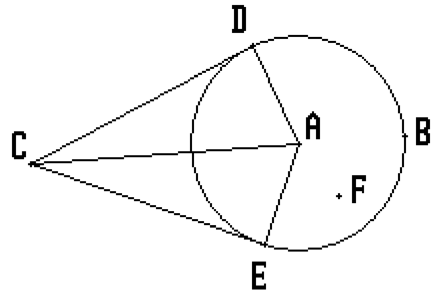
(m) Центр окружности и точка на окружности, из которой хорда видна под острым углом.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $0 \leq l(CE) - l(CD)$ & $E \in$ окружность(AB) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ однасторона$(A, E,$ прямая$(CD)))$

Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости при обработке третьего антецедента. Уровень срабатывания равен 3.

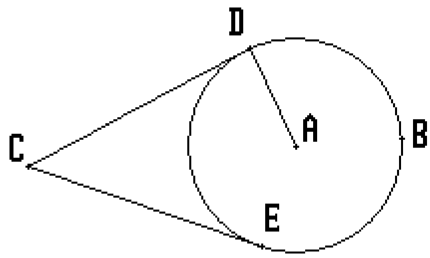
(n) Две касательные, проведенные из одной точки.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CE) & разныеточки(D, E) & разныестороны$(D, F,$ прямая$(AC)) \rightarrow$ однасторона$(E, F,$ прямая$(AC)))$

$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CE) & разныеточки(D, E) & разныестороны$(D, F,$ прямая$(AC)) \rightarrow$ однасторона$(F, E,$ прямая$(AC)))$

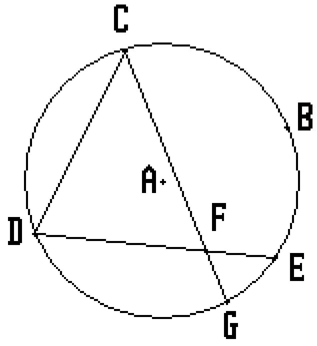
Первые четыре антецедента выделены указателем "усм"; два последних - обрабатываются проверочными операторами. При обработке последнего антецедента используется сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CE) & разныеточки$(D, E) \rightarrow$ однасторона$(C, E,$ прямая$(AD)))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(o) Описанная около треугольника окружность.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(DE) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая$(CG) \rightarrow$ однасторона$(G, E,$ прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(DE) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая$(CG) \rightarrow$ однасторона$(E, G,$ прямая$(CD)))$

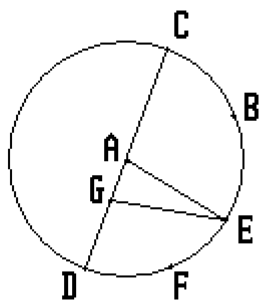
Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(p) Общие внешние касательные к двум окружностям.

$\forall_{ABCDPQMN}($внешкасательная(прямая(AB), окружность(PQ), окружность(MN)) & внешкасательная(прямая(CD), окружность(PQ), окружность(MN)) & $A \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(MN) & $D \in$ окружность(MN) & разныеточки$(A, C) \rightarrow$ однасторона$(A, B,$ прямая$(CD)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

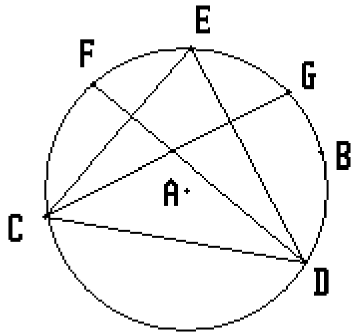
(q) Точка дуги, конец диаметра и хорда.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & $F \in$ дуга(ADE) & $G \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность$(AB) \rightarrow$ однасторона$(D, F,$ прямая$(GE)))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой; остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

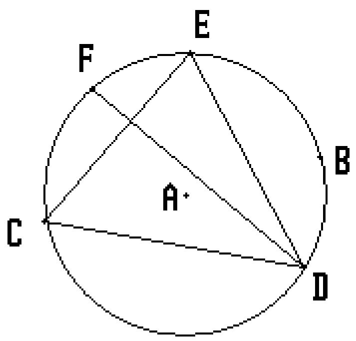
(r) Высоты вписанного остроугольного треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(CG) \perp$ прямая(DE) &
прямая$(CE) \perp$ прямая(DF) & $F \in$ окружность(AB) &
$G \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(CDE))$ &
актив$(\angle(DCE))$ & $0 < \pi/2 - \angle(CDE)$ & $0 < \pi/2 - \angle(DCE) \rightarrow$
однасторона$(C, F,$ прямая$(DG)))$

$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(CG) \perp$ прямая(DE) &
прямая$(CE) \perp$ прямая(DF) & $F \in$ окружность(AB) &
$G \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(CDE))$ &
актив$(\angle(DCE))$ & $0 < \pi/2 - \angle(CDE)$ & $0 < \pi/2 - \angle(DCE) \rightarrow$
однасторона$(F, C,$прямая$(DG)))$

Первые десять антецедентов выделены указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания приемов равен 3.

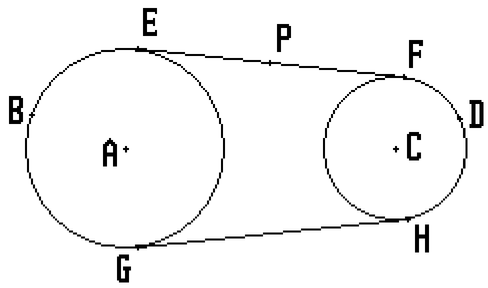


$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(DF) &
$F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(DCE))$ &
$0 < \pi/2 - \angle(CED)$ & $0 < \pi/2 - \angle(DCE) \rightarrow$ однасторона$(F, E,$
прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(DF) &
$F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(DCE))$ &
$0 < \pi/2 - \angle(CED)$ & $0 < \pi/2 - \angle(DCE) \rightarrow$ однасторона$(E, F,$
прямая$(CD)))$

Первые семь антецедентов выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания приемов равен 3.

(s) Точка на отрезке между точками касания одной внешней касательной лежит по ту же сторону от другой внешней касательной, что и центр.



$\forall_{ABCDEFGHP}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & прямая(GH) – касательная к окружность(AB) & прямая(GH) – касательная к окружность(CD) & однасторона($A, C,$ прямая(EF)) & однасторона($A, C,$ прямая(GH)) & $E \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $H \in$ окружность(CD) & $P \in$ отрезок(EF) $\rightarrow$ однасторона($P, A,$ прямая(GH)))

$\forall_{ABCDEFGHP}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & прямая(GH) – касательная к окружность(AB) & прямая(GH) – касательная к окружность(CD) & однасторона($A, C,$ прямая(EF)) & однасторона($A, C,$ прямая(GH)) & $E \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $H \in$ окружность(CD) & $P \in$ отрезок(EF) $\rightarrow$ однасторона($A, P,$ прямая(GH)))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками; пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Последние пять антецедентов выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

16. Точка отрезка расположена по ту же сторону от плоскости, что и его концы.

$\forall_{ABCDPQR}$(однасторона($A, B,$ плоскость(PQR)) & однасторона($A, C,$ плоскость(PQR)) & $D \in$ отрезок(BC) $\rightarrow$ однасторона($A, D,$ плоскость(PQR)))

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

3.20 Приемы, связанные с символом "параллельны"

Запись "параллельны(a b)" означает, что прямые либо плоскости либо векторы a, b параллельны. Допускаются любые сочетания объектов указанных типов ("прямая - прямая", "прямая - плоскость", "вектор - плоскость" и т.п.).

Упорядочение операндов

Прием "коммутативно(параллельны)" обеспечивает лексикографическое переупорядочение операндов. В посылках задачи он срабатывает на уровне 0, в условиях - на уровне 3.

Выбор общего представителя в случае параллельности нескольких объектов

Если более чем два объекта параллельны друг другу, то среди них выбирается лексикографически "наименьший" в качестве "общего представителя". Сохраняются лишь утверждения о параллельности объектов этому представителю. После перестановки операндов лексикографически меньшим (в каждой паре) оказывается первый из них. Остальные преобразования выполняются следующими приемами:

$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) $\rightarrow$ прямая(CD) $\parallel$ прямая(EF) $\leftrightarrow$ прямая(AB) $\parallel$ прямая(EF))

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) $\rightarrow$ прямая(CD) $\parallel$ плоскость(EFG) $\leftrightarrow$ прямая(AB) $\parallel$ плоскость(EFG))

$\forall_{ABCDEFGHP}$(плоскость(ABC) $\parallel$ плоскость(DEF) $\rightarrow$ плоскость(DEF) $\parallel$ плоскость(GHP) $\leftrightarrow$ плоскость(ABC) $\parallel$ плоскость(GHP))

$\forall_{ABCDEFGH}$(плоскость(ABC) $\parallel$ плоскость(DEF) $\rightarrow$ прямая(GH) $\parallel$ плоскость(DEF) $\leftrightarrow$ прямая(GH) $\parallel$ плоскость(ABC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем указатель "коммутативно" блокирует перестановку операндов при идентификации. Проверяется, что первый операнд посылки лексикографически предшествует второму. Уровень срабатывания равен 0. На первой из перечисленных теорем создан дополнительный прием, у которого точка привязки выбрана не в заменяемом терме, а в антецеденте. Он устраняет нарушение стандартизации, которое может возникнуть при появлении новых утверждений о параллельности. Уровень срабатывания здесь равен 4.

Отождествление параллельных прямых, имеющих общую точку

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(CD) $\parallel$ прямая(EF) & $G \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(EF) $\rightarrow$ прямая(AB) $=$ прямая(EF))

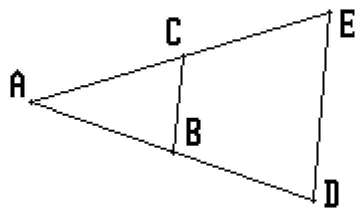
Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Обозначения прямых AB, EF различны. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(AC) $\rightarrow$ прямая(AB) $=$ прямая(AC))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы перед компиляцией. Уровень срабатывания равен 1.

Пропорциональность отрезков, отсекаемых параллельными прямыми

1. Соотношения пропорциональности для отрезков, отсекаемых параллельными прямыми. Для ускорения работы решателя потребовалось создать множество различных приемов, относящихся к различным сочетаниям параллельных прямых и секущих. Начнем с простейшей конфигурации:



$\forall_{ABCDE}$(актив$(l(AD))$ & $B \in$ прямая(AD) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(BC) &
$C \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AD), прямая$(AE)) \to$
$l(AB)l(DE) = l(BC)l(AD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Каждое из выражений для расстояний AB, DE, BC, AD либо известно, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы одно - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3. На этой же теореме создан ряд других приемов:

(a) Вместо расстояний AB, DE, BC, AD указанным выше образом анализируются расстояния BD, DE, BC, AD. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Требуется, чтобы среди выражений для расстояний AB, DE, BC, AD имелось два известных, одно - типа "неизв" и одно - типа "определимо". Уровень срабатывания равен 3.

(c) Требуется, чтобы расстояния AB, DE, BC, AD уже встречались в задаче, причем хотя бы одно из них было не известно. Уровень срабатывания приема равен 8.

(d) Требуется, чтобы какие-то три из расстояний AB, DE, BC, AD были известны, а оставшееся - не известно. Уровень срабатывания равен 8.

(e) Прием применяется в задаче на доказательство, причем расстояния BC и DE уже рассматриваются в этой задаче. Уровень срабатывания равен 13.

Теоремы нижеследующих приемов получаются небольшим варьированием предыдущей теоремы. Чертеж тот же.

$\forall_{abABCDE}$(актив$(l(BC))$ & $B \in$ прямая(AD) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(BC) &
$C \in$ прямая(AE) & $al(BC) = bl(DE)$ & разныепрямые(прямая(AD),
прямая$(AE)) \to al(AB) = bl(AD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается синтезатором "пропорциональны". Он определяет численные выражения a, b для коэффициентов пропорциональности расстояний DE, BC. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием применяется в задачах на доказательство. Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, у которой дополнительно проверяется, что a, b не содержат неизвестных, причем хотя бы одно из выражений для расстояний AB, AD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 13.

$\forall_{abABCDE}$(актив$(l(BD))$ & $B \in$ прямая(AD) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(BC) &
$C \in$ прямая(AE) & актив$(l(CE))$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая$(AE))$ &
$al(BD) = bl(CE)$ & разныеточки$(B, D) \to al(AD) = bl(AE))$

Третий антецедент, выделенный указателем "равно", идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Седьмой антецедент обрабатывается синтезатором; шестой и восьмой - проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{abABCDE}$(актив($l(AD)$) & $B \in$ отрезок(AD) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(BC) & $C \in$ отрезок(AE) & актив($l(BD)$) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AE)) & $al(BC) = bl(DE) \to al(BD) = (a - b)l(AD)$)

Третий антецедент выделен указателем "равно"; шестой и седьмой - обрабатываются, соответственно, проверочным оператором и пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат неизвестных. Одно из выражений для расстояний BD, AD известно, а другое - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7. На той же теореме создана еще одна версия приема. В ней требуется, чтобы одно из выражений для расстояний BD, AD имело тип "неизв", а на другое никаких условий не накладывается. Уровень срабатывания равен 11.

$\forall_{abABCDE}$(актив($l(BD)$) & актив($l(AB)$) & $B \in$ отрезок(AD) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(AE) & $al(AB) = bl(AC)$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AE)) $\to al(BD) = bl(CE)$)

Четвертый антецедент выделен указателем "равно". Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются, соответственно, синтезатором и проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат неизвестных. Расстояние CE уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

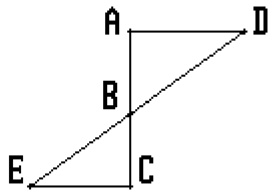
$\forall_{abABCDE}$(актив($l(AD)$) & $B \in$ прямая(AD) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(AE) & $al(AD) = bl(AB)$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AE)) $\to al(DE) = bl(BC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается синтезатором, шестой - проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Одно из расстояний DE, BC известно, а другое - нет. Уровень срабатывания равен 10. На той же теореме созданы еще две версии приема. Первая отличается лишь уровнем срабатывания, равным 13. Во второй коэффициенты a, b могут содержать численные неизвестные, причем требуется, чтобы одно из выражений для расстояний DE, BC имело тип "неизв". Уровень срабатывания здесь равен 10.

$\forall_{abABCDE}$(актив($l(AB)$) & $B \in$ прямая(AD) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(AE) & $al(AB) = bl(BD)$ & $B \in$ отрезок(AD) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AE)) $\to bl(DE) = (a + b)l(BC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой; пятый и седьмой - обрабатываются, соответственно, синтезатором и проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Среди выражений a, b и выражений для расстояний BC, DE имеются три известных и одно неизвестное. Уровень срабатывания равен 10. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы a, b были известны, а одно из выражений для расстояний BC, DE имело тип "неизв". Уровень срабатывания у нее тот же.

Несколько приемов, аналогичных вышеприведенным, используют другой чертеж. Он отличается от предыдущего лишь обозначениями точек и тем, что непараллельные линии пересекаются в полосе между параллельными. Однако, это обстоятельство в приемах нигде не используется, так что фактически рассматривается та же конфигурация, что и ранее.



$\forall_{ABCDEpq}$(актив($l(BD)$) & актив($l(BE)$) & $B \in$ прямая(DE) & $B \in$ прямая(AC) & прямая(AD) $\parallel$ прямая(EC) & $ql(AB) = pl(BC)$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая(DE)) $\to ql(BD) = pl(BE)$)

$\forall_{ABCDEpq}$(актив($l(BD)$) & актив($l(DE)$) & $B \in$ прямая(DE) & $B \in$ прямая(AC) & прямая(AD) $\parallel$ прямая(EC) & $ql(AB) = pl(BC)$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая(DE)) $\to ql(BD) = pl(DE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой; шестой и седьмой - обрабатываются синтезатором и проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEmnpq}$(актив($l(AD)$) & актив($l(CE)$) & $B \in$ прямая(DE) & $B \in$ прямая(AC) & прямая(AD) $\parallel$ прямая(EC) & $ql(AD) = pl(CE)$ & $ml(AB) = nl(AC)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(DE)) $\to ql(AB) = pl(BC)$)

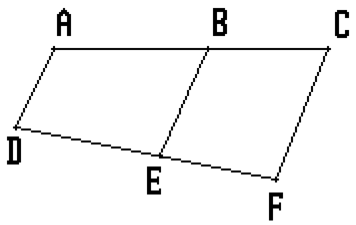
Шестой антецедент, представляющий собой соотношение пропорциональности для $l(AD$, $l(CE)$, выделен указателем "равно". Он идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Первые пять антецедентов выделены указателем "усм". Седьмой антецедент обрабатывается синтезатором, восьмой - проверочным оператором. Расстояния AB, AC уже рассматриваются в задаче, а расстояние BC - еще не рассматривается. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{ABCDE}$(актив($l(BD)$) & актив($l(BE)$) & $B \in$ прямая(DE) & $B \in$ прямая(AC) & прямая(AD) $\parallel$ прямая(CE) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(DE)) $\to l(BD)l(BC) = l(BE)l(AB)$)

Прием применяется в задачах на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 12.

$\forall_{ABCDE}$($B \in$ прямая(DE) & $B \in$ прямая(AC) & прямая(AD) $\parallel$ прямая(CE) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(DE)) $\to l(BD)l(BC) = l(BE)l(AB)$)

Прием применяется в режиме усилителя при решении задач на доказательство. Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 12.

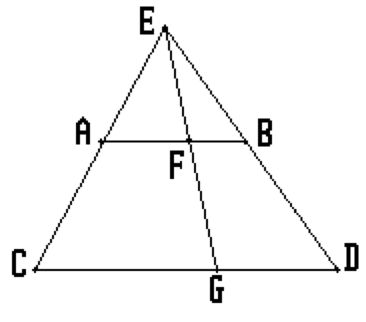


$\forall_{ABCDEFpq}$(актив($l(AD)$) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(BE) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(CF) & $B \in$ отрезок(AC) & $E \in$ прямая(DF) & $ql(AB) = pl(BC)$ & однасторона($D, F,$ прямая(AC)) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(DF)) $\rightarrow$ $(p+q)l(BE) = pl(CF) + ql(AD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Шестой антецедент обрабатывается синтезатором, седьмой и восьмой - проверочным оператором. Одно из трех выражений для расстояний BE, CF, AD имеет тип "неизв", а два других - известны. Уровень срабатывания равен 7. На этой же теореме создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы два из выражений для расстояний BE, CF, AD имели тип "неизв", а оставшееся - уже встречалось в задаче. Уровень срабатывания прежний.

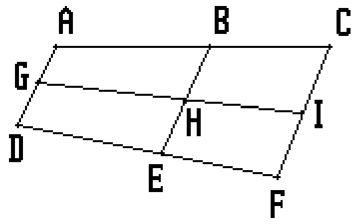
$\forall_{ABCDEF}$(актив($l(AD)$) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(BE) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(CF) & $B \in$ отрезок(AC) & $E \in$ прямая(DF) & однасторона($D, F,$ прямая(AC)) & разныепрямые(прмая(AD), прямая(DF)) $\rightarrow$ $l(BE)l(AC) = l(AB)l(CF) + l(BC)l(AD)$)

Прием применяется в задачах на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения $l(BE)$, $l(AB)$, $l(BC)$, $l(CF)$ уже встречаются в задаче. Уровень срабатывания равен 10.



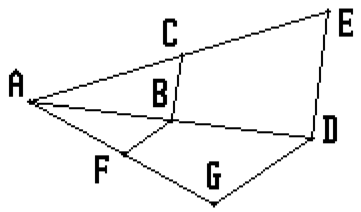
$\forall_{ABCDEFG}$($F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(CD) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(FG) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) $\rightarrow l(AF)l(DG) = l(BF)l(CG)$)

Третий антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний $l(AF)$, $l(DG)$, $l(BF)$, $l(CG)$ уже встречаются в задаче, причем хотя бы одно из них не известно. Уровень срабатывания приема равен 9.



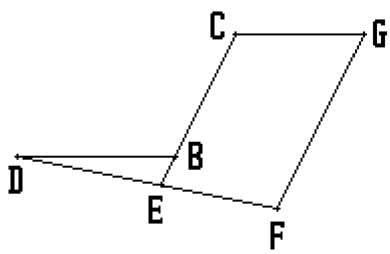
$\forall_{ABCDEFGHIpq}$(актив($l(AD)$) & прямая(AD) $\|$ прямая(BE) & прямая(AD) $\|$ прямая(CF) & $B \in$ отрезок(AC) & $E \in$ прямая(DF) & $G \in$ прямая(AD) & $H \in$ прямая(BE) & $I \in$ прямая(CF) & $I \in$ прямая(GH) & $ql(GH) = pl(HI)$ & однасторона($D, F,$ прямая(AC)) $\rightarrow (p+q)l(BE) = pl(CF) + ql(AD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие восемь - выделены указателем "усм". Десятый антецедент обрабатывается синтезатором, одиннадцатый - проверочным оператором. Выражения p, q не содержат неизвестных. Выражения для расстояний BE, CF и AD уже встречаются в задаче, причем два из них известны, а третье - нет. Уровень срабатывания равен 9. Созданы еще две версии данного приема с тем же уровнем срабатывания. В первой из них не требуется, чтобы p, q были известны, но зато требуется, чтобы каждое из выражений для расстояний BE, CF, AD либо было известно, либо имело тип "неизв". Во второй требуется, чтобы p, q были известны, а выражения для расстояний BE, CF, AD уже встречались в задаче, причем хотя бы два из них имели тип "неизв".



$\forall_{ABCDEFG}$(актив($l(AG)$) & $B \in$ прямая(AD) & прямая(DE) $\|$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AE)) & $F \in$ прямая(AG) & прямая(BF) $\|$ прямая(DG) $\rightarrow l(AF)l(DE) = l(BC)l(AG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Среди выражений для расстояний AF, DE, BC, AG три известны, а одно - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7. Созданы еще две версии приема, срабатывающие на уровне 8. В первой требуется, чтобы каждое из указанных выше четырех выражений либо было известно, либо имело тип "неизв", причем хоты бы одно - имело тип "неизв". Во второй аналогичное требование накладывается на выражения для расстояний FG, DE, BC, AG.

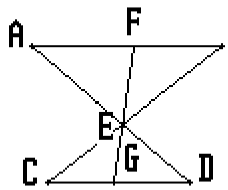


$\forall_{BCDEFGpq}$(прямая$(CE) \parallel$ прямая(FG) & прямая$(BD) \parallel$ прямая(CG) &
$B \in$ прямая(CE) & $E \in$ прямая(DF) & $ql(DE) = pl(EF)$ &
разныепрямые(прямая(DF), прямая$(FG)) \rightarrow ql(BD) = pl(CG))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается синтезатором, шестой - проверочным оператором. Выражения $l(BD)$, $l(CG)$ уже встречаются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

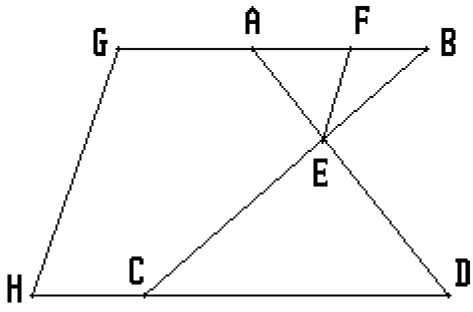
$\forall_{BCDEFGpq}$(прямая$(CE) \parallel$ прямая(FG) & прямая$(BD) \parallel$ прямая(CG) &
$B \in$ прямая(CE) & $E \in$ прямая(DF) & $ql(BD) = pl(CG)$ &
разныепрямые(прямая(DF), прямая$(FG))$ & актив(прямая$(CE))$ &
актив(прямая$(FG)) \rightarrow ql(DE) = pl(EF))$

Аналогично предыдущему, но требуется, чтобы одно из выражений $l(DE)$, $l(EF)$ было известно, а другое - было не известно, но уже встречалось в задаче. Уровень срабатывания равен 7.



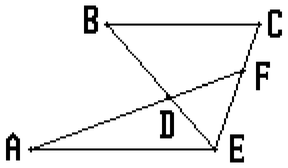
$\forall_{ABCDEFGpq}$(актив$(l(AB))$ & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(BC)
& $E \in$ прямая(AD) & $E \in$ отрезок(FG) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(CD)
& $pl(EF) = ql(EG)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD)) \rightarrow$
$pl(AB) = ql(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие шесть - выделены указателем "усм". Восьмой антецедент обрабатывается синтезатором, девятый - проверочным оператором. Расстояния AB, CD уже рассматриваются в задаче. Созданы два приема, первый из которых срабатывает на уровне 7, а второй - на уровне 9.



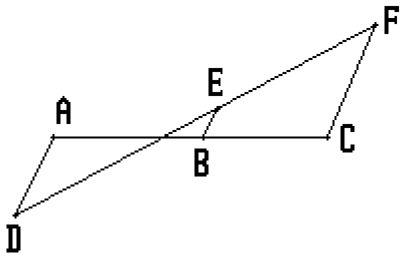
$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(AB) &
$G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(CD) & прямая$(GH) \parallel$ прямая(EF) &
разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD))$ & $E \in$ отрезок(AD) &
$E \in$ отрезок(BC) & $pl(AB) = ql(CD)$ & актив$(l(GH))$ & актив$(l(EF)) \rightarrow$
$(p+q)l(EF) = ql(GH))$

Пятый антецедент выделен указателем "равно", шестой - обрабатывается проверочным оператором, девятый - синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.



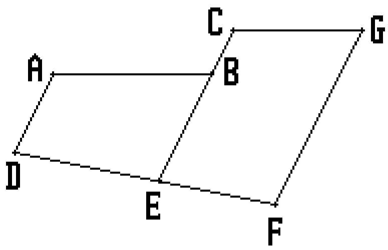
$\forall_{ABCDEFabcd}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AE) & $D \in$ отрезок(BE) & $F \in$ отрезок(CE) & $D \in$ отрезок(AF) & $al(DE) = bl(BD)$ & $cl(EF) = dl(CF) \to (ad-bc)l(AE) = bdl(BC)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Пятый и шестой антецеденты обрабатываются синтезаторами. Расстояния AE, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEFpq}$(актив$(l(AD))$ & прямая$(AD) \parallel$ прямая(BE) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(CF) & $B \in$ отрезок(AC) & $E \in$ прямая(DF) & $ql(AB) = pl(BC)$ & разныестороны$(A, C,$ прямая$(DF))$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая$(DF)) \to l(BE)|p+q| = |pl(CF) - ql(AD)|$)

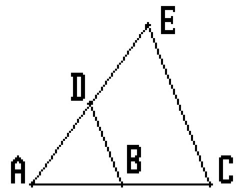
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Шестой антецедент обрабатывается синтезатором, седьмой и восьмой - проверочным оператором. Расстояния AD и CF известны. Уровень срабатывания равен 9. Создана еще одна версия приема, у которой последний антецедент теоремы устанавливает различие прямых AD, AC.



$\forall_{ABCDEFGpq}$(прямая$(AD) \parallel$ прямая(BE) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(FG) & $C \in$ прямая(BE) & $E \in$ прямая(DF) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CG) & $ql(AB) = pl(CG)$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая$(AB)) \to ql(DE) = pl(EF)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Шестой антецедент обрабатывается синтезатором, седьмой - проверочным оператором. Расстояния DE, EF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

2. Усмотрение параллельности из двух условий пропорциональности.

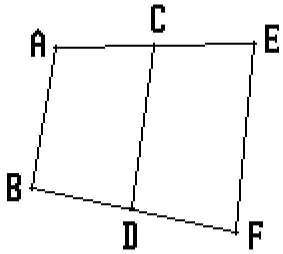


$\forall_{ABCDEpq}$(актив($l(AD)$) & актив($l(AE)$) & $E \in$ прямая(AD) & $C \in$ прямая(AB) & актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & точкалуча(A, D, E) & точкалуча(A, B, C) & $pl(AD) = ql(AE)$ & $pl(AB) = ql(AC) \to pl(BD) = ql(CE)$ & прямая(BD) $\|$ прямая(CE))

Заметим, что в вырожденном случае совпадения прямых утверждение сохраняется, хотя становится малополезным. Чтобы такие случаи не вносили неоправданного замедления, используются фильтры, отсекающие явное совпадение прямых с помощью идентифицирующих операторов. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие семь - выделены указателем "усм". Предпоследний антецедент обрабатывается синтезатором, последний - выделен указателем "идентификатор".Он устанавливает соотношение пропорциональности, обрабатывая предварительно выражения для расстояний нормализатором "нормрасстояние". Расстояния BD и CE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 13. В ней не требуется, чтобы расстояния BD, CE ранее рассматривались.

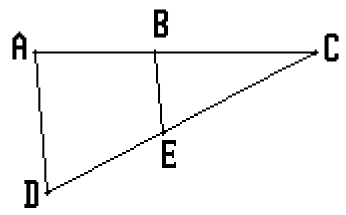
$\forall_{ABCDEpq}$(актив($l(DE)$) & $D \in$ отрезок(AE) & $B \in$ отрезок(AC) & актив($l(BC)$) & $pl(AD) = ql(DE)$ & $pl(AB) = ql(BC) \to (p+q)l(BD) = ql(CE)$ & прямая(BD) $\|$ прямая(CE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается синтезатором, последний - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 12.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(прямая(EF)) & прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(BD) & точкалуча(A, C, E) & точкалуча(B, D, F) & $pl(AC) = ql(CE)$ & $pl(BD) = ql(DF) \to$ прямая(EF) $\|$ прямая(AB))

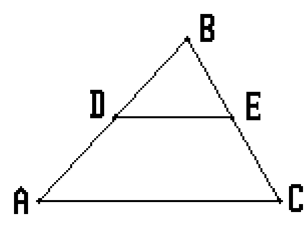
Второй антецедент выделен указателем "равно". Седьмой антецедент обрабатывается синтезатором, восьмой - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(l(AC))$ & $B \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(CD) &
$l(AC)l(EC) = l(BC)l(DC)$ & ориентчк$(A, B, C) =$ ориентчк(D, E, C) &
разныепрямые(прямая(AC), прямая(CD)) & разныеточки(B, C) &
разныеточки(A, C) & разныеточки(C, D) & разныеточки$(C, E) \to$
прямая$(AD) \parallel$ прямая(BE))

Здесь вспомогательное выражение "ориентчк(A, B, C)" характеризует взаимное расположение точек A, B, C на общей прямой. Оно равно 1, если точки A, B лежат строго по одну сторону от точки C, равно -1, если они лежат строго по разные стороны, и равно 0, если одна из точек A, B совпадает с точкой C. Нормализатор "нормориентчк" выполняет лексикографическое переупорядочение точек A, B, а также использует равенство из посылок, задающее значение выражения "ориентчк$(\ldots)$". Такие равенства могут выводиться специальными приемами в процессе решения задачи.

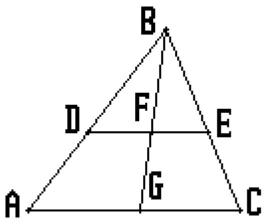
Рассматриваемый прием применяется в задачах на доказательство при наличии режима усилителя. Четвертый антецедент выделен указателем "равно", первые три - указателем "усм". Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор"; обе его части обрабатываются нормализатором "ориентчк". Последний пять антецедентов обрабатываются проверочными операторами. При проверке различия точек используется усиливающий комментарий "Плюс". Уровень срабатывания равен 13.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BD)l(BC) = l(AB)l(BE)$ &
разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныеточки$(B, D) \to$
прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Первые два антецедента выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Третий антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, для которой имеется очень слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 9.

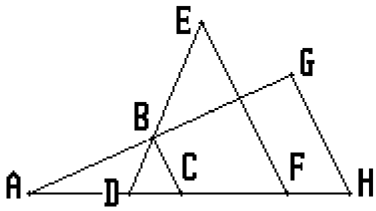
3. Усмотрение принадлежности прямой из соотношений пропорциональности.



$\forall_{ABCDEFGabcd}$(прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $B \in$ прямая(AD) & $B \in$ прямая(CE) & $F \in$ отрезок(DE) & $G \in$ отрезок(AC) & $al(DF) = bl(FE)$ & $cl(AG) = dl(CG)$ & $ad - bc = 0$ & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AC)) & разныеточки$(A, D) \rightarrow B \in$ прямая(FG))

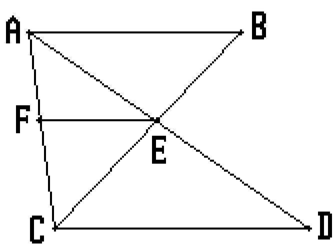
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются синтезаторами, восьмой - выделен указателем "идентификатор". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

4. Применение нескольких соотношений пропорциональности.



$\forall_{ABCDEFGH}$(актив$(l(GH))$ & прямая$(BC) \parallel$ прямая(GH) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & $D \in$ прямая(BE) & $D \in$ прямая(AH) & $A \in$ прямая(BG) & $C \in$ прямая(AH) & $F \in$ прямая(AH) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(AH)) & разныепрямые(прямая(BG), прямая(AH)) $\rightarrow$ $l(CD)l(EF)l(AH) = l(AC)l(DF)l(GH)$)

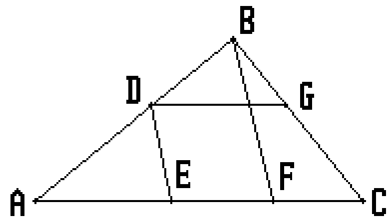
Третий антецедент выделен указателем "равно"; он идентифицируется с одной либо с двумя посылками. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния EF, AH, DF, GH известны; хотя бы одно из расстояний CD, AC известно. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(CD) & $F \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(AD) & $E \in$ отрезок(BC) &

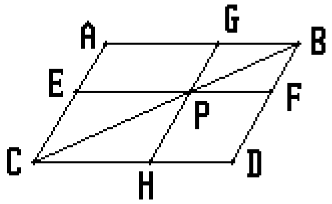
разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) $\rightarrow$
$l(CD) = l(AB)l(EF)/(l(AB) - l(EF)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения для расстояний AB, EF содержат только численные параметры; выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.



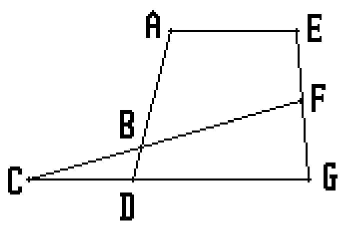
$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(DG) $\parallel$ прямая(AC) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(BF) &
$D \in$ отрезок(AB) & $G \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC)
& разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныепрямые(прямая(AB),
прямая(AC)) & $al(DE) = bl(DG) \rightarrow l(DG) = al(AC)l(BF)/(bl(AC) + al(BF))$
& $l(AE) = bl(AF)l(AC)/(bl(AC) + al(BF)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие пять - указателем "усм". Седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочным оператором, девятый - синтезатором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 9.



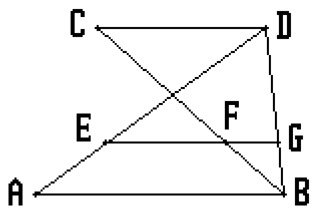
$\forall_{ABCDEFGHP}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(AC) $\parallel$ прямая(BD) &
$P \in$ отрезок(BC) & прямая(EF) $\parallel$ прямая(AB) & прямая(GH) $\parallel$ прямая(AC)
& $P \in$ прямая(EF) & $P \in$ прямая(GH) & $H \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(AB)
& $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(BD) $\rightarrow l(AE)l(EP) = l(CE)l(PF))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Расстояния AE, EP, CE, PF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.



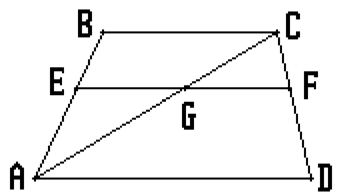
$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AE) $\|$ прямая(CG) & $B \in$ отрезок(CF) & $F \in$ отрезок(EG) & $D \in$ прямая(CG) & $B \in$ прямая(AD) & $al(BD) = bl(AB)$ & $cl(FG) = dl(EF)$ & разныепрямые(прямая(AE), прямая(CG)) $\rightarrow$ $(ad - bc)l(BC) = (bc + bd)l(BF)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются синтезатором, восьмой - проверочным оператором. Расстояния BC, BF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(CD) $\|$ прямая(AB) & прямая(EG) $\|$ прямая(AB) & $E \in$ отрезок(AD) & $F \in$ прямая(BC) & $F \in$ отрезок(EG) & $G \in$ прямая(BD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BD)) & разныеточки(B, D) $\rightarrow$ $(l(AB) - l(EF))l(CD) = l(FG)(l(AB) + l(CD))$)

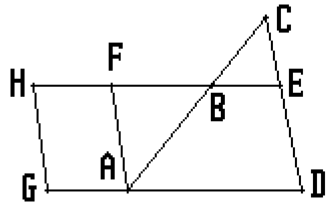
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие пять - указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояния AB, CD, EF, FG уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDEFGabmn}$(актив$(l(EG))$ & актив$(l(GF))$ & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & прямая(BC) $\|$ прямая(EF) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(EF) & $al(GE) = bl(GF)$ & $ml(BE) = nl(AE)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(CD)) $\rightarrow bnl(AD) = aml(BC)$)

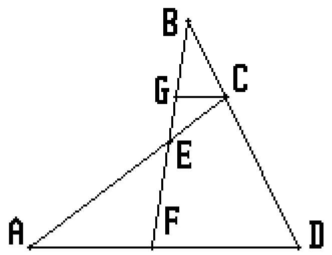
Третий антецедент выделен указателем "равно". Девятый и десятый антецеденты обрабатываются синтезаторами, одиннадцатый и двенадцатый - проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния BC и AD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

5. Проведение параллельной прямой для получения соотношений пропорциональности.



$\forall_{ABCDEFGHab}$(прямая(BE) $\|$ прямая(AD) & актив($l(CE)$) & актив($l(DE)$) & $E \in$ отрезок(CD) & $B \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(GD) & прямая(GH) $\|$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(BE) & актив($l(BH)$) & актив($l(AG)$) & $al(CE) = bl(DF) \rightarrow F -$ точка & $F \in$ отрезок(BH) & прямая(AF) $\|$ прямая(CD) & $l(BH) = l(AG) + l(BF)$ & $l(AF) = l(DE)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Проверяется, что через точку A не проведена прямая, параллельная CD. Указатель "новыйсимвол(...)" определяет выбор новой переменной для точки F. Указатель "параллельны(...)" определяет прорисовку точки F на пересечении прямой BE с прямой, проведенной из A параллельно CD. Уровень срабатывания равен 8.

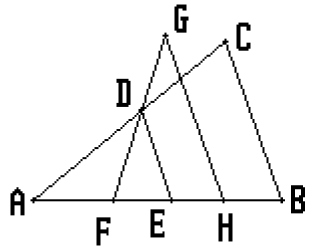


$\forall_{ABCDEFG}$(актив(прямая(BD)) & $C \in$ отрезок(BD) & актив($l(BC)$) & актив($l(CD)$) & $E \in$ прямая(AC) & актив(прямая(BF)) & $E \in$ прямая(BF) & актив(прямая(AD)) & $F \in$ отрезок(AD) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(BD)) & разныеточки(D, F) $\rightarrow G -$ точка & $G \in$ отрезок(BE) & прямая(CG) $\|$ прямая(AD) & актив($l(BG)$) & актив($l(EG)$) & актив($l(CG)$) & актив($l(GF)$) & $E \in$ отрезок(FG))

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния FD, BE уже рассматриваются в задаче. Расстояния BC и CD, а также расстояния AF и DF пропорциональны с известными коэффициентами, а для расстояний AE, CE такая пропорциональность не усматривается. Указатели "новыйсимвол(...)", "параллельны(...)" определяют выбор новую переменную для точки G и прорисовку этой точки вместе с отрезком CG. Уровень срабатывания равен 9.

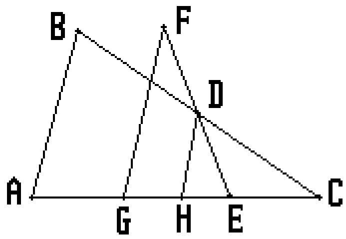
$\forall_{ABCDEFG}$(актив(прямая(BD)) & $C \in$ отрезок(BD) & актив($l(BC)$) & актив($l(CD)$) & $E \in$ прямая(AC) & актив(прямая(BF)) & $E \in$ прямая(BF) & актив(прямая(AD)) & $F \in$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(BD)) $\rightarrow G -$ точка & $G \in$ прямая(BE) & прямая(CG) $\|$ прямая(AD) & актив($l(BG)$) & актив($l(EG)$) & актив($l(CG)$) & актив($l(GF)$))

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния EF, BE, AD уже рассматриваются в задаче. Расстояния BC, CD, а также расстояния BE, EF пропорциональны с известными коэффициентами, а для расстояний AE, EC такая пропорциональность не усматривается. Уровень срабатывания равен 14.



$\forall_{ABCDEFGH}$(актив($l(BC)$) & $D \in$ прямая(AC) & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(AB)) & $F \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок(FG) & актив($l(DF)$) & актив($l(DG)$) & прямая(GH) $\parallel$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow$ E $-$ точка & $E \in$ прямая(AB) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(BC) & $l(AB)l(DE) = l(BC)l(AE)$)

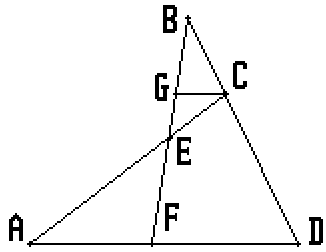
Прием применяется в режиме усилителя. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие девять - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение для расстояния BC имеет тип "неизв", расстояние GH известно. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEFGHab}$($D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая(EF) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(FG) & $G \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & $al(BD) = bl(CD)$ $\rightarrow$ H $-$ точка & $H \in$ прямая(AC) & прямая(DH) $\parallel$ прямая(AB) & $al(AB) = (a+b)l(DH)$)

Третий антецедент выделен указателем "равно", шестой - обрабатывается синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния FG имеет тип "неизв". Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Прием вводит новую точку H. Уровень срабатывания равен 7.

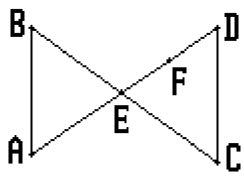
6. Разбор случаев, предшествующий проведению параллельной прямой, позволяющей получить соотношения пропорциональности.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(прямая(BD) & $C \in$ отрезок(BD) & актив$(l(BC))$ & актив$(l(CD))$ & $E \in$ прямая(AC) & актив(прямая(BF)) & $E \in$ прямая(BF) & актив(прямая(AD)) & $F \in$ отрезок(AD) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(BD)) $\rightarrow F = D \ \vee \ \neg(F = D)$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния FD, BE, а также хотя бы одно из расстояний AF, DF уже рассматриваются в задаче. Не усматривается либо пропорциональность расстояний AE, EC с известными коэффициентами, либо пропорциональность расстояний BC, CD с известными коэффициентами. Не усматривается различие точек F, D. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 9.

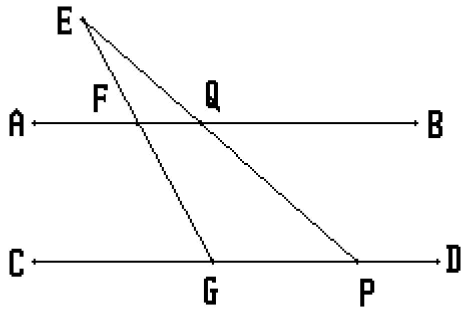
7. Ввод в рассмотрение длины отрезка, которую предполагается использовать в соотношении пропорциональности.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & актив$(l(AE))$ & актив(прямая(AD)) & актив(прямая(BC)) & актив$(l(DF))$ & $F \in$ отрезок(DE) & $E \in$ отрезок(AD) & $E \in$ прямая(BC) $\rightarrow l(DE) = l(EF) + l(DF)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Расстояние DE пока не рассматривается в задаче. Уровень срабатывания приема равен 7.

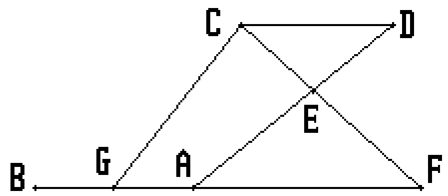
8. Ввод в рассмотрение точки пересечения прямых для получения соотношения пропорциональности.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(EF) & $P \in$ прямая(CD) & актив(прямая(EP)) & актив$(l(EF))$ & разныепрямые(прямая(EF), прямая(AB)) $\to Q$ – точка & $Q \in$ прямая(AB) & $Q \in$ прямая(EP) & актив$(l(EQ))$ & актив$(l(EP))$ & актив$(l(EG))$)

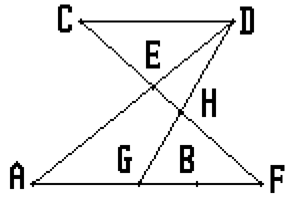
Прием применяется в задачах на доказательство. Первый антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прием вводит в рассмотрение общую точку Q прямых AB и EP, до этого не выделенную. Предварительно проверяется, что в задаче рассматриваются некоторая прямая, параллельная прямой EP, а также проходящая через точку E прямая, пересекающаяся с прямой AB в точке, отличной от F. Уровень срабатывания равен 7.

9. Продолжение отрезка между двумя параллельными прямыми для получения двух подобных треугольников.



$\forall_{ABCDEFGab}$(прямая(CD) $\parallel$ прямая(AB) & $E \in$ отрезок(AD) & актив(прямая(CE)) & $al(AE) = bl(DE)$ & актив$(l(CG))$ & $G \in$ прямая(AB) & однасторона(C, G, прямая(AD)) $\to F$ – точка & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CE) & $A \in$ отрезок(GF) & актив$(l(GF))$ & актив$(l(AF))$)

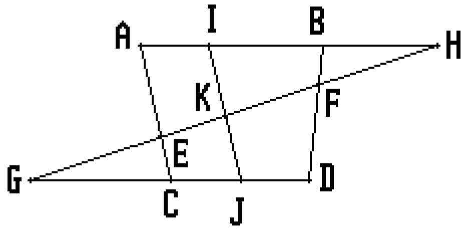
Первый антецедент выделен указателем "равно". Четвертый антецедент обрабатывается синтезатором, последний - проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AG, CD известны; расстояние CG имеет тип "неизв". Расстояния AE, DE уже рассматриваются в задаче. Прием вводит в рассмотрение точку F пересечения прямых AB, CE. Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCDEFGHab}$(прямая(CD) $\parallel$ прямая(AB) & $E \in$ отрезок(AD) & актив(прямая(CE)) & $al(AE) = bl(DE)$ & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(CE) & $H \in$ прямая(DG) $\to F$ – точка & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CE) & $E \in$ отрезок(CF))

Первый антецедент выделен указателем "равно". Четвертый антецедент обрабатывается синтезатором, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AE, DE, DH уже рассматриваются в задаче. Вводится в рассмотрение точка F пересечения прямых AB, CE. Уровень срабатывания равен 13.

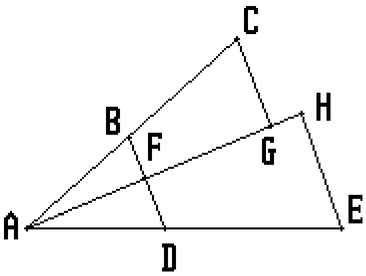
10. Продолжение отрезка между двумя параллельными прямыми до пересечения его с этими прямыми.



$\forall_{abdeABCDEFGHIJK}$(прямая$(AB)$ $\parallel$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(BD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, C) & $al(AE) = bl(CE)$ & $dl(BF) = el(DF)$ & $0 < bd - ae$ & $0 < a$ & $0 < d$ & $I \in$ прямая(AB) & $J \in$ прямая(CD) & $K \in$ прямая(IJ) & $K \in$ прямая$(EF) \to G -$ точка & $H -$ точка & $E \in$ отрезок(GF) & $F \in$ отрезок(EH) & $G \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(EF) & $H \in$ прямая(EF))

Первый антецедент выделен указателем "равно". Антецеденты, усматривающие неравенства, а также различие точек и прямых, обрабатываются проверочными операторами. Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются синтезаторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния IK, JK уже рассматриваются в задаче. Прием вводит в рассмотрение точки G, H пересечения прямой EF с прямыми CD, AB. Уровень его срабатывания равен 8.

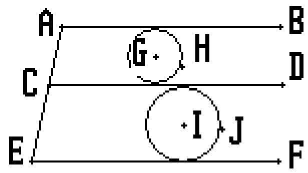
11. Проведение двух параллельных прямых для связи двух отношений длин отрезков с отношением длин новых отрезков.



$\forall_{ABCDEFGH}(B \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AE) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AE))$ & актив(прямая(BD)) & $F \in$ прямая(BD) & актив(прямая(AF)) & актив$(l(AF))$ & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, D) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AD)) $\to G-$точка & $H-$точка & $G \in$ прямая(AF) & $H \in$ прямая(AF) & прямая(CG) $\parallel$ прямая(BD) & прямая(EH) $\parallel$ прямая(BD) & актив$(l(AG))$ & актив$(l(AH))$)

Прием применяется в задачах на доказательство. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Каждое из расстояний AB, AC, AD, AE, AF выражено через численные параметры (возможно, не известные). Уровень срабатывания равен 9.

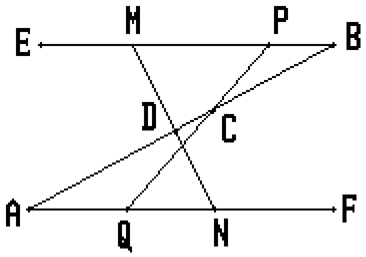
12. Радиусы вписанных в полосы окружностей и длины отрезков секущей.



$\forall_{ABCDEFGHIJPQRSTUVW}$(прямая$(AB)$ $\parallel$ прямая(CD) & прямая(CD) $\parallel$ прямая(EF) & окружность(GH)вписана в фигура$(PQRS)$ & окружность(IJ) вписана в фигура$(TUVW)$ & $P \in$ прямая(AB) & $Q \in$ прямая(AB) & $R \in$ прямая(CD) & $S \in$ прямая(CD) & $T \in$ прямая(CD) & $U \in$ прямая(CD) & $V \in$ прямая(EF) & $W \in$ прямая(EF) & $C \in$ отрезок(AE) $\rightarrow$ $l(AC)l(IJ) = l(CE)l(GH)$)

Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускаются циклические перестановки вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Радиусы GH, IJ известны. Расстояния AC, CE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

13. Попытка сведения доказательства равенства расстояний двух точек секущей до параллельных прямых к доказательству соотношения пропорциональности.



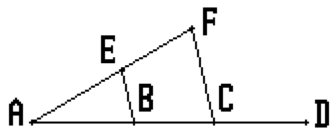
$\forall_{ABCDEFMNPQ}$(прямая(BE) $\parallel$ прямая(AF) & $C \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(MN) & $M \in$ прямая(BE) & $N \in$ прямая(AF) & $C \in$ отрезок(PQ) & $P \in$ отрезок(BE) & $Q \in$ отрезок(AF) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(AF)) & разныеточки(B, P) & разныеточки(A, N) & $l(AQ)l(AN) = l(BP)l(BM) \rightarrow$ $l(AC) - l(BD) = 0$)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Указатель "эквивалентно" означает, что его действие заключается в замене равенства на константу "истина". Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", следующие три - обрабатываются проверочным оператором. Последний антецедент, выделенный указателем "следствие", обрабатывается при помощи вспомогательной задачи на доказательство. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

Использование параллельности для определения взаимного расположения трех точек на прямой

Приемы этого раздела выводят следствия о принадлежности либо непринадлежности точек отрезкам и интервалам.

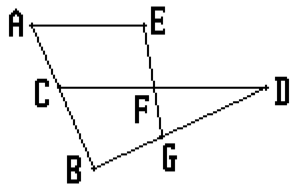
1. Параллельное перенесение условия непринадлежности интервалу.



$\forall_{ABCDEF}(\neg(A \in$ отрезок$(BD))$ & точкалуча(A, B, C) & $C \in$ прямая(AD) & $B \in$ прямая(AD) & прямая$(BE) \parallel$ прямая(CF) & $F \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(BE), прямая$(AD)) \to \neg(A \in$ интервал$(EF)))$

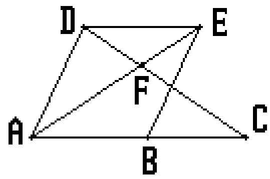
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

2. Частично параллельное перенесение условия принадлежности отрезку либо лучу.



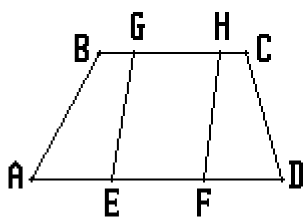
$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(BD) & прямая$(AE) \parallel$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(EG) & $F \in$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AE), прямая$(AB))$ & разныеточки$(A, C) \to F \in$ отрезок$(EG))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}(B \in$ отрезок(AC) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(BE) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(AE) & $F \in$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(AD))$ & разныеточки$(A, D) \to$ $F \in$ отрезок(AE) & $F \in$ отрезок$(CD))$

Аналогично предыдущему.



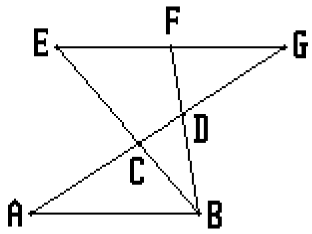
$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & точкалуча(D, A, F) & точкалуча(C, B, H) & однасторона$(A, B,$ прямая$(CD))$ & $F \in$ отрезок(DE) & прямая(GE) $\|$ прямая(HF) & $G \in$ прямая(BC) & $H \in$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AD)) $\to H \in$ отрезок(CG))

Первый антецедент выделен указателем "равно". Антецеденты "однасторона" и "разныепрямые" обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние BC известно; расстояния CH и GH уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & точкалуча(D, A, E) & точкалуча(C, B, G) & однасторона$(A, B,$ прямая$(CD))$ & точкалуча(E, D, F) & прямая(GE) $\|$ прямая(HF) & $G \in$ прямая(BC) & $H \in$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AD)) $\to \neg(G \in$ интервал$(CH))$)

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Расстояния CG, GH, BC, BH уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

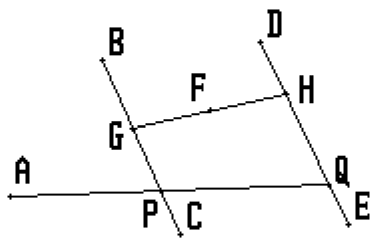
3. Усмотрение взаимного расположения концов трех секущих между двумя параллельными прямыми.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) $\|$ прямая(EG) & $C \in$ отрезок(BE) & $D \in$ отрезок(FB) & $F \in$ прямая(EG) & $C \in$ отрезок(AD) & разныепрямые(прямая(EG), прямая(FB)) & разныеточки(F, B) & $G \in$ прямая$(AD) \to F \in$ отрезок(EG))

Первый антецедент выделен указателем "равно", шестой и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

4. Усмотрение принадлежности точки отрезку между двумя параллельными прямыми.



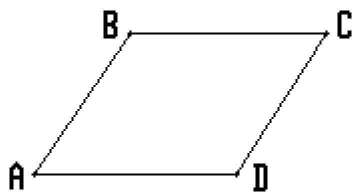
$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(прямая(BC) $\|$ прямая(DE) & $G \in$ прямая(BC) & $H \in$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(GH) & разныестороны$(A, F,$ прямая$(BC))$ & однасторона$(A, F,$ прямая$(DE))$ & $A \in$ прямая(PQ) & точкалуча(A, P, Q) &

$P \in$ прямая(BC) & $Q \in$ прямая(DE) & разныеточки(A, P) &
разныепрямые(прямая(PQ), прямая(BC)) $\to F \in$ отрезок(GH))

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой; шестой и два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Использование параллельности для усмотрения равенства расстояний

1. Равенство отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на параллельных прямых.



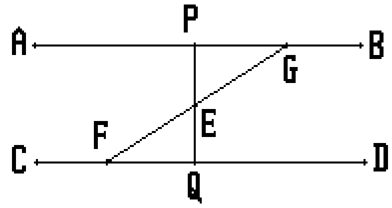
$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AB))$ & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to l(AB) = l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние CD, как и расстояние AB, уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2. На этой же теореме созданы еще несколько версий приема. В первой из них, срабатывающей на уровне 3, выражение для расстояния CD должно иметь тип "существатом", причем само это расстояние не обязательно уже введено в рассмотрение. Вторая версия, срабатывающая на уровнях 2 и 8, не делает каких-либо допущений про расстояние CD, но зато проверяет, что выражение для расстояния AB либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Третья версия, срабатывающая на уровне 5, проверяет, что выражение для расстояния AB имеет тип "внешнеизв", а выражение для расстояния CD - тип "смуравн". Четвертая версия, срабатывающая на уровне 8, проверяет, что выражение для расстояния AB имеет тип "неизв".

$\forall_{ABCD}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) &
разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to l(AB) = l(CD)$)

Прием применяется в задачах на доказательство. Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 9.

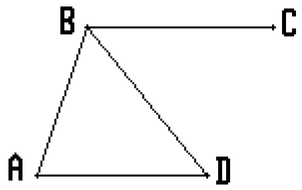
2. Отрезок, проходящий через точку, равноудаленную от двух параллельных прямых.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(PQ) &
$P \in$ прямая(AB) & $Q \in$ прямая(CD) & $l(PE) = l(QE)$ & $\neg(Q \in$ прямая$(AB))$
& $E \in$ прямая(FG) & $F \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая$(AB) \rightarrow$
$l(PG) = l(FG)$ & $l(FE) = l(EG))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния FQ имеет тип "определимо" либо "существатом". Уровень срабатывания равен 7.

3. Параллельные прямые, секущая и биссектриса.

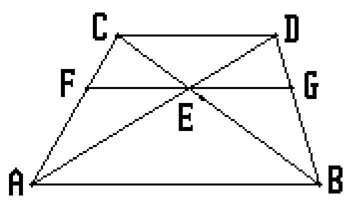


$\forall_{ABCD}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & актив$(\angle(ABD))$ & актив$(\angle(CBD))$ &
$\angle(CBD) = \angle(ABD)$ & разныестороны$(A, C,$ прямая$(BD))$ &
разныепрямые(прямая(AD), прямая$(BC))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow l(AB) = l(AD))$

$\forall_{ABCD}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & актив$(\angle(ABD))$ & актив$(\angle(CBD))$ &
$\angle(CBD) = \angle(ABD)$ & разныестороны$(A, C,$ прямая$(BD))$ &
разныепрямые(прямая(AD), прямая$(BC))$ & актив$(l(AD)) \rightarrow l(AB) = l(AD))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор"; обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

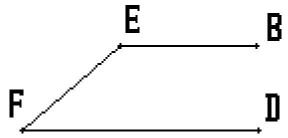
4. Усмотрение равенства отрезков из соотношений пропорциональности.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(CD) \parallel$ прямая(AB) & прямая$(FG) \parallel$ прямая(AB) &
$E \in$ отрезок(BC) & $E \in$ отрезок(AD) & $E \in$ прямая(FG) & $F \in$ прямая(AC)
& $G \in$ прямая(BD) & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(AB))$ &
разныеточки(A, C) & актив$(l(EF)) \rightarrow l(EF) = l(EG))$

Первый антецедент выделен указателем "равно"; восьмой и девятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 13.

Углы при параллельных прямых и секущей

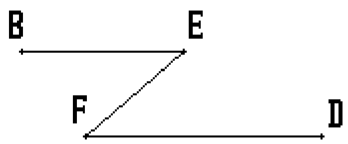


$\forall_{BDEF}$(актив($\angle(BEF)$) & актив($\angle(DFE)$) & прямая(BE) $\parallel$ прямая(FD) & односторона($B, D,$ прямая(EF)) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(FD)) $\to$ $\angle(BEF) + \angle(DFE) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Ввиду малого уровня срабатывания, равного 2, отбрасываются случаи, когда угол BEF имеет известное константное значение, а также случаи, когда отрезок EF является стороной параллелограмма, трапеции либо ромба.

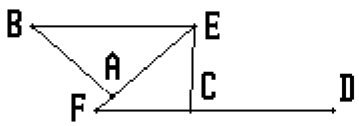
$\forall_{BDEF}$(актив($\angle(BEF)$) & прямая(BE) $\parallel$ прямая(FD) & односторона($B, D,$ прямая(EF)) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(FD)) $\to$ $\angle(BEF) + \angle(DFE) = \pi$)

Аналогично предыдущему, но с другими ограничениями: требуется лишь, чтобы один из углов BEF, DFE был известен, а другой - нет. Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 9. В ней требуется, чтобы выражение для угла BEF имело тип "внешнеизв".



$\forall_{BDEF}$(актив($\angle(EFD)$) & прямая(BE) $\parallel$ прямая(FD) & актив($l(BE)$) & разныестороны($B, D,$ прямая(EF)) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(FD)) $\to$ $\angle(EFD) = \angle(BEF)$)

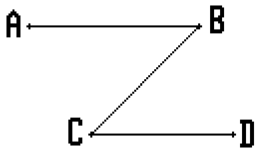
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Угол BEF уже рассматривается в задаче. Проверяется, что не усматривается перпендикулярность прямых EF, BE. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии приема, срабатывающие на уровне 5 и не требующие, чтобы угол BEF уже рассматривался. В первой из них угол EFD известен, а угол BEF - нет. Во второй версии пакетный индикатор "существравно" усматривает, что выводимое равенство представляет интерес.



$\forall_{ABDEFa}$($\angle(ABE) = \angle(FEC)$ & прямая(BE) $\parallel$ прямая(FD) & разныестороны($B, D,$ прямая(EF)) & $A \in$ прямая(EF) & $C \in$ прямая(FD) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(FD)) $\to$ $\angle(EFD) = \angle(BEF)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", третий и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Отличие от предыдущих приемов заключается в том, что углы EFD, BEF могут на момент срабатывания не рассматриваться в задаче. Первый, четвертый и пятый антецеденты, по существу, играют роль фильтров, объясняя мотивацию вывода равенства - усмотрение подобных треугольников ABE, CEF. Уровень срабатывания равен 9.

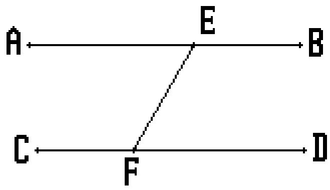
Усмотрение расположения относительно секущей точек на двух параллельных прямых из сравнения углов



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(BCD))$ &
$0 < \pi/2 - \angle(BCD) \rightarrow$ разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие два - указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 13.

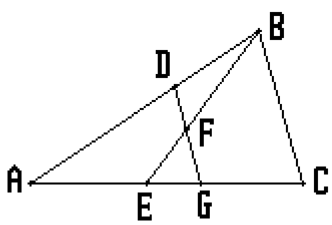
Разбор случаев для расположения точек относительно секущей



$\forall_{ABCDEF}$(актив$(\angle(AEF))$ & актив$(\angle(EFD))$ & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) &
$E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая$(CD) \rightarrow$ однасторона$(A, D,$ прямая$(EF))$ $\vee$
разныестороны$(A, D,$ прямая$(EF)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для угла EFD имеет тип "неизв", причем не усматривается расположение точек A, D относительно прямой EF. Уровень срабатывания равен 12.

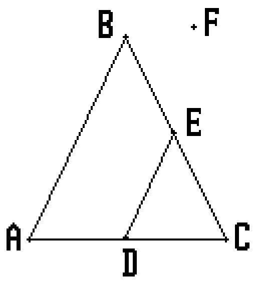
Ввод в рассмотрение точки пересечения прямой с другой прямой, если такая точка имеется для параллельной прямой



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(DF) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(BE) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) $\rightarrow G -$ точка & $G \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(DF))

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AD, BD, AE, CE, EF, BF уже рассматриваются в задаче. Прием вводит в рассмотрение новую точку G. Уровень срабатывания равен 10.

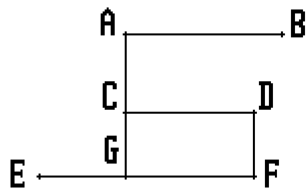
Усмотрение противоречия из пересечения двух различных параллельных прямых



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BC) & $l(DE) = l(CE)$ & разныеточки(B, E) & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(DE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow$ ложь)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой; пятый и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Из антецедентов теоремы приема вытекают параллельность и различие прямых DE, AB, чему противоречит наличие у этих прямых общей точки F.

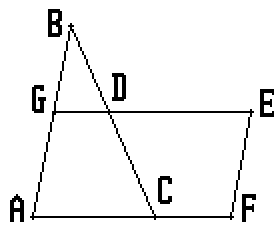
Выражение расстояния между двумя параллельными прямыми через расстояния от них до третьей параллельной прямой, расположенной между ними



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(EF)) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(AB) & прямая$(AC) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(DF))$ & разныестороны$(A, F,$ прямая$(CD))$ $\rightarrow G -$ точка & $G \in$ прямая(EF) & $G \in$ прямая(AC) & $C \in$ отрезок(AG) & $l(AG) = l(AC) + l(DF)$ & $l(CG) = l(DF)$)

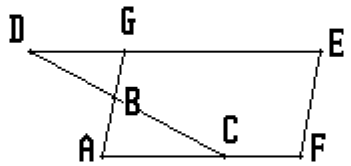
Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в шестом антецеденте. Каждое из выражений для расстояний AC, DF либо известно, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы одно - не известно. Прием вводит в рассмотрение новую точку G. Уровень срабатывания равен 10.

Параллельное перенесение отрезка



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AF) &
$D \in$ отрезок(BC) & $C \in$ прямая$(AF) \to G -$ точка & $G \in$ прямая(DE) &
$G \in$ отрезок(AB) & $l(AG) = l(EF)$)

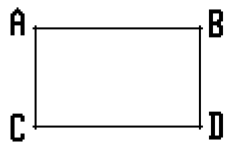
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Расстояния EF, AB уже рассматриваются в задаче. Прием вводит в рассмотрение новую точку G. Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AF) &
$B \in$ отрезок(CD) & $C \in$ прямая$(AF) \to G -$ точка & $G \in$ прямая(DE) &
$B \in$ отрезок(AG) & $l(AG) = l(EF)$)

Аналогично предыдущему.

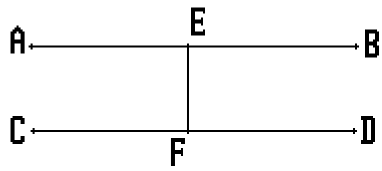
Если длина отрезка между параллельными прямыми равна расстоянию между этими прямыми, то этот отрезок перпендикулярен прямым



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(AC) \perp$ прямая(AB) & $l(AC) = l(BD)$
& разныеточки$(A, C) \to$ прямая$(BD) \perp$ прямая(CD))

Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

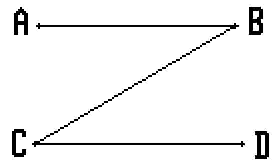
Проведение между двумя параллельными прямыми перпендикулярного к ним отрезка, если задано расстояние между прямыми



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & расстмежду(прямая(AB), прямая$(CD)) = a \rightarrow$ E – точка & F – точка & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AB) & $l(EF) = a$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Не введена в рассмотрение прямая, перпендикулярная данным прямым и пересекающая их в рассматриваемых точках. Прием вводит в рассмотрение новые точки E, F. Уровень срабатывания равен 4.

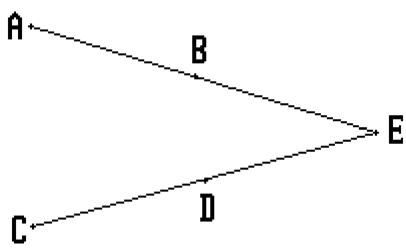
Сведение доказательства равенства углов к доказательству параллельности прямых



$\forall_{ABCD}$(разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC))$ & разныепрямые(прямая(BC), прямая$(CD))$ & разныеточки(B, C) & прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \rightarrow$ $\angle(ABC) - \angle(BCD) = 0$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к условию задачи на доказательство, причем указатель "эквивалентно" обеспечивает замену равенства на константу "истина". Первые три антецедента обрабатываются проверочным оператором; для усмотрения истинности последнего антецедента решается вспомогательная задача на доказательство. Фактически, текущая задача к ней сводится, хотя предусмотрен очень слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания приема равен 7.

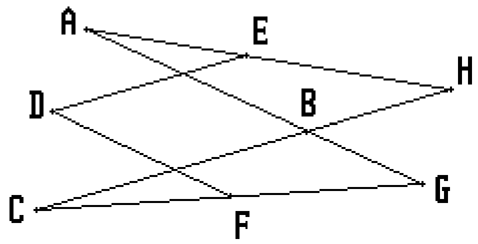
Ввод в рассмотрение точки пересечения двух непараллельных прямых, лежащих в одной плоскости



$\forall_{ABCDE}(\neg($прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD))$ & $A \in$ плоскость(PQR) &
$B \in$ плоскость(PQR) & $C \in$ плоскость(PQR) & $D \in$ плоскость$(PQR) \rightarrow$
$E -$ точка & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(CD))$

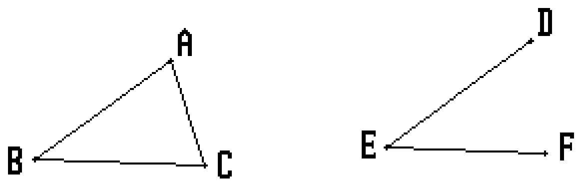
Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". На момент его применения в задаче не рассматривается общая точка прямых AB, CD. Уровень срабатывания равен 4.

Углы с параллельными соответственными сторонами



$\forall_{ABCDEFGH}($актив$(\angle(ABC))$ & $B \in$ отрезок(AG) & $B \in$ отрезок(CH) &
$E \in$ отрезок(AH) & $F \in$ отрезок(CG) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(DF) &
прямая$(BC) \parallel$ прямая$(DE) \rightarrow \angle(ABC) = \angle(EDF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}($актив$(\angle(DEF))$ & прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) &
прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow$
$\angle(ABC) = \angle(DEF) \ \vee \ \angle(ABC) + \angle(DEF) = \pi)$

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Угол DEF известен, угол ABC - не известен. Два из расстояний AB, BC, AC известны, а выражение для третьего - имеет тип "неизв". Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 10.

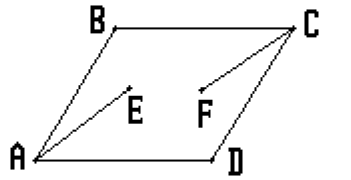
Усмотрение параллельности прямых

1. Устранение условия параллельности прямой самой себе.

   $\forall_{AB}($прямая$(AB) \parallel$ прямая$(AB))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

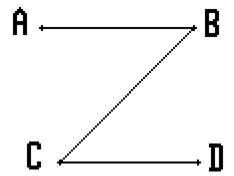
2. Усмотрение параллельности прямых, образующих равные углы с параллельными прямыми.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $\angle(BAE) = \angle(FCD)$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AE))$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(CF))$ & разныепрямые(прямая(AE), прямая(AD)) & разныепрямые(прямая(CF), прямая(BC)) $\to$ прямая$(AE) \parallel$ прямая(CF))

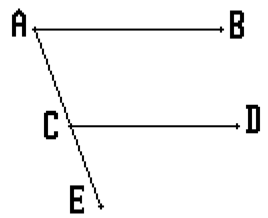
Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Остальные антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Фильтр "не(контекст(вид(выражение(3)дробь(пи 2))))" отсекает случаи, когда равенства для углов BAE, FCD, используемые при идентификации третьего антецедента, имеют $\pi/2$ в правой части. Уровни срабатывания равны 4 и 6.

3. Доказательсто параллельности прямых путем рассмотрения углов, образованных при их пересечении с третьей прямой.



$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = \angle(BCD)$ & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC))$ & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(BC)) $\to$ прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD))

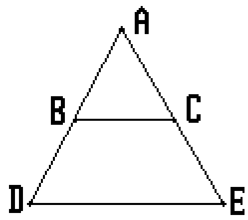
Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Созданы две версии приема. Первая применяется в задачах на доказательство и имеет уровень срабатывания 5. Вторая - применяется в задачах на исследование, причем требуется, чтобы уже рассматривалось такое расстояние от точки прямой AB либо CD, выражение которого имело бы тип "неизв". Уровень срабатывания здесь равен 7.



$\forall_{ABCDE}(\angle(EAB) = \angle(ECD)$ & $C \in$ отрезок(AE) & однасторона$(B, D,$ прямая$(AE))$ $\to$ прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Второй антецедент выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Истинность первого антецедента устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство, для которой введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 8.

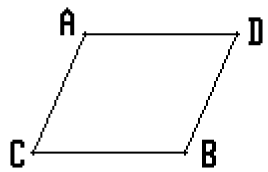
4. Усмотрение параллельности прямых, отсекающих на сторонах угла равные отрезки.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(AC)$ & $B \in$ отрезок(AD) & $C \in$ отрезок(AE) &
$l(BD) = l(CE)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) &
разныеточки$(A, B) \to$ прямая$(BC) \parallel$ прямая(DE))

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочным оператором. Прямая BC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

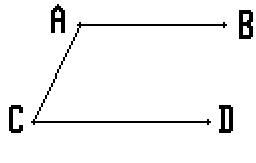
5. Четырехугольник, имеющий равные противоположные стороны.



$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(BD))$ &
$l(AC) = l(BD)$ & $l(AD) = l(BC)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC))
& разныепрямые(прямая(BC), прямая(BD)) & односторона$(A, D,$ прямая$(BC))$
& односторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & разныеточки(A, C) & разныеточки$(B, C) \to$
прямая$(AD) \parallel$ прямая(BC))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", пятый и шестой - указателем "идентификатор". Оставшиеся антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 6.

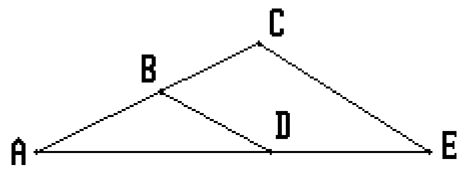
6. Усмотрение параллельности из равенства пи суммы внутренних односторонних углов.



$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(AC)) & актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(ACD)$) & $\angle(BAC)+\angle(ACD) = \pi$ & однасторона(B, D, прямая(AC)) $\rightarrow$ прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD))

На данной теореме созданы две версии приема. Первая версия имеет заголовок "вывод". У нее шестой антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается проверочным оператором, а остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5. Вторая версия имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. У нее шестой антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются так же, как в первой версии. Уровень срабатывания равен 6.

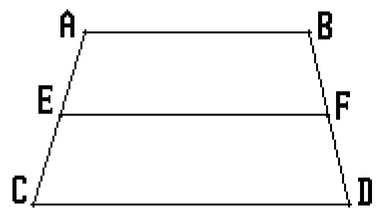
7. Два равнобедренных треугольника с общим углом при основании.



$\forall_{ABCDE}$($B \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(BD)$ & $l(AC) = l(CE)$ & $D \in$ отрезок(AE) & разныеточки(A, D) & разныеточки(A, E) $\rightarrow$ прямая(BD) $\parallel$ прямая(CE))

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

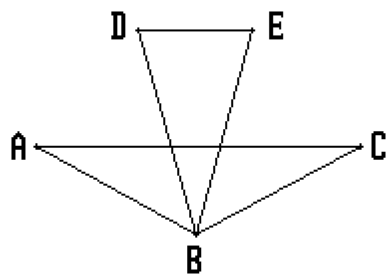
8. Прямая, проходящая через различающиеся середины двух секущих, заключенных между параллельными прямыми.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AC) & $l(AE) = l(EC)$ & $F \in$ прямая(BD) & $l(BF) = l(FD)$ & разныеточки(E, F) & разныеточки(A, C) & разныеточки(B, D) $\rightarrow$ прямая(EF) $\parallel$ прямая(CD))

Третий антецедент выделен указателем "равно", три послених - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

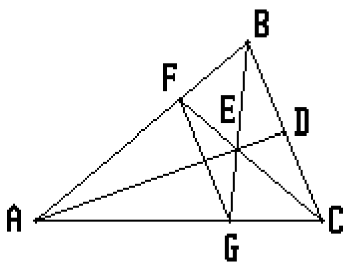
9. Основания двух равнобедренных треугольников с общей вершиной и равными углами между соответственными боковыми сторонами.



$\forall_{ABCDE}(l(BD) = l(BE)$ & $l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(ABD))$ & актив$(\angle(EBC))$ & $\angle(ABD) = \angle(EBC)$ & актив$(\angle(DBE))$ & $0 < \pi - 2\angle(ABD) - \angle(DBE)$ & разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BD)) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(BC)) & разныестороны$(A, E,$ прямая$(BD))$ & разныестороны$(C, D,$ прямая$(BE))$ & разныеточки$(D, E) \to$ прямая$(AC) \parallel$ прямая(DE) & $\angle(ABC) = 2\angle(ABD) + \angle(DBE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", пятый - указателем "идентификатор". Антецеденты со второго по четвертый, а также шестой выделены указателем "усм". Последние семь антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 9.

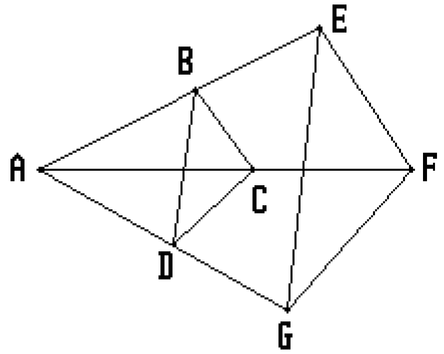
10. Концы отрезков, проведенных через точку на медиане треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ отрезок(BC) & $l(BD) = l(CD)$ & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(CE) & $G \in$ прямая(BE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & разныеточки$(F, G) \to$ прямая$(FG) \parallel$ прямая$(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четыре последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

11. Две пары параллельных прямых пересекаются с тремя прямыми, проведенными из общей точки.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(BC) $\parallel$ прямая(EF) & прямая(CD) $\parallel$ прямая(FG) & $B \in$ отрезок(AE) & $D \in$ отрезок(AG) & $C \in$ прямая(AF) & разныепрямые(прямая(EF), прямая(FG)) & разныеточки(E, F) & разныеточки(F, G) $\to$ прямая(BD) $\parallel$ прямая(EG))

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

Существование параллельной прямой

$\forall_{ABCDE}$($D \in$ отрезок(BC) & разныеточки(A, B) & разныеточки(C, D) & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка $\to \exists_E$($E -$ точка & $D \in$ отрезок(AE) & $\neg(C = E)$ & прямая(CE) $\parallel$ прямая(AB)))

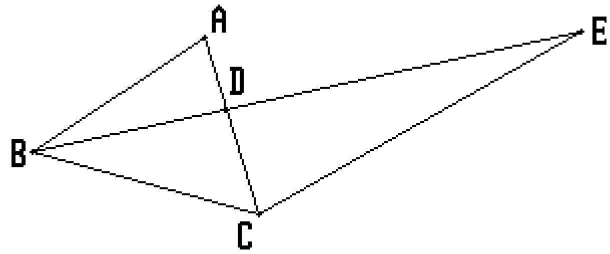
Прием имеет заголовок "связка"; он исключает несущественную неизвестную E в условиях задачи на описание. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты идентифицируются с утверждениями текущего контекста (условиями либо посылками). Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{AB}$($\neg(A = B)$ & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка $\to \exists_D$(прямая(CD) $\parallel$ прямая(AB) & $\neg(C = D)$ & $D -$ точка))

Аналогично предыдущему. Антецеденты идентифицируются с утверждениями текущего контекста. Уровень срабатывания равен 3.

Проведение в задаче на доказательство прямой, параллельной данной

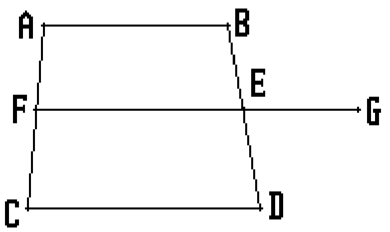
1. Проведение прямой для рассмотрения углов.



$\forall_{ABCDE}$($D \in$ отрезок(AC) & актив$(\angle(ABD))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(CD))$ & разныеточки(A, D) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\to E-$точка & прямая(CE) $\parallel$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок(BE) & $\angle(ABD) = \angle(BEC)$)

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется при наличии режима усилителя в задачах на доказательство. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Первый, третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 8.

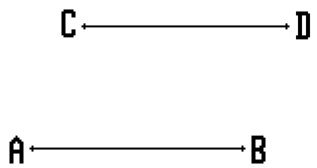
2. Проведение параллельной прямой через точку отрезка, делящую его в известном отношении.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(BD) & $al(BE) = bl(DE)$ & актив(прямая(AC)) $\rightarrow F-$точка & $G-$точка & $\neg(F = G)$ & $F \in$ отрезок(AC) & $al(AF) = bl(CF)$ & прямая(FG) $\|$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(FG))

Прием применяется в задачах на доказательство. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, третий - обрабатывается синтезатором "пропорциональны", причем коэффициенты a, b не содержат неизвестных. Первый и четвертый антецеденты выделены уазателем "усм". Условие задачи имеет вид $E = \ldots$. Расстояния BE и DE уже рассматриваются в задаче. Через точку E пока не проведена прямая, параллельная AB. Прием вводит в рассмотрение новые точки F, G. Уровень срабатывания равен 6.

3. Проведение параллельной прямой при доказательстве параллельности.



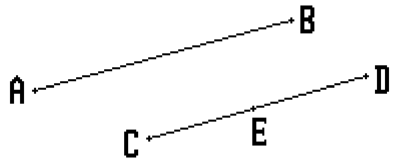
$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(EF) $\rightarrow D$ – точка & $\neg(C = D)$ &
прямая(CD) $\|$ прямая(AB))

Указатель "контрольвывода"активирует прием при усмотрении в условии задачи на доказательство утверждения "прямая(CG) $\|$ прямая(AB)". Антецедент выделен указателем "усм". В задаче пока не рассматриваются прямые, параллельные AB и проходящие через точку, выделенную на прямой CG. Прием вводит в рассмотрение новую точку D. Уровень срабатывания равен 7.

Параллельные прямые и плоскости в пространстве

Приемы этого раздела применяются в непланиметрических задачах, распознаваемых обычно по отсутствию фиктивной посылки "планиметрия". Если стереометрическая ситуация усматривается непосредственно по виду антецедентов теоремы приема, то фильтр "не(Входит(планиметрия списокпосылок))" не вводится.

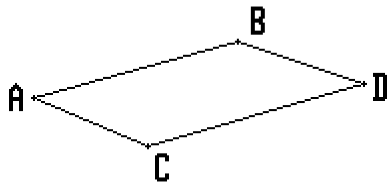
1. Параллельные прямые лежат в одной плоскости.



$\forall_{ABCDE}$(актив(плоскость(ABC)) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) &
$E \in$ прямая$(CD) \to E \in$ плоскость(ABC))

Второй антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

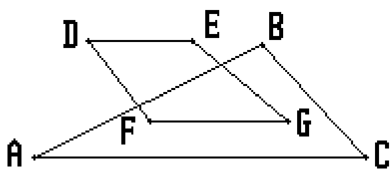
2. Ввод в рассмотрение общей плоскости двух параллельных прямых.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & актив(прямая(AC)) &
разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & разныеточки(A, C) &
актив$(l(BD))$ $\to$ актив(плоскость(ABC)))

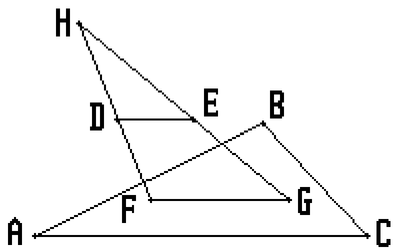
Первый антецедент выделен указателем "равно", третий и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Второй и пятый антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

3. Прямая, параллельная плоскости, параллельна пересечению этой плоскости с любой содержащей данную прямую плоскостью.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(DE) \parallel$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость(ABC) &
$G \in$ плоскость(ABC) & $G \in$ плоскость(DEF) & разныеточки(F, G) &
$\neg(D \in$ плоскость$(ABC)) \to$ прямая$(DE) \parallel$ прямая(FG))

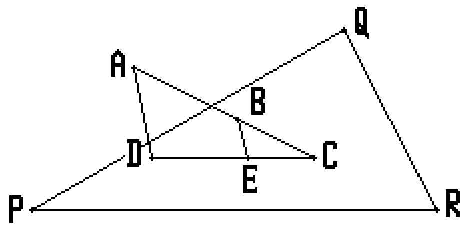
Первый антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(DE) $\|$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость(ABC) &
$G \in$ плоскость(ABC) & разныеточки(D, E) & $D \in$ отрезок(HF) &
$E \in$ отрезок(HG) & $\neg(H \in$ плоскость$(ABC)) \to$ прямая(DE) $\|$ прямая(FG))

Первый антецедент выделен указателем "равно", четвертый и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

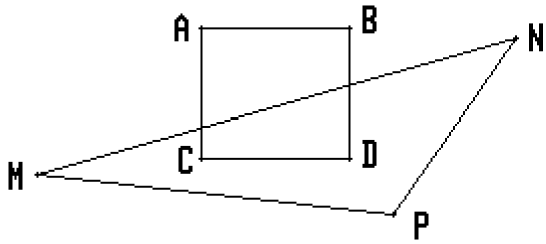
4. Параллельные проекции на плоскость точек прямой.



$\forall_{ABCDEPQR}$(прямая(AD) $\|$ прямая(BE) & $D \in$ плоскость(PQR) &
$E \in$ плоскость(PQR) & $C \in$ плоскость(PQR) & $C \in$ прямая(AB) &
$\neg(A \in$ плоскость$(PQR))$ & разныеточки$(D, E) \to C \in$ прямая(DE))

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре антецедента - указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

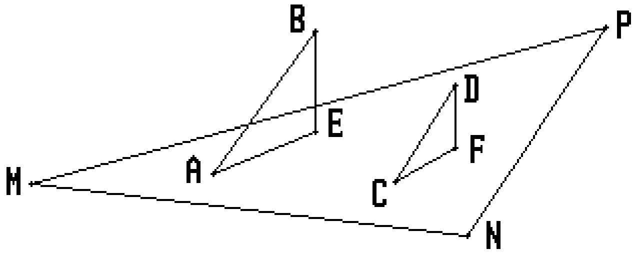
5. Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна своей прямоугольной проекции на эту плоскость.



$\forall_{ABCDMNP}$(прямая(AC) $\perp$ плоскость(MNP) & прямая(AB) $\|$ плоскость(MNP)
& прямая(BD) $\perp$ плоскость(MNP) & $C \in$ плоскость(MNP) &
$D \in$ плоскость(MNP) & разныеточки$(A, B) \to$ прямая(CD) $\|$ прямая(AB))

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки берется в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

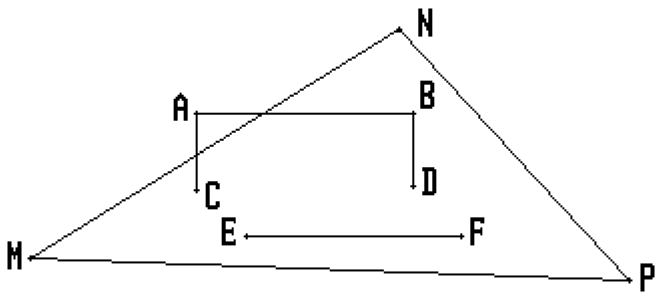
6. Если две параллельных прямых пересекаются с плоскостью, то их проекции на плоскость параллельны.



$\forall_{ABCDEFMNP}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $A \in$ плоскость(MNP) &
$C \in$ плоскость(MNP) & прямая(BE) $\perp$ плоскость(MNP) &
прямая(DF) $\perp$ плоскость(MNP) & $E \in$ плоскость(MNP) &
$F \in$ плоскость(MNP) & разныеточки(A, E) & разныеточки(C, F) $\rightarrow$
прямая(AE) $\parallel$ прямая(CF))

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие шесть - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

7. Равенство длин перпендикуляров к плоскости, опущенных из точек прямой, параллельной плоскости.



$\forall_{ABCDEFMNP}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(EF) & прямая(AC) $\perp$ плоскость(MNP) &
$C \in$ плоскость(MNP) & $D \in$ плоскость(MNP) & прямая(AC) $\parallel$ прямая(BD) &
$E \in$ плоскость(MNP) & $F \in$ плоскость(MNP) $\rightarrow l(AC) = l(BD)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", приче точка привязки выбрана во втором из них. Расстояние AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

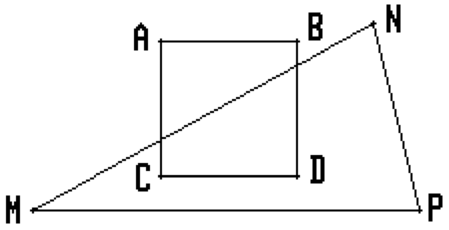
8. Проведение плоскости, перпендикулярной к трем параллельным прямым.

$\forall_{ABCDEFMNPQRS}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(EF) $\rightarrow$
M – точка & N – точка & P – точка &$\neg(M = P)$ & $\neg(N \in$ прямая$(MP))$ &
прямая(AB) $\perp$ плоскость(MNP) & $Q \in$ прямая(AB) & $Q \in$ плоскость(MNP) &
$R \in$ прямая(CD) & $R \in$ плоскость(MNP) & $S \in$ прямая(EF) &
$S \in$ плоскость(MNP) & Q – точка & R – точка & S – точка)

Антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "контрольвывода" активирует попытку применения приема при усмотрении выражения "расстмежду(

прямая(AB), прямая(CD))". Проверяется также наличие посылки, содержащей выражение "расстмежду(прямая(AB), прямая(EF))", и отсутствие выделенной в задаче плоскости, перпендикулярной прямой AB. Прием вводит в рассмотрение новые точки M, N, P, Q, R, S. Уровень срабатывания равен 3.

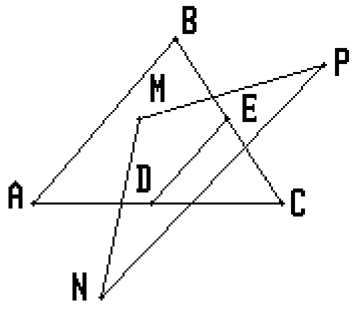
9. Проекция на плоскость прямой, параллельной этой плоскости.



$\forall_{ABCDMNP}$(прямая(AB) $\parallel$ плоскость(MNP) $\rightarrow$ C – точка & D – точка & $C \in$ плоскость(MNP) & $D \in$ плоскость(MNP) & прямая(AC) $\perp$ плоскость(MNP) & прямая(BD) $\perp$ плоскость(MNP) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & проекция(прямая(AB), плоскость(MNP)) = прямая(CD))

Антецедент выделен указателем "усм". Указатель "контрольвывода" активирует попытку применения приема при усмотрении выражения "проекция(прямая(AB) плоскость(MNP))". Прием вводит в рассмотрение новые точки C, D. Уровень срабатывания равен 3.

10. Проведение через точку плоскости прямой, параллельной некоторой прямой, параллельной этой плоскости.



$\forall_{ABCDEMNP}$(прямая(AB) $\parallel$ плоскость(MNP) & актив(прямая(BC)) & $D \in$ прямая(AC) & $D \in$ плоскость(MNP) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow$ E – точка & $E \in$ прямая(BC) & прямая(DE) $\parallel$ прямая(AB) & актив$(l(CE))$ & $E \in$ плоскость(MNP))

Указатель "контрольвывода" активирует попытку применения приема при усмотрении выражения плоскость$(MNP) \cap a$. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Через точку D пока не проведена прямая, параллельная прямой AB. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 4.

11. Усмотрение параллельности сторон прямоугольника.

Два приводимых ниже простых приема играют роль ускорителей усмотрения параллельности в непланиметрических задачах. Общие приемы про перпендикуляр к перпендикуляру, которые будут приведены в следующих разделах, требуют проверки принадлежности точек общей плоскости. Данные приемы будут применяться, если необходимые для такой проверки посылки еще не выведены.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(AB) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AB) & $l(AC) = l(BD)$ & актив(прямая(CD)) & однасторона($C, D,$прямая(AB)) $\rightarrow$ прямая$(CD) \parallel$ прямая(AB))

Третий антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(AC) \perp$ прямая(AB) & прямая$(BD) \perp$ прямая$(AB) \rightarrow$ прямая$(AC) \parallel$ прямая(BD))

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие два - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

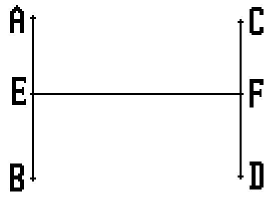
Нормализатор "нормпараллельны"

Этот нормализатор обеспечивает простейшую стандартизацию условия параллельности прямых: переход к общему представителю группы параллельных прямых и замену условия параллельности прямой самой себе на константу "истина". Обычно он используется для обработки выводимых условий параллельности.

Синтезатор "расстмеждупрямыми"

Синтезатор пытается выразить расстояние между параллельными прямыми через численные параметры. Реализуемое утверждение имеет вид "расстмеждупрямыми(a b x)", где a, b - данные прямые; x - искомое расстояние. Имеется всего два приема:

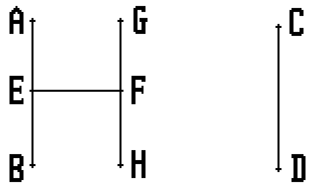
1. Непосредственное определение расстояния.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(AB) \rightarrow$ расстмеждупрямыми(прямая(AB), прямая(CD), $l(EF)$))

Антецеденты выделены указателем "усм". Проверяется, что обработанное нормализатором "нормрасстояние" выражение $l(EF)$ не содержит символа "расстояние". Уровень срабатывания равен 1.

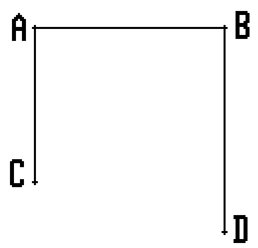
2. Переход к новой прямой, параллельной исходной.



$\forall_{ABCDEFGHa}$(разныестороны(A, C, прямая(GH)) & $E \in$ прямая(AB) & прямая(EF) $\perp$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(GH) & прямая(GH) $\parallel$ прямая(AB) & расстмеждупрямыми(прямая(GH), прямая(CD), a) $\to$ расстмеждупрямыми(прямая(AB), прямая(CD), $l(EF) + a$))

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент реализует рекурсивное обращение. Выражение для расстояния EF не должно содержать символа "расстояние". Уровень срабатывания равен 2.

Синтезатор "расстмеждупрямыми" используется следующим приемом, позволяющим выразить через численные параметры рассматриваемое в задаче расстояние AB:



$\forall_{ABCDa}$(актив($l(AB)$) & прямая(AC) $\perp$ прямая(AB) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AB) & расстмеждупрямыми(прямая(AC), прямая(BD), a) $\to l(AB) = a$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент реализуется синтезатором. Перед обращением к синтезатору проверяется, что в задаче уже рассматривается такая отличная от AB прямая PQ, перпендикулярная прямой AC и проходящая через ее точку P, что через Q проведена прямая, параллельная AC и отличная от BD. Необходимо также наличие посылки "планиметрия". Уровень срабатывания равен 6.

3.21 Приемы, связанные с символом "перпендикулярно"

Запись "перпендикулярно(a b)" означает, что прямые либо плоскости либо векторы a, b перпендикулярны. Допускаются любые сочетания объектов указанных типов ("прямая - прямая", "прямая - плоскость", "вектор - плоскость" и т.п.).

Упорядочение операндов

Прием "коммутативно(перпендикулярно)" обеспечивает лексикографическое переупорядочение операндов. В посылках задачи он срабатывает на уровне 0, в условиях - на уровне 3.

Переход к общему представителю класса параллельных прямых либо плоскостей

Если имеется посылка про параллельность двух прямых либо двух плоскостей, то она используется для перехода в условии перпендикулярности к лексикографически меньшему выражению:

$\forall_{ABCDEF}($прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая$(EF) \leftrightarrow$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(EF))$

$\forall_{ABCDEFG}($прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \to$ прямая$(CD) \perp$ плоскость$(EFG) \leftrightarrow$ прямая$(AB) \perp$ плоскость$(EFG))$

$\forall_{ABCDEFGHP}($плоскость$(ABC) \parallel$ плоскость$(DEF) \to$ плоскость$(DEF) \perp$ плоскость$(GHP) \leftrightarrow$ плоскость$(ABC) \perp$ плоскость$(GHP))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент берется в посылках, причем указатель "коммутативно" блокирует перестановку его операндов при идентификации. Дополнительно проверяется, что заменяющее выражение для прямой либо плоскости лексикографически предшествует заменяемому. Это делается для тех случаев, когда соответствующее переупорядочение операндов условия параллельности еще не успело произойти. Уровни срабатывания равны 0 и 2.

Перпендикуляр к перпендикуляру

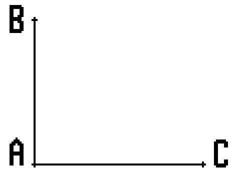
$\forall_{ABCDEFGH}($прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(CD) \perp$ прямая(EF) & $B \in$ плоскость(AGH) & $E \in$ плоскость(AGH) & $F \in$ плоскость$(AGH) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(GH) \leftrightarrow$ прямая$(EF) \parallel$ прямая$(GH))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы перед компиляцией. Введен ускоряющий фильтр, отсекающий случаи принадлежности точки A прямой GH, так как в этих случаях обозначение плоскости AGH вырождается. Уровень срабатывания равен 0. Создана копия данного приема, срабатывающая в непланиметрических контекстах на уровне 6.

$\forall_{ABCDEFK}($прямая$(AK) \perp$ прямая(CE) & прямая$(DF) \perp$ прямая(CE) & $A \in$ прямая(DF) & $K \in$ плоскость(APQ) & $D \in$ плоскость(APQ) & $F \in$ плоскость(APQ) & $C \in$ плоскость(APQ) & $E \in$ плоскость$(APQ) \to$ $K \in$ прямая$(DF))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

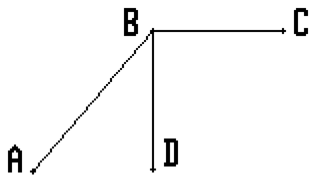
Усмотрение величины угла, стороны которого взаимно перпендикулярны



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & прямая(AB) $\perp$ прямая(AC) $\to \angle(BAC) = \pi/2$)

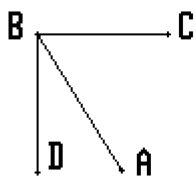
Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Указатель "нормугол" определяет идентификацию угла BAC без учета ориентации его лучей. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, у которой оба антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором антецеденте. Уровень срабатывания тот же.

Величина угла, составленного из прямого угла и примыкающего к нему угла с той же вершиной



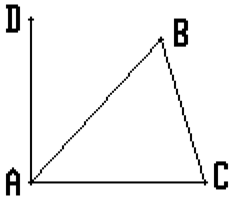
$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABC)$) & прямая(BC) $\perp$ прямая(BD) & актив($\angle(ABD)$) & разныестороны($A, C,$ прямая(BD)) & однасторона($A, D,$ прямая(BC)) & $A \in$ плоскость(BCD) $\to \angle(ABC) = \angle(ABD) + \pi/2$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для углов ABC, ABD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABD)$) & прямая(BC) $\perp$ прямая(BD) & однасторона($A, C,$ прямая(BD)) & однасторона($A, D,$ прямая(BC)) & $A \in$ плоскость(BCD) $\to \angle(ABC) = \pi/2 - \angle(ABD)$)

Первый, второй и пятый антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла ABC имеет тип "определимо", для угла ABD - тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AD) \perp$ прямая(AC) & актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(BCA)) \rightarrow$
$\angle(DAB) = |\angle(ABC) + \angle(ACB) - \pi/2|)$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Углы ABC и ACB известны; выражение для угла DAB имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 8.

Ввод вспомогательного параметра - длины перпендикуляра, опущенного из точки на прямую

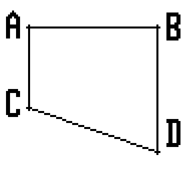
Во многих ситуациях бывает полезно временно предположить известной длину какого-либо перпендикуляра и выразить через нее ряд других параметров чертежа. Если таким образом удается найти и значение неизвестной, то длина перпендикуляра переводится в разряд вспомогательных неизвестных, и решение задачи продолжается. Перечислим приемы, вводящие в рассмотрение вспомогательую длину перпендикуляра.

$\forall_{ABCab}(\angle(ABC) = a$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow b = l(AB))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражение a имеет тип "внешнеизв". Расстояние AB встречается в некотором уравнении задачи, не имеющем вида $l(AB) = \ldots$, причем выражение для этого расстояния содержит неизвестные и не имеет типа "внешнеизв". Отсутствует посылка вида $l(AB) = p$, где p - переменная. Указатель "вспомпараметр(x2 фикс(0))" определяет выбор новой переменной b и регистрацию ее в качестве вспомогательного параметра. Для этого используется комментарий (вспомпараметр b) к посылкам задачи. Если в задаче уже имеется вспомогательный параметр, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDa}$(актив$(l(AB))$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $B \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
$a = l(BD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Ни одно из рассматриваемых в задаче расстояний не известно. Существует угол, выражение для которого имеет тип "неизв". В выражение для расстояния BD не входят ни численная неизвестная, ни символ "угол". В задаче отсутствуют равенства, задающие значения тригонометрических операций. В ней также не рассматриваются площади фигур. Указатель "вспомпараметр(x1 фикс(0))" определяет выбор нового известного параметра a. Если ранее уже был введен вспомогательный параметр, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDa}$(актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) & прямая(AC) $\perp$ прямая(AB) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AB) $\to a = l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AC и BD известны; расстояние CD уже рассматривается в задаче. Выделена прямая, перпендикулярная прямой CD, причем рассматривается расстояние от некоторой ее точки до пересечения с прямой CD. Прямые AB и CD не перпендикулярны. Выражение для расстояния CD содержит неизвестные, но не имеет типа "неизв". Ранее вспомогательные параметры не вводились. Уровень срабатывания равен 8.

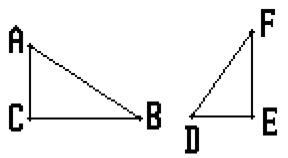
$\forall_{ABCDa}$(актив($l(BD)$) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $B \in$ прямая(AC) $\to$ $a = l(BD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Расстояние BD не выражено через численные параметры. Оно встречается в некотором уравнении, не имеющем вида $l(BD) = \ldots$. Отсутствует уравнение вида $l(BD) = x$, где x - переменная. Если в задаче уже введен вспомогательный параметр, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 14.

Углы со взаимно перпендикулярными сторонами

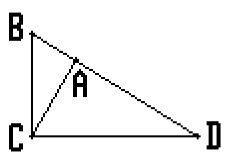
Трудоемкость идентификации двух углов со взаимно перпендикулярными сторонами и проверки того, что оба они острые либо оба тупые, в общем случае оказалась достаточно большой. Поэтому приемы созданы для множества различных частных случаев, где указанные действия существенно более дешевые.

1. Усмотрение равных углов.



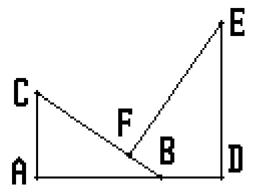
$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) & актив($\angle(CAB)$) & актив($\angle(EDF)$) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AC) & прямая(DF) $\perp$ прямая(AB) & прямая(DE) $\perp$ прямая(EF) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость(ABC) $\to \angle(CAB) = \angle(EDF)$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7. Рассмотрение прямоугольных треугольников гарантирует, что оба угла острые, а значит, они равны. Создана еще одна версия приема, в которой второй и третий антецеденты отброшены, а уровень срабатывания равен 13. При этом требуется, чтобы расстояния AC, BC, DE, EF уже рассматривались в задаче, причем каждое из них было либо известным, либо имело тип "неизв". Точка привязки для этой версии выбрана в первом антецеденте.



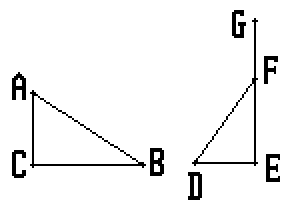
$\forall_{ABCD}$(актив(DCA) & прямая$(BC) \perp$ прямая(CD) & прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & $A \in$ прямая$(BD) \to \angle(DCA) = \angle(CBD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол CBD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & точкалуча(B, C, F) & актив$(\angle(ABC))$ & прямая$(BC) \perp$ прямая(EF) & $F \in$ прямая(BC) & разныестороны$(A, E,$ прямая$(BC))$ & $D \in$ прямая$(AB) \to \angle(ABC) = \angle(DEF))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

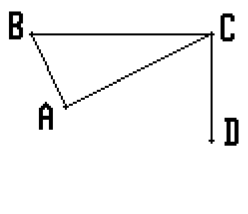


$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(CBA))$ & актив$(\angle(DFG))$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая(EF) & $F \in$ отрезок(GE) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость$(ABC) \to \angle(CBA) = \angle(EFD))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCDMNPQ}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(MN) & прямая$(CD) \perp$ прямая(PQ) & $F \in$ прямая(MN) & $F \in$ прямая$(PQ) \to$ уголмежду(прямая(AB), прямая(CD)) = уголмежду(прямая(MN), прямая(PQ))))

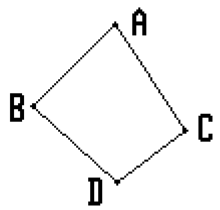
Антецеденты выделены указателем "усм", причем указатель "контрольвывода" определяет инициализацию попытки применения приема при усмотрении выражения "уголмежду(прямая(AB) прямая(CD))". Задача должна иметь посылку "планиметрия". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(DCA)$) & прямая(BC) $\perp$ прямая(CD) & прямая(AB) $\perp$ прямая(AC) & $\angle(DCA) < \pi/2$ & $D \in$ плоскость(ABC) $\rightarrow \angle(ABC) = \angle(DCA)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол DCA не известен, выражение для угла ABC имеет тип "определимо". Уровень срабатывания равен 6.

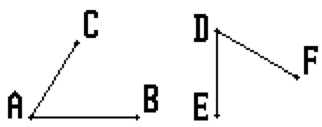
2. Усмотрение углов, составляющих в сумме пи.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BD) & прямая(AC) $\perp$ прямая(CD) & актив($\angle(BAC)$) & однасторона($B, D,$ прямая(AC)) & однасторона($C, D,$ прямая(AB)) $\rightarrow \angle(BAC) + \angle(BDC) = \pi$)

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Угол BDC уже рассматривается в задаче. Хотя бы один из углов BAC, BDC не известен. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 8. Она проверяет, что выражение для угла BDC имеет тип "определимо", а для угла BAC - тип "неизв". В отличие от первой версии, не требуется, чтобы угол BDC уже был введен в рассмотрение.

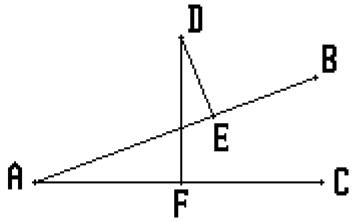
3. Вывод о равенстве синусов углов.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(DF) & прямая(AB) $\perp$ прямая(DE) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость(ABC) $\rightarrow$ $\sin(\angle(BAC)) = \sin(\angle(EDF))$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражение для угла EDF имеет тип "определимо", выражение для угла BAC - тип "неизв". Введен сильный органичитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 10.

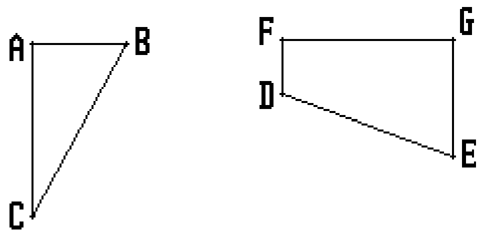
4. Разбор случаев: углы равны либо составляют в сумме пи.



$\forall_{ABCDEF}$(актив($\angle(BAC)$) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AB) & прямая(DF) $\perp$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & $D \in$ плоскость(ABC) $\to$ $\angle(EDF) = \angle(BAC) \ \vee \ \angle(EDF) = \pi - \angle(BAC)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Угол BAC известен, выражение для угла EDF имеет тип "существатом". Ни угол EDF, ни смежный с ним угол не известны. Либо не усматривается расположение точек B, D относительно прямой AC, либо не усматривается расположение точек C, D относительно прямой AB. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания приема равен 8.

5. Усмотрение равенства гипотенуз в прямоугольных треугольниках с равными катетами, если острые углы имеют соответственно перпендикулярные стороны.



$\forall_{ABCDEFG}$($l(AC) = l(FG)$ & прямая(AC) $\perp$ прямая(FG) & прямая(GE) $\perp$ прямая(FG) & прямая(BC) $\perp$ прямая(DE) & прямая(AB) $\perp$ прямая(AC) & прямая(DF) $\perp$ прямая(FG) & $F \in$ плоскость(ABC) & $G \in$ плоскость(ABC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) $\to l(BC) = l(DE)$)

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". Точка привязки выбрана в пятом антецеденте. Уровень срабатывания равен 8.

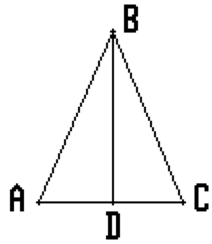
Усмотрение перпендикулярности прямых

1. Перпендикулярность сторон прямого угла.

   $\forall_{ABC}(\angle(ABC) = \pi/2 \to$ прямая(AB) $\perp$ прямая(BC))

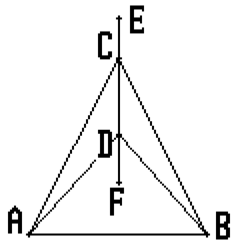
   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение перпендикулярности прямых из равноудаленности двух различных точек от конца отрезка.



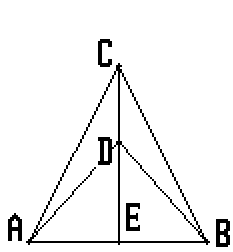
$\forall_{ABCD}$(прямая$(EF) \parallel$ прямая(AC) & прямая$(GH) \parallel$ прямая(BD) & $l(AD) = l(CD)$ & разныеточки(A, C) & разныеточки(B, D) & $l(AB) = l(BC) \to$ прямая$(EF) \perp$ прямая(GH))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый и пятый - обрабатываются проверочным оператором. Шестой антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, при сравнительно слабом ограничителе трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.



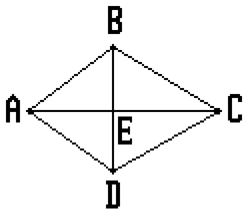
$\forall_{ABCDEF}(l(AC) = l(BC)$ & $l(AD) = l(BD)$ & разныеточки(A, B) & $C \in$ прямая(EF) & $D \in$ прямая(EF) & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(EF)\ \vee\ C = D)$

Первый антецедент выделен указателем "равно", третий - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точки C, D не лежат на прямой AB, причем не усматривается их различие. На прямой EF выделена хотя бы одна точка, отличная от точек C, D. При обработке третьего антецедента используется сильный ограничитель трудоемкости. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(BC)$ & $l(AD) = l(BD)$ & разныеточки(C, D) & разныеточки(A, B) & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $E -$ точка & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(CD))$

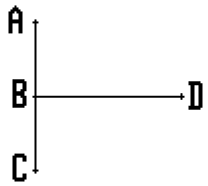
Первый антецедент выделен указателем "равно", третий и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Второй и пятый антецеденты выделены указателем "усм". Прямые AB, CD уже рассматриваются в задаче, причем пока не выделена их общая точка. Рассматривается также площадь треугольника ABC. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(AD)$ & $l(BC) = l(CD)$ & актив$(l(AC))$ & актив(прямая(BD)) & разныеточки(B, D) & разныестороны$(A, C,$ прямая$(BD)) \to E \in$ точка & $E \in$ отрезок(BD) & $E \in$ отрезок(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC))

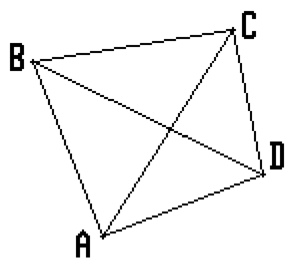
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень его срабатывания равен 10.

3. Усмотрение перпендикулярности из равенства углов.



$\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AC) & $\angle(ABD) = \angle(CBD)$ & разныеточки(A, B) & разныеточки$(B, C) \to$ прямая$(AC) \perp$ прямая(BD))

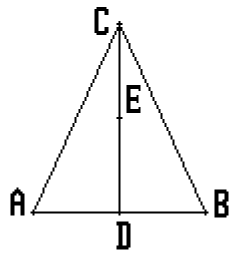
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "равно". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}(\angle(CAD) = \angle(CBD)$ & прямая$(BC) \perp$ прямая(CD) & разныеточки(A, B) & разныеточки(C, D) & однасторона$(A, B,$ прямая$(CD)) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая(AD))

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямая AB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

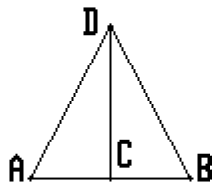
Принадлежность точки, равноудаленной от концов отрезка, перпендикуляру, проведенному через середину этого отрезка



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $l(AD) = l(BD)$ & разныеточки(A, B) & $l(AC) = l(BC)$ & $D \in$ отрезок(AB) & $C \in$ плоскость$(ABE) \to C \in$ прямая(DE))

Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема, у которой точка привязки находится во втором антецеденте, выделенном указателем "равно". Ее уровень срабатывания равен 7.

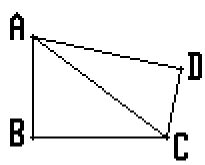
Равенство длин отрезков, соединяющих точку на перпендикуляре к прямой с двумя равноудаленными от основания перпендикуляра точками этой прямой



$\forall_{ABCD}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $l(AC) = l(BC)$ & $C \in$ прямая$(AB) \to$ $l(AD) = l(BD)$)

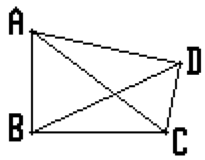
Второй антецедент выделен указателем "равно", два других - указателем "усм". Выражение для расстояния AD имеет тип "неизв", расстояние BD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема. В ней не накладывается никаких ограничений на расстояния AD, BD, кроме того, что выражения для них не должны быть тождественно равны. Вместо этого требуется, чтобы угол ADB уже рассматривался в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

Ввод в рассмотрение общей гипотенузы двух прямоугольных треугольников



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(CD) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AD)) \rightarrow$ актив$(l(AC)))$

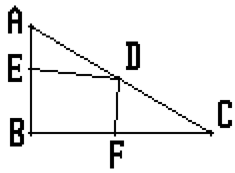
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояние AB известно, выражение для расстояния AD имеет тип "неизв". Через точки A, C проходит некоторая рассматриваемая в задаче окружность, но прямая AC еще не рассматривается. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(CD) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow$ актив$(l(AC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Прямая BD уже рассматривается в задаче, а прямая AC - нет. Уровень срабатывания равен 9.

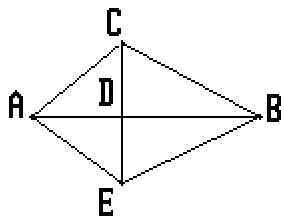
Ввод в рассмотрение острых углов прямоугольного треугольника



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BC) & актив$(\angle(EDF))$ & разныеточки(A, B) & разныеточки$(B, C) \rightarrow$ актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BCA)))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла EDF либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 14.

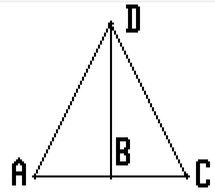
Равенство углов, симметричных относительно прямой



$\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(ACB))$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BC)) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & $l(CD) = l(DE)$ & $D \in$ отрезок(CE) & $D \in$ прямая$(AB) \rightarrow \angle(ACB) = \angle(AEB))$

Прием применяется в задачах на доказательство. Пятый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Условие задачи содержит ссылку на угол ACB. Уровень срабатывания равен 6.

Если из точки перпендикуляра проведены под равными углами два отрезка, то они пересекаются с прямой на равных расстояниях от основания перпендикуляра

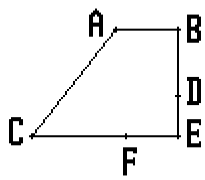


$\forall_{ABCD}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & $B \in$ прямая(AC) & $\angle(ADB) = \angle(BDC)$ & разныеточки$(B, D) \to l(AB) = l(BC))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

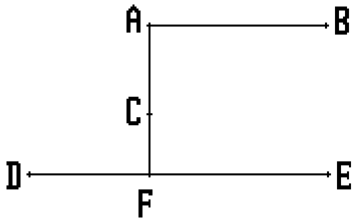
Проведение вспомогательного перпендикуляра

1. Продолжение перпендикуляра к прямой до пересечения с прямой, параллельной данной.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CF) & актив$(\angle(ACF))$ & актив$(l(AC))$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to E -$ точка & $E \in$ прямая(CF) & $E \in$ прямая(BD) & актив$(l(BE)))$

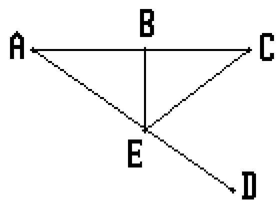
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. В задаче не рассматривается точка пересечения прямых BD и CF. Кроме того, не рассматривается никакая другая прямая, перпендикулярная AB и пересекающаяся с AB, CF по выделенным точкам. Угол ACF и расстояние AC выражены через численные параметры. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $D \in$ плоскость$(ABC) \to F$ – точка & $F \in$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(AC) & актив$(l(AF))$)

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и третий - указателем "усм". В задаче пока не рассматривается точка пересечения прямых AC и DE. Прием вводит новую точку F, причем проверяется, что расстояние AF после регистрации в посылках задачи выводимых утверждений будет иметь как тип "определимо", так и тип "применимо". Для этого используются фильтры "новконтекст(легковидеть(определимо(...)))", "новконтекст(легковидеть(применимо(...)))". Программа приема сначала создает вспомогательную задачу, которой передаются выводимые утверждения, и эта задача временно приобретает статус текущей. Относительно нее проверяются определимость и применимость. Далее вспомогательная задача сбрасывается; если проверки дали положительные результаты, то выводимые утверждения обычным образом регистрируются в посылках основной задачи. Уровень срабатывания равен 8.

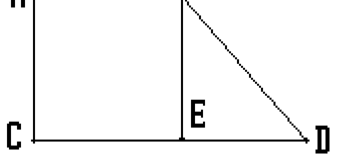
2. Проведение перпендикуляра из середины отрезка, выделенной на одной стороне угла, и продолжение его до пересечения с другой стороной угла.



$\forall_{ABCDE}(B \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(CAD))$ & $0 < \pi/2 - \angle(CAD) \to E$ – точка & $E \in$ прямая(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & $\neg(A \in$ интервал$(DE))$ & $\angle(ACE) = \angle(CAD)$ & $\angle(BEC) + \angle(CAD) = \pi/2$ & $\angle(AEB) = \angle(BEC))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и третий - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Угол CAD упоминается в некотором равенстве, представляющем собой исходное условие задачи. Не рассматривается точка пересечения прямой AD с перпендикуляром к прямой AC, восставленным в точке B. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 15.

3. Проведение общего перпендикуляра к двум параллельным прямым для получения соотношения, связывающего длины отрезков.

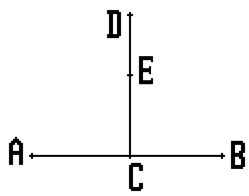


$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CD))$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(BDC)$ & однасторона$(B, D,$

прямая$(AC)) \to E -$ точка & $E \in$ отрезок(CD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(CD) & $l(CD) = l(AB) + l(DE))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние AB известно, выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". В задаче не рассматривается точка пересечения с прямой CD перпендикуляра к прямой AB, восставленного в точке B. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 10.

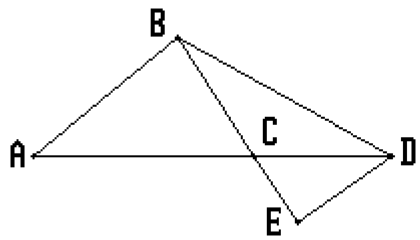
4. Проведение серединного перпендикуляра к отрезку, если концы отрезка известны, а неизвестная точка равноудалена от этих концов.



$\forall_{ABCDE}(l(AD) = l(BD)$ & разныеточки$(A, B) \to C -$ точка & $C \in$ отрезок(AB) & $E -$ точка & $\neg(C = E)$ & прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & $l(AC) = l(BC)$ & $D \in$ прямая$(CE))$

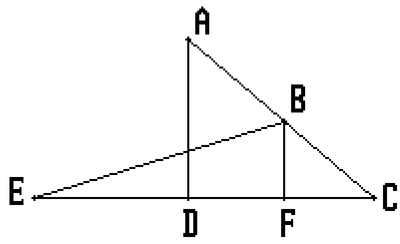
Прием применяется в задачах на построение, котороые распознаются как задачи на исследование, не имеющие цели "известно". Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - обрабатывается проверочным оператором. Точки A, B известны, точка D - не известна. В задаче не проведен срединный перпендикуляр к отрезку AB, либо не указана принадлежность ему точки D. Уровень срабатывания равен 5.

5. Проведение перпендикуляра для получения соотношений пропорциональности.



$\forall_{ABCDE}($прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(AB))$ & $C \in$ отрезок(AD) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AC)) \to E-$точка & $E-$прямая(BC) & прямая$(BC) \perp$ прямая(DE) & $l(AB)l(CD) = l(AC)l(DE))$

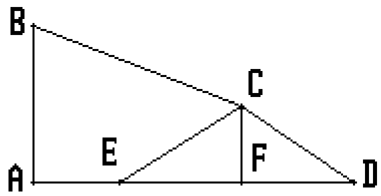
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Хотя бы один из углов ABD, CBD уже рассматривается в задаче. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDEFpq}(B \in$ отрезок(AC) & $pl(AB) = ql(BC)$ & прямая$(AD) \perp$ прямая(EC) & актив$(\angle(BEC))$ & $D \in$ прямая$(EC) \to F -$ точка & $F \in$ прямая(EC) & $pl(AD) = (p+q)l(BF)$ & прямая$(BF) \perp$ прямая$(EC))$

Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Угол BEC известен. Прием вводит в рассмотрение новую точку F. Уровень срабатывания равен 10.

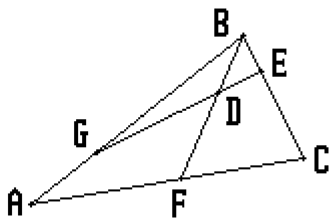
6. Проведение перпендикуляра для вычисления расстояния.



$\forall_{ABCDEF}($прямая$(AB) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AD) & актив$(l(ED))$ & $l(CE) = l(CD)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \to F \in$ прямая(AD) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AD) & $F -$ точка & актив$(l(CF)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояния AB, CD, DE известны; выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Прием вводит в рассмотрение новую точку F. Уровень срабатывания равен 7.

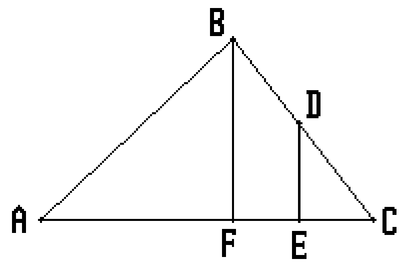
7. Продолжение перпендикуляра к прямой до пересечения его с этой прямой.



$\forall_{ABCDEFG}($прямая$(GD) \perp$ прямая(BC) & $G \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(AC) & $D \in$ отрезок(BF) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \to E -$ точка & $E \in$ прямая(GD) & $E \in$ прямая(BC) & $\neg(B \in$ интервал$(EC))$ & $D \in$ отрезок$(GE))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 7.

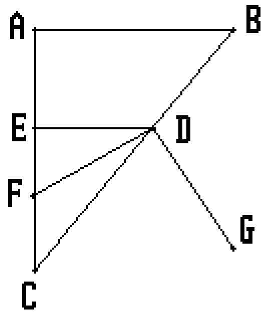
8. Проведение перпендикуляра для нахождения угла.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(DE))$ & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(BC) & актив$(l(BD))$ & актив$(l(CD))$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB)) \to F -$точка & $F \in$ прямая(AC) & прямая$(BF) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(BF))$))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Прием вводит в рассмотрение новую точку F. Уровень срабатывания равен 11.

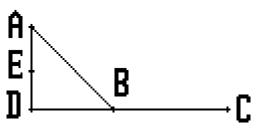
9. Проведение перпендикуляра из вершины неизвестного угла.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив$(\angle(FDG))$ & $D \in$ отрезок(BC) & прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & разныеточки(A, B) & разныеточки$(C, D) \to E -$ точка & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & актив$(\angle(EDF))$))

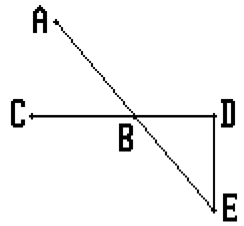
Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Проверяется, что выражения для расстояний BD, CD пропорциональны, а выражение для угла FDG имеет тип "неизв". Прием вводит в рассмотрение новую точку E. Уровень срабатывания равен 8.

Разбор случаев для расположения основания перпендикуляра, опущенного на сторону угла из точки другой стороны угла



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(BAE)$) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AE) & $D \in$ прямая(BC) $\to B \in$ отрезок(CD) $\vee$ $D \in$ интервал(BC) $\vee$ $C \in$ отрезок(BD))

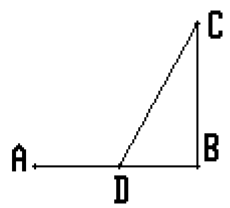
Антецеденты выделены указателем "усм"; точка привязки выбрана в третьем из них. Каждый из углов ABC, BAE либо известен, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы один из них не известен. Не усматривается расположение точки D по отношению к точкам B, C. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 12.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & $B \in$ отрезок(AE) & прямая(BC) $\perp$ прямая(DE) & $D \in$ прямая(BC) & актив($l(BE)$) $\to B \in$ отрезок(CD) & $\angle(DBE) = \angle(ABC)$ & $\angle(BED) = \pi/2 - \angle(ABC)$ $\vee$ $\neg(B \in$ интервал(CD)) & $\angle(DBE) = \pi - \angle(ABC)$ & $\angle(BED) = \angle(ABC) - \pi/2$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Угол ABC известен. Не усматривается положение точки B по отношению к отрезку CD. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 12.

Отождествление точки с основанием перпендикуляра



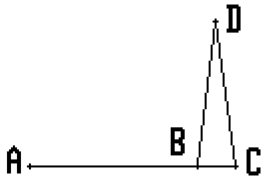
$\forall_{ABCD}$(прямая(BC) $\perp$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & $l(CD) = l(BC) \to B = D$)

Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Отождествление двух прямых, перпендикулярных к третьей прямой и проходящих через общую точку

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(CD) & прямая(EF) $\perp$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(EF) & $E \in$ плоскость(PQR) & $F \in$ плоскость(PQR) & $D \in$ плоскость(PQR) & $C \in$ плоскость(PQR) & $A \in$ плоскость(PQR) & $B \in$ плоскость(PQR) $\to$ прямая(AB) = прямая(EF))

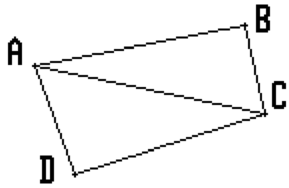
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Обозначения прямых AB, EF различны. Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) &
$C \in$ прямая$(AB) \to B = C)$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Обозначения точек B, C различны. Уровень срабатывания равен 3.

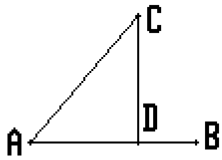
Проведение отрезка, соединяющего общую точку перпендикуляров к двум различным прямым с общей точкой этих прямых



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(CD) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AB)) \to$ актив$(l(AC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояния AD и CD известны; выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Не усматривается параллельность прямых AB и CD. Расстояние AC не встречается в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 11.

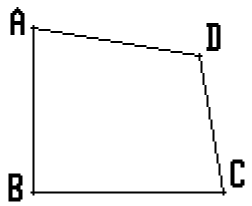
Длина перпендикуляра меньше длины наклонной



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $D \in$ прямая(AB) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AC)) \to 0 \leq l(AC) - l(CD))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Каждое из выражений для расстояний AC, CD либо константное, либо встречается в неравенстве, изначально имевшемся в условии задачи. Хотя бы одно из этих выражений неконстантное. Уровень срабатывания равен 3.

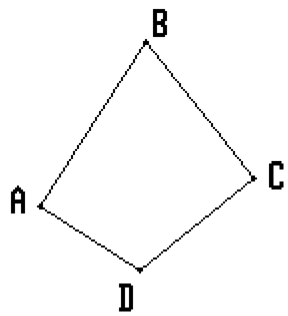
Точка пересечения двух прямых, проведенных под заданными углами к двум перпендикулярным прямым



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(AB) = a$ & $l(BC) = b$ & $\angle(BAD) = c$ & $\angle(BCD) = d$ & актив$(l(AD))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(A, D,$ прямая$(BC))$ & $e = \cos(c + d)$ & $\neg(e = 0) \rightarrow l(AD) = (-b \sin d + a \cos d)/e)$

Первый и шестой антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Седьмой, восьмой и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных; выражение для расстояния AD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

Два перпендикуляра, проведенные из точки внутри угла к его сторонам



$\forall_{ABCD}$(актив$(\angle(ABC))$ & прямая$(AD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(CD))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(A, D,$ прямая$(BC)) \rightarrow$
$l(BC) \sin(\angle(ABC)) = l(CD) \cos(\angle(ABC)) + l(AD))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Угол ABC известен, выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 12.

Существование перпендикуляра

Нижеследующие приемы имеют заголовок "связка" и служат для исключения несущественных неизвестных задачи на описание. Переменные связывающей приставки квантора существования идентифицируются с некоторыми несущественными неизвестными, а подкванторные утверждения - со всеми условиями задачи, содержащими данные неизвестные. Действие приема состоит в отбрасывании этих условий либо в замене их на новое условие, не содержащее исключенных неизвестных.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая$(CD) \to \exists_F(F \in$ прямая(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(CD)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}(\neg(E \in$ прямая$(AB)) \to \exists_F(F \in$ прямая(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(AB)))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}(\exists_F(F \in$ прямая(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(AB)) \leftrightarrow \neg(E \in$ прямая$(AB)))$

Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABm}(A-$точка & $B-$точка & $\neg(A = B)$ & $m-$число & $0 < m \to \exists_C$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $C-$точка & $l(AC) = m))$

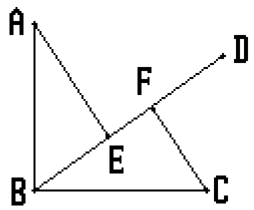
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

Прямая не перпендикулярна самой себе

$\forall_{AB}(\neg$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(AB)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 0.

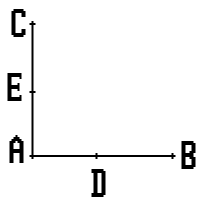
Проекции на общую прямую двух точек взаимно перпендикулярных прямых, равноудаленных от пересечения этих прямых



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(AB) = l(BC)$ & прямая$(AE) \perp$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(BD) & прямая$(CF) \perp$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(BD) & $D \in$ плоскость(ABC) & разныеточки$(A, B) \to l(AE) = l(BF)$ & $l(BE) = l(CF))$

Первые семь антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 9.

Ввод прямоугольной системы координат



$\forall_{ABCDEK}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \to D$ – точка & E – точка & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) & $\neg(A \in$ интервал$(CE))$ & $\neg(A \in$ интервал$(BD))$ & $l(AE) = 1$ & $l(AD) = 1$ & $K = (A, D, E)$ & прямкоорд(K))

Прием предпринимает попытку ввести прямоугольную систему координат в задаче на доказательство либо на исследование, имеющей фиктивную посылку "планиметрия". Эта попытка выполняется на шестнадцатом уровне, по исчерпании прочих возможностей решить задачу. Антецедент выделен указателем "усм", и точка привязки выбрана в нем. Если в задаче имеется несколько пар перпендикулярных прямых, то предпочтение отдается той, у которой число прямых, параллельных оси координат, наибольшее возможное. Из нескольких параллельных прямых в качестве оси координат выбирается та, у которой больше число рассматриваемых расстояний до ее точек. Прием вводит в рассмотрение новые точки D, E.

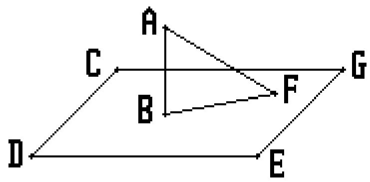
Прямые и плоскости в пространстве

1. Параллельность прямых, перпендикулярных к общей плоскости.

   $\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(EFG) & прямая$(CD) \perp$ прямая$(EFG) \to$ прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD))

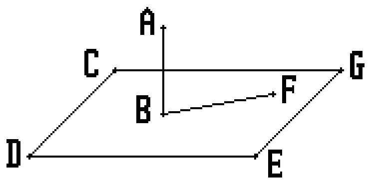
   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

2. Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой прямой этой плоскости.



   $\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & $B \in$ плоскость(CDE) & $F \in$ плоскость(CDE) & разныеточки$(B, F) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая(BF))

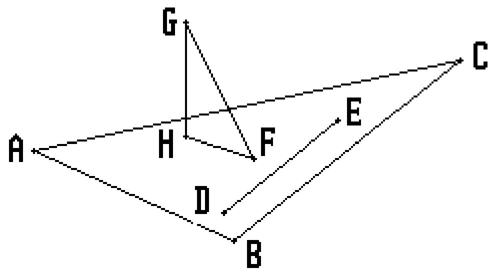
   Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки берется в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прямая AF уже рассматривается в задаче. Уровни срабатывания равны 4 и 7.



   $\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & $B \in$ плоскость(CDE) & $F \in$ плоскость(CDE) & разныеточки$(B, F) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая(BF))

   Аналогично предыдущему, но прямая AF не обязательно рассматривается в задаче, зато прямая BF - рассматривается. Уровень срабатывания равен 7.

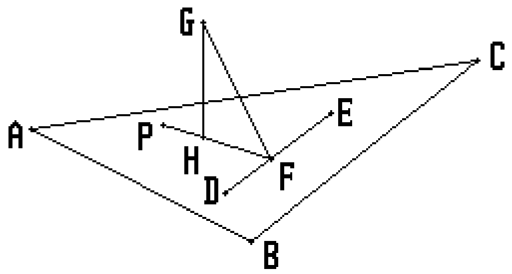
3. Теорема о трех перпендикулярах.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(GH) $\perp$ плоскость(ABC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $H \in$ плоскость(ABC) & прямая(HF) $\perp$ прямая(DE) & $F \in$ плоскость(ABC) & разныеточки(H, F) $\to$ прямая(GF) $\perp$ прямая(DE))

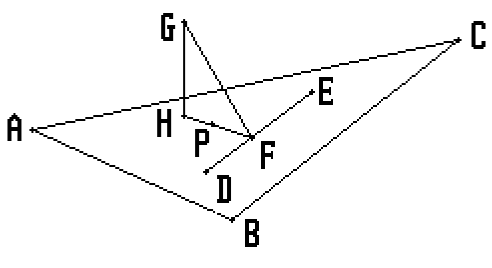
Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Прямая GF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

4. Обратная теорема о трех перпендикулярах.



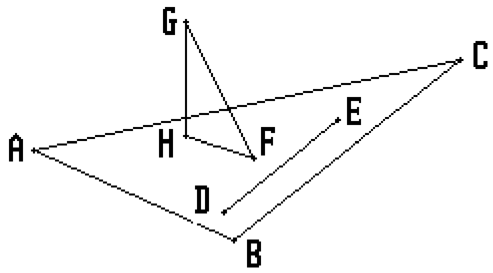
$\forall_{ABCDEFGHP}$(прямая(GH) $\perp$ плоскость(ABC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $H \in$ плоскость(ABC) & прямая(GF) $\perp$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(DE) $\to$ P – точка & прямая(PF) $\perp$ прямая(DE) & $H \in$ прямая(PF) & прямая(PF) $\perp$ прямая(GH) & $P \in$ плоскость(ABC))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Прием вводит в рассмотрение новую точку P. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEFGHP}$(прямая(GH) $\perp$ плоскость(ABC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $H \in$ плоскость(ABC) & прямая(GF) $\perp$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(DE) & прямая(HP) $\perp$ прямая(DE) & $P \in$ плоскость(ABC) $\to$ $F \in$ прямая(HP))

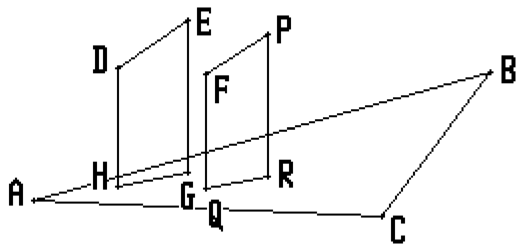
Антецеденты выделены указателем "усм"; точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая$(GH) \perp$ плоскость(ABC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $H \in$ плоскость(ABC) & прямая$(GF) \perp$ прямая(DE) & $F \in$ плоскость(ABC) & разныеточки$(H, F) \rightarrow$ прямая$(HF) \perp$ прямая(DE) & прямая$(HF) \perp$ прямая(GH))

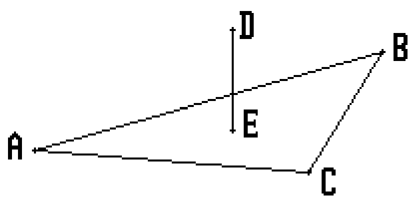
Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязи выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

5. Прямоугольные проекции точек на плоскость.



$\forall_{ABCDEFGHPQR}(H =$ проекция$(D,$ плоскость$(ABC))$ & $G =$ проекция$(E,$ плоскость$(ABC))$ & $Q =$ проекция$(F,$ плоскость$(ABC))$ & $R =$ проекция$(P,$ плоскость$(ABC))$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая(PF) & $\neg$(прямая$(DE) \perp$ плоскость$(ABC)) \rightarrow$ прямая$(GH) \parallel$ прямая(QR))

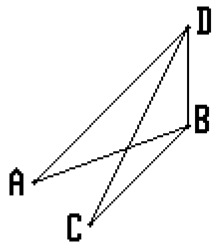
Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}(D$ – точка & $E =$ проекция$(D,$ плоскость$(ABC)) \rightarrow$ прямая$(DE) \perp$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC))

Антецеденты идентифицируются с посылками. В задачах с векторами прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

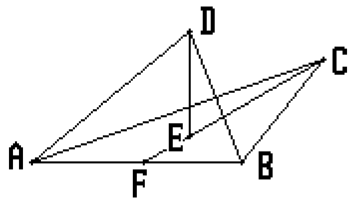
6. Равные наклонные имеют равные проекции.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(BD) \perp$ плоскость(ABC) & $l(AD) = l(CD) \rightarrow l(AB) = l(BC)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 6.

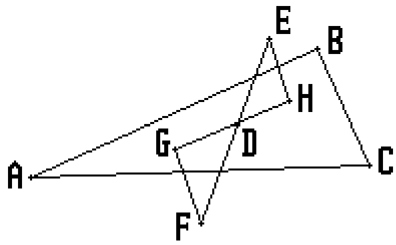
7. Пара точек, равноудаленных от концов отрезка.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(DE) \perp$ плоскость(ABC) & $l(AD) = l(BD)$ & $l(AC) = l(BC)$ & $E \in$ плоскость(ABC) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ $E \in$ прямая(CF))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 2.

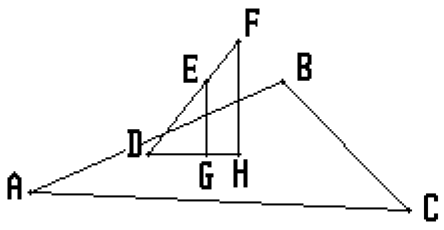
8. Точка пересечения отрезка AB с плоскостью принадлежит отрезку с концами в проекциях на плоскость точек A, B.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая$(EH) \perp$ плоскость(ABC) & $H \in$ плоскость(ABC) & прямая$(FG) \perp$ плоскость(ABC) & $G \in$ плоскость(ABC) & $D \in$ отрезок(EF) & $D \in$ плоскость(ABC) & разныеточки$(E, H) \rightarrow D \in$ отрезок(GH))

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

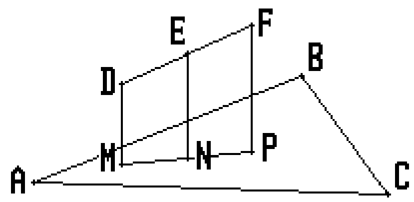
9. Проекции на плоскость точек наклонной лежат на одной прямой.



$\forall_{ABCDEFGH}(D \in$ плоскость(ABC) & прямая$(EG) \perp$ плоскость(ABC) & прямая$(FH) \perp$ плоскость(ABC) & $E \in$ прямая(DF) & $G \in$ плоскость(ABC) & $H \in$ плоскость(ABC) & разныеточки$(D, H) \rightarrow G \in$ прямая$(DH))$

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

10. Проекция на плоскость точки отрезка.



$\forall_{ABCDEFMNP}(M \in$ плоскость(ABC) & $N \in$ плоскость(ABC) & $P \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ отрезок(DF) & прямая$(DM) \perp$ плоскость(ABC) & прямая$(EN) \perp$ плоскость(ABC) & прямая$(FP) \perp$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ $N \in$ отрезок$(MP))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в пятом из них. Уровень срабатывания равен 4.

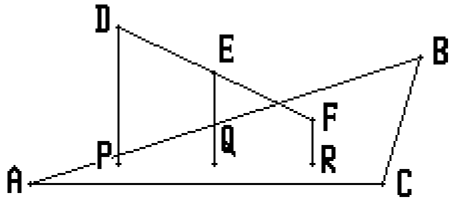
11. Соотношение пропорциональности для расстояний от плоскости точек отрезка.

Чертеж тот же, что в предыдущем приеме.

$\forall_{ABCDEFMNPab}(M \in$ плоскость(ABC) & $N \in$ плоскость(ABC) & $P \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ отрезок(DF) & прямая$(DM) \perp$ плоскость(ABC) & прямая$(EN) \perp$ плоскость(ABC) & прямая$(FP) \perp$ плоскость(ABC) & $al(EF) = bl(DE)$ & однасторона$(D, F,$ плоскость$(ABC)) \rightarrow (a + b)l(EN) = bl(DM) + al(FP))$

Первые семь антецедентов выделены указателем "усм"; точка привязки выбрана в пятом из них. Восьмой антецедент обрабатывается синтезатором "пропорциональны", девятый - проверочным оператором. Расстояния EN, DM и FP уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

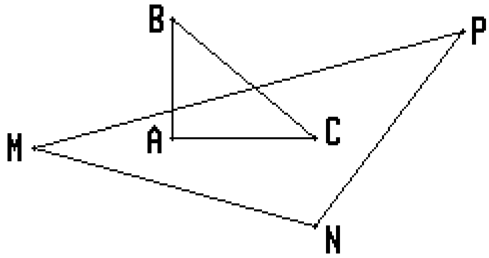
12. Проведение перпендикуляра к плоскости из концевой точки отрезка, разделенного в заданном отношении.



$\forall_{ABCDEFPQRab}$(прямая$(DP) \perp$ плоскость(ABC) & прямая$(EQ) \perp$ плоскость(ABC) & $E \in$ отрезок(DF) & $al(DE) = bl(EF)$ & $P \in$ плоскость(ABC) & $Q \in$ плоскость(ABC) & однасторона$(D, F,$ плоскость$(ABC)) \rightarrow R -$ точка & $R \in$ плоскость(ABC) & прямая$(RF) \perp$ плоскость(ABC) & $(a+b)l(EQ) = al(DP) + bl(FR))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Четвертый антецедент обрабатывается синтезатором "пропорциональны". Пятый и шестой антецеденты выделены указателем "усм", седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Одно из расстояний DP, EQ известно, а другое - имеет тип "неизв". Из точки F пока не опущен перпендикуляр на плоскость ABC. Прием вводит в рассмотрение новую точку R - основание такого перпендикуляра. Уровень срабатывания равен 4.

13. Теорема Пифагора, записанная в терминах перпендикулярности прямой и плоскости.



$\forall_{ABCMNP}$(прямая$(AB) \perp$ плоскость(MNP) & $A \in$ плоскость(MNP) & $C \in$ плоскость(MNP) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2)$

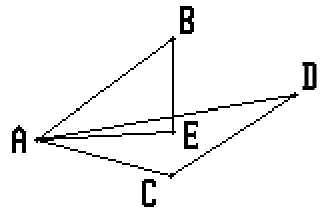
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Каждое из расстояний AC, AB либо известно, либо имеет тип "внешнеизв". В задаче рассматриваются расстояния от точек B, C до некоторой точки, не лежащей ни на плоскости MNP, ни на перпендикуляре к этой плоскости, восставленном в точке C. Уровень срабатывания равен 4.

3.22 Приемы, связанные с символом "уголмежду"

Выражение "уголмежду$(A\ B)$" используется для обозначения величины угла между прямыми либо плоскостями в пространстве, либо между двумя векторами. В первом случае берется значение между 0 и $\pi/2$.

Угол между прямой и плоскостью

1. Опущен перпендикуляр на плоскость из точки прямой.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BE) \perp$ плоскость(ACD) & $E \in$ плоскость$(ACD) \rightarrow$ уголмежду(прямая(AB), плоскость$(ACD)) = \angle(BAE))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 4 и 8.

2. Проведение перпендикуляра к плоскости из точки прямой.

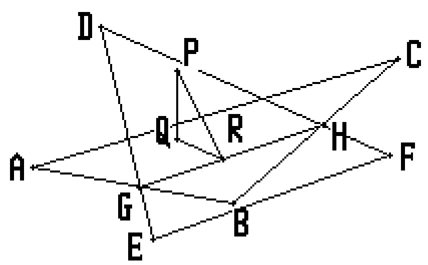
Чертеж тот же, что в предыдущем приеме.

$\forall_{ABCDE}(E-$точка & $E \in$ плоскость(ACD) & прямая$(BE) \perp$ плоскость(ACD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BE) & уголмежду(прямая(AB), плоскость$(ACD)) = \angle(BAE))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(...)" инициирует применение приема при усмотрении выражения "уголмежду(прямая(AB) плоскость(ACD))" в посылке, имеющей вид равенства. Проверяется отсутствие перпендикуляра к плоскости ACD, проведенного через точку прямой AB, и вводится в рассмотрение новая точка E. Уровень срабатывания равен 5.

Угол между двумя плоскостями

1. Из точки одной плоскости опущен перпендикуляр на другую плоскость, но не проведен перпендикуляр к общей прямой двух плоскостей.



$\forall_{ABCDEFGHPQR}(P \in$ плоскость(DEF) & $Q \in$ плоскость(ABC) & прямая$(PQ) \perp$ плоскость(ABC) & $\neg(P \in$ плоскость$(ABC))$ & актив(прямая(GH)) & $G \in$ плоскость(ABC) & $G \in$ плоскость(DEF) & $H \in$ плоскость(ABC) & $H \in$ плоскость(DEF) & разныеточки$(G, H) \rightarrow R-$точка & $R \in$ прямая(GH) & прямая$(PR) \perp$ прямая(GH) & уголмежду(плоскость(ABC), плоскость$(DEF)) = \angle(PRQ))$

Указатель "контрольвывода(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке выражения "уголмежду(плоскость(ABC), плоскость(DEF))".

Четвертый и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Прием вводит в рассмотрение новую точку R. Уровень срабатывания равен 5.

2. Из точки одной плоскости опущены перпендикуляр к общей прямой двух плоскостей и перпендикуляр к другой плоскости.

   Чертеж прежний.

   $\forall_{ABCDEFGHPQR}(P \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ Q \in \text{плоскость}(ABC)\ \&$
   $\text{прямая}(PQ) \perp \text{плоскость}(ABC)\ \&\ \neg(P \in \text{плоскость}(ABC))\ \&$
   $\text{актив}(\text{прямая}(GH))\ \&\ G \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ G \in \text{плоскость}(DEF)\ \&$
   $H \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ H \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ \text{разныеточки}(G, H)\ \&$
   $R \in \text{прямая}(GH)\ \&\ \text{прямая}(PR) \perp \text{прямая}(GH) \to$
   $\text{уголмежду}(\text{плоскость}(ABC), \text{плоскость}(DEF)) = \angle(PRQ))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Четвертый и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

3. Из точки одной плоскости проведен перпендикуляр на общую прямую двух плоскостей, но не опущен перпендикуляр на другую плоскость.

   Чертеж тот же, что и в предыдущих двух приемах.

   $\forall_{ABCDEFGHPQR}(P \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ R \in \text{прямая}(GH)\ \&$
   $\neg(P \in \text{плоскость}(ABC))\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(GH))\ \&\ G \in \text{плоскость}(ABC)\ \&$
   $G \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ H \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ H \in \text{плоскость}(DEF)\ \&$
   $\text{разныеточки}(G, H)\ \&\ \text{прямая}(PR) \perp \text{прямая}(GH) \to Q - \text{точка}\ \&$
   $Q \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ \text{прямая}(PQ) \perp \text{плоскость}(ABC)\ \&$
   $\text{уголмежду}(\text{плоскость}(ABC), \text{плоскость}(DEF)) = \angle(PRQ)\ \&$
   $\text{прямая}(PQ) \perp \text{прямая}(QR))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(...)" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "уголмежду(плоскость(ABC), плоскость(DEF))". Третий и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Вводится в рассмотрение новая точка Q. Уровень срабатывания равен 5.

Угол между двумя прямыми

$\forall_{ABC}(\text{уголмежду}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC)) = \min(\angle(BAC), \pi - \angle(BAC)))$

Указатель "контрольвывода(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "уголмежду(прямая(AB), прямая(AC))". Уровень срабатывания равен 2.

Определение угла по тригонометрической функции

$\forall_{abc}(0 \leq c \to \text{tg}(\text{уголмежду}(a, b)) = c \leftrightarrow \text{уголмежду}(a, b) = \text{arctg}\, c)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C, D)$ & $0 \leq$ крд$(a, K, 3) \to \sin($уголмежду$(a,$ вектор$(AD))) = b \leftrightarrow$ уголмежду$(a,$ вектор$(AD)) = \arcsin b)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3.23 Приемы, связанные с символом "расстмежду"

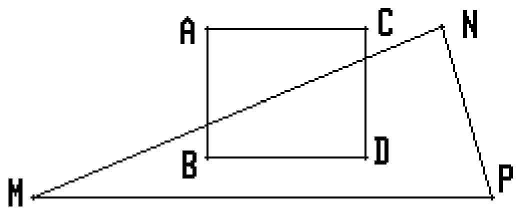
Выражение "расстмежду$(A\ B)$" обозначает расстояние между двумя множествами точек A и B. Оно равно точной нижней грани расстояний между точками этих множеств.

Одинаковые операнды

$\forall_a($расстмежду$(a, a) = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

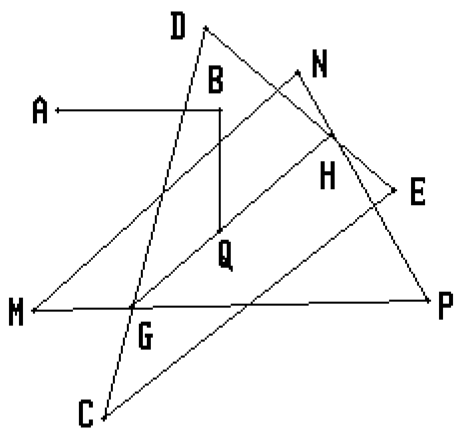
Расстояние между двумя прямыми, перпендикулярными плоскости



$\forall_{ABCDMNP}($прямая$(AB) \perp$ плоскость(MNP) & прямая$(CD) \perp$ плоскость(MNP) & $B \in$ плоскость(MNP) & $D \in$ плоскость$(MNP) \to$ расстмежду(прямая(AB), прямая$(CD)) = l(BD))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

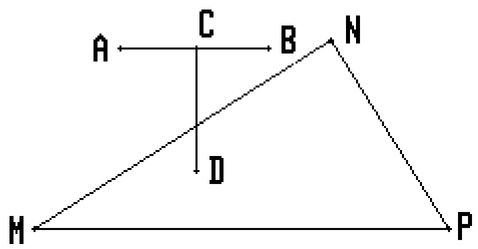
Расстояние от прямой до плоскости



$\forall_{ABCDEMNPQGH}$(прямая$(AB) \parallel$ плоскость(MNP) & прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & $B \in$ плоскость(CDE) & $G \in$ плоскость(CDE) & $H \in$ плоскость(CDE) & $G \in$ плоскость(MNP) & $H \in$ плоскость(MNP) & разныеточки$(G, H) \rightarrow Q -$ точка & $Q \in$ прямая(GH) & прямая$(BQ) \perp$ прямая(GH) & расстмежду(прямая(AB), плоскость$(MNP)) = l(BQ)$)

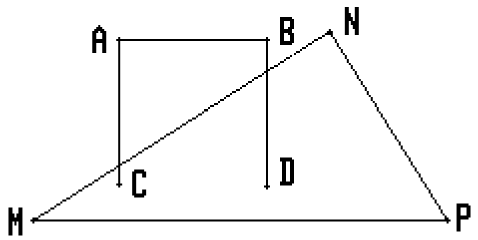
Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(...)" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "расстмежду(прямая(AB), плоскость(MNP))". Первые семь антецедентов выделены указателем "усм", восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Вводится в рассмотрение новая точка Q. Уровень срабатывания равен 4.

Расстояние от отрезка до параллельной ему плоскости



$\forall_{ABCDMNP}$(прямая$(AB) \parallel$ плоскость(MNP) & $C \in$ прямая(AB) & прямая$(CD) \perp$ плоскость(MNP) & $D \in$ плоскость$(MNP) \rightarrow$ расстмежду(отрезок(AB), плоскость$(MNP)) = l(CD)$)

Указатель "контрольвывода(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "расстмежду(отрезок(AB),плоскость(MNP))". Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

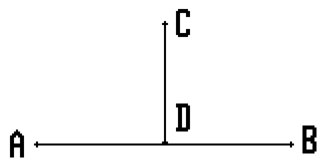


$\forall_{ABCDMNP}$(прямая$(AB) \parallel$ плоскость$(MNP) \rightarrow C -$ точка & $D -$ точка & $C \in$ плоскость(MNP) & $D \in$ плоскость(MNP) & прямая$(AC) \perp$ плоскость(MNP) & прямая$(BD) \perp$ плоскость(MNP) & рассмежду(отрезок(AB), плоскость$(MNP)) = l(AC)$)

Указатель "контрольвывода(...)" такой же, как в предыдущем приеме. Антецедент выделен указателем "усм". Вводятся в рассмотрение новые точки C, D. Уровень срабатывания равен 4.

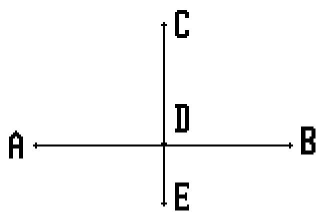
3.24 Приемы, связанные с символом "расстдопрямой"

Выражение "расстдопрямой(A B)" обозначает расстояние от точки A до прямой B. Для этого расстояния пока созданы всего два приема:



$\forall_{ABCD}(D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AB) \rightarrow$
$\text{расстдопрямой}(C, \text{прямая}(AB)) = l(CD))$

Прием имеет заголовок "воройтерм". Антецеденты выделены указателем "усм". В аналитической геометрии прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDE}(D - \text{точка}\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ D \in \text{прямая}(CE)\ \&$
$\neg(C = E)\ \&\ \text{прямая}(CE) \perp \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{расстдопрямой}(C, \text{прямая}(AB)) = l(CD))$

Указатель "контрольвывода(...)" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "расстдопрямой(C, прямая(AB))". Если из точки C еще не опущен перпендикуляр на прямую AB, то прием вводит новую точку D - основание такого перпендикуляра, а также отличную от C направляющую точку E, позволяющую обозначить перпендикуляр в случае совпадения точек C, D. Уровень срабатывания равен 3.

3.25 Приемы, связанные с треугольниками

Утверждение "треугольник(ABC)" означает, что A, B, C - три разные точки, не лежащие на одной прямой. Предикатный символ "треугольник" считается коммутативным, так что в приемах ГЕНОЛОГа идентификация его операндов выполняется в произвольном порядке. Для обозначения треугольника как множества точек служит запись "фигура(набор(A B C))". Такого же вида запись позволяет обозначать любые другие многоугольники. Заметим, что формульный редактор прорисовывает выражение "фигура(набор(...))", никак не указывая на наличие символа "набор". В частности, для треугольника прорисовывается текст "фигура(ABC)".

В большинстве связанных с треугольниками приемов символ "треугольник" явно не встречается. Поэтому в данном разделе собраны именно приемы, которые естественно было считать относящимися к треугольникам, а не к символу "треугольник". Следующий раздел, посвященный многоугольникам, организован по тому же принципу.

Простейшие приемы, связанные с треугольниками

1. Регистрация сторон треугольника.

   $\forall_{ABC}(\triangle(ABC) \to \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$

   Прием имеет заголовок "вывод" и срабатывает на уровне 0. Если в задаче рассматриваются длины двух сторон треугольника, то на уровне 6 вводится в рассмотрение и длина третьей стороны:

   $\forall_{ABC}(\triangle(ABC) \to \text{актив}(l(AB)))$

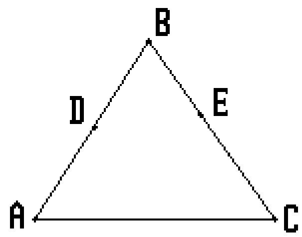
   Здесь расстояния AC, BC уже рассматриваются, а расстояние AB - еще нет.

2. Устранение избыточного условия различия известных точек.

   $\forall_{ABC}(\triangle(ABC) \to \neg(A = B))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование, не имеющей цели "известно". При этом выражения A, B не содержат неизвестных. Данная ситуация складывается при решении задач на построение: если точки A, B уже найдены, то отбрасываются сопровождающие условия. Уровень срабатывания равен 2.

3. Совпадающие точки на двух сторонах треугольника.

   $\forall_{ABCDE}(\triangle(ABC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ D = E \to D = B)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в последнем антецеденте. Уровень срабатывания равен 0.

4. Неравенство треугольника.

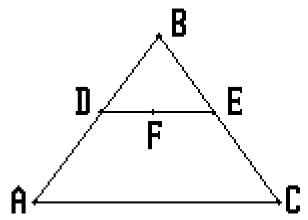
   $\forall_{ABC}(\triangle(ABC) \to 0 < l(AC) + l(BC) - l(AB))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Выражения для расстояний AC, BC, AB не содержат неизвестных, причем хотя бы одно из них неконстантное. Выражение для расстояния AB отлично от выражений для расстояний AC, BC. Если выражения для расстояний AC, BC совпадают, то уровень срабатывания равен 2, иначе он равен 4.

   $\forall_{ABCabcd}(l(AB) = al(AC)/b\ \&\ l(BC) = cl(AC)/d\ \&\ \text{разныеточки}(A, C)\ \&$
   $\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(BC)) \to 0 < a/b + c/d - 1\ \&$
   $0 < c/d + 1 - a/b\ \&\ 0 < a/b + 1 - c/d)$

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками; допускаются вырожденные единичные значения всех коэффициентов a, b, c, d. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прием применяется только в задачах, имеющих целочисленные переменные, причем в каждой паре выражений a, b и c, d должна встречаться хотя бы одна такая переменная. Уровень срабатывания равен 9.

5. Усмотрение противоречия из сравнения длин стороны треугольника и параллельного ей отрезка с концами на двух других сторонах.



$\forall_{ABCDEab}$(прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(DE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $l(DF) = a$ & $l(AC) = b$ & $0 < a - b \to$ ложь)

Второй, шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". При этом выражения a, b не содержат неизвестных. Первый, третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", пятый и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

6. Доказательство того, что три точки образуют треугольник.

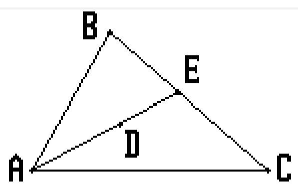
$\forall_{ABCabc}(l(AB) = c$ & $l(AC) = b$ & $l(BC) = a$ & $0 < a + b - c$ & $0 < a + c - b$ & $0 < b + c - a \to \triangle(ABC))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор"; их левые части обрабатываются нормализатором общей стандартизации. Следующие три антецедента обрабатываются проверочными операторами, причем введены сравнительно сильные органичители трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AB)) $\to \triangle(ABC)$)

Прием применяется к условию задачи на доказательство. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

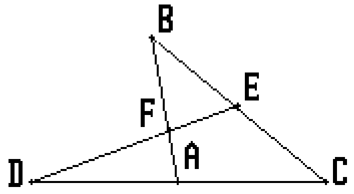
7. Доказательство принадлежности точки треугольнику.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AE) & $E \in$ отрезок$(BC) \to D \in$ фигура$(ABC))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

8. Взаимное расположение точек пересечения прямой с двумя сторонами треугольника и продолжением его основания.

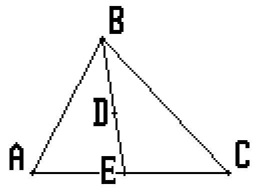


$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AB) & $D \in$ прямая(EF) &
$A \in$ отрезок(CD) & $\neg(B \in$ прямая$(AC))$ & разныеточки$(E, F) \rightarrow$
$F \in$ отрезок$(DE))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

9. Точка внутри треугольника.

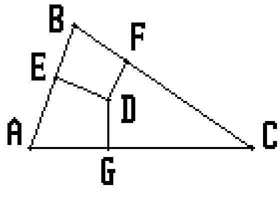
   (a) Принадлежность точки, лежащей внутри треугольника, отрезку между его сторонами.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ фигура(ABC) & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая$(BE) \rightarrow$
$D \in$ отрезок(BE) & $E \in$ отрезок$(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4. Создана также копия приема, срабатывающая на уровне 7.

   (b) Соотношение для длин перпендикуляров, опущенных из точки внутри треугольника на его стороны.

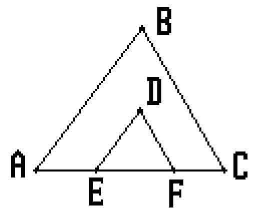


$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ фигура(ABC) & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(AB) \perp$
прямая(DE) & $F \in$ прямая(BC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(BC) &
$G \in$ прямая(AC) & прямая$(DG) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(DE))$ &
актив$(l(DF))$ & актив$(l(DG))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ &

актив$(l(AC)) \rightarrow 2S($фигура$(ABC)) = l(AB)l(DE) + l(BC)l(DF) + l(AC)l(DG))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Каждое из выражений для расстояний AB, DE, BC, DF, AC, DG либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Хотя бы одно из них имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

(c) Через точку, лежащую внутри треугольника, проведены прямые, параллельные двум его сторонам.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ фигура(ABC) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & прямая$(DF) \parallel$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая$(AC) \rightarrow l(AC) = l(AE) + l(EF) + l(CF))$

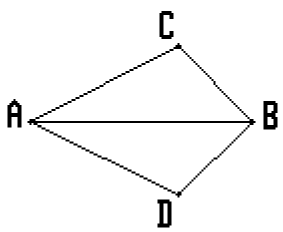
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Расстояние AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Усмотрение противоречия: расстояние от вершины до внутренней точки больше длин боковых сторон.

$\forall_{ABCDabc}(D \in$ фигура(ABC) & $l(AD) = a$ & $l(AB) = b$ & $l(AC) = c$ & $0 < a - b$ & $0 < a - c \rightarrow$ ложь$)$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

10. Два равных треугольника, имеющих общую сторону.



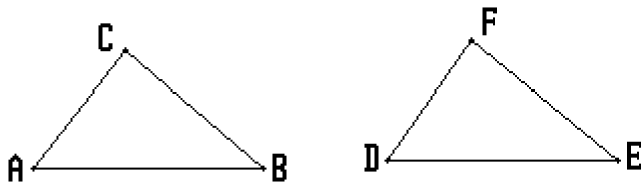
$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(AD)$ & $l(BC) = l(BD)$ & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB))$ & актив$(\angle(CAD))$ & односторона$(B, C,$ прямая$(AD))$ & односторона$(B, D,$ прямая$(AC)) \rightarrow$ биссектриса$(CADB))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и четвертый - указателем "усм". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Хотя бы один из углов BAC, BAD пока не рассматривается. Точка B не является центром окружности, содержащей точки A, C, D. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(AD)$ & $l(BC) = l(BD)$ & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB))$ & актив$(\angle(CAD))$ & $0 \le \angle(ACB) - \pi/2 \to$ биссектриса$(CADB))$

Аналогично предыдущему.

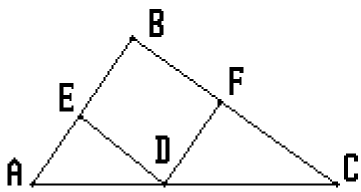
11. Два треугольника, имеющие равные угол и две стороны, причем одна из сторон - противолежащая углу.



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(DE)$ & $l(AC) = l(DF)$ & $\angle(ACB) = \angle(DFE)$ &
актив$(l(AB))$ & актив$(l(DF))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(DE)) \to$
$\angle(ABC) = \angle(DEF) \ \vee \ \angle(ABC) = \pi - \angle(DEF))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла ACB имеет тип "неизв". Не усматривается равенство углов ABC и DEF. Уровень срабатывания равен 11.

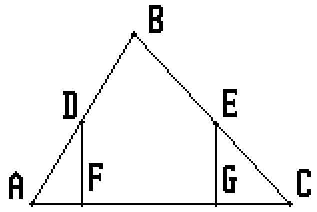
12. Длины перпендикуляров, опущенных из точки одной стороны треугольника, на две другие стороны.



$\forall_{ABCDEF}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & $D \in$ отрезок(AC) &
прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(BC) &
$E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BC) & актив$(l(DE))$ &
актив$(l(DF)) \to l(AB)l(DE) + l(BC)l(DF) = 2S($фигура$(ABC)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "определимо". Каждое из выражений для расстояний AB, DE, BC, DF либо известно, либо имеет тип "внешнеизв", причем хотя бы одно из них не известно. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, в которой требуется лишь, чтобы среди выражений для расстояний AB, DE, BC, DF и для площади треугольника имелось хотя бы одно выражение типа "неизв", а все остальные выражения содержали лишь численные параметры. Уровень срабатывания этой версии равен 8.

13. Отрезки, отсекаемые на основании треугольника перпендикулярами, опущенными из точек на его боковых сторонах.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив($l(FG)$) & прямая(DF) $\perp$ прямая(AC) & прямая(EG) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AC) & $0 \leq \pi - 2\angle(BAC)$ & $0 \leq \pi - 2\angle(BCA) \rightarrow l(AC) = l(AF) + l(FG) + l(GC)$ & $F \in$ отрезок(AG) & $G \in$ отрезок(FC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие шесть - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочным оператором. Каждое из расстояний AC, FG либо известно, либо имеет тип "неизв". Хотя бы один из углов BAC, BCA либо хотя бы одно из расстояний AF, CG уже рассматриваются в задаче. Выводимое равенство содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

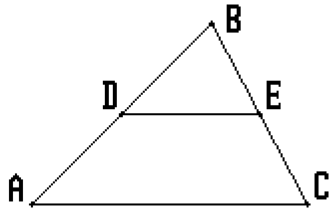
14. Усмотрение треугольника, образованного тремя известными точками.

$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) $\rightarrow \triangle(ABC)$)

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно", т.е. в геометрических задачах на построение. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражения A, B, C не содержат неизвестных. Уровни срабатывания равны 3 и 4.

Соотношения пропорциональности

1. Средняя линия треугольника.



Для средней линии возникло около десятка приемов, причем все они, кроме одного, используют данный чертеж.

$\forall_{ABCDE}(l(BD) = l(AD)$ & $l(BE) = l(EC)$ & $B \in$ прямая(AD) & $B \in$ прямая(EC) & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) $\rightarrow l(AC) = 2l(DE)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочным оператором. Расстояние AC уже рассматривается в задаче, выражение для расстояния DE имеет тип "возмактив". Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще несколько версий данного приема:

(a) Требуется, чтобы расстояние DE уже рассматривалось в задаче, причем либо было известно, либо имело тип "внешнеизв". На расстояние AC при этом никаких ограничений не накладывается. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Расстояние DE уже рассматривается в задаче, а выражение для расстояния AC имеет тип "определимо". Уровень срабатывания равен 4.

(c) Расстояния AC и DE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 7. Фактически, прием дублирует первую версию, перепроверяя возможность ее применения на уровне 7.

(d) Прием применяется в задачах на доказательство. Прямая AC, а также хотя бы одно из расстояний AC, DE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCDE}(l(BD) = l(AD)$ & $l(BE) = l(EC)$ & $D \in$ отрезок(AB) &
$E \in$ отрезок(BC) & разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AB),
прямая$(BC)) \to$ прямая$(DE) \parallel$ прямая$(AC))$

Прием применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно", т.е. в задачах на построение. Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "идентификатор", третий и четвертый - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения D, E не содержат неизвестных. Прямая AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}(l(BD) = l(AD)$ & $l(BE) = l(EC)$ & $D \in$ отрезок(AB) &
$E \in$ отрезок(BC) & разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AB),
прямая$(BC)) \to$ прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $\angle(BDE) = \angle(BAC)$ &
$\angle(BED) = \angle(BCA))$

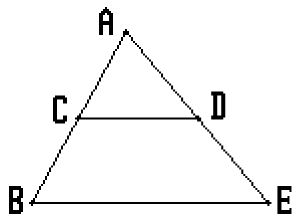
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочным оператором. Угол BAC уже рассматривается в задаче, причем выражение для него имеет тип "неизв". Прямые AC, DE уже рассматриваются в задаче, причем на последней выделена хотя бы одна точка, отлчиная от D, E. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDE}(l(BD) = l(AD)$ & $l(BE) = l(EC)$ & $B \in$ прямая(AD) &
$B \in$ прямая(EC) & разныеточки(A, B) & (разныепрямые(прямая(AB),
прямая$(BC))$ $\vee$ разныеточки$(D, E)) \to l(AC) = 2l(DE)$ &
прямая$(AC) \parallel$ прямая$(DE))$

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Расстояние AC уже рассматривается в задаче, причем одно из расстояний AC, DE известно, а другое - нет. Уровень срабатывания равен 8. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 11. В ней требуется, чтобы выражение для расстояния AC имело тип "существатом", а прямая AC - уже рассматривалась в задаче.

$\forall_{ABCDE}(l(BD) = l(AD)$ & $l(BE) = l(EC)$ & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow l(AC) = 2l(DE)$ & прямая$(AC) \parallel$ прямая$(DE))$

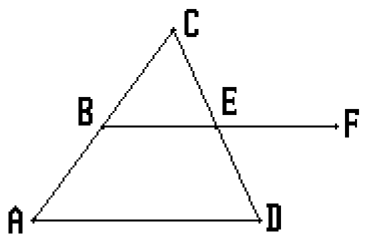
Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 11.



$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(BC)$ & $l(AD) = l(DE)$ & разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AE))$ & разныеточки(A, E) & $C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая$(AE) \rightarrow$ прямая$(CD) \parallel$ прямая$(BE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно"; третий, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямые BE, CD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

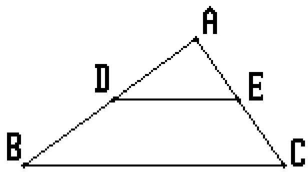
2. Проведение средней линии.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AD) \parallel$ прямая(BF) & $B \in$ прямая(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & $B \in$ отрезок$(AC) \rightarrow E -$ точка & $E \in$ прямая(BF) & $E \in$ отрезок(CD) & $l(CE) = l(ED))$

Указатель "контрольвывода$(\ldots)$" инициирует попытку применения приема при усмотрении в условии задачи на доказательство утверждения о параллельности некоторой прямой l другой прямой, проходящей через точку B. Антецеденты выделены указателем "усм". Усматривается параллельность прямой l прямой AD. Не выделена общая точка прямых BF и CD. Прием вводит в рассмотрение такую точку E. Уровень срабатывания равен 5.

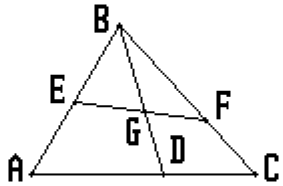
3. На сторонах треугольника отложены отрезки, пропорциональные этим сторонам.



$\forall_{ABCDEpq}(\neg(p+q=0)$ & $pl(AD)=ql(AE)$ & $pl(AB)=ql(AC)$ & $D\in$ прямая(AB) & $E\in$ прямая(AC) & точкалуча(A,D,B) & точкалуча$(A,E,C)\to l(DE)l(AB)=l(AD)l(BC))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый - обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные антецеденты - указателем "усм". Расстояния DE, BC, AB, AC уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы одно из них неизвестно. Уровень срабатывания равен 3.

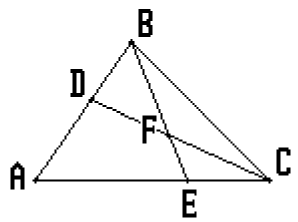
4. Пересечение отрезка, соединяющего вершину треугольника с его основанием, и отрезка, соединяющего точки на боковых сторонах треугольника.



$\forall_{ABCDEFGmnpqrs}(E\in$ отрезок(AB) & $F\in$ отрезок(BC) & $D\in$ отрезок(AC) & $G\in$ отрезок(EF) & $G\in$ отрезок(BD) & $ml(AE)=nl(BE)$ & $pl(CF)=ql(BF)$ & $rl(CD)=sl(AD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A,B) & разныеточки$(B,C)\to l(BG)(pns+qrm)=l(DG)(r+s)mp)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Шестой, седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются синтезатором "пропорциональны". Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 9.

5. Пересечение отрезков, проведенных от вершин треугольника к точкам на противоположных сторонах.



$\forall_{ABCDEFabpq}(D\in$ отрезок(AB) & $bl(AD)=al(BD)$ & $E\in$ отрезок(AC) & $F\in$ прямая(CD) & $F\in$ прямая(BE) & $pl(BF)=ql(EF)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки$(A,C)\to$ $(aq-pb)l(CE)=pbl(AE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и шестой - обрабатываются синтезаторами. Третий, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a,b,p,q не содержат неизвестных. Хотя бы одно из расстояний AE, CE уже рассматривается в задаче. Синтезатор "пропорциональны" не усматривает пропорциональность расстояний CE, AE. Уровень срабатывания равен 5. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 11. В ней коэффициенты a, b, p, q могут содержать численные неизвестные, а расстояния AE, CE могут не рассматриваться в задаче.

$\forall_{ABCDEFabcd}(D \in$ отрезок(AB) & $bl(AD) = al(BD)$ & $E \in$ отрезок(AC) & $dl(AE) = cl(CE)$ & $F \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(BE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки$(A, C) \to$ $l(CD)d(a + b) = l(CF)(ad + bc + bd)$ & $l(BE)b(c + d) = l(BF)(ad + bc + bd))$

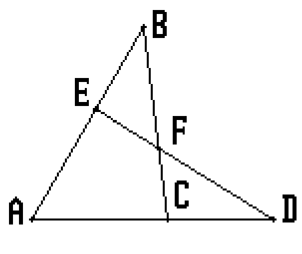
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и четвертый - обрабатываются синтезатором, седьмой и восьмой - проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Хотя бы одно из расстояний BF, FE, DF, CF уже рассматривается в задаче. Не усматривается пропорциональность хотя бы одной из пар расстояний CD, CF и BE, BF. Либо $a \neq b$, либо $c \neq d$. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{ABCDEFabpq}(D \in$ отрезок(AB) & $bl(BF) = al(FE)$ & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(BE) & $pl(DF) = ql(CF)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки$(A, C) \to$ $(aq + qb)l(CE) = (ap - bq)l(AE))$

$\forall_{ABCDEFabpq}(D \in$ отрезок(AB) & $bl(AD) = al(BD)$ & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(BE) & $pl(DF) = ql(CF)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки$(A, C) \to$ $pbl(AE) = (aq + bq)l(CE))$

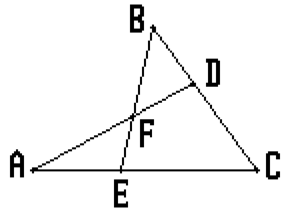
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и шестой - обрабатываются синтезаторами, два последних - проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания приемов равен 11.

6. Теорема Менелая.



$\forall_{ABCDEFabcd}($актив$(l(AC))$ & $C \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(ED) & $E \in$ прямая(AB) & $al(BF) = bl(CF)$ & $cl(AC) = dl(CD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) & разныеточки$(A, C) \to$ $(a + b)(c + d)l(EF) = bdl(ED))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, восьмой и девятый - проверочными операторами. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 9.



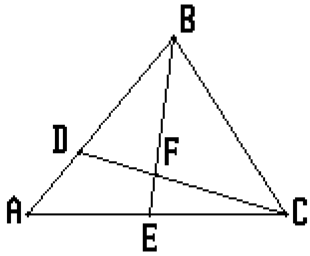
$\forall_{ABCDEFpqrs}(E \in$ отрезок(AC) & $D \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AD) &
$F \in$ отрезок(BE) & $pl(AE) = ql(CE)$ & $rl(BD) = sl(CD)$ &
разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) & разныеточки$(A, E) \rightarrow$
$spl(AF) = q(s + r)l(DF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Пятый и шестой антецеденты обрабатываются синтезатором, седьмой и восьмой - проверочными операторами. Выражения p, q, r, s не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 10.

$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(AC) & $D \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AD) &
$F \in$ отрезок(BE) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) &
разныеточки$(A, E) \rightarrow l(AF)l(BD)l(CE) = l(DF)l(BC)l(AE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояния AF, BD, CE, DF, BC, AE уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы одно из них имеет тип "Неизв". Уровень срабатывания равен 11.

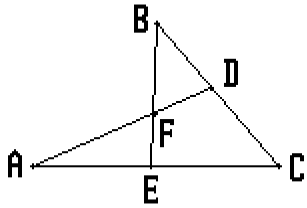
7. Ввод в рассмотрение общей точки двух отрезков, полученных при соединении вершины треугольника с точкой на противоположной стороне.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ отрезок(AB) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(BD))$ &
$E \in$ отрезок(AC) & актив$(l(AE))$ & актив$(l(CE))$ & $al(AD) = bl(BD)$ &
$cl(AE) = dl(CE)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow F -$ точка &
$F \in$ отрезок(BE) & $F \in$ отрезок(CD) & $adl(CF) = c(a + b)l(DF))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой и восьмой - обрабатываются пакетными синтезаторами. Девятый антецедент обрабатывается проверочным оператором; остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных; выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". Общая точка отрезков BE, CD в задаче не рассматривается. Прием вводит для нее обозначение F. Уровень срабатывания равен 10.

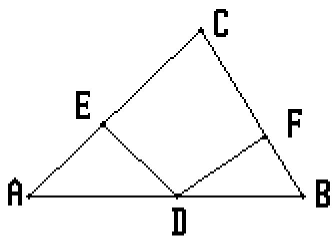
8. Выражение отношений площадей подтреугольников через отношения длин отрезков, на которые разбиваются стороны.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(S(фигура(AFE))) & актив(S(фигура(BFD))) &
$F \in$ отрезок(AD) & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(AD) &
$F \in$ отрезок(BE) $\rightarrow S$(фигура(AFE))$l(AC)l(BD)l(DF) =$
S(фигура(BFD))$l(CD)l(AF)l(AE)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие четыре - выделены указателем "усм". Расстояния BD, AC, DF, CD, AF, AE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

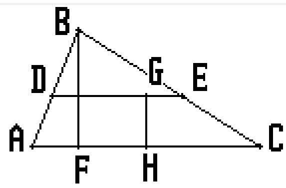
9. Перпендикуляры, проведенные из точки основания к боковым сторонам.



$\forall_{ABCDEFabpq}$($D \in$ отрезок(AB) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AC) &
$E \in$ прямая(AC) & прямая(DF) $\perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(BC) &
$al(DE) = bl(DF)$ & $pl(AC) = ql(BC)$ & актив($l(DE)$) & актив($l(DF)$) &
актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AD)$) & актив($l(BD)$) &
разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, C) &
разныеточки(A, B) $\rightarrow apl(AD) = bql(BD)$)

Первые пять антецедентов, а также антецеденты с восьмого по тринадцатый, выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана во втором антецеденте. Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются синтезаторами, три последних антецедента - проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 9.

10. Определение длины отрезка, отсекаемого на линии, параллельной основанию, если известны высота треугольника и расстояние данной линии до основания.



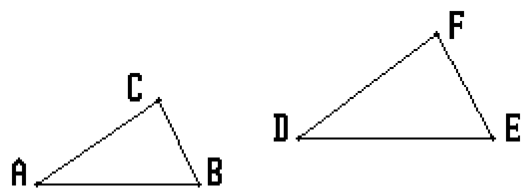
$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(DE) $\parallel$ прямая(AC) & прямая(BF) $\perp$ прямая(AC) &
$D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $G \in$ прямая(DE) &
прямая(GH) $\perp$ прямая(AC) & $H \in$ прямая(AC) & актив($l(GH)$) &

актив$(l(BF))$ & актив$(l(DE))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) &
$F \in$ прямая$(AC) \to l(BF)l(DE) = l(AC)(l(BF) - l(GH)))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, одиннадцатый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

11. Соотношения пропорциональности для подобных треугольников.

   (a) Соотношения пропорциональности для треугольников с соответственно параллельными сторонами.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) &
прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ &
актив$(l(DE))$ & актив$(l(EF))$ & разныепрямые(прямая(AB),
прямая(BC)) $\to l(AB)l(EF) = l(BC)l(DE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний AB, EF, BC, DE имеет тип "неизв", остальные - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) &
прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ &
актив$(l(DE))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\to$
$l(AB)l(EF) = l(BC)l(DE))$

Схема обработки антецедентов аналогична предыдущему приему. Одно из выражений для расстояний AB, EF, BC, DE имеет тип "неизв", два других - не содержат неизвестных, а на оставшееся никаких ограничений не накладывается. Уровень срабатывания равен 6. Создана еще одна версия приема, срсбатывающая на том же уровне. В ней требуется, чтобы хотя бы одно из расстояний AB, EF, BC, DE было неизвестным, два расстояния - известными, а хотя бы одно из двух оставшихся - имело тип "определимо".

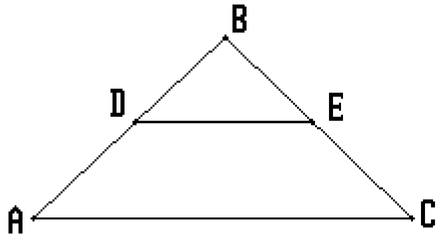
$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) &
прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & актив$(S$(фигура$(ABC)))$ &
актив$(S$(фигура$(DEF)))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\to$
S(фигура$(DEF))l(AB)^2 = S$(фигура$(ABC))l(DE)^2$ &
S(фигура$(DEF))l(AC)^2 = S$(фигура$(ABC))l(DF)^2)$

Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, первые три - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) &
прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & актив$(S$(фигура$(ABC)))$ &
актив$(S$(фигура$(DEF)))$ & aS(фигура$(ABC)) = bS$(фигура$(DEF))$ &

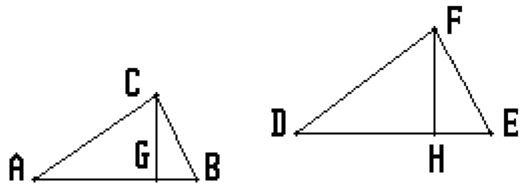
разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow \sqrt{a}l(AB) = \sqrt{b}l(DE)$ & $\sqrt{a}l(AC) = \sqrt{b}l(DF)$)

Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, первые три - выделены указателем "усм". Шестой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, седьмой - проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDEab}$(прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BD))$ & актив(S(фигура(BDE))) & актив(S(фигура(ABC))) & aS(фигура(ABC)) $= bS$(фигура(BDE)) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow$ $\sqrt{a}l(AB) = \sqrt{b}l(BD)$)

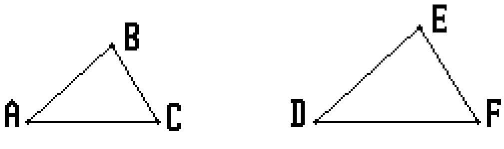
Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, шестой - обрабатывается синтезатором, последний - проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(CG) \perp$ прямая(AB) & прямая$(FH) \perp$ прямая(DE) & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(DE) & актив$(l(CG))$ & актив$(l(FH))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow l(CG)l(DE) = l(FH)l(AB)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Каждое из выражений для расстояний CG, FH содержит только численные параметры. Выводимое равенство имеет неизвестные. Уровень срабатывания равен 13.

(b) Усмотрение подобия треугольников из равенства углов.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $\angle(ABC) = \angle(DEF)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(DE))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \to l(AB)l(EF) = l(BC)l(DE))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем второй из них выделен указателем "равно". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Расстояние EF уже рассматривается в задаче. Таким образом, после срабатывания приема может появиться лишь одно новое расстояние - BC. Уровень срабатывания равен 9. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы расстояния AB, DE были известны, а на расстояния EF, BC никаких условий не накладывается. Уровень срабатывания прежний.

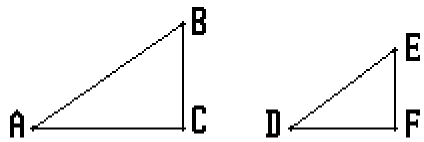
$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $\angle(ABC) = \angle(DEF)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(DE))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \to l(AB)l(DF) = l(AC)l(DE))$

Аналогично первому приему, но вместо расстояния EF в задаче рассматривается расстояние DF.

$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $\angle(ABC) = \angle(DEF)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(DE))$ & актив$(l(DF))$ & актив$(l(AC))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \to l(AB)l(DF) = l(AC)l(DE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "идентификатор". Следующие четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Хотя бы одно из выражений для расстояний AB, DF, AC, DE меет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 14.

(c) Усмотрение подобия прямоугольных треугольников, имеющих равные острые углы.

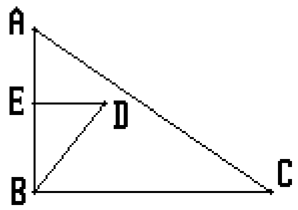


$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(DE))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(EF)) \to l(BC)l(DE) = l(EF)l(AB))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Каждое из расстояний BC, DE, EF, AB либо известно, либо имеет тип "Неизв", причем хотя бы одно из них неизвестно. Уровень срабатывания равен 10.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(DF)) \to l(AC)l(EF) = l(BC)l(DF))$

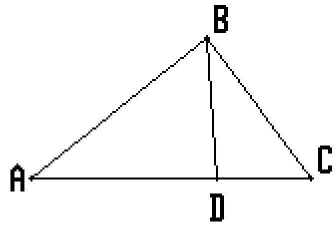
Третий антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Выражения для расстояний BC, DF имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая$(AB) \to l(BE)l(AB) = l(DE)l(BC)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояния AB, DE, BE, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

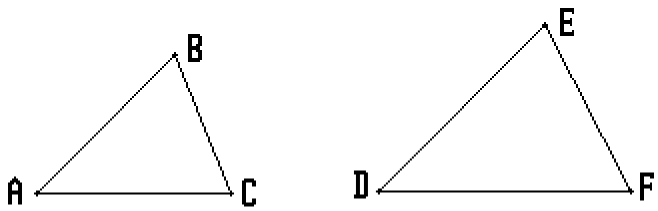
(d) Подобие треугольников, имеющих общий угол.



$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = \angle(BDC)$ & $D \in$ отрезок(AC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \to l(AC)l(BD) = l(AB)l(BC)$ & $l(AC)l(CD) = l(BC)^2)$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

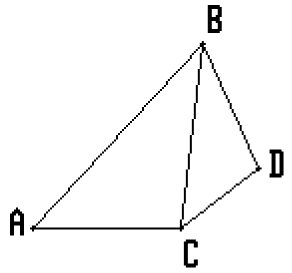
(e) Сведение доказательства равенства углов к доказательству пропорциональности сторон.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $l(AB)l(DF) = l(AC)l(DE) \to \angle(ABC) - \angle(DEF) = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Указатель "эквивалентно" обеспечивает замену равенства разности углов нулю на логическую константу "истина". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", причем обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Второй антецедент выделен указателем "следствие"; его истинность устанавливается при помощи вспомогательной задачи на доказательство. Указатель "смравно(угол(DEF))" несколько усиливает идентификацию, разрешая использовать равенства "$\angle(DEF) = a$" из посылок задачи. Уровень срабатывания равен 13.

12. Усмотрение подобных треугольников из равенства углов при вершине и пропорциональности боковых сторон.

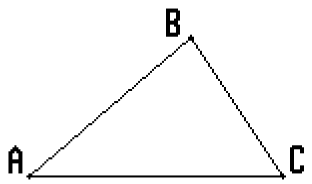


$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(BD)$) & актив($\angle(CBD)$) & $\angle(ABC) = \angle(CBD)$ & равнчисл($l(BC)^2, l(AB)l(BD)$) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныеточки$(B, C) \to$ $\angle(BAC) = \angle(BCD)$ & $\angle(ACB) = \angle(CDB)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Шестой антецедент выделен указателем "идентификатор"; обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Проверочный оператор "равнчисл" введен для усмотрения равенства двух численных выражений из имеющегося в контексте равенства нулю их разности. Уровень срабатывания равен 12.

Углы треугольника

1. Сумма углов треугольника.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(BCA)$) $\to \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "квазиактив". Если углы ABC, BCA известны, то при обращении к пакетному индикатору "квазиактив" вводится комментарий "неизв", отсекающий случаи, когда угол BAC тоже известен. Уровень срабатывания равен 4. Созданы копия приема, срабатывающая на уровне 10, а также две версии приема, срабатывающие на уровне 9. В первой из них требуется, чтобы один из углов ABC, BCA был известен, другой - имел тип "неизв", а выражение для угла BAC имело тип "определимо". Во второй версии требуется, чтобы углы ABC, BCA были известны, а выражение для угла BAC имело тип "применимо". Наконец, создана версия приема, срабатывающая на уровне 10. Она отличается от исходного приема тем, что вместо типа "квазиактив" рассматривается тип "возмактив".

$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(BCA)$) & вычислениеугла($\angle(BAC), a$) $\to$ a & $\angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй выделен указателем "усм", а третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Выражение для угла BCA не содержит неизвестных, а для угла ABC - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

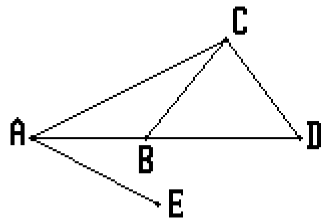
$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) $\to \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв", а выражения для углов ABC, BCA - тип "определимо". Уровень срабатывания равен 14.

$\forall_{ABCabc}(\angle(ABC) = a$ & $\angle(BAC) = b$ & $\angle(ACB) = c$ & $d = a + b + c - \pi$ & $\neg(d = 0) \to$ ложь)

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормплюс". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, для которого введен сильный ограничитель трудоемкости. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Уровень срабатывания равен 2.

2. Усмотрение двух равных углов с использованием внешнего угла треугольника.

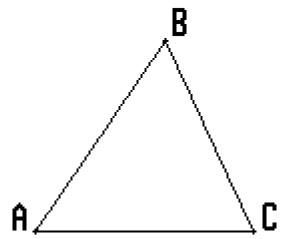


$\forall_{ABCDE}(\angle(CBD) = \angle(CAE)$ & $B \in$ отрезок(AD) & разныестороны$(C, E,$ прямая$(AD))$ & однасторона$(D, E,$прямая$(AC)) \to \angle(ACB) = \angle(DAE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямые AD, AC, AE, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 12.

3. Теорема синусов.

   (a) Непосредственное применение теоремы синусов.



$\forall_{ABC}(\angle(BAC) = a$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$
$\sin al(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол ABC известен и отличен от a. Одно из расстояний AC и BC известно, а другое имеет тип "неизв". Для прямоугольных треугольников прием блокируется (это же относится к остальным приемам теоремы синусов). Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}($актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$
$\sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Углы BAC и ABC известны. Одно из расстояний AC, AB известно, а другое - не известно, но уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5. На этой же теореме созданы еще несколько приемов:

i. Одно из выражений для расстояний AB, AC и углов BAC, ABC имеет тип "неизв", а остальные - выражены через численные параметры. Уровень срабатывания равен 6.
ii. Выводимое равенство представляет собой соотношение пропорциональности, позволяющее, быть может, в сочетании с некоторым другим уравнением текущей задачи, получить невырожденное уравнение для числовых параметров. Данное условие проверяется реализованной на ЛОСе процедурой "пропорцуравн". Уровень срабатывания равен 6.
iii. Среди выражений для расстояний AB, AC и углов BAC, ABC имеются два известных, одно - типа "определимо", и одно - типа "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 7.
iv. Выводимое равенство, после обработки нормализаторами общей стандартизации, имеет единственный невырожденный числовой атом, тип которого - "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABC}($актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(ABC)) \to$
$\sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Среди выражений для расстояний AC, BC и углов BAC, ABC имеются два известных и два - типа "неизв". Уровень срабатывания равен 6. На этой же теореме созданы еще несколько приемов:

i. Одно из выражений для расстояний AC, BC и углов BAC, ABC имеет тип "неизв", а остальные - выражены через численные параметры. Уровень срабатывания равен 8.
ii. Выводимое равенство представляет собой соотношение пропорциональности, позволяющее, быть может, в сочетании с некоторым другим уравнением текущей задачи, получить невырожденное уравнение для числовых параметров. Уровень срабатывания равен 8.
iii. Углы BAC, ABC известны, причем хотя бы одно из выражений для расстояний AC, BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.
iv. Углы BAC, ABC известны. Одно из расстояний AC, BC известно, а другое уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

v. Углы BAC и ABC, а также хотя бы одно из расстояний AC, BC известны. Уровень срабатывания равен 10.

vi. Среди выражений для расстояний AC, BC и углов BAC, ABC имеются два известных, одно - типа "неизв", а оставшееся уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

vii. Среди выражений для расстояний AC, BC и углов BAC, ABC имеются одно известное, два - типа "неизв", а оставшееся уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

viii. Три из выражений для расстояний AC, BC и углов BAC, ABC известны, а оставшееся - уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

ix. Выводимое равенство, после обработки нормализаторами общей стандартизации, имеет единственный невырожденный числовой атом, причем он уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 11.

$\forall_{ABC}(l(AC) = a \ \&\ \text{актив}(\angle(ABC)) \to \sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))a = \sin(\angle(ABC))l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a имеет тип "внешнеизв". Углы ABC, BAC и расстояние AB известны. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABC}(\text{актив}(\angle(BAC)) \ \&\ \text{актив}(\angle(ABC)) \ \&\ \angle(ABC) = a \ \&\ pl(AB) = ql(AC) \to p\sin(\angle(BAC) + a) = q\sin a)$

Четвертый антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Выражения a, p, q не содержат неизвестных. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCa}(\text{актив}(\angle(BAC)) \ \&\ \text{актив}(l(AC)) \ \&\ \text{актив}(l(AB)) \ \&\ \angle(ABC) = a \to \sin(\angle(BAC) + a)l(AC) = \sin al(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "значугол", которому передается усиливающий комментарий "плюс". Этот нормализатор существенно более активен, чем нормализатор общей стандартизации "нормугол". Проверяется, что результат a не содержит неизвестных. Далее, проверяется, что расстояние AB и угол BAC известны, а выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCab}(al(AC) = bl(BC) \ \&\ \text{актив}(\angle(ACB)) \ \&\ \text{разныеточки}(B, C) \to b\sin(\angle(BAC)) = a\sin(\angle(BAC) + \angle(ACB)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается пакетным синтезатором, третий - проверочным оператором. Выражения a, b различны и содержат только численные параметры. Расстояния BC, AC уже рассматриваются в задаче. Выводимое равенство, после обработки нормализаторами общей стандартизации, имеет единственный невырожденный числовой атом, тип которого - "применимо". Уровень срабатывания равен 8. Создана также версия приема, в которой первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", а третий - обрабатывается проверочным оператором. Условия на a, b - те же, что и выше. Выражения для углов ACB, BAC, после обработки нормализатором "нормугол", содержат единственный неизвестный числовой атом (возможно, переменную). Уровень срабатывания данной версии равен 9.

$\forall_{ABCp}$(актив($l(AC)$) & актив($\angle(ABC)$) & вычислениеугла($\angle(BAC), p$) $\rightarrow$
$\sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(AB)$ & p)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - обрабатывается пакетным синтезатором, который определяет конъюнкцию p соотношений, позволяющих вычислить угол BAC. Расстояние AB и угол ABC известны. Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(AB)$) $\rightarrow$
$\sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(AB)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Расстояние AB и угол BAC известны, выражение для угла ABC имеет тип "определимо". Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) $\rightarrow$
$\sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC)$)

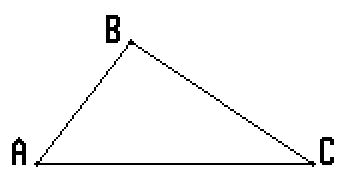
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Угол BAC и расстояние BC известны. Выражение для угла ABC имеет тип "определимо", а для расстояния AC - тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(ABC)$) $\rightarrow$
$\sin(\angle(BAC) + \angle(ABC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(AB)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражения для расстояний AC, AB и углов BAC, ABC, кроме, быть может, одного, имеют только численные параметры, причем среди них встречается выражение с неизвестными. Уровень срабатывания равен 12. Созданы еще несколько версий данного приема:

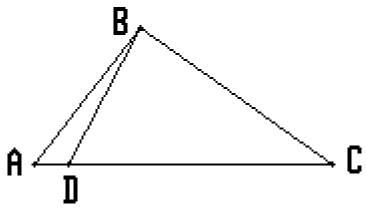
i. Выражения для расстояний AC, AB и углов BAC, ABC, кроме, быть может, одного, известны либо имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 12.
ii. Углы BAC и ABC известны, а расстояния AB, AC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 13.
iii. Углы BAC и ABC известны, а хотя бы одно из выражений для расстояний AB, AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 13.
iv. Каждый из углов BAC, ABC либо известен, либо имеет тип "внешнеизв", причем хотя бы один из них - не известен. Уровень срабатывания приема равен 13.

(b) Треугольник, у которого один угол вдвое больше другого.



$\forall_{ABC}$(актив($l(AC)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(BCA)$) & $\angle(BAC) = 2\angle(ACB) \to (l(BC) - l(AB))(l(BC) + l(AB)) = l(AC)l(AB)$)

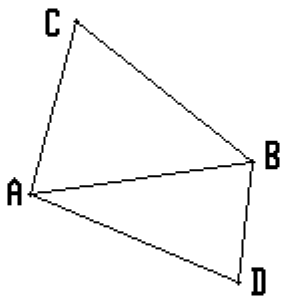
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор"; обе его части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Расстояния AB, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AB)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(BCA)$) & $\angle(BAC) = 2\angle(ACB)$ & прямая(BD) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) $\to$ $2l(AB) = l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

(c) Двукратное применение теоремы синусов для двух треугольников, имеющих общую сторону.



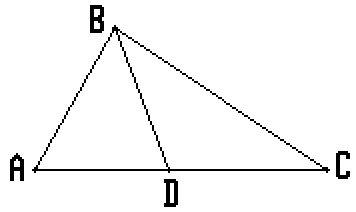
$\forall_{ABCD}$($\angle(ACB) = \angle(ADB)$ & актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(ABD)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(AD)$) $\to l(AC)\sin(\angle(ABD)) = l(AD)\sin(\angle(ABC))$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Хоты бы одно из выражений для расстояний AC, AD и углов ABD, ABC имеет тип "Неизв". Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ACB)$) & актив($\angle(ADB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(AD)$) & $al(AC) = bl(AD) \to a\sin(\angle(ADB))\sin(\angle(ACB) + \angle(CAB)) = b\sin(\angle(ACB))\sin(\angle(ADB) + \angle(BAD))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, приче найденные им коэффициенты a, b не содержат неизвестных. Углы ACB и ADB известны; хотя бы одно из выражений для углов CAB, BAD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

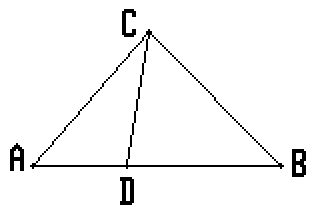
(d) Соотношение между углами, которые отрезок образует с боковыми сторонами, длиной отрезка и длинами боковых сторон.



$\forall_{ABCD}(D \in \text{отрезок}(AC)$ & актив$(\angle(ABD))$ & актив$(\angle(DBC))$ & актив$(l(BD))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \to$
$l(BD)(l(AB)\sin(\angle(ABD)) + l(BC)\sin(\angle(DBC))) =$
$l(BC)l(AB)\sin(\angle(ABD) + \angle(DBC)))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Углы ABD, DBC известны. Одно из выражений для расстояний BD, AB, BC имеет тип "неизв", два других - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 8.

(e) Отрезок, проведенный из угла треугольника к точке противоположной стороны, делящей ее в заданном отношении: двукратное применение теоремы синусов для исключения промежуточных расстояний.



$\forall_{ABCDpq}(D \in \text{отрезок}(AB)$ & актив$(\angle(ACD))$ & актив$(\angle(BCD))$ & $pl(AD) = ql(BD)$ & актив(прямая(CD)) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(BD))$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BC)) $\to p\sin(\angle(ACD))l(AC) =$
$q\sin(\angle(BCD))l(BC))$

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Коэффициенты p, q не содержат неизвестных. Углы ACD, BCD известны. Пакетный индикатор "существпропорц" усматривает, что соотношение пропорциональности для расстояний AC, BC представляет интерес, причем предварительно проверяется, что хотя бы одно из этих расстояний не известно. Уровень срабатывания равен 6.

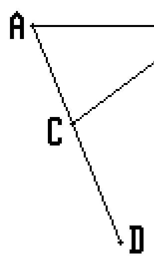
$\forall_{ABCDpq}(D \in \text{отрезок}(AB)$ & актив$(\angle(ACD))$ & актив$(\angle(BCD))$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(ABC))$ & $pl(AD) = ql(BD)$ & актив(прямая(CD)) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(BD))$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BC)) $\to p\sin(\angle(ACD))\sin(\angle(ABC)) =$
$q\sin(\angle(BAC))\sin(\angle(BCD)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, шестой - обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Коэффициенты p, q известны. После обработки нормализаторами общей стандартизации выводимое равенство имеет единственный не известный числовой атом, причем тип его - "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDpq}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ pl(AD) = ql(BD)\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(CD))\ \&\ \text{актив}(l(AD))\ \&\ \text{актив}(l(BD))\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(AC))\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(BC)) \to p\cos(\angle(ACD) - \angle(ABC)) - q\cos(\angle(BCD) - \angle(CAB)) = (p+q)\cos(\angle(ACD) + \angle(ABC)))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BCD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 16.

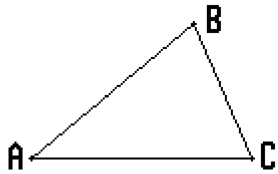
(f) Разбор случаев для взаимного расположения точек на прямой, позволяющий воспользоваться теоремой синусов.



$\forall_{ABCD}(D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(AC))\ \&\ \text{актив}(\angle(ACB))\ \&\ \text{актив}(\angle(DAB))\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{разныеточки}(A, C) \to C \in \text{отрезок}(AD)\ \vee\ A \in \text{отрезок}(CD))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол ACB известен, выражение для угла DAB имеет тип "неизв". Не усматривается расположение точек C, D по одну либо по разные стороны от прямой AB. Выводимая посылка сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 9.

(g) Ввод в рассмотрение угла для последующего применения теоремы синусов.

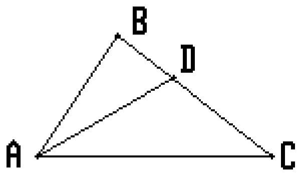


$\forall_{ABC}(\text{актив}(\angle(BAC))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{актив}(l(AC)) \to \text{актив}(\angle(ABC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Угол BAC и расстояние AC известны; выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 11.

$\forall_{ABCp}(\text{актив}(\angle(BAC))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&\ \text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{вычислениеугла}(\angle(ACB), p) \to p)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Расстояния AC и BC известны; выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Обращение к синтезатору сопровождается средним ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 13.

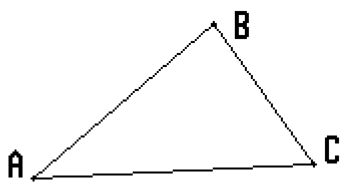


$\forall_{ABCDab}(D \in$ отрезок(BC) & актив$(\angle(ACB))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(BAD))$ & актив$(\angle(DAC))$ & $al(AB) = bl(AC) \rightarrow$ актив$(\angle(BAC)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается пакетным синтезатором. остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Угол BAC пока в задаче не рассматривается. Обозначение точки D отлично от обозначений точек B, C. Уровень срабатывания равен 8.

4. Теорема косинусов.

   (a) Вывод неявного соотношения.



$\forall_{ABC}($актив$(\angle(BAC)) \rightarrow 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражения для угла BAC и расстояний BC, AC константные. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5. На этой же теореме созданы еще несколько версий приема:

i. Расстояния AB, AC, BC известны; выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5. Создана также копия приема, срабатывающая на уровне 9.

ii. Угол BAC известен. Каждое из расстояний AB, AC, BC либо известно, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы одно - не известно. Чтобы отсечь случаи, когда лучше воспользоваться теоремой синусов, требуется также, чтобы либо оба угла ABC, ACB были неизвестны, либо все расстояния AB, AC, BC были неизвестны. Уровень срабатывания равен 7.

iii. Расстояния AC, BC, AB известны, а угол BAC не известен. Уровень срабатывания равен 7.

iv. Выражения для угла BAC и расстояний AC, BC константные. Расстояние AB не известно. Углы ABC, ACB тоже не известны. Уровень срабатывания равен 7.

v. Выражения для расстояний AB, AC, BC имеют только численные параметры. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

vi. Угол BAC и расстояния AB, AC известны. Выражение для расстояния BC имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 10.

vii. Угол BAC и расстояние AC известны. Пакетный индикатор "сводимо" усматривает возможность связать расстояния AB и BC альтернативным соотношением, не используя при этом угла BAC и расстояния AC. Углы ABC, ACB не известны. Уровень срабатывания равен 11.

viii. Расстояния AB, AC известны. Хотя бы одно из выражений для угла BAC и расстояния BC имеет тип "неизв". Прямая BC же рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 11.

ix. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв", расстояние BC известно. Расстояния AB, AC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 12.

x. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв"; расстояния AB, AC, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 15.

$\forall_{ABCa}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & $\angle(BAC) = a \to 2l(AB)l(AC)\cos a = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации "номугол", а также нормализатором "величинаугла", предпринимающим попытку вычислить угол из рассмотрения группы углов с общей вершиной. Результат a не содержит неизвестных. Расстояния AB и BC известны; выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7. Созданы также следующие версии приема:

i. С посылкой идентифицируется не первый, а третий антецедент; в остальном приемы идентичны.

ii. Копия приема, срабатывающая на уровне 9.

iii. Расстояние AB известно; выражения для расстояний AC, BC имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

iv. Условия на расстояния AB, BC, AC отбрасываются. Уровень срабатывания равен 15.

$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & актив($l(BC)$) $\to 2l(AB)l(AC)\cos\angle(BAC) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, AC и угла BAC имеют тип "определимо"; выражение для расстояния BC - тип "неизв". Если угол BAC известен, то оба угла ABC, ACB должны быть не известны (иначе предпочтительнее применить теорему синусов). Уровень срабатывания равен 8. На той же самой теореме созданы еще две версии приема. В первой версии требуется, чтобы расстояния AB и AC были известны, выражение для расстояния BC имело тип "неизв", а выражение для угла BAC имело тип "квазиактив". Уровень срабатывания ее равен 13. Во второй версии требуется, чтобы выражения для расстояний AB, AC и угла BAC имели тип "определимо", а выражение для расстояния BC - тип "неизв". Уровень срабатывания равен 14.

$\forall_{ABCa}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(BAD) = u \to 2l(AB)l(AC)\cos a = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2$)

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение u не содержит неизвестных. Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализаторами "нормугол"и "величинаугла". Результат a не содержит неизвестных. Расстояния AB и AC известны; выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

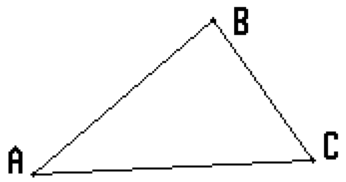
$\forall_{ABCa}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC)) \to 2l(AB)l(AC)\cos a = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "определимо". Для выражений $l(AB)$, $l(AC$, $l(BC)$ в списке посылок имеются равенства, позволяющие свести их к единственному числовому атому типа "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

$\forall_{ABCa}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & $\angle(BAC) \to 2l(AB)l(AC)\cos a = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол BAC известен. В списке посылок имеется уравнение, все неизвестные числовые атомы которого суть $l(AB)$, $l(AC)$. Уровень срабатывания равен 12.

(b) Вычисление противоположной стороны по известным двум сторонам и углу между ними.



$\forall_{ABC}($актив$(\angle(BAC)) \to l(BC) = \sqrt{l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC))})$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Угол BAC и расстояния AB, AC известны. Выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Не усматривается перпендикулярность прямых AB, AC. Уровень срабатывания равен 4. Созданы еще две версии данного приема:

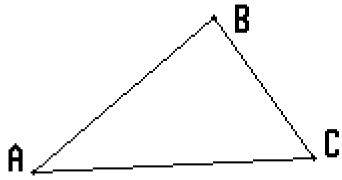
i. Угол BAC и расстояние AB известны. Выражение для расстояния AC имеет тип "определимо", а для расстояния BC - тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 4.

ii. Угол BAC и расстояния AB, AC известны. Расстояние BC рассматривается в задаче, но не известно. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABC}(\angle(BAC) = a$ & актив$(\angle(BAC)) \to l(BC) = \sqrt{l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos a})$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Второй антецедент выделен указателем "усм". Расстояния AB и AC известны; выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Не усматривается перпендикулярность прямых AB, AC. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Известный угол и две пропорциональных боковых стороны.



$\forall_{ABCabp}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(AB)$) & $\angle(BAC) = p$ & $al(AC) = bl(AB) \to bl(BC) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos p}\, l(AC)$)

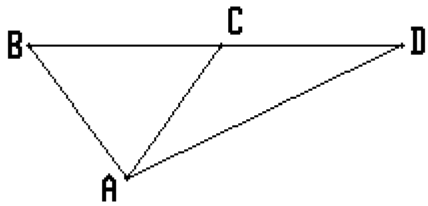
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Результат p не содержит неизвестных. Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Коэффициенты a, b не содержат неизвестных. Выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Если расстояния AB, AC равны, то прием блокируется, так как для этого случая имеются другие приемы. Уровень срабатывания равен 9.

(d) Вычисление угла.

$\forall_{ABCpqrs}(pl(AB) = ql(AC)$ & $rl(AC) = sl(BC)$ & актив($\angle(BAC)$) $\to$ $\angle(BAC) = \arccos((p^2s^2 + q^2s^2 - r^2p^2)/2qps^2))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается пакетным синтезатором. Последний антецедент выделен указателем "усм". Выражения p, q, r, s не содержат неизвестных. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Если среди выражений p, q, r, s встречается чрезмерно длинное (более 20 символов), то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

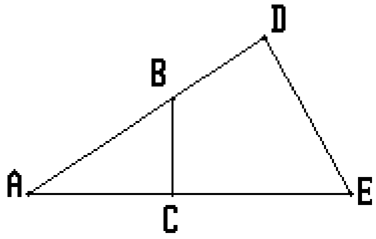
(e) Треугольники, имеющие заданные величины угла, противолежащей стороны и одной из прилежащих сторон.



$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(AC)$ & $B \in$ прямая(CD) & актив($\angle(CDA)$) & актив($l(AD)$) & актив($l(CD)$) & точкалуча(D, C, B) & разныеточки$(B, C) \to l(BD) + l(CD) = 2l(AD)\cos(\angle(CDA)))$

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Одно из выражений $l(BD)$, $l(CD)$, $l(AD)$, $\angle(CDA)$ имеет тип "применимо", а остальные - известны. Уровень срабатывания равен 5.

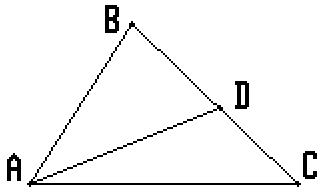
(f) Совместное применение теоремы косинусов и определения косинуса острого угла прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BC) \perp$ прямая(AE) & точкалуча(A, B, D) & точкалуча(A, C, E) & актив$(l(DE))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AE)) \to l(DE)^2 l(AB) = l(AD)^2 l(AB) + l(AE)^2 l(AB) - 2l(AD)l(AE)l(AC))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AB, AD, AE, AC известны; выражение для расстояния DE имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(g) Двукратное применение теоремы косинусов для исключения косинуса угла.



$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AD))$ & актив$(l(AC))$ & $B \in$ прямая(CD) & точкалуча$(B, D, C) \to (l(BD)l(BC) - l(AB)^2)(l(BC) - l(BD)) = l(AC)^2 l(BD) - l(AD)^2 l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражения для расстояний BD, BC, AB, AC, AD содержат только численные параметры, причем хотя бы одно из них содержит неизвестную. Если AD - высота, либо один из углов ABC, ACB прямой, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6. На той же теореме созданы еще несколько версий данного приема:

i. Выражения для расстояний BD, BC, AB, AC, AD, после обработки их нормализаторами общей стандартизации, имеют лишь один неизвестный числовой атом, который уже встречался ранее в задаче. Таким образом, выводимое равенство представляет собой уравнение для нахождения данного атома. Уровень срабатывания равен 8.

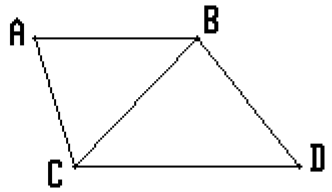
ii. Выводимое равенство содержит лишь два неизвестных числовых атома, один из которых имеет тип "неизв", а другой - тип "определимо". Уровень срабатывания равен 8.

iii. Каждое из выражений для расстояний BD, BC, AB, AC, AD, кроме, быть может, одного, имеет только численные параметры, а оставшееся выражение имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 8.

iv. Каждое из выражений для расстояний BD, BC, AB, AC, AD либо известно, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы одно - не известно. Уровень срабатывания равен 9.

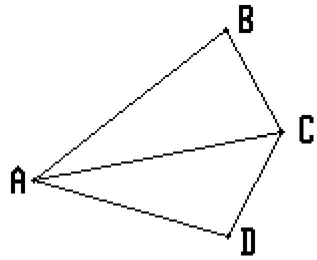
$\forall_{ABCD}$(актив$(l(BD))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & $B \in$ прямая(CD) & точкалуча$(B, D, C) \to (l(BD)l(BC) - l(AB)^2)(l(BC) - l(BD)) = l(AC)^2 l(BD) - l(AD)^2 l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний BD, BC, AB, AC, AD имеет тип "применимо", остальные - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 11.



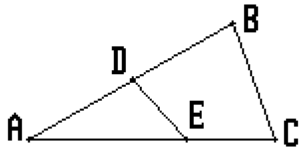
$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(CD))$ & $l(BC) = l(BD)$ & разныеточки(C, D) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) & разныестороны$(A, D$, прямая$(BC)) \to l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2 - l(AB)l(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие пять - выделены указателем "усм". Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCD}(\angle(BAC) = \angle(CAD)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(CAD)) \to (l(AB)l(AD) - l(AC)^2)(l(AB) - l(AD)) = l(BC)^2 l(AD) - l(CD)^2 l(AB))$

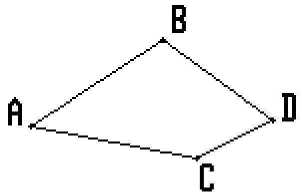
Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Расстояния AB, AC, AD известны. Выводимое равенство содержит неизвестную. Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, B, D) & точкалуча(A, E, C) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AE))$ & актив$(l(DE)) \to$ $(l(AD)^2 + l(AE)^2 - l(DE)^2)l(AB)l(AC) =$ $(l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)l(AD)l(AE))$

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний AD, AE, DE, AB, AC, BC имеет тип "неизв", а остальные - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 10.

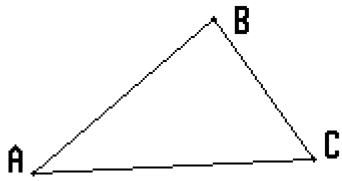
(h) Двукратное применение теоремы косинусов для определения связи между углами.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(BDC)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) & актив($l(CD)$) $\to 2l(BD)l(CD)\cos(\angle(BDC)) - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = l(BD)^2 + l(CD)^2 - l(AB)^2 - l(AC)^2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие пять - выделены указателем "усм". Расстояния AB, AC, BD, CD известны, выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

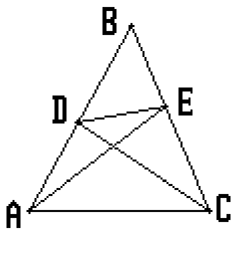
(i) Двукратное применение теоремы косинусов для определения косинуса угла при основании, если известны отношение боковых сторон и угол при вершине.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ACB)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & разныеточки(A, B) & $pl(AC) = ql(BC) \to \cos(\angle(BAC)) = (q - p\cos(\angle(ACB)))/(\sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos(\angle(ACB))})$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором, шестой - пакетным синтезатором. Выражения p, q не содержат неизвестных. Угол ACB известен, а выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(j) Четырехкратное применение теоремы косинусов.

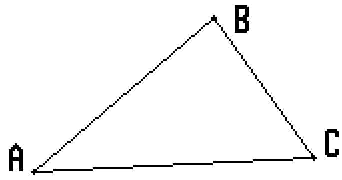


$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & актив($l(DE)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(CD)$) & актив($l(AE)$) &

актив(прямая(AB)) & актив(прямая(BC)) $\to l(CD)^2 + l(AE)^2 - l(DE)^2 - l(AC)^2 = 2l(AD)l(CE)\cos(\angle(ABC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 12.

(k) Связь площади, угла при вершине, отношения боковых сторон и противоположной стороны.



$\forall_{ABC}$(актив(S(фигура(ABC))) & актив$(\angle(ACB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB))$ & $pl(AC) = ql(BC) \to$
$pql(AB)^2\sin(\angle(ACB)) = 2S$(фигура$(ABC)$)$(p^2 + q^2 - 2pq\cos(\angle(ACB))))$

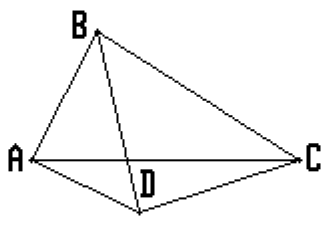
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Одно из выражений для расстояния AB, угла ACB и площади треугольника ABC имеет тип "неизв", остальные - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 7.

(l) Предварительный учет теоремы косинусов. Если против искомой стороны треугольника лежит известный угол, но длины боковых сторон пока неизвестны, то создается комментарий "пассив", обеспечивающий необходимое переключение внимания после определения данных длин. Теорема прием имеет вид:

$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(BC)) \to \emptyset)$

Прием имеет заголовок "замечание". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражение для расстояния BC имеет тип "неизв", угол BAC либо смежный с ним известен. Длина боковой стороны AB не известна. Если еще не был введен комментарий (пассив $l(AB)$ 0 актив$(\angle(BAC))$ 4) к посылкам задачи, то такой комментарий вводится. Он обеспечит понижение до 4 веса посылки "актив$(\angle(BAC))$" после нахождения длины AB. Фактически эту работу проделают процедуры "заменавхождения", "вывод". Уровень срабатывания приема равен 3.

(m) Ввод в рассмотрение углов для применения теоремы косинусов.



$\forall_{ABCDabcd}$(актив$(\angle(ABD))$ & $l(AB) = a$ & $l(BC) = b$ & $l(BD) = c$ & $l(CD) = d$ & актив$(l(AC)) \to$ актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(DBC)))$

Равенства в антецедентах идентифицируются с посылками, первы йи последний антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Угол ABD известен, выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Углы ABC, DBC еще не введены в рассмотрение. Уровень срабатывания равен 8.

(n) Упрощение ответа задачи на нахождение геометрического места точек. Прием позволяет исключить из ответа углы с помощью соотношения теоремы косинусов:

$\forall_{ABC}(l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = (-l(BC)^2 + l(AC)^2 + l(AB)^2)/2)$

Заголовок приема - "второйтерм". Он применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Такие задачи решаются для исключения описателя "класс" из задания геометрического места точек. Уровень срабатывания равен 4.

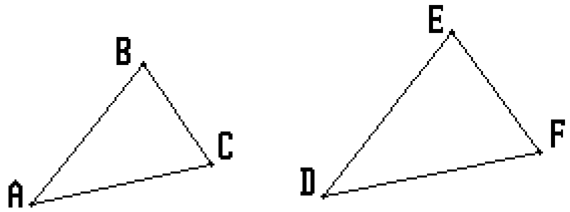
(o) Усмотрение противоречия при контроле ответа.

$\forall_{ABCabcd}(\angle(BAC) = d \ \& \ l(AB) = a \ \& \ l(AC) = b \ \& \ l(BC) = c \ \& \ \neg(c^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos d = 0) \to \text{ложь})$

$\forall_{ABCabcd}(\angle(BAC) < d \ \& \ 0 \leq \pi - d \ \& \ l(AB) = a \ \& \ l(AC) = b \ \& \ l(BC) = c \ \& \ a^2 + b^2 - c^2 - 2ab\cos d \leq 0 \to \text{ложь})$

Приемы имеют заголовок "вывод" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Выражения a, b, c, d константные. Последний антецедент, а также второй антецедент второго приема обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты идентифицируются с посылками. Ведены сравнительно сильные ограничители трудоемкости. Во втором приеме первый антецедент может иметь нестрогое неравенство. Уровень срабатывания равен 2.

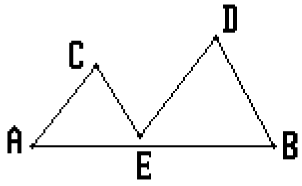
5. Равенство углов в треугольниках с соответственно параллельными сторонами.



$\forall_{ABCDEF}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE) \ \& \ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DF) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(EF) \to \angle(EDF) = \angle(BAC) \ \& \ \angle(DEF) = \angle(ABC) \ \& \ \angle(EFD) = \angle(BCA))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Углы BAC, ABC, ACB уже рассматриваются в задаче и известны. Уровень срабатывания равен 6.

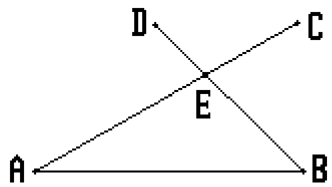
6. Точка пересечения прямых, проведенных из точек на боковых сторонах параллельно другой боковой стороне.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(CE) $\|$ прямая(BD) & прямая(DE) $\|$ прямая(AC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныепрямые(прямая(BD), прямая(AB)) & разныеточки(C, D) & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(ABD) \rightarrow \angle(CED) + \angle(CAB) + \angle(ABD) = \pi$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Остальные обрабатываются проверочными операторами. Углы CED, BAC, ABD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

7. Усмотрение двух углов треугольника.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(ABD))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $0 < \pi - \angle(BAC) - \angle(ABD) \rightarrow \neg(A \in$ интервал$(CE))$ & $\neg(B \in$ интервал$(DE))$)

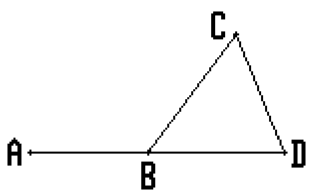
Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "усм". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Либо не усматривается, что точка E лежит на луче AC, либо не усматривается, что точка E лежит на луче BD. Указатель "посылка(...)" определяет дополнительный вывод равенств $\angle(BAC) = \angle(BAE)$, $\angle(ABD) = \angle(ABE)$.

8. Сумма двух углов треугольника меньше пи.

$\forall_{ABCab}(\angle(BAC) = a$ & $\angle(ABC) = b$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow 0 < \pi - a - b$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем выражения a, b не содержат неизвестных и неконстантные. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

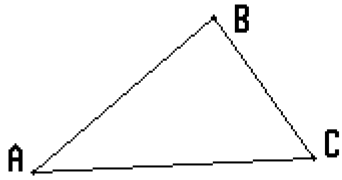
9. Усмотрение противоречия: внешний угол треугольника не больше внутреннего, не смежного с ним.



$\forall_{ABCDa}(\angle(ABC) = a$ & актив$(\angle(BDC))$ & $B \in$ отрезок(AD) & разныеточки(B, D) & $0 \leq \angle(BDC) - a$ & актив(прямая$(BD)) \to$ ложь)

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Обработка пятого антецедента сопровождается сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

10. Усмотрение противоречия: угол, лежащий против большей стороны треугольника, меньше одной трети пи.



$\forall_{ABCabcd}(l(AB) = a$ & $l(BC) = b$ & $l(AC) = c$ & $\angle(ABC) = d$ & $0 \leq c - a$ & $0 \leq c - b$ & $0 < \pi - 3d \to$ ложь)

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, причем выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

11. Усмотрение противоречия: против большей стороны лежит меньший угол.

$\forall_{ABCab}(0 < \angle(BCA) - \angle(BAC)$ & $l(AB) = a$ & $l(BC) = b$ & $0 \leq b - a \to$ ложь)

Аналогично предыдущему. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, причем a, b не содержат неизвестных. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

12. Упрощение ответа, включающего независимые параметры для трех углов треугольника.

$\forall_{ABCabc}(\angle(BAC) = a$ & $\angle(ABC) = b$ & $\angle(ACB) = c \to \sin(a/2 + b/2) = \cos(c/2))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "известны". Такие задачи используются для завершающего редактирования ответа задач на описание, имеющих цель "известно". Выражения a, b, c суть известные параметры. Уровень срабатывания равен 3.

13. Вывод неравенств для параметров, связанных с углами.

$\forall_{ABCax}(\angle(ABC) = x$ & $\angle(ACB) = a + x$ & $0 < a \to x < (\pi - a)/2)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем выражение x содержит неизвестные, но только численные, а выражение a не содержит неизвестных. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы перед компиляцией. Уровень срабатывания равен 2.

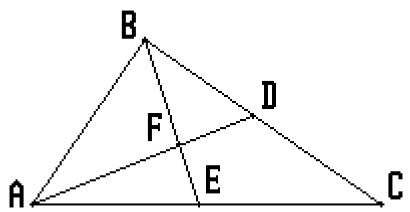
14. Использование оператора "величинаугла"для определения угла, лежащего против неизвестной стороны.

    $\forall_{ABCpq}$(актив$(l(AB))$ & $\angle(ACB) = p$ & $q = p \to p = q)$

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "нормугол", правая часть третьего - нормализатором "величинаугла". Если выражение p не имеет своим заголовком символ "угол", то обращение к последнему нормализатору отменяется, и q просто равно p. Проверяется, что q не содержит неизвестных. Расстояние AB пока не известно; расстояния AC и BC уже рассматриваются в задаче. Кроме того, в задаче должны рассматриваться некоторый угол с вершиной C, сторона которого лежит на прямой AC, и угол с вершиной C, сторона которого лежит на прямой BC. Либо выражение для расстояния AB имеет тип "неизв", либо имеется комментарий (пассив ...) указывающий, что вычисление расстояния AB представляет интерес для повторного рассмотрения некоторого другого приема. Прием имеет средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

Медианы треугольника

1. Точка пересечения медиан.



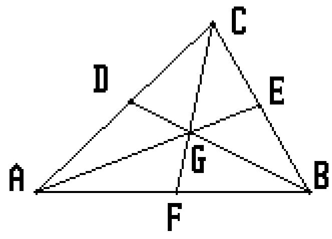
$\forall_{ABCDEF}(D \in$ прямая(BC) & $l(BD) = l(DC)$ & $E \in$ прямая(AC) &
$l(AE) = l(EC)$ & $F \in$ прямая(BE) & $F \in$ прямая(AD) &
разныепрямые(прямая(BC), прямая$(AC)) \to F \in$ отрезок(AD) &
$3l(AF) = 2l(AD)$ & $3l(DF) = l(AD))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Либо в задаче уже рассматривается хотя бы одно из расстояний AD, AF, DF, либо в ней рассматриваются координаты точек A, D. Уровень срабатывания равен 5. Созданы еще несколько версий данного приема:

(a) Вместо приведенного выше условия на расстояния AD, AF, DF и точки A, D имеется требование перпендикулярности прямых AD, BF. Уровень срабатывания прежний.

(b) В задаче уже рассматривается расстояние от точки F до некоторой точки на стороне треугольника, не являющейся основанием медианы либо вершиной треугольника. Уровень срабатывания равен 5.

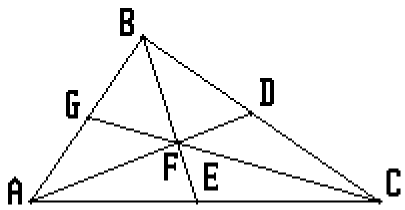
(c) Выражение для расстояния DF имеет тип "определимо". Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEFG}(l(CE) = l(EB)$ & $l(AD) = l(CD)$ & $l(AF) = l(BF)$ & $G \in$ прямая(CF) & $G \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая$(AB) \to G \in$ отрезок(BD) & $l(BG) = 2l(DG))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

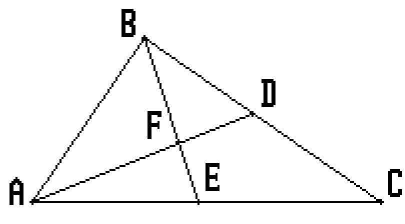
2. Проведение третьей медианы.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ прямая(BC) & $l(BD) = l(DC)$ & $E \in$ прямая(AC) & $l(AE) = l(EC)$ & $F \in$ прямая(BE) & $F \in$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AC)) $\to G -$ точка & $G \in$ отрезок(AB) & $l(AG) = l(GB)$ & $F \in$ отрезок(CG) & $l(CG) = 3l(FG)$ & $l(CG) = 2l(FG))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AD, BE, AB уже рассматриваются в задаче, причем расстояние AB не известно. Точка пересечения прямых AB и CF пока в задаче не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение эту точку G, обозначая ее посредством новой переменной. Уровень срабатывания равен 8.

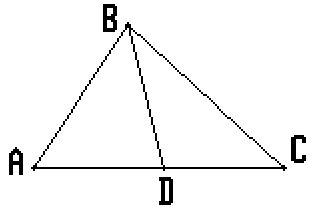
3. Ввод в рассмотрение точки пересечения медиан.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ прямая(BC) & $l(BD) = l(DC)$ & $E \in$ прямая(AC) & $l(AE) = l(EC)$ & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AC)) $\to F -$ точка & $F \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок(BE) & $2l(FD) = l(AF)$ & $2l(FE) = l(BF))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка пересечения прямых AD, BE задаче пока не рассматривается. Прием вводит эту точку F в рассмотрение, обозначая ее посредством новой переменной. Уровень срабатывания равен 6.

4. Соотношение для длин сторон треугольника и длины медианы.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & $D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & актив($l(AC)$) $\to 2l(AD)^2 + 2l(BD)^2 - l(AB)^2 - l(BC)^2 = 0$)

Четвертый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Расстояния BD, AD, AB, BC уже рассматриваются в задаче, причем выражение для одного из них имеет тип "неизв", а остальные - известны. Уровень срабатывания равен 7.

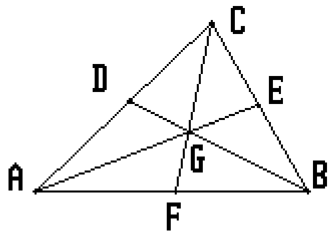
$\forall_{ABCD}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & $D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD) \to 2l(AD)^2 + 2l(BD)^2 - l(AB)^2 - l(BC)^2 = 0$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния BD, AD, AB, BC уже рассматриваются в задаче, причем выражение для одного из них имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 11.

$\forall_{ABCD}$($D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD) \to 2l(AD)^2 + 2l(BD)^2 - l(AB)^2 - l(BC)^2 = 0$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Расстояния AD и BD, а также прямые AB, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 14.

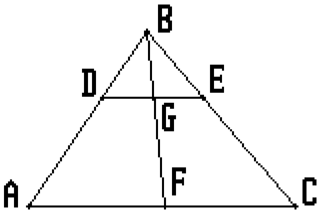
5. Соотношение для длины стороны треугольника и длин трех его медиан.



$\forall_{ABCDEFG}$($l(CE) = l(BE)$ & $l(AD) = l(CD)$ & $l(AF) = l(BF)$ & $G \in$ прямая(CF) & $G \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AB) & актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) & актив($l(AE)$) & актив($l(CF)$) $\to 9l(AC)^2 + 4l(BD)^2 = 8l(AE)^2 + 8l(CF)^2$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Все расстояния AC, BD, AE, CF, кроме одного, известны, а оставшееся - уже рассматривается в задаче и пока не известно. Уровень срабатывания равен 6.

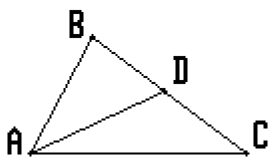
6. Ввод в рассмотрение точки пересечения медианы треугольника и отрезка, параллельного основанию.



$\forall_{ABCDEFG}(l(AF) = l(FC)$ & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DE) & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(BC)) & разныеточки(A, C) & $F \in$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок$(BC) \rightarrow G -$ точка & $G \in$ отрезок(DE) & $G \in$ отрезок(BF) & $l(DG) = l(GE)$ & $l(BG)l(AB) = l(BF)l(BD))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния BF и BD, а также хотя бы одно из расстояний AB, AD уже рассматриваются в задаче. Точка пересечения прямых DE и BF пока не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение эту точку G, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 9.

7. Усмотрение острого угла из сравнения удвоенной длины медианы и длины стороны, к которой она проведена.



$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AD))$ & $l(BD) = l(CD)$ & $D \in$ отрезок(BC) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $0 \leq 2l(AD) - l(BC) \rightarrow 0 \leq \pi/2 - \angle(BAC))$

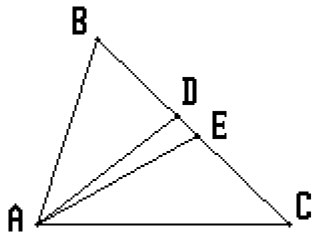
Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и третий - указателем "усм". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Расстояние BC прямые AB, AC уже рассматриваются в задаче, причем расстояние BC и угол BAC не известны. Либо угол BAC уже рассматривается в задаче, либо длины сторон AB, AC и площадь треугольника ABC известны. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 10.

8. Ввод в рассмотрение длины медианы.

$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & $D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD) \rightarrow$ актив$(l(BD))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Прямая BD уже рассматривается в задаче, причем рассматривается также расстояние между некоторыми двумя ее точками. Не усматривается перпендикулярность прямых BD, AC. Уровень срабатывания равен 10.

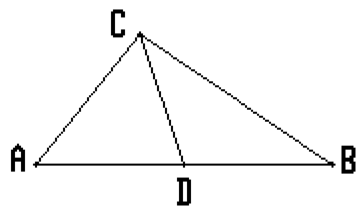
9. Разбор случаев для расположения оснований медианы и биссектрисы.



$\forall_{ABCDE}(D \in \text{прямая}(BC)\ \&\ \angle(BAD) = \angle(DAC)\ \&\ l(BE) = l(CE)\ \&$
$E \in \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{актив}(l(DE))\ \&\ \text{разныеточки}(B, C) \rightarrow$
$E \in \text{отрезок}(CD)\ \vee\ E \in \text{отрезок}(BD))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние DE известно; не усматривается ни принадлежность точки E отрезку CD, ни ее принадлежность отрезку BD. Уровень срабатывания равен 9.

10. Угол между медианой и стороной.



$\forall_{ABCD}(D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&\ \text{актив}(\angle(BAC))\ \&\ \text{актив}(\angle(ABC))$
$\&\ \text{актив}(\angle(BCD)) \rightarrow \cos(\angle(BAC) + \angle(ABC))\cos(\angle(BCD) + \angle(ABC)) =$
$\cos(\angle(BCD) + \angle(BAC)))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Процедура "пропорцуравн" усматривает, что выводимое равенство, в сочетании с ранее выведенными равенствами, позволяет получить невырожденное уравнение для численных параметров. Уровень срабатывания равен 6.

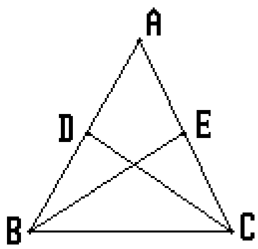
$\forall_{ABCD}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&\ \text{актив}(\angle(BAC))\ \&\ \text{актив}(\angle(ABC))$
$\&\ \text{актив}(\angle(ADC)) \rightarrow 2\sin(\angle(CAB))\sin(\angle(ABC) - \angle(ADC)) +$
$\sin(\angle(ADC))\sin(\angle(CAB) + \angle(ABC)) = 0)$

нтецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Выражение для одного из углов ADC, BAC, ABC имеет тип "неизв", а два других угла - известны. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCD}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \& l(AD) = l(BD)\ \&\ \text{актив}(\angle(BAC))\ \&\ \text{актив}(\angle(ABC))$
$\&\ \text{актив}(\angle(BCD)) \rightarrow \sin(\angle(ABC) + \angle(BAC))\sin(\angle(ABC) + \angle(BCD)) -$
$2\sin(\angle(BAC))\sin(\angle(BCD)) = 0)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для одного из углов ABC, BAC, BCD имеет тип "неизв", а два других угла - известны. Уровень срабатывания равен 6.

11. Усмотрение равнобедренного треугольника из равенства углов между медианами и сторонами.

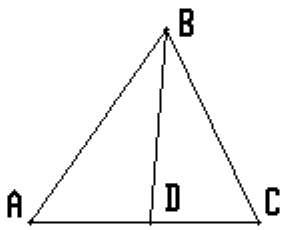


$\forall_{ABCDE}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&$
$l(AE) = l(CE)\ \&\ \text{актив}(\angle(BDC))\ \&\ \text{актив}(\angle(BEC))\ \&\ \angle(BDC) = \angle(BEC)$
$\&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(AC))\ \&\ \text{разныеточки}(A, B)\ \&$
$\text{разныеточки}(A, C) \rightarrow l(AB) = l(AC))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", три последних - обрабатываются проверочными операторами. Седьмой антецедент (равенство углов) выделен указателем "идентификатор". Обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

Биссектрисы треугольника

1. Биссектриса делит угол пополам.



$\forall_{ABCD}(\angle(ABD) = \angle(DBC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ \text{разныеточки}(A, C) \rightarrow$
$\angle(ABC) = 2\angle(ABD))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Хотя бы один из углов ABC, ABD известен. Если угол ABD прямой, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4. Создана также версия приема, в которой требуется, чтобы выражение для хотя бы одного из углов ABC, ABD имело тип "неизв". Уровень срабатывания тот же.

2. Отрезки, на которые основание биссектрисы делит противоположную сторону, пропорциональны боковым сторонам.

$\forall_{ABCDab}(\angle(ABD) = \angle(DBC)$ & $D \in$ прямая(AC) & $al(AD) = bl(CD)$ & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow$
$al(AB) = bl(BC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, два последних - проверочными операторами. Коэффициенты a, b не содержат неизвестных. Расстояния AD, CD не известны. Если стороны AB, BC равны, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDab}(\angle(ABD) = \angle(DBC)$ & $D \in$ прямая(AC) & $al(AD) = bl(AC)$ & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow$
$(a - b)l(AB) = bl(BC))$

Прием аналогичен первому и имеет тот же уровень срабатывания.

$\forall_{ABCDab}(\angle(ABD) = \angle(DBC)$ & $D \in$ прямая(AC) & $al(AB) = bl(BC)$ & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow$
$bl(CD) = al(AD))$

Аналогично предыдущим двум приемам. Кроме того, на данной теореме создана еще одна версия, срабатывающая на уровне 8. В ней не требуется, чтобы оба расстояния AD, CD были не известны, зато при помощи пакетного индикатора "существпропорц" проверяется, что соотношение пропорциональности между этими расстояниями представляет интерес.

$\forall_{ABCD}(\angle(ABD) = \angle(DBC)$ & $D \in$ прямая(AC) & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$

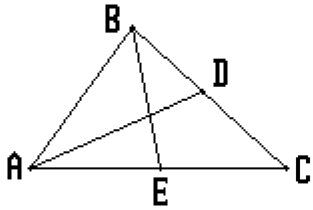
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не более чем одно из выражений для расстояний AB, CD, AD, BC содержит неизвестные и не имеет типа "неизв". Конструкция "пересмотр(...)", внутри которой расположен последний фильтр, обеспечивает организацию слежения за появлением новых посылок "актив($l(AD)$)", "актив($l(CD)$)", если этот фильтр при первой попытке применения приема оказывается ложным. Появление таких посылок влечет понижение до 6 веса посылки, содержащей точку привязи данного приема. Уровень срабатывания равен 6. На той же теореме созданы еще несколько версий данного приема:

(a) Копия первой версии, срабатывающая на уровне 8.

(b) Хотя бы одно из выражений для расстояний AB, CD, AD, BC имеет тип "Неизв". При этом хотя бы одно из расстояний AB, BC еще не рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

(c) Хотя бы два из выражений для расстояний AB, CD, AD, BC имеют тип "определимо". Уровень срабатывания равен 11.

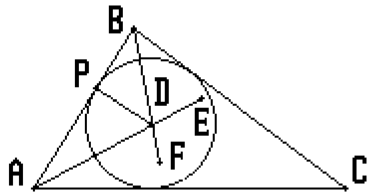
3. Определение отношений длин отрезков, возникающих при рассмотрении двух биссектрис треугольника.



$\forall_{ABCDEabcd}$(биссектриса($BACD$) & биссектриса($ABCE$) & $D \in$ отрезок(BC) & $E \in$ отрезок(AC) & актив($l(AB)$) & актив($l(BD)$) & актив($l(AE)$) & $al(AB) = bl(BD)$ & $cl(AB) = dl(AE) \to d(bd - ac)l(CE) = ac(c + d)l(AB)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, два последних - обрабатываются пакетными синтезаторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b, c, d, как результаты применения синтезатора "пропорциональны", будут содержать только численные параметры. Уровень срабатывания равен 7.

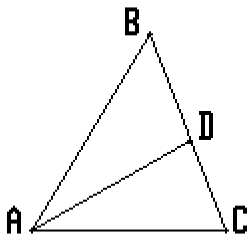
4. Точка пересечения биссектрис.



$\forall_{ABCDEFP}$(биссектриса($BACE$) & биссектриса($ABCF$) & $D \in$ прямая(BF) & $D \in$ прямая(AE) $\to P -$ точка & $P \in$ отрезок(AB) & прямая(AB) $\perp$ прямая(DP) & окружность(DP)вписана в фигура(ABC))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". В задаче пока отсутствует посылка, указывающая на вписанную в треугольник ABC окружность, но рассматривается какая-то прямая, перпендикулярная прямой AB. Прием вводит в рассмотрение точку P касания вписанной окружности и выбирает для обозначения ее новую переменную. Уровень срабатывания равен 8.

5. Длина биссектрисы треугольника.



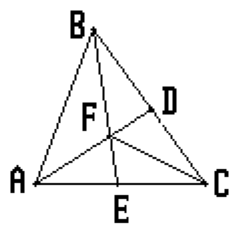
$\forall_{ABCD}(\angle(BAD) = \angle(DAC)$ & $D \in$ отрезок(BC) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AC)$) $\to l(AD) =$
$\sqrt{l(AB)l(AC)(l(AB) + l(AC) + l(BC))(l(AB) + l(AC) - l(BC))}/(l(AB)+l(AC)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", третий - идентифицируется с посылкой. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB, AC, BC известны. Выражение для расстояния AD имеет тип "применимо". Если выводимое соотношение чрезмерно длинное, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 9. Она отличается от первой версии лишь тем, что обращение к пакетному индикатору "применимо" сопровождается усиливающим комментарием "плюс".

$\forall_{ABCD}(\angle(BAD) = \angle(DAC)$ & $D \in$ отрезок(BC) & $l(AD) = p$ &
$l(AB) = a$ & $l(AC) = b$ & $l(BC) = c$ &
$\neg(p^2(a+b)^2 - ab(a+b+c)(a+b-c) = 0) \to$ ложь$)$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Равенства для расстояний идентифицируются с посылками, причем выражения a, b, c, p не содержат неизвестных. Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

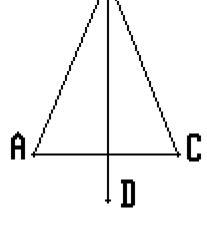
6. Проведение третьей биссектрисы.



$\forall_{ABCDEF}($биссектриса$(ABCE)$ & биссектриса$(CABD)$ & $D \in$ прямая(BC) &
$E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(BE) &
разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныепрямые(прямая(BC),
прямая(AB)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) &
разныеточки$(B, C) \to$ биссектриса$(ACBF))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние пять - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В задаче рассматривается площадь фигуры $CDFE$. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 5. Здесь должна рассматриваться не площадь, а угол DFE.

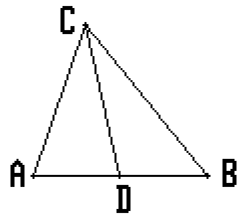
7. Если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $\angle(ABD) = \angle(DBC)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $D \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ $l(AB) = l(BC)$)

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и четвертый - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AB, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

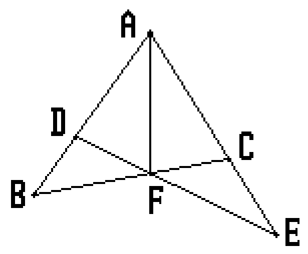
8. Соотношение для длин биссектрисы, боковых сторон и косинуса половины угла.



$\forall_{ABCD}(\angle(ACD) = \angle(DCB)$ & $D \in$ отрезок(AB) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(CD))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow l(CD)(l(AC) + l(BC)) = 2l(AC)l(BC)\cos(\angle(ACD)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Одно из выражений для расстояний CD, AC, BC и угла ACD имеет тип "неизв", остальные - не содержат неизвестных. Для равнобедренного треугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 11. В ней требуется, чтобы одно из выражений для расстояний CD, AC, BC и угла ACD имело тип "Неизв", а остальные - уже встречались в задаче. С посылкой здесь идентифицируется третий антецедент. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", а остальные - указателем "усм".

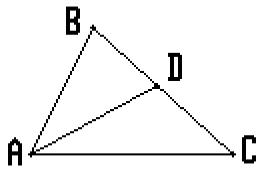
9. Двукратное использование соотношения для длин биссектрисы, боковых сторон и косинуса половины угла.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAF) = \angle(FAC)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ отрезок(DE) & точкалуча(A, B, D) & точкалуча$(A, C, E) \rightarrow l(AD)l(AE)(l(AB)+l(AC)) = l(AB)l(AC)(l(AD)+l(AE)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Расстояния AB, AC, AC, AD, AE уже рассматриваются в задаче. В случае равенства расстояний AD, AC прием блокируется. Уровень срабатывания приема равен 6.

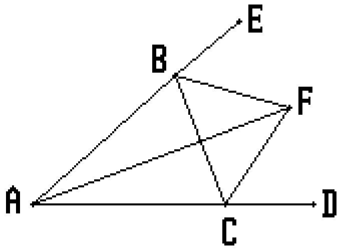
10. Ввод в рассмотрение длины биссектрисы.



$\forall_{ABCD}$(биссектриса$(BACD)$ & $D \in$ прямая$(BC) \to$ актив$(l(AD))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Угол BAC известен. На биссектрисе выделена точка, разбивающая ее в известной пропорции. Уровень срабатывания равен 5.

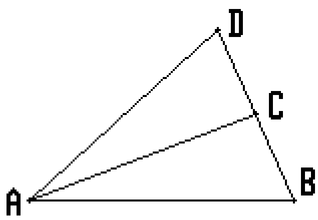
11. Две биссектрисы внешних углов и биссектриса противоположного внутреннего угла пересекаются в одной точке.



$\forall_{ABCDEF}$(биссектриса$(BACF)$ & $C \in$ отрезок(AD) & биссектриса$(BCDF)$ & актив(прямая(BF)) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки$(A, C) \to E -$ точка & $B \in$ отрезок(AE) & биссектриса$(EBCF)$)

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй и четвертый - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прием выбирает направляющую точку E биссектрисы внешнего угла, вводя для ее обозначения новую переменную. Предварительно проверяется, что в задаче пока не рассматривается такой угол PBF, что P лежит на луче, обратном к лучу BA. Уровень срабатывания приема равен 6.

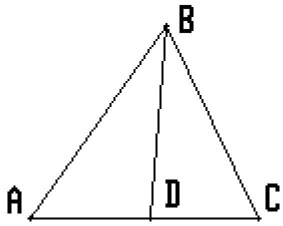
12. Точка пересечения биссектрисы с противоположной стороной отлична от вершины.



$\forall_{ABCD}(C \in$ отрезок(BD) & $\angle(BAC) = \angle(CAD)$ & $\neg(A \in$ прямая$(BD))$ & разныеточки$(B, D) \to \neg(B = C))$

Прием имеет заголовок "вывод"и применяется в задачах на доказательство. Второй антецедент выделен указателем "равно", первый - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

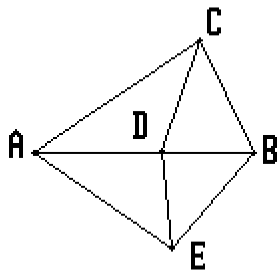
13. Соотношение для длины биссектрисы, длины стороны и длин отрезков, на которые биссектриса делит противоположную сторону.



$\forall_{ABCD}(\angle(ACD) = \angle(DCB)$ & $D \in$ отрезок(AB) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(BD)) \to l(CD)^2 l(AD) + l(BD)l(AD)^2 = l(BD)l(AC)^2)$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Одно из расстояний CD, AD, BD, AC не известно, остальные - известны. Уровень срабатывания равен 6.

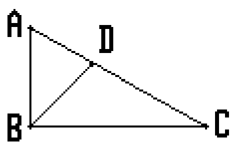
14. Два треугольника, имеющих общую сторону и общее основание биссектрис.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AB) & актив$(\angle(ACD))$ & актив$(\angle(DCB))$ & актив$(\angle(AED))$ & актив$(\angle(DEB))$ & $\angle(ACD) = \angle(DCB)$ & $\angle(AED) = \angle(DEB)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & разныепрямые(прямая(AE), прямая(AB)) & разныеточки(A, C) & разныеточки$(A, E) \to l(AC)l(BE) = l(BC)l(AE))$

Шестой антецедент выделен указателем "равно", первые пять - указателем "усм". Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор". Обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Наконец, последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срсбатывания равен 11.

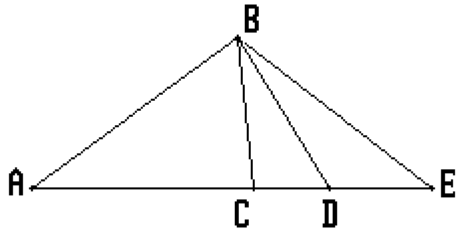
15. Соотношение для длины биссектрисы, гипотенузы и площади прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABCD}$(актив(S(фигура(ABC))) & прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AC) & $\angle(ABD) = \pi/4 \to l(BD)^2(l(AC)^2 + 4S$(фигура$(ABC))) = 8S$(фигура$(ABC))^2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний BD, AC и площади треугольника ABC имеет тип "неизв", два других - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 5.

16. Отношение длин отрезков, возникающих при пересечении с продолжением основания перпендикуляра к биссектрисе.

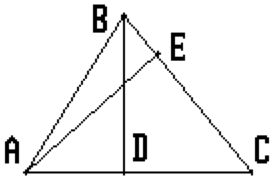


$\forall_{ABCDE}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BD) & $D \in$ отрезок(CE) & актив($\angle(CBD)$) & актив($\angle(DBE)$) & $\angle(CBD) = \angle(DBE)$ & $C \in$ отрезок(AE) & $al(BC) = bl(BE) \to (a-b)l(AC) = (a+b)l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - выделен указателем "идентификатор". Седьмой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 10.

Высоты треугольника

1. Равенство произведений длин высот на длины противоположных сторон.



$\forall_{ABCDE}$(актив($l(AE)$) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) $\to l(AE)l(BC) = l(BD)l(AC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для расстояний AE, BC, BD, AC имеет тип "Неизв", а остальные - уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще несколько версий этого приема:

(a) Хотя бы одно из выражений AE, BD, AC имеет тип "неизв", а два других - известны. Уровень срабатывания равен 6.

(b) Выводимое соотношение, после обработки его нормализаторами общей стандартизации, имеет единственный неизвестный числовой атом, причем этот атом уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

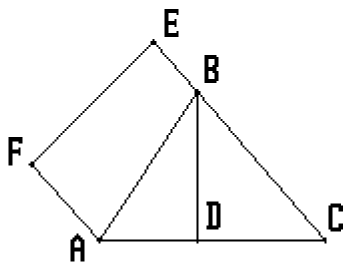
(c) Каждое из выражений для расстояний AE, BC, BD, AC либо имеет тип "Неизв", либо не содержит неизвестных. Хотя бы одно из них содержит неизвестную. Уровень срабатывания равен 6.

(d) Каждое из расстояний AE, BC, AC, BD уже встречается в задаче, причем выражение хотя бы одного из них содержит целочисленную переменную. Уровень срабатывания равен 6.

(e) Расстояние BC не известно, а каждое из расстояний AE, BD, AC выражено через численные параметры. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDE}$(актив($l(AE)$) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & прямая(D) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $al(AE) = bl(AC) \to$ $bl(BC) = al(BD)$)

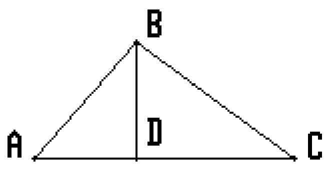
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается пакетным синтезатором. Коэффициенты a, b не содержат неизвестных. Антецеденты со второго по пятый выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний BC, BD имеет тип "неизв", другое - тип "применимо". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}$(актив($l(BD)$) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BC) & прямая(AF) $\parallel$ прямая(BC) & прямая(EF) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) $\to$ $l(EF)l(BC) = l(BD)l(AC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для расстояний EF, BC, BD, AC имеет тип "неизв", а два других - известны. Из точки A не опущена высота на сторону BC. Уровень срабатывания равен 7.

2. Соотношение для высоты треугольника и длин его сторон.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(BD)$) & $D \in$ прямая(AC) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BD) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) $\to 4l(AC)^2 l(BD)^2 = 4l(BC)^2(l(AC)^2 - (l(AC)^2 + l(BC)^2 - l(AB)^2)^2)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AB, BC и AC известны, расстояние BD - не известно. Уровень срабатывания равен 8.

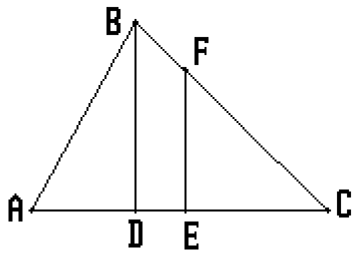
$\forall_{ABCD}$(актив($l(BD)$) & $D \in$ прямая(AC) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BD) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) $\rightarrow 4l(AC)^2 l(BD)^2 + (l(AB)^2 + l(BC)^2 - l(AC)^2)^2 = 4l(AB)^2 l(BC)^2$)

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Расстояния AB, BC известны, а выражения для расстояний BD и AC имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 13.

$\forall_{ABCD}$($D \in$ прямая(AC) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BD) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) $\rightarrow 4l(AC)^2 l(BD)^2 + (l(AB)^2 + l(BC)^2 - l(AC)^2)^2 = 4l(AB)^2 l(BC)^2$)

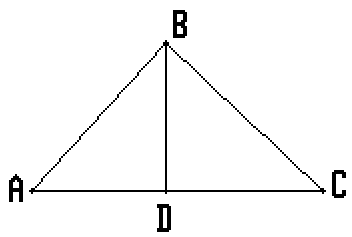
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Расстояния AB, BC, AC известны, а расстояние BD - нет. Отличие от первого приема заключается в том, что последнее расстояние может не рассматриваться в задаче. Уровень срабатывания равен 14.

3. Проведение высоты в треугольнике.



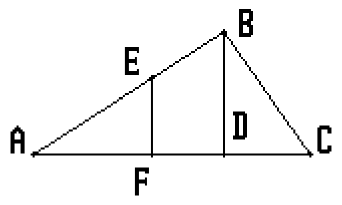
$\forall_{ABCDEFab}$(прямая(EF) $\perp$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(BC) & $E \in$ отрезок(AC) & $l(AE) = l(CE)$ & $al(BF) = bl(CF)$ & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(EF)) $\rightarrow D -$ точка & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $al(DE) = bl(CE)$)

Первые четыре антецедента, а также три последних антецедента выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Антецеденты с шестого по восьмой обрабатываются проверочным оператором. Выражение для угла ACB имеет тип "неизв". Высота из вершины B пока не проведена. Прием вводит в рассмотрение основание D этой высоты, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AC)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & расстдопрямой(B, прямая(AC)) $= d$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(BCA) \rightarrow D -$ точка & $D \in$ прямая(AC) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $l(BD) = d$ & $l(AC) = l(AD) + l(CD)$)

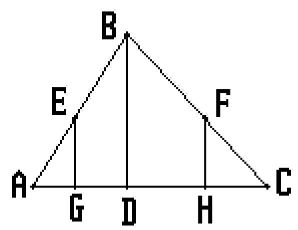
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, причем введен сильный ограничитель трудоемкости его обрабтки. Результирующее выражение d не содержит неизвестных. Два последних антецедента обрабатываются проверочным оператором. Расстояния AB и BC известны; выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". В задаче уже рассматривается некоторый перпендикуляр к прямой AC, но ни один из таких перпендикуляров не проходит через точку B. Прием вводит в рассмотрение основание высоты D, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}$(актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AC)$) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(AC) & прямая(EF) $\perp$ прямая(AC) & актив($l(EF)$) $\rightarrow D-$точка & $D \in$ прямая(AC) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & актив($l(BD)$))

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Высота из точки B пока не опущена. Выражение для расстояния EF имеет тип "Неизв". Либо длины сторон AB и BC равны, либо обе они известны. Уровень срабатывания равен 8.

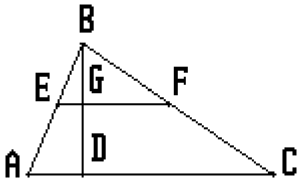
4. Ввод в рассмотрение длины высоты треугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}$($E \in$ прямая(AB) & прямая(EG) $\perp$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AC) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(BC) & прямая(FH) $\perp$ прямая(AC) & $H \in$ прямая(AC) & актив($l(EG)$) & актив($l(FH)$) $\rightarrow$ актив($l(BD)$))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Расстояния AC, FH не известны. Уровень срабатывания приема равен 9.

5. Ввод в рассмотрение точки пересечения высоты треугольника и отрезка, параллельного основанию.

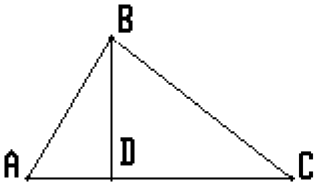


$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(AC) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок$(BC) \to G -$ точка & $G \in$ прямая(EF) & $G \in$ отрезок(BD) & $l(BD) = l(BG) + l(GD))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. В задаче рассматривается площадь треугольника EFB. Точка пересечения прямых BD и EF пока не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение эту точку G, обозначая ее посредством новой переменной. Уровень срабатывания равен 7.

6. Размещение основания высоты треугольника.

   (a) Высота, проведенная к основанию, оба угла которого - острые.



$\forall_{ABCD}($актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BCA))$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $0 < \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 < \pi/2 - \angle(BCA) \to$ $D \in$ интервал$(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается принадлежность точки D отрезку AC. Хотя бы одно из расстояний AD, AC, CD в задаче пока не рассматривается. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.

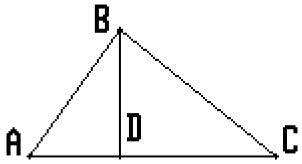
$\forall_{ABCD}($актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(ABC))$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $0 < \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 <\leq \angle(BAC) + \angle(ABC) - \pi/2 \to D \in$ отрезок$(AC))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCD}(0 < \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 < \pi/2 - \angle(BCA)$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая$(AC) \to D \in$ интервал$(AC))$

Два последних антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в последнем антецеденте. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Углы BAC, BCA уже рассматриваются в задаче. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 8.

(b) Высота, опущенная из тупого либо прямого угла.



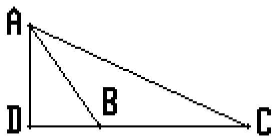
$\forall_{ABCD}(D \in$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & актив$(\angle(ABC))$ & $0 \leq \angle(ABC) - \pi/2 \to D \in$ отрезок$(AC))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}($прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $0 \leq \angle(ABC) - \pi/2 \to D \in$ интервал$(AC))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен средний органичитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.

(c) Высота, проведенная к основанию, имеющему примыкающий тупой угол.



$\forall_{ABCD}($прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(BC) & актив$(\angle(ABC))$ & $0 \leq \angle(ABC) - \pi/2 \to B \in$ отрезок$(CD))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используется сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Перед обращением проверяется, что взаимное расположение точек B, C, D идентифицирующими операторами не усматривается. Прямая AC должна уже рассматриваться в задаче. Уровень срабатывания равен 5. Создана копия приема, срабатывающая на уровне 7 и имеющая несколько более слабый ограничитель трудоемкости.

$\forall_{ABCD}($прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(BC) & актив$(\angle(BAC))$ & $0 \leq \angle(ABC) - \pi/2 \to B \in$ отрезок$(CD))$

Аналогично первому приему, но уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCD}($прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(BC) & актив$(\angle(ABC))$ & $0 \leq \angle(ABC) - \pi/2 \to B \in$ отрезок(CD) & $l(CD) = l(BC) - l(AB)\cos(\angle(ABC)))$

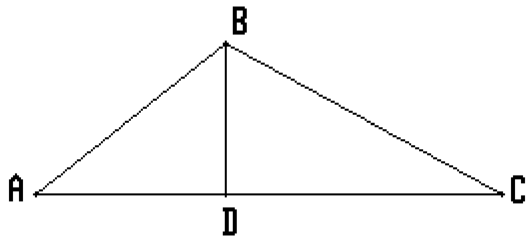
Антецеденты обрабатываются так же, как в первом приеме, но прямая AC не обязательно рассматривается в задаче. Угол ABC известен; расстояния AB, BC и CD уже рассматриваются. Уровень срабатывания равен 5.

(d) Усмотрение принадлежности основания высоты стороне в треугольнике с известными длинами сторон.

$\forall_{ABCDabc}(D \in$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) &
$l(AB) = c$ & $l(AC) = b$ & $l(BC) = a$ & $0 \leq a^2 + b^2 - c^2$ &
$0 \leq b^2 + c^2 - a^2 \to D \in$ отрезок$(AC))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Антецеденты с третьего по пятый идентифицируются с посылками; последние два - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c константные. Уровень срабатывания приема равен 4.

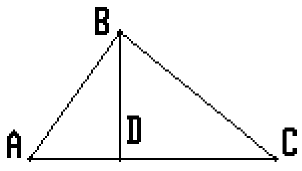
(e) Усмотрение принадлежности основания высоты стороне треугольника, если известны угол при основании и угол прямоугольного треугольника, получающегося при проведении высоты.



$\forall_{ABCDab}($прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(BCD) = b$ &
$0 < a - b$ & $D \in$ прямая(AC) & $0 < \pi - 2a \to D \in$ отрезок$(AC))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый и пятый - выделены указателем "усм". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Неравенства обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Проверка неравенства $0 < a - b$ сопровождается сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

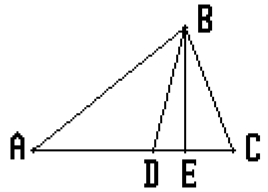
(f) Основание высоты треугольника, проведенной к большей его стороне, лежит на этой стороне.



$\forall_{ABCD}(0 \leq l(AC) - l(AB)$ & $0 \leq l(AC) - l(BC)$ & $D \in$ прямая(AC) &
прямая$(BD) \perp$ прямая$(AC) \to D \in$ отрезок$(AC))$

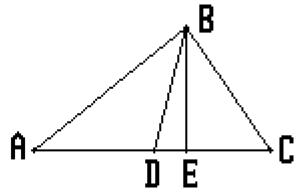
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - выделен указателем "усм". Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояния AB, AC и BC известны. Хотя бы одно из расстояний AD, CD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

(g) Условие принадлежности основания высоты отрезку между вершиной и основанием медианы.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(AC)$ & $0 \leq \pi/3 - \angle(ABC)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(BC)) \to E \in$ отрезок$(CD))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Углы BAC, ACB уже рассматриваются в задаче. На прямой AC выделены какие-либо две точки, расстояние между которыми уже рассматривается в задаче, причем имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

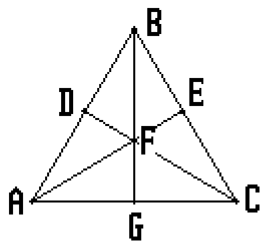


$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ отрезок(AC) & $0 \leq \angle(ACB) - \angle(BAC)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(BC)) \to E \in$ отрезок$(CD))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Углы ACB и BAC уже рассматриваются в задаче.

7. Точка пересечения высот треугольника.

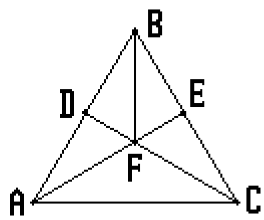
   (a) Принадлежность высоте точки пересечения двух других высот.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & прямая$(BG) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AE) & $F \in$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \to F \in$ прямая$(BG))$

Все антецеденты, кроме последнего, выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(b) Прямая, проведенная из вершины треугольника к точке пересечения высот, опущенных из двух других вершин, перпендикулярна противоположной стороне.



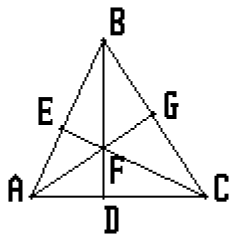
$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(CD) $\perp$ прямая(AB) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) & актив(прямая(BG)) & $F \in$ прямая(BG) & разныеточки(B, F) $\rightarrow$ прямая(BF) $\perp$ прямая(AC))

Антецеденты, устанавливающие различие прямых и точек, обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Идентифицирующие операторы не усматривают перпендикулярность прямых AC и BF. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая(CD) $\perp$ прямая(AB) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AE) & $F \in$ прямая(CD) & разныеточки(B, D) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(BC) & актив(прямая(BF)) $\rightarrow$ прямая(BF) $\perp$ прямая(AC))

Пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 6.

(c) Проведение третьей высоты.

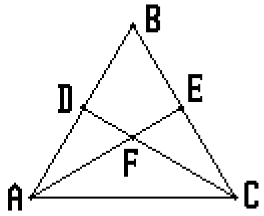


$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & прямая(AB) $\perp$ прямая(CE) & $E \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(CE) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & разныеточки(B, C) $\rightarrow$ G – точка & $G \in$ прямая(BC) & прямая(AG) $\perp$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AF))

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямая AF уже рассматривается в задаче, однако точка ее пересечения с прямой BC пока не выделена. Выражение хотя бы для одного из углов BFC, AFB, AFC имеет тип "неизв".

Прием вводит в рассмотрение точку G пересечения прямых AF и BC, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 7.

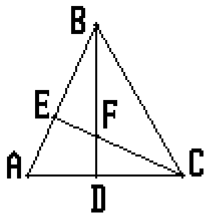
(d) Ввод в рассмотрение точки пересечения высот треугольника.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow F -$ точка & $F \in$ отрезок(AE) & $F \in$ отрезок(CD))

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Точка F пересечения высот пока в задаче не рассматривается. Прием вводит ее в рассмотрение, обозначая новой переменной. Уровень срабатывания равен 9.

(e) Если высота треугольника опущена на его сторону, то точка пересечения высот лежит по ту же сторону от основания данной высоты, что и вершина треугольника.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(CE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow$ $\neg(D \in$ интервал$(BF)))$

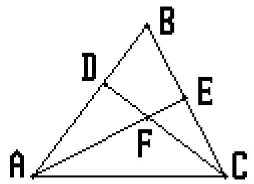
Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Идентифицирующие операторы не усматривают взаимное расположение точек B, D, F. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

(f) Если основания двух высот треугольника лежат на его сторонах, то точка пересечения высот расположена на отрезке между вершиной и основанием высоты.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(CE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow$ $F \in$ отрезок(BD) & $F \in$ отрезок(CE))

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Принадлежность точки пересечения высот отрезкам BD, CE идентифицирующими операторами не усматривается. Уровень срабатывания равен 5.

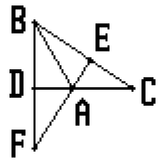
(g) Точка пересечения высот остроугольного треугольника.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(CD) $\perp$ прямая(AB) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) &
$E \in$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AE) &
$F \in$ прямая(CD) & $0 < \pi/2 - \angle(ABC)$ & $0 < \pi/2 - \angle(BCA)$ &
$0 < \pi/2 - \angle(BAC)$ & разныеточки(A, B) $\to$ $F \in$ отрезок(CD) &
$F \in$ отрезок(AE))

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Четыре последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выводимые соотношения идентифицирующими операторами не усматриваются. Уровень срабатывания равен 6.

(h) Случай, когда точка пересечения высот находится вне треугольника.



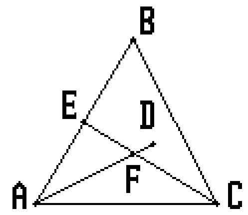
$\forall_{ABCDEF}$(прямая(BF) $\perp$ прямая(AC) & прямая(EF) $\perp$ прямая(BC) &
$D \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BF) & $E \in$ прямая(BC) &
$A \in$ отрезок(EF) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AC)) $\to$
$D \in$ отрезок(BF) & $A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ отрезок(BC))

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом их них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, отличающаяся лишь тем, что у нее точка привязки выбрана во втором антецеденте.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая(BF) $\perp$ прямая(AC) & прямая(EF) $\perp$ прямая(BC) &
$D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(BF) &
$A \in$ прямая(EF) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AC)) $\to$
$\neg(D \in$ интервал(AC)))

Антецеденты обрабатываются так же, как в первом приеме. Идентифицирующие операторы не усматривают принадлежность точки C лучу DA. Уровень срабатывания равен 11.

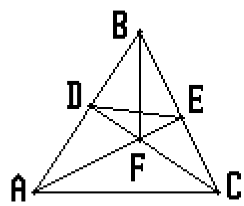
(i) Синус угла между высотами треугольника равен синусу угла треугольника.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(CE) & $F \in$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AB) & разныеточки(B, C) & разныеточки(A, B) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $\neg(\pi/2 - \angle(ABC) = 0) \to \sin(\angle(ABC)) = \sin(\angle(EFA))$)

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла ABC имеет тип "определимо". Обработка предпоследнего антецедента сопровождается сравнительно сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 12.

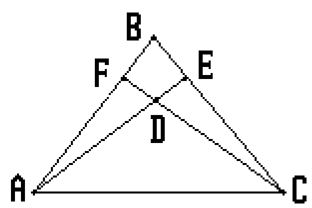
(j) Угол между высотой треугольника и отрезком, соединяющим основания двух высот.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & актив$(\angle(FBE))$ & актив(прямая(DE)) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $F \in$ отрезок(AE) & $F \in$ отрезок$(CD) \to \angle(FBE) = \angle(EDF)$)

Все антецеденты, кроме седьмого, обрабатываемого проверочным оператором, выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Угол FBE известен, а угол EDF - нет. Уровень срабатывания равен 7.

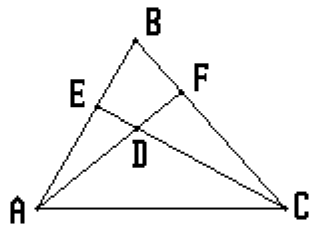
(k) Соотношение пропорциональности для отрезков, возникающих при рассмотрении точки пересечения высот.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CF) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(CF) & $D \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AE))$ & $F \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(BC) \to l(AD)l(AE) = l(AB)l(AF)$)

Все антецеденты, кроме пятого, обрабатываемого проверочным оператором, выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Одно из выражений для расстояний AD, AE, AB имеет тип "неизв", а два других - известны. Уровень срабатывания равен 8.

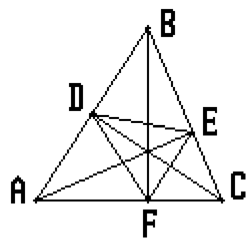
(l) Отношение длин отрезков высоты и тангенсы углов остроугольного треугольника.



$\forall_{ABCDEFab}$(прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AF) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BC) & $al(DE) = bl(CD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) & $D \in$ отрезок(EC) & $D \in$ прямая(AF) & $0 < \pi/2 - \angle(ABC)$ & $0 < \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 < \pi/2 - \angle(ACB) \rightarrow b\,\mathrm{tg}(\angle(BAC))\,\mathrm{tg}(\angle(ABC)) = a + b$)

Антецеденты "разныеточки", "разныепрямые" и неравенства обрабатываются проверочными операторами. Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом антецеденте. Коэффициенты пропорциональности a, b известны; углы BAC и ABC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

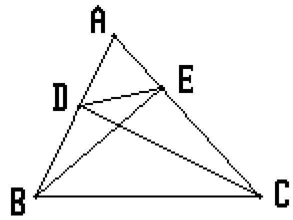
8. Высоты треугольника суть биссектрисы углов треугольника, возникающего при соединении отрезками оснований высот.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(BF) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AC) & актив$(l(DE))$ & актив$(l(EF))$ & актив$(l(DF))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки$(A, C) \rightarrow$ биссектриса$(EDFC)$ & $\angle(BDE) = \angle(ACB)$ & $\angle(ADF) = \angle(ACB)$)

Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Если угол BCA известен, то дополнительно выводится соотношение $\angle(EDF) + 2\angle(BCA) = \pi$. Уровень срабатывания приема равен 8.

9. Треугольник, основанием которого служит отрезок, соединяющий основания двух высот.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BE)) & прямая$(AC) \perp$ прямая(BE) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & актив(прямая(DE)) & aS(фигура(ADE)) $= bS$(фигура(ABC)) & разныеточки(A, D) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow$ $al(DE)^2 = bl(BC)^2$ & $al(AD)^2 = bl(AC)^2$)

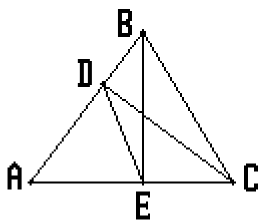
Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Десятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, два последних - проверочным оператором. Перед обращением к синтезатору проверяется, что площади треугольников ADE, ABC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

10. Ввод в рассмотрение угла треугольника, если на прилегающие стороны опущены высоты.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ $\rightarrow$ актив$(\angle(ABC))$)

Чертеж прежний. Все антецеденты, кроме пятого, выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом антецеденте. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AB и BC известны. Угол ABC в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 7.

11. Длина отрезка, соединяющего основания двух высот.

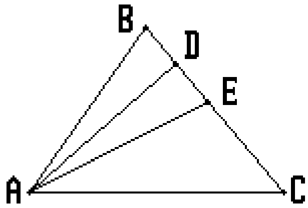


$\forall_{ABCDE}$($D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, D) & точкалуча(A, C, E) & актив$(\angle(BAC))$ $\rightarrow l(DE) = |\cos(\angle(BAC))| l(BC)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Выводимое равенство имеет единственный не известный числовой атом, причем он уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен

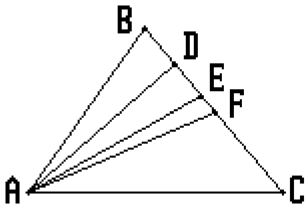
6. Создана версия приема, в которой требуется, чтобы два из выражений для расстояний DE, BC и угла BAC имели тип "неизв", а оставшееся - уже встречалось в задаче. Ее уровень срабатывания тоже равен 6.

12. Известны длина высоты, а также расстояние от конца этой высоты до конца биссектрисы.



$\forall_{ABCDEmnk}$(биссектриса$(BACE)$ & $E \in$ прямая(BC) &
прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(BC) & $l(AD) = m$ &
$l(DE) = n$ & $l(EC) = k \to$
$D \in$ отрезок(BE) & $l(BD) = |(km^2 - nm^2 - kn^2 - n^3)/(2kn + m^2 + n^2)|$ $\vee$
$D \in$ интервал(CE) & $l(BD) = |(kn^2 - km^2 - nm^2 - n^3)/(2kn - m^2 - n^2)|$)

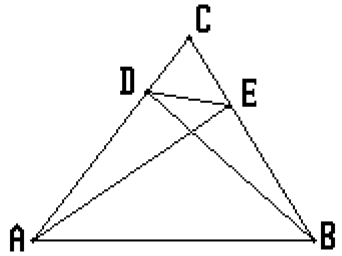
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние три антецедента выделены указателем "идентификатор"; их левые части обрабатываются нормализатором "нормрасстояние". Выражения m, n, k не содержат неизвестных. Расстояние BD не известно. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEFmnk}$(биссектриса$(BACE)$ & $E \in$ прямая(BC) &
прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(BC) &
$l(BF) = l(CF)$ & $l(AD) = m$ & $l(DE) = n$ & $l(EF) = k$ & $E \in$ отрезок(DF) &
$p = \sqrt{k(m^2 + n^2 + mn)/n}$ & $(0 < n \ \vee\ 0 < k) \to l(BC) = 2p$ &
($F \in$ отрезок(CD) & $l(BD) = |p - k - n|$ & $l(CD) = n + k + p$ $\vee$
$F \in$ отрезок(BD) & $l(CD) = |p - k - n|$ & $l(BD) = n + k + p$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты со второго по шестой, а также десятый выделены указателем "усм". остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения m, n, k не содержат неизвестных; расстояние BC не известно. Уровень срабатывания равен 7.

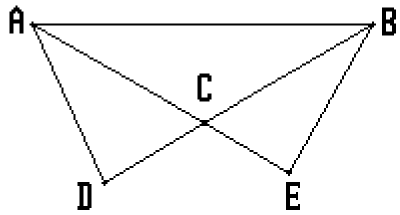
13. Усмотрение подобных треугольников, возникающих при проведении двух высот.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(BD) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) & актив(прямая(DE)) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) $\rightarrow (A, B, C) \sim (E, D, C)$)

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояния CD, CE, DE, AC, AB, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

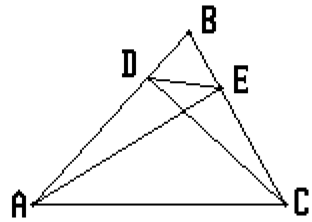
14. Угол треугольника равен углу с той же вершиной, лучи которого определяются основаниями двух высот.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(DCE)$) & актив($\angle(ACB)$) & прямая(AD) $\perp$ прямая(BD) & прямая(BE) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AC) & разныеточки(C, D) & разныеточки(C, E) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) & разныеточки(A, C) & разныеточки(B, C) $\rightarrow \angle(ACB) = \angle(DCE)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последние пять - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

15. Разбор случаев для острых и тупых углов треугольника, в котором проведены две высоты.



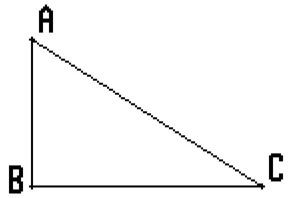
$\forall_{ABCDE}$(прямая(CD) $\perp$ прямая(AB) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) & актив(прямая(DE)) & актив(прямая(AC)) $\rightarrow$

$\angle(ABC) < \pi/2$ & $\angle(BAC) < \pi/2$ & $\angle(ACB) < \pi/2 \ \vee$
$\pi/2 \leq \angle(ABC)$ & $\angle(BAC) < \pi/2$ & $\angle(ACB) < \pi/2 \ \vee$
$\pi/2 \leq \angle(BAC)$ & $\angle(ABC) < \pi/2$ & $\angle(ACB) < \pi/2 \ \vee$
$\pi/2 \leq \angle(ACB)$ & $\angle(ABC) < \pi/2$ & $\angle(BAC) < \pi/2)$

Прием применяется при усмотрении выражения "прямая(DE)" в условии задачи на доказательство. Антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается взаимное расположение точек A, B, D. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 10.

Прямоугольный треугольник

1. Теорема Пифагора.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2)$

Антецедент выделен указателем "усм", причем в нем же расположена точка привязки. На данной теореме созданы следующие приемы вывода, различающиеся степенью мотивированности срабатывания и его уровнем:

(a) Одно из расстояний AB, BC, AC известно, одно - имеет тип "внешнеизв", а третье - уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Одно из расстояний AB, BC, AC имеет тип "неизв", а два других - выражены через численные параметры. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Одно из расстояний AB, BC, AC имеет тип "неизв", а одно - известно. Уровень срабатывания равен 5.

(d) Два из расстояний AB, BC, AC известны, а одно - нет. Уровень срабатывания равен 5.

(e) Каждое из расстояний AB, BC, AC либо известно, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы одно - не известно. Уровень срабатывания равен 5.

(f) Два из трех расстояний AB, BC, AC пропорциональны с известными коэффициентами, причем хотя бы одно из трех расстояний имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

(g) Все три расстояния AB, BC, AC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

(h) Хотя бы два из трех расстояний AB, BC, AC выражены через численные параметры. Прямая AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

(i) Выражения для расстояний AB, BC имеют тип "неизв", а выражение для расстояния AC - тип "определимо". Прямая AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

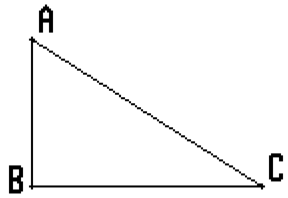
(j) Расстояние AB известно; выражение для расстояния BC имеет тип "существатом", а для расстояния AC - тип "определимо". Прямая AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

(k) Два из выражений для расстояний AB, BC, AC имеют тип "применимо", а третье расстояние - уже рассматривается в задаче. Прямая AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 11.

(l) Выражения для расстояний AB, BC имеют тип "неизв", а выражение для расстояния AC - тип "определимо". Не требуется, чтобы прямая AC уже рассматривалась. Уровень срабатывания равен 12.

(m) Расстояние AB известно; выражение для расстояния BC имеет тип "неизв", а для расстояния AC - тип "определимо". Не требуется, чтобы прямая AC уже рассматривалась. Уровень срабатывания равен 12.

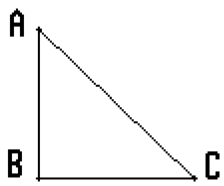
2. Усмотрение угла в 30 градусов.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(AC) = 2l(AB) \rightarrow \angle(ACB) = \pi/6)$

Точка привязки выбрана в первом антецеденте, выделенном указателем "усм". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

3. Угол в 45 градусов.



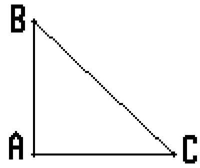
$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $\angle(BAC) = \pi/4 \rightarrow l(AB) = l(BC))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Хотя бы одно из расстояний AB, BC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(актив$(l(AB))$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $\angle(BAC) = \pi/4 \rightarrow$
$l(AB) = l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол", которому передается усиливающий комментарий "прямыеуглы". Хотя бы одно из выражений для расстояний AB, BC неконстантное. Уровень срабатывания равен 4.

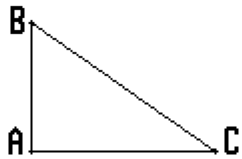
4. Усмотрение прямоугольного треугольника по двум углам в 45 градусов.



$\forall_{ABC}(\angle(ABC) = \pi/4 \ \& \ \angle(ACB) = \pi/4 \to \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

5. Соотношение между острыми углами.



$\forall_{ABC}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{актив}(\angle(ABC)) \to \angle(ACB) + \angle(ABC) = \pi/2)$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Угол ABC известен, выражение для угла ACB имеет тип "существатом". Если в задаче рассматривается квадрат либо прямоугольник, у которого A, B, C - вершины, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4. Созданы еще две версии приема:

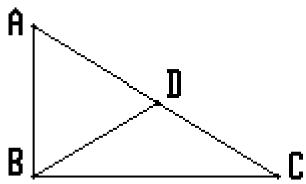
(a) Выражение для угла ABC имеет тип "неизв", а угол ACB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

(b) Угол ABC известен, а угол ACB - нет. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABC}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \ \& \ \angle(ABC) = a \to \angle(ACB) = \pi/2 - a)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Первый антецедент выделен указателем "усм". Выражение для угла ACB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

6. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла.



$\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \ \& \ l(AD) = l(DC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \to l(BD) = l(DC))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Прямая BD уже рассматривается в задаче. Уровни срабатывания равны 3 и 6.

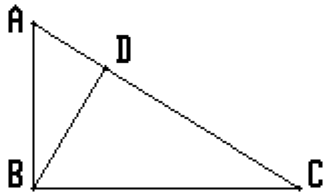
7. Точка, равноудаленная от трех вершин треугольника.

   $\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(AD)$ & $l(BD) = l(CD)$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to D \in$ отрезок(AC))

   Чертеж прежний. Второй антецедент выделен указателем "равно", остальные антецеденты - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

8. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла.

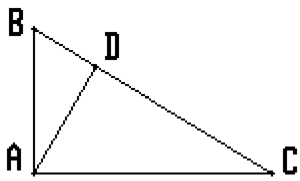
   (a) Основание высоты лежит на гипотенузе.

   $\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая$(AC) \to D \in$ отрезок(AC))

   Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Соотношение для длин катета, гипотенузы и отрезка гипотенузы между основанием высоты и вершиной треугольника.

   $\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая$(BC) \to l(BD)l(BC) = l(AB)^2$)

   Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. На данной теореме созданы следующие приемы вывода:

   i. Два из трех расстояний AB, BC, BD известны, а третье - нет. Уровень срабатывания равен 5. Создана также копия данного приема, срабатывающая на уровне 7.

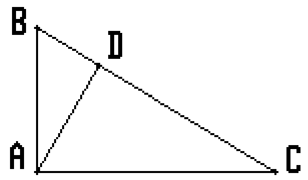
   ii. Два из трех расстояний AB, BC, BD выражены через численные параметры, а третье - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания приема равен 5.

   iii. Каждое из расстояний AB, BC, BD либо известно, либо имеет тип "Неизв", причем хотя бы одно - не известно. Уровень срабатывания равен 5. Создана также копия данного приема, срабатывающая на уровне 7.

   iv. Расстояние BD известно, выражение для расстояния AB имеет тип "определимо", а выражение для расстояния BC - тип "применимо". Уровень срабатывания равен 6.

v. Расстояния BD, BC уже рассматриваются в задаче, причем выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания приема равен 13.

(c) Соотношение для длины высоты и длин отрезков, на которые разбивается гипотенуза.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BC) &
прямая$(AD) \perp$ прямая$(BC) \to l(BD)l(CD) = l(AD)^2)$

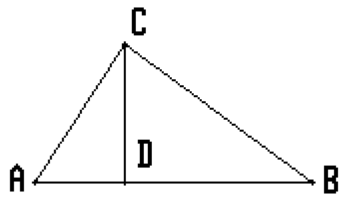
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояние AD известно. Уровень срабатывания приема равен 12.

(d) Соотношения пропорциональности для отрезков гипотенузы и квадратов катетов.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BC) &
прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $al(BD) = bl(CD) \to al(AB)^2 = bl(AC)^2)$

Чертеж прежний. Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Коэффициенты пропорциональности a, b не содержат неизвестных. Расстояния AB и AC уже рассматриваются в задаче, причем выражение хотя бы для одного из них имеет тип "неизв". Если эти выражения совпадают, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.

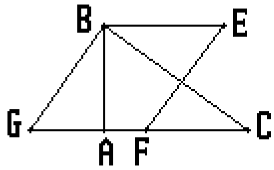
(e) Усмотрение высоты, проведенной из прямого угла.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(ACD))$ & актив$(\angle(ABC))$
& актив(прямая(CD)) & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, D) &
$\angle(ACD) = \angle(CBA) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая(AB))

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Уровень срабатывания равен 7.

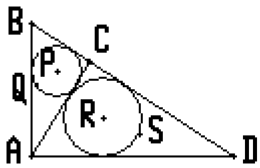
(f) Проведение второго катета для получения соотношений между длиной высоты и длинами отрезков, на которые разбивается гипотенуза.



$\forall_{ABCEFG}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(BE) \parallel$ прямая(AC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AC) & актив$(l(AB)) \rightarrow$ G − точка & $G \in$ прямая(AC) & прямая$(BG) \parallel$ прямая(EF) & $l(AB)^2 = l(AG)l(AC)$)

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв", а для расстояний AF и BE - тип "определимо". Через точку B пока не проведена прямая, параллельная прямой EF и пересекающаяся с прямой AC по выделенной точке. Прием вводит такую точку G, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 6.

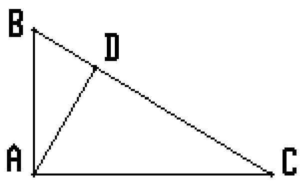
(g) Соотношения пропорциональности для радиусов окружностей, вписанных в треугольники, на которые разбивается высотой исходный треугольник.



$\forall_{ABCDPQRS}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & $C \in$ прямая(BD) & окружность(PQ) вписана в фигура(ABC) & окружность(RS)вписана в фигура$(ACD) \rightarrow l(PQ)l(AC) = l(BC)l(RS)$ & $l(PQ)l(AD) = l(AB)l(RS)$ & $l(PQ)l(CD) = l(RS)l(AC)$)

Два последних антецедента идентифицируются с посылками, первые три - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

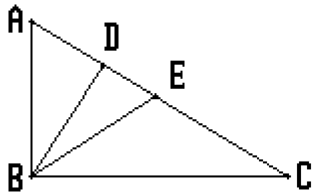
(h) Определение острого угла по отношению длин высоты и гипотенузы.



$\forall_{ABCDpq}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $pl(AD) = ql(BC)$ & актив$(\angle(ACB)) \rightarrow$ $p\sin(2\angle(ACB)) = 2q$)

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, причем коэффициенты p, q не содержат неизвестных. Выражение для угла ACB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания приема равен 5.

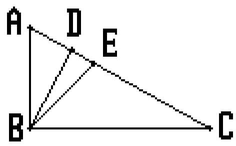
(i) Использование пропорциональности высоты и медианы.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & $al(BD) = bl(BE)$ & $l(AE) = l(CE) \to b(l(AB)^2 + l(BC)^2) = 2al(AB)l(BC))$

Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Выражения a, b не содержат неизвестных, выражения для расстояний AB и BC имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

(j) Взаимное расположение на гипотенузе основания высоты и основания биссектрисы.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & биссектриса$(ABCE)$ & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $0 \leq l(BC) - l(AB)$ & разныеточки(A, B) & разныеточки$(B, C) \to$ $D \in$ отрезок$(AE))$

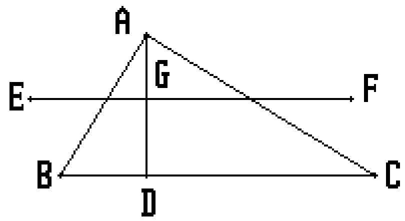
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

(k) Связь длины гипотенузы с длинами высоты и биссектрисы, проведенных из вершины прямого угла.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ отрезок(AC) & $\angle(ABE) = \pi/4$ & $\angle(EBC) = \pi/4$ & актив$(l(BD))$ & актив$(l(BE))$ & $D \in$ прямая$(AC) \to l(AC)(2l(BD)^2 - l(BE)^2) = 2l(BD)l(BE)^2)$

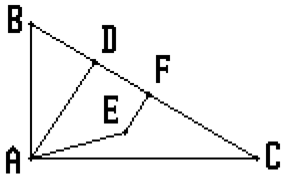
Чертеж прежний. Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Длина гипотенузы уже рассматривается в задаче. Одно из трех расстояний AC, BD, BE не известно, а два других - известны. Уровень срабатывания равен 9.

(l) Проведение высоты из вершины прямого угла.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(EF) & прямая$(AG) \perp$ прямая(EF) & актив$(l(AG)) \rightarrow$ D – точка & $D \in$ прямая(AG) & $D \in$ отрезок(BC) & актив$(l(AD))$))

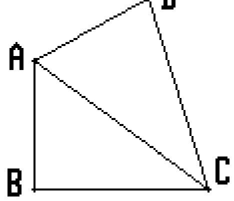
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Расстояния AB и AC известны, выражение для расстояния AG имеет тип "неизв". Прямая AC уже рассматривается в задаче, но точка пересечения ее с прямой AG пока не выделена. Эта точка D вводится в рассмотрение и обозначается новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(BC) & актив$(l(AE))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow$ D – точка & $D \in$ отрезок(BC) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(BD))$ & актив$(l(AD))$ & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC))

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AB и AC известны, выражение для расстояния AE имеет тип "неизв". Расстояния CF и EF уже рассматриваются в задаче. Либо усматривается, что точки A, E лежат по одну сторону от прямой BC, либо усматривается, что они лежат по разные стороны от этой прямой. В задаче пока не рассматривается основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Это основание D вводится в рассмотрение и обозначается новой переменной. Уровень срабатывания приема равен 8.

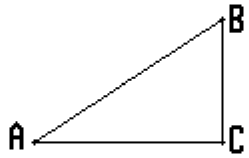
9. Ввод в рассмотрение гипотенузы.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AD)) \rightarrow$ актив(прямая(AC)))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояния AB, BC, AD известны. Выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 8.

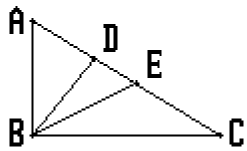
10. Ввод в рассмотрение длин катетов.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) $\rightarrow$ актив($l(BC)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Рассматриваются расстояния от точек B и C до некоторых точек прямой BC. Уровень срабатывания равен 8.

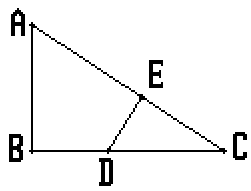
11. Ввод в рассмотрение острого угла.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & актив($\angle(DBE)$) $\rightarrow$ актив($\angle(BAC)$))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражение для угла DBE имеет тип "неизв". Хотя бы одно из расстояний AD, CE, AE, CD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

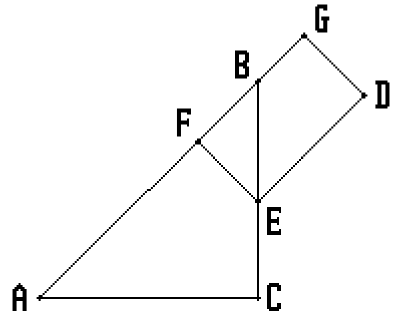
12. Проекция точки катета на гипотенузу.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(BC) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) $\rightarrow$ $E \in$ отрезок(AC))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Созданы две версии приема, одна из которых применяется в задачах на доказательство и имеет уровень срабатывания 4, а другая - в задачах на исследование и имеет уровень срабатывания 8.

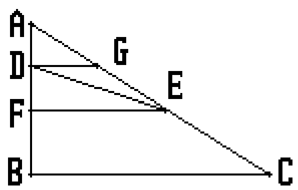
13. Ввод в рассмотрение проекции точки катета на гипотенузу.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(BC) \perp$ прямая(AC) & прямая$(DG) \perp$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AB) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ отрезок$(BC) \rightarrow F -$ точка & прямая$(EF) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ отрезок & $l(EF) = l(DG)$)

Четвертый антецедент выделен указателем "равно", остальные антецеденты - указателем "усм". Выражение для расстояния DG имеет тип "применимо". Расстояние AC уже рассматривается в задаче. На прямой AB пока не выделено основание перпендикуляра, опущенного из точки E. Прием вводит в рассмотрение такое основание F, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 7.

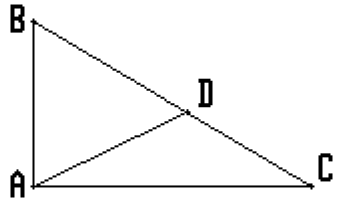
14. Ввод в рассмотрение проекций точки гипотенузы на катеты, если выделено ее расстояние до точки на катете.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ отрезок(AC) & $D \in$ прямая(AB) & прямая$(DG) \parallel$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AC) & актив$(l(DE)) \rightarrow$ $F -$ точка & $F \in$ отрезок(AB) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(BC) & актив$(l(DF))$ & актив$(l(EF))$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражение для расстояния DE имеет тип "неизв". На прямой AB не выделено основание перпендикуляра, опущенного из точки E. Прием вводит в рассмотрение такое основание F, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 6.

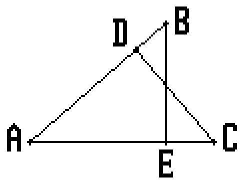
15. Угол между гипотенузой и отрезком, проведенным к ней из вершины прямого угла.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & актив$(\angle(ADC))$ & $D \in$ отрезок(BC) & актив$(l(BC)) \rightarrow \angle(ACD) + \angle(ADC) = \angle(BAD) + \pi/2)$

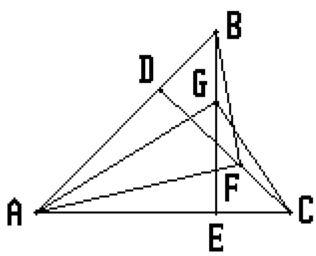
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Угол ACB известен. Если усматриваются равенство расстояний BD, CD либо перпендикулярность прямых AD, BC, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

16. Два прямоугольных треугольника, имеющих общий острый угол.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow l(CD)l(AB) = l(AC)l(BE))$

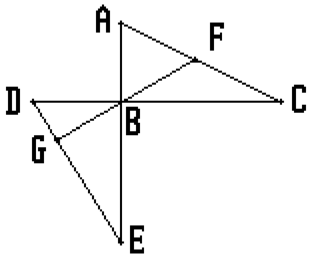
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки находится в первом из них. Расстояния CD, AB известны. Хотя бы одно из расстояний AC, BE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 9. Создана также версия данного приема, срабатывающая на уровне 13. В ней требуется, чтобы выражения для расстояний AC, AE имели тип "определимо".



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(CD) & прямая$(AF) \perp$ прямая(BF) & $G \in$ прямая(BE) & прямая$(AG) \perp$ прямая$(CG) \rightarrow l(AG) = l(AF))$

Антецеденты идентифицируются так же, как и выше. Уровень срабатывания равен 9.

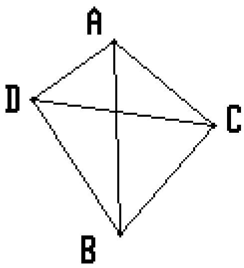
17. Два равных прямоугольных треугольника, имеющих общие стороны прямых углов, и продолжение медианы одного из них.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AE) $\perp$ прямая(CD) & $B \in$ отрезок(CD) & $B \in$ отрезок(AE) & $l(AB) = l(BD)$ & $l(BC) = l(BE)$ & $F \in$ отрезок(AC) & $l(AF) = l(CF)$ & $G \in$ прямая(BF) & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) $\rightarrow$ прямая(BG) $\perp$ прямая(DE))

Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

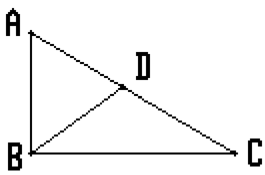
18. Расстояние между вершинами прямых углов двух треугольников, имеющих общую гипотенузу.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AD) $\perp$ прямая(BD) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(\angle(DAC))$ & $C \in$ плоскость(ABD) $\rightarrow$ $l(CD) = l(AB)\sin(\angle(DAC))$)

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражения для расстояний CD, AB и угла DAC, кроме, быть может, одного, содержат только численные параметры. Хотя бы одно из них не известно. Уровень срабатывания равен 1.

19. Точка на гипотенузе, отстоящая от вершины прямого угла на то же расстояние, что и вершина острого угла.

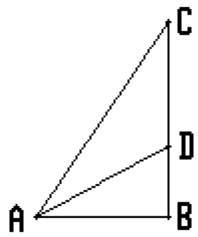


$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(BD)$ & разныеточки(A, D) & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AC))$ $\rightarrow$ $l(AD)l(AC) = 2l(AB)^2$)

Третий антецедент выделен указателем "равно", четвертый - обрабатывается пакетным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм".

Выводимое соотношение имеет единственный неизвестный числовой атом, и этот атом уже упоминается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

20. Биссектриса острого угла.



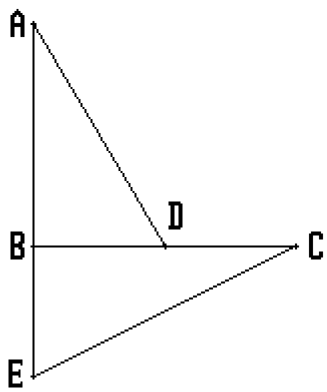
$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(BC) & $\angle(BAD) = \angle(CAD)$ & актив$(l(AD)) \to l(AC)\cos(2\angle(BAD)) = l(AD)\cos(\angle(BAD))$)

Первый, второй и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом из них. Третий антецедент выделелен указателем "идентификатор". Одно из расстояний AC, AD известно, а другое - нет. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(BC) & $\angle(BAD) = \angle(CAD)$ & актив$(l(BD))$ & актив$(\angle(BAD))$ & актив$(\angle(CAD)) \to$ $l(BD) = l(CD)\cos(\angle(BAC))$)

Все антецеденты, кроме третьего, выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом антецеденте. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Угол BAC известен. Уровень срабатывания равен 4.

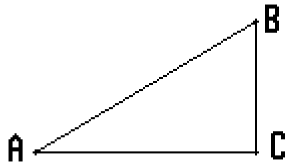
21. Продолжение катета для получения прямоугольного треугольника, равного исходному.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(AB) = l(BC)$ & точкалуча$(B, C, D) \to$ $E-$точка & $B \in$ отрезок(AE) & $l(BE) = l(BD)$ & прямая$(CE) \perp$ прямая(AD))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. В задаче рассматривается некоторый перпендикуляр к прямой AD, но пока не введена в рассмотрение точка E пересечения прямой AB с перпендикуляром к AD, проведенным через точку C. Прием вводит в рассмотрение эту точку, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания приема равен 11.

22. Использование соотношения, связывающего гипотенузу и катет.



$\forall_{ABCabc}$(прямая$(BC) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & $al(BC)l(AC) = bl(AB)^2 \to a\sin(2\angle(BAC)) = 2b$)

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые четыре антецедента - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания приема равен 3.

$\forall_{ABCac}$(прямая$(BC) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & $al(BC) + al(AC) = cl(AB) \to \sqrt{2}a\sin(\angle(BAC) + \pi/4) = c$)

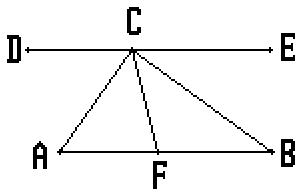
Аналогично предыдущему.

23. Усмотрение противоречия: против меньшего угла лежит больший катет.

$\forall_{ABCa}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & $\angle(BAC) = a$ & $0 < l(AC) - l(BC)$ & $0 \le 4a - \pi \to$ ложь)

Прием вывод логическую константу "ложь" и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Точка привязки выбрана в первом антецеденте, выделенном указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Для них введены сильные ограничители трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

24. Ввод в рассмотрение медианы прямоугольного треугольника для определения положения его прямого угла на внешней прямой.

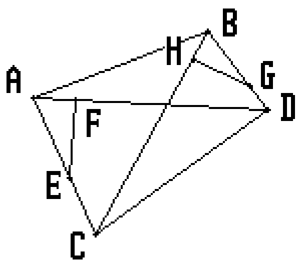


$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(DE) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(AB))$ & $D \in$ плоскость$(ABC) \to F \in$ отрезок(AB) & $l(AF) = l(BF)$ & $2l(CF) = l(AB)$ & $F -$ точка)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояние AB известно; выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". Расстояния AC, BC не известны. Не усматривается параллельность прямых DE и AB. Через точку C не проведены прямые, отличные от прямых DE, AC, BC. Середина F отрезка AB пока не введена в рассмотрение. Прием вводит в рассмотрение эту точку, обозначая ее новой переменной.

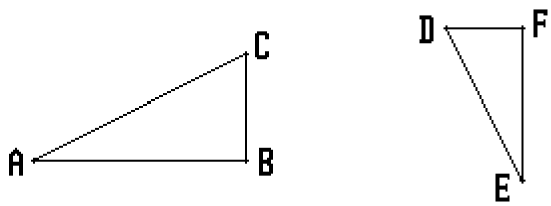
В результате становится известным расстояние от точки C до точки F, что может впоследствии позволить вычислить расстояние CD. Уровень срабатывания равен 8.

25. Усмотрение подобных прямоугольных треугольников.



$\forall_{ABCDEFGGH}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(CD) &
$F \in$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) &
$G \in$ прямая(BD) & $H \in$ прямая(BC) & прямая$(GH) \perp$ прямая(BC) &
актив$(l(EF))$ & актив$(l(GH)) \rightarrow l(EF)l(BG) = l(AE)l(GH))$

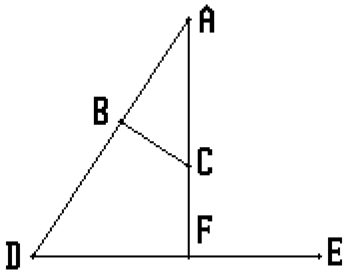
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Одно из расстояний EF, GH известно, а выражение для другого имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(DE) & прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) &
прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & прямая$(AB) \perp$ прямая$(EF) \rightarrow$
$(A, B, C) \sim (E, F, D))$

Прием применяется в задачах на доказательство. Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 10.

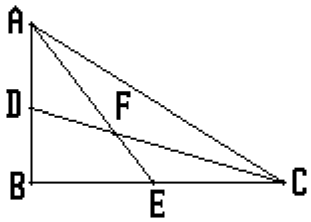
26. Ввод в рассмотрение точки пересечения перпендикулярных прямых для получения двух подобных прямоугольных треугольников.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(DE) & прямая$(BC) \perp$ прямая(AD) &
$B \in$ прямая(AD) & $al(AB) = bl(AD) \to F -$ точка & $F \in$ прямая(DE) &
$F \in$ прямая(AC) & $bl(AD)^2 = al(AC)l(AF)$)

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Последний антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Коэффциенты a, b не содержат неизвестных. Расстояние AC известно. Точка F пересечения прямых AC и DE пока в задаче не рассматривается. Прием вводит эту точку в рассмотрение, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 11.

27. Угол между отрезками, проведенными из концов гипотенузы к точкам на катетах.



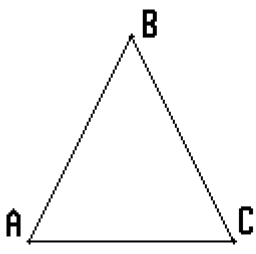
$\forall_{ABCDEFpqrs}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AB) &
$E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(CD) & $F \in$ отрезок(AE) & $pl(AD) = ql(BD)$
& $rl(BE) = sl(CE)$ & актив$(\angle(DFA))$ & актив$(\angle(BAC)) \to$
$(pr + qr + qs)\,\mathrm{tg}(\angle(BAC)) = \mathrm{tg}(\angle(DFA))(p(r + s) + (p + q)s(\mathrm{tg}(\angle(BAC)))^2)$)

Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Выражения p, q, r, s не содержат неизвестных. Один из углов BAC, DFA известен, а другой - нет. Уровень срабатывания равен 12.

Равнобедренный треугольник

1. Углы равнобедренного треугольника.

   (a) Углы при основании равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив(прямая$(AC)) \to \angle(BAC) = \angle(BCA))$
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". В задаче рассматривается некоторый угол, вершиной которого служит точка B а стороны лежат на прямых AB, BC. Выражение для этого угла имеет тип "неизв". В случае прямоугольного либо равностороннего треугольников прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

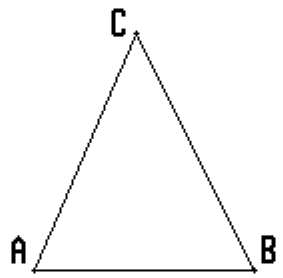
$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив(прямая$(AC)) \rightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA)$ & $\angle(BCA) < \pi/2)$

Аналогично предыдущему, но вместо угла с вершиной B должен рассматриваться некоторый угол с вершиной A, стороны которого лежат на прямых AB, AC. Никаких дополнительных требований к этому углу не предъявляется. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии данного приема. В первой из них, срабатывающей на уровне 11, каких-либо допущений о выделенных в задаче углах не делается, но требуется, чтобы рассматривался перпендикуляр к одной из боковых сторон. Во второй, срабатывающей на уровне 12, и это требование отбрасывается.

$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BCA)) \rightarrow$
$\angle(BAC) = \angle(BCA))$

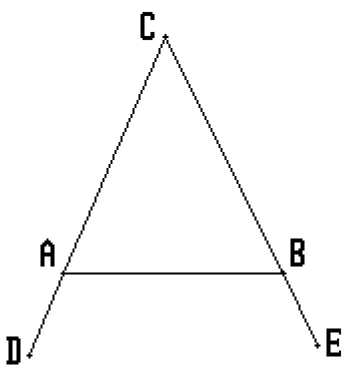
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". В случае прямоугольного треугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

(b) Усмотрение равнобедренного треугольника из равенства углов при основании.



$\forall_{ABC}(\angle(CAB) = \angle(ABC)$ & актив$(l(AC))$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(AB)) \rightarrow l(AC) = l(BC))$

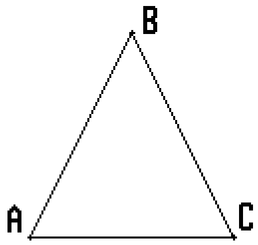
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Если углы в первом антецеденте равны $\pi/2$, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}(\angle(DAB) = \angle(ABE)$ & $A \in$ отрезок(CD) & $B \in$ отрезок(CE) & актив$(l(AC))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AC)) \rightarrow$
$l(AC) = l(BC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Если рассматриваемые углы равны $\pi/2$, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Соотношение между углами при основании и при вершине.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(ABC))$ & разныеточки$(A, C) \rightarrow$
$2\angle(BAC) + \angle(ABC) = \pi$ & $\angle(BAC) = \angle(BCA))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выполнено хотя бы одно из следующих требований:

i. Рассматривается расстояние от вершины B до некоторой точки D на прямой AC, причем угол DBC пока не введен в рассмотрение.
ii. На прямых AB и AC выделены, соответственно, точки D и E, такие, что прямая DE перпендикулярна прямой AB.
iii. В задаче рассматривается угол DAC, такой, что точка D лежит на прямой BC и не совпадает с точками B, C.

Уровень срабатывания равен 4.

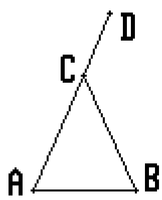
$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(ABC))$ & разныеточки(A, C) &
актив$(\angle(BAC)) \rightarrow 2\angle(BAC) + \angle(ABC) = \pi)$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Один из углов ABC, BAC известен, а выражение для другого имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(ABC)$ & разныеточки(A, C) &
$\angle(BAC) = a \rightarrow |\cos(2a)| = -\cos(2a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задаче на преобразование, редактирующей ответ планиметрической задачи на вычисление. Последний антецедент идентифицируется с посылкой. Первый антецедент выделен указателем "усм", следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

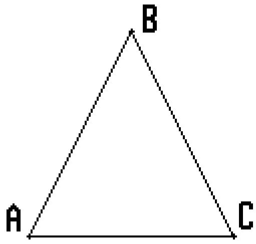
(d) Внешний угол при вершине равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABCD}$(актив$(\angle(BCD))$ & $l(AC) = l(BC)$ & $C \in$ отрезок(AD) & разныеточки$(A, B) \to 2\angle(BAC) = \angle(BCD))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и третий антецеденты - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Угол BCD известен. Прямая AB уже рассматривается в задаче. Если прямые AC, BC перпендикулярны, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 12. В ней не требуется, чтобы прямая AB уже была введена в рассмотрение.

(e) Выражение длины основания через длину боковой стороны и косинус угла при основании.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(BAC)) \to 2l(AB)\cos(\angle(BAC)) = l(AC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Угол BAC известен. Одно из расстояний AB, AC известно, выражение для другого - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 6. В ней требуется, чтобы выражения для расстояний AB, AC и угла BAC имели тип "неизв".

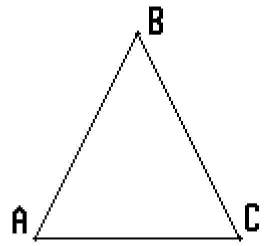
$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(BAC)) \to 2l(AB)\cos(\angle(BAC)) = l(AC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", два других - указателем "усм". Расстояние AB известно, расстояние AC и угол BAC - не известны. Уровень срабатывания равен 4. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 6. В ней требуется, чтобы расстояние AC и угол BAC были известны, а выражение для расстояния AB - имело тип "неизв". В этой версии первый и третий антецеденты выделены указателем "усм", а точка привязки выбрана во втором антецеденте.

$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(BAC))$ & $al(AB) = bl(AC) \to 2b\cos(\angle(BAC)) = a)$

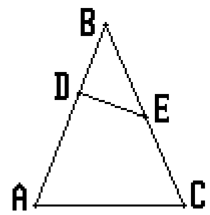
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий антецеденты - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

(f) Выражение длины основания через длину боковой стороны и синус половины угла при вершине.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(ABC)) \to 2l(AB)\sin(\angle(ABC)/2) = l(AC))$
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Расстояния AB, AC и угол ABC уже рассматриваются в задаче, причем ровно два из них известны. Уровень срабатывания равен 8. Создана также версия данного приема, в которой требуется, чтобы эти расстояния и угол были выражены через численные параметры и хотя бы одно из них было не известно. Уровень срабатывания тот же.

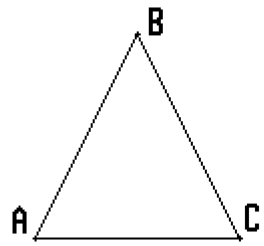
(g) Ввод в рассмотрение угла при вершине равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(BC) & актив$(l(DE))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \to$ актив$(\angle(ABC)))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прямая AC, а также хотя бы одно из расстояний BD, BE уже рассматриваются в задаче. Выражение для хотя бы одного из расстояний DE, BD, BE имеет тип "неизв". Выражение для хотя бы одного из углов BAC, BCA имеет тип "определимо". Не введена в рассмотрение прямая, параллельная прямой DE и отличная от нее. Уровень срабатывания равен 6.

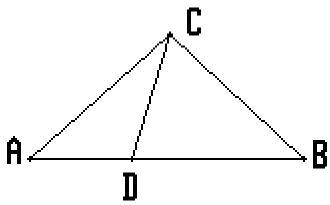
(h) Соотношение для длины основания, угла при основании и площади.



$\forall_{ABCab}(l(AB) = l(BC)$ & $S($фигура$(ABC)) = a$ & $\angle(BAC) = b \to$ $\sin b(l(AC))^2 = 4a\cos b)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Выражения a, b не содержат неизвестных. Расстояние AC не известно. Уровень срабатывания равен 3.

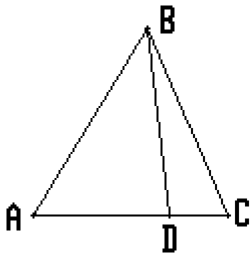
(i) Угол между основанием и прямой, делящей его в заданном отношении.



$\forall_{ABCDpqm}(D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&\ pl(BD) = ql(AD)\ \&$ $\text{актив}(\angle(CDB))\ \&\ \angle(CDB) = m \to 4(p+q)^2(1-(\sin m)^2)l(AC)^2 =$ $((p+q)^2 - 4pq(\sin m)^2)l(AB)^2)$

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и четвертый антецеденты - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, последний - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Выражения m, p, q не содержат неизвестных. Одно из расстояний AC, AB известно, а другое - нет. Уровень срабатывания равен 9.

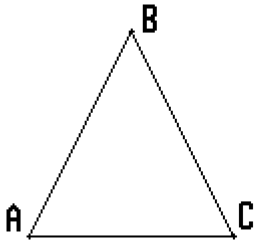
(j) Угол между боковой стороной и прямой, делящей основание в заданном отношении.



$\forall_{ABCDabc}(l(AB) = l(BC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ al(AD) = bl(CD)\ \&$ $\text{актив}(\angle(ABC))\ \&\ \angle(ABC) = c\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB),$ $\text{прямая}(BC)) \to a \sin c \cos(\angle(DBC)) = (a \cos c + b)\sin(\angle(DBC)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и четвертый антецеденты - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, шестой - проверочным оператором. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Выражение для угла DBC имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 11.

(k) Сравнение сторон с помощью оценки угла.

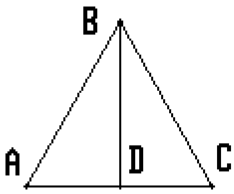


$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & актив$(\angle(BAC))$ & разныеточки(A, C) &
$0 < \angle(BAC) - \pi/3 \rightarrow 0 < l(AB) - l(AC))$

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Обращение ко второму из них сопровождается сильным ограничителем трудоемкости. Расстояние AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

2. Высоты равнобедренного треугольника.

   (a) Высота равнобедренного треугольника, опущенная на его основание, является медианой и биссектрисой.



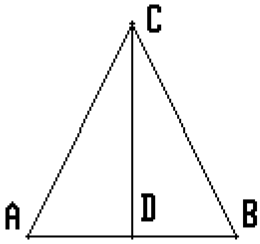
$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC)$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
$l(AD) = l(DC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", два других - указателем "усм". Для равностороннего треугольника прием блокируется. Уровни срабатывания равны 3 и 8.

$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC)$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC)
& разныеточки$(A, C) \rightarrow \angle(ABD) = \angle(DBC)$ & $2\angle(ABD) = \angle(ABC))$

Первые три антецедента обрабатываются так же, как и выше. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение для угла ABC имеет тип "квазиактив". Если треугольник равносторонний либо прямоугольный, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

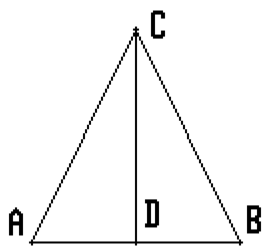
   (b) Биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника является его высотой и медианой.



$\forall_{ABCD}(\angle(ACD) = \angle(DCB)$ & $l(AC) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(AB) & разныеточки$(A, B) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $l(AD) = l(DB))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый - указателем "идентификатор". Обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Третий антецедент выделен указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Углы ACD и DCB уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Медиана, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является его высотой.



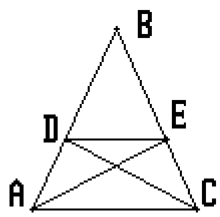
$\forall_{ABCD}(l(AC) = l(CB)$ & $l(AD) = l(DB)$ & $D \in$ прямая(AB) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки$(A, B) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая$(AB))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий антецеденты - указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}(l(AC) = l(CB)$ & $l(AD) = l(DB)$ & $D \in$ прямая(AB) & актив$(\angle(ACB))$ & $\angle(ACB) < \pi$ & разныеточки$(A, B) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая$(AB))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". В задаче рассматривается площадь треугольника, сторона которого параллельна прямой AB. Уровень срабатывания равен 10.

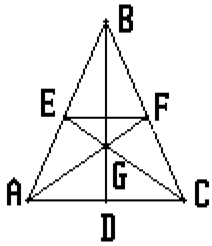
(d) Высоты равнобедренного треугольника, опущенные на боковые стороны.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(BC) & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & прямая$(BC) \perp$ прямая$(AE) \to$ $l(AD) = l(EC)$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $\neg(A = D)$ & $\neg(C = E))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Прямая DE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

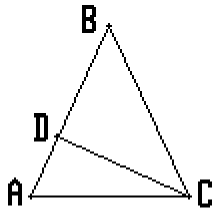
(e) Прямые, проведенные из концов основания к общей точке на высоте, опущенной на основание.



$\forall_{ABCDEFG}(l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(CG) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AG) & $F \in$ прямая(BC) & разныеточки(B, G) & разныеточки$(A, C) \rightarrow l(BE) = l(BF)$ & прямая$(EF) \parallel$ прямая$(AC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие семь - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Либо прямая EF, либо площадь фигуры $EBFG$ уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

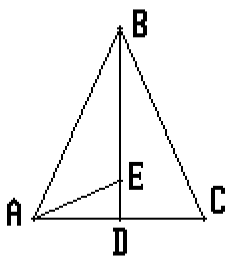
(f) Высота остроугольного равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону.



$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(AB) & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $0 < \pi/2 - \angle(ABC) \rightarrow$ $D \in$ интервал$(AB))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий антецеденты - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямая AC и угол ABC уже рассматриваются в задаче. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 9.

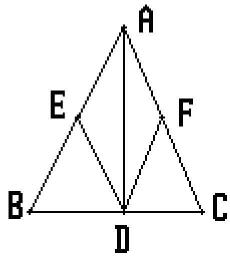
(g) Подобие прямоугольных треугольников, возникающих при рассмотрении точки пересечения высот.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $D \in$ прямая$(AC) \rightarrow$ $l(AD)^2 = l(DE)l(BD))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние AD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

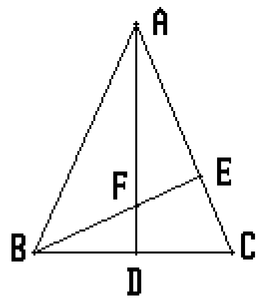
(h) Отрезки равной длины, проведенные из середины основания к боковым сторонам.



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(AC)$ & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) &
$D \in$ отрезок(BC) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(AC) &
$l(DE) = l(DF)$ & актив$(\angle(EDF)) \to 2\angle(EDA) = \angle(EDF))$

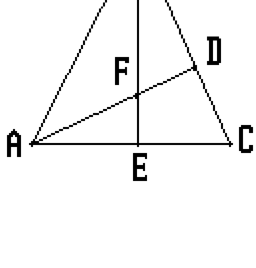
Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Угол EDF известен. Уровень срабатывания равен 5.

(i) Отрезки, на которые высоты делятся в точке пересечения.



$\forall_{ABCDEF}(l(AC) = l(AB)$ & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) &
прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & $F \in$ отрезок(AD) & $D \in$ прямая(BC) &
$E \in$ прямая(AC) & $F \in$ отрезок(BE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(B, C) & актив$(\angle(ACB))$ & актив$(l(AF))$
& актив$(l(FD))$ & $al(AF) = bl(DF) \to b = a((\mathrm{tg}\,\angle(ACB))^2 - 1))$

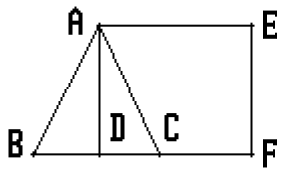
Первый антецедент выделен указателем "равно". Восьмой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, последний антецедент - пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(BE) & $D \in$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныеточки$(A, B) \rightarrow l(AF)l(BD) = l(FD)l(AB)$)

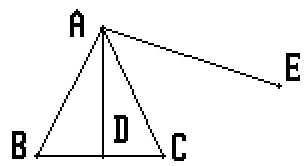
Второй антецедент выделен указателем "равно", два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В случае равностороннего треугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.

(j) Проведение высоты в равнобедренном треугольнике.



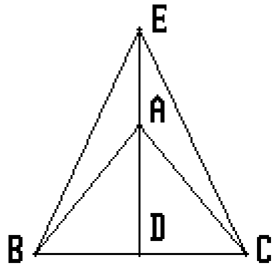
$\forall_{ABCDEF}$($l(AB) = l(AC)$ & актив(прямая(BC)) & прямая$(AE) \parallel$ прямая(BC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(BC) & разныеточки$(B, C) \rightarrow D -$ точка & $D \in$ отрезок(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(DC)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние BC уже рассматривается в задаче. Прямые AB, AC не перпендикулярны. Через точку A пока не проведен перпендикуляр к прямой BC. Прием вводит основание D такого перпендикуляра, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 11.



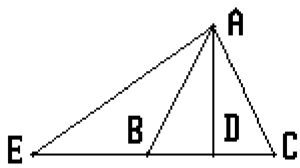
$\forall_{ABCDE}$($l(AB) = l(AC)$ & актив(прямая(BC)) & актив($l(AE)$) & разныеточки$(B, C) \rightarrow D -$ точка & $D \in$ отрезок(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(DC)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение "расстдопрямой(E BC)" имеет тип "определимо". Каждое из расстояний AB, BC, AE либо известно, либо имеет тип "неизв". Хотя бы одно из них не известно. Не усматривается принадлежность точки E прямой BC. Через точку A не проведен перпендикуляр к прямой BC. Прием вводит основание D такого перпендикуляра, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 11.



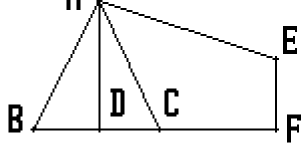
$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(AC)$ & актив(прямая(BC)) & $l(BE) = l(CE)$ &
$E \in$ плоскость(ABC) & разныеточки$(B, C) \to D -$ точка &
$D \in$ отрезок(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AD) &
$l(BD) = l(DC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AB, BE, BC известны. Не усматриваются ни перпендикулярность прямых BE и AB, ни принадлежность точки E прямой BC. Далее - так же, как в предыдущем приеме.



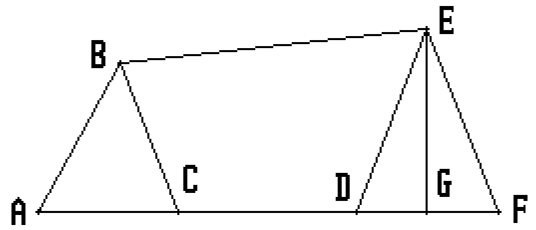
$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(AC)$ & актив(прямая(BC)) & $E \in$ прямая(BC) &
актив$(\angle(AEC))$ & разныеточки$(B, C) \to D -$ точка & $D \in$ отрезок(BC) &
прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(DC))$

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Выражение для угла AEC имеет тип "определимо". Либо выражение для расстояния AB имеет тип "определимо", либо выражение для расстояния AE имеет тип "определимо" или "применимо". Выполняются те же действия, что в предыдущих приемах. Уровень срабатывания прежний.



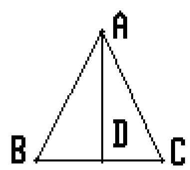
$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(AC)$ & актив(прямая(BC)) & актив$(l(AE))$ &
прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(BC) & разныеточки$(B, C) \to$
$D -$ точка & $D \in$ отрезок(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) &
$l(BD) = l(DC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение для расстояния EF имеет тип "внешнеизв". Каждое из расстояний AB, BC, AE либо известно, либо имеет тип "неизв", причем хотя бы одно - не известно. Далее - как в предыдущих приемах.



$\forall_{ABCDEFG}(l(AB) = l(BC)$ & $l(DE) = l(EF)$ & $D \in$ прямая(AC) &
$F \in$ прямая(AC) & актив$(l(BE))$ & актив$(l(DF))$ & актив$(l(AC))$ &
разныеточки$(D, F) \rightarrow G -$ точка & $G \in$ отрезок(DF) & прямая$(EG) \perp$
прямая(AC) & $l(DG) = l(GF))$

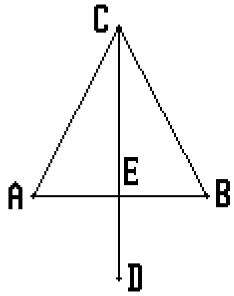
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие шесть - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния BE, AB, DE известны. Через точку E не проведен перпендикуляр к прямой AC. Прием вводит основание G этого перпендикуляра, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания приема равен 11.



$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(AC)$ & актив(прямая$(BC))$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
$D -$ точка & $D \in$ отрезок(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) &
$l(BD) = l(DC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние AB либо известно, либо имеет тип "внешнеизв". В задаче рассматривается расстояние от точки A до некоторой точки, не лежащей на прямых AB, AC, BC, но лежащей в плоскости ABC. Треугольник ABC не прямоугольный. Не выделена середина отрезка BC, и через точку A не проведен перпендикуляр к прямой BC. Прием вводит основание D такого перпендикуляра, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания приема равен 15.

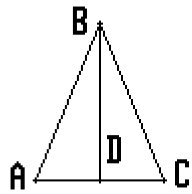
(k) Ввод в рассмотрение точки пересечения биссектрисы угла при вершине с основанием.



$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(BC)$ & $\angle(ACD) = \angle(BCD)$ & разныеточки(A, B) & актив$(\angle(ACD))$ & актив$(\angle(BCD)) \to E \in$ отрезок(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $E -$ точка & прямая$(CD) \perp$ прямая$(AB))$

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, первый и четвертый - выделены указателем "усм". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Обе его части обрабатываются нормализатором "нормугол". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Точка E пересечения прямых AB и CD не введена в рассмотрение. Прием вводит эту точку, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 10.

(l) Контроль реализуемости длин отрезков при разборе случаев: медиана равнобедренного треугольника должна быть его высотой.

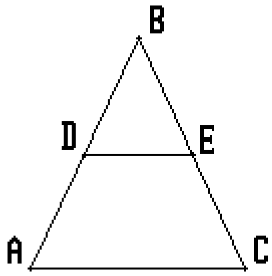


$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC)$ & $l(AD) = l(CD)$ & $\neg(l(AC) = 0)$ & $\neg(l(AB)^2 - l(AD)^2 - l(BD)^2 = 0)$ & $D \in$ прямая$(AC) \to$ ложь$)$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент выделен указателем "равно", третий и четвертый - обрабатываются проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, AD, BD константные. Идентифицирующие операторы не усматривают перпендикулярность прямых AC и BD. Уровень срабатывания равен 2.

3. Прямая, параллельная основанию.

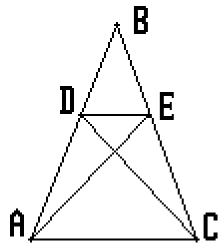
(a) Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника, отсекает на боковых сторонах равные отрезки.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)$ & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DE) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(BC) \to l(BD) = l(BE))$

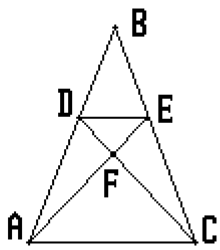
Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Прямая DE не совпадает с прямой AC. В случае прямоугольного треугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Прямая, проведенные под равными углами к боковым сторонам равнобедренного треугольника из концов основания.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $\angle(EAC) = \angle(DCA)$ & разныеточки$(A, C) \to l(AD) = l(CE)$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $l(BD) = l(BE))$

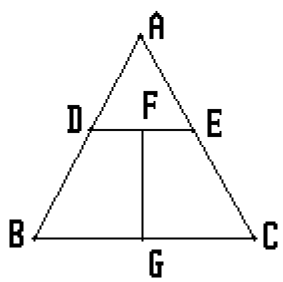
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие два - указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $\angle(EAC) = \angle(DCA)$ & $F \in$ прямая(DC) & $F \in$ прямая$(AE) \to l(DF) = l(EF))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", четвертый - указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

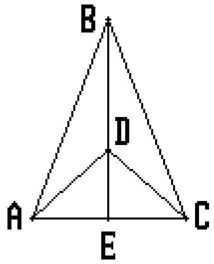
(c) Прямая, проходящая через середину основания и середину отрезка, параллельного основанию.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(AC)$ & $G \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(DE) & $l(DF) = l(EF)$ & $l(BG) = l(CG)$ & $l(AD) = l(AE)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки$(B, D) \to$ прямая$(FG) \perp$ прямая$(BC))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой. Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

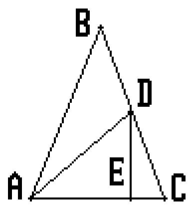
4. Точка, равноудаленная от концов основания, лежит на медиане либо на продолжении медианы.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)\ \&\ l(AD) = l(CD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&$
$l(AE) = l(CE)\ \&\ \text{разныеточки}(A, C)\ \&\ \text{разныеточки}(B, D)\ \&$
$D \in \text{плоскость}(ABC) \rightarrow E \in \text{прямая}(BD))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние BD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

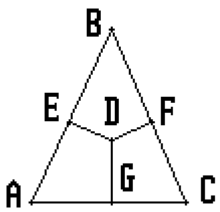
5. Проведение перпендикуляра к основанию треугольника, проходящего через точку на его боковой стороне.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(BC) \rightarrow E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)$
$\&\ \text{прямая}(DE) \perp \text{прямая}(AC)\ \&\ 2l(CE)l(BC) = l(AC)l(CD)\ \&\ \text{актив}(l(DE)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Расстояния BD, CD, а также некоторый угол DAF уже рассматриваются в задаче. Основание E перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AC, пока не рассматривается. Прием вводит это основание, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 12.

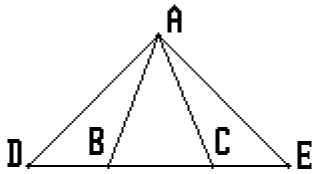
6. Из точки, равноудаленной от боковых сторон, проведен перпендикуляр к основанию.



$\forall_{ABCDEFG}(l(AB) = l(BC)$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) &
прямая$(DF) \perp$ прямая(BC) & $l(DE) = l(DF)$ & прямая$(DG) \perp$ прямая(AC)
& разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $E \in$ прямая(AB) &
$F \in$ прямая(BC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ отрезок(AB) &
$F \in$ отрезок(BC) & $G \in$ плоскость$(ABC) \to B \in$ прямая$(DG))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

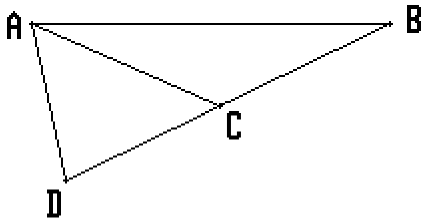
7. Равенство длин отрезков, проведенных из вершины равнобедренного треугольника к точкам на продолжении основания, равноудаленным от концов основания.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(AC)$ & $l(BD) = l(CE)$ & разныеточки(B, C) &
$B \in$ отрезок(CD) & $C \in$ отрезок$(BE) \to l(AD) = l(AE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", третий - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AD и AE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

8. Два смежных равнобедренных треугольника.

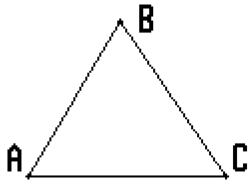


$\forall_{ABCD}(l(AD) = l(CD)$ & $l(AC) = l(BC)$ & $B \in$ прямая(CD) & актив$(l(AB))$ &
разныеточки$(A, D) \to l(AC)^3 = |l(AB)^2 l(AD) - 2l(AD)l(AC)^2|)$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AC, AB, AD выражены через численные параметры. Уровень срабатывания равен 11.

9. Равносторонний треугольник.

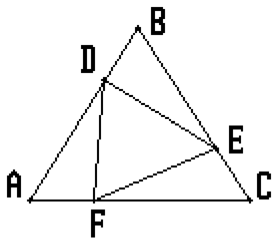
   (a) Углы равностороннего треугольника.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & $l(AB) = l(AC) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/3$ &
$\angle(BAC) = \pi/3$ & $\angle(ACB) = \pi/3)$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

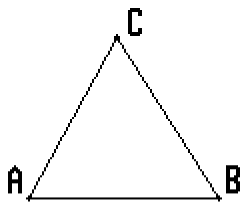
(b) Вписанные друг в друга равносторонние треугольники.



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(BC)$ & $l(AB) = l(AC)$ & $D \in$ прямая(AB) &
$E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AC) & $l(DE) = l(EF)$ & $l(DE) = l(DF) \rightarrow$
$l(BD) = l(EC)$ & $l(BD) = l(AF)$ & $l(AD) = l(BE)$ & $l(AD) = l(FC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(c) Усмотрение равностороннего треугольника в равнобедренном.



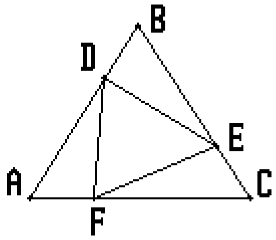
$\forall_{ABC}(l(AC) = l(BC)$ & $\angle(CAB) = \pi/3 \rightarrow l(AB) = l(BC))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABC}(l(AC) = l(BC)$ & $\angle(ACB) = \pi/3 \rightarrow l(AB) = l(BC))$

Антецеденты идентифицируются так же. Прямая AB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, в которой не требуется, чтобы прямая AB уже рассматривалась, но зато требуется, чтобы выражение для расстояния BC имело тип "неизв". Уровень срабатывания этой версии равен 9.

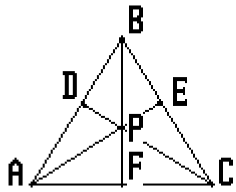
(d) Точки, выделенные на сторонах равностороннего треугольника симметричным образом.



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(BC)$ & $l(AB) = l(AC)$ & $D \in$ отрезок(AB) &
$E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AC) & $l(BD) = l(EC)$ &
$l(EC) = l(AF) \rightarrow l(DE) = l(EF)$ & $l(EF) = l(DF))$

Первый антецедент выделен указателем "равно"; второй и два последних - указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямые DE, EF и DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

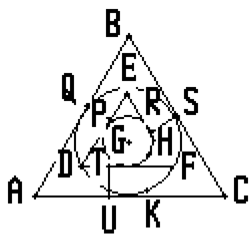
(e) Проведение отрезков через центр равностороннего треугольника.



$\forall_{ABCDEFP}$(центр$(P,$ фигура$(ABC))$ & $l(AB) = l(AC)$ & $l(AB) = l(BC) \rightarrow$
$D -$ точка & $D \in$ отрезок(AB) & $l(AD) = l(DB)$ & $E -$ точка &
$E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(EC)$ & $F -$ точка & $F \in$ отрезок(AC) &
$l(AF) = l(CF)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & прямая$(BC) \perp$
прямая(AE) & прямая$(BF) \perp$ прямая(AC) & $\sqrt{3}l(BP) = l(AB)$ &
$\sqrt{3}l(AP) = l(AB)$ & $\sqrt{3}l(CP) = l(AB)$ & $2\sqrt{3}l(PF) = l(AB)$ &
$2\sqrt{3}l(PE) = l(AB)$ & $2\sqrt{3}l(PD) = l(AB)$ & $P \in$ отрезок(BF) &
$P \in$ отрезок(AE) & $P \in$ отрезок$(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Прием вводит в рассмотрение точки D, E, F, обозначая их новыми переменными. Уровень срабатывания приема равен 2.

(f) Два равносторонних треугольника, соответственные стороны которых параллельны и равноудалены.



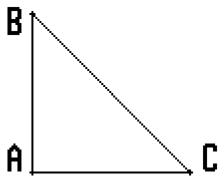
$\forall_{ABCDEFGHPQRSTUK}(\angle(ABC) = \pi/3$ & $\angle(ACB) = \pi/3$ & $\angle(DEF) = \pi/3$
& $\angle(EDF) = \pi/3$ & $P \in$ прямая(DE) & $Q \in$ прямая(AB) &

прямая$(PQ) \perp$ прямая(AB) & $R \in$ прямая(EF) & $S \in$ прямая(BC) & прямая$(RS) \perp$ прямая(BC) & $T \in$ прямая(DF) & $U \in$ прямая(AC) & прямая$(TU) \perp$ прямая(AC) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) & однасторона$(E, C,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(D, B,$ прямая$(AC))$ & однасторона$(E, A,$ прямая$(BC))$ & $l(PQ) = l(RS)$ & $l(PQ) = l(TU) \rightarrow$ G – точка & H – точка & K – точка & окружность(GH) вписана в фигура(DEF) & окружность(GK) вписана в фигура(ABC) & $l(PQ) = l(GK) - l(GH))$

Антецеденты с пятого по шестнадцатый выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в седьмом антецеденте. Первые четыре антецедента, а также два последних выделены указателем "идентификатор". Обработка антецедентов "однасторона" выполняется проверочными операторами. В задаче не рассматривается окружность, вписанная в треугольник DEF. Прием вводит в рассмотрение центр G такой окружности, а также саму окружность GH. Одновременно вводится окружность GK, вписанная в треугольник ABC. Здесь H, K - новые точки. Уровень срабатывания равен 7.

10. Равнобедренный прямоугольный треугольник.

   (a) Острые углы.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(AC)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/4$ & $\angle(ACB) = \pi/4)$

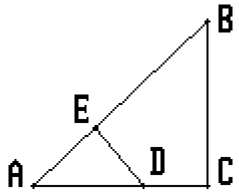
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Либо хотя бы один из углов ABC, ACB уже рассматривается в задаче, либо имеется посылка "треугольник(ABC)". Отсутствует посылка "квадрат$(\ldots)$", в которой упоминались бы точки A, B, C. Прямая BC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Длина гипотенузы.

$\forall_{ABC}(l(AB) = l(AC)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow l(BC) = \sqrt{2}l(AB))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Расстояние BC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Два равнобедренных прямоугольных треугольника, имеющих общий острый угол.

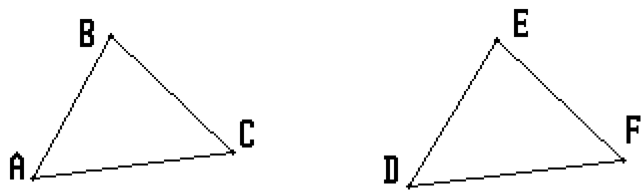


$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AE) \perp$ прямая(ED) & $l(AE) = l(ED)$ & разныеточки(A, E) & $C \in$ прямая(AD) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(BC))$ & $B \in$ прямая$(AE) \to l(BC) = l(AC)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, третий - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния BC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

Признаки равенства треугольников

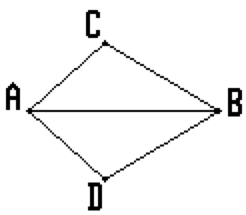
1. Равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $l(AB) = l(DE)$ & $l(AC) = l(DF) \to l(BC) = l(EF))$

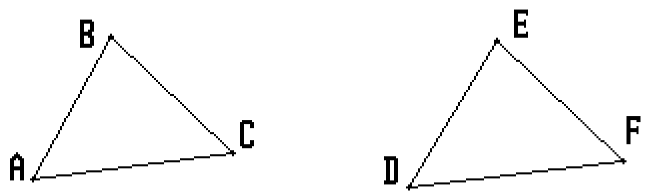
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Расстояния BC и EF уже встречаются в задаче, но идентифицирующие операторы не усматривают их равенство. Уровень срабатывания равен 4.

2. Равенство треугольников по стороне и двум прилежащим углам.



$\forall_{ABCD}(\angle(CAB) = \angle(BAD)$ & $\angle(CBA) = \angle(DBA) \to l(AC) = l(AD)$ & $l(BC) = l(BD))$

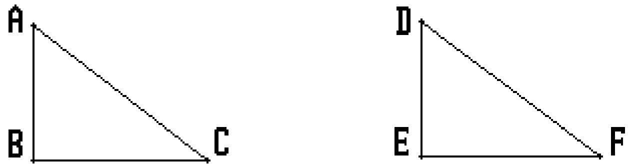
Антецеденты выделены указателем "равно". Введен сильный ограничитель трудоемкости. В случае задачи на исследование уровень срабатывания равен 10, в случае задачи на доказательство - 5.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & $l(AC) = l(DF) \rightarrow l(AB) = l(DE)$ & $l(BC) = l(EF)$)

Первые два антецедента выделены указателем "равно", последние два - указателем "усм". Расстояния AB и DE уже рассматриваются в задаче. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 11.

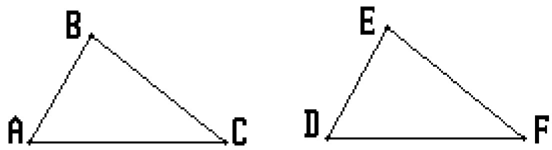
3. Равенство прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе.



$\forall_{ABCDEF}(l(AC) = l(DF)$ & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(EF)) & $l(AB) = l(DE)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DE) \perp$ прямая$(EF) \rightarrow l(BC) = l(EF)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

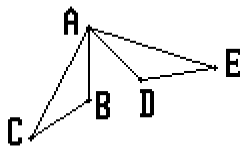
4. Ввод в рассмотрение углов, опирающихся на отрезки, при доказательстве равенства длин этих отрезков.



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(DE)$ & $l(AC) = l(DF) \rightarrow$ актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(EDF))$)

Прием применяется в задаче на доказательство. Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения его при усмотрении в условии равенства $l(BC) - l(EF) = 0$. Антецеденты выделены указателем "равно". Соответственные стороны треугольников не совпадают. В случае прямоугольных треугольников прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема, в которой первый антецедент выделен указателем "равно", а второй - указателем "усм". Она не имеет указателя "контрольвывода" и инициируется усмотрением равенства расстояний в посылках. Требуется, чтобы заблаговременно был введен комментарий к посылкам (смугол ...), активирующий рассмотрение углов. Уровень срабатывания здесь равен 6.

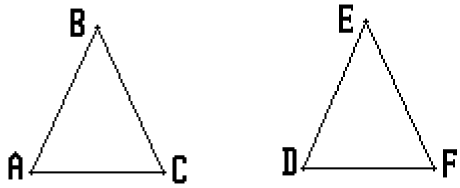
5. Равенство треугольников по трем сторонам.



$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(AD) \ \& \ l(AC) = l(AE) \ \& \ l(BC) = l(DE) \to$
$\angle(CAB) = \angle(DAE))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Выражение для угла CAB меет тип "возмсвяз". Напомним, что пакетный оператор "возмсвяз" оценивает перспективность попыток установления связи числового атома с уже рассматривающимися в задаче числовыми атомами. Уровень срабатывания равен 10.

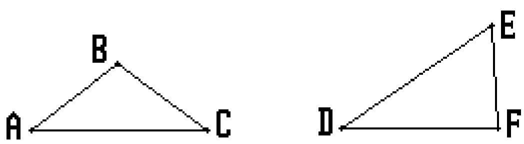
6. Равенство равнобедренных треугольников по основанию и углу при вершине.



$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(BC) \ \& \ l(DE) = l(EF) \ \& \ l(AC) = l(DF) \ \&$
$\angle(ABC) = \angle(DEF) \ \& \ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(BC)) \to$
$l(BC) = l(EF))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Если треугольник ABC прямоугольный либо равносторонний, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.

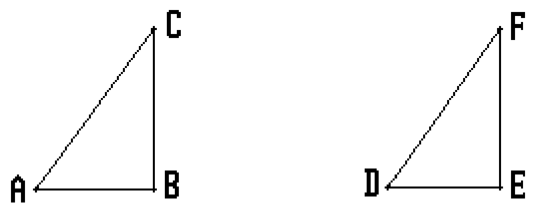
7. Две стороны и противолежащий одной из сторон угол в первом треугольнике равны двум сторонам и соответствующему углу во втором.



$\forall_{ABCDEFk}(\angle(BAC) = \angle(EDF) \ \& \ l(AC) = l(DF) \ \& \ l(BC) = l(EF) \ \&$
$\angle(ABC) + \angle(DEF) - \pi = 0 \ \& \ k = \angle(BAC) \to l(AB) + l(DE) = 2l(AC)\cos k)$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий - указателем "усм". Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Расстояние AC и угол BAC известны. Выражения для расстояний AB и DE имеют тип "существатом". Уровень срабатывания равен 12.

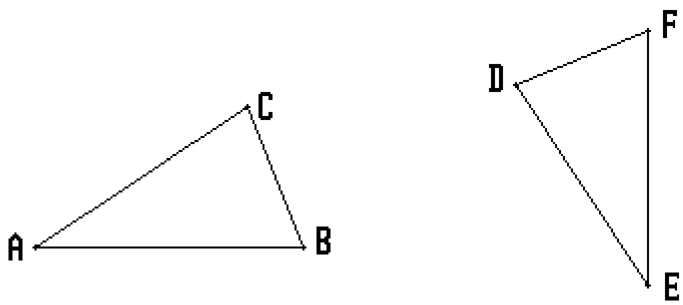
8. Два прямоугольных треугольника с равными катетами.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(AB) = l(DE)$ & $l(BC) = l(EF)$ & актив$(\angle(ACB))$ & актив$(\angle(DEF)) \to \angle(ACB) = \angle(DFE))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", остальные антецеденты - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

9. Треугольники со взаимно перпендикулярными сторонами.

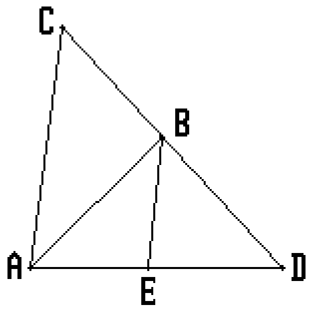


$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(DE) & прямая$(AB) \perp$ прямая(EF) & $l(AC) = l(DE)$ & $l(AB) = l(EF)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(BAC)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(DEF) \to$ $l(BC) = l(DF)$ & прямая$(BC) \perp$ прямая$(DF))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямые BC и DF уже рассматриваются в задаче. В случае прямоугольных треугольников прием блокируется. Уровень срабатывания прием равен 10.

Синтезатор "пропорцтреуг"

Синтезатор перечисляет треугольники, длины сторон которых пропорциональны заданным выражениям. Он используется в одном из приемов, связанном с площадями. Предполагается, что синтезатор может вводить в качестве вершины треугольника новую точку. Вспомогательное утверждение "пропорцтреуг(A B k C)"означает, что A - тройка чисел (a, b, c), B - тройка точек (P, Q, R), k - число, причем расстояния PQ, QR, PR равны ka, kb, kc, а C - конъюнкция дополнительных утверждений, характеризующих новую точку. Синтезатор имеет пока единственный прием:



$\forall_{abcmnxABCD}$(Пропорцрасст(a, x, m, n) & $x = l(AB)$ & $\neg(n = 0)$ & $B \in$ отрезок(CD) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AD))$ & $pl(BC) = ql(BD)$ & $npl(AC) - bm(p+q) = 0$ & $qnl(AD) - cm(p+q) = 0 \rightarrow$ пропорцтреуг$((a, b, c), (A, B, E), m/n, E -$ точка & $E \in$ отрезок(AD) & прямая$(BE) \parallel$ прямая(AC) & $l(BE) = bm/n$ & $l(AE) = cm/n))$

Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "Пропорцрасст", перечисляющим в качестве x выражения $l(AB)$, пропорциональные a. Переменным m, n присваиваются коэффициенты при a и x соответственно. Второй, восьмой и девятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Четвертый, пятый и шестой антецеденты выделены указателем "усм". Наконец, седьмой антецедент обрабатывается синтезатором "пропорциональны". Прием вводит в рассмотрение новую точку E.

3.26 Приемы, связанные с параллелограммами

Утверждение "параллелограмм(A B C D)" означает, что точки A, B, C, D образуют вершины параллелограмма, если их проходить в указанном порядке. Чтобы при идентификации учитывать возможность циклических перестановок операндов и изменения их порядка на обратный, в приемах используются указатели "циклупорядочение" и "подобны". Если достаточно идентифицировать вершины в произвольном порядке, то эти указатели отсутствуют. Как и в случае треугольников, для задания множества точек параллелограмма используется выражение "фигура(набор(A B C D))".

Циклическая перестановка вершин для стандартизации обозначения

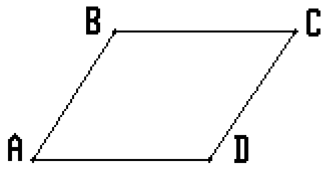
Теорема приема имеет вид "циклупорядочение(параллелограмм)". Прием выполняет циклические перестановки вершин параллелограмма, пока не получит лексикографически наименьший набор операндов. Если утверждение "параллелограмм(...)" находится в посылках, то уровень срабатывания равен 0, иначе - равен 3.

Параллельность сторон

$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD) \rightarrow$ прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

Длины противоположных сторон



$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD) \to l(AB) = l(CD))$

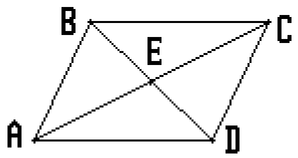
Антецедент идентифицируется с посылкой. Хотя бы одно из расстояний AB, CD уже рассматривается в задаче. Указатель "воройоперанд(фикс(1))" разрешает попытку идентификации с однократной циклической перестановкой вершин. Уровень срабатывания равен 3. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 10. В ней требуется, чтобы хотя бы одно из расстояний AB, CD имело тип "возмактив".

Углы параллелограмма

$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD) \to \angle(BAD) = \angle(BCD)$ & $\angle(ABC) = \angle(ADC)$ & $\angle(BAD) + \angle(ABC) = \pi)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Угол BAD уже рассматривается в задаче. Указатель "циклупорядочение(фикс(1))" разрешает произвольные циклические перестановки операндов. Уровень срабатывания равен 2.

Точка пересечения диагоналей



$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая$(AC) \to$
$l(BE) = l(ED)$ & $l(AE) = l(EC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) &
$E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(AC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(AD)) \to$
$l(BE) = l(ED)$

Первый антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния BE, DE уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы одно из них не известно. Уровень срабатывания равен 4.

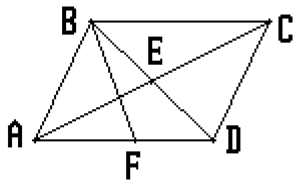
Ввод в рассмотрение точки пересечения диагоналей

$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BD)) \to E -$ точка &
$E \in$ отрезок(BD) & $E \in$ отрезок$(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Прием вводит в рассмотрение точку пересечения диагоналей E, которая до этого не рассматривалась. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcABCDE}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & коорд$(A,K) = a$ & коорд$(B,K) = b$ & коорд$(C,K) = c \rightarrow E -$ точка & $E \in$ отрезок(BD) & $E \in$ отрезок(AC) & $l(BE) = l(DE)$ & $l(AE) = l(CE)$)

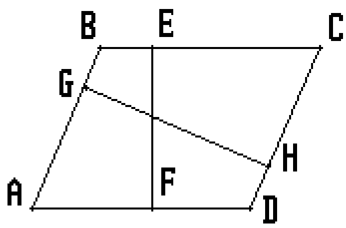
Три последних антецедента идентифицируются с посылками, два первых - выделены указателем "усм". Выражения a, b, c имеют заголовок "набор", причем a и c известны. Уравнение прямой AB в задаче не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение точку E, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & актив(прямая(AC)) & $F \in$ прямая(AD) & актив(прямая(BF)) $\rightarrow E -$ точка & $E \in$ отрезок(BD) & $E \in$ отрезок(AC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Точка F не совпадает с точками A, D. Прием вводит новую точку E. Уровень срабатывания равен 7.

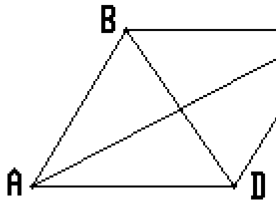
Соотношение между длинами сторон и длинами высот параллелограмма



$\forall_{ABCDEFGH}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(CD) & прямая$(BC) \perp$ прямая(EF) & прямая$(AB) \perp$ прямая(GH) & актив$(l(GH))$ & актив$(l(EF)) \rightarrow$ $l(GH)l(AB) = l(EF)l(AD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AB, AD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма



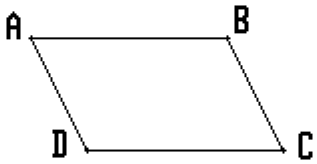
$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BD))$ $\rightarrow$
$l(AC)^2 + l(BD)^2 = 2l(AB)^2 + 2l(BC)^2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Расстояния AB, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) & актив$(l(AC))$
& актив$(l(BD))$ & актив$(l(AB))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\rightarrow$
$l(AC)^2 + l(BD)^2 = 2l(AB)^2 + 2l(BC)^2$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Каждое из расстояний AC, BD, AB, BC либо известно, либо имеет тип "Неизв", причем хотя бы одно - не известно. Уровень срабатывания равен 7.

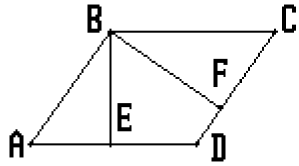
Усмотрение параллелограмма по паре равных отрезков, лежащих на параллельных прямых



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $l(AB) = l(CD)$ & актив(прямая(AD)) &
актив(прямая(BC)) & одна сторона$(B, C$, прямая$(AD))$ &
разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\rightarrow$ прямая(AD) $\parallel$ прямая(BC) &
$l(AD) = l(BC)$)

Второй антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Если уже имеется посылка, указывающая, что фигура $ABCD$ представляет собой квадрат, прямоугольник, параллелограмм либо ромб, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.

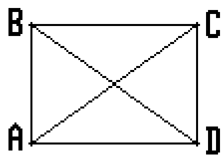
Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен углу при смежной вершине



$\forall_{ABCDEF}$(параллелограмм($ABCD$) & $E \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(CD) & прямая(BE) $\perp$ прямая(AD) & прямая(BF) $\perp$ прямая(CD) & актив($\angle(EBF)$) $\rightarrow$ $\angle(EBF) = \angle(BAD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки операндов. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

Усмотрение прямоугольника в параллелограмме, длины диагоналей которого равны



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) & $l(BD) = l(AC)$ & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) $\rightarrow$ прямая(AB) $\perp$ прямая(BC))

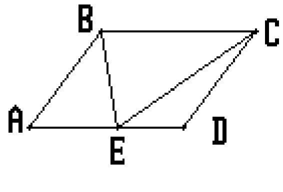
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие два - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

Доказательство того, что четырехугольник есть параллелограмм

$\forall_{ABCD}$(параллелограмм($ABCD$) $\leftrightarrow$ прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 4.

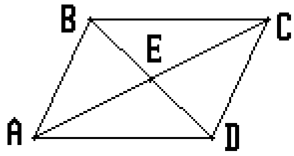
Ввод вспомогательной неизвестной - угла при вершине параллелограмма



$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AD) & актив($l(AE)$) & актив($l(DE)$) & актив($l(AB)$) $\rightarrow \angle(BAD) = a$ & $\angle(ADC) = \pi - a$ & $a -$ число)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки операндов. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB, AE и DE известны. Прием вводит новую численную переменную a, которая регистрируется в качестве вспомогательной неизвестной. Уровень срабатывания равен 8.

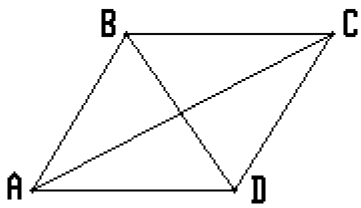
Площадь параллелограмма и площади треугольников, возникающих при пересечении его диагоналей



$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & актив(S(фигура$(ABCD)$)) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) & окружность(MN)вписана в фигура$(BEC) \rightarrow$ $4S$(фигура$(BEC)) = S$(фигура$(ABCD)$)))

Первый, второй и последний антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускаются циклические перестановки вершин. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

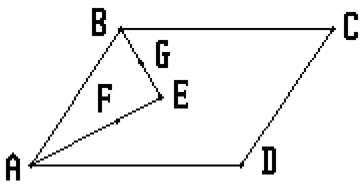
Против тупого угла параллелограмма лежит большая диагональ



$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $\pi/2 < \angle(ABC) \rightarrow l(BD) < l(AC)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускается циклическая перестановка вершин. Хотя бы одно из расстояний BD, AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

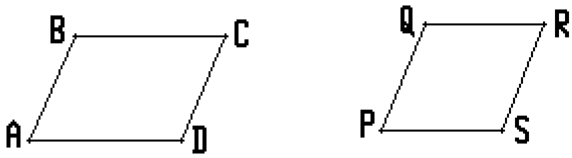
Точка пересечения биссектрис



$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $\angle(BAF) = \angle(DAF)$ & $\angle(ABG) = \angle(CBG)$ & $E \in$ прямая(BG) & $E \in$ прямая$(AF) \rightarrow \angle(BEA) = \pi/2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Второй и третий антецеденты выделены указателем "равно". Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

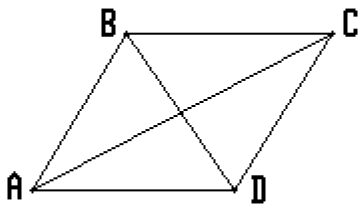
Отношение площадей параллелограммов с соответственно параллельными сторонами



$\forall_{ABCDPQRS}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(PQ) &
прямая$(PQ) \parallel$ прямая(RS) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) &
прямая$(AD) \parallel$ прямая(QR) & прямая$(QR) \parallel$ прямая(PS) &
актив(S(фигура$(ABCD)$)) & актив(S(фигура$(PQRS)$)) $\to$
S(фигура$(ABCD))l(PQ)l(QR) = S$(фигура$(PQRS))l(AB)l(BC)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", два последних - идентифицируются с посылками. При этом разрешаются циклические перестановки и изменение порядка вершин на обратный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Рассматриваемые площади выражены через численные параметры. Уровень срабатывания равен 4.

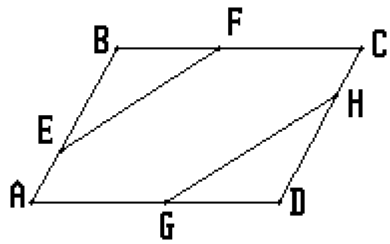
Ввод в рассмотрение длин сторон параллелограмма, если уже рассматриваются длины диагоналей



$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BD)) \to$ актив$(l(AB))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем разрешаются циклическая перестановка вершин и изменение их порядка на обратный. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

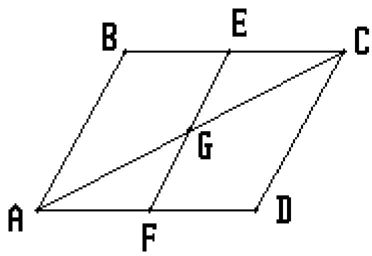
Параллельные и равные отрезки между смежными сторонами



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) &
$E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(AD) & $H \in$ отрезок(CD) &
прямая(EF) $\|$ прямая(GH) & $l(EF) = l(GH)$ & разныепрямые(прямая(AB),
прямая(BC)) $\to l(AE) = l(CH)$ & $l(BE) = l(DH)$ & $l(AG) = l(CF)$ &
$l(DG) = l(BF)$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой - выделен указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точки E, F, G, H не совпадают с вершинами параллелограмма. Уровень срабатывания равен 7.

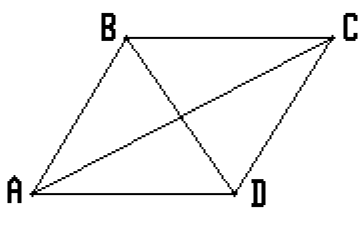
Ввод точки пересечения диагонали со средней линией



$\forall_{ABCDEFG}$(параллелограмм($ABCD$) & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(CE)$ &
$F \in$ отрезок(AD) & $l(AF) = l(DF)$ & актив(прямая(EF)) & актив(прямая(AC)) $\to$
$G-$точка & $G \in$ отрезок(AC) & $G \in$ отрезок(EF) & $l(AG) = l(CG)$ & $l(EG) = l(FG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Точка G пересечения прямых AC и EF в задаче пока не рассматривается. Прием вводит ее в рассмотрение, обозначая новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.

Усмотрение острого угла параллелограмма из сравнения длин диагоналей



$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $0 < l(AC) - l(BD) \rightarrow \angle(BAD) < \pi/2$)

Прием выводит следствие в посылках задачи на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AC и BD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

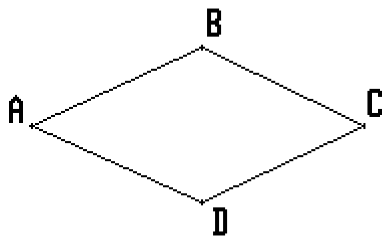
3.27 Приемы, связанные с ромбами

Утверждение "ромб($A\ B\ C\ D$)" означает, что точки A, B, C, D образуют вершины ромба, если их проходить в указанном порядке.

Циклическая перестановка вершин для стандартизации обозначения

Теорема приема имеет вид "циклупорядочение(ромб)". Прием выполняет циклические перестановки вершин ромба, пока не получит лексикографически наименьший набор операндов. Если утверждение "ромб(...)" находится в посылках, то уровень срабатывания равен 0, иначе - равен 3.

Параллельность сторон



$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \rightarrow$ прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

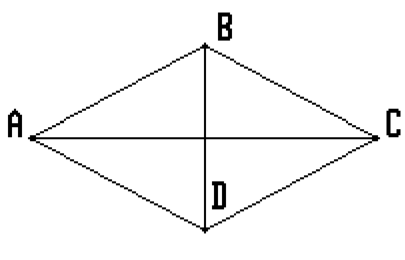
Длины сторон

$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \rightarrow l(AB) = l(BC)$)

При идентификации антецедента допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 1.

Диагонали ромба

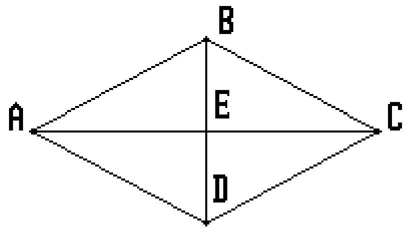
1. Диагонали ромба перпендикулярны.



$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \rightarrow$ прямая$(AC) \perp$ прямая$(BD))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Прямые AC и BD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

2. Ввод в рассмотрение точки пересечения диагоналей.



$\forall_{ABCDE}$(ромб$(ABCD) \rightarrow E -$ точка $\& \ E \in$ отрезок$(AC) \ \& \ E \in$ отрезок$(BD))$

Прямые AC и BD уже рассматриваются в задаче. Если в задаче рассматривается также окружность, вписанная в ромб, то прием блокируется, так как этот случай учитывается другими приемами. Точка E пересечения диагоналей пока не введена, и прием вводит ее, обозначая новой переменной. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(ромб$(ABCD) \rightarrow E -$ точка $\& \ E \in$ отрезок$(AC) \ \& \ E \in$ отрезок$(BD) \ \&$ актив$(l(AC)) \ \&$ актив$(l(BD)) \ \&$ актив$(l(AE)) \ \&$ актив$(l(BE)))$

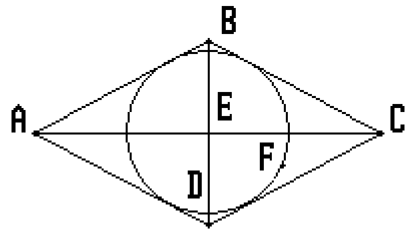
Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Выражение для угла BAD имеет тип "неизв". В задаче рассматривается прямая AC и не рассматривается вписанная в ромб окружность. Не введена точка E пересечения диагоналей. Прием вводит данную точку, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 5. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 11. Она отличается лишь тем, что прямая AC может быть еще не введена в рассмотрение.

3. Диагонали делятся в точке пересечения пополам.

$\forall_{ABCDE}$(ромб$(ABCD) \ \& \ E \in$ прямая$(AC) \ \& \ E \in$ прямая$(BD) \rightarrow$
$l(AE) = l(EC) \ \& \ l(AC) = 2l(EC) \ \& \ l(BE) = l(ED) \ \& \ l(BD) = 2l(ED))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

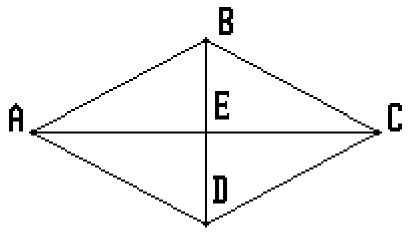
4. Центр вписанной в ромб окружности принадлежит каждой диагонали.



$\forall_{ABCDEF}$(ромб$(ABCD) \ \&$ окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD) \rightarrow$
$E \in$ отрезок$(AC) \ \& \ E \in$ отрезок$(BD))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Прямые AC и BD уже введены в рассмотрение. Уровень срабатывания равен 2. Создана также версия данного приема, срабатывающая на уровне 5. В ней не требуется, чтобы диагонали уже рассматривались, однако требуется, чтоб выражение для угла BAD имело тип "неизв".

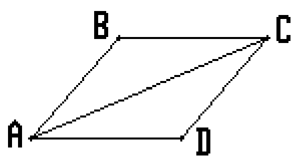
5. Ввод в рассмотрение второй диагонали.



$\forall_{ABCDE}$(ромб($ABCD$) & актив(прямая(BD)) $\rightarrow$ прямая(AC) $\perp$ прямая(BD) & E – точка & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD) & $l(BE) = l(DE)$ & $l(AE) = l(CE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Второй антецедент выделен указателем "усм". В задаче рассматривается окружность, вписанная в ромб либо описанная около ромба, причем диагональ AC пока не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение эту диагональ, а также вводит точку пересечения диагоналей E, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 5. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 6. В ней не предполагается наличие окружностей, однако предполагается, что уже введена прямая, проходящая через точку A либо точку C и параллельная диагонали BD.

6. Диагональ ромба является биссектрисой его угла.



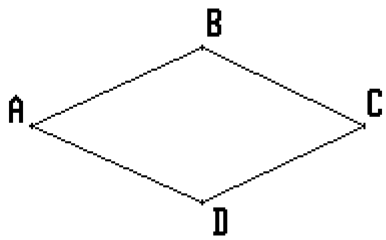
$\forall_{ABCD}$(ромб($ABCD$) & актив($\angle(CAD)$) $\rightarrow$ $\angle(BAD) = 2\angle(CAD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на обратный. Второй антецедент выделен указателем "усм". Предполагается, что в задаче рассматривается площадь ромба. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}$(ромб($ABCD$) & актив($\angle(CAD)$) $\rightarrow$ биссектриса($BADC$))

Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. Предполагается, что через точку B проведена окружность, пересекающаяся с прямой AC, причем пока не рассматривается точка пересечения диагоналей. Уровень срабатывания равен 8.

Углы ромба



$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \to \angle(BAD) = \angle(BCD)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Углы BAD, BCD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

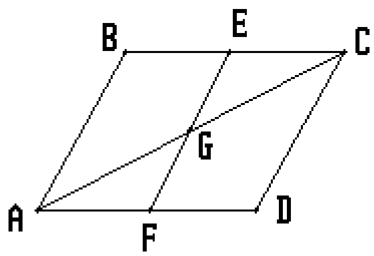
$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \to \angle(ABC) + \angle(BAD) = \pi$)

Аналогично предыдущему, но в задаче рассматриваются углы ABC и BAD. Уровень срабатывания прежний. Созданы еще две версии данного приема. В первой предполагается, что рассматривается лишь угол ABC, который имеет тип "неизв". Угол BAD может не рассматриваться, но должен иметь тип "определимо". Уровень срабатывания здесь равен 4. Вторая версия отличается от первой тем, что снимаются все ограничения на угол BAD. Ее уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \to \angle(ADC) + \angle(BAD) = \pi$)

Угол ADC известен, а угол BAD - нет. Уровень срабатывания равен 9.

Ввод точки пересечения диагонали со средней линией

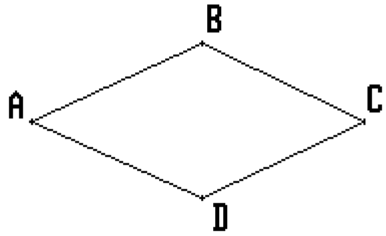


$\forall_{ABCDEFG}$(ромб$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ отрезок(AD) & $l(AF) = l(DF)$ & актив(прямая(EF)) & актив(прямая(AC)) $\to G -$ точка & $G \in$ отрезок(AC) & $G \in$ отрезок(EF) & $l(AG) = l(CG)$ & $l(EG) = l(FG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка G пересечения диагонали со средней линией пока не введена. Прием вводит эту точку, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.

Усмотрение ромба

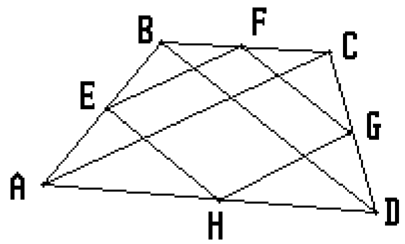
1. Равенство сторон.



$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC)$ & $l(BC) = l(CD)$ & $l(AD) = l(AB)$ & разныеточки(B, D) & разныеточки(A, C) & $D \in$ плоскость$(ABC) \to$ ромб$(ABCD))$

Первые три антецедента выделены указателем "равно", четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "усм". Выражение для угла BAD имеет тип "неизв". Если усматривается перпендикулярность сторон либо имеется посылка "квадрат$(ABCD)$", то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема. срабатывающая на уровне 8. В ней не накладывается никаких ограничений на угол BAD.

2. Середины сторон четырехугольника, имеющего равные диагонали.



$\forall_{ABCDEFGH}(E \in$ отрезок(AB) & $l(AE) = l(BE)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $l(BF) = l(CF)$ & $G \in$ отрезок(CD) & $l(CG) = l(DG)$ & $H \in$ отрезок(AD) & $l(AH) = l(DH)$ & $l(AC) = l(BD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, D) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(B, C,$ прямая$(AD))$ & $C \in$ плоскость$(ABD) \to$ ромб$(EFGH))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты с десятого по четырнадцатый обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Либо прямая EF, либо прямая FH уже рассматриваются в задаче. Если $ABCD$ - квадрат, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

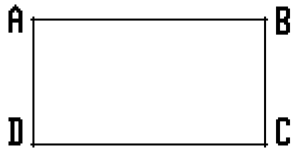
3.28 Приемы, связанные с прямоугольниками

Утверждение "прямоугольник$(A\ B\ C\ D)$" означает, что точки A, B, C, D образуют вершины прямоугольника.

Циклическая перестановка вершин для стандартизации обозначения

Действия те же, что в случае ромба.

Стороны прямоугольника



$\forall_{ABCD}$(прямоугольник$(ABCD) \to l(AB) = l(CD))$

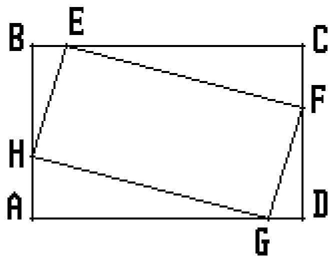
Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается однократная циклическая перестановка вершин. Уровень срабатывания равен 1.

Углы прямоугольника

$\forall_{ABCD}$(прямоугольник$(ABCD) \to \angle(DAB) = \pi/2)$

Созданы два аналогичных приема вывода, один из которых срабатывает в задачах на доказательство либо на исследование, а другой - в задачах на преобразование, имеющих цель "класс". Такие задачи встречаются в аналитической геометрии, где множество точек сначала выражается с помощью описателя "класс" через координаты, а затем - этот описатель исключается за счет возвращения к геометрическим терминам. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Уровни срабатывания приемов равны 1.

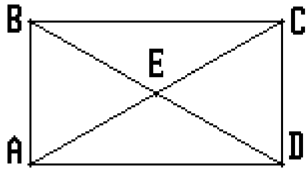
Прямоугольник, вписанный в прямоугольник



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямоугольник$(ABCD)$ & прямоугольник$(EFGH)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AD) & $H \in$ отрезок$(AB) \to l(BE) = l(DG)$ & $l(BH) = l(DF)$ & $l(EC) = l(AG)$ & $l(AH) = l(CF)$ & $l(BE)l(HG) = l(AH)l(HE)$ & $l(BH)l(HG) = l(AG)l(HE))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем допускаются циклические перестановки вершин во втором из них. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Диагонали прямоугольника



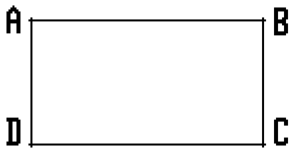
$\forall_{ABCDE}$(прямоугольник$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow l(BE) = l(ED)$ & $l(EC) = l(AE)$ & $l(BE) = l(EC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(прямоугольник$(ABCD)$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BD)) $\rightarrow E-$ точка & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD) & $l(AE) = l(CE)$ & $l(BE) = l(DE)$ & $l(BE) = l(CE)$)

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Точка пересечения диагоналей E пока не введена. Прием вводит ее, обозначая новой переменной. Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение прямоугольника



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) &
прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD) \rightarrow$ прямоугольник$(ABCD)$)

Идентификация начинается с усмотрения в посылке задачи на исследование выражения S(фигура$(ABCD)$), причем вершины рассматриваются с точностью до циклических перестановок. Антецеденты выделены указателем "усм". Отсутствует посылка, указывающая, что $ABCD$ - квадрат либо прямоугольник. Уровни срабатывания равны 4 и 6.

Вершины прямоугольника лежат в одной плоскости

$\forall_{ABCD}$(прямоугольник$(ABCD) \rightarrow D \in$ плоскость(ABC))

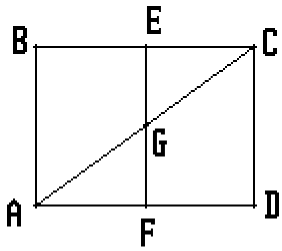
Антецедент идентифицируется с посылкой. Задача не имеет посылки "планиметрия". Идентифицирующие операторы не усматривают принадлежность точки D плоскости ABC. Уровень срабатывания равен 0.

Доказательство того, что четырехугольник является прямоугольником

$\forall_{ABCD}$(прямоугольник$(ABCD) \leftrightarrow$ параллелограмм$(ABCD)$ & $\angle(ABC) = \pi/2$)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 4.

Ввод точки пересечения диагонали со средней линией



$\forall_{ABCDEFG}$(прямоугольник$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ отрезок(AD) & $l(AF) = l(DF)$ & актив(прямая(EF)) & актив(прямая(AC)) $\rightarrow$ $G-$точка & $G \in$ отрезок(AC) & $G \in$ отрезок(EF) & $l(AG) = l(CG)$ & $l(EG) = l(FG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка G пересечения диагонали AC со средней линией EF пока не введена. Прием вводит ее, обозначая новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.

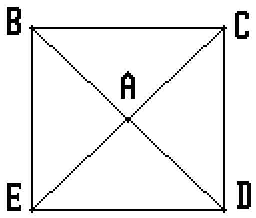
3.29 Приемы, связанные с квадратами

Утверждение "квадрат$(A\ B\ C\ D)$" означает, что точки A, B, C, D образуют вершины квадрата.

Циклическая перестановка вершин для стандартизации обозначения

Аналогично ромбу и прямоугольнику.

Центр квадрата



$\forall_{ABCDE}$(центр$(A,$ фигура$(BCDE))$ & квадрат$(BCDE) \rightarrow l(BC) = \sqrt{2}l(AB)$ & $l(AB) = l(AC)$ & $\angle(CBA) = \pi/4$ & $\angle(BCA) = \pi/4)$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем в каждом из них допускаются циклические перестановки вершин. Каждая из точек B, C имеет хотя бы одно вхождение в посылку либо в условие, являющееся операндом символа, отличного от символов "точка", "квадрат", "набор", "разныестороны", "однасторона". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDE}$(центр$(A,$ фигура$(BCDE))$ & квадрат$(BCDE) \rightarrow$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC))$

Аналогично предыдущему приему. Уровень срабатывания тот же.

$\forall_{ABCDE}$(квадрат$(BCDE)$ & $A \in$ прямая(BD) & $A \in$ прямая$(CE) \rightarrow$ прямая$(AB) \perp$ прямая(AC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Два других антецедента выделены указателем "усм". Условие на точки B, C - такое же, как в предыдущих приемах. Уровень срабатывания приема равен 1.

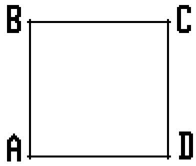
$\forall_{ABCDE}$(квадрат$(BCDE)$ & $A \in$ прямая(EC) & $A \in$ прямая$(BD) \rightarrow$ $l(BC) = \sqrt{2}l(AB)$ & $l(AB) = l(AC)$)

Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. Условие на точки B, C сохраняется. Если в задаче рассматриваются координаты прямых, то уровень срабатывания равен 2, иначе - он равен 4.

$\forall_{ABCDE}$(квадрат$(BCDE)$ & центр$(A,$ фигура$(BCDE))$ & актив(прямая$(AB)) \rightarrow$ $A \in$ отрезок(BD))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем в первом из них допускаются циклические перестановки вершин. Последний антецедент выделен указателем "усм". В задаче рассматривается прямая DX, где X не совпадает с вершинами C, E. Уровень срабатывания равен 3.

Стороны квадрата



$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \rightarrow l(AB) = l(BC)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Прямые AB, BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow l(AB) = l(BC)$)

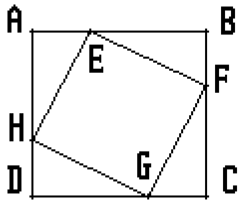
Первый антецедент идентифицируется так же, как в предыдущем приеме. Два других антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Углы квадрата

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/2$)

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Каждая из точек A, C имеет хотя бы одно вхождение в другую посылку, являющееся операндом символа, отличного от символов "точка", "набор", "разныестороны", "однасторона". Уровень срабатывания равен 0.

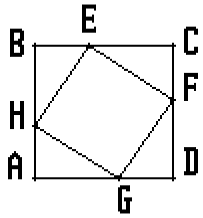
Точки, выделенные на сторонах квадрата симметричным образом



$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BC) &
$G \in$ прямая(DC) & $H \in$ прямая(AD) & $l(AE) = l(BF)$ & $l(BF) = l(CG)$ &
$l(DH) = l(AE)$ & $l(BE) = l(CF)$ & $l(CF) = l(DG)$ & $l(DG) = l(AH) \to$
квадрат$(HEFG)$)

Попытка применения приема начинается с усмотрения в посылке подвыражения "фигура$(HEFG)$". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Следующие четыре антецедента выделены указателем "усм". Шесть последних антецедентов выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 2, 4 и 6.

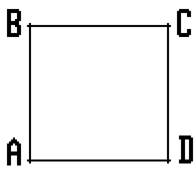
Квадрат, вписанный в квадрат



$\forall_{ABCDEFGH}$(квадрат$(ABCD)$ & квадрат$(EFGH)$ & $E \in$ прямая(BC) &
$F \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(AD) & $H \in$ прямая$(AB) \to l(BE) = l(CF)$ &
$l(AH) = l(CF)$ & $l(DG) = l(CF)$ & $l(CE) = l(FD)$ & $l(BH) = l(FD)$ &
$l(AG) = l(FD)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем во втором из них допускаются циклические перестановки вершин. Следующие четыре антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Усмотрение квадрата

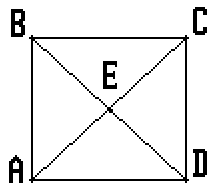


$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \leftrightarrow \angle(ABC) = \pi/2$ & $l(AB) = l(BC)$ & $l(AB) = l(AD)$ &
$l(AB) = l(CD)$ & $\neg(B = D)$ & $\neg(A = B)$)

Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство, имеющей посылку "плантиметрия". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AD) $\perp$ прямая(AB) & прямая(BC) $\perp$ прямая(CD) & $l(AB) = l(BC)$ & $l(BC) = l(CD)$ & $B \in$ плоскость(ACD) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(CD)) $\rightarrow$ прямая(AD) $\perp$ прямая(CD))

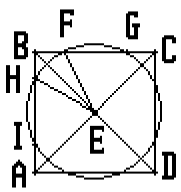
Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}(l(BC) = l(CD)$ & $l(CD) = l(AD)$ & $l(AD) = l(AB)$ & $l(BE) = l(ED)$ & $l(EC) = l(EA)$ & $l(ED) = l(EA)$ & разныеточки(B, D) & разныеточки(A, C) & актив($l(AB)$) & актив($l(AD)$) & актив($l(EA)$) & актив($l(EB)$) & актив($l(EC)$) & актив($l(ED)$) $\rightarrow$ квадрат($ABCD$) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD))

Первый антецедент выделен указателем "равно". Антецеденты со второго по четвертый, а также шестой выделены указателем "идентификатор". Седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". В задаче пока не усмотрено, что $ABCD$ - квадрат. Уровень срабатывания равен 6.

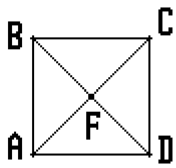
Пересечение окружности и квадрата, имеющих общий центр



$\forall_{ABCDEFGHI}$(квадрат($ABCD$) & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ окружность(EK) & $G \in$ окружность(EK) & $H \in$ окружность(EK) & $I \in$ окружность(EK) & $F \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(CF) & $H \in$ отрезок(AB) & $I \in$ отрезок(AH) & разныеточки(F, G) & разныеточки(H, I) $\rightarrow$ $\angle(HEF) = 2\angle(BEF)$ & $\angle(BEF) = \angle(BEH)$ & $\angle(BEF) \leq \pi/4$)

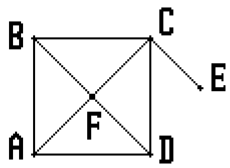
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Угол HEF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

Ввод в рассмотрение центра квадрата



$\forall_{ABCDF}$(квадрат$(ABCD)$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BD)) $\to$
F – точка & $F \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(BD))

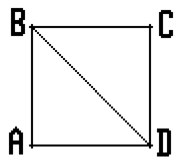
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Точка F пересечения прямых AC и BD пока не введена в рассмотрение. Прием вводит эту точку, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}$(квадрат$(ABCD)$ & актив(прямая(AC)) & прямая$(AC) \perp$ прямая(CE) $\to$
F – точка & $F \in$ отрезок(BD) & $F \in$ отрезок(AC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Прямая BD пока не рассматривается, но зато рассматривается расстояние DE. Прием вводит в рассмотрение точку F, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.

Диагонали квадрата

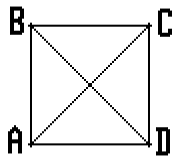


$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD)$ & актив$(\angle(ABD))$ $\to \angle(ABD) = \pi/4$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на обратный. Второй антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD)$ & актив(прямая(BD)) $\to \angle(CBD) = \pi/4$)

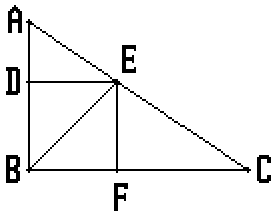
Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. Прямая BC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 11.



$\forall_{ABCD}$(квадрат($ABCD$) & актив(прямая(BD)) & актив(прямая(AC)) $\rightarrow$ прямая(AC) $\perp$ прямая(BD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

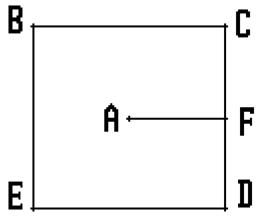
Диагональ квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник



$\forall_{ABCDEF}$(квадрат($BDEF$) & $D \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(BC) & $E \in$ прямая(AC) $\rightarrow$ биссектриса($ABCE$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

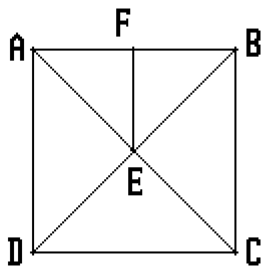
Расстояние от центра квадрата до его стороны



$\forall_{ABCDE}$(центр(A, фигура($BCDE$)) & квадрат($BCDE$) & $F \in$ прямая(CD) & прямая(AF) $\perp$ прямая(CD) & актив($l(AF)$)) $\rightarrow 2l(AF) = l(BC)$)

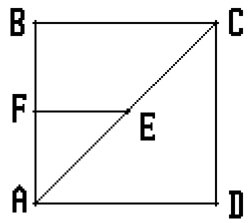
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем допускаются циклические перестановки вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Проведение отрезка, соединяющего центр квадрата с серединой его стороны



$\forall_{ABCDEF}$(квадрат($ABCD$) & $E \in$ отрезок(BD) & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(AB) & $l(BF) = l(AF) \to$ прямая(EF) $\perp$ прямая(AB) & $\angle(AEF) = \pi/4$ & $\angle(BEF) = \pi/4$)

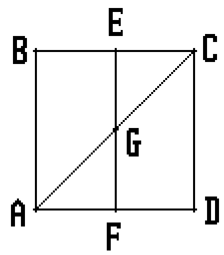
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямая EF пока не введена в рассмотрение. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}$(квадрат($ABCD$) & $l(AF) = l(BF)$ & $F \in$ отрезок(AB) $\to E$ – точка & $E \in$ отрезок(AC) & прямая(EF) $\perp$ прямая(AB) & $l(AE) = l(CE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - указателем "усм". Середина E отрезка AC пока не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение эту середину, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 7.

Ввод точки пересечения диагонали со средней линией



$\forall_{ABCDEFG}$(квадрат($ABCD$) & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ отрезок(AD) & $l(AF) = l(DF)$ & актив(прямая(EF)) & актив(прямая(AC)) $\to G$ – точка & $G \in$ отрезок(AC) & $G \in$ отрезок(EF) & $l(AG) = l(CG)$ & $l(EG) = l(FG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка G пересечения прямых AC и EF пока не рассматривается. Прием вводит ее в рассмотрение, обозначая новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.

3.30 Приемы, связанные с трапециями

Утверждение "трапеция($A\ B\ C\ D$)" означает, что точки A, B, C, D образуют вершины трапеции, если их проходить в указанном порядке. Предполагается, что A - конец нижнего основания, B - конец верхнего. Таким образом, допускаются лишь два варианта прохождения вершин - по часовой стрелке, начиная с левого конца нижнего основания, либо против, начиная с правого конца. Оба угла при основании должны быть не более чем $\pi/2$. Если имеется в виду трапеция общего вида, для которой ограничение на углы при основании отсутствует, то используется утверждение "Трапеция($A\ B\ C\ D$)". Циклические перестановки вершин при идентификации трапеций используются редко. Чаще возникает указатель "контрсерия", разрешающий изменять порядок вершин на противоположный.

Обычно в задачах рассматривались трапеции первого типа (не косоугольные). Поэтому большинство приемов относится к ним. При необходимости можно создать аналогичные приемы для трапеций общего вида. Однако, такая цель не преследовалась, и далее перечисляются лишь приемы, понадобившиеся для проработки конкретного обучающего материала.

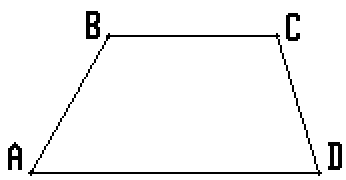
Регистрация сторон трапеции

$\forall_{ABCD}(\text{трапеция}(ABCD) \to \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$

$\forall_{ABCD}(\text{Трапеция}(ABCD) \to \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем разрешаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 0.

Параллельность оснований



$\forall_{ABCD}(\text{трапеция}(ABCD) \to \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$

$\forall_{ABCD}(\text{Трапеция}(ABCD) \to \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

Расположение вершин для обобщенной трапеции

$\forall_{ABCD}(\text{Трапеция}(ABCD) \to \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$

Уровень срабатывания равен 1.

Неравенство для длин верхнего и нижнего оснований трапеции

$\forall_{ABCD}(\text{трапеция}(ABCD) \to 0 < l(AD) - l(BC))$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Либо эта задача имеет цель "контроль", либо она имеет уравнение, содержащее модуль. Расстояния AD и BC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDab}(\text{трапеция}(ABCD)\ \&\ l(BC) = a\ \&\ l(AD) = b \to a < b)$

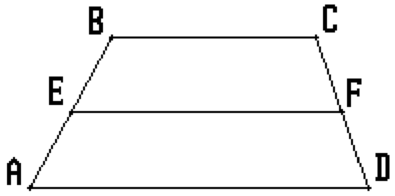
Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b суть переменные. Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение противоречия: трапеция выродилась в отрезок

$\forall_{ABCD}$(Трапеция$(ABCD)$ & $B \in$ прямая$(AD) \rightarrow$ ложь)

Прием применяется в задаче на исследование, имеющей цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на противоположный. Уровень срабатывания равен 2.

Средняя линия трапеции



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AB) & $l(BE) = l(AE)$ & $F \in$ прямая(CD) & $l(CF) = l(FD) \rightarrow$ прямая$(EF) \parallel$ прямая(AD) & $2l(EF) = l(BC) + l(AD)$)

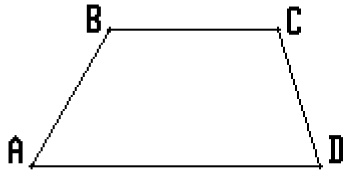
Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", третий и пятый - указателем "идентификатор". Прямая EF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & $l(BE) = l(AE)$ & $l(CF) = l(DF)$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(EF))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \rightarrow$ прямая$(EF) \parallel$ прямая(BC) & $2l(EF) = l(BC) + l(AD)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Два из расстояний BC, AD, EF известны, а третье - не известно, но рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

Углы трапеции

1. Соотношение между углами трапеции, примыкающими к боковой стороне.



$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(\angle(BCD)) \rightarrow \angle(BCD) + \angle(ADC) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Второй антецедент выделен указателем "усм". Выражение для угла BCD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3. Создана версия приема, в которой требуется, чтобы угол BCD был известен, а угол ADC - нет. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(\angle(ADC)) \rightarrow \angle(BCD) + \angle(ADC) = \pi)$

Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. Угол ADC известен, а угол BCD - нет. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(\angle(BCD))$ & актив$(\angle(ADC)) \rightarrow$
$\angle(BCD) + \angle(ADC) = \pi)$

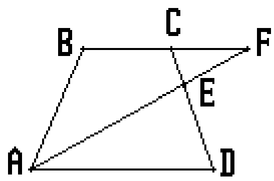
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Два других антецедента выделены указателем "усм". Хотя бы один из углов BCD, ADC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3. Создана также версия приема, в которой требуется, чтобы один из углов BCD, ADC был известен, а другой - нет. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(\angle(BCD)) \rightarrow 0 \leq \angle(BDC) - \pi/2)$

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(\angle(ADC)) \rightarrow 0 \leq \pi/2 - \angle(BDC))$

Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущих приемах. Существует посылка, в которой угол ADC является операндом максимума либо минимума. Уровень срабатывания равен 5.

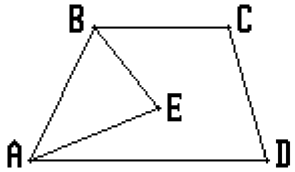
2. Продолжение биссектрисы угла при основании до пересечения с другим основанием.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AD) \parallel$ прямая(BC) & $\angle(BAE) = \angle(DAE)$ &
$E \in$ отрезок(CD) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ &
разныепрямые(прямая(BC), прямая(AB)) & разныеточки$(A, B) \rightarrow$
F – точка & $C \in$ отрезок(BF) & $E \in$ отрезок(AF) & $l(AB) = l(BF))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и третий антецеденты - указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояния AB и AD уже рассматриваются в задаче. Точка E не является серединой отрезка CD. Точка F пересечения прямых AE и BC пока не введена в рассмотрение. Прием вводит эту точку, обозначая ее новой переменной.

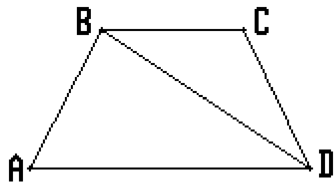
3. Ввод в рассмотрение углов, возникающих при соединении концов боковой стороны с точкой внутри трапеции.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ фигура$(ABCD)$ & актив$(\angle(ABE))$ & актив$(\angle(BAE)) \to \angle(CBE) + \angle(ABE) + \angle(BAE) + \angle(DAE) = \pi)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - выделены указателем "усм". Углы ABE и BAE известны. Расстояния BE и AE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

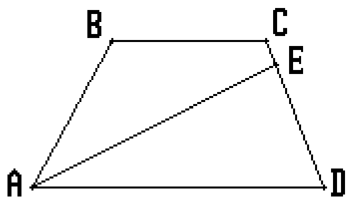
4. Усмотрение противоречия из сравнения углов трапеции.



$\forall_{ABCDabc}(\angle(BAD) = a$ & $\angle(ABD) = b$ & $\angle(ADC) = c$ & трапеция$(ABCD)$ & $0 \leq \pi - a - b - c \to$ ложь)

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, причем выражения a, b, c не содержат неизвестных. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Для него введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

5. Соотношение пропорциональности для отрезков, возникающих при пересечении биссектрисы угла при основании с боковой стороной.

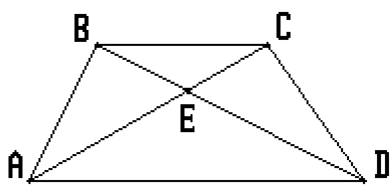


$\forall_{ABCDE}$(актив$(\angle(BAE))$ & актив$(\angle(DAE))$ & $\angle(BAE) = \angle(DAE)$ & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $E \in$ отрезок(CD) & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AE))$ & $al(AB) = bl(AE) \to 2b\cos(\angle(BAE))l(DE) = al(CD))$

Третий антецедент выделен указателем "равно". Седьмой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, шестой - проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние DE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

Диагонали трапеции

1. Ввод в рассмотрение точки пересечения диагоналей трапеции.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BD)) $\rightarrow$
E − точка & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Длины верхнего и нижнего оснований уже рассматриваются в задаче. Точка E пересечения диагоналей пока не введена. Прием вводит ее, обозначая новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.

2. Соотношение для длин отрезков, на которые диагонали трапеции разбиваются в точке пересечения.

   $\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(BD) \rightarrow$
   $0 < l(ED) - l(BE)$ & $0 < l(AE) - l(EC)$ & $l(BE)l(AD) = l(BC)l(ED)$ &
   $l(EC)l(AD) = l(AE)l(BC)$)

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Каждое из расстояний BC, AD либо известно, либо имеет тип "неизв". В задаче рассматривается расстояние между точками первой и второй диагоналей, отличными от вершин трапеции. Созданы еще несколько версий приема с альтернативными условиями срабатывания:

   (a) В посылках задачи имеется соотношение пропорциональности для расстояний BC, AD с известными коэффициентами. Уровень срабатывания приема равен 3.

   (b) Угол AED и расстояния AC, BD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

   (c) Расстояния AC и BD уже рассматриваются в задаче. Хотя бы одно из расстояний BE и ED, а также хотя бы одно из расстояний AE и EC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 14.

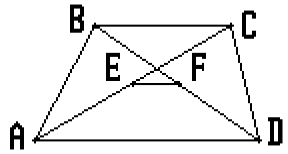
   $\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) &
   $al(BC) = bl(AD) \rightarrow al(BE) = bl(DE)$ & $al(CE) = bl(AE)$)

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, причем коэффициенты a, b не содержат неизвестных. В задаче рассматривается прямая, проходящая через точку E, но не проходящая через вершины трапеции. Уровень срабатывания равен 6.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD)
   & $al(BC) = bl(AD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) &
   разныеточки$(A, B) \rightarrow al(BE) = bl(DE)$ & $al(CE) = bl(AE)$)

   Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый и второй - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, пятый и шестой - проверочным оператором. Коэффициенты a, b не содержат неизвестных. В задаче рассматривается прямая, проходящая через точку E, но не проходящая через вершины. Если усматривается параллельность боковых сторон, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.

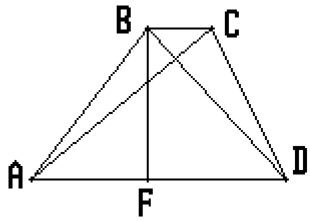
3. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(AC) & $l(AE) = l(CE)$ & $F \in$ отрезок(BD) & $l(BF) = l(DF) \rightarrow$ прямая$(EF) \parallel$ прямая(AD) & $2l(EF) = l(AD) - l(BC)$ & трапеция$(AEFD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

4. Трапеция с взаимно перпендикулярными диагоналями.



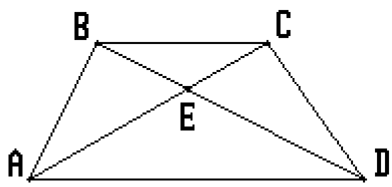
$\forall_{ABCDF}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(BF) \perp$ прямая(AD) & $l(AB) = l(CD)$ & $l(BF) = a$ & $l(BC) = b$ & $l(AD) = c$ & $l(BD) = d$ & $\neg(d^2 - a(b+c) = 0) \rightarrow$ ложь

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент, а также антецеденты с пятого по девятый идентифицируются с посылками. При этом пятый антецедент выделен указателем "равно". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Антецеденты со второго по третий выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDF}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(BF) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow l(AC)^2 = (l(BC) + l(AD))^2 - l(BD)^2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 12.

5. Точка пересечения диагоналей трапеции лежит на каждом из отрезков этих диагоналей.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow$ $E \in$ отрезок(AC))

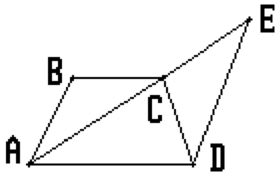
$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
$E \in$ отрезок(BD))

$\forall_{ABCDE}$(Трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
$E \in$ отрезок(AC))

$\forall_{ABCDE}$(Трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
$E \in$ отрезок(BD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

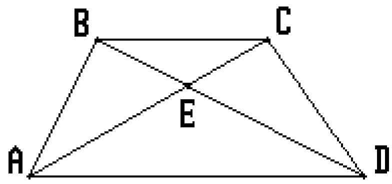
6. Точка пересечения продолжения диагонали трапеции с прямой, параллельной боковой стороне и проходящей через нижний конец другой боковой стороны.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $C \in$ прямая$(AE) \rightarrow$
$C \in$ отрезок(AE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

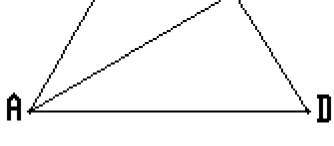
7. Равенство площадей треугольников, возникающих при пересечении диагоналей.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(AC)
& актив(S(фигура(CED))) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \rightarrow$
S(фигура(ABE)) $= S$(фигура(CED))))

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. В случае параллелограмма прием блокируется. Уровень срабатывания равен 8.

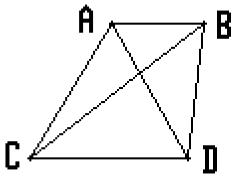
8. Если длина боковой стороны равна длине основания, то диагональ трапеции является биссектрисой угла при противоположном основании.



$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(BC) \to$ биссектриса$(BADC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Допускается изменение порядка вершин на противоположный. Из некоторой точки диагонали проведены прямые, пересекающиеся с прямыми AB и AD не по вершинам трапеции. Уровень срабатывания равен 7.

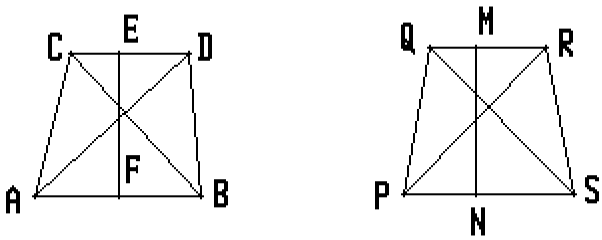
9. Трапеция, у которой длина боковой стороны равна длине диагонали.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $l(AC) = l(AD)$ & разныеточки$(C, D) \to$ $l(BC)^2 + l(BD)^2 = 2l(AB)^2 + 2l(AC)^2$)

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния BC, BD, AB уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

10. Усмотрение равенства трапеций, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали, по равенству высот и оснований.

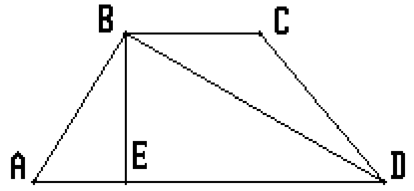


$\forall_{ABCDEFPQRSMN}$(прямая$(CD) \parallel$ прямая(AB) & прямая$(BC) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD) & прямая$(QR) \parallel$ прямая(PS) & прямая$(QS) \perp$ прямая(PR) & $M \in$ прямая(QR) & $N \in$ прямая(PS) & прямая$(MN) \perp$ прямая(QR) & $l(EF) = l(MN)$ & $l(CD) = l(QR)$ & $l(AB) = l(PS)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(CD)) & разныепрямые(прямая(PQ), прямая(QR)) & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & однасторона$(R, S,$ прямая$(PQ)) \to l(AC) = l(PQ)$ & $l(BD) = l(RS) \ \vee$ $l(AC) = l(RS)$ & $l(BD) = l(PQ)$)

Точка привязки выбрана во втором антецеденте, идентифицируемом с посылкой. Первый антецедент, а также антецеденты с третьего по десятый выделены указателем "усм". Двенадцатый антецедент выделен указателем "равно", одиннадцатый и тринадцатый - указателем "идентификатор". Четыре последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 13.

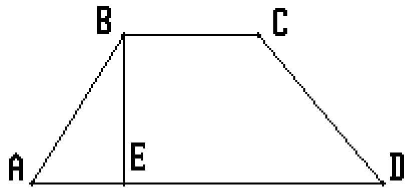
Высоты трапеции

1. Проведение высот в трапеции.



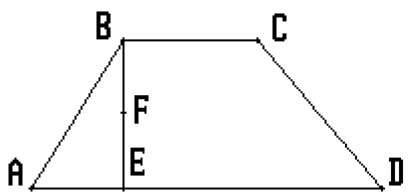
$\forall_{ABCDE}$(трапеция($ABCD$) $\to$ E – точка & $E \in$ отрезок(AD) &
прямая(BE) $\perp$ прямая(AD) & актив($l(AE)$) & актив($l(AD)$))

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Выражение для расстояния BD имеет тип "неизв"; расстояния AB, BC и CD уже рассматриваются в задаче. Высоты из вершин B, C пока не проведены. Прием проводит высоту из точки B и обозначает ее основание E новой переменной. Уровень срабатывания равен 4. Имеется версия приема, срабатывающая на уровне 7. В ней требуется, чтобы каждое из расстояний BC, AD, BD либо было известно, либо имело тип "неизв".



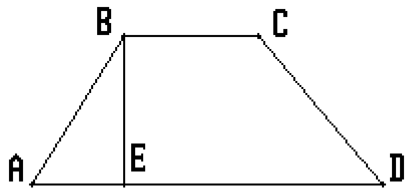
$\forall_{ABCDE}$(трапеция($ABCD$) $\to$ E – точка & $E \in$ отрезок(AD) &
прямая(BE) $\perp$ прямая(AD) & актив($l(AE)$))

Антецедент идентифицируется так же, как и в предыдущем приеме. Угол BAD либо известен, либо имеет тип "внешнеизв". Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Хотя бы одно из расстояний AB, BC, CD, AD не известно. Высоты из вершин B, C пока не проведены. Прием проводит высоту из вершины B и обозначает ее основание E новой переменной. Имеется версия приема, срабатывающая на уровне 8. В ней ослаблено условие на угол BAD: требуется лишь, чтобы он уже рассматривался в задаче.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция($ABCD$) & прямая(BF) $\perp$ прямая(AD) $\to$ E – точка &
$E \in$ отрезок(AD) & $E \in$ прямая(BF) & актив($l(AE)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Расстояния BC, AD уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы одно из них имеет тип "неизв". Точка E пересечения прямых BF и AD пока не введена. Прием вводит эту точку, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 4.

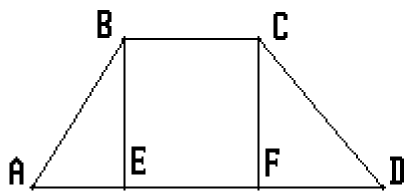


$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AD))$ & $l(AB) = l(CD) \rightarrow$ E – точка & $E \in$ отрезок(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $2l(AE) + l(BC) = l(AD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на обратный. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Высоты из вершин B, C пока не проведены. Если рассматривается вписанная в трапецию окружность, то действия блокируются. Прием вводит в рассмотрение основание E высоты, опущенной из вершины B. Уровень срабатывания равен 5.

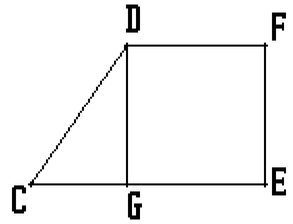
$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(\angle(BAD))$ & актив$(\angle(CDA)) \rightarrow E$ – точка & $E \in$ отрезок(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & актив$(l(AE)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускется изменение порядка вершин на обратный. Углы BAD, CDA известны, а расстояния BC, AD уже рассматриваются в задаче. Высоты из вершин B, C пока не проведены. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow F$ – точка & $F \in$ отрезок(ED) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AD) & $l(AD) = l(AE) + l(BC) + l(FD)$ & $l(EF) = l(BC)$ & $l(CF) = l(BE)$ & $F \in$ отрезок$(AD))$

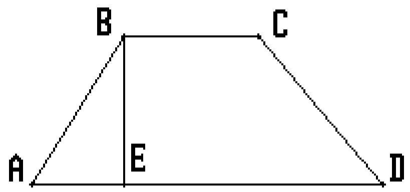
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Два других антецедента выделены указателем "усм". Расстояния AD и BC уже рассматриваются в задаче. Высота из вершины C пока не проведена, а из вершины B - проведена. Прием вводит в рассмотрение основание F высоты, проведенной из вершины C. Уровень срабатывания равен 4. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 7. В ней не требуется, чтобы расстояние AD уже рассматривалось, а вместо этого требуется, чтобы рассматривались расстояния AE, ED.



$\forall_{CDEFG}$(прямая$(EF) \perp$ прямая(CE) & прямая$(DF) \parallel$ прямая(CE) & актив$(\angle(DCE))$ & $\angle(DCE) < \pi/2 \rightarrow G -$ точка & прямая$(DG) \perp$ прямая(CE) & $G \in$ прямая(CE) & точкалуча(C, G, E) & $l(DF) = l(GE)$)

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Угол DCE известен, расстояние EF уже рассматривается в задаче. Не усматривается, что точки E, F лежат по разные стороны от прямой CD. Выделены расстояния CP, DQ от точек C, D то точек P, Q, лежащих, соответственно, на прямых CE и DF. Два из расстояний CP, DQ, EF известны, а одно - имеет тип "неизв". Через точку D пока не проведен перпендикуляр к прямой CE. Прием вводит основание G этого перпендикуляра, обозначая его новой переменной. Уровень срабатывания равен 8.

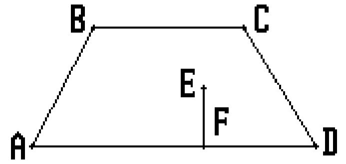
2. Выражение высоты трапеции через длины оснований и углы при основаниях.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AD) & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(\angle(BAD))$ & актив$(\angle(CDA)) \rightarrow$ $(l(AD) - l(BC))\sin(\angle(BAD))\sin(\angle(CDA)) = l(BE)\sin(\angle(BAD) + \angle(CDA))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на обратный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Углы BAD, CDA известны. Среди расстояний AD, BC, BE имеются два известных и одно неизвестное. Уровень срабатывания равен 6.

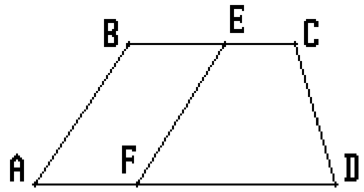
3. Проекция внутренней точки на нижнее основание принадлежит этому основанию.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ фигура$(ABCD)$ & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow F \in$ отрезок(AD))

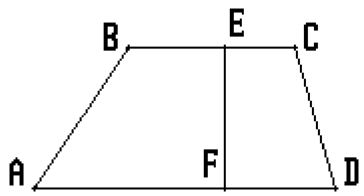
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем в первом из них разрешается изменение порядка вершин на противоположный, а во втором, кроме изменения порядка, допускаются также циклические перестановки. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

4. Принадлежность основанию трапеции проекции точки, лежащей на ее верхней стороне.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(AB) & $F \in$ прямая$(AD) \to F \in$ отрезок(AD))

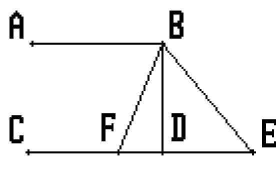
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) & $F \in$ прямая$(AD) \to F \in$ отрезок(AD))

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 6.

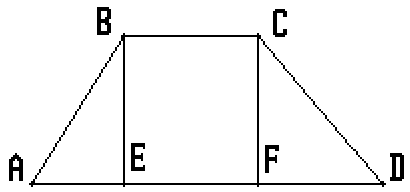
5. Основание высоты трапеции, опущенной из тупого угла, и точка пересечения биссектрисы этого угла с противоположной стороной.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CE) & $F \in$ прямая(CE) & $\angle(ABF) = \angle(FBE)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(BD) & $D \in$ прямая(CE) & $0 \leq 2\angle(ABE) - \pi \to$ $D \in$ отрезок(EF))

Третий антецедент выделен указателем "равно", последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

6. Принадлежность проекции конца верхнего основания трапеции отрезку между соответствующим концом нижнего основания и проекцией другого конца верхнего основания.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая$(AD) \to$ $E \in$ отрезок(AF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AF, EF, AE уже рассматриваются в задаче, причем идентифицирующие операторы не усматривают принадлежность точки E отрезку AF. Уровень срабатывания равен 7.

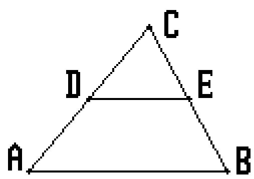
7. Усмотрение непринадлежности основания высоты трапеции интервалу между основанием другой высоты и противоположной вершиной.

$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CF) \perp$ прямая$(AD) \to$ $\neg(F \in$ интервал$(AE))$)

Антецеденты обрабатываются так же, как и в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 4.

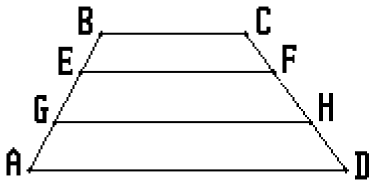
Усмотрение трапеции

1. Прямые, параллельные основанию треугольника либо трапеции.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BC) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & разныеточки(C, D) & $0 \leq \pi/2 - \angle(CAB)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(CBA) \to$ трапеция$(ADEB)$)

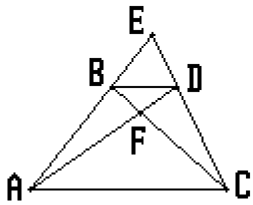
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения S(фигура$(ADEB)$) в посылке задачи на исследование. Здесь допускаются циклические перестановки вершин. Первые три антецедента выделены указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка, указывающая, что $ADEB$ - трапеция. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFGH}$(трапеция($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(AE) & прямая(EF) $\parallel$ прямая(AD) & прямая(GH) $\parallel$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(CD) $\rightarrow$ трапеция($GEFH$))

Указатель "контрольвывода"инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на исследование выражения S(фигура($GEFH$), с возможными циклическими перестановками вершин. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

2. Усмотрение из равенства площадей треугольников, связанных с диагоналями.



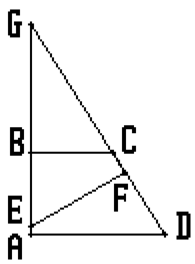
$\forall_{ABCDEF}$($F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AD) & S(фигура(ABF)) = S(фигура(CDF)) & $B \in$ отрезок(AE) & $D \in$ отрезок(CE) & разныепрямые(прямая(AE), прямая(CE)) & (разныеточки(B, E) $\vee$ разныеточки(E, F)) $\rightarrow$ трапеция($ABDC$))

Третий антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

Точка пересечения боковых сторон

1. Ввод в рассмотрение точки пересечения продолжений боковых сторон.

   (a) Прямоугольная трапеция.

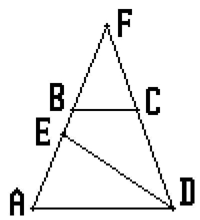


$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(BC) $\perp$ прямая(AB) & прямая(AD) $\perp$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & прямая(EF) $\perp$ прямая(CD)

& актив($l(BC)$) & актив($l(AD)$) & $0 < l(AD) - l(BC)$ & актив($l(EF)$) & однасторона(C, D, прямая(AB)) $\to$ G – точка & $B \in$ отрезок(AG) & $C \in$ отрезок(DG))

Первые семь антецедентов, а также девятый антецедент выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Восьмой и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Расстояния BC и AD известны, расстояние EF имеет тип "неизв". Расстояния AB и CD уже рассматриваются в задаче. Прием вводит точку G пересечения боковых сторон трапеции $ABCD$ и обозначает ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 8.

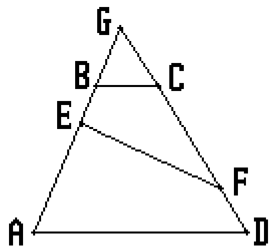
(b) Имеется биссектриса угла при основании.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция($ABCD$) & биссектриса($ADCE$) & $E \in$ отрезок(AB) & актив($l(AE)$) & актив($l(BE)$) $\to$ F – точка & $C \in$ отрезок(DF) & $B \in$ отрезок(AF) & актив($l(DF)$) & актив($l(AF)$) & актив($l(EF)$) & актив($l(CF)$)))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем допускается изменение порядка вершин на обратный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Рассотяние AD уже рассматривается в задаче. Прием вводит новую точку F. Уровень срабатывания равен 7.

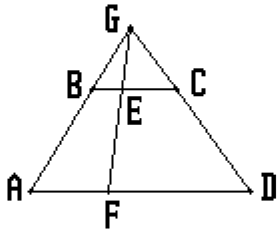
(c) К боковой стороне проведен перпендикуляр из точки на другой боковой стороне.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция($ABCD$) & $F \in$ отрезок(CD) & $E \in$ прямая(AB) & прямая(EF) $\perp$ прямая(AB) $\to$ G – точка & $B \in$ отрезок(AG) & $C \in$ отрезок(DG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка F не совпадает с точками C, D. Если усматривается перпендикулярность прямых AB и AD, то прием блокируется. Иначе - вводится новая точка G. Уровень срабатывания равен 7.

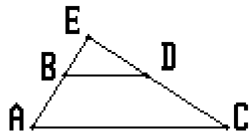
(d) Проведен отрезок, соединяющий точки на основаниях трапеции, делящие эти основания в одном и том же отношении.



$\forall_{ABCDEFGabcd}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AD) & актив$(l(EF))$ & $al(BE) = bl(CE)$ & $cl(AF) = dl(DF)$ & $ad - bc = 0 \rightarrow$ G – точка & $B \in$ отрезок(AG) & $C \in$ отрезок(DG) & $E \in$ отрезок(GF) & $l(AD)l(GE) = l(BC)l(GF)$ & $l(EF) = l(GF) - l(GE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Пятый и шестой антецеденты обрабатываются пакетным синтезатором, седьмой - выделен указателем "идентификатор". Прием вводит новую точку G. Уровень срабатывания равен 10.

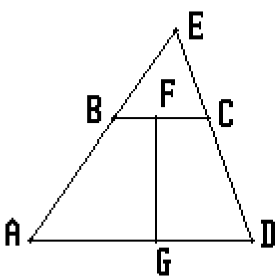
(e) Боковые стороны взаимно перпендикулярны.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABDC)$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(DCA))$ & $\angle(BAC) + \angle(DCA) = \pi/2 \rightarrow E$ – точка & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана во втором из них. Порядок вершин трапеции может изменяться на обратный. Третий антецедент выделен указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Если угол BAC равен $\pi/4$, то прием блокируется. Иначе - вводится новая точка E. Уровень срабатывания равен 5.

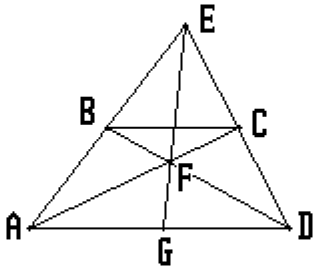
2. Равенство двух выражений для площади треугольника, получающегося при продолжении боковых сторон трапеции.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AD) & прямая$(FG) \perp$ прямая(AD) & актив$(\angle(AED))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(FG)) \rightarrow$ $l(AE)l(DE)\sin(\angle(AED))(l(AD) - l(BC)) = l(AD)^2 l(FG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 12.

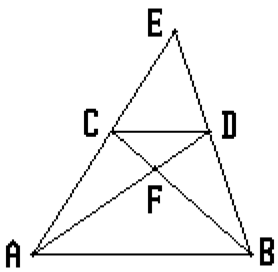
3. Прямая, проходящая через точки пересечения боковых сторон и диагоналей, делит основания трапеции пополам.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) & $C \in$ отрезок(DE) & $B \in$ прямая(AE) & $G \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(EG) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AD)) $\to l(AG) = l(DG)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

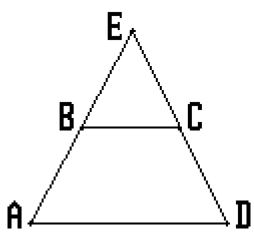
4. Соотношение пропорциональности для отрезков, связанных с точками пересечения диагоналей и продолжений боковых сторон.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(CD) $\parallel$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(BC) & актив($l(AF)$) & актив($l(DF)$) & актив($l(AE)$) & актив($l(CE)$) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BD)) & разныеточки(A, C) $\to l(AF)l(CE) = l(FD)l(AE)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

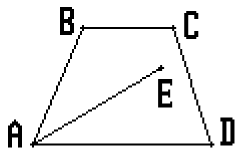
5. Принадлежность конца верхнего основания трапеции отрезку между точкой пересечения продолжений боковых сторон и концом нижнего основания.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(CD) \to$ $B \in$ отрезок(AE))

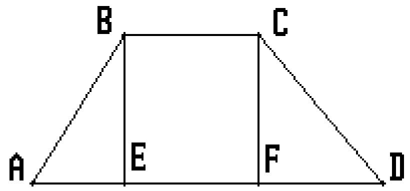
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 2 и 5.

Ввод вспомогательного параметра для длины основания трапеции



$\forall_{ABCDEa}$(трапеция$(ABCD)$ & биссектриса$(BADE) \to l(AD) = a$)

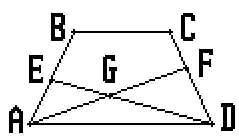
Антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускается изменение порядка вершин трапеции на обратный. Расстояние BC уже рассматривается в задаче. Отсутствует посылка вида $l(AD) = t$, где t не содержит расстояний и углов. Прием регистрирует новую переменную a как вспомогательный параметр. Она временно будет рассматриваться как известная. После того, как через нее будут выражены неизвестные задачи, эта переменная автоматически переведется в разряд неизвестных. Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CF) \perp$ прямая$(AD) \to l(BC) = a$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний BC и AD имеют тип "Неизв". Выражение для расстояния BC имеет своим множителем расстояние $l(PQ)$ (возможно, совпадающее с $l(BC)$), входящее в некоторое уравнение задачи внутри основания второй степени. Расстояния AF, DE не известны. Если для расстояния BC еще не был введен вспомогательный параметр, то такой параметр a вводится. Уровень срабатывания приема равен 8.

Соотношение пропорциональности для пересекающихся отрезков в трапеции

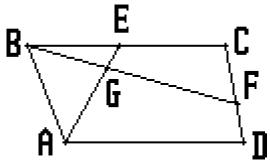


$\forall_{ABCDEFGabcdpqrskmn}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & $al(BE) = bl(AE)$ & $cl(CF) = dl(DF)$ & $pl(AD) = ql(BC)$ & $G \in$ отрезок(DE) & $G \in$ отрезок(AF) & $m = a(q-p)$ & $n = b(q-p)+p(a+b)$ & $k = c(q-p)$ & $s = d(q-p)+p(c+d)$ & $r = kn+ms+km \rightarrow l(AF)m(k+s) = l(AG)r$ & $l(DE)k(m+n) = l(DG)r$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Четвертый, пятый и шестой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Пять последних антецедентов выделены указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCDEFGabcdpqrskmn}$(трапеция$(DAB)$ & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & $al(BE) = bl(AE)$ & $cl(CF) = dl(DF)$ & $pl(AD) = ql(BC)$ & $G \in$ отрезок(DE) & $G \in$ отрезок(AF) & $m = a(q-p)$ & $n = b(q-p)+p(a+b)$ & $k = c(q-p)$ & $s = d(q-p)+p(c+d)$ & $r = kn+ms+km \rightarrow l(AF)m(k+s) = l(AG)r$ & $l(DE)k(m+n) = l(DG)r$)

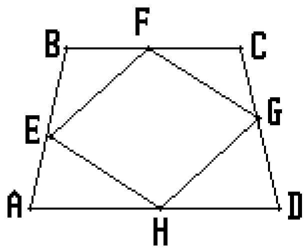
Прием отличается от предыдущего только тем, что трапеция переворачивается - отрезки проводятся от верхнего основания, а не от нижнего. Уровень срабатывания прежний.



$\forall_{ABCDEFGabcdp}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AD)) & однасторона$(A, B,$ прямая$(CD))$ & $F \in$ отрезок(CD) & $E \in$ отрезок(BC) & $al(CE) = bl(BE)$ & $cl(DF) = dl(CF)$ & $pl(BC) = ql(AD)$ & $G \in$ отрезок(AE) & $G \in$ отрезок(BF) & $r = acq + bdq + acp + bcp + adq \rightarrow l(BF)aq(c+d) = l(BG)r$ & $l(AE)(adq + bdq + acp + bcp) = l(AG)r$)

Первый антецедент выделен указателем "равно". Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Шестой, седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются пакетным синтезаторами. Одиннадцатый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". Если через точку C проведена прямая, параллельная прямой AE и пересекающаяся с прямой BF по выделенной точке, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 8.

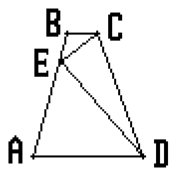
Усмотрение параллелограмма, вершины которого суть середины сторон трапеции



$\forall_{ABCDEFGH}$(трапеция$(ABCD)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $l(BF) = l(CF)$ & $G \in$ отрезок(CD) & $l(CG) = l(DG)$ & $H \in$ отрезок(AD) & $l(AH) = l(DH)$ & $E \in$ отрезок(AB) & $l(AE) = l(BE) \rightarrow$ параллелограмм$(EFGH)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

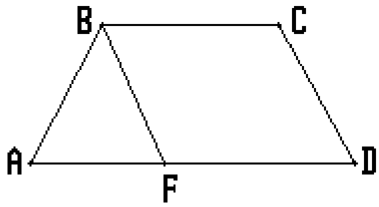
Если вершина прямого угла, опирающегося на сторону трапеции, лежит на прямой, проходящей через другую сторону, то она лежит на самой стороне



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая$(DE) \to$
$E \in$ отрезок(AB))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Уровень срабатывания равен 4.

Проведение из левого конца верхнего основания прямой, параллельной правой боковой стороне

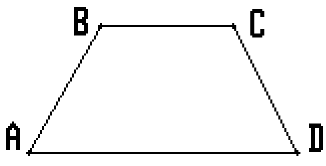


$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & актив$(\angle(BAD))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$
& актив$(l(CD)) \to F$ – точка & $F \in$ отрезок(AD) & прямая$(BF) \parallel$ прямая(CD) &
$l(AF) = l(AD) - l(BC)$ & $\angle(CDA) = \angle(BFA)$ & $l(BF) = l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BAD имеет тип "неизв". Синтзатор "пропорциональны" позволяет усмотреть пропорциональность расстояний AB и CD, расстояний BC и AD, а также расстояний AB и BC. Прием вводит точку F пересечения прямой AD с прямой, проведенной через точку B параллельно CD. Уровень срабатывания равен 5.

Равнобедренная трапеция

1. Углы при основании равнобедренной трапеции.



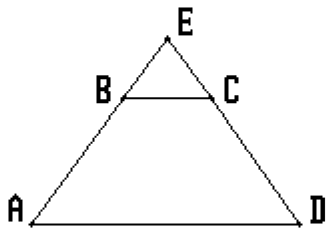
$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & актив$(\angle(BAD)) \to$
$\angle(BAD) = \angle(CDA)$)

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & актив$(\angle(ABC)) \to$
$\angle(BCD) = \angle(ABC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", последний - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD) \to \angle(BAD) = \angle(CDA)$ &
$\angle(ABC) = \angle(BCD)$)

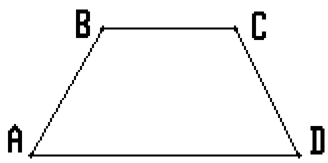
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Расстояния BC и AD уже рассматриваются в задаче. Из некоторой точки проведены перпендикуляры к прямым AB, BC, CD, но не проведен перпендикуляр к прямой AD. Уровень срабатывания равен 5. Создана также версия данного приема, срабатывающая на уровне 11. У нее условия про перпендикуляры отброшены.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $B \in$ отрезок(AE) &
$C \in$ отрезок(DE) & актив$(\angle(AED)) \to 2\angle(BAD) + \angle(AED) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

2. Усмотрение равнобедренной трапеции из равенства углов при основании.

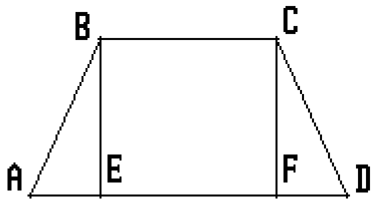


$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $\angle(BAD) = \angle(CDA) \to l(AB) = l(CD)$)

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $\angle(ABC) = \angle(BCD) \to l(AB) = l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

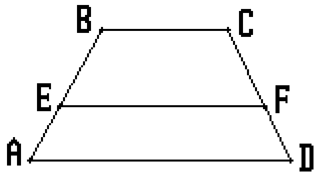
3. Равенство длин проекция боковых сторон равнобедренной трапеции на основание.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AD) & $l(AB) = l(CD) \to$ $l(AE) = l(FD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

4. Прямая, параллельная основанию равнобедренной трапеции, отсекает на боковых сторонах равные отрезки.

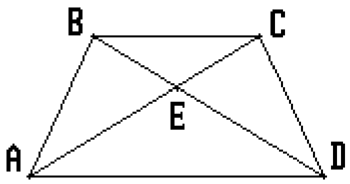


$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(EF) \parallel$ прямая(AD) & $l(AB) = l(CD)$ & актив$(l(AE))$ & актив$(l(DF))$ & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок$(CD) \to$ $l(AE) = l(FD)$)

$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(EF) \parallel$ прямая(AD) & $l(AB) = l(CD)$ & актив$(l(BE))$ & актив$(l(CF))$ & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок$(CD) \to$ $l(BE) = l(CF)$)

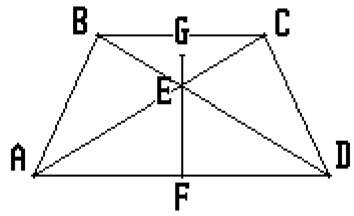
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Точка привязки выбрана в четвертом антецеденте, также идентифицируемым с посылкой. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

5. Точка пересечения диагоналей равнобедренной трапеции.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(BD) \to l(BE) = l(EC)$ & $l(AE) = l(ED)$)

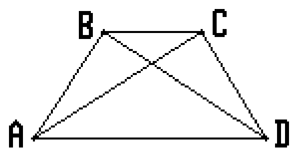
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(AC) &
$E \in$ прямая(BD) & $F \in$ отрезок(AD) & $l(AF) = l(DF)$ &
прямая$(FG) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow E \in$ прямая(FG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

6. Усмотрение равнобедренной трапеции из равенства углов между боковой стороной и диагональю.

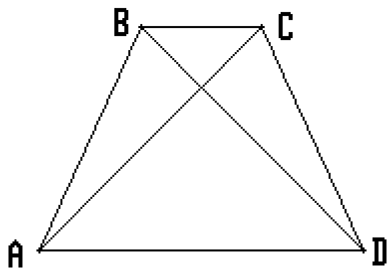


$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $\angle(BAC) = \angle(BDC) \rightarrow l(AB) = l(CD)$ &
$l(BD) = l(AC)$)

$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $\angle(ABD) = \angle(ACD) \rightarrow l(AB) = l(CD)$ &
$l(BD) = l(AC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

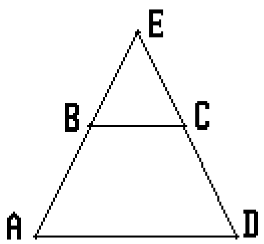
7. Равнобедренная трапеция со взаимно перпендикулярными диагоналями.



$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & $l(AB) = l(CD) \rightarrow$
$\angle(CAD) = \pi/4$ & $\angle(BDA) = \pi/4$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания приема равен 5.

8. Точка пересечения боковых сторон равнобедренной трапеции.

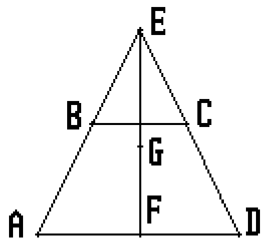


$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(AB) &
$E \in$ прямая(CD) & актив$(\angle(AED)) \rightarrow 2\angle(BAD) + \angle(AED) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Один из углов BAD, AED известен, а другой - нет. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(AB) &
$E \in$ прямая$(CD) \rightarrow l(AE) = l(DE)$)

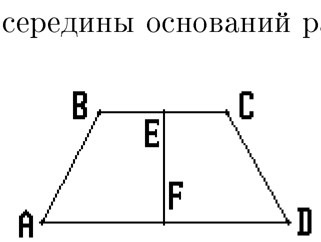
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "равно". Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7. Создана также копия приема, имеющая уровень срабатывания 9.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(AB) &
$E \in$ прямая(CD) & $F \in$ отрезок(AD) & $l(AF) = l(DF)$ &
прямая$(FG) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow E \in$ прямая(FG))

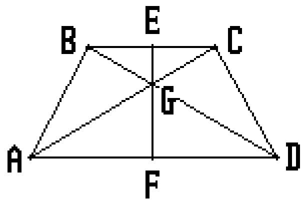
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

9. Отрезок, соединяющий середины оснований равнобедренной трапеции.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(AC) &
$l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ прямая(AD) & $l(AF) = l(DF) \rightarrow$
прямая$(EF) \perp$ прямая(AD))

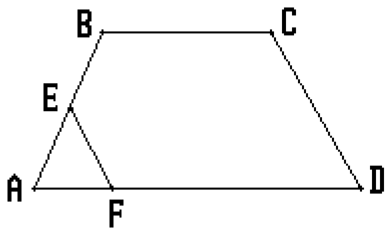
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на обратный. Второй антецедент выделен указателем "равно". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямые BC и AD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ прямая(AD) & $l(AF) = l(DF)$ & $G \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая$(BD) \rightarrow G \in$ отрезок(EF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Второй антецедент выделен указателем "равно". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

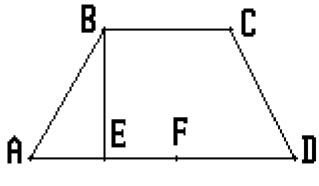
10. Отрезок, параллельный боковой стороне и соединяющий точку на другой боковой стороне с основанием.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(EF) \parallel$ прямая$(CD) \rightarrow l(AE) = l(EF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Хотя бы одно из расстояний AE, EF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

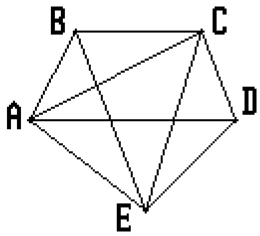
11. Проекция на нижнее основание вершины верхнего лежит между концом нижнего основания и его серединой.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $F \in$ отрезок(AD) & $l(AF) = l(DF)$ & $l(AB) = l(CD) \rightarrow E \in$ отрезок(AF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на обратный. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". Расстояние EF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

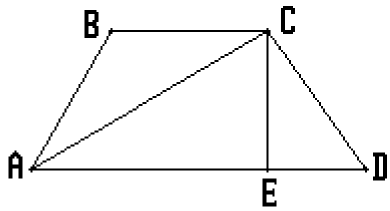
12. Две равнобедренных трапеции, наложенных друг на друга.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $l(AB) = l(CD)$ & прямая$(BE) \parallel$ прямая(CD) & $l(BC) = l(DE)$ & $\neg(l(AD) - l(BC) = 0)$ & $\neg(l(BE) - l(CD) = 0) \rightarrow l(AC) = l(EC)$ & $\angle(CAE) = \angle(CAD) + \angle(DAE)$ & $\angle(DCE) = \angle(DAE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и четвертый - указателем "идентификатор". Третий антецедент выделен указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 8.

13. Выражение высоты равнобедренной трапеции через длины оснований и угол между основанием и диагональю.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AD) & $l(AB) = l(CD)$ & актив$(\angle(CAD))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AD)) \rightarrow$ $2l(CE) = (l(BC) + l(AD))\,\mathrm{tg}(\angle(CAD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается изменение порядка вершин на противоположный. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные антецеденты - указателем "усм". Одно из выражений $l(CE)$, $l(BC)$, $l(AD)$, $\angle(CAD)$, после обработки нормализатором общей стандартизации, содержит неизвестные, а все остальные - не содержат. Уровень срабатывания равен 5.

3.31 Приемы, связанные с выпуклыми четырехугольниками общего вида

Утверждение "четырехугольник$(A\ B\ C\ D)$" означает, что точки A, B, C, D, проходимые в данном порядке, образуют вершины выпуклого четырехугольника. Допускаются все частные случаи четырехугольников (трапеция, ромб, и т.д.).

Циклическая перестановка вершин для стандартизации обозначения

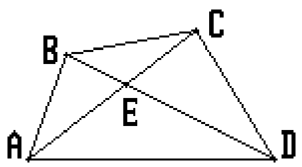
Действия полностью аналогичны случаю ромба.

Регистрация сторон четырехугольника

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ актив(прямая(AB)))

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются произвольные циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 0.

Точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника



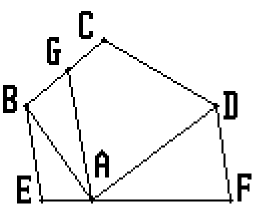
$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(BD) \rightarrow$
$E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник$(ABCD)$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BD)) $\rightarrow$
$E -$ точка & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD))

Антецеденты идентифицируются так же, как и выше. Точка E пересечения диагоналей пока не рассматривается, и прием ее вводит. Созданы две версии приема. Первая, срабатываюшая на уровне 5, дополнительно предполагает перпендикулярность диагоналей. Во второй, срабатывающей на уровне 9, вместо этого предполагается, что углы ABD и BAC уже рассматриваются в задаче.

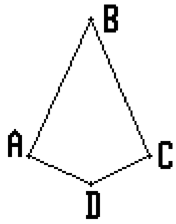
Усмотрение принадлежности вершины четырехугольника отрезку, концы которого суть проекции двух соседних с ней вершин



$\forall_{ABCDEFG}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $G \in$ отрезок(BC) &
прямая$(BE) \parallel$ прямая(AG) & прямая$(DF) \parallel$ прямая(AG) & $A \in$ прямая$(EF) \rightarrow$
$A \in$ отрезок(EF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Четырехугольник, составленный из двух равных прямоугольных треугольников с общей гипотенузой



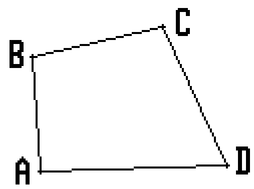
$\forall_{ABCD}$(прямая$(AD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(ABC))$ & $l(AB) = l(BC)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & $D \in$ плоскость$(ABC) \to l(AD) = l(AB)\,\mathrm{tg}(\angle(ABC)/2))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние AB и угол ABC известны, выражение для расстояния AD имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AD) \perp$ прямая(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(ABC))$ & односторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & односторона$(A, D,$ прямая$(BC)) \to \angle(ABC) + \angle(ADC) = \pi)$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла ABC имеет тип "неизв", а для угла ADC - тип "определимо". Уровень срабатывания равен 8.

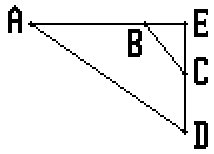
Сумма углов четырехугольника



$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \to \angle(ABC) + \angle(BCD) + \angle(CDA) + \angle(BAD) = 2\pi)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Углы ABC, BCD, BAD уже рассматриваются в задаче. Хотя бы один из участвующих в выводимом соотношении углов не известен. В случае задачи на доказательство после срабатывания приема предпринимается понижение веса условия до нуля. Уровень срабатывания равен 6. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 13. В ней допускаются циклические перестановки вершин и достаточно, чтобы в задаче рассматривался лишь один из указанных выше углов. Кроме того, противоположные стороны четырехугольника не должны быть параллельны.

Четырехугольник, у которого противоположные стороны перпендикулярны



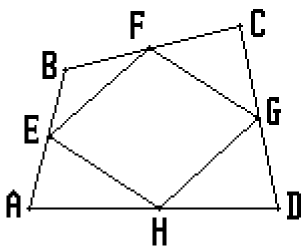
$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник$(ABCD)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) &
$0 \leq \pi/2 - \angle(BAD) \rightarrow E -$ точка & $B \in$ отрезок(AE) & $C \in$ отрезок(DE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Точка E пересечения прямых AB и CD пока не введена, и прием вводит ее. Уровень срабатывания приема равен 3.

$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник$(ABCD)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \rightarrow E -$ точка &
$E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $\neg(E \in$ интервал$(AB))$ &
$\neg(E \in$ интервал$(CD)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

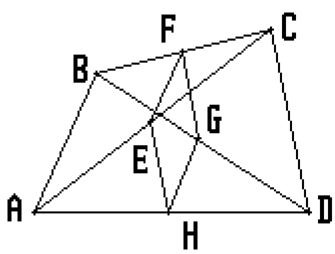
Усмотрение параллелограмма, вершины которого суть середины сторон четырехугольника



$\forall_{ABCDEFGH}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $l(BF) = l(CF)$ &
$G \in$ отрезок(CD) & $l(CG) = l(DG)$ & $H \in$ отрезок(AD) & $l(AH) = l(DH)$ &
$E \in$ отрезок(AB) & $l(AE) = l(BE) \rightarrow$ параллелограмм$(EFGH)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

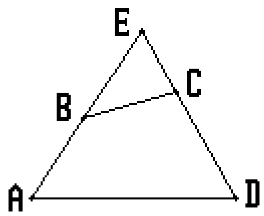
Усмотрение параллелограмма, вершины которого суть середины сторон и середины диагоналей четырехугольника



$\forall_{ABCDEFGH}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $l(BF) = l(CF)$ & $G \in$ отрезок(BD) & $l(BG) = l(DG)$ & $H \in$ отрезок(AD) & $l(AH) = l(DH)$ & $E \in$ отрезок(AC) & $l(AE) = l(CE) \to$ параллелограмм$(EFGH)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Определение принадлежности вершины четырехугольника отрезку между соседней вершиной и точкой пересечения несмежных сторон



$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $C \in$ отрезок$(DE) \to B \in$ отрезок(AE))

$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник$(DCBA)$ & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $C \in$ отрезок$(DE) \to B \in$ отрезок(AE))

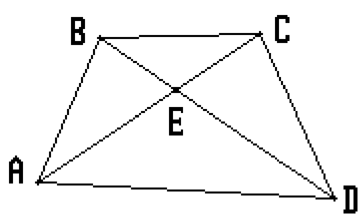
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

Ввод в рассмотрение угла четырехугольника

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD) \to$ актив$(\angle(BAD))$)

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. В задаче уже рассматриваются некоторый непрямой угол с вершиной B и некоторый непрямой угол с вершиной D. Уровень срабатывания приема равен 2.

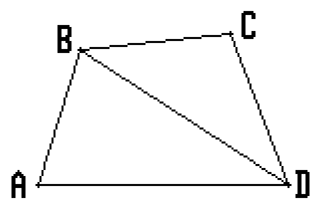
Угол между диагоналями четырехугольника



$\forall_{ABCDE}$($E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD) & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BCA))$ & актив$(\angle(BDA))$ & актив$(\angle(BDC)) \to \sin(\angle(BAC))\sin(\angle(BDA))\sin(\angle(CED) + \angle(BDC))\sin(\angle(CED) - \angle(BCA)) = \sin(\angle(BDC))\sin(\angle(BCA))\sin(\angle(CED) + \angle(BAC))\sin(\angle(CED) - \angle(BDA))$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из выражений для углов BAC, BDA, CED, BDC, BCA имеет тип "неизв", остальные выражения - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 10.

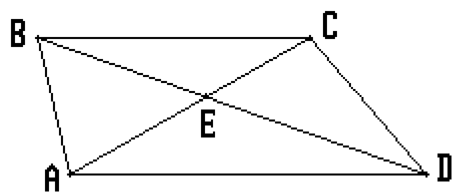
Вычисление длины диагонали, необходимой для нахождения длины одной из сторон



$\forall_{ABCD}$(актив($l(BC)$) & актив($l(CD)$) & актив($l(AD)$) & актив($l(AB)$) & актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(BCD)$) & однасторона(C, D, прямая(AB)) & однасторона(A, D, прямая(BC)) & однасторона(B, C, прямая(AD)) $\rightarrow$
$l(BD)^2 = l(BC)^2 + l(CD)^2 - 2l(BC)l(CD)\cos(\angle(BCD))$ &
$\angle(ABD) = \angle(ABC) - \angle(CBD)$)

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния BC, CD и углы ABC, BCD известны. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 8.

Ввод в рассмотрение точки пересечения диагоналей четырехугольника с параллельными противоположными сторонами



$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник($ABCD$) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & актив($\angle(BCA)$) & актив($\angle(BDA)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AD)$) & актив($l(AC)$) $\rightarrow E -$ точка & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD) & $\angle(CBD) = \angle(BDA)$ & актив($l(AE)$) & актив($l(EC)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хотя углы между диагоналями и параллельными сторонами уже рассматриваются, но точка E пересечения диагоналей еще не введена. Прием вводит эту точку. Уровень срабатывания равен 7.

3.32 Приемы, связанные с правильными многоугольниками

Утверждение "правмногоугольник(a)" означает, что a есть набор последовательно проходимых вершин правильного многоугольника. Последняя вершина набора является смежной с первой. В задачах допускается как явное задание конечного набора a, так и обозначение его переменной или каким - либо иным способом. Приводимые ниже приемы (кроме нескольких приемов, связанных с шестиугольниками) рассчитаны на произвольное число вершин многоугольника.

Величина центрального угла

$\forall_{ABCDijkn}$(правмногоугольник(D) & $l(D) = n$ & центр$(A,$фигура$(D))$ & $B = D(i)$ & $C = D(j)$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}$ & $k = j - i$ & $0 < k \rightarrow$ $\angle(BAC) = (2k\pi/n$ при $2k \leq n,$ иначе $2(n - k)\pi/n))$

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - выделены указателем "усм". Второй и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор"; шестой, седьмой и девятый - обрабатываются проверочными операторами. После идентификации первого и третьего антецедентов выполняется обработка четвертого и пятого. Здесь применяются идентифицирующие операторы, перечисляющие номера i, j элементов набора D, а также сами эти элементы B, C. Затем обрабатываются остальные антецеденты. Проверяется, что через вершины B, C проведены рассматриваемые в задаче прямые, причем между ними нет другой вершины, через которую проведена прямая. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCabijkn}$(правмногоугольник(C) & $l(C) = n$ & окружность(AB)описана около фигура(C) & коорд$(C(i), K) = a$ & коорд$(C(j), K) = b$ & $k = j - i$ & $0 \leq k$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ оруголмежду(вектор$(AC(i))$, вектор$(AC(j)), K) =$ $2k\pi$ориентация$(K,$ вектор$(AC(1))$, вектор$(AC(2)))/n)$

Первый, третий, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор", три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения i, j не содержат неизвестных. Одно из выражений a, b имеет тип "неизв", а другое - не содержит неизвестных. В посылках задачи имеется равенство для координат точки A. Уровень срабатывания равен 5.

Величина вписанного угла

$\forall_{ABCDijkmn}$(правмногоугольник(D) & $l(D) = n$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & $B = D(i)$ & $C = D(j)$ & $A = D(k)$ & $m = j - i \rightarrow \angle(BAC) = ((n - m)\pi/n$ при $i < k$ & $k < j,$ иначе $m\pi/n))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй и девятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". После идентификации первого антецедента предпринимается обработка антецедентов с номерами 6,7,8. Здесь используются идентифицирующие операторы, перечисляющие номера вершин i, j, k и сами вершины B, C, A. Затем обрабатываются остальные антецеденты. Проверяется, что $i < j$. Уровень срабатывания равен 3.

Равенство расстояний от центра до вершин

$\forall_{ABCDijn}$(правмногоугольник(D) & $l(D) = n$ & центр$(A,$фигура$(D))$ & $B = D(i)$ & $C = D(j)$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow l(AB) = l(AC))$

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "усм". Они перечисляют номера i, j вершин многоугольника, а также сами эти вершины B, C. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Проверяется, что через каждую из вершин B, C проходит какая-либо прямая, рассматриваемая в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

Пересечение диагонали с радиусом

$\forall_{ABCDEFijkn}$(правмногоугольник(E) & $l(E) = n$ & центр$(A,$фигура$(E))$ & $B = E(i)$ & $C = E(j)$ & $D = E(k)$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}$ & $k \in \{1, \ldots, n\}$ & $0 < k - i$ & $0 < j - k$ & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(BC) & $0 \leq n - 2(j - i) \to$ $F \in$ отрезок(AD) & $F \in$ отрезок$(BC))$

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Антецеденты с четвертого по шестой, а также двенадцать и тринадцатый выделены указателем "усм". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Номера i, j, k и вершины B, C, D перечисляются идентифицирующими операторами, реализующими антецеденты 4,5 и 6. Общая точка F радиуса AD и диагонали BC уже рассматривается в задаче и находится при обработке антецедентов 12, 13. Уровень срабатывания равен 4.

Равенство длин сторон

$\forall_{ain}$(правмногоугольник(a) & $n = l(a) \to l(a(i)a(i(\text{mod}n) + 1)) = l(a(1)a(2)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение a не должно иметь заголовка "набор". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCin}$(правмногоугольник(A) & $n = l(A)$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $B = A(i)$ & $C = A(i(\text{mod}n) + 1) \to l(A(1)A(2)) = l(BC))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "программа". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражение A имеет заголовок "набор". Номера вершин i перечисляются оператором "Номера", реализующим третий антецедент. Четвертый и пятый антецеденты, используя нормализатор "нормзначение", определяют соседние вершины B, C. Проверяется, что расстояние BC уже рассматривается в задаче. Уровни срабатывания равны 4 и 8.

Соотношение между длиной стороны и длиной диагонали

$\forall_{ABaijn}$(правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(j)$ & актив$(l(AB)) \to$ $l(a(1)a(2)) \sin(\pi|i - j|/n) = l(AB) \sin(\pi/n))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Идентифицирующие операторы, реализующие третий и четвертый антецеденты, перечисляют номера i, j и вершины A, B. Уровень срабатывания равен 5.

Ввод в рассмотрение угла между соседними сторонами

$\forall_{ABCDEin}$(правмногоугольник(D) & $l(D) = n$ & $A = D(i)$ & $B = D(i(\text{mod}n) + 1)$ & $C = D((i + 1)(\text{mod}n) + 1) \to$ актив$(\angle(ABC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "усм". Он перечисляет номера i и вершины A. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Таким образом, следующие за вершиной A вершины B, C определяются по набору D с помощью нормализатора "нормзначение". Проверяется, что на прямой AB выделены две точки, расстояние между которыми рассматривается в задаче, причем хотя бы одна из этих точек соединена прямой с вершиной C. Если это не выполнено, то аналогичное условие проверяется для прямой BC и вершины A. Уровень срабатывания равен 5.

Прямая, проведенная через вершину параллельно стороне, является диагональю либо пересекается с многоугольником по единственной точке

$\forall_{ABCDEFijkn}$(правмногоугольник(D) & $l(D) = n$ & $A = D(i)$ &
$B = D(i(\mathrm{mod} n) + 1)$ & $C = D(j)$ & прямая$(CE) \parallel$ прямая(AB) &
$k = (2i - j)(\mathrm{mod} n) + 1$ & $F = D(k) \to F \in$ прямая(CE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Третий, пятый и шестой антецеденты выделены указателем "усм", остальные - указателем "идентификатор". Третий и пятый антецеденты перечисляют номера i, j и вершины A, C. По этим данным точка B определяется четвертым антецедентом с помощью нормализатора "нормзначение". Седьмой антецедент определяет номер k той вершины, через которую должна пройти прямая CE, параллельная стороне AB. Уровень срабатывания равен 3.

Пересечение двух диагоналей внутри многоугольника

$\forall_{ABCDEFPijkln}$(правмногоугольник(D) & $l(D) = n$ & $A = D(i)$ & $B = D(j)$ &
$E = D(k)$ & $F = D(l)$ & $P \in$ прямая(EF) & $P \in$ прямая$(AB) \to P \in$ отрезок(AB)
& $P \in$ отрезок(EF))

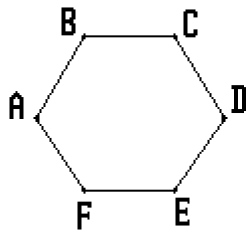
В этом приеме условия на номера вершин, при которых диагонали пересекаются, переброшены из теоремы в фильтры. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Антецеденты с третьего по шестой перечисляют номера вершин i, j, k, l и сами вершины A, B, E, F. Сразу же проверяется, что в задаче рассматривается общая точка P прямых AB и EF. Затем проверяются вынесенные в фильтры неравенства $i < j$, $i < k$, $k < j$, $l < i \vee j < l$. Уровень срабатывания приема равен 4.

Выражение длины стороны либо диагонали через радиус описанной окружности

$\forall_{ABaij}$(правмногоугольник(a) & $l(a) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}$ &
окружность(AB)описана около фигура$(a) \to l(a(i)a(j)) = 2l(AB)\sin(\pi|i - j|/n)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если выражения i, j содержат символ "вычет", то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

Параллельность сторон и диагоналей правильного шестиугольника

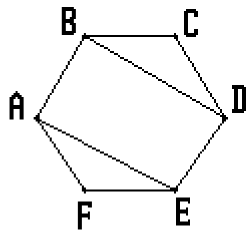


$\forall_{ABCDEF}$(правмногоугольник(A, B, C, D, E, F) & актив(прямая(BC)) $\rightarrow$ прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & $l(BC) = l(EF)$)

Заметим, что под символом "правмногоуоугольник" здесь расположен терм "набор(A ... F)". Символ "набор" формульный редактор в явном виде не прорисовывает, ограничиваясь расстановкой запятых между элементами набора. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается циклическая перестановка вершин. Второй антецедент выделен указателем "усм". Каждая из точек A, B, E, F встречается в некотором равенстве задачи, причем не под операциями "фигура". "вектор". Уровень срабатывания равен 3.

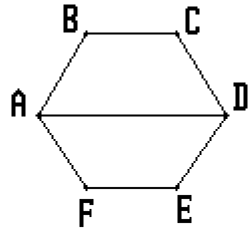
$\forall_{ABCDEF}$(правмногоугольник(A, B, C, D, E, F) & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(EF)) $\rightarrow$ прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & $l(BC) = l(EF)$)

Аналогично предыдущему, но вместо условия на точки A, B, E, F требуется, чтобы либо расстояние BC, либо хотя один из векторов BC, CB уже рассматривались в задаче. Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEF}$(правмногоугольник(A, B, C, D, E, F) & актив(прямая(AE)) $\rightarrow$ прямая$(AE) \parallel$ прямая(BD))

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Каждая из точек A, E, B, D встречается в некотором равенстве задачи, причем не под операциями "вектор", "фигура". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}$(правмногоугольник(A, B, C, D, E, F) & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(AD)) $\rightarrow$ прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $l(AD) = 2l(BC)$)

Обработка антецедентов прежняя. Либо расстояние BC, либо вектор с концами B, C уже рассматриваются в задаче. Должны рассматриваться также расстояние EF, либо вектор с концами E, F. Уровень срабатывания равен 4.

3.33 Приемы, связанные с окружностью

Выражение "окружность(A B)" обозначает множество точек окружности, имеющей центр A и проходящей через точку B. Это выражение можно использовать только в планиметрических контекстах, так как в трехмерном случае оно лишено смысла. Для задания окружности в трехмерном пространстве используется выражение "Окружность(A B C)", где A - центр, B - точка окружности и C - дополнительная точка, не лежащая на прямой AB и принадлежащая плоскости окружности. Последний случай встречался при обучении решателя редко, и подавляющая часть приемов относится к символу "окружность".

Регистрация окружности в активе

$\forall_{AB}$(актив(окружность(AB)))

Прием имеет заголовок "вывод". Он инициируется при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "окружность(AB)", пока не зарегистрированного в активе. Уровень срабатывания равен 0. Аналогичный прием введен для подвыражения "Окружность(ABC)".

Отождествление окружностей

$\forall_{ABC}$(актив(окружность(AB)) $\to B \in$ окружность(AC) $\leftrightarrow C \in$ окружность(AB))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение B лексикографически предшествует выражению C. Обозначения точек B, C различны.

$\forall_{ABC}$($C \in$ окружность(AB) $\to$ окружность(AC) $=$ окружность(AB))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Условия на точки B, C - те же, что и выше.

$\forall_{ABCD}$($D \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AC) $\to$
окружность(AB) $=$ окружность(AC))

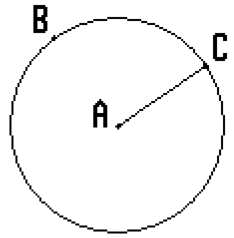
Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

Исключение тавтологичного условия принадлежности окружности

$\forall_{AB}$($B \in$ окружность(AB))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и срабатывает на уровне 0.

Точка окружности



$\forall_{ABC}(C \in$ окружность$(AB) \rightarrow l(AC) = l(AB))$

Этот и дальнейшие приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Если на прямой AC выделена также диаметрально противоположная точка окружности, то прием срабатывает на уровне 1, иначе - на уровне 2.

$\forall_{ABC}($актив(окружность$(AB))$ & $l(AC) = l(AB) \rightarrow C \in$ окружность$(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Фильтры "усм(актив(расстояние(AC)))", "не(контекст(усм(принадлежит(C окружность(AB)))))" поясняют идентификацию: по известным точкам A, B находятся такие точки C, что уже рассматривается их расстояние до центра окружности, причем пока не усматривается принадлежность окружности. Затем второй антецедент проверяет равенство расстояний AB и AC. Если окружность описана около фигуры, вершинами которой служат точки B, C, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

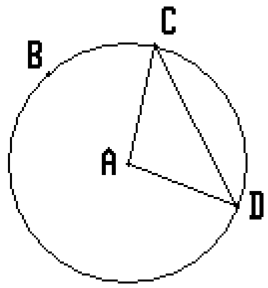
$\forall_{ABCD}(C \in$ Окружность$(ABD) \rightarrow l(AC) = l(AB)$ & $C \in$ плоскость$(ABD))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

Хорда окружности

1. Центральный угол, опирающийся на хорду.

   (a) Длина хорды, на которую опирается центральный угол.

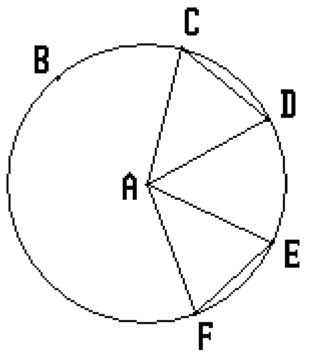


$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CAD)) \rightarrow l(CD) = 2l(AB)\sin(\angle(CAD)/2))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Расстояния AB и CD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3. На этой же теореме созданы еще несколько версий приема, в которых условия на расстояния AB, CD заменены следующими условиями:

i. Угол CAD и расстояние AB известны. Выражение для расстояния CD имеет тип "существатом". Уровень срабатывания равен 5.
ii. Угол CAD известен, причем задача имеет тип "доказать". Уровень срабатывания равен 5.
iii. Расстояние AB известно, а выражение для угла CAD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.
iv. Расстояние AB уже рассматривается в задаче, а выражение для расстояния CD имеет тип "квазиактив". Уровень срабатывания равен 6.

(b) Равенство центральных углов, опирающихся на равные хорды.



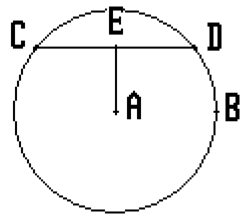
$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(EF) \to \angle(CAD) = \angle(EAF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Расстояния CD, EF и угол CAD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Равенство длин хорд, на которые опираются равные центральные углы.
$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $\angle(CAD) = \angle(EAF) \to l(CD) = l(EF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Углы CAD и EAF, а также прямые CD и EF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Расстояние от центра окружности до хорды, выраженное через величину центрального угла, опирающегося на хорду.

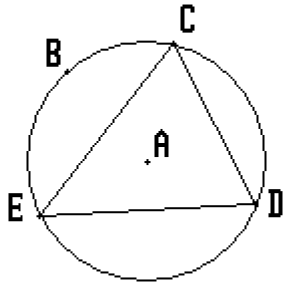


$\forall_{ABCDE}$($D \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & разныеточки(C, D) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CD) & актив($\angle(CAD)$) & $E \in$ прямая(CD) $\to$ $l(AE) = l(AD)\cos(\angle(CAD)/2)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается, что точка D лежит на прямой AC. Уровень срабатывания равен 7.

2. Вписанный угол, опирающийся на хорду.

   (a) Длина хорды, на которую опирается вписанный угол.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED)) \to l(CD) = 2l(AB)\sin(\angle(CED)))$

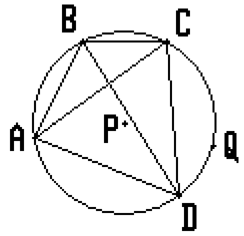
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ Окружность(ABF) & $D \in$ Окружность(ABF) &
$E \in$ Окружность(ABF) & актив$(\angle(CED)) \to l(CD) = 2l(AB)\sin(\angle(CED)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Хотя бы одно из выражений $l(AB)$, $\angle(CED)$, после обработки нормализатором общей стандартизации, либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "Неизв". Прямая CD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии первого приема, срабатывающие на уровне 6. В первой из них требуется, чтобы одно из выражений $l(AB)$, $\angle(CED)$ имело тип "неизв". Во второй - требуется, чтобы выражение для угла CED имело тип "неизв", а расстояние CD было известно. В обоих случаях предполагается, чтоб прямая CD и расстояние AB уже рассматриваются.

$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD)) \to l(CD) = 2l(AB)\sin(\angle(CED)))$

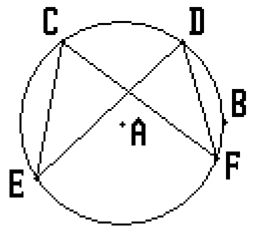
Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Расстояния AB и CD известны, а выражение для угла CED имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 9. Создана еще одна версия приема, имеющая тот же уровень срабатывания. В ней не требуется, чтобы прямая CD к данному моменту рассматривалась в задаче. Одно из выражений $l(AB)$, $l(CD)$ должно быть известным, а другое - иметь тип "неизв". Кроме того, угол CED должен иметь тип "определимо".

   (b) Вписанные углы, опирающиеся на равные хорды.



$\forall_{ABCDPQ}(A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) &
$C \in$ окружность(PQ) & актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(BAC))$ &
$D \in$ окружность(PQ) & актив(прямая(BD)) & актив(прямая(CD))
& актив(прямая(AD)) & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(AB))
& актив(прямая(AC)) & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC)) \rightarrow$
$\angle(ABC) = \pi - \angle(ADB) - \angle(BAC))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB)
& актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(CFD))$ & однасторона$(E, F,$ прямая$(CD)) \rightarrow$
$\angle(CED) = \angle(CFD))$

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

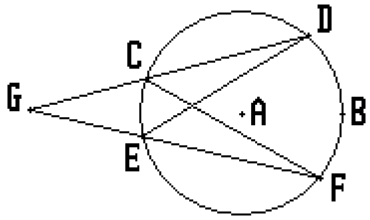
$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB)
& актив$(\angle(CED))$ & однасторона$(E, F,$ прямая$(CD)) \rightarrow$
$\angle(CED) = \angle(CFD))$

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Угол CED известен, а выражение для угла CFD имеет тип "применимо". Прямые CF, DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания приема равен 7. Созданы еще несколько его версий:

i. Решается задача на доказательство, причем прямые CF, DF в ней уже рассматриваются. Уровень срабатывания равен 9.

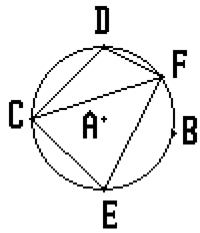
ii. Решается задача на доказательство либо на исследование (в геометрических приемах вывода это предполагается по умолчанию), причем угол CED известен, а выражение для угла CFD имеет тип "применимо". Прямые CF, DF уже рассматриваются. Уровень срабатывания равен 9.

iii. Пакетный индикатор "существравно" оценивает равенство углов CED, CFD как существенное. Никаких предположений о прямых CF, DF не делается. Уровень срабатывания равен 9.



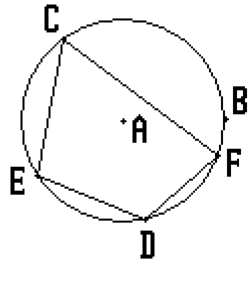
$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CDE))$ & $C \in$ отрезок(DG) & $E \in$ отрезок$(GF) \to$ $\angle(CDE) = \angle(CFE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(CE)$ & разныеточки(D, E) & $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(DF)) & актив(прямая(CF)) & актив(прямая(EF)) & однасторона$(A, F,$прямая$(CD))$ & однасторона$(A, F,$прямая$(CE)) \to \angle(DFC) = \angle(CFE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Пятый, десятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла DFC имеет тип "существатом". Уровень срабатывания равен 5.



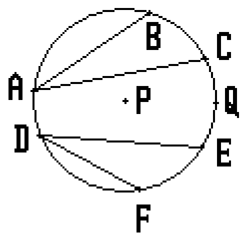
$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(CFD))$ & разныестороны$(E, F,$прямая$(CD)) \to$ $\angle(CED) + \angle(CFD) = \pi$)

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив($\angle(CED)$) & разныестороны($E, F,$ прямая(CD)) $\rightarrow$ $\angle(CED) + \angle(CFD) = \pi$)

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Угол CED известен, а угол CFD - нет. Прямые CF, DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 11.

(c) Равенство длин хорд, на которые опираются равные вписанные углы.

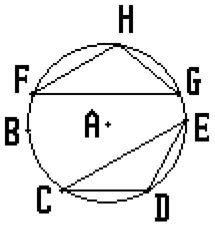


$\forall_{ABCDEFPQ}$($\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ окружность(PQ) & $E \in$ окружность(PQ) & $F \in$ окружность(PQ) & актив(окружность(PQ)) & актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(EDF)$) $\rightarrow$ $l(BC) = l(EF)$)

Восьмой антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние BC известно, прямая EF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы выражение для расстояния BC имело тип "существатом", а прямые BC, EF - уже рассматривались. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{ABCDEFPQ}$($\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ окружность(PQ) & $E \in$ окружность(PQ) & $F \in$ окружность(PQ) & актив(окружность(PQ)) $\rightarrow$ $l(BC) = l(EF)$)

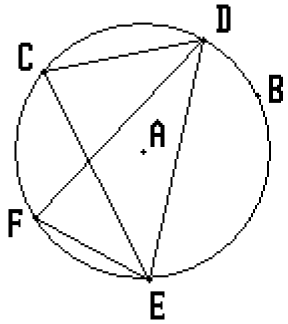
Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные антецеденты - указателем "усм". Выражение для расстояния BC имеет тип "существатом". Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(FH) $\parallel$ прямая(CE) & прямая(FG) $\parallel$ прямая(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(AB) &

$C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & разныеточки(F, H) & разныеточки(F, G) & разныеточки(C, E) & разныеточки$(C, D) \to l(GH) = l(DE))$

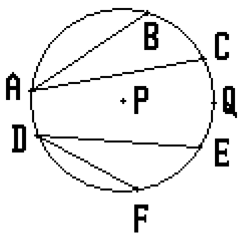
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, четыре последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния GH, DE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $\angle(DCE) = \angle(FED)$ & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность$(AB) \to l(DE) = l(DF))$

Второй антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Расстояние DE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

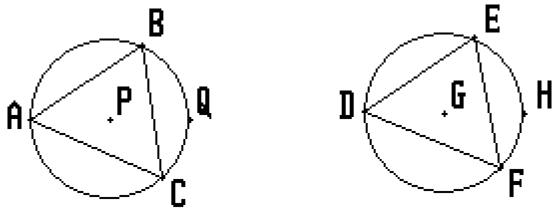
(d) Равенство длин хорд, на которые опираются вписанные углы, составляющие в сумме пи.



$\forall_{ABCDEFPQ}(\angle(BAC) + \angle(EDF) = \pi$ & $A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ окружность(PQ) & $E \in$ окружность(PQ) & $F \in$ окружность(PQ) & актив(окружность(PQ)) & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(EDF)) \to l(BC) = l(EF))$

Восьмой антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние BC известно, прямая EF уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 9.

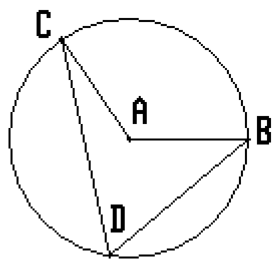
(e) Длины хорд, на которые опираются равные вписанные углы в различных окружностях равных радиусов.



$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(актив(окружность(PQ)) & актив(окружность(GH)) & $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ окружность(GH) & $E \in$ окружность(GH) & $F \in$ окружность(GH) & $l(PQ) = l(GH) \to l(BC) = l(EF)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "равно". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения окружностей различны. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 8.

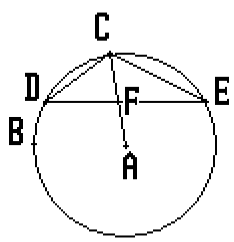
(f) Ввод в рассмотрение прямой - стороны вписанного угла, опирающегося на ту же дугу, что и ранее введенный центральный угол.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив(прямая(BD)) $\to$ актив(прямая(CD)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Проверяется, что из точки C опущен перпендикуляр на прямую BD, причем длина этого перпендикуляра уже рассматривается в задаче, и либо она известна, либо выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Угол BAC идентифицируется без учета направления его лучей. Уровень срабатывания равен 2.

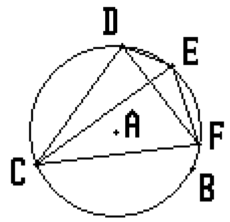
(g) Радиус, проведенный к вершине вписанного тупого угла, пересекается с хордой этого угла.



$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив($\angle(DCE)$) & $F \in$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(AC) & $0 \leq \angle(DCE) - \pi/2 \to F \in$ отрезок(AC))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Обращение к проверочному оператору сопровождается сравнительно сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.

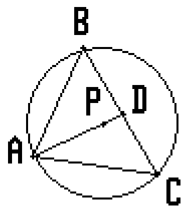
(h) Сложение вписанных углов.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(DCE))$ & актив$(\angle(DCF))$ &
$F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(DE)) &
актив(прямая(EF)) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(CF)) &
актив(прямая(DF)) & разныестороны$(D, F,$ прямая$(CE)) \rightarrow$
$\angle(DCF) = \angle(DCE) + \angle(ECF))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, тринадцатый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

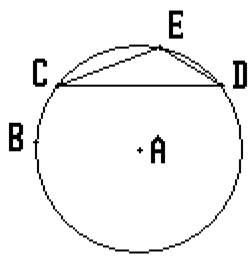
(i) Угол между хордой, на которую опирается вписанный угол, и диметром.



$\forall_{ABCDP}(B \in$ окружность(PA) & $C \in$ окружность(PA) & актив$(\angle(ABC))$
& $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая$(AP) \rightarrow \angle(DAC) = \pi/2 - \angle(ABC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

(j) Ввод в рассмотрение вписанного угла, опирающегося на хорду.

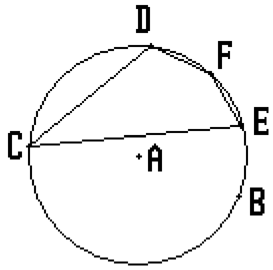


$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD))$ & $E \in$ окружность(AB) &

актив($\angle(ECD)$) & актив($\angle(EDC)$) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) $\rightarrow$ актив($\angle(CED)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние CD известно, выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Угол CED пока не рассматривается. Если в задаче рассматривается некоторый известный угол вида CPD, то уровень срабатывания равен 7, иначе он равен 9.

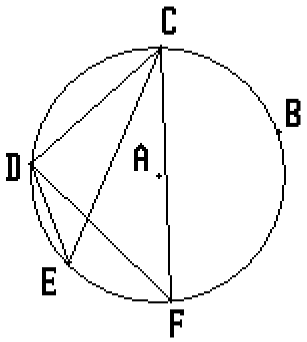
(k) Усмотрение биссектрисы вписанного угла.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(DCE))$ & $l(DF) = l(EF)$ & $F \in$ окружность(AB) & разныестороны$(C, F,$ прямая$(DE)) \rightarrow$ биссектриса$(DCEF))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В задаче отсутствует посылка, указывающая на биссектрису угла DCE. Уровень срабатывания равен 8.

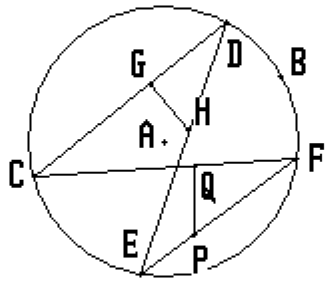
(l) Углы, связанные с биссектрисой вписанного угла.



$\forall_{ABCDEF}($актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $\angle(DCE) = \angle(ECF)$ & разныестороны$(D, F,$ прямая$(CE))$ & актив$(\angle(EDF)) \rightarrow \angle(EDF) = \angle(ECF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, шестой - выделен указателем "идентификатор", седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(m) Подобные прямоугольные треугольники, связанные с двумя вписанными углами, опирающимися на одну и ту же хорду.

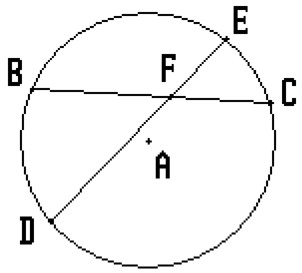


$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(CF)) & актив(прямая(DE)) & актив(прямая(EF)) & $G \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(DE) & прямая(GH) $\perp$ прямая(CD) & $Q \in$ прямая(CF) & $P \in$ прямая(EF) & прямая(PQ) $\perp$ прямая(CF) & актив($l(GH)$) & актив($l(PQ)$) $\rightarrow$ $l(GH)l(PF) = l(PQ)l(DH)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в двенадцатом антецеденте. Расстояние DH уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

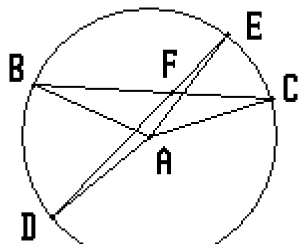
3. Две пересекающиеся хорды.

   (a) Угол между пересекающимися хордами и центральные углы.



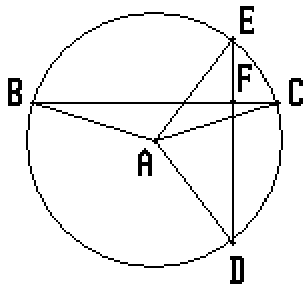
$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AG)) & $B \in$ окружность(AG) & $C \in$ окружность(AG) & $D \in$ окружность(AG) & $E \in$ окружность(AG) & $F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(DE) & $0 \leq \pi/2 - \angle(BCE)$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(DEC)$ & актив($\angle(DFC)$) $\rightarrow 2\angle(DFC) = \angle(BAE) + \angle(DAC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой и девятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Углы BAE и DAC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AG)) & $B \in$ окружность(AG) & $C \in$ окружность(AG) & $D \in$ окружность(AG) & $E \in$ окружность(AG) & $F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(DE) & разныестороны($B, C,$ прямая(AE)) & разныестороны($D, E,$ прямая(AC)) & разныестороны($B, C,$ прямая(AD)) & разныестороны($D, E,$ прямая(AB)) & актив($\angle(DFC)$) $\rightarrow$ $2\angle(DFC) = \angle(BAE) + \angle(DAC)$)

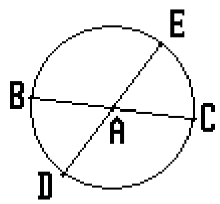
Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты с восьмого по одиннадцатый обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Углы BAE, DAC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AG)) & $B \in$ окружность(AG) & $C \in$ окружность(AG) & $D \in$ окружность(AG) & $E \in$ окружность(AG) & прямая(BC) $\perp$ прямая(DE) & $F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(DE) & разныеточки(B, C) & разныеточки(D, E) $\rightarrow \angle(BAE) + \angle(CAD) = \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BAE имеет тип "существатом". Уровень срабатывания равен 6.

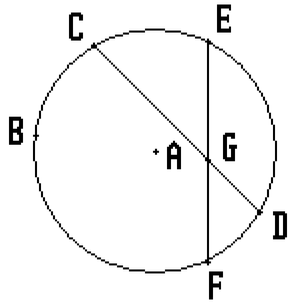
(b) Если две различные хорды делятся в точке пересечения пополам каждая, то эта точка является центром окружности.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(FG)) & $B \in$ окружность(FG) & $C \in$ окружность(FG) & $D \in$ окружность(FG) & $E \in$ окружность(FG) & $A \in$ отрезок(BC) & $l(AB) = l(AC)$ & $A \in$ отрезок(DE) & $l(AD) = l(AE)$ & разныепрямые(прямая(BC), прямая(DE)) $\rightarrow A = F$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

(c) Равенство произведений длин отрезков, на которые разбиваются пересекающиеся хорды.



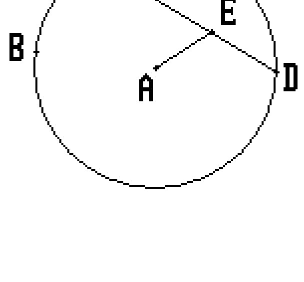
$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(EF) $\rightarrow l(CG)l(DG) = l(EG)l(GF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выводимое соотношение представляет собой уравнение относительно единственного неизвестного числового атома. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще несколько версий приема:

i. Все расстояния CG, DG, EG, GF уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы два из них имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.
ii. Хоты бы три из расстояний CG, DG, EG, GF уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы два из них (но не все) известны. Уровень срабатывания равен 5.
iii. Какие-то два из расстояний CG, DG, EG, GF имеют тип "неизв", а два оставшихся - тип "применимо". Уровень срабатывания равен 6.
iv. Выводимое соотношение, помимо численных параметров, может иметь не более одного невырожденного числового атома, причем этот атом уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 9.
v. Одно из выражений для расстояний CG, DG, EG, GF имеет тип "применимо", а остальные три - известны. Уровень срабатывания равен 9.
vi. Расстояния CG и DG известны, выражение для расстояния GF имеет тип "существатом", а для расстояния EG - тип "определимо". Уровень срабатывания равен 9.

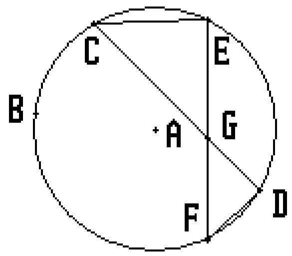
$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(EF) & актив($l(CG)$) & актив($l(DG)$) & актив($l(GE)$) & актив($l(FG)$) $\rightarrow l(CG)l(DG) = l(EG)l(GF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 10.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок$(CD) \rightarrow l(CE)l(ED) = l(AB)^2 - l(AE)^2$)

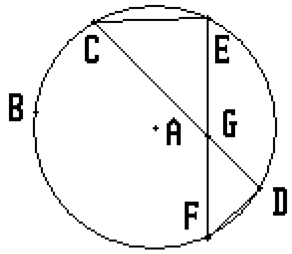
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хоты бы три из расстояний CE, ED, AB, AE выражены через численные параметры, а оставшееся - уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{abABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(EF) & $al(CE) = bl(DF)$ & разныепрямые(прямая(CD), прямая(EF)) $\rightarrow al(EG) = bl(DG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой - обрабатывается пакетным синтезатором. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат неизвестных. Одно из расстояний EG, DG известно, а другое - нет. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 7. В ней требуется, чтобы либо для расстояний EG, DG не усматривалась пропорциональность с известными коэффициентами, либо хотя бы одно из выражений a, b содержало неизвестные. Напомним, что синтезатор "пропорциональны" выдает лишь такие результаты a, b, которые выражены через численные параметры.

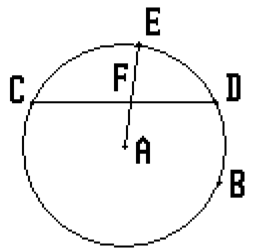
(d) Равенство произведений длин отрезков между концами пересекающихся хорд на длины отрезков этих хорд.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая$(EF) \rightarrow l(CE)l(DG) = l(DF)l(EG)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния CE, DG, DF, EG уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

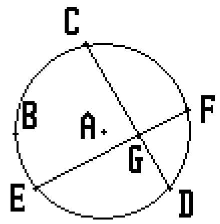
(e) Ввод в рассмотрение длины отрезка хорды.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB)
& $F \in$ прямая$(AE) \rightarrow$ актив$(l(CF))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". В задаче уже рассматриваются расстояния от точек C, F до некоторой точки прямой CD. Уровень срабатывания равен 8.

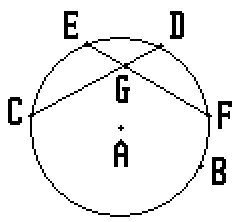
(f) Принадлежность точки пересечения хорде.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $G \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB)
& $F \in$ окружность(AB) & разныеточки(E, F) & $G \in$ прямая$(EF) \rightarrow$
$G \in$ отрезок(EF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

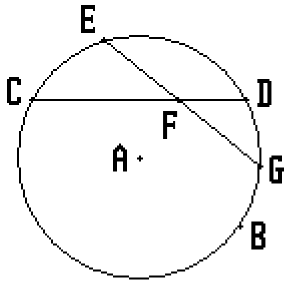
(g) Если две хорды делятся точкой пересечения в равных пропорциях, то их длины равны.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$G \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(EF) & $E \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & разныеточки(C, D) & разныеточки(E, F)
& $l(EG)l(CG) = l(FG)l(DG) \rightarrow l(CD) = l(EF))$

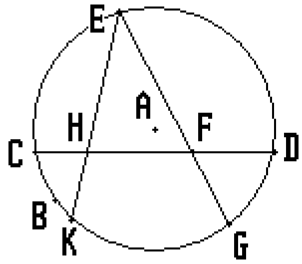
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой и восьмой - обрабатываются проверочным оператором. Девятый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные антецеденты - указателем усм". Уровень срабатывания равен 7.

(h) Продолжение отрезка хорды до пересечения с окружностью.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$F \in$ отрезок(CD) & актив$(l(CF))$ & актив$(l(DF))$ & разныеточки(C, D)
& $E \in$ окружность(AB) & актив$(l(EF)) \to G -$ точка &
$G \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок$(EG))$

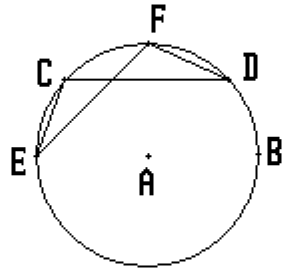
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния CF, DF, EF известны. Хотя бы одно из выражений $l(CE)$, $l(DE)$ имеет тип "существатом". Точка G пересечения прямой EF с окружностью AB пока не рассматривается, и прием вводит эту точку. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEFGHK}($актив(окружность$(AB))$ & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & $H \in$ отрезок(CF) &
актив$(\angle(HEF))$ & $E \in$ окружность(AB) & $\angle(CAD) = a$ &
разныеточки(C, D) & одностаорона$(A, E,$ прямая$(CD)) \to$
$G -$ точка & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(EG) & $K -$ точка
& $K \in$ окружность(AB) & $H \in$ отрезок(EK) & $a = \angle(CAK) +$
$\angle(DAG) + 2\angle(HEF))$

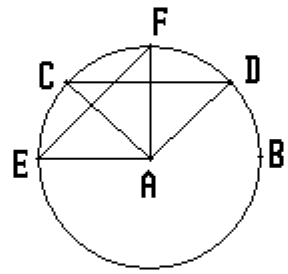
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие шесть - выделены указателем "усм". Восьмой антецедент выделен указателем "идентификатор", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражение a не содержит неизвестных. Выражение для угла HEF имеет тип "неизв". Хотя бы одна из точек K, G пересечения прямых EH, EF с окружностью AB пока не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение обе эти точки. Уровень срабатывания равен 8.

(i) Две равные пересекающиеся хорды.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ дуга(AEF) & $F \in$ дуга(ACD) & $l(EF) = l(CD) \to$
$l(CE) = l(DF))$

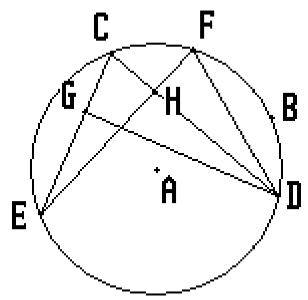
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Прямые CE, DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) &
$C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $l(EF) = l(CD)$
& актив$(\angle(EAC))$ & $C \in$ дуга(AEF) & $F \in$ дуга$(ACD) \to$
$\angle(DAF) = \angle(EAC))$

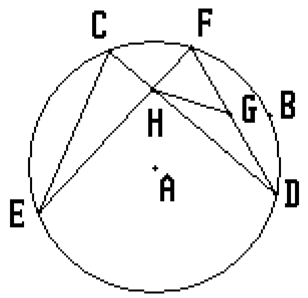
Два последних антецедента идентифицируются с посылками, пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол EAC известен, а угол DAF - нет. Уровень срабатывания равен 5.

(j) Две перпендикулярные хорды и перпендикуляр к отрезку между концами этих хорд.



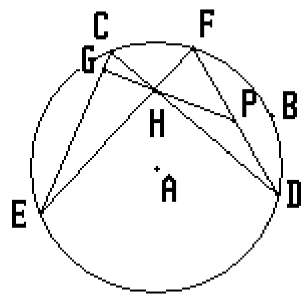
$\forall_{ABCDEFGH}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & $H \in$ отрезок(CD) & $H \in$ отрезок(EF)
& $G \in$ прямая(CE) & прямая$(CE) \perp$ прямая$(DG) \to \angle(CDF) = \angle(CDG))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEFGH}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $H \in$ отрезок(CD) & $H \in$ отрезок(EF) & $G \in$ прямая(FD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(GH) & однасторона$(C, F,$ прямая$(DE)) \rightarrow l(FG) = l(DG))$

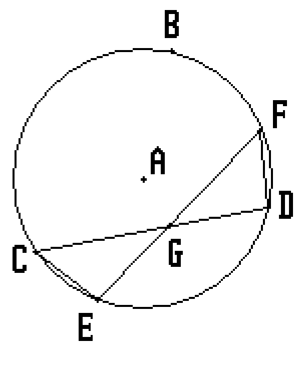
Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Уровень срсбатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEFGHP}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $H \in$ отрезок(CD) & $H \in$ отрезок(EF) & $G \in$ прямая(CE) & прямая$(CE) \perp$ прямая(GH) & однасторона$(C, F,$ прямая$(DE)) \rightarrow P -$ точка & $P \in$ отрезок(DF) & $H \in$ отрезок(GP) & $l(FP) = l(DP))$

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Точка P пересечения прямых DF и GH пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 7.

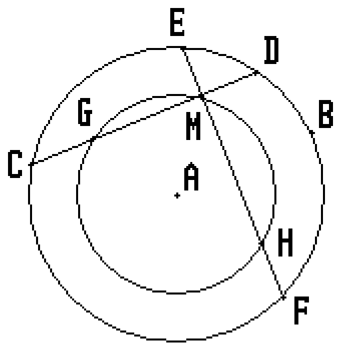
(k) Ввод в рассмотрение длины отрезка, соединяющего концы двух пересекающихся хорд.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $G \in$ отрезок(CD) & & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ отрезок(EF) & актив$(l(CE))$ & актив$(l(DG))$ & актив$(l(EG)) \rightarrow$ актив$(l(DF))$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Синтезатор "пропорциональны" усматривает пропорциональность расстояний EG и DG, причем коэффициенты суть некоторые выражения с численными параметрами. Выражение для расстояния CE имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

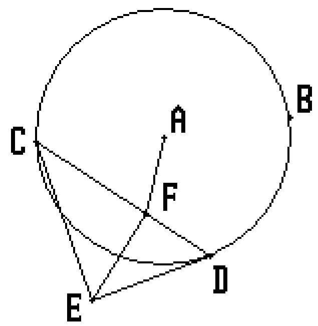
(l) С противоположных концов двух пересекающихся хорд отложены отрезки, равные отрезкам этих хорд до точки пересечения.



$\forall_{ABCDEFGHM}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $M \in$ отрезок(CD) & $M \in$ отрезок(EF) & разныеточки(E, D) & разныеточки(E, C) & $G \in$ отрезок(CD) & $l(CG) = l(MD)$ & $H \in$ отрезок(EF) & $l(FH) = l(EM) \rightarrow G \in$ окружность(AM) & $H \in$ окружность(AM))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой и девятый - обрабатываются проверочными операторами. Одиннадцатый и тринадцатый антецеденты выделены указателем "идентификатор", отальные - указателем "усм". Прием усматривает принадлежность точек G, M, H окружности с центром в точке A. Уровень срабатывания равен 4.

(m) Одна из хорд служит гипотенузой прямоугольного треугольника, причем точка пересечения хорд совпадает с основанием высоты.

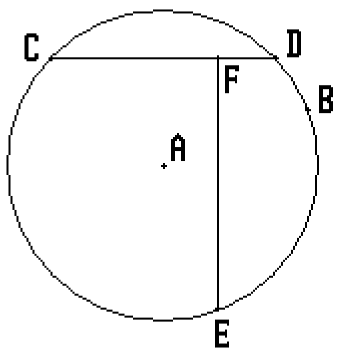


$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(DE) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD) &

$F \in$ прямая(CD) & актив$(l(AF))$ & разныеточки$(C, D) \to$
$l(EF)^2 + l(AF)^2 = l(AB)^2)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

(n) Усмотрение расположения точки окружности и центра по отношению к хорде, если известны расстояние от точки до хорды и длины отрезков, на которые хорда разбивается опущенным из точки перпендикуляром.



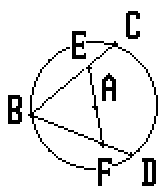
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$F \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD)
& $p = l(EF)^2 - l(CF)l(DF)$ & $0 < p \to$ однасторона$(A, E,$ прямая$(CD)))$

$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$F \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD)
& $p = l(EF)^2 - l(CF)l(DF)$ & $p < 0 \to$ разныестороны$(A, E,$ прямая$(CD)))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в пятом антецеденте. Шестой антецедент выделен указателем "идентификатор", седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Расстояния CF, DF и EF известны. Не усматривается расположение точек A, E по отношению к прямой CD. Обращение к проверочному оператору сопровождается сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 9.

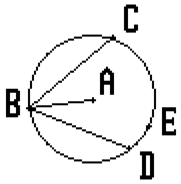
4. Две хорды с общим концом.

(a) Две равные хорды, проведенные из общей точки.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$l(BC) = l(BD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(BD) &
$A \in$ прямая(EF) & разныеточки$(C, D) \to A \in$ отрезок$(EF))$

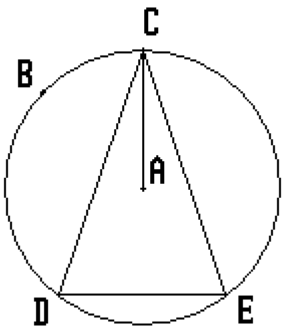
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AE)) & $B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) & $D \in$ окружность(AE) & $l(BC) = l(BD)$ & разныеточки(C, D) $\to$ биссектриса($CBDA$))

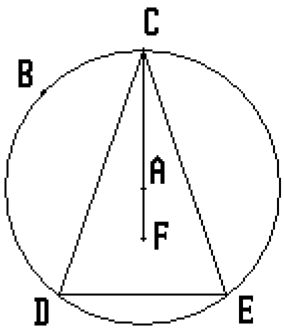
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Либо прямые BC, BD перпендикулярны, либо угол CBD уже рассматривается в задаче. Выделены расстояния от точки B, D до некоторых двух точек окружности, отличных от точек C, D. Уровень срабатывания равен 5.

(b) Ввод в рассмотрение прямой, соединяющей концы равных хорд, проведенных из одной точки.



$\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(CE)$ & разныеточки(D, E) $\to$ прямая(DE) $\perp$ прямая(AC))

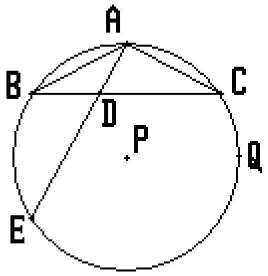
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - выделен указателем "идентификатор", последний - обрабатывается проверочным оператором. Первый и третий антецеденты выделены указателем "усм". Прямая AC уже рассматривается в задаче. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(CE)$ & разныеточки(D, E) &
прямая$(CF) \perp$ прямая$(DE) \to A \in$ прямая$(CF))$

Первые пять антецедентов идентифицируются так же, как в предыдущем приеме, шестой - выделен указателем "усм". Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

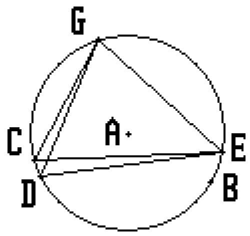
(c) Две равные хорды, проведенные из общей точки, и третья хорда, пересекающаяся с отрезком, соединяющим концы двух первых хорд.



$\forall_{ABCDEPQ}(A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) &
$C \in$ окружность(PQ) & $l(AB) = l(AC)$ & $E \in$ окружность(PQ)
& $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ отрезок(AE) & разныеточки(B, C) &
разныеточки$(D, E) \to l(AB)^2 = l(AD)l(AE))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой и девятый - обрабатываются проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

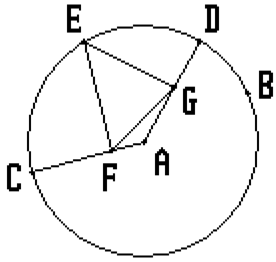
(d) Отождествление концов двух равных хорд.



$\forall_{ABCDEG}($окружность(AB)описана около фигура(CDE) & $l(CG) = l(GE)$
& $G \in$ окружность(AB) & $l(CG) = l(DG)$ & разныеточки(D, E) &
разныеточки$(C, E) \to C = D)$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль", т.е. при контроле непротиворечивости подслучая. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

(e) Две хорды, перпендикулярные радиусам.

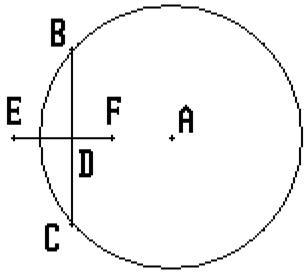


$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(AC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AC)
& $G \in$ прямая(AD) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AD) & актив$(\angle(FEG))$ &
актив(прямая$(FG)) \rightarrow l(FG) = \sin(\angle(FEG))l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол FEG и расстояние AB известны, расстояние FG - не известно. Уровень срабатывания равен 4.

5. Перпендикуляр к середине хорды.

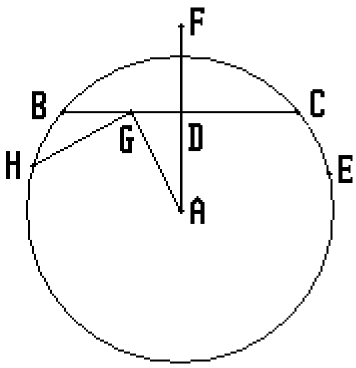
   (a) Прямая, проходящая через середину хорды и перпендикулярная к ней, проходит через центр окружности.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ прямая(BC) & $l(BD) = l(CD)$ &
$D \in$ прямая(EF) & прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
$A \in$ прямая$(EF))$

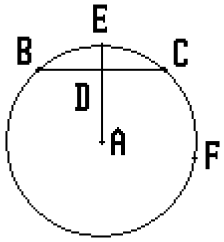
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "равно". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Проведение перпендикуляра к хорде из центра окружности.



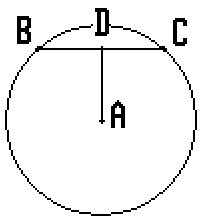
$\forall_{ABCDEFGH}(C \in$ окружность(AE) & $B \in$ окружность(AE) & актив(прямая(BC)) & $G \in$ прямая(BC) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AG) & $H \in$ окружность$(AE) \rightarrow D -$ точка & $F \in$ точка & $\neg(A = F)$ & $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая(AF) & прямая$(AF) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(CD)$ & $l(BC) = 2l(CD))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Через точку A пока не проведен перпендикуляр к хорде BC. Прием проводит такой перпендикуляр AF и вводит в рассмотрение точку D пересечения его с хордой. Вспомогательная точка F нужна для учета вырожденного случая, когда хорда проходит через центр окружности. Уровень срабатывания равен 6.



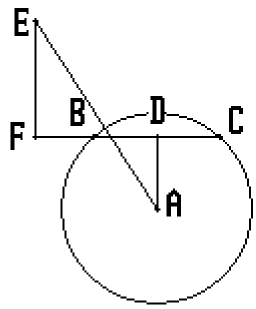
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) & актив$(l(BC))$ & $D \in$ отрезок(BC) & $l(BD) = l(CD) \rightarrow E-$точка & $E \in$ окружность(AF) & $D \in$ отрезок(AE) & прямая$(AE) \perp$ прямая$(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AC, BD известны. Через точку A не проведен перпендикуляр к хорде BC. Прием проводит такой перпендикуляр и продолжает его до точки E пересечения с окружностью. Уровень срабатывания равен 7.



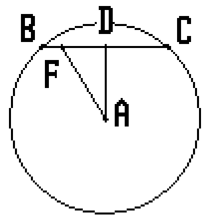
$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & актив$(l(BC))$ & $D \in$ отрезок(BC) & $l(BD) = l(CD)$ & разныеточки$(A, D) \rightarrow$ прямая$(AD) \perp$ прямая$(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В задаче рассматривается угол, вершина которого лежит на отрезке BC и отлична от концов этого отрезка, причем одна из сторон угла находится на прямой BC. Не рассматривается прямая, проходящая через точку D перпендикулярно хорде BC. Уровень срабатывания приема равен 8.



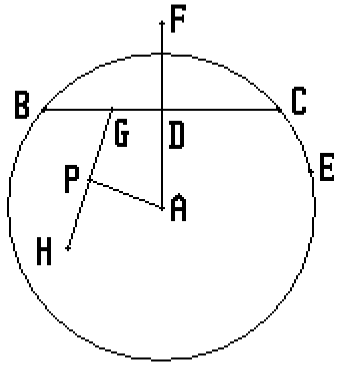
$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(BC) &
прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & актив(прямая(AE)) &
актив$(\angle(AEF)) \rightarrow D -$ точка & $G -$ точка & $D \in$ отрезок(BC) &
$D \in$ прямая(AG) & прямая$(AG) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(CD)$ &
$l(BC) = 2l(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние BC уже рассматривается в задаче. Не усматривается принадлежность точки A хорде BC. Через точку A пока не проведен перпендикуляр к этой хорде. Прием вводит в рассмотрение новые точки D, G, причем отличная от A точка G нужна из-за того, что совпадение точек A и D, в принципе, остается возможным. Уровень срабатывания приема равен 9.



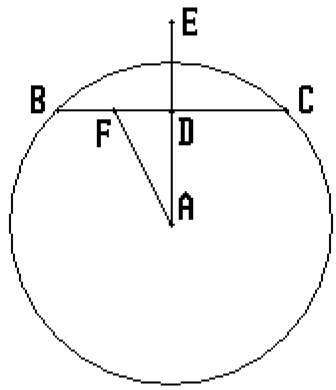
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок$(BC) \rightarrow D -$ точка &
$E -$ точка & $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая(AE) &
прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(CD)$ & $l(BC) = 2l(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Из посылок усматривается пропорциональность расстояний BF и CF. Прямые AF, BC уже рассматриваются в задаче. Через точку A пока не проведен перпендикуляр к прямой BC. Прием проводит такой перпендикуляр, вводя в рассмотрение середину хорды D, а также некоторую отличную от A точку E данного перпендикуляра. Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCDEFGHP}(C \in$ окружность(AE) & $B \in$ окружность(AE) & актив(прямая(BC)) & $G \in$ прямая(BC) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AP) & $P \in$ прямая$(GH) \to D$ – точка & F – точка & $\neg(A = F)$ & $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая(AF) & прямая$(AF) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(CD)$ & $l(BC) = 2l(CD))$

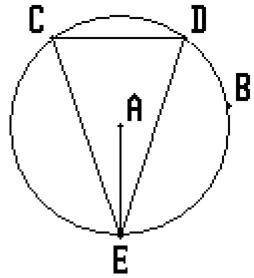
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние BC известно, выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Через точку G проведена прямая, перпендикулярная прямой GH. Не усматривается принадлежность точки A прямой BC. Проходящий через точку A перпендикуляр к прямой BC пока не рассматривается, и прием вводит его в рассмотрение. Уровень срабатывания приема равен 9.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(BC) & актив$(l(AF)) \to$ D – точка & E – точка & $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая(AE) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $l(BD) = l(CD)$ & $l(BC) = 2l(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AF, BC и AB известны. Расстояние BF не известно. Середина D хорды BC не выделена, и через точку A не проведен перпендикуляр AE к хорде. Прием вводит в рассмотрение точки D и E. Уровень срабатывания равен 9.

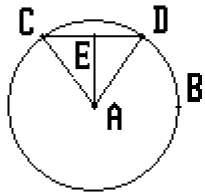
(c) Равенство расстояний от концов хорды до точки окружности, лежащей на радиусе, перпендикулярном хорде.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CD) & актив($l(DE)$) $\to l(DE) = l(CE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния DE имеет ти "неизв", расстояние CE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы расстояние DE было известно, а CE - нет. Здесь уровень срабатывания равен 4.

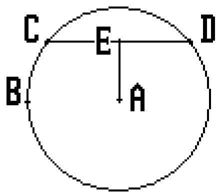
(d) Ввод в рассмотрение центрального угла, если проведен перпендикуляр к середине хорды.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CD) & разныеточки(C, D) $\to$ актив($\angle(CAD)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние AC известно, выражение для расстояния AE имеет тип "неизв". Через каждый из концов хорды CD проведена прямая, пересекающаяся с окружностью по некоторой выделенной точке, не являющейся концом этой хорды. Уровень срабатывания равен 10.

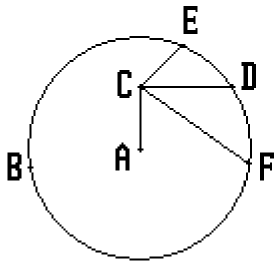
(e) Прямая, проходящая через центр и середину хорды, перпендикулярна этой хорде.



$\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(CD) & $l(CE) = l(DE)$ & разныеточки(C, D) & актив(прямая(AE)) & разныеточки(A, E) $\to$ прямая(AE) $\perp$ прямая(CD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый и седьмой - обрабатываются проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

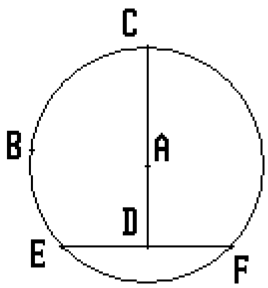
(f) Соотношение для длин отрезков хорд, проведенных под равными углами к середине третьей хорды.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & актив$(l(CD))$
& актив$(l(CE))$ & актив$(l(CF))$ & разныеточки(E, F) &
$\angle(DCE) = \angle(DCF)$ & актив(DCE) & актив$(DCF) \rightarrow$
$l(CD)^2 = l(CE)l(CF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой и девятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

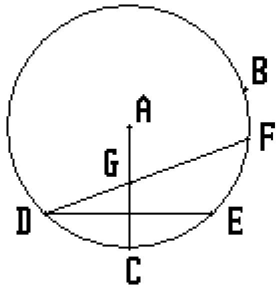
(g) Длины хорды, проведенного к ее середине перпендикуляра и радиуса окружности.



$\forall_{ABCDEFG}($актив(окружность(AB)) & $E \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & прямая$(AC) \perp$
прямая(EF) & $D \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(EF) &
разныеточки$(E, F) \rightarrow 4l(CD)^2 + l(EF)^2 = 8l(CD)l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния CD, EF и AB уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы одно из них имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

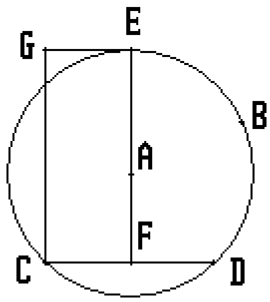
(h) Угол между перпендикуляром к середине хорды и другой хордой, имеющей тот же конец.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
актив(прямая(DE)) & $C \in$ окружность(AB) & прямая$(AC) \perp$ прямая(DE)
& $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(DF)) & актив$(\angle(FGC))$ &
$G \in$ отрезок(DF) & разныеточки$(D, G) \rightarrow \angle(FDE) = |\angle(FGC) - \pi/2|)$

Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в пятом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Угол FGC известен, а угол FDE - нет. Уровень срабатывания равен 8.

(i) Продолжение радиуса до пересечения с перпендикулярной ему хордой.

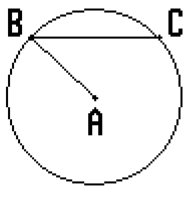


$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CD) &
прямая$(GE) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(CG) \perp$ прямая$(CD) \rightarrow$
$F -$ точка & $F \in$ прямая(AE) & $F \in$ прямая(CD))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Расстояния GE, CD уже рассматриваются в задаче. Точка F пересечения прямых CD и AE пока не введена в рассмотрение. Прием вводит эту точку. Уровень срабатывания равен 8.

6. Радиус, проведенный к концу хорды.

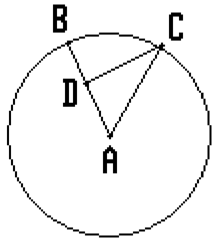
(a) Длина хорды, образующей заданный угол с радиусом.



$\forall_{ABC}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ оркужность(AB) & актив$(\angle(ABC))$
& разныеточки$(B, C) \rightarrow l(BC) = 2l(AB)\cos(\angle(ABC)))$

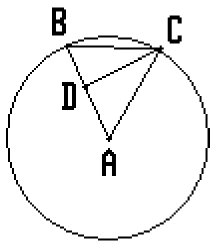
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB и BC уже рассматриваются в задаче. Не более чем одно из выражений $l(AB)$, $l(BC)$, $\angle(ABC)$ не известно и не имеет типа "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(b) Проекция конца хорды окружности на радиус, проходящий через другой ее конец.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(BAC))$ & $\angle(BAC) < \pi/2$ &
$D \in$ прямая(AB) & прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \to D \in$ отрезок$(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

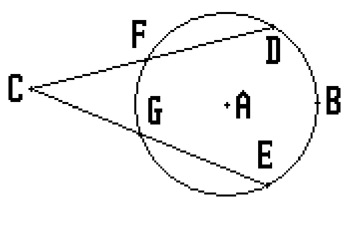


$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(ABC))$ & $D \in$ прямая(AB) &
прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \to \neg(B \in$ интервал$(AD)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Идентифицирующие операторы не усматривают расположение точки D на луче BA. Уровень срабатывания равен 6.

7. Секущие.

(a) Равенство произведений длин отрезков двух различных секущих, проведенных из общей точки.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CD) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB)

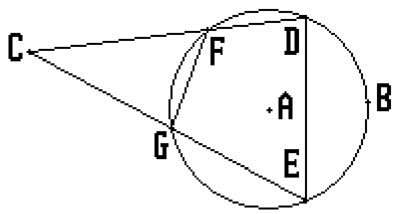
& $G \in$ отрезок(CE) & разныеточки(F, D) & разныеточки$(G, E) \rightarrow$
$l(CF)l(CD) = l(CG)l(CE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния CF, CD, CG, CE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы расстояния CF и CG уже рассматривались в задаче, а хотя бы одно из выражений $l(CD)$, $l(CE)$ имело тип "существатом". Уровень срабатывания тот же.

$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CD) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB)
& $G \in$ отрезок(CE) & разныеточки(F, D) & разныеточки$(G, E) \rightarrow$
$l(CF)l(CD) = l(CG)(l(CG) + l(GE)))$

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем случае. Расстояние GE известно, выражения для расстояний CF и CD имеют тип "определимо". Расстояние CG не известно. Уровень срабатывания равен 8.

(b) Углы между двумя хордами и двумя секущими, проходящими через их концы.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $D \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) &
$G \in$ окружность(AB) & $G \in$ отрезок(CE) & разныеточки(E, G) &
разныеточки(F, D) & актив$(\angle(GED))$ & разныеточки$(F, G) \rightarrow$
$\angle(CFG) = \angle(GED))$

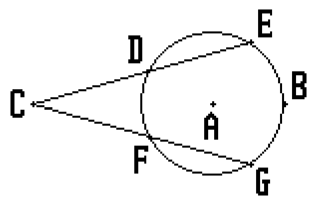
Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Восьмой, девятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

(c) Подобные треугольники, возникающие при рассмотрении двух хорд и двух секущих,проходящих через их концы.

$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $D \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) &
$G \in$ окружность(AB) & $G \in$ отрезок(CE) & разныеточки(E, G) &
разныеточки(F, D) & актив$(\angle(GED))$ & разныеточки$(F, G) \rightarrow$
$(C, F, G) \sim (C, E, D))$

Чертеж и обработка антецедентов такие же, как в приеме из предыдущего пункта. Хотя бы один из углов CFG, DCE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

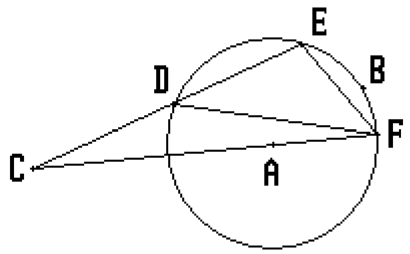
(d) Две секущие, пересекающиеся с окружностью по хордам равной длины.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ отрезок(CE) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CG) & $l(DE) = l(FG)$ & разныеточки(D, E) & разныеточки(F, G) & разныепрямые(прямая(CE), прямая$(CG)) \to$ биссектриса$(ECGA)$ & $l(CD) = l(CF))$

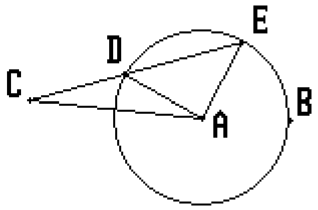
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочным оператором. Антецеденты со второго по шестой выделены указателем "усм". Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4. Создана копия приема, срабатывающая на уровне 10.

(e) Две секущие, одна из которых проходит через центр.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ отрезок(CE) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CF) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(ECF))$ & актив$(\angle(CFD))$ & актив$(\angle(CFE)) \to$ $2\angle(ECF) + 2\angle(CFD) + 2\angle(CFE) = \pi)$

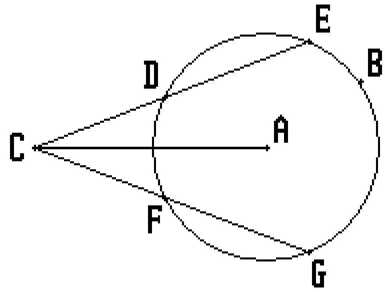
Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEab}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ отрезок(CE) & $bl(DE) = cl(CD)$ & актив$(\angle(ECA))$ & $\angle(ECA) = a$ & актив(окружность$(AB)) \to \angle(DAE) =$ $\pi - 2\,\mathrm{arctg}((2b/c + 1)\,\mathrm{tg}\,a))$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой. Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, шестой - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b, c не содержат неизвестных; угол DAE не известен. Уровень срабатывания равен 9.

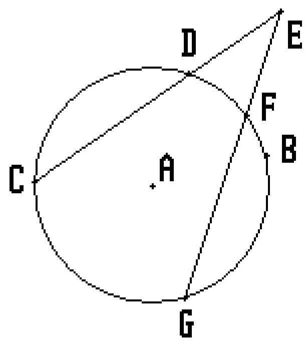
(f) Две секущие, проведенные из одной точки и имеющие равные длины.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & разныеточки(D, E) & $E \in$ прямая(CD) & $\neg(C \in$ интервал$(DE))$ & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & разныеточки(F, G) & $G \in$ прямая(CF) & $\neg(C \in$ интервал$(FG))$ & $l(CD) = l(CF)$ & разныепрямые(прямая(CD), прямая$(CF)) \rightarrow$ биссектриса$(ECGA))$

Идентификация начинается с одиннадцатого антецедента, выделенного указателем "равно". Различие точек и прямых, а также непринадлежность интервалу усматриваются с помощью проверочных операторов. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

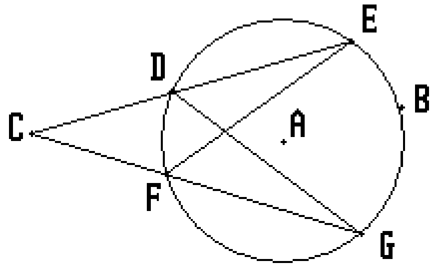
(g) Разбор случаев для взаимного расположения двух точек на окружности по отношению к концу секущей.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(FG) & актив$(\angle(DEF))$ & точкалуча$(E, C, D) \rightarrow D \in$ отрезок$(CE)\ \vee\ C \in$ отрезок$(DE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Касательная к окружности через точку E не проведена. Взаимное расположение точек C, D, E при помощи идентифицирующих операторов не усматривается. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 5.

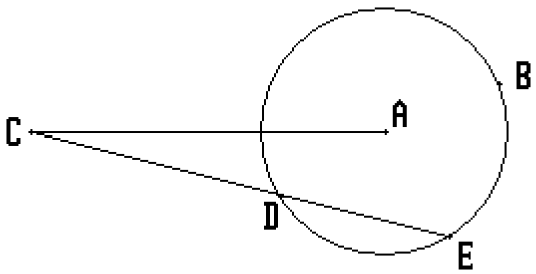
(h) Угол между двумя секущими и вписанные углы.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $D \in$ отрезок(CE) & $F \in$ окружность(AB) &
$G \in$ окружность(AB) & актив($\angle(ECG)$) & разныеточки(D, E) &
разныеточки(F, G) & $F \in$ прямая(CG) $\to \angle(ECG) = \angle(EDG) - \angle(DEF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой и девятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол ECG известен. Углы EDG и DEF уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы один из них имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

(i) Ввод в рассмотрение угла между секущей и лучом, проведенным через центр окружности.



$\forall_{ABCDE}$($D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
актив(прямая(CE)) & $D \in$ отрезок(CE) $\to$ актив($\angle(ACE)$))

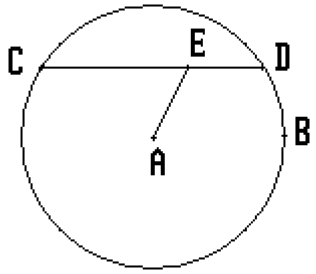
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм". Расстояние AB известно. Выражения для расстояния AC и угла ACE имеют тип "определимо", выражение для расстояния DE - тип "существатом". Уровень срабатывания равен 10.

(j) Длины отрезков секущей и расстояние от ее конца до центра окружности.

$\forall_{ABCDE}$($D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив($l(AC)$)
& $C \in$ прямая(DE) & точкалуча(C, D, E) & разныеточки(D, E) $\to$
$l(CD)l(CE) = l(AC)^2 - l(AB)^2$)

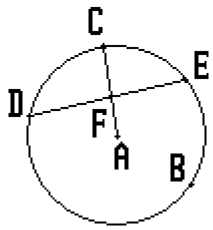
Чертеж прежний. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния CD, CE, AC, AB уже рассматриваются в задаче, причем два из них известны. Уровень срабатывания равен 11.

8. Пересечение хорды с радиусом.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(CD) & $\angle(CEA) = a$ & $0 < \pi/2 - a \rightarrow 0 < l(CE) - l(DE))$

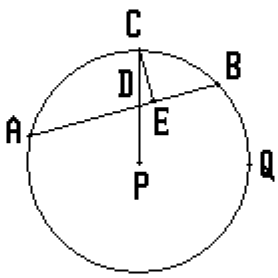
Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных. Расстояния CE и DE уже рассматриваются в задаче. Не усматривается перпендикулярность прямых AE и CD. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(DE) & $F \in$ отрезок$(AC) \rightarrow l(DF)l(FE) = l(CF)(2l(AB) - l(CF)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Каждое из выражений для расстояний DF, FE, CF, AB либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Хотя бы одно из этих расстояний не известно. Уровень срабатывания равен 8.

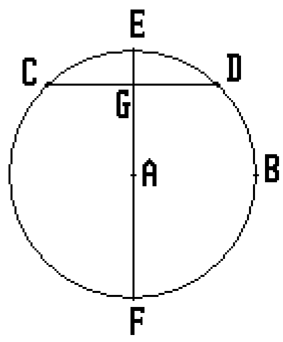
9. Хорда, делящаяся радиусом пополам.



$\forall_{ABCDEPQ}(A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) &
$C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ отрезок(AB) & $l(AD) = l(BD)$ & разныеточки(A, B) & $D \in$ прямая(CP) & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & разныеточки$(D, E) \rightarrow D = P)$

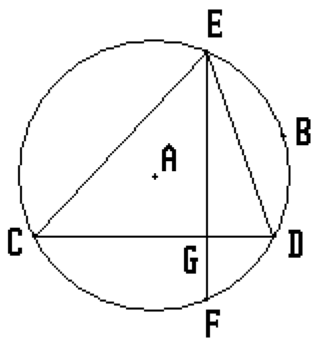
Идентификация начинается с пятого антецедента, выделенного указателем "равно". Шестой и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, причем для них введены сильные ограничители трудоемкости. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

10. Ввод в рассмотрение точки пересечения двух перпендикулярных хорд.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB)
& $A \in$ отрезок(EF) & разныеточки$(C, D) \rightarrow G -$ точка & $G \in$ отрезок(CD) &
$G \in$ отрезок$(EF))$

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Точка G пересечения прямых CD и EF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

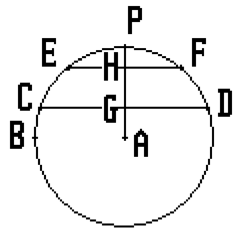


$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(EF)
& $\angle(ECD) = a$ & $\angle(EDC) = b$ & $0 \leq \pi/2 - a$ & $0 \leq \pi/2 - b \rightarrow G -$ точка &
$G \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок$(EF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормугол", причем результаты a, b не содержат неизвестных. Два последних антецедента обрабатываются проверочным оператором. Точка G пересечения прямых CD и EF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 7.

11. Параллельные хорды.

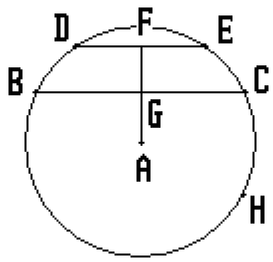
(a) Общий перпендикуляр к двум параллельным хордам.



$\forall_{ABCDEFGHP}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \parallel$
прямая(CD) & $G \in$ прямая(CD) & прямая$(AP) \perp$ прямая(CD) &
$G \in$ отрезок(AP) & $P \in$ окружность(AB) & однасторона$(E, P,$
прямая$(CD)) \to H -$ точка & $H \in$ отрезок(AP) & $H \in$ отрезок(EF) &
$G \in$ отрезок(AH) & $l(EH) = l(HF))$

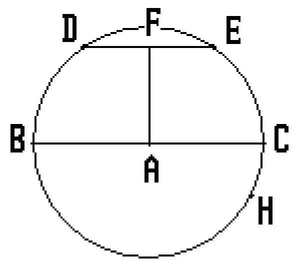
Первые девять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в седьмом из них. Десятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Точка H пересечения прямых AP и EF пока не введена в рассмотрение, и прием вводит ее. Уровень срабатывания равен 5.

(b) Проведение общего перпендикуляра к двум параллельным хордам.



$\forall_{ABCDEFGH}(B \in$ окружность(AH) & $C \in$ окружность(AH) &
$D \in$ окружность(AH) & $E \in$ окружность(AH) & прямая$(BC) \parallel$
прямая(DE) & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)) \to F -$ точка &
$G -$ точка & $F \in$ отрезок(DE) & $G \in$ отрезок(BC) &
прямая$(AF) \perp$ прямая(BC) & $G \in$ отрезок)

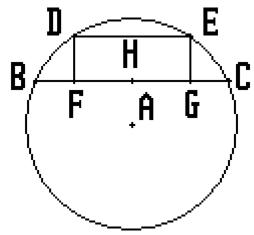
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Через точку A пока не проведен перпендикуляр к прямой BC. Прием проводит этот перпендикуляр, вводя новые точки F, G. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEFGH}(B \in$ окружность(AH) & $C \in$ окружность(AH) & $D \in$ окружность(AH) & $E \in$ окружность(AH) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(DE) & $A \in$ прямая$(BC) \to F -$ точка & $F \in$ отрезок(DE) & прямая$(AF) \perp$ прямая$(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Перпендикуляр из точки A на прямую DE пока не опущен, и прием его проводит. Для этого вводится новая точка F. Уровень срабатывания равен 8.

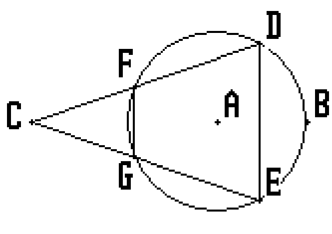
(c) Взаимное расположение середины хорды и прямоугольных проекций на нее концов параллельной хорды.



$\forall_{ABCDEFGHP}(C \in$ окружность(AP) & $B \in$ окружность(AP) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(DE) & $D \in$ окружность(AP) & $E \in$ окружность(AP) & прямая$(DF) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ отрезок(BC) & прямая$(EG) \perp$ прямая(BC) & $G \in$ отрезок(CF) & $H \in$ отрезок(BC) & $l(BH) = l(CH)$ & разныеточки(B, C) & разныеточки$(D, E) \to H \in$ отрезок(FG) & $F \in$ отрезок(BH) & $G \in$ отрезок$(CH))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

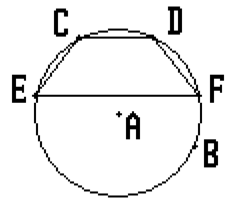
(d) Секущие, проходящие через параллельные хорды.



$\forall_{ABCDEF}($актив$($окружность$(AB))$ & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & прямая$(FG) \parallel$ прямая(DE) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & разныеточки(F, G) & $F \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(CE) & актив$(\angle(CED))$ & разныеточки$(F, D) \to \angle(CGF) = \angle(CFG)$ & $\angle(CFG) = \angle(CED))$

Идентификация начинается с четвертого антецедента, выделенного указателем "равно". Седьмой и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

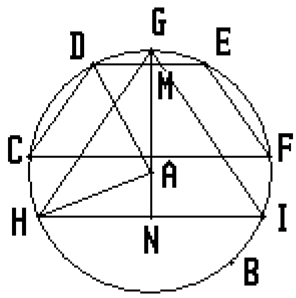
(e) Равенство длин хорд, соединяющих концы параллельных хорд.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая(CD) $\parallel$ прямая(EF) & разныеточки(C, D) & разныеточки(E, F) $\rightarrow l(CE) = l(DF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния CE и DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4. Созданы еще две версии приема. В первой из них, имеющей уровень срабатывания 8, требуется, чтобы расстояние CE было известно, а DF - нет. Во второй, имеющей уровень срабатывания 9, требуется лишь, чтобы расстояние CE уже рассматривалось в задаче.

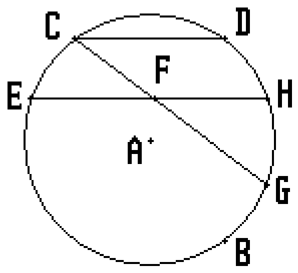
(f) Конфигурация с двумя хордами, соединяющими концы параллельных хорд, и двумя параллельными им хордами, выходящими из общей точки.



$\forall_{ABCDEFGHIMN}$(трапеция($CDEF$) & окружность(AB)описана около фигура($CDEF$) & $G \in$ дуга(ADE) & прямая(GH) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(GI) $\parallel$ прямая(EF) & $l(GH) = l(GI)$ & $H \in$ окружность(AB) & $I \in$ окружность(AB) $\rightarrow M -$ точка & $M \in$ отрезок(AG) & $M \in$ отрезок(DE) & $N -$ точка & $N \in$ отрезок(HI) & $N \in$ прямая(AG) & прямая(AG) $\perp$ прямая(CF) & прямая(CF) $\parallel$ прямая(HI) & $\angle(DCF) = \angle(GHI)$ & $\angle(EFC) = \angle(GIH)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Точка M пересечения прямых DE и AG пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 6.

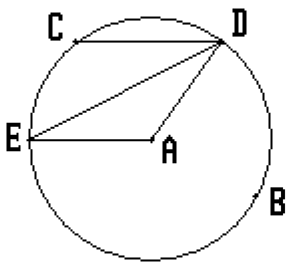
(g) Продолжение отрезка, параллельного хорде, до пересечения с окружностью.



$\forall_{ABCDEFGH}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
разныеточки(C, D) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(CD) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CG) & $G \in$ окружность(AB)
& разныеточки$(E, F) \rightarrow H -$ точка & $H \in$ окружность(AB) &
$F \in$ отрезок(EH) & $\neg(E = H))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Отличная от E точка H пересесения прямой EF с окружностью AB пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

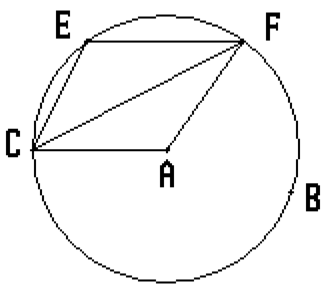
(h) Усмотрение параллельности хорды и радиуса.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $\angle(CDF) = \angle(FDA)$ & $E \in$ прямая(DF)
& разныестороны$(A, C,$ прямая$(DE)) \rightarrow$ прямая$(CD) \parallel$ прямая$(AE))$

Идентификация начинается с четвертого антецедента, выделенного указателем "равно". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 10.

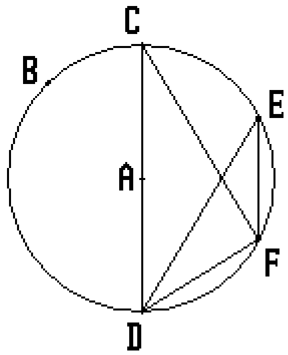
(i) Хорда, параллельная радиусу.



$\forall_{ABCEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \parallel$

прямая(AC) & актив(прямая(CF)) & актив(прямая(AF)) $\to$
$\angle(ECA) = \pi/2 - \angle(FCA)$)

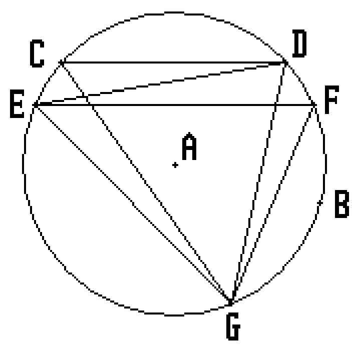
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(CD) & актив($\angle(CDE)$)
& актив(прямая(DF)) $\to \angle(CDE) = \angle(DCF)$)

Идентификация начинается с седьмого антецедента, выделенного указателем "равно". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 10.

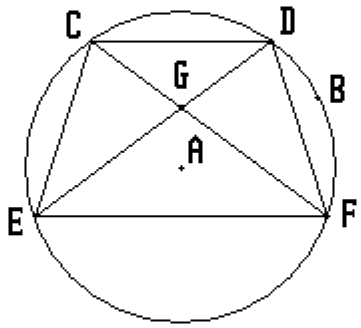
(j) Вписанные углы, опирающиеся на концы двух параллельных хорд.



$\forall_{ABCDEFG}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \parallel$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & разныеточки(C, D) & разныеточки(E, F) &
актив(прямая(EG)) & актив(прямая(DG)) & $G \in$ окружность(AB) &
актив(прямая(DE)) & актив($\angle(CGF)$) & разныестороны$(G, D,$
прямая$(EF))$ $\to \angle(CGF) = \angle(EGD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Шестой, седьмой и тринадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

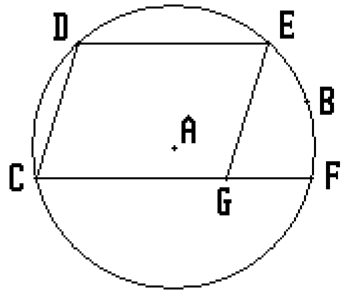
(k) Угол между пересекающимися хордами, соединяющими концы параллельных хорд.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \parallel$
прямая(EF) & $G \in$ прямая(ED) & $G \in$ отрезок(CF) & $\angle(CGE) = a$
& $\neg(C \in$ прямая$(EF)) \to \angle(DEF) = a/2$ & $\angle(CFE) = a/2)$

Второй и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 9.

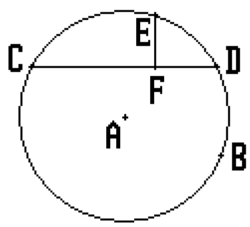
(l) Две пары параллельных хорд.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(DE) \parallel$
прямая(CG) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(EG) & $F \in$ прямая(CG) &
актив$(\angle(DCG))$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(DCG)$ & разныепрямые(прямая(CD),
прямая$(CG)) \to G \in$ отрезок$(CF))$

Идентификация начинается с пятого антецедента, выделенного указателем "равно". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

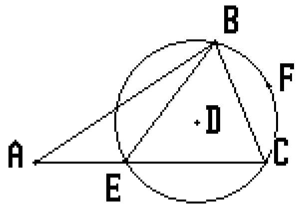
12. Принадлежность хорде основания перпендикуляра, проведенного из точки на окружности.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(EF) & $E \in$ окружность(AB) & разныестороны$(E, A,$
прямая$(CD))$ & $F \in$ прямая(CD) & разныеточки$(C, D) \to F \in$ отрезок$(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

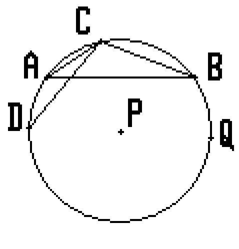
13. Ввод в рассмотрение хорды, образованной точками пересечения с окружностью сторон угла, вершина которого лежит вне окружности.



$\forall_{ABCDEF}($актив(окружность$(DF))$ & актив$(l(AC))$ & $B \in$ окружность(DF)
& $C \in$ окружность(DF) & $E \in$ окружность(DF) & $E \in$ отрезок(AC) &
актив$(\angle(BAC)) \to$ актив(прямая$(BC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние AC и угол BAC известны. Прямая BE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

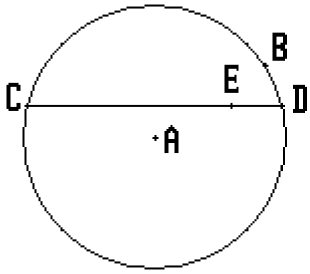
14. Усмотрение противоречия из сравнения расстояния между двумя точками на окружности с расстояниями от одной из них до концов некоторой хорды.



$\forall_{aABCDPQ}(l(CD) = a$ & $A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ)
& $C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ окружность(PQ) & $0 < l(AC) - l(CD)$
& $0 < l(BC) - l(CD)$ & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB))$ &
разныеточки$(A, B) \to$ ложь$)$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a константное. Следующие четыре антецедента выделены указателем "усм", четыре последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражения для расстояний AC, BC константные. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

15. Усмотрение противоречия: на хорде лежат более двух точек окружности.

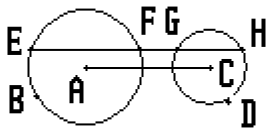


$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & разныеточки(C,D) & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & разныеточки(C,E) & разныеточки$(D,E) \to$ ложь$)$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "усм". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

16. Прямая, отсекающая хорды на двух окружностях.

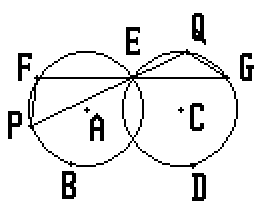
    (a) Прямая параллельна линии центров окружностей.

    $\forall_{ABCDEFGH}(E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(EF) & $G \in$ окружность(CD) & $H \in$ прямая(EF) & $H \in$ окружность(CD) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(EF) & разныеточки(E,F) & разныеточки$(G,H) \to l(EF)^2 - l(GH)^2 = 4(l(AB)^2 - l(CD)^2))$

    Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

    (b) Две прямые, проходящие через общую точку двух окружностей равного радиуса.

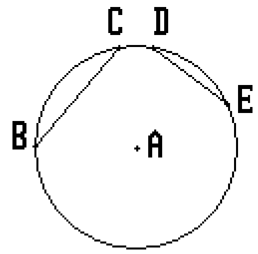
    

    $\forall_{ABCDEFGPQ}($актив(окружность$(AB))$ & актив(окружность$(CD))$ & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(CD) & $G \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(CD) & $P \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(PQ) & $Q \in$ окружность(CD) & прямая$(EF) \parallel$ прямая(AC) & разныеточки(E,F) & разныеточки(E,G) & разныеточки(E,P) &

разныеточки(E,Q) & разныеточки(A,C) & $l(AB)=l(CD)\to$
$\angle(FPE)+\angle(EQG)=\pi)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Антецеденты с двенадцатого по шестнадцатый обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

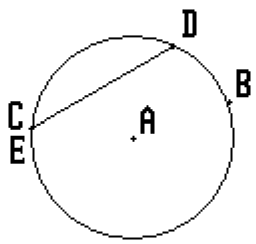
17. Сумма квадратов расстояний между концами перпендикулярных хорд.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AF)) & $C\in$ окружность(AF) &
$B\in$ окружность(AF) & $D\in$ окружность(AF) & $E\in$ окружность(AF) &
прямая$(BC)\perp$ прямая(DE) & разныеточки$(D,E)\to$
$l(BD)^2+l(CE)^2=4l(AB)^2)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

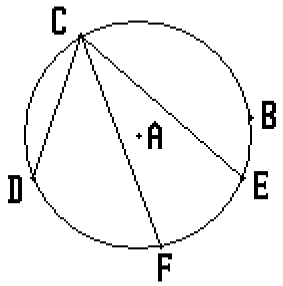
18. Отождествление точки с концом хорды.



$\forall_{ABCDE}(C\in$ окружность(AB) & $D\in$ окружность(AB) & $E\in$ отрезок(CD) &
$E\in$ окружность$(AB)\to C=E\ \vee\ D=E)$

Созданы две версии приема, в одной из которых с посылкой идентифицируется третий антецедент, а в другой - четвертый. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 2.

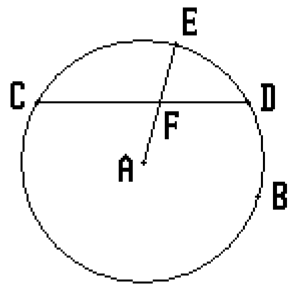
19. Усмотрение противоречия из сравнения длин трех хорд с общим концом.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & актив($l(CF)$) & $C \in$ окружность(AB) & актив($l(CE)$) & актив($l(CD)$) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $l(CD) = a$ & $l(CE) = b$ & $l(CF) = c$ & разныестороны($D, E,$ прямая(CF)) & $0 < a - c$ & $0 < b - c$ & разныеточки(C, F) $\to$ ложь)

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты со второго по восьмой выделены указателем "усм", с девятого по одиннадцатый - указателем "идентификатор". Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c константные. Уровень срабатывания равен 2.

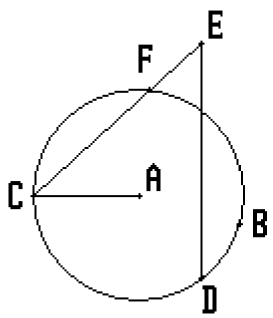
20. Точка пересечения хорды с диаметром: усмотрение принадлежности радиусу.



$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ дуга(ACD) & $F \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(AE) $\to$ $F \in$ отрезок(AE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

21. Хорда окружности и перпендикуляр к диаметру.

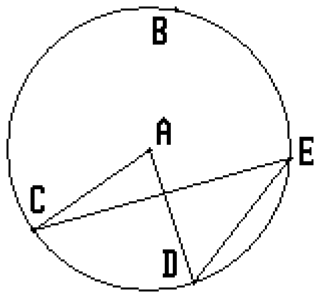


$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(CF) \rightarrow \neg(C \in$ интервал$(EF)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Уровень срабатывания равен 4.

Вписанный и центральный углы

1. Связь между вписанным и центральным углами.



$\forall_{ABCDE}($актив(окружность(AB)) & актив$(\angle(CAD))$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) & $0 \leq \angle(CED) - \pi/2 \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}($актив(окружность(AB)) & актив$(\angle(CAD))$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) & $0 \leq \pi/2 - \angle(CED) \rightarrow 2\angle(CED) = \angle(CAD))$

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Угол CAD известен, а угол CED - нет. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы выражение для угла CED имело тип "определимо", а для угла CAD - содержало неизвестные. Уровень срабатывания обеих версий равен 5.

$\forall_{ABCDE}($актив(окружность(AB)) & актив$(\angle(CED))$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) & $0 \leq \pi/2 - \angle(CED) \rightarrow 2\angle(CED) = \angle(CAD))$

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Одно из выражений для углов CAD, CED имеет тип "неизв", а другое - известно. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще несколько версий приема:

(a) Оба выражения для углов CAD, CED имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

(b) Угол CED известен, а выражение для угла CAD имеет тип "возмсвяз". Уровень срабатывания равен 5.

(c) Выражение для угла CED имеет тип "неизв", а для угла CAD - тип "возмсвяз". Уровень срабатывания равен 5.

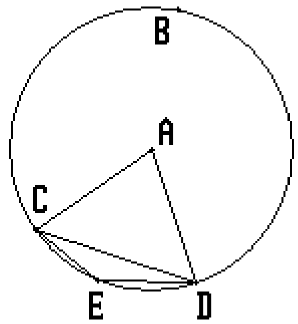
(d) Угол CED известен, а угол CAD - нет. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & актив($\angle(CED)$) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) & $0 \leq \angle(CED) - \pi/2 \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi$)

Угол CED известен; выражение для угла CAD имеет тип "возмсвяз". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & актив($\angle(CED)$) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) & $0 \leq \angle(CED) - \pi/2$ & актив($\angle(ACD)$) $\rightarrow$ $2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi$)

Один из углов CED, ACD известен, а выражение для другого имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

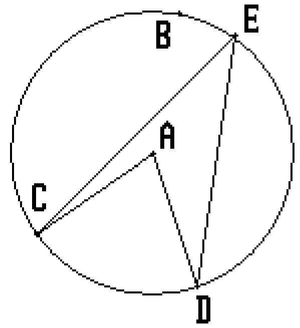


$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & актив($\angle(CAD)$) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив($\angle(CAD)$) & $E \in$ окружность(AB) & актив($\angle(CED)$) & разныестороны($E, A,$ прямая(CD)) $\rightarrow$ $2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив($\angle(CAD)$) & $E \in$ окружность(AB) & разныестороны($E, A,$ прямая(CD)) $\rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi$)

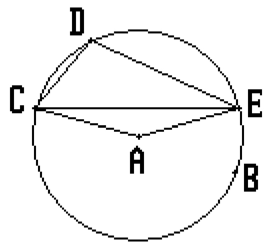
Схема обработки антецедентов такая же. Угол CAD известен, а выражение для угла CED имеет тип "существатом".



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & актив($\angle(CAD)$) & $C \in$ окружность(AB)

& $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) & $0 \leq \pi/2 - \angle(CED) \to 2\angle(CED) = \angle(CAD)$)

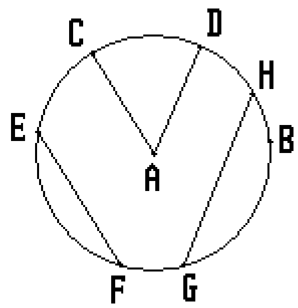
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла CED имеет тип "определимо", угол CAD не известен. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив($\angle(CAE)$) & $E \in$ окружность(AB) & актив($\angle(DCE)$) & актив(прямая(CE)) & разныестороны(D, A, прямая(CE)) & разныеточки(C, E) & разныеточки(D, E) & разныеточки$(C, D) \to \angle(CAE) + 2\angle(CDE) = 2\pi$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четыре последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

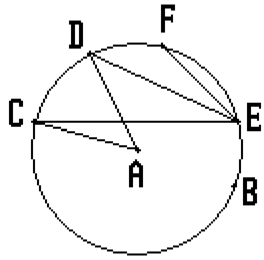
2. Ввод в рассмотрение центрального угла, стороны которого параллельны двум хордам.



$\forall_{ABCDEFGH}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(GH) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность$(AB) \to$ актив($\angle(CAD)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол CAD пока в задаче не рассматривается. Уровень срабатывания равен 4.

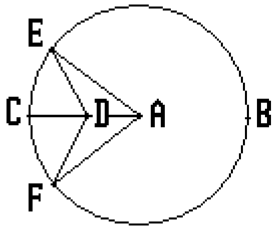
3. Соотношения для одного центрального и двух вписанных углов.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CAD))$ & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CEF))$ & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(EF)) & разныестороны$(F, C,$ прямая$(DE))$ & $0 \le \pi/2 - \angle(CEF)$ & разныеточки(C, E) & разныеточки$(D, E) \to$ $\angle(CEF) = \angle(CED) + \angle(DEF)$ & $\angle(CAD) = 2\angle(CED))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четыре последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 6 и 8.

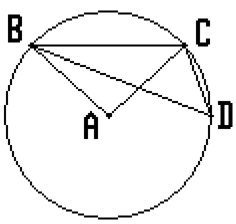
4. Усмотрение равенства центральных углов из равенства углов с вершиной на радиусе.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $\angle(CDE) = \angle(CDF) \to \angle(CAE) = \angle(CAF))$

Идентификация начинается с пятого антецедента, выделенного указателем "равно". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Углы CAE и CAF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

5. Разбор случаев для расположения вершины вписанного угла по отношению к хорде.

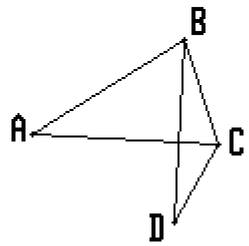


$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BDC)) \to$ однасторона$(A, D,$ прямая$(BC))$ $\vee$ разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из углов BAC, BDC известен, а выражение для другого

- имеет тип "неизв". Не усматривается расположение точек A, D относительно прямой BC. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разбор-случаев". Уровень срабатывания равен 10.

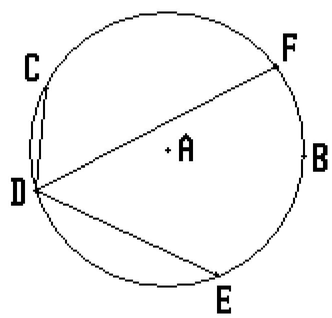
6. Усмотрение принадлежности точки окружности.



$\forall_{ABCDab}(\angle(BAC) = a$ & $\angle(BDC) = b$ & $l(AB) = l(AC)$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & $2b - a = 0$ & однасторона$(A, D,$ прямая$(BC)) \rightarrow$ $D \in$ окружность$(AB))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой. Первый и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор", седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат неизвестных. Не усматриваются равенство расстояний AD, AB и принадлежность точки A прямой BC. Уровень срабатывания равен 6.

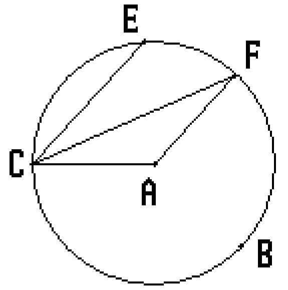
7. Биссектриса вписанного угла.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CDF))$ & актив$(\angle(FDE))$ & $F \in$ окружность(AB) & $\angle(CDF) = \angle(FDE)$ & разныеточки(C, E) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(DE))$ & актив$(l(DF)) \rightarrow l(CD) + l(DE) = 2l(DF)\cos(\angle(FDE)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой. Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор", восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний CD, DE, DF и угла FDE имеет тип "неизв", а остальные - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 7.

8. Биссектриса вписанного угла, одна из сторон которого является диаметром.

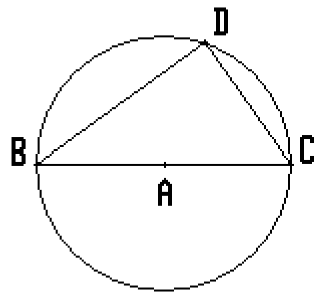


$\forall_{ABCEF}$(актив(окружность(AB)) & актив($\angle(ECF)$) & актив($\angle(ACF)$) & $\angle(ECF) = \angle(ACF)$ & $C \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныеточки(C, E) & разныеточки(C, F) & разныестороны(A, E, прямая(CF)) & актив(прямая(AF)) $\to$ прямая(AF) $\parallel$ прямая(CE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

Вписанный угол, опирающийся на диаметр

1. Перпендикулярность сторон вписанного угла, опирающегося на диаметр.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AE)) & $B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) & $A \in$ отрезок(BC) & $D \in$ окружность(AE) & разныеточки(B, D) & разныеточки(C, D) $\to$ прямая(BD) $\perp$ прямая(DC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямые CD и BD уже рассматриваются в задаче, причем их перпендикулярность явно не указана. Уровни срабатывания равны 2 и 4.

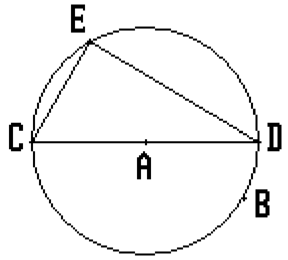
$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AE)) & $B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) & $A \in$ отрезок(BC) & $D \in$ окружность(AE) $\to$ прямая(BD) $\perp$ прямая(DC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". В посылках встречается выражение "фигура(...)", относящееся к точкам B, C, D и некоторой четвертой точке. Явного указания на перпендикулярность прямых BD, DC нет. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии приема:

(a) Прямая BD уже рассматривается в задаче. Либо (а) прямая DC тоже рассматривается, либо (б) рассматривается угол DBA, а расстояние BD известно или имеет тип "неизв", либо (в) на прямой BD выделена такая точка E, что рассматриваются расстояния DE, CE и угол DEC. Уровень срабатывания равен 6.

(b) Прямая BD уже рассматривается в задаче. Рассматривается расстояние от точки C до некоторой точки, не лежащей на прямой BC. На прямой BD выделена точка, отличная от точек B, D. Уровень срабатывания приема равен 8.

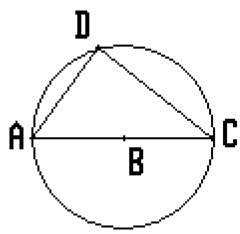
2. Вписанный прямой угол опирается на диаметр.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая(CE) $\perp$ прямая(DE) & разныеточки(C, E) & разныеточки(E, D) $\to$ $A \in$ отрезок(CD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 4 и 7.

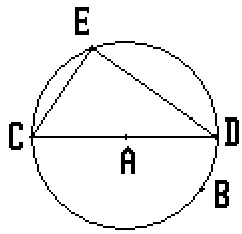
3. Ввод в рассмотрение вписанного угла, опирающегося на диаметр.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(BE)) & $A \in$ окружность(BE) & $C \in$ окружность(BE) & $B \in$ отрезок(AC) & $D \in$ окружность(BE) & актив(прямая(CD)) $\to$ актив(прямая(AD)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". В задаче рассматривается окружность с центром A, пересекающаяся по выделенной точке с прямой CD. Прямая AD пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 5.

4. Усмотрение принадлежности окружности вершины прямого угла, опирающегося на диаметр.

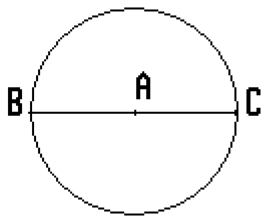


$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & прямая(CE) $\perp$ прямая(DE)
& актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) $\rightarrow E \in$ окружность(AB))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

Диаметрально противоположные точки

1. Центр окружности делит диаметр пополам.



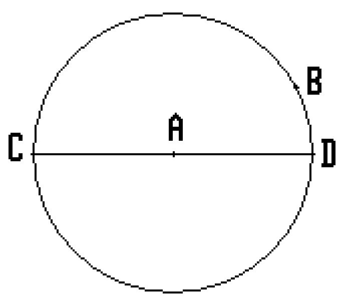
$\forall_{ABCD}$($C \in$ окружность(AD) & $B \in$ окружность(AD) & $C \in$ прямая(AB) &
разныеточки(B, C) $\rightarrow A \in$ отрезок(BC) & $l(BC) = 2l(AD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В задаче рассматривается расстояние от точки B до некоторой точки прямой AB, отличной от точек A, C, причем это расстояние либо известно, либо имеет тип "неизв". Расстояние BC пока не рассматривается. Уровни срабатывания равны 2 и 8.

2. Усмотрение диаметрально противоположных точек.

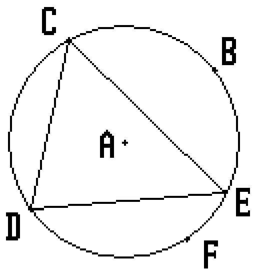
$\forall_{ABCD}$($C \in$ окружность(AD) & $B \in$ окружность(AD) & $l(BC) = a$ &
$a = 2l(AB) \rightarrow A \in$ отрезок(BC))

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками. Второй антецедент выделен указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.



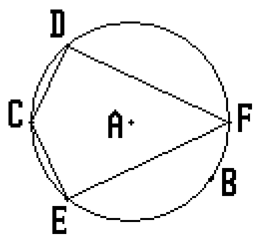
$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $C \in$ прямая(AD) & разныеточки$(C, D) \rightarrow A \in$ отрезок$(CD))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Первые два антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}($окружность(AB)описана около фигура(CDE) &
$F \in$ окружность(AB) & $l(CF) = a$ & $a = 2l(AB) \rightarrow A \in$ отрезок$(CF))$

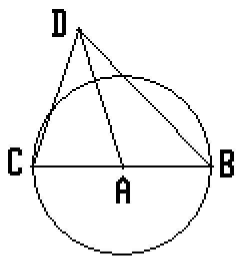
Схема обработки антецедентов та же, что в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEF}($актив(окружность$(AB))$ & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(CE)$ &
$F \in$ окружность(AB) & $l(DF) = l(EF)$ & разныеточки(D, E) &
разныеточки$(C, F) \rightarrow A \in$ отрезок$(CF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 5 и 15.

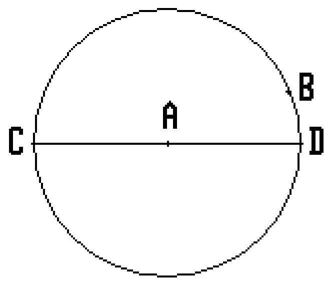
3. Ввод в рассмотрение расстояния от точки до центра окружности, если известны расстояния до концов диаметра.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AE) & $A \in$ отрезок(BC) & актив$(l(CD))$ &
актив$(l(BD)) \rightarrow$ актив$(l(AD)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния CD и BD известны. Рассматривается расстояние от точки D до некоторой точки окружности AE, отличной от точек B, C. Уровень срабатывания равен 10.

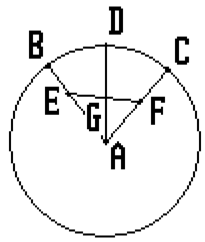
4. Длина диаметра.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & актив$(l(CD)) \rightarrow l(CD) = 2l(AB))$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние AB известно, а расстояние CD - нет. Уровень срабатывания равен 5.

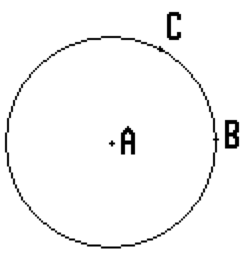
Точка отрезка, концы которого лежат на двух радиусах, находится внутри круга



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(AC) & $G \in$ прямая(AD) & $G \in$ отрезок$(EF) \rightarrow \neg(D \in$ интервал$(AG)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

Доказательство принадлежности точки окружности

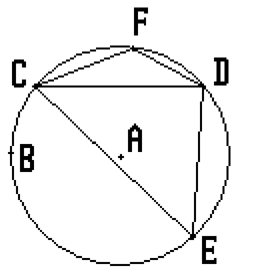


$\forall_{ABC}(l(AC) = l(AB) \to C \in \text{окружность}(AB))$

Прием имеет заголовок "615йтерм" и применяется в условии задачи на доказательство. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его части обрабатываются нормализатором "нормрасстояние". Уровень срабатывания равен 5.

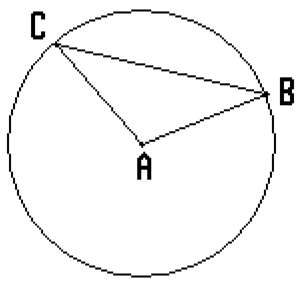
$\forall_{ABC}(C \in \text{окружность}(AB) \leftrightarrow l(AC) = l(BC))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в условии задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(CFD) + \angle(CED) = \pi$ & $C \in \text{окружность}(AB)$ & $D \in \text{окружность}(AB)$ & $E \in \text{окружность}(AB)$ & $\text{разныестороны}(E, F, \text{прямая}(CD))$ & $\text{актив}(\text{прямая}(CD))$ & $\text{разныеточки}(C, D) \to F \in \text{окружность}(AB))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Первый антецедент выделен указателем "следствие", пятый и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Фактически, доказательство принадлежности точки F окружности сводится к решению вспомогательной задачи на доказательство, устанавливающей истинность первого антецедента. Уровень срабатывания равен 6.



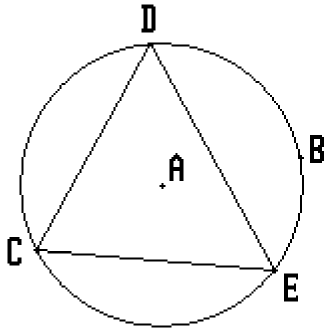
$\forall_{ABC}(\text{актив}(\angle(ACB))$ & $\text{актив}(\angle(ABC)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применение при усмотрении в условии задачи на доказательство утверждения "$C \in$ окружность(AB)". Проверяется, что угол ACB пока не рассматривается в задаче. Прием активирует рассмотрение углов ACB, ABC, чтобы в процессе вывода следствий было установлено их равенство. Уровень срабатывания равен 6.

Описанная около фигуры окружность

1. Треугольник

(a) Усмотрение окружности, описанной около треугольника.



$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(AD)$ & $l(AC) = l(AE)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(AE)) \to$ окружность(AC)описана около фигура$(CDE))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки A прямым DE, CD, CE. Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Задача уже имеет посылку вида "описана(...)". Идентифицирующие операторы не усматривают принадлежность точки C окружности AB. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $D \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD))$ & актив$(l(DE))$ & актив$(l(CE)) \to$ окружность(AB)описана около фигура$(CDE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Каждое из расстояний CD, DE, CE либо известно, либо имеет тип "неизв". Хотя бы одно из них известно. Либо хотя бы одно из них не известно, либо расстояние AB не известно. Не усматривается принадлежность точки A прямым CD, DE, CE. Уровень срабатывания равен 6.

(b) Принадлежность вершин треугольника окружности.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(ED)описана около фигура$(ABC) \to A \in$ окружность$(ED))$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются перестановки вершин треугольника. Проверяется выполнение хотя бы одного из следующих условий:

i. В задаче рассматривается проходящая через E прямая, на которой выделена точка, не принадлежащая окружности ED и отличная от E.
ii. Окружность ED задана в задаче также как окружность EA, причем обозначения точек A, D различны.
iii. В задаче рассматривается проходящая через точку A окружность, центр которой отличен от E.
iv. В задаче рассматривается окружность, касающаяся внутренним образом окружности ED.
v. В задаче рассматриваются координаты точки A.

Уровень срабатывания равен 2. На этой же теореме основаны еще три приема:

i. Выполнено одно из условий:

A. Через точки A, E проведены параллельные прямые.

B. Через точку A проведена прямая, отличная от AB и AC, причем эта точка не является концом основания равнобедренного треугольника ABC.

C. Прямая AE уже рассматривается в задаче.

D. Среди исходных посылок задачи имелось равенство расстояния от точки E до вершины треугольника ABC некоторому другому расстоянию.

Кроме того, выполнено одно из следующих условий:

A. Рассматривается расстояние от центра окружности ED до некоторой ее точки.

B. Через некоторую точку окружности ED, отличную от точек A, B, C, проведена прямая.

C. Точка E принадлежит некоторой рассматриваемой в задаче окружности.

Уровень срабатывания приема равен 8.

ii. На отрезке AB выделена некоторая точка, для которой рассматриваются расстояния ее до концов отрезка. Это точка принадлежит некоторой рассматриваемой в задаче хорде окружности ED, хотя бы один из концов которой не совпадает с точками A, C. Рассматриваются также расстояния от точки до концов хорды. Уровень срабатывания равен 9.

iii. На окружности ED выделена точка, отличная от точек A, B, C. Уровень срабатывания равен 14.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(ED)описана около фигура(ABC) & актив$(l(AE)) \rightarrow$ $A \in$ окружность(ED))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEF}$($E \in$ прямая(AF) & окружность(ED)описана около фигура$(ABC) \rightarrow A \in$ окружность(ED))

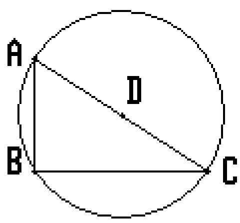
Антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 5.

Наконец, приведем прием для трехмерной окружности:

$\forall_{ABCDEF}$(Окружность(EDF)описана около фигура$(ABC) \rightarrow$ $A \in$ Окружность(EDF))

Этот прием срабатывает без ограничений, уровень срабатывания равен 2.

(c) Прямоугольный треугольник.

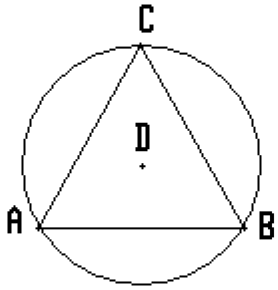


$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & окружность(DE)описана около фигура$(ABC) \to D \in$ отрезок(AC) & $2l(DE) = l(AC))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Равнобедренный треугольник.

i. Равносторонний треугольник.

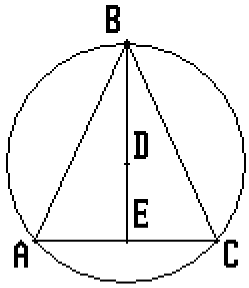


$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(AC)$ & $l(BC) = l(AC)$ & окружность(DE)описана около фигура$(ABC) \to \sqrt{3}l(DE) = l(AC))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDMN}(l(AB) = l(AC)$ & $l(BC) = l(AC)$ & $A \in$ окружность(MN) & $B \in$ окружность(MN) & $C \in$ окружность(MN) & центр$(D,$ фигура$(ABC)) \to M = D)$

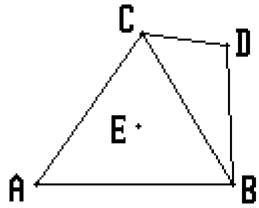
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}$(Окружность(DFG)описана около фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & $l(BC) = l(AC)$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(BD) \to D \in$ отрезок$(BE))$

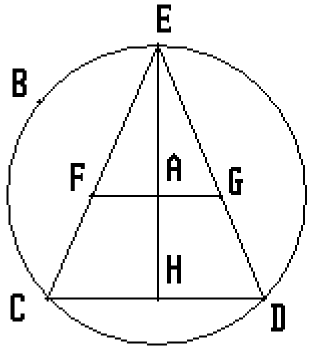
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор", четвертый и пятый - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

ii. Равносторонний треугольник, на сторону которого опирается извне угол в 120 градусов.



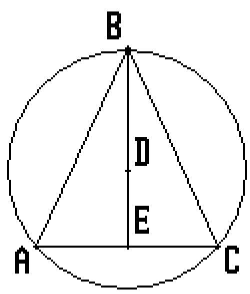
$\forall_{ABCDE}(l(AC) = l(BC)$ & $l(AC) = l(AB)$ & $\angle(CDB) = 2\pi/3$ & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC))$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(BC))$ & разныеточки$(A, B) \rightarrow E$ – точка & $B \in$ окружность(EA) & $C \in$ окружность(EA) & $D \in$ окружность$(EA))$
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 6.

iii. Проведение высоты в равнобедренном треугольнике, около которого описана окружность, если через ее центр проведена прямая, параллельная основанию.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(AB)описана около фигура(CED) & $l(CE) = l(ED)$ & $A \in$ прямая(FG) & прямая$(FG) \parallel$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(CE) & $G \in$ прямая$(DE) \rightarrow H$ – точка & $H \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(AE) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CD) & $l(AF) = l(AG))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка H пересечения прямых CD и AE пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.

iv. Принадлежность центра окружности, описанной около равнобедренного треугольника, высоте этого треугольника, опущенной на его основание.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DF)описана около фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & $E \in$ отрезок(AC) & прямая$(BE) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow$ $D \in$ прямая(BE) & $\neg(B \in$ отрезок$(DE)))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 3 и 5.

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DF)описана около фигура(ABC) &
$l(AB) = l(BC)$ & $E \in$ прямая(AC) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AC) $\to$
$B \in$ прямая(DE) & $\neg(B \in$ отрезок(DE)))

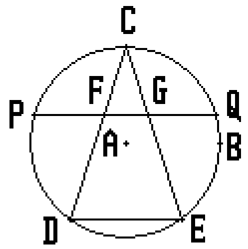
Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 6.

v. Центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, лежит на биссектрисе угла при основании.

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DF)описана около фигура(ABC) &
биссектриса($ABCE$) & $l(AB) = l(BC) \to D \in$ прямая(BE))

Чертеж прежний. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Если решается задача на исследование, имеющая цель "контроль", то уровень срабатывания равен 2. Иначе он равен 6.

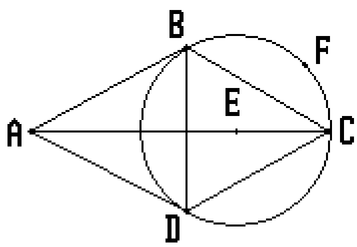
vi. Пересечение с окружностью прямой, параллельной основанию треугольника.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(AB)описана около фигура(CDE) &
$l(CD) = l(CE)$ & $F \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(CE) &
$l(CF) = l(CG)$ & $P \in$ окружность(AB) & $P \in$ прямая(FG) &
$Q \in$ окружность(AB) & $Q \in$ прямая(FG) & $F \in$ отрезок(PG) &
$G \in$ отрезок(FQ) $\to l(PF) = l(GQ)$ & $l(PG) = l(PF) + l(FG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

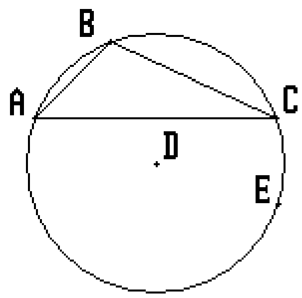
vii. Радиус окружности, описанной около подтреугольника ромба, длина стороны ромба и длина его диагонали.



$\forall_{ABCDEF}$(ромб($ABCD$) & $B \in$ окружность(EF) &
$C \in$ окружность(EF) & $D \in$ окружность(EF) $\to l(BC)^2 =$
$l(EF)l(AC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хотя бы два из расстояний BC, EF, AC выражены через численные параметры, причем хотя бы одно из трех расстояний не известно. Уровень срабатывания равен 5.

(e) Теорема синусов.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)описана около фигура(ABC) &
актив$(\angle(ABC)) \to 2\sin(\angle(ABC))l(DE) = l(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)описана около фигура(ABC) &
актив$(l(AC)) \to 2\sin(\angle(ABC))l(DE) = l(AC))$

Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. Одно из выражений для расстояний DE, AC и угла ABC имеет тип "применимо", а два других - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания приема равен 5. На этой же теореме созданы еще несколько версий приема:

i. Одно из выражений для расстояний DE, AC и угла ABC имеет тип "неизв", а два других - тип "определимо". Уровень срабатывания равен 5.

ii. Расстояние DE известно, причем пакетный индикатор "сводимо" усматривает возможность выразить расстояние AC через угол ABC. Уровень срабатывания равен 6.

iii. Одно из выражений для расстояний DE, AC и угла ABC содержит неизвестные, а два других - не содержат. Уровень срабатывания приема равен 7.

iv. Расстояние AC известно, выражение для расстояния DE имеет тип "неизв", причем угол ABC в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 9.

(f) Выражение радиуса через площадь и длины сторон.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)описана около фигура(ABC) & актив$(l(AC))$
& актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB)) \to 4l(DE)S($фигура$(ABC)) =$
$l(AB)l(BC)l(AC))$

Чертеж прежний. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, три других - выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний DE, AB, BC, AC имеет тип "внешнеизв", два других - не содержат неизвестных, а оставшееся расстояние уже рассматривается в задаче. В случае равнобедренного треугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5. На этой же теореме созданы еще несколько версий приема:

i. Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв", а каждое из расстояний DE, AB, BC, AC либо известно, либо имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 5.

ii. Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "определимо". Все расстояния DE, AB, BC, AC рассматриваются в задаче, причем три из них известны, а одно - нет. Уровень срабатывания равен 5.

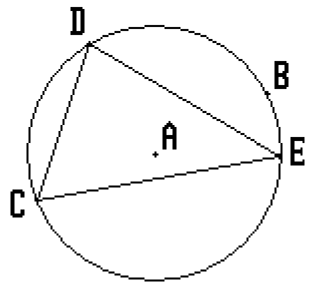
iii. Выводимое равенство, быть может, при помощи некоторого уравнения текущей задачи, позволяет получить невырожденное уравнение для численных параметров. Уровень срабатывания равен 8.

iv. Хотя бы два из расстояний DE, AB, BC, AC известны, а два других - уже рассматриваются в задаче. Хотя бы одно из этих расстояний не известно. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{ABCDE}(A \in \text{окружность}DE)$ & $B \in \text{окружность}(DE)$ &
$C \in \text{окружность}(DE)$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB)) \to$
$4l(DE)S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)l(BC)l(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния DE имеет тип "внешнеизв", расстояния BC и AC известны. Уровень срабатывания равен 10. На этой теореме создана еще одна версия приема, имеющая тот же уровень срабатывания. В ней требуется, чтобы расстояния DE, BC, AC были известны, а расстояние AB - не известно.

(g) Выражение радиуса описанной окружности через две стороны треугольника и угол между ними.



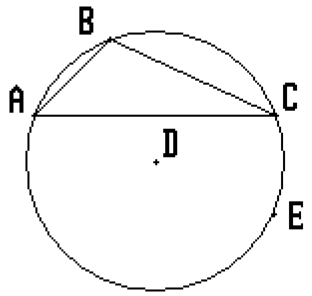
$\forall_{ABCDE}(\text{окружность}(AB)\text{описана около фигура}(CDE)$ & актив$(\angle(DCE))$
& актив$(l(CD))$ & актив$(l(CE)) \to 4(\sin(\angle(DCE)))^2 l(AB)^2 =$
$l(CD)^2 + l(CE)^2 - 2l(CD)l(CE)\cos(\angle(DCE)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол DCE и расстояния CD, CE известны; расстояние AB не известно. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDE}(C \in \text{окружность}(AB)$ & $D \in \text{окружность}(AB)$ &
$E \in \text{окружность}(AB)$ & актив$(l(CD))$ & актив$(l(CE))$ & $\angle(DCE) = a \to$
$4(\sin a)^2 l(AB)^2 = l(CD)^2 + l(CE)^2 - 2l(CD)l(CE)\cos a)$

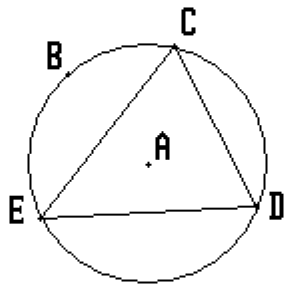
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных, расстояния CD и CE известны. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

(h) Выражение радиуса описанной окружности через длины сторон.



$\forall_{ABCDE}(A \in$ окружность(DE) & $B \in$ окружность(DE) &
$C \in$ окружность(DE) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ &
актив$(l(DE))$ & $a = (l(AB) + l(BC) + l(AC))/2 \to$
$4l(DE)\sqrt{a(a - l(AB))(a - l(AC))(a - l(BC))} = l(AB)l(BC)l(AC))$

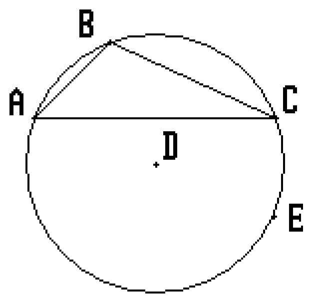
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AB, AC, BC константные. Выражение для расстояния DE имеет тип "неизв". Углы треугольника не известны. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEp}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив(окружность(AB)) &
вычислениедлины$(l(CD), p) \to l(CD) = 2l(AB)\sin(\angle(CED))$ & $p)$

Четертый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается пакетным синтезатором. Первые три антецедента выделены указателем "усм". Выражение для угла CED имеет тип "определимо", выражение для расстояния AB - тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

(i) Выражение площади треугольника через радиус описанной окружности и два угла.

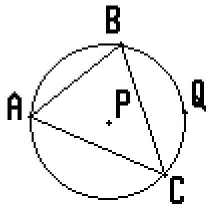


$\forall_{ABCDE}(A \in$ окружность(DE) & актив$(S($фигура$(ABC)))$ &
$B \in$ окружность(DE) & $C \in$ окружность(DE) & актив$(\angle(BAC))$ &

актив($\angle(BCA)$) $\to S$(фигура(ABC)) =
$2\sin(\angle(BAC))\sin(\angle(BCA))\sin(\angle(BAC)+\angle(BCA))l(DE)^2$)

Второй и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в пятом. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Площадь треугольника ABC, а также углы BAC и BCA известны. Выражение для расстояния DE имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

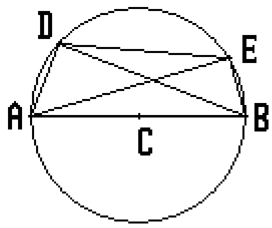
(j) Ввод в рассмотрение длин сторон треугольника.



$\forall_{ABCPQ}$(окружность(PQ)описана около фигура(ABC) $\to$ актив($l(AB)$)))

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем разрешаются перестановки вершин треугольника. Расстояние AB в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 5.

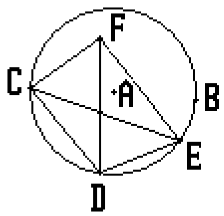
(k) Проведение общей описанной окружности для двух прямоугольных треугольников с общей гипотенузой.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AD) $\perp$ прямая(BD) & прямая(AE) $\perp$ прямая(BE) &
актив(прямая(AB)) $\to C$ – точка & $C \in$ отрезок(AB) &
$B \in$ окружность(CA) & $D \in$ окружность(CA) & $E \in$ окружность(CA))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Прямая DE уже рассматривается в задаче, а проходящая через точки A, B, D, E окружность - не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение новую точку C - центр окружности. Уровень срабатывания равен 10.

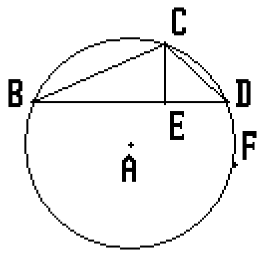
(l) Ввод угла, величина которого представляет интерес для усмотрения вписанного четырехугольника.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(DCF))$ & разныестороны$(D, F,$
прямая$(CE))$ & разныестороны$(C, E,$ прямая$(DF)) \to$ актив$(\angle(DEF)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол DCF известен. Прямые EF и DE уже встречаются в посылках задачи. Принадлежность точки F окружности AB не усматривается. Если усматривается принадлежность точки F прямым CD, DE либо CE, то прием блокируется. Он блокируется также, если усматривается перпендикулярность прямых DE и EF. Уровень срабатывания приема равен 5.

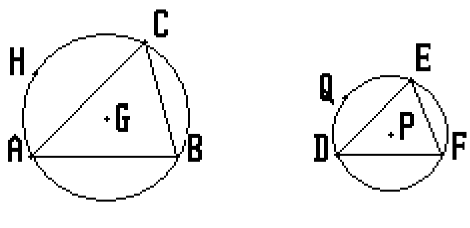
(m) Соотношение между длинами двух сторон, высотой и радиусом описанной окружности.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AF)) & $B \in$ окружность(AF) &
$C \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & прямая$(CE) \perp$
прямая(BD) & $E \in$ отрезок(BD) & актив$(l(BC))$ & актив$(l(CE)) \to$
$l(BC)l(CD) = 2l(AB)l(CE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний BC, CD, AB, CE имеет тип "неизв", остальные - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 10.

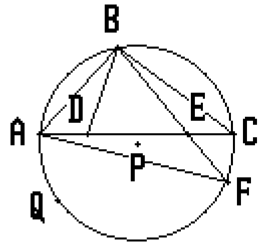
(n) Соотношение для радиусов окружностей, описанных около подобных треугольников.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(GH)описана около фигура(ABC) &
окружность(PQ)описана около фигура(DEF) & прямая$(AC) \parallel$
прямая(DE) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(EF) & прямая$(AB) \parallel$
прямая$(DF) \to l(GH)l(DF) = l(PQ)l(AB))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

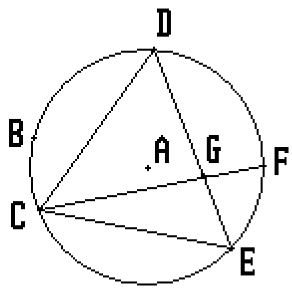
(o) Равные углы, отложенные от боковых сторон треугольника.



$\forall_{ABCDEFPQ}$(актив(окружность(PQ)) & $A \in$ окружность(PQ) &
$B \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & актив(прямая(AC)) &
$D \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(AC) & $\angle(ABD) = \angle(CBE)$ &
разныеточки(A, C) & разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) $\rightarrow$
$F \in$ окружность(PQ) & $E \in$ отрезок(BF) & $\angle(BAF) = \angle(BDC)$ &
$F -$ точка)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, антецеденты со второго по седьмой выделены указателем "усм". Восьмой антецедент выделен указателем "идентификатор", три последних - обрабатываются проверочными операторами. Точка F пересечения окружности с прямой BE пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

(p) Пересечение хорды с концом в одной вершине треугольника и противоположной стороны треугольника.



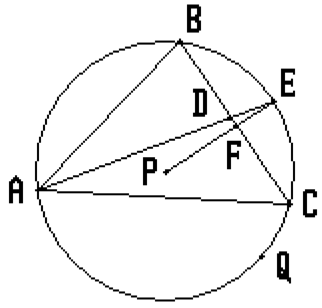
$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(AB)описана около фигура(CDE) &
$F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CF) & $G \in$ отрезок(DE) &
разныеточки(C, F) $\rightarrow G \in$ отрезок(CF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(AB)описана около фигура(CDE) &
$F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CF) & $G \in$ отрезок(DE) &
точкалуча(C, F, G) $\rightarrow G \in$ отрезок(CF))

Аналогично предыдущему, но последний антецедент тоже выделен указателем "усм".

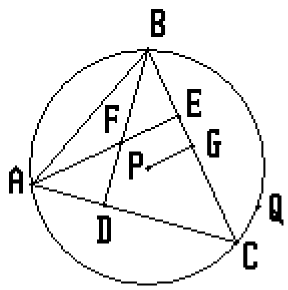
(q) Продолжение биссектрисы треугольника до пересечения с окружностью и со срединным перпендикуляром.



$\forall_{ABCDEFPQ}$(окружность(PQ)описана около фигура(ABC) & $D \in$ отрезок(BC) & $\angle(BAD) = \angle(DAC)$ & актив$(\angle(BAD))$ & актив$(\angle(DAC)) \to F \in$ отрезок(BC) & $l(BF) = l(CF)$ & $E \in$ окружность(PQ) & $E -$ точка & $F -$ точка & $D \in$ отрезок(AE) & $F \in$ отрезок(PE) & прямая$(PE) \perp$ прямая(BC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В задаче уже введена некоторая прямая, перпендикулярная прямой BC, причем не усматривается перпендикулярность прямых AD и BC. Точка E пересечения прямой AD с окружностью PQ, а также точка F пересечения с прямой BC перпендикулярного ей радиуса, пока не рассматриваются. Прием вводит эти точки. Уровень срабатывания равен 5.

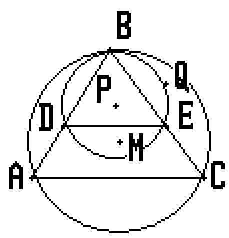
(r) Расстояние от центра описанной окружности до стороны и расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(PQ)описана около фигура(ABC) & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AE) & $F \in$ прямая(BD) & прямая$(PG) \perp$ прямая(BC) & $G \in$ прямая$(BC) \to l(AF) = 2l(PG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние PG уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

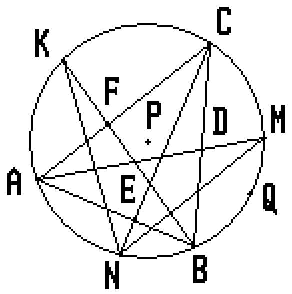
(s) Проведение описанной окружности для подобного треугольника.



$\forall_{ABCDEPQM}$(окружность(PQ)описана около фигура(DBE) &
$A \in$ прямая(BD) & $C \in$ прямая(BE) & прямая$(AC) \parallel$ прямая$(DE) \to$
M – точка & окружность(MC)описана около фигура(ABC) &
$M \in$ прямая(BP))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Через точку B проведена прямая, перпендикулярная прямой BP. Окружность, проходящая через точки A, B, C, пока не рассматривается. Прием вводит центр M этой окружности, а также саму окружность. Уровень срабатывания равен 5.

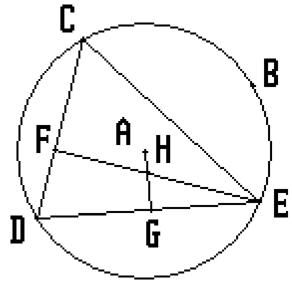
(t) Вписанные углы, возникающие при проведении хорд с концами в вершинах треугольника, пересекающих противоположные стороны.



$\forall_{ABCDEFPQKMN}(A \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) &
$F \in$ отрезок(AC) & $B \in$ окружность(PQ) & $F \in$ отрезок(BK) &
$K \in$ окружность(PQ) & $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ отрезок(AM) &
$M \in$ окружность(PQ) & $E \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(CN) &
$N \in$ окружность(PQ) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) &
разныеточки$(B, C) \to \angle(MNK) = \angle(MAC) + \angle(CBK))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последние три - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Два из трех углов MNK, MAC, CBK известны, а третий - нет. Уровень срабатывания равен 4.

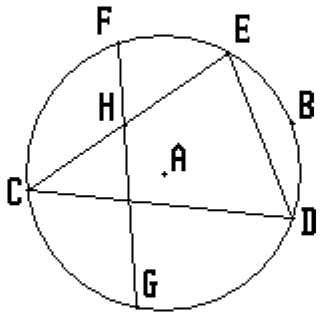
(u) Пересечение высоты треугольника и диаметра, перпендикулярного стороне.



$\forall_{ABCDEFGH}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CD)) &
актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD)
& прямая$(GA) \perp$ прямая(DE) & $H \in$ прямая(GA) & $H \in$ прямая(EF) &
актив$(l(EH))$ & разныеточки(C, D) & разныеточки(C, E) &
разныеточки$(D, E) \to l(DE)l(AB) = l(CE)l(EH))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния DE, AB, CE уже рассматриваются в задаче. Центр окружности не лежит на стороне треугольника CDE. Уровень срабатывания равен 7.

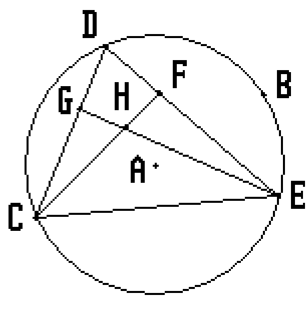
(v) Хорда, проведенная через одну из сторон треугольника под углом, равным противоположному углу треугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $H \in$ отрезок(CE) & $H \in$ отрезок(FG) & $\angle(CHG) = \angle(EDC)$ & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & однасторона($D, G,$ прямая(CE)) & разныеточки(C, E) & разныеточки(D, E) & разныеточки(C, D) & разныеточки(C, H) & разныеточки(H, G) $\rightarrow l(CF) = l(CG)$)

Идентификация начинается с седьмого антецедента, выделенного указателем "равно". Шесть последних антецедентов обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

(w) Расстояние от вершины треугольника до точки пересечения высот, угол треугольника и радиус описанной окружности.



$\forall_{ABCDEFGH}$(актив(окружность(AB)) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & прямая(GE) $\perp$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(DE) & прямая(CF) $\perp$ прямая(DE) & $H \in$ прямая(EG) & $H \in$ прямая(CF) & $al(AB) = bl(CH)$ & разныеточки(D, E) & разныеточки(C, D) & разныеточки(C, E) $\rightarrow$ $2b|\cos(\angle(DCE))| = a$)

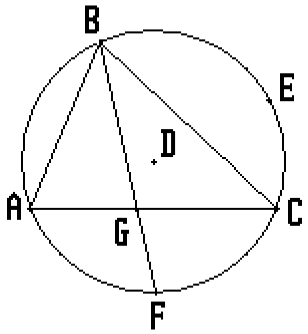
Первый антецедент идентифицируется с посылкой; антецеденты со второго по десятый выделены указателем "усм". Одиннадцатый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, три последних - проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных, угол DCE не известен. Уровень срабатывания равен 6.

(x) Усмотрение противоречия: окружность проходит через внутреннюю точку треугольника.

$\forall_{ABCD}(A \in$ окружность(MN) & $B \in$ окружность(MN) &
$C \in$ окружность(MN) & $\triangle(ABC)$ & $D \in$ фигура(ABC) &
$D \in$ окружность(MN) & разныеточки(A, D) & разныеточки(B, D) &
разныеточки$(C, D) \to$ ложь$)$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в пятом. Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

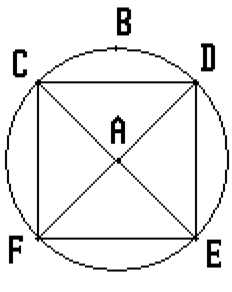
(y) Ввод в рассмотрение точки пересечения биссектрисы угла вписанного в окружность треугольника с его противоположной стороной.



$\forall_{ABCDEF}($биссектриса$(ABCF)$ & $A \in$ окружность(DE) &
$B \in$ окружность(DE) & $C \in$ окружность(DE) & $F \in$ окружность(DE)
& разныеточки$(A, C) \to G-$точка & $G \in$ отрезок(AC) & $G \in$ отрезок$(BF))$

Прием применяется в задачах на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка G пересечения прямых AC и BF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.

2. Квадрат.



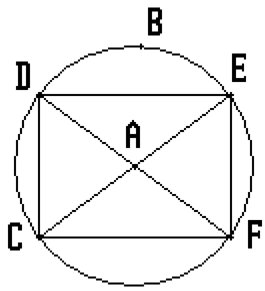
$\forall_{ABCDEF}$(квадрат$(FCDE)$ & окружность(AB)описана около фигура$(FCDE) \to A \in$ отрезок(FD) & $A \in$ отрезок(CE) & $l(CD) = \sqrt{2}l(AB))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEFG}$(квадрат$(FCDE)$ & Окружность(ABG)описана около фигура$(FCDE) \to A \in$ отрезок(FD) & $A \in$ отрезок(CE) & $l(CD) = \sqrt{2}l(AB))$

Аналогично предыдущему.

3. Прямоугольник.



$\forall_{ABCDEF}$(прямоугольник$(CDEF)$ & окружность(AB)описана около фигура$(CDEF) \to A \in$ прямая(DF) & $A \in$ прямая(CE) & $l(DF) = 2l(AB)$ & $l(CE) = 2l(AB))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

4. Правильный многоугольник.

$\forall_{ABa}$(правмногоугольник(a) & окружность(AB)описана около фигура$(a) \to l(a(1)a(2)) = 2l(AB)\sin(\pi/l(a)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDain}$(правмногоугольник(a) & окружность(AB)описана около фигура(a) & $l(a) = n$ & $n -$ even & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $C = a(i)$ & $D = a((i + n/2 - 1)(\mathrm{mod} n) + 1) \to A \in$ отрезок$(CD))$

Выражение a имеет заголовок "набор". Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Пятый антецедент, выделенный указателем "программа", перечисляет номера i вершин многоугольника. Третий, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прямая CD уже рассматривается в задаче. Если величина n больше 19, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.

5. Принадлежность вершин четырехугольника, около которого описана окружность, этой окружности.

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)описана около фигура$(ABCF) \to A \in$ окружность$(DE))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче рассматривается угол с вершиной D, стороны которого проходят через две различные вершины четырехугольника. Допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 2. На этой же теореме создана еще одна версия приема. Она срабатывает на уровне 2, если выполнено одно из условий:

(a) Через центр окружности D проведена прямая, на которой выделена некоторая не принадлежащая окружности и отличная от центра точка.

(b) Четырехугольник не является квадратом, ромбом либо прямоугольником, причем в задаче имеется уравнение, содержащее расстояние DE и расстояние от A до некоторой точки.

Безотносительно к этим условиям, прием всегда срабатывает на уровне 8.

$\forall_{ABCDEFG}$(Окружность(DEG)описана около фигура($ABCF$) $\rightarrow$
$A \in$ Окружность(DEG))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

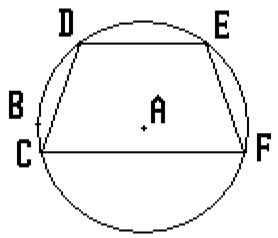
6. Принадлежность вершин многоугольника, около которого описана окружность, этой окружности.

   $\forall_{ABCain}$(окружность(AB)описана около фигура(a) & $l(a) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$
   & $C = a(i) \rightarrow C \in$ окружность(AB))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Третий антецедент выделен указателем "программа" и перечисляет номера i вершин многоугольника. Второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Если число вершин многоугольника меньше 5, то прием блокируется. В задаче должна иметься посылка, содержащая переменную C вне контекстов "фигура(...)", "правмногоугольник(...)", "точка(...)", "прямая(...)". Уровень срабатывания равен 3.

7. Трапеция

   (a) Равенство боковых сторон.



   $\forall_{ABCDEF}$(трапеция($CDEF$) & окружность(AB)описана около
   фигура($CDEF$) $\rightarrow l(CD) = l(EF)$)

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

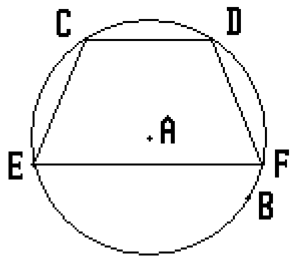
   (b) Соотношение между длинами сторон и радиусом окружности.

   $\forall_{ABCDEF}$(трапеция($CDEF$) & окружность(AB)описана около
   фигура($CDEF$) $\rightarrow (4l(CD)^2 - (l(CF) - l(DE))^2)l(AB)^2 =$
   $l(CD)^2(l(DE)l(CF) + l(CD)^2)$)

Чертеж прежний. Расстояния CD, CF, DE, AB уже рассматриваются в задаче. Каждый неизвестный числовой атом, встречающийся в выражениях для этих расстояний, может быть выражен с помощью уравнений задачи через численные параметры. Используются уравнения с единственным вхождением выражаемого атома, причем допускаются цепочки переходов. Уровень срабатывания равен 6. На той же теореме и с тем же уровнем срабатывания созданы еще две версии приема:

i. Выражения для указанных выше расстояний содержат единственный неизвестный числовой атом, причем он имеет тип "неизв".
ii. Одно из выражений для указанных выше расстояний имеет тип "неизв", а остальные - не содержат неизвестных.

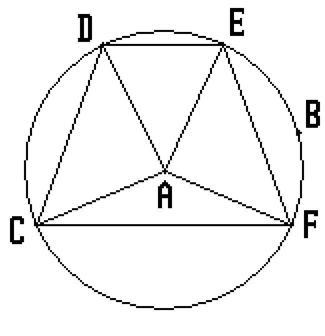
(c) Усмотрение трапеции в описанном четырехугольнике.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(AB)описана около фигура$(ECDF)$ & $l(CE) = l(DF)$ & четырехугольник$(ECDF)$ & $0 < l(EF) - l(CD) \rightarrow$ трапеция$(ECDF)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, причем второй выделен указателем "равно", а точка привязки выбрана в третьем. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Разбор случаев для установления связи между центральными углами описанной трапеции.

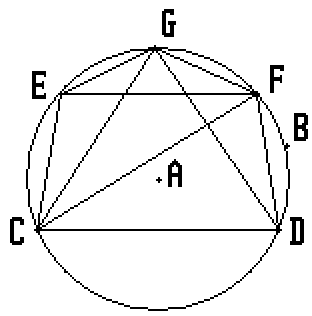


$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(CDEF)$ & окружность(AB)описана около фигура$(CDEF)$ & актив$(\angle(DAE))$ & актив$(\angle(CAF))$ & актив$(\angle(DAC)) \rightarrow$ разныестороны$(D, F,$ прямая$(AC))$ & $2\angle(DAC) + \angle(DAE) + \angle(CAF) = 2\pi \;\vee\;$ однасторона$(D, F,$ прямая$(AC))$ & $2\angle(DAC) = \angle(CAF) - \angle(DAE)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Одно из выражений для углов DAC, CAF,

DAE имеет тип "неизв", два других - не содержат неизвестных. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

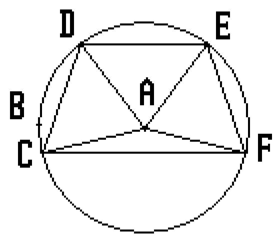
(e) Точка на дуге, отделяемой основанием.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(AB)описана около фигура$(CEFD)$ & прямая$(EF) \parallel$ прямая(CD) & $G \in$ окружность(AB) & актив$(l(EG))$ & актив$(l(GF))$ & актив$(l(CG))$ & актив$(l(DG))$ & $al(EF) = bl(CE)$ & $pl(EF) = ql(CF)$ & разныестороны$(A, G,$ прямая$(EF))$ $\rightarrow$ $(l(GE) + l(GF))(aq + bp) = (l(CG) + l(DG))bq)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, антецеденты со второго по седьмой выделены указателем "усм". Восьмой и девятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, десятый - проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

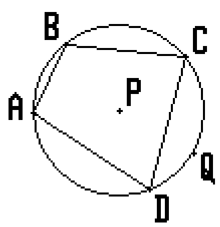
(f) Равенство углов, под которыми из центра видны боковые стороны.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(CDEF)$ & окружность(AB)описана около фигура$(CDEF)$ & актив$(\angle(CAD)) \rightarrow \angle(CAD) = \angle(EAF))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

8. Сумма противоположных углов четырехугольника, около которого описана окружность.

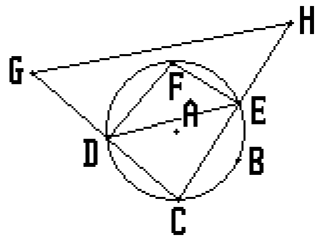


$\forall_{ABCDPQ}$(окружность(PQ)описана около фигура($ABCD$) $\rightarrow$
$\angle(ABC) + \angle(ADC) = \pi$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Один из углов ABC, ADC известен, а другой - нет. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии приема:

(a) Хотя бы один из углов ABC, ADC выражен через численные параметры, и хотя бы один - не известен. Уровень срабатывания равен 4.

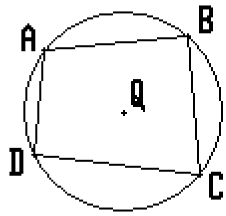
(b) На углы не накладывается никаких ограничений. В случае задачи на исследдование уровень срабатывания равен 7, а в случае задачи на доказательство - 11.



$\forall_{ABCDEFGH}$(актив(окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB)
& $D \in$ отрезок(CG) & $E \in$ отрезок(CH) & однасторона($G, F,$ прямая(DE))
& разныеточки(C, D) & разныеточки(C, E) & разныеточки(D, E) &
разныеточки(D, F) & разныеточки(E, F) $\rightarrow \angle(DFE) = \angle(CGH) + \angle(GHC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, антецеденты со второго по седьмой - выделены указателем "усм". Шесть последних антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Углы DFE, CGH, GHC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

9. Ввод в рассмотрение площади четырехугольника, около которого описана окружность.



$\forall_{ABCDQ}$(четырехугольник($ABCD$) & окружность(QE)описана около
фигура($ABCD$) $\rightarrow$ актив(S(фигура($ABCD$))))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Среди посылок задачи имеется равенство, выражающее площадь некоторой фигуры, среди вершин которой встречаются точки C и D, через известные параметры. Выражение для радиуса окружности имеет тип "неизв". Вершины четырехугольника идентифицируются с точностью до циклических перестановок. Уровень срабатывания равен 7.

10. Ввод вспомогательного параметра - радиуса описанной окружности.

    $\forall_{abAB}$(окружность(AB)описана около $a \to b = l(AB))$

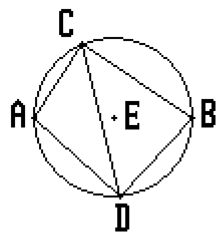
    Антецедент идентифицируется с посылкой. Задача пока не имеет вспомогательных параметров. Выполнено хотя бы одно из двух условий:

    (a) В задаче рассматривается вписанный в окружность AB угол, одна из сторон которого проходит через центр, а величина известна.

    (b) Окружность AB описана около треугольника, один из углов которого известен.

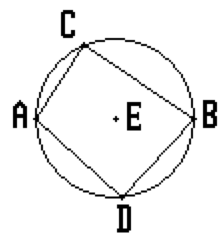
    Задача не имеет известных расстояний, но некоторая ее посылка связывает численную неизвестную с отношением степеней расстояний либо площадей. Расстояние AB пока не выражено через численные параметры. Прием вводит для него вспомогательный параметр b, который временно будет рассматриваться как известная величина. Уровень срабатывания равен 4.

11. Проведение окружности, описанной около четырехугольника.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & разныестороны$(A, B,$ прямая$(CD)) \to E -$ точка & окружность(EA) описана около фигура$(ACBD))$

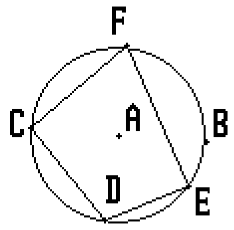
Первые два антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния CD и AD уже рассматриваются в задаче. В задаче пока не рассматривается окружность, на которой лежат точки A, B, C. Прием вводит центр E окружности, описанной около четырехугольника. В вырожденных случаях (четырехугольник оказывается прямоугольником, либо треугольники ABC и ABD равны) прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDE}$(четырехугольник$(ACBD)$ & $\angle(ACB) + \angle(ADB) = \pi \to E -$ точка & окружность(EA)описана около фигура$(ACBD))$

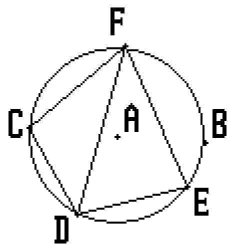
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Никакая тройка вершин четырехугольника не принадлежит рассматриваемой в задаче окружности. Не усматривается перпендикулярность прямых AC и BC. Прием вводит в рассмотрение новую точку E - центр описанной окружности. Уровень срабатывания равен 7.

12. Усмотрение окружности, описанной около четырехугольника.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $\angle(DCF) + \angle(DEF) = \pi$ & актив$(\angle(DCF))$ &
актив$(\angle(DEF))$ & разныестороны$(D, F,$ прямая$(EC))$ &
разныестороны$(E, C,$ прямая$(DF))$ & разныеточки(C, D) &
разныеточки(D, E) & разныеточки$(C, E) \rightarrow F \in$ окружность$(AB))$

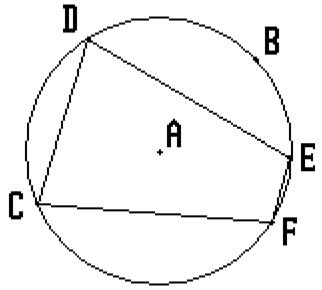
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Пять последних антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEF}($окружность(AB)описана около фигура(DEF) &
$\angle(DCF) + \angle(DEF) = \pi$ & актив$(\angle(DCF))$ & актив$(\angle(DEF))$ &
разныестороны$(C, E,$ прямая$(DF))$ & разныеточки(C, D) &
разныеточки$(C, E) \rightarrow C \in$ окружность$(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 7.

13. Диагональ четырехугольника, около которого описана окружность.



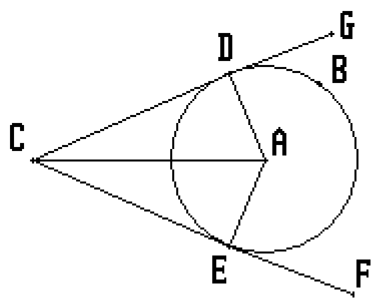
$\forall_{ABCDEF}$(окружность(AB)описана около фигура($CDEF$) & актив($l(CD)$) & актив($l(DE)$) & актив($l(EF)$) & актив($l(CF)$) & актив($l(DF)$) $\to$ $l(DF)^2(l(DE)l(EF)+l(CD)l(CF)) = (l(DE)^2+l(EF)^2)l(CD)l(CF) + (l(CD)^2+l(CF)^2)l(DE)l(EF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из выражений для расстояний DF, DE, EF, CD, CF имеет тип "неизв", остальные - не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 5.

Вписанная в фигуру окружность

1. Окружность, вписанная в угол.

   (a) Ввод в рассмотрение точек касания со сторонами угла.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(AB)вписана в Угол(GCF) $\to$ D – точка & E – точка & $D \in$ прямая(CG) & $\neg$($C \in$ отрезок(DG)) & $E \in$ прямая(CF) & $\neg$($C \in$ отрезок(EF)) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CF) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая(AD) $\perp$ прямая(CG) & $\angle(GCF) = 2\angle(DCA)$ & $\angle(DCA) = \angle(ACE)$)

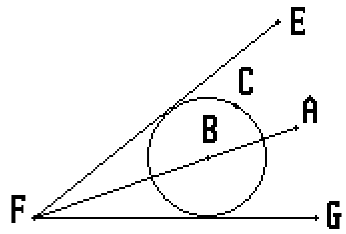
Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче пока не рассматривается точка касания окружности с какой - либо из сторон угла GCF. Прием вводит новые точки D, E касания окружности с этими сторонами, сопровождая их рядом простых утверждений. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Отрезки, проведенные к точкам касания со сторонами угла.

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(AB)вписана в Угол(GCF) & $D \in$ прямая(CG) & $\neg$($C \in$ отрезок(DG)) & $E \in$ прямая(CF) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) $\to$ $\neg$($C \in$ отрезок(DG)) & $\neg$($C \in$ отрезок(EF)) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CF) &прямая(AD) $\perp$ прямая(CG) & $\angle(GCF) = 2\angle(DCA)$ & $\angle(DCA) = \angle(ACE)$)

Чертеж прежний. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

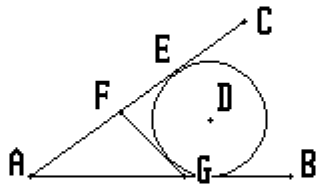
(c) Центр окружности лежит на биссектрисе угла.



$\forall_{ABCEFG}$(окружность(BC)вписана в Угол(EFG) & $\angle(EFA) = \angle(AFG) \rightarrow$ $B \in$ прямая$(AF))$

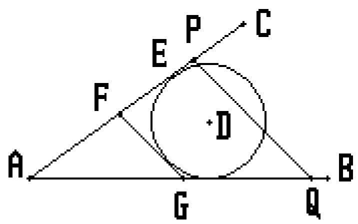
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Углы EFA и AFG уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Касательная к окружности, вписанной в угол.



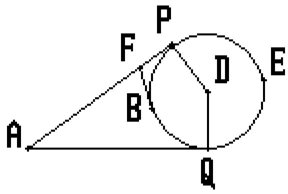
$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в Угол(BAC) & прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & разныестороны$(A, D,$ прямая$(FG))$ & $F \in$ прямая$(AC) \rightarrow \neg(A \in$ интервал$(CF)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.



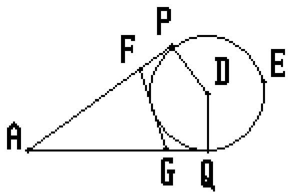
$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(DE)вписана в Угол(BAC) & прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & прямая$(FG) \parallel$ прямая(PQ) & $P \in$ прямая(AC) & $Q \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, P, C) & точкалуча(A, Q, B) & $F \in$ прямая$(AC) \rightarrow \neg(A \in$ интервал$(CF)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABDEFPQ}$(актив(окружность(DE)) & $P \in$ окружность(DE) & прямая(AP) $\perp$ прямая(DP) & $Q \in$ окружность(DE) & прямая(AQ) $\perp$ прямая(DQ) & разныепрямые(прямая(AP), прямая(AQ)) & прямая(BF) – касательная к окружность(DE) & $B \in$ дуга(DPQ) & $F \in$ прямая(AP) $\rightarrow F \in$ отрезок(AP) & $l(BF) = l(PF)$)

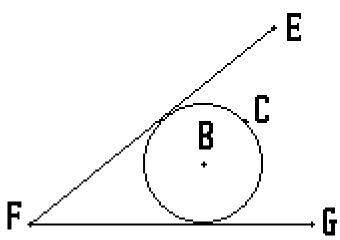
Седьмой и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ADEFGPQ}$(актив(окружность(DE)) & $P \in$ окружность(DE) & прямая(AP) $\perp$ прямая(DP) & $Q \in$ окружность(DE) & прямая(AQ) $\perp$ прямая(DQ) & разныепрямые(прямая(AP), прямая(AQ)) & прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & разныестороны(A, D, прямая(FG)) & $F \in$ прямая(AP) & точкалуча(A, F, P) & $G \in$ прямая(AQ) & точкалуча(A, G, Q) $\rightarrow$ $l(AP) + l(AQ) = l(AF) + l(FG) + l(AG)$)

Седьмой антецедент идентифицируется с посылкой, шестой и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние FG уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 8.

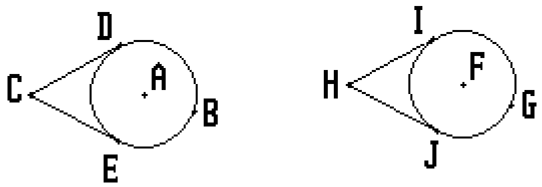
(e) Различие прямых - сторон угла.



$\forall_{BCEFG}$(окружность(BC)вписана в Угол(EFG) $\rightarrow$ $\neg$(прямая(FE) = прямая(FG)))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

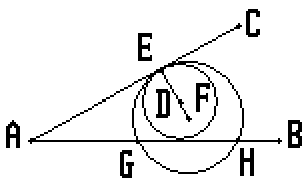
(f) Если окружности равного радиуса вписаны в равные углы, то расстояния от вершины угла до точки касания равны.



$\forall_{ABCDEFGHIJ}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $I \in$ окружность(FG) & $J \in$ окружность(FG) & прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая(CE) – касательная к окружность(AB) & разныепрямые(прямая(CD), прямая(CE)) & прямая(HI) – касательная к окружность(FG) & прямая(HJ) – касательная к окружность(FG) & разныепрямые(прямая(HI), прямая(HJ)) & $\angle(DCE) = \angle(IHJ)$ & $l(AB) = l(FG) \rightarrow l(CD) = l(HI))$

Пятый, шестой, восьмой и девятый антецеденты идентифицируются с посылками. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм". Седьмой и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Расстояние CD известно. Уровень срабатывания равен 6.

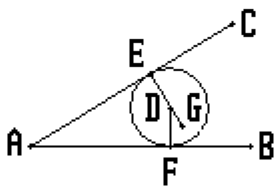
(g) Если одна окружность вписана в угол, а вторая имеет общую с первой точку касания с одной стороной угла и пересекает другую сторону угла, то ее радиус больше радиуса первой.



$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(окружность(DP)вписана в Угол(BAC) & $E \in$ окружность(DP) & $E \in$ прямая(AC) & прямая(AC) – касательная к окружность(FQ) & $E \in$ окружность(FQ) & $G \in$ окружность(FQ) & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ окружность(FQ) & $H \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, G) & разныеточки$(G, H) \rightarrow D \in$ отрезок(EF) & $l(DF) = l(EF) - l(DE)$ & $\neg(D = F))$

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

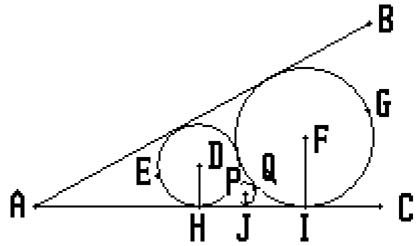
(h) Угол, смежный с углом между радиусами, проведенными к точке касания.



$\forall_{ABCDEFGP}$(окружность(DP)вписана в Угол(BAC) & $E \in$ окружность(DP) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ окружность(DP) & $F \in$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок(EG) & разныеточки$(D, G) \rightarrow$ $\angle(FDG) = \angle(BAC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Угол BAC известен, прямые DF и DG уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 8.

(i) Две касающиеся внешним образом окружности вписаны в угол. Третья окружность касается их внешним образом, а также касается стороны угла.



$\forall_{ABCDEFGHIJPQ}$(окружность(DE)вписана в Угол(BAC) & окружность(FG)вписана в Угол(BAC) & внешкасаются(окружность(DE), окружность(FG)) & внешкасаются(окружность(PQ), окружность(DE)) & внешкасаются(окружность(PQ), окружность(FG)) & прямая(AC) – касательная к окружность(PQ) & однасторона$(P, D$, прямая(AB)) & $J \in$ прямая(AC) & $J \in$ окружность(PQ) & $H \in$ окружность(DE) & $H \in$ прямая(AC) & $I \in$ окружность(FG) & $I \in$ прямая$(AC) \rightarrow J \in$ отрезок(HI) & $l(HI) = l(HJ) + l(IJ)$)

Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

2. Окружность, вписанная в треугольник.

(a) Регистрация в активе сторон треугольника.

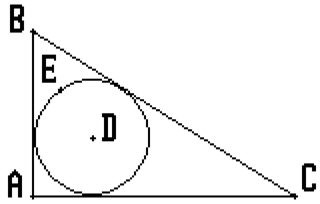
$\forall_{ABCPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура$(ABC) \rightarrow$ актив(прямая(AB)))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Порядок рассмотрения вершин произвольный. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы перед компиляцией. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура(ABC) & актив$(\angle(ACB)) \rightarrow$ актив$(l(AB))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражение для угла ACB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

(b) Прямоугольный треугольник.



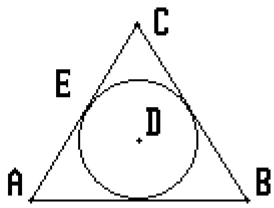
$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & окружность(DE)вписана в фигура$(ABC) \to 2l(DE) = l(AB) + l(AC) - l(BC))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & Окружность(DEF)вписана в фигура$(ABC) \to 2l(DE) = l(AB) + l(AC) - l(BC))$

Аналогично предыдущему.

(c) Равносторонний треугольник.

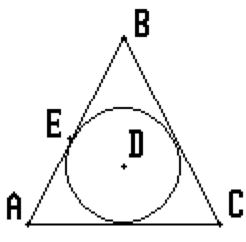


$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)$ & $l(AB) = l(AC)$ & окружность(DE)вписана в фигура$(ABC) \to 2\sqrt{3}l(DE) = l(AC))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(d) Равнобедренный треугольник.

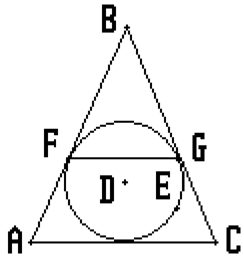
i. Длина основания и отрезок от вершины до точки касания.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DF)вписана в фигура(ABC) & $E \in$ окружность(DF) & $E \in$ прямая(AB) & $l(AB) = l(BC) \to 2l(AE) = l(AC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние AE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

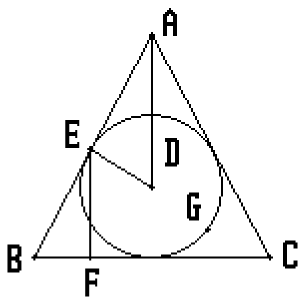
ii. Длина отрезка между точками касания и длины сторон.



$\forall_{ABCDEFG}(l(AB) = l(BC)$ & окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ отрезок(AB) & $F \in$ окружность(DE) & $G \in$ окружность(DE) & $G \in$ отрезок(BC) & актив$(l(FG)) \to$ $2l(AB)(l(AC) - l(FG)) = l(AC)^2)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из расстояний AB, AC, FG не известно, а два других - известны. Уровень срабатывания равен 3.

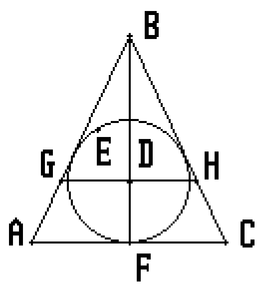
iii. Перпендикуляр к основанию, проведенный из точки касания вписанной окружности с боковой стороной равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}($окружность(DG)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(AC)$ & $F \in$ прямая(BC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(BF))$ & актив$(l(EF))$ & $E \in$ окружность(DG) & $E \in$ прямая$(AB) \to l(BF)l(AE) = l(EF)l(DE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

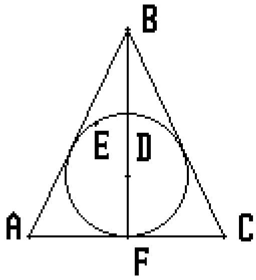
iv. Проведение высоты в равнобедренном треугольнике, в который вписана окружность.



$\forall_{ABCDEFGH}($окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(GH) & прямая$(GH) \parallel$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая$(BC) \to F -$ точка & $F \in$ окружность(DE) & $F \in$ отрезок(AC) & актив$(l(BF))$ &

прямая$(BF) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(BF) & $l(AF) = l(FC)$
& $l(DG) = l(DH))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Точка F пересечения окружности с прямой AC пока не введена, и прием ее вводит. Попутно регистрируется равенство расстояний DG, DH. Уровень срабатывания равен 3.

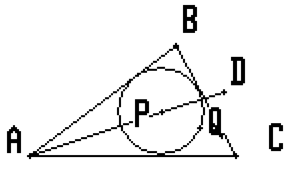


$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$l(AB) = l(BC) \rightarrow F -$ точка & $F \in$ окружность(DE) &
$F \in$ отрезок(AC) & актив$(l(BF))$ & прямая$(BF) \perp$ прямая(AC)
& $D \in$ отрезок(BF) & $l(AF) = l(FC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". В задаче рассматривается некоторый перпендикуляр к прямой AC. При этом перпендикуляр к AC через точку B пока не проведен, и точка F касания окружности со стороной AC пока не введена. Прием вводит эту точку. Уровень срабатывания равен 4.

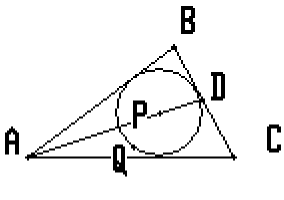
(e) Центр вписанной окружности.

i. Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе внутреннего угла треугольника.



$\forall_{ABCDPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура(ABC) &
биссектриса$(BACD) \rightarrow P \in$ прямая$(AD))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

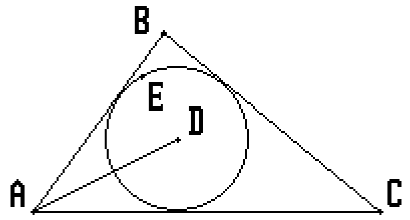


$\forall_{ABCDPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура(ABC) &
$D \in$ прямая(BC) & $P \in$ прямая$(AD) \rightarrow P \in$ отрезок$(AD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура(ABC) &
$D \in$ прямая(BC) & $P \in$ прямая$(AD) \to$ биссектриса$(BACD)$)

Чертеж прежний. Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. В задаче рассматривается расстояние от точки D до некоторой другой точки прямой AD. Прямые AD и BC не перпендикулярны. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура$(ABC) \to$
биссектриса$(BACD)$)
Антецедент идентифицируется с посылкой. Либо одна из точек A, D лежит на рассматриваемой в задаче окружности, либо рассматриваются координаты точки D. Уровень срабатывания равен 4. На этой же теореме созданы еще три приема:

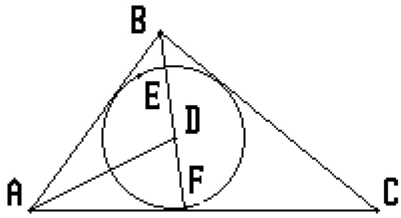
A. Через точку D проходят две различные прямые, пересекающих прямые AB и AC в выделенных точках. Расстояния AB и AC не равны. Уровень срабатывания равен 5.
B. В задаче рассматривается некоторый угол с вершиной A. Либо расстояния AB, AC различны, либо прямая AD уже выделена в задаче. Уровень срабатывания равен 5.
C. В задаче рассматривается прямая, параллельная прямой AB и пересекающаяся с прямой AD в выделенной точке. Расстояния AB и AC различны. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BAD)) \to$ биссектриса$(BACD)$)

Чертеж прежний. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания приема равен 5.

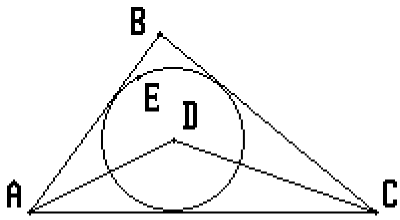
$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
актив$(\angle(BAC)) \to$ биссектриса$(BACD)$)

Чертеж прежний. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Угол BAC либо известен, либо имеет тип "неизв". Либо расстояния AB и AC различны, либо прямая AD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(BD) $\rightarrow$ биссектриса($BACD$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Усматривается пропорциональность расстояний BD и DF. Хотя бы одно из расстояний AB, AF, BD, DF не известно. Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 8. В ней требуется, чтобы угол ADF уже встречался в посылках задачи.

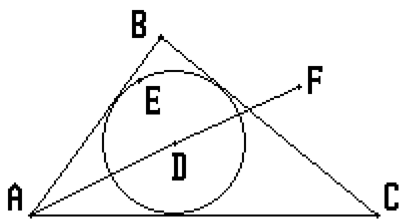


$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & актив($l(CD)$)
& актив($l(AD)$) $\rightarrow$ биссектриса($BACD$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
актив($\angle(ADC)$) $\rightarrow$ биссектриса($BACD$))

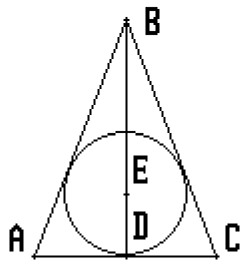
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Угол ADC либо известен, либо имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 12.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ прямая(AD) $\rightarrow$ биссектриса($BACD$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Точка F отлична от A, D и не лежит на окружности DE. Прямые AD и BC не перпендикулярны. Уровень срабатывания равен 11.

ii. Принадлежность центра окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, высоте этого треугольника, опущенной на его основание.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(AC) & $D \in$ окружность$(EF) \to E \in$ отрезок(BD))

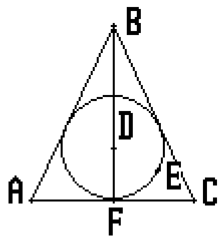
$\forall_{ABCDEFG}$(Окружность(EFG)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(AC) & $D \in$ Окружность$(EFG) \to$ $E \in$ отрезок(BD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая$(AC) \to$ $E \in$ отрезок(BD) & $D \in$ окружность(EF))

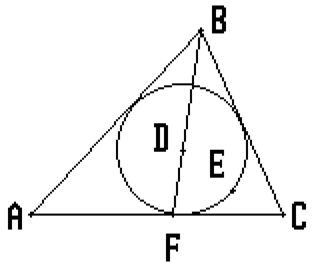
Аналогично предыдущему.

iii. Продолжение до пересечения со стороной треугольника прямой, на которой лежит центр вписанной окружности.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & актив(прямая(BD)) $\to F -$ точка & $F \in$ отрезок(AC) & $F \in$ окружность(DE) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(BF))

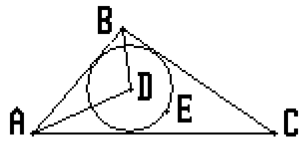
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Третий антецедент выделен указателем "усм". Точка F пересечения прямой AC с окружностью DE пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
актив(прямая(BD)) $\rightarrow F$ – точка & $F \in$ отрезок(AC) &
$D \in$ отрезок(BF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". В задаче рассматривается некоторая прямая, параллельная прямой BD. Точка F пересечения прямых BD и AC пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 6.

iv. Угол, под которым из центра вписанной окружности видны вершины треугольника.



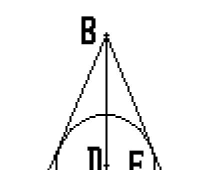
$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) $\rightarrow 2\angle(ADB) =$
$\pi + \angle(ACB)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Угол ACB известен, выражение для угла ADB имеет тип "существатом". Прямые AD, BD уже рассматриваются. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
актив($\angle(ADB)$) $\rightarrow 2\angle(ADB) = \pi + \angle(ACB)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Один из углов ACB, ADB известен, а другой - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

v. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, лежит на высоте, проведенной к основанию.



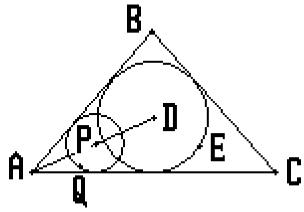
$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$
& $F \in$ прямая(AC) & прямая(BF) $\perp$ прямая(AC) $\rightarrow$
$D \in$ отрезок(BF) & $D \in$ прямая(BF) & $F \in$ окружность(DE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "равно". Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 2 и 4.

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & $F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая$(AC) \to D \in$ отрезок(BF) & $B \in$ прямая(DBF))

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Прямые AC и DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

vi. Центр вписанной в треугольник окружности и центр окружности, вписанной в один из углов треугольника, лежат на одной прямой с вершиной треугольника.



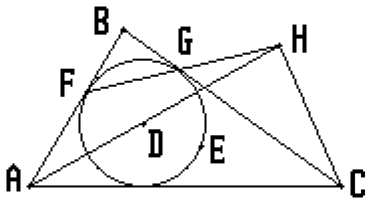
$\forall_{ABCDEPQ}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & окружность(PQ)вписана в Угол(BAC) & $0 \leq l(DE) - l(PQ) \to$ $P \in$ отрезок(AD))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{ABCDEPQ}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & окружность(PQ)вписана в Угол$(BAC) \to P \in$ прямая(AD) & $\neg(A \in$ интервал(PD)))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Не усматривается принадлежность точки P прямой AD. Уровень срабатывания равен 3.

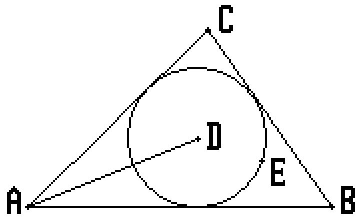
vii. Пересечение биссектрисы угла треугольника и прямой, проходящей через две точки касания.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ окружность(DE) & $G \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(BC) & $H \in$ прямая(AD) & $H \in$ прямая$(FG) \to$ прямая$(CH) \perp$ прямая(AH))

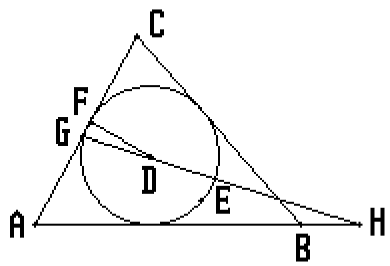
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4. Прием представляет собой одну из так называемых "заготовок", когда в качестве теоремы берется условие некоторой задачи. Обычно это делается для задач, решение которых связано со вводом и последующим исключением вспомогательных объектов - имеет ярко выраженный "перевальный характер". Если результатом служит какое-либо прстое соотношение для уже введенных в задаче объектов, то применение "заготовки", как атомарного шага в еще более сложных задачах, вполне оправдано. Заметим, что обычно "заготовка" рассматривается в решателе альтернативным образом - как задача для усилителя, где она решается, хоть и долго, но уже обычными средствами.

viii. Расстояние от центра вписанной окружности до вершины треугольника.



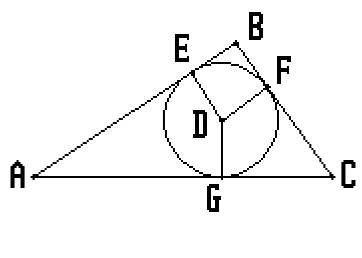
$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AD)) \rightarrow l(DE) = l(AD)\sin(\angle(BAC)/2))$
Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылкой, причем точка привязки выбрана в третьем. Второй антецедент выделен указателем "усм". Угол BAC известен, выражение для расстояния DE имеет тип "определимо", а выражение для расстояния AD - тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

ix. Угол между стороной треугольника и прямой, проходящей через центр вписанной окружности.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ прямая(AC) & $F \in$ окружность(DE) & $F \in$ отрезок(CG) &
$H \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(GH) & актив$(\angle(AGH)) \rightarrow$
$0 \leq \angle(AGH) - \pi/2)$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

x. Усмотрение центра вписанной в треугольник окружности.

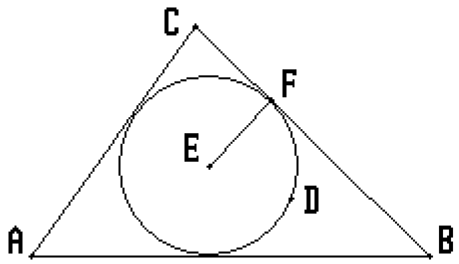


$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DG) \perp$ прямая(AC) & $l(DE) = l(DF)$ & $l(DF) = l(DG)$ & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AC) & $D \in$ фигура(ABC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки$(A, C) \rightarrow$ окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ окружность(DE) & $G \in$ окружность(DE))

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DG) \perp$ прямая(AC) & $l(DE) = l(DF)$ & $l(DF) = l(DG)$ & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AC) & $D \in$ фигура(ABC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки$(A, C) \rightarrow$ Окружность(DEA) вписана в фигура(ABC) & $F \in$ Окружность(DEA) & $G \in$ Окружность(DEA))
Первые восемь антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом антецеденте. Четыре последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояние DE не известно. Уровень срабатывания равен 5.

(f) Точки касания.

i. Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен стороне треугольника.



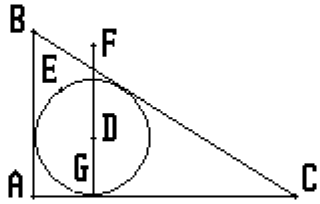
$\forall_{ABCDEF}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ окружность(ED) & $F \in$ прямая$(BC) \rightarrow$ прямая$(EF) \perp$ прямая(BC))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии приема:

A. Хотя бы один из углов ACB и CBA известен, причем треугольник не является равнобедренным с вершиной B либо C. Уровень срабатывания равен 3.

B. Прямая EF уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 4.

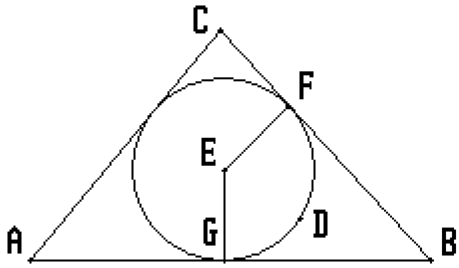
$\forall_{ABCDEF}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ прямая(BC) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow$ $F \in$ окружность(ED))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

ii. Ввод в рассмотрение точки касания.



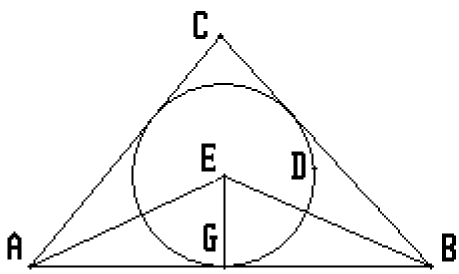
$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & прямая$(FG) \parallel$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая$(FG) \to G \in$ окружность(DE))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.



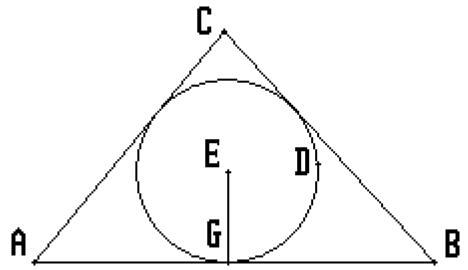
$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ окружность(ED) & $F \in$ прямая$(BC) \to G -$ точка & $G \in$ окружность(ED) & $G \in$ отрезок(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB) & $l(BG) = l(BF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Расстояния AC и BC не равны. Точка касания G пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия данного приема, срабатывающая на уровне 5. В ней требуется, чтобы длины сторон треугольника были известны. Кроме того, через некоторую точку P прямой EF, не лежащую на стороне BC, должна быть проведена прямая, параллельная прямой BC и проходящая через такую точку Q стороны AB либо AC, что расстояние PQ уже рассматривается. Если угол ACB прямой, либо расстояния AB и AC равны, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEG}$(окружность(ED)вписана в фигура$(ABC) \to G -$ точка & $G \in$ окружность(ED) & $G \in$ отрезок(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB))

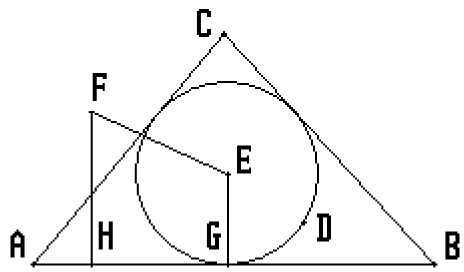
Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче рассматривается площадь треугольника AEB. Точка касания G пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще несколько версий данного приема. Так как треугольник AEB в них не рассматривается, сопровождающий чертеж упрощен:



A. Прием применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно"; фактически - в задачах на построение. Точка E известна. Уровень срабатывания равен 3.
B. Через некоторую точку окружности проведена прямая, параллельная прямой AB. Уровень срабатывания равен 5.
C. Выражение для угла ABC имеет тип "неизв", причем через точку E проведена окружность, описанная около некоторой фигуры. Уровень срабатывания равен 6.
D. Рассматривается расстояние от центра E до некоторой не лежащей на окружности точки, причем это расстояние либо известно, либо имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.
E. Рассматривается расстояние от точки окружности до некоторой другой точки, имеющее тип "неизв". Уровень срабатывания равен 13.
F. Проведена прямая, соединяющая центр окружности с некоторой точкой прямой AB. Уровень срабатывания равен 13.

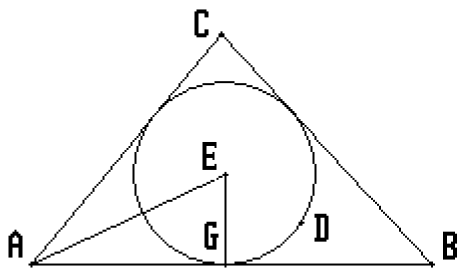
$\forall_{ABCDEFG}$(Окружность(EDF)вписана в фигура$(ABC) \to G-$точка & $G \in$ Окружность(EDF) & $G \in$ отрезок(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB))

Аналогично предыдущему, но в трехмерном случае дополнительных условий не накладывается. Уровень срабатывания равен 5.

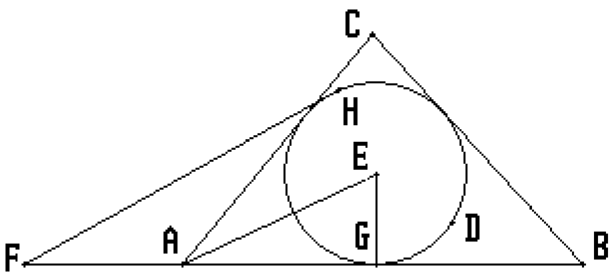


$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) & прямая$(FH) \perp$ прямая(AB) & актив(прямая$(FE)) \to G-$ точка & $G \in$ окружность(ED) & $G \in$ отрезок(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB))

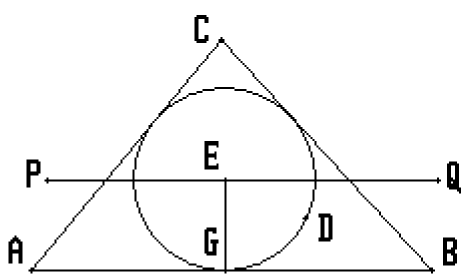
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Точка касания G пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEG}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) &
актив$(l(AE)) \rightarrow G-$точка & $G \in$ окружность(ED) & $G \in$ отрезок(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Выражение для расстояния AE имеет тип "неизв". Не усматривается равенство расстояний AC и AB. Точка касания G пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 8.



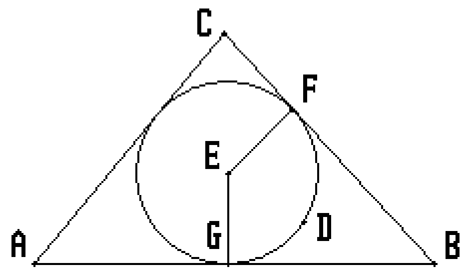
$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ прямая(AB) & прямая(FH) – касательная к окружность(ED) & $H \in$ окружность$(ED) \rightarrow G$ – точка & $G \in$ окружность(ED) &
$G \in$ отрезок(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB))
Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй и четвертый - выделены указателем "усм". Либо угол HFB, либо расстояние FH уже рассматриваются в задаче. Не усматривается принадлежность точки H прямой AB. Прием вводит новую точку G. Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEGPQ}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) &
$E \in$ прямая(PQ) & прямая$(PQ) \parallel$ прямая$(AB) \rightarrow G$ – точка

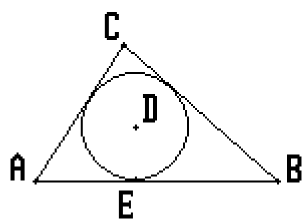
& $G \in$ окружность(ED) & $G \in$ отрезок(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Прием вводит точку G. Уровень срабатывания равен 9.

iii. Равенство расстояний от вершины угла до точек касания.



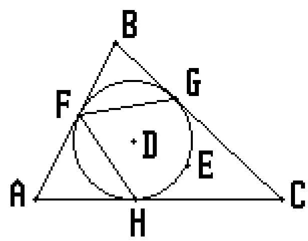
$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ окружность(ED) & $F \in$ прямая(BC) & $G \in$ окружность(ED)
& $G \in$ прямая$(AB) \rightarrow l(BF) = l(BG)$)
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для расстояний BF, BG имеет тип "возмактив". Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 5. В ней ограничение на расстояния BF, BG снято.

iv. Усмотрение принадлежности точки касания стороне треугольника.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DF)вписана в фигура(ABC) &
$E \in$ окружность(DF) & $E \in$ прямая$(AB) \rightarrow E \in$ отрезок(AB))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

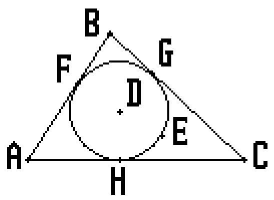
v. Угол между прямыми, соединяющими точки касания.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(BAC))$ & $F \in$ прямая(AB) &
$F \in$ окружность(DE) & $G \in$ прямая(BC) & $G \in$ окружность(DE)

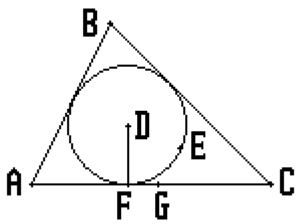
& $H \in$ прямая(AC) & $H \in$ окружность(DE) & актив(прямая(FG))
& актив(прямая(FH)) $\rightarrow \angle(GFH) = (\angle(BAC) + \angle(ABC))/2)$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Углы BAC и ABC известны, угол GFH - не известен. Уровень срабатывания равен 6.

vi. Выражение расстояний от вершины угла до точек касания через длины сторон треугольника.



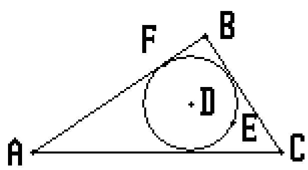
$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ отрезок(AB) & $F \in$ окружность(DE) & $G \in$ отрезок(BC)
& $G \in$ окружность(DE) & $H \in$ отрезок(AC) & $H \in$ окружность(DE)
& актив$(l(AH))$ & актив$(l(BF))$ & актив$(l(CH))$ & актив$(l(AB))$
& актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow 2l(AH) = l(AB) + l(AC) - l(BC)$ &
$2l(BF) = l(AB) + l(BC) - l(AC)$ & $2l(CH) = l(AC) + l(BC) - l(AB))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Длины сторон треугольника известны. Уровни срабатывания равны 5 и 8.

vii. Усмотрение принадлежности точки касания отрезку между вершиной и концом медианы.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AC) &
$l(AG) = l(CG)$ & $0 \leq l(BC) - l(AB) \rightarrow F \in$ отрезок(AG))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 7.

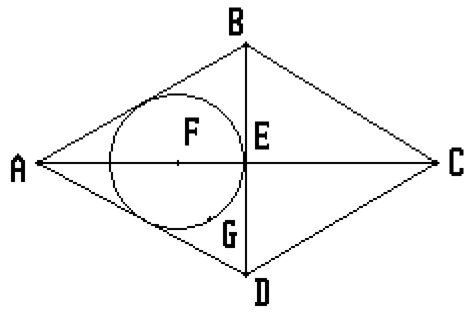
viii. Два соотношения для площади треугольника, возникающие, если известно расстояние от вершины треугольника до точки касания.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая(AB) $\to 2l(AF)l(AB)l(AC) = (l(AF)^2 + l(DE)^2)(l(AB) + l(AC) + l(BC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Расстояния AF и DE известны. Хотя бы одна из длин сторон треугольника не известна. Если угол A прямой, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

ix. Окружность, вписанная в подтреугольник ромба, проходит через точку пересечения его диагоналей.

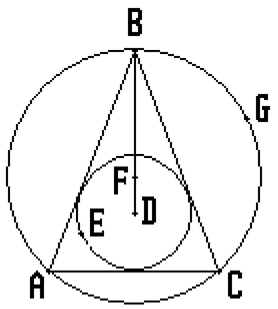


$\forall_{ABCDEFG}$(ромб($ABCD$) & окружность(FG)вписана в фигура(ABD) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) $\to E \in$ окружность(FG) & $E \in$ отрезок(FC))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, два последних - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

(g) Вписанная и описанная окружности.

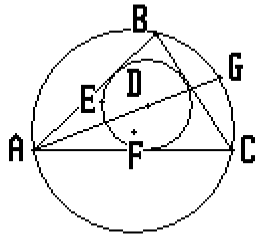
i. Центры вписанной и описанной в равнобедренный треугольник окружностей лежат на одной прямой с его вершиной.



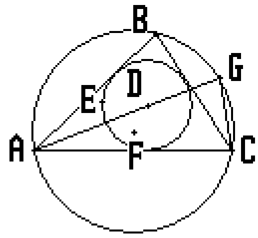
$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & окружность(FG)описана около фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC) \to$ $F \in$ прямая(BD))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5.

ii. Принадлежность центра вписанной окружности отрезку биссектрисы внутреннего угла треугольника, отсекаемому описанной окружностью.

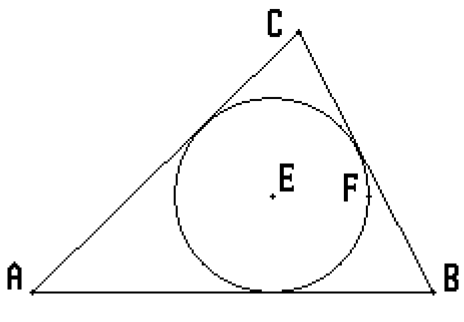


$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & окружность(FH)описана около фигура(ABC) & $D \in$ прямая(AG) & $G \in$ окружность(FH) & разныеточки(A, G) $\rightarrow D \in$ отрезок(AG))
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий и четвертый - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 5.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & окружность(FH)описана около фигура(ABC) & $D \in$ прямая(AG) & $G \in$ окружность(FH) & разныеточки(A, G) $\rightarrow l(DG) = l(CG)$)
Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Хотя бы одно из расстояний DG, CG уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 7.

(h) Выражение радиуса вписанной окружности через площадь и периметр.



$\forall_{ABCEF}$(окружность(EF)вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$ $l(EF)$периметр(фигура(ABC)) $= 2S$(фигура(ABC)))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение для расстояния EF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4. Имеется копия данного приема, срабатывающая на уровне 8. Кроме того, созданы еще несколько версий приема:

i. Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв", причем расстояние EF уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 4.

ii. Расстояние EF и площадь ABC известны, а периметр треугольника не известен. Уровень срабатывания равен 4.

iii. Расстояние EF не известно, причем выражения для площади и периметра треугольника имеют тип "определимо". Уровень срабатывания равен 4. Имеется также копия данного приема, срабатывающая на уровне 8.

iv. Расстояние EF известно, а выражения для площади и периметра треугольника имеют тип "неизвпарам". Напомним, что пакетный индикатор "неизвпарам" проверяет возможность выразить числовой атом через численные параметры, среди которых встречается неизвестная. Уровень срабатывания равен 4.

v. Площадь треугольника известна, а выражение для расстояния EF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 6.

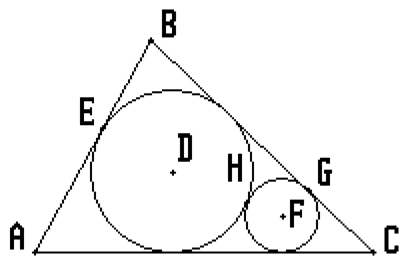
vi. Расстояние EF известно, а выражения для площади и периметра треугольника имеют тип "существатом". Уровень срабатывания равен 8.

vii. Выражения для площади и периметра треугольника имеют тип "возмактив", причем расстояние EF уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 10.

$\forall_{ABCEF}$(актив($l(AB)$) & окружность(EF)вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$
$l(EF)$периметр(фигура(ABC)) $= 2S$(фигура(ABC)))

Оба антецедента идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражения для площади и периметра треугольника имеют тип "определимо", причем расстояние EF уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 7.

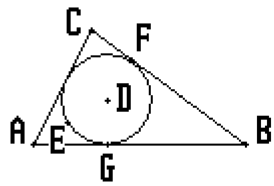
(i) Окружность, касающаяся вписанной в треугольник окружности и двух сторон треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
внешкасаются(окружность(DE), окружность(FG)) &
прямая(BC) – касательная к окружность(FG) & прямая(AC) –
касательная к окружность(FG) & однасторона(D, F, прямая(AB)) &
однасторона(D, F, прямая(AC)) & однасторона(D, F, прямая(BC)) &
$H \in$ окружность(DE) & $H \in$ окружность(FG) $\rightarrow H \in$ отрезок(CD) &
$F \in$ отрезок(CD) & $l(CD) = l(DH) + l(HF) + l(CF)$ & $F \in$ отрезок(CH))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками. Следующие три - обрабатываются проверочными операторами. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(j) Усмотрение окружности, вписанной в треугольник.

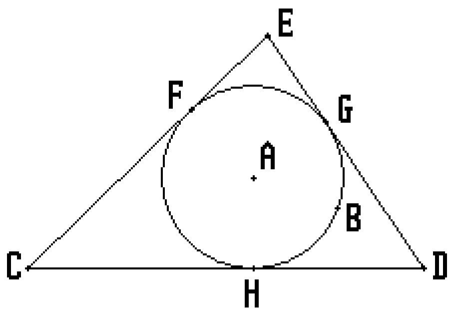


$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AC) – касательная к окружность(DE) & прямая(BC) – касательная к окружность(DE) & прямая(AB) – касательная к окружность(DE) & $\triangle(ABC)$ & $F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ окружность(DE) & $G \in$ отрезок(AB) & $G \in$ окружность$(DE) \rightarrow$ окружность(DE)вписана в фигура(ABC))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

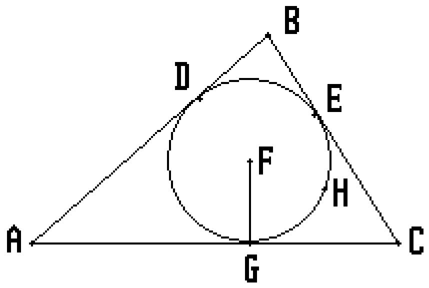
$\forall_{ABCDEFG}(F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ окружность(DE) & $G \in$ отрезок(AB) & $G \in$ окружность(DE) & разныеточки(A, B) & разныеточки(C, B) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \rightarrow$ (прямая(AC) – касательная к окружность(DE) & прямая(BC) – касательная к окружность(DE) & прямая(AB) – касательная к окружность$(DE) \leftrightarrow$ окружность(DE)вписана в фигура(ABC)))

Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)". Он заменяет группу посылок задачи на доказательство либо на исследование на утверждение о том, что окружность вписана в треугольник. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", послеение три - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFGH}(F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CE) & $G \in$ отрезок(DE) & $H \in$ отрезок(CD) & $l(EF) = l(EG)$ & $l(CF) = l(CH)$ & $l(DH) = l(DG)$ & разныеточки(C, D) & разныеточки$(E, F) \rightarrow$ окружность(AB)вписана в фигура(CDE))

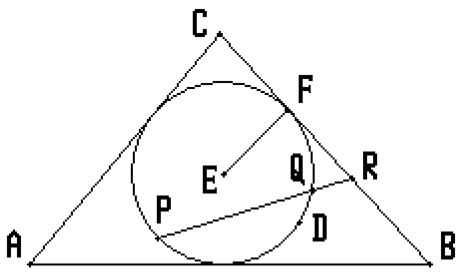
Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие восемь - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Для ускоренной идентификации проверяется отсутствие общих точек окружности с прямыми CE, DE, CD, отличных от точек F, G, H. Уровень срабатывания приема равен 4.



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(AD) – касательная к окружности(FH) & прямая(CE) – касательная к окружности(FH) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(AC) & $D \in$ окружность(FH) & $E \in$ окружность(FH) & $G \in$ окружность(FH) & прямая$(FG) \perp$ прямая(AC) & разныеточки$(A, C) \to$ окружность(FH)вписана в фигура(ABC))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие семь - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 9.

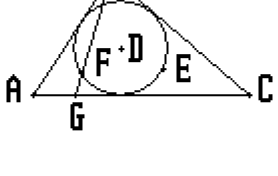
(k) Соотношение для длины отрезка касательной - стороны треугольника и длин отрезков секущей.



$\forall_{ABCDEFPQR}$(окружность(ED)вписана в фигура(ABC) & $F \in$ окружность(ED) & $F \in$ прямая(BC) & $R \in$ прямая(BC) & $Q \in$ окружность(ED) & $P \in$ окружность(ED) & $Q \in$ прямая(PR) & разныеточки(P, Q) & актив$(l(QR)) \to l(FR)^2 = l(PR)l(QR)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений для расстояний FR, PR, QR имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

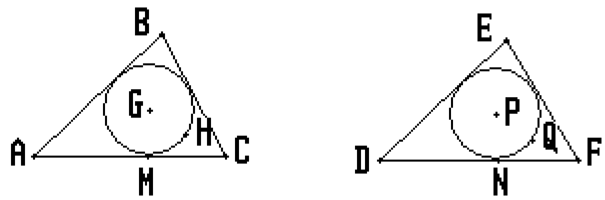
(l) Прямая, проведенная через вершину треугольника и пересекающаяся со вписанной в него окружностью, пересекает противоположную сторону треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ окружность(DE) & $G \in$ прямая(BF) & $G \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
$G \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(BG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

(m) Окружности, вписанные в равные треугольники.



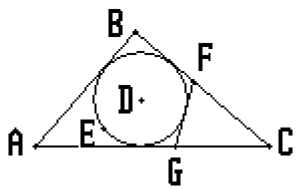
$\forall_{ABCDEFGHPQMN}$(окружность(GH)вписана в фигура(ABC) &
окружность(PQ)вписана в фигура(DEF) & $l(AB) = l(DE)$ &
$l(BC) = l(EF)$ & $l(AC) = l(DF)$ & $M \in$ окружность(GH) &
$M \in$ отрезок(AC) & $N \in$ окружность(PQ) & $N \in$ отрезок$(DF) \rightarrow$
$l(GH) = l(PQ)$ & $l(AM) = l(DN)$ & $l(CM) = l(NF)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - выделены указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(окружность(GH)вписана в фигура(ABC) &
окружность(PQ)вписана в фигура(DEF) & $l(AB) = l(DE)$ &
$l(BC) = l(EF)$ & $l(AC) = l(DF) \rightarrow l(GH) = l(PQ)$)

Аналогично предыдущему. Прием частично перекрывается с предыдущим, но при отсутствии выделенных точек M, N бывает нужен.

(n) Касательная к вписанной окружности, пересекающая две стороны треугольника.

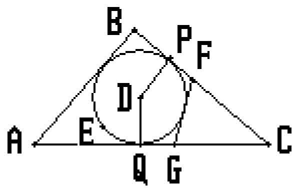


$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & $F \in$ отрезок(BC)
& $G \in$ отрезок(AC) & разныеточки(B, F) & разныеточки$(C, F) \rightarrow$
разныестороны$(C, D,$ прямая(FG)))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & $F \in$ отрезок(BC)
& $G \in$ отрезок(AC) & разныеточки(B, F) & разныеточки$(C, F) \rightarrow$
$l(AC) + l(BC) = l(AB) + l(FG) + l(CF) + l(CG)$)

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Расстояния AB, AC, BC, FG, CF, CG уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5. Создана копия приема, имеющая уровень срабатывания 10.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & $F \in$ отрезок(BC) &
$G \in$ отрезок(AC) & разныеточки(B, F) & разныеточки$(C, F) \rightarrow P$ – точка
& Q – точка & $P \in$ окружность(DE) & $Q \in$ окружность(DE) &
$P \in$ отрезок(BC) & $Q \in$ отрезок(AC) & прямая$(DP) \perp$ прямая(BC) &
прямая$(DQ) \perp$ прямая(AC))

Антецеденты идентифицируются так же, как и выше. Точки P, Q касания окружности со сторонами AC,BC не введены, и прием их вводит. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & $F \in$ отрезок(BC) &
$G \in$ отрезок(AC) & разныеточки(C, F) & разныеточки(B, F) &
$P \in$ окружность(DE) & $P \in$ отрезок(BC) & $Q \in$ окружность(DE) &
$Q \in$ отрезок$(AC) \rightarrow l(CP) + l(CQ) = l(FG) + l(CG) + l(CF)$)

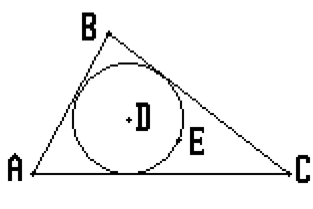
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние FG уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

(o) Плоскость вписанной окружности.

$\forall_{ABCDEF}$(Окружность(DEF)вписана в фигура$(ABC) \rightarrow$
$D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость(ABC))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 1.

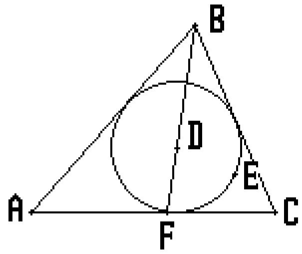
(p) Доказательство того, что окружность вписана в треугольник.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура$(ABC) \leftrightarrow$
прямая(AB) – касательная к окружность(DE) & прямая(BC) –
касательная к окружность(DE) & прямая(AC) – касательная к
окружность(DE) & $D \in$ фигура(ABC))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к конъюнктивному члену условия задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 5.

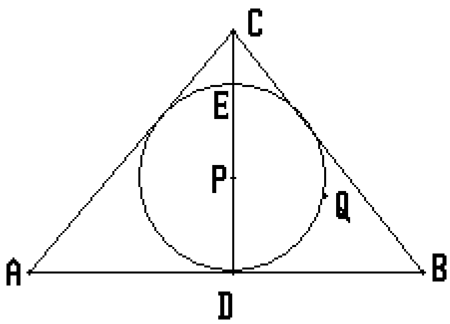
(q) Продолжение биссектрисы угла треугольника до пересечения с противоположной стороной.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
актив(прямая(DB)) $\rightarrow F -$ точка & $F \in$ отрезок(AC) & $F \in$ прямая(BD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". На прямой BD выделена точка, через которую проведена прямая, параллельная прямой AC. Общая точка F прямых BD, AC пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 4.

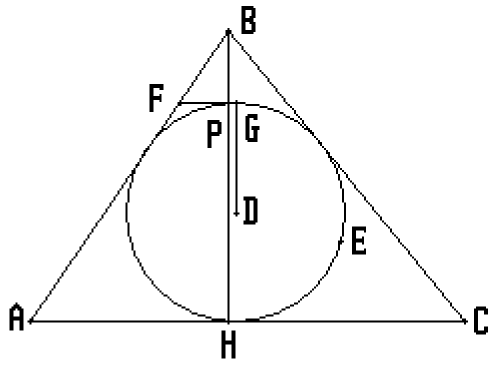
(r) Ввод в рассмотрение точки пересечения биссектрисы равнобедренного треугольника с окружностью.



$\forall_{ABCDEPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура(ABC) & $D \in$ прямая(AB)
& $D \in$ окружность(PQ) & $l(AC) = l(BC) \rightarrow E \in$ отрезок(CD) &
$E \in$ окружность(PQ) & $\neg(D = E)$ & $E -$ точка & $P \in$ отрезок(DE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Через какие-то две точки окружности, отличные от точки D, проведена прямая, пересекающаяся с прямой CD по выделенной точке, отличной от точек C, D, P. Общая точка E окружности и прямой CD, отличная от D, пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 8.

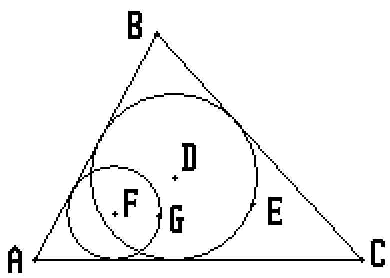
(s) Проведение высоты, пересекающей касательную к вписанной окружности, параллельную основанию.



$\forall_{ABCDEFGHP}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & прямая(FG) $\parallel$ прямая(AC) & $G \in$ окружность(DE) & прямая(DG) $\perp$ прямая(FG) & $F \in$ отрезок(AB) $\to H$ – точка & P – точка & $H \in$ прямая(AC) & прямая(BH) $\perp$ прямая(AC) & $P \in$ отрезок(BH) & $P \in$ прямая(FG) & актив($l(BP)$) & актив($l(BH)$)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Площадь треугольника ABC рассматривается в задаче и неизвестна. Не усматривается совпадение прямых FG и AC. Из точки B не опущен перпендикуляр на прямую AC. Прием вводит в рассмотрение основание H такого перпендикуляра, а также точку P пересечения его с прямой FG. Уровень срабатывания равен 5.

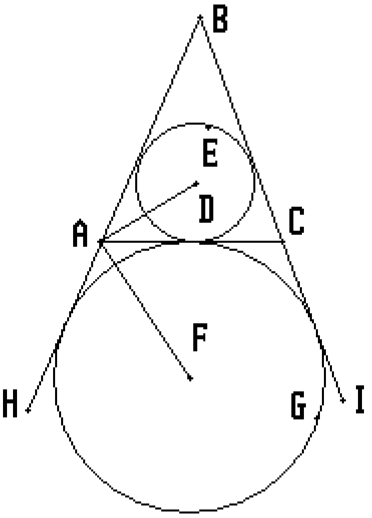
(t) Вписанная окружность и окружность, касающаяся двух сторон треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & прямая(AB) – касательная к окружность(FG) & прямая(AC) – касательная к окружность(FG) & круг(FG) $\subseteq$ фигура(ABC) $\to F \in$ отрезок(AD))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Обозначения точек D, F различны. Уровень срабатывания равен 4.

(u) Вписанная и вневписаная окружности.

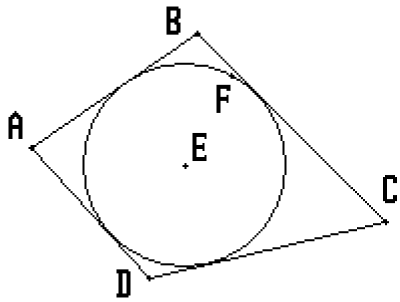


$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & прямая(AC) – касательная к окружность(FG) & прямая(AB) – касательная к окружность(FG) & прямая(BC) – касательная к окружность(FG) & разныестороны($D, F,$ прямая(AC)) & актив(прямая(AD)) & актив(прямая(AF)) $\rightarrow$ прямая(AD) $\perp$ прямая(AF) & $F \in$ прямая(BD))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

3. Окружность, вписанная в четырехугольник.

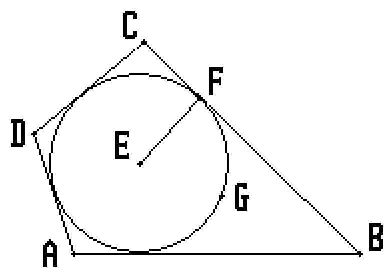
   (a) Суммы противоположных сторон четырехугольника, в который вписана окружность.

   $\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура($ABCD$) $\rightarrow l(AB) + l(CD) = l(AD) + l(BC)$)

   Антецедент идентифицируется с посылкой. В случае квадратов и ромбов прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Перпендикуляр к стороне, опущенный из центра окружности, проходит через точку касания.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG)вписана в фигура$(ABCD)$ & $F \in$ прямая(BC) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(BC) \to F \in$ окружность(EG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 2.

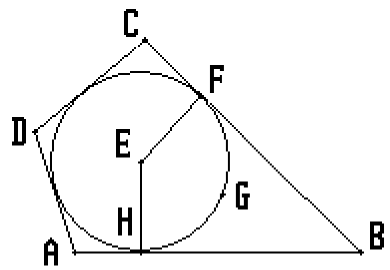
(c) Радиус, проведенный в точку касания.

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG)вписана в фигура$(ABCD)$ & $F \in$ окружность(EG) & $F \in$ прямая$(BC) \to$ прямая$(EF) \perp$ прямая(BC))

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG)вписана в фигура$(ABCD)$ & $F \in$ окружность(EG) & $F \in$ прямая$(BC) \to F \in$ отрезок(BC))

Чертеж и обработка антецедентов прежние. Уровень срабатывания приема равен 2.

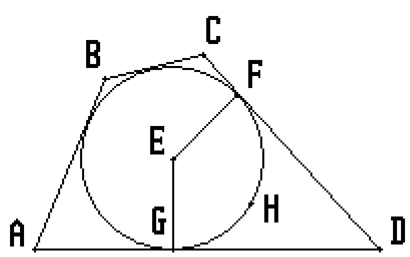
(d) Равенство расстояний от вершины угла до точек касания.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(EG)вписана в фигура$(ABCD)$ & $F \in$ окружность(EG) & $F \in$ прямая(BC) & $H \in$ окружность(EG) & $H \in$ прямая$(AB) \to l(BF) = l(BH)$)

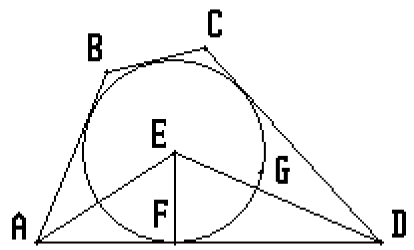
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Пакетный индикатор "существравно" усматривает, что выводимое равенство представляет интерес. Уровень срабатывания равен 4. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 5. В ней отбрасывается проверка существенности равенства.

(e) Ввод в рассмотрение точки касания.



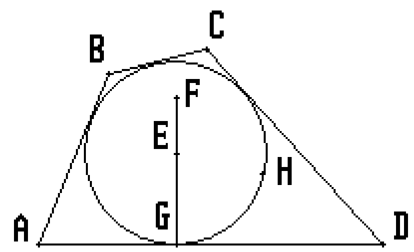
$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(EH)вписана в фигура$(ABCD)$ &
$F \in$ окружность(EH) & $F \in$ прямая$(CD) \rightarrow G -$ точка &
$G \in$ окружность(EH) & $G \in$ отрезок(AD) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AD)
& $l(DG) = l(DF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". В случае квадрат прием блокируется, а в случае ромба - применяется лишь при условии, что на прямой AD выделена точка, отличная от точек A, D. Точка G пересечения окружности с прямой AD пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.



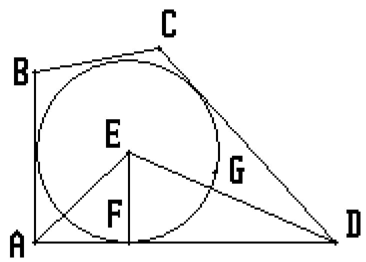
$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG)вписана в фигура$(ABCD)$ &
актив$(l(AE))$ & актив$(l(ED)) \rightarrow F -$ точка & $F \in$ окружность(EG)
& $F \in$ отрезок(AD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD))

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше. Среди длин сторон треугольника AED не более одной, не известной и не имеющей типа "неизв". Блокировка в случае ромба - та же, что и у предыдущего приема. Прием вводит новую точку F. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(EH)вписана в фигура$(ABCD)$ &
прямая$(EF) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow G -$ точка & $G \in$ прямая(EF) &
$G \in$ окружность(EH) & $G \in$ отрезок(AD))

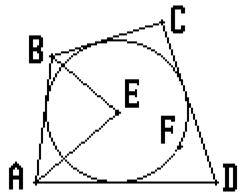
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Блокировки для квадрата и ромба - те же, что выше. Прием вводит новую точку G. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EG)вписана в фигура($ABCD$) & прямая(AB) $\perp$ прямая(AD) $\to$ F – точка & $F \in$ окружность(EG) & $F \in$ отрезок(AD) & прямая(EF) $\perp$ прямая(AD))

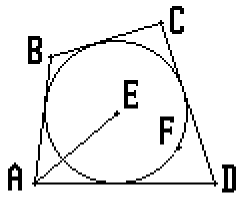
Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Не усматривается параллельность противоположных сторон четырехугольника. Уровень срабатывания равен 9.

(f) Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе внутреннего угла четырехугольника.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура($ABCD$) & актив($\angle(AEB)$) $\to$ биссектриса($BADE$) & биссектриса($ABCE$))

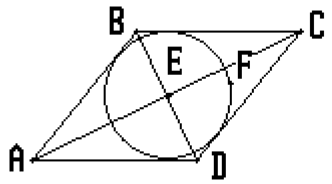
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура($ABCD$) & актив($\angle(BAD)$) $\to$ биссектриса($BADE$))

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. В задаче рассматривается либо угол BAE, либо угол DAE. Уровень срабатывания равен 7.

(g) Окружность, вписанная в параллелограмм.

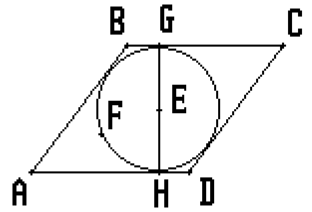


$\forall_{ABCDEF}$(параллелограмм($ABCD$) & окружность(EF)вписана в фигура($ABCD$) $\to$ ромб($ABCD$))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

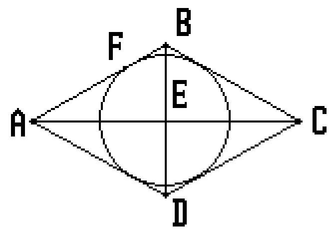
(h) Окружность, вписанная в ромб.

i. Проведение высоты ромба, проходящей через центр вписанной в него окружности.



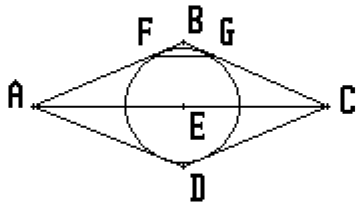
$\forall_{ABCDEFGH}$(ромб$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD) \to G -$ точка & $H -$ точка & $G \in$ отрезок(BC) & $H \in$ отрезок(AD) & $G \in$ окружность(EF) & $H \in$ окружность(EF) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AD) & $l(GH) = 2l(EF)$ & $E \in$ отрезок(GH))
Антецеденты идентифицируются с посылками. В задаче не проведен общий перпендикуляр к двум противоположным сторонам ромба, пересекающийся с ними по выделенным точкам. Прием проводит такой перпендикуляр через центр окружности и вводит новые точки G, H. Уровень срабатывания равен 3.

ii. Точка пересечения диагоналей ромба.



$\forall_{ABCDEF}$(ромб$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD) \to E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD))
Антецеденты идентифицируются с посылками. Либо в задаче рассматривается хотя бы одна из прямых AC, BD, либо рассматривается расстояние от центра окружности до некоторой точки, не лежащей на окружности. Принадлежность точки E прямым AC, BD явно в посылках не указана. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

iii. Отрезок, соединяющий соседние точки касания со сторонами ромба, параллелен диагонали ромба.

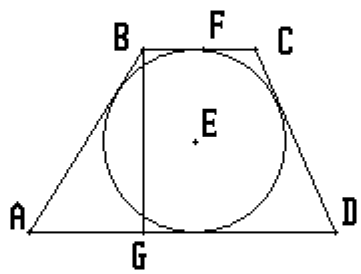


$\forall_{ABCDEFG}$(ромб$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ окружность(EF) & $G \in$ прямая$(BC) \to$ прямая$(FG) \parallel$ прямая(AC))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(i) Окружность, вписанная в трапецию.

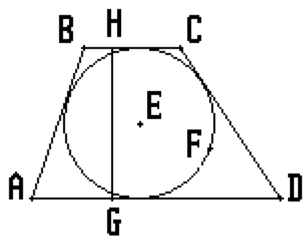
i. Проведение высоты трапеции, в которую вписана окружность.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD) \to G -$ точка & $G \in$ отрезок(AD) & прямая$(BG) \perp$ прямая(AD) & $l(BG) = 2l(EF))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Из точек B, C пока не опущены перпендикуляры на прямую AD, и прием вводит основание G такого перпендикуляра. Уровень срабатывания равен 4.

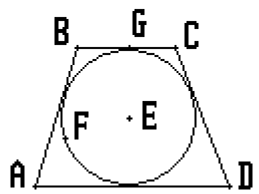
ii. Высота трапеции, в которую вписана окружность.



$\forall_{ABCDEFGH}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $H \in$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(AD) & прямая$(AD) \perp$ прямая$(HG) \to l(HG) = 2l(EF))$

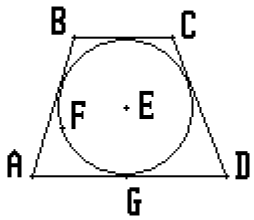
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние EF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

iii. Точка касания с основанием равнобедренной трапеции.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $G \in$ прямая(BC) & $G \in$ окружность$(EF) \to l(BG) = l(GC))$

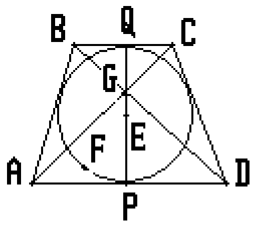
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $G \in$ прямая(AD) & $G \in$ окружность$(EF) \to l(AG) = l(GD))$

Аналогично предыдущему.

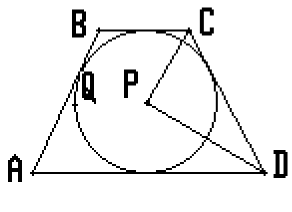
iv. Проведение прямой через центр вписанной в равнобедренную трапецию окружности и точку пересечения диагоналей.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & $G \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая$(BD) \to P -$ точка & $Q -$ точка & $Q \in$ отрезок(BC) & $P \in$ отрезок(AD) & прямая$(PQ) \perp$ прямая(AD) & $G \in$ отрезок(EQ) & $E \in$ отрезок$(PQ))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "равно". Два последних антецедента выделены указателем "усм". Через точку E не проведен перпендикуляр к прямой AD. Прием проводит такой перпендикуляр и вводит новые точки P, Q, в которых он пересекается с основаниями трапеции. Уровень срабатывания равен 4.

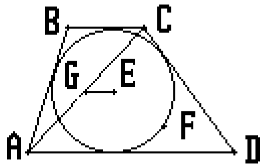
v. Отрезки, соединяющие центр вписанной в трапецию окружности с концами боковой стороны.



$\forall_{ABCDPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура$(ABCD)$ & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & актив$(l(PC))$ & актив$(l(PD)) \to$ прямая$(PC) \perp$ прямая$(PD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

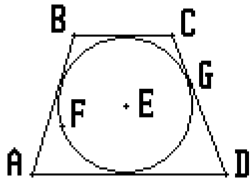
vi. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности и середину диагонали.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $G \in$ отрезок(AC) & $l(AG) = l(CG)$ & разныеточки(G, E) & актив(прямая(EG)) $\to$ прямая$(EG) \parallel$ прямая(AD))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 7.

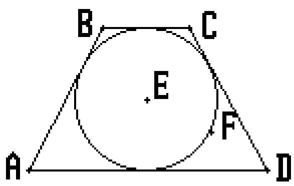
vii. Отрезки, на которые делит боковую сторону точка касания.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $G \in$ окружность(EF) & $G \in$ отрезок$(CD) \to$ $l(CG)l(DG) = l(EG)^2$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, два последних - выделены указателем "усм". Одно из трех расстояний CG, DG, EG не известно, а два других - известны. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 5. В ней требуется, чтобы расстояния CG, DG и EG уже рассматривались в задаче, причем хотя бы одно из них имело тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

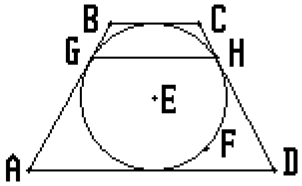
viii. Соотношение между радиусом и длинами оснований в случае равнобедренной трапеции.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & трапеция$(ABCD) \to 4l(EF)^2 = l(BC)l(AD)$)

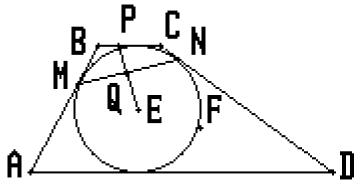
Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Выводимое уравнение содержит единственный неизвестный числовой атом, при этом тип его - "неизв". Уровень срабатывания равен 8.

ix. Прямая, соединяющая точки касания с боковыми сторонами.



$\forall_{ABCDEFGH}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & окружность(EF) вписана в фигура$(ABCD)$ & $G \in$ окружность(EF) &
$G \in$ прямая(EF) & $H \in$ окружность(EF) & $H \in$ прямая(CD) $\rightarrow$ прямая$(GH) \parallel$ прямая(AD))

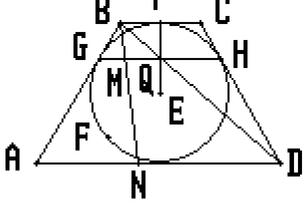
Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Четыре последних антецедента выделены указателем "усм". Либо прямая GH уже рассматривается в задаче, либо каждая из точек G, H встречается в уравнении с численной неизвестной. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEFMNPQ}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $M \in$ окружность(EF) & $M \in$ отрезок(AB)
& $N \in$ окружность(EF) & $N \in$ отрезок(CD) & $P \in$ отрезок(BC)
& $Q \in$ прямая(PE) & $Q \in$ прямая$(MN) \rightarrow Q \in$ отрезок(PE))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Точка Q не совпадает с концами отрезка PE. Уровень срабатывания равен 8.

x. Отрезок, соединяющий точки касания с боковыми сторонами равнобедренной трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.



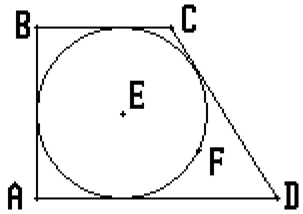
$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ &
$l(AB) = l(CD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $G \in$ окружность(EF) &
$G \in$ прямая(AB) & $H \in$ окружность(EF) & $H \in$ прямая(CD) &
$P \in$ окружность(EF) & $P \in$ прямая(BC) & $M \in$ прямая(GH) &
$M \in$ прямая(BN) & $N \in$ прямая$(AD) \rightarrow Q -$ точка &
$Q \in$ отрезок(PE) & $Q \in$ отрезок(BD) & $Q \in$ отрезок(GH) &
$l(GQ) = l(QH)$ & $l(GM)l(ND) = l(MQ)l(AN)$)

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния GM и AN уже рассматриваются в задаче. Точка Q пересечения прямых GH, PE пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $G \in$ окружность(EF) & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ окружность(EF) & $H \in$ прямая(CD) & $P \in$ окружность(EF) & $P \in$ прямая(BC) & $M \in$ прямая(GH) & $M \in$ прямая(BN) & $N \in$ прямая(AD) & $Q \in$ прямая(PE) & $Q \in$ прямая$(GH) \to Q \in$ отрезок(BD) & $l(GM)l(ND) = l(MQ)l(AN)$)

Антецеденты идентифицируются аналогоично предыдущему приему. Расстояния GM и AN уже введены. Не усматривается принадлежность точки Q отрезку BD. Уровень срабатывания равен 5.

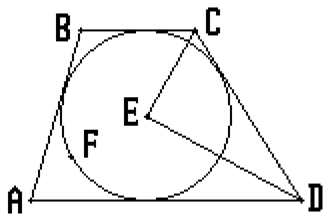
xi. Окружность, вписанная в прямоугольную трапецию.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & актив$(l(BE))$ & актив$(l(AE))$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AD) \to l(BE) = l(AE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

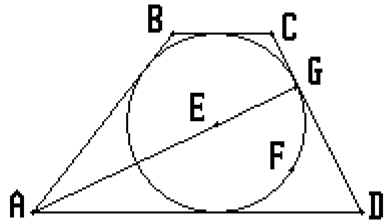
xii. Усмотрение противоречия для расстояний от центра окружности до концов боковой стороны.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & трапеция$(ABCD)$ & $l(CE) = a$ & $l(DE) = b$ & $0 < a - b \to$ ложь)

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками. Выражения a, b константные. Уровень срабатывания равен 2.

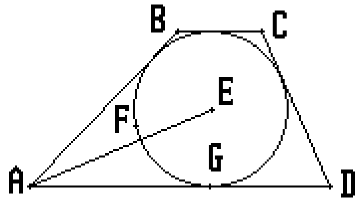
xiii. Прямая, соединяющая вершину трапеции с центром вписанной окружности.



$\forall_{ABCDEFG}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & $G \in$ прямая(AE) & $G \in$ отрезок$(CD) \rightarrow l(AE)l(DG) = l(EG)l(AD)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, дав других - выделены указателем "усм". Расстояния AE и EG уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

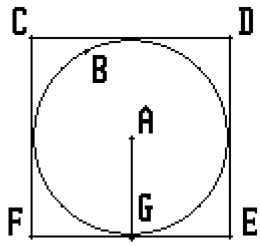
xiv. Ввод в рассмотрение точки касания.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD)$ & трапеция$(ABCD)$ & актив$(l(AE)) \rightarrow G -$ точка & $G \in$ окружность(EF) & $G \in$ отрезок(AD))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Точка G пересечения прямой AD с окружностью EF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

(j) Окружность, вписанная в квадрат.



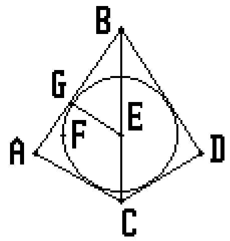
$\forall_{ABCDEF}$(окружность(AB)вписана в фигура$(FCDE)$ & квадрат$(FCDE) \rightarrow 2l(AB) = l(CF)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(AB)вписана в фигура$(FCDE)$ & квадрат$(FCDE)$ & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая$(EF) \rightarrow l(EG) = l(FG)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

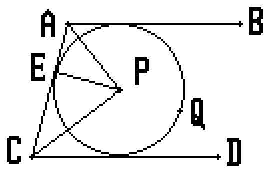
(k) Окружность, вписанная в четырехугольник, два противоположных угла которого - прямые, а два других - не прямые.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(EF)вписана в фигура$(ABDC)$ &
прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(BD) \perp$ прямая$(CD) \to$
$l(CD) = l(AC)$ & $l(AB) = l(BD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $G -$ точка &
$G \in$ отрезок(AB) & $G \in$ окружность(EF) & прямая$(GE) \perp$ прямая(AB))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Не усматривается перпендикулярность прямых AB, BD, а также прямых AC, CD. Либо не усматривается принадлежность точки E прямой BC, либо не введена общая точка окружности с прямой AB. В обоих случаях прием вводит новую точку G. Уровень срабатывания равен 8.

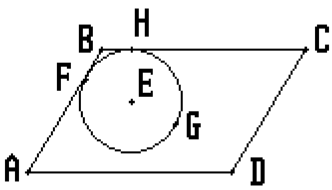
(l) Окружность, касающаяся трех сторон четырехугольника, две из которых параллельны.



$\forall_{ABCDEPQ}$(прямая$(AB) -$ касательная к окружность(PQ) &
прямая$(CD) -$ касательная к окружность(PQ) & прямая$(AC) -$
касательная к окружность(PQ) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) &
$E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ окружность(PQ) & разныепрямые(прямая(AB),
прямая(AC)) & разныеточки$(A, C) \to$ прямая$(AP) \perp$ прямая(CP) &
$l(EP)^2 = l(AE)l(CE)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояние AE уже рассматривается в задаче. Не усматривается перпендикулярность прямых AP и CP. Уровень срабатывания равен 5.

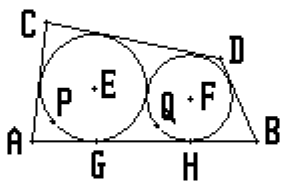
(m) Окружность касается двух смежных сторон параллелограмма.



$\forall_{ABCDEFGH}$(параллелограмм$(ABCD)$ & прямая(BC) – касательная к окружность(EG) & прямая(AB) – касательная к окружность(EG) & $F \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(EG) & $H \in$ отрезок(BC) & $H \in$ окружность$(EG) \rightarrow$ актив$(\angle(ABC))$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, следующие четыре - выделены указателем "усм". Угол ABC в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 5.

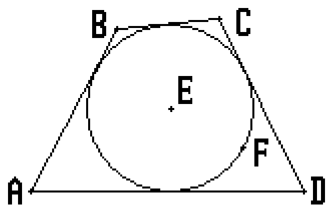
(n) Две окружности, вписанные в четырехугольник.



$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(внешкасаются(окружность(EP), окружность(FQ)) & $G \in$ отрезок(AB) & $H \in$ отрезок(AB) & $G \in$ окружность(EP) & $H \in$ окружность(FQ) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB) & прямая$(FH) \perp$ прямая(AB) & прямая(AC) – касательная к окружность(EP) & прямая(CD) – касательная к окружность(EP) & прямая(CD) – касательная к окружность(FQ) & прямая(BD) – касательная к окружность(FQ) & параллелограмм$(ACDB) \rightarrow$ $G \in$ отрезок(AH) & $H \in$ отрезок(BG))

Первый антецедент, а также пять последних антецедентов идентифицируются с посылками. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

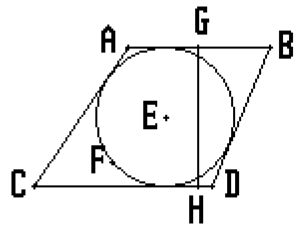
(o) Выражение радиуса вписанной окружности через площадь и периметр.



$\forall_{ABCDEF}$(актив$(S($фигура$(ABCD)))$ & окружность(EF)вписана в фигура$(ABCD) \rightarrow l(EF)$периметр(фигура$(ABCD)) =$ $2S$(фигура$(ABCD)$))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Каждое из выражений для расстояния EF, а также периметра и площади четырехугольника, либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". При этом хотя бы одно из них не известно. Уровень срабатывания равен 4.

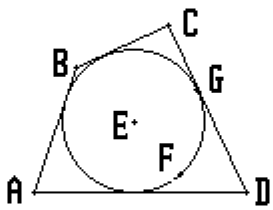
(p) Окружность, вписанная в трапецию общего вида, у которой проведена высота.



$\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(EF)вписана в фигура($CABD$) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(GH) $\perp$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(CD) $\to 2l(EF) = l(GH)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния EF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

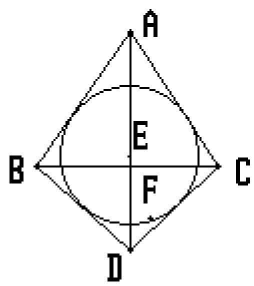
(q) Усмотрение окружности, вписанной в четырехугольник.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AB) – касательная к окружность(EF) & прямая(BC) – касательная к окружность(EF) & прямая(CD) – касательная к окружность(EF) & прямая(AD) – касательная к окружность(EF) & выпукло(фигура($ABCD$)) & $G \in$ отрезок(CD) & $G \in$ окружность(EF) $\to$ окружность(EF)вписана в фигура($ABCD$))

Первые четыре антецедента идентифицированы с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(r) Окружность вписана в четырехугольник, составленный из двух равнобедренных треугольников.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)вписана в фигура($ACDB$) & $l(AB) = l(AC)$ & $l(BD) = l(CD) \to 2l(EF)(l(AB) + l(BD)) = l(BC)l(AD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Не усматривается равенство расстояний AB и BD. Уровень срабатывания равен 9.

4. Окружность, вписанная в многоугольник.

   (a) Правильный многоугольник.

   $\forall_{ABa}$(окружность(AB)вписана в фигура(a) & правмногоугольник$(a) \rightarrow l(a(1)a(2)) = 2l(AB)\,\mathrm{tg}(\pi/l(a)))$

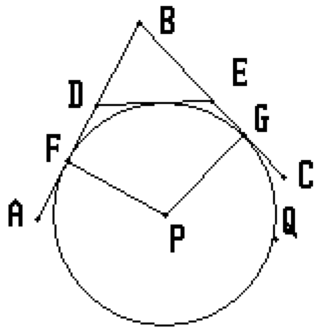
   Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Многоугольник с четным числом сторон, большим четырех.

   $\forall_{anPQ}(l(a) = 2n$ & $3 \leq n$ & окружность(PQ)вписана в фигура$(a) \rightarrow \sum_{i=1}^{n} l(a(2i)a(2i(\mathrm{mod}2n)+1)) = \sum_{i=1}^{n} l(a(2i-1)a(2i)))$

   Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

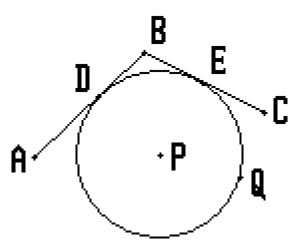
   (c) Касательная к окружности, пересекающая две смежные стороны многоугольника.



   $\forall_{ABCDEFGPQani}$(окружность(PQ)вписана в фигура(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(i(\mathrm{mod}n)+1)$ & $C = a((i+1)(\mathrm{mod}n)+1)$ & $3 < n$ & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & прямая(DE) – касательная к окружность(PQ) & разныеточки(B, D) & разныеточки$(B, E) \rightarrow$ F – точка & $F \in$ отрезок(AB) & $F \in$ окружность(PQ) & G – точка & $G \in$ отрезок(BC) & $G \in$ окружность(PQ) & $l(DE) = l(DF) + l(GE)$ & $D \in$ отрезок(BF) & $E \in$ отрезок$(BG))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Шестой, десятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Наконец, третий, седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "усм". Прием вводит новые точки F и G, в которых окружность PQ касается сторон AB и BC. Уровень срабатывания равен 9.

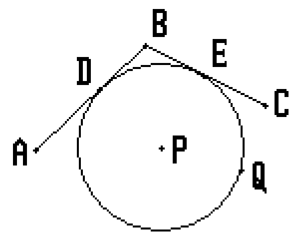
   (d) Ввод в рассмотрение точки касания.



$\forall_{ABCDEPQani}$(окружность(PQ)вписана в фигура(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(i(\text{mod}n) + 1)$ & $C = a((i + 1)(\text{mod}n) + 1)$ & $3 < n$ & $D \in$ отрезок(AB) & $D \in$ окружность(PQ) & актив$(l(BD))$ & актив$(l(BC)) \to E -$ точка & $E \in$ отрезок(BC) & $E \in$ окружность(PQ) & $l(BE) = l(BD)$ & $l(BC) = l(BE) + l(CE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Шестой антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Точка касания E пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 9.

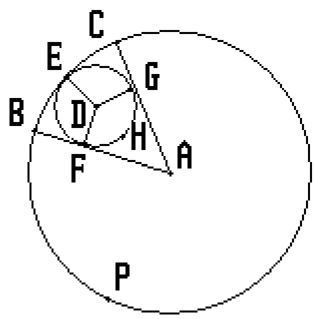
(e) Отрезки смежных сторон, отложенные от вершины многоугольника до точек касания.



$\forall_{ABCDEPQani}$(окружность(PQ)вписана в фигура(a) & $l(a) = n$ & $A = a(i)$ & $B = a(i(\text{mod}n) + 1)$ & $C = a((i + 1)(\text{mod}n) + 1)$ & $3 < n$ & $D \in$ отрезок(AB) & $D \in$ окружность(PQ) & $E \in$ отрезок(BC) & $E \in$ окружность$(PQ) \to l(BD) = l(BE)$)

Антецеденты идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. Хотя бы одно из расстояний BD, BE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 7.

5. Окружность, вписанная в круговой сектор.



$\forall_{ABCDEFGHP}$(окружность(GH)вписана в сектор(ABC) & актив(окружность(AP)) & $B \in$ окружность$(AP) \to E -$ точка & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(DH) & $D \in$ отрезок(AE) & $F -$ точка & $F \in$ отрезок(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ окружность(DH) & $G -$ точка & $G \in$ отрезок(AC) & прямая$(DG) \perp$ прямая(AC) & $G \in$ окружность(DH) & биссектриса$(BACE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

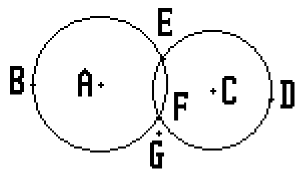
6. Переход от описанной фигуры к вписанной окружности.

   $\forall_{aBC}(a$ описана около круг$(BC) \leftrightarrow$ окружность(BC)вписана в $a)$

   Уровень срабатывания равен 1.

Две пересекающиеся окружности

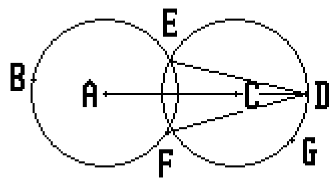
1. В пересечении двух окружностей не более двух точек.



$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F)
& $G \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, G) & разныеточки$(A, C) \rightarrow$
$F = G)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой. Пятый, восьмой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

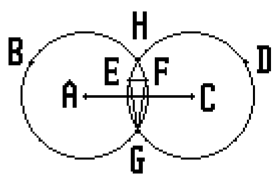
2. Равенство длин хорд, возникающих при пересечении двух окружностей.



$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CG) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CG) & разныеточки(A, C)
& разныеточки(E, F) & $D \in$ окружность(CG) & $D \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
$l(DE) = l(DF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выводимое равенство оценивается пакетным индикатором "существравно" как представляющее интерес. Уровень срабатывания равен 4.

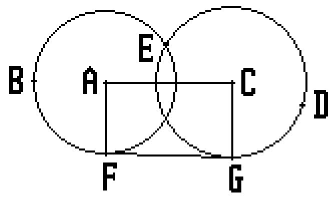
3. На двух дугах пересекающихся окружностей равного радиуса отложены точки, равноудаленные от точки пересечения.



$\forall_{ABCDEFGH}(H \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(CD) &
$G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) & разныеточки(G, H)
& $E \in$ дуга(CGH) & $F \in$ дуга(AGH) & $l(GE) = l(GF)$ & разныеточки(E, F)
& $l(AH) = l(CH)$ & разныеточки$(A, C) \rightarrow$ прямая$(EF) \parallel$ прямая$(AC))$

Шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", восьмой и десятый - указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

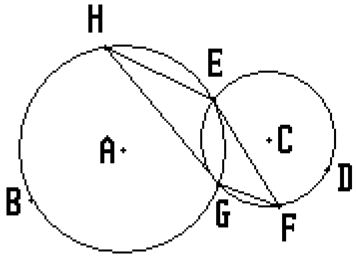
4. Проведение прямой, соединяющей центры пересекающихся окружностей, имеющих общую касательную.



$\forall_{ABCDEFG}($актив(окружность$(AB))$ & $E \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) &
прямая$(AF) \perp$ прямая(FG) & прямая$(CG) \perp$ прямая$(FG) \rightarrow$
актив(прямая$(AC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

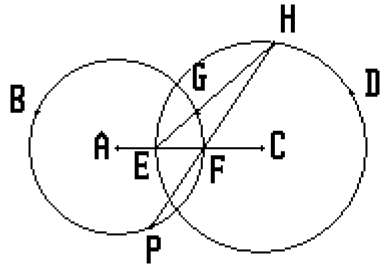
5. Связь между касательными, проведенными в общих точках окружностей.



$\forall_{ABCDEFGH}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) &
$G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, G) &
прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) &
прямая$(HE) \parallel$ прямая(GF) & $H \in$ окружность(AB) & разныеточки(E, H)
& разныеточки$(E, F) \rightarrow$ прямая(GH) – касательная к окружность$(CD))$

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой. Пятый, десятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

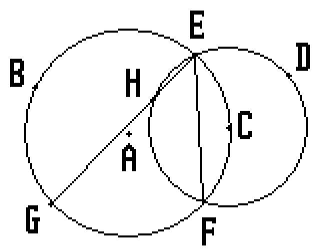
6. Расстояние между центрами пересекающихся окружностей и длина промежутка между точками их пересечения с линией, проходящей через центры.



$\forall_{ABCDEFGHP}$(актив(окружность(AB)) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(CD) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & разныеточки(A, C) & $G \in$ отрезок(EH) & $F \in$ отрезок(PH) & разныеточки(E, H) & разныеточки(F, P) $\rightarrow l(AC) = |l(AB) + l(CD) - l(EF)|$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Девятый, двенадцатый и тринадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Среди расстояний AC, AB, CD, EF допускается не более одного не известного и не имеющего типа "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

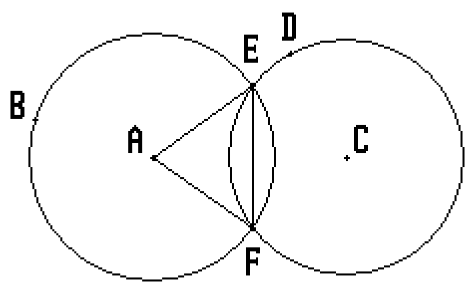
7. Центр одной окружности лежит на другой.



$\forall_{ABCDEFGH}$($C \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныеточки(E, F) & $G \in$ окружность(AB) & $H \in$ отрезок(GE) & $H \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, H) & разныеточки(G, F) & актив(окружность(AB)) $\rightarrow$ разныестороны($G, C,$ прямая(EF)))

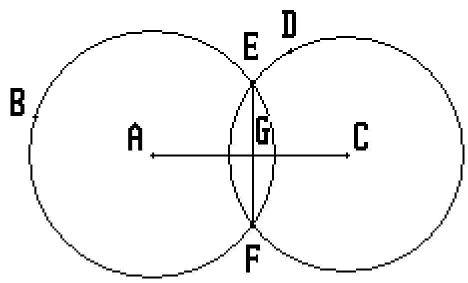
Последний антецедент идентифицируется с посылкой. Шестой, десятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

8. Общая хорда двух окружностей.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & актив$(\angle(EAF)) \to$
актив$(l(EF)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

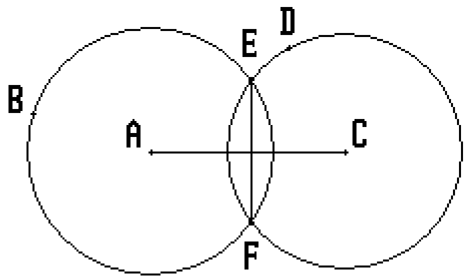


$\forall_{ABCDEFG}($актив(окружность$(AB))$ & $F \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(CD) &
разныеточки(E, F) & $C \in$ плоскость(AEF) & разныеточки$(A, C) \to$
$G-$точка & $G \in$ отрезок(EF) & $G \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(EF)
& актив$(l(AC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Шестой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Хотя бы одно из расстояний AE, CE известно. Идентифицирующие операторы не усматривают перпендикулярность прямых AC, EF. Прием вводит новую точку G. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFG}($актив$(l(EF))$ & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) &
$C \in$ плоскость(AEF) & разныеточки$(A, C) \to G-$точка & $G \in$ отрезок(EF) &
$G \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(EF) & актив$(l(AC)))$

Чертеж прежний. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, шестой и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние EF известно, выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Идентифицирующие операторы не усматривают перпендикулярность прямых AC, EF. Прием вводит новую точку G. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}($актив$(l(EF))$ & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) &
$C \in$ плоскость$(AEF) \to l(AC)\sqrt{4l(CE)^2 - l(EF)^2} = l(AC)^2 + l(CE)^2 - l(AE)^2)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для расстояния EF имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

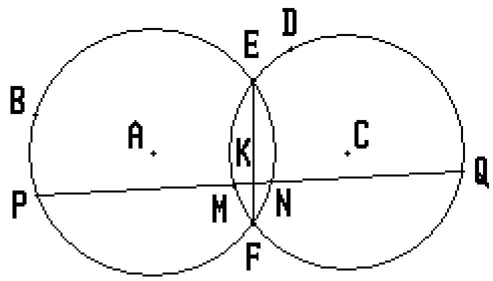
$\forall_{ABCDEF}$(актив($l(EF)$) & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & $C \in$ плоскость(AEF) $\to 4l(AC)^2 l(CE)^2 - (l(AC)^2 + l(CE)^2 - l(AE)^2)^2 = l(AC)^2 l(EF)^2$)

Антецеденты идентифицируются так же, как и выше. Расстояния AC, CE, AE известны, а расстояние EF - не известно. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEF}$(актив($l(EF)$) & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & $C \in$ плоскость(AEF) & разныестороны(A, C, прямая(EF)) $\to 2l(AC) = \sqrt{4l(AE)^2 - l(EF)^2} + \sqrt{4l(CE)^2 - l(EF)^2}$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, шестой и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для расстояний AE, EF, CE имеют тип "определимо", а для расстояния AC - тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

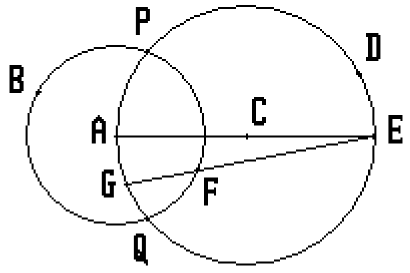
9. Общая хорда и общая секущая.



$\forall_{ABCDEFPQMNK}$($E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & актив($l(PK)$) & актив($l(QK)$) & разныеточки(E, F) & $P \in$ окружность(AB) & $Q \in$ окружность(CD) & $K \in$ отрезок(PQ) & $K \in$ прямая(EF) & $M \in$ окружность(CD) & $M \in$ прямая(PQ) & разныеточки(M, Q) & $N \in$ окружность(AB) & $N \in$ прямая(PQ) & разныеточки(P, N) $\to l(PK)l(KN) = l(MK)l(QK)$)

Первый антецедент идентифицируеся с посылкой. Седьмой, четырнадцатый и семнадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

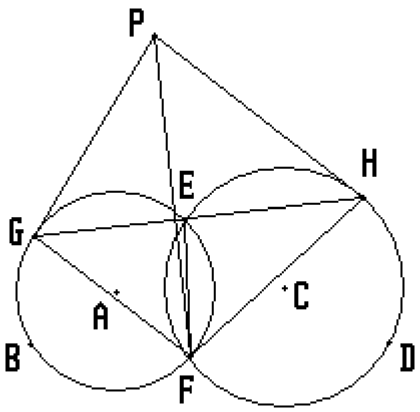
10. Усмотрение различия точек для двух пересекающихся окружностей, одна из которых проходит через центр другой.



$\forall_{ABCDEFGPQ}(P \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(CD) &
$Q \in$ окружность(AB) & $Q \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(CD) & $C \in$ отрезок(AE) & $A \in$ окружность(CD) &
$G \in$ окружность(CD) & $F \in$ отрезок(GE) & разныеточки(P, Q) &
разныеточки$(F, Q) \rightarrow \neg(G = Q))$

Десятый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

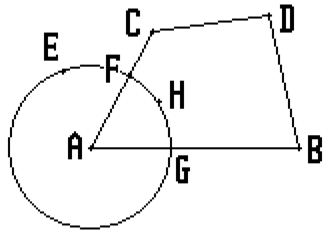
11. Общая секущая, проходящая через точку пересечения окружностей, и две касательных в ее концах.



$\forall_{ABCDEFGHP}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $E \in$ отрезок(GH) &
$G \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(CD) & прямая$(GP) \perp$ прямая(AG)
& прямая$(HP) \perp$ прямая(CH) & разныеточки(E, F) & разныеточки(G, E) &
разныеточки(E, H) & разныеточки$(A, C) \rightarrow (G, P, F) \sim (E, H, F))$

Напомним, что значок $\sim$ используется для обозначения отношения подобия фигур, причем сами фигуры задаются через наборы вершин, соответствующим образом переупорядоченные. Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, четыре последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

Окружность, центр которой находится в вершине выпуклого четырехугольника



$\forall_{ABCDEFGH}$(выпукло(фигура($ACDB$)) & $H \in$ фигура($ACDB$) &
$H \in$ окружность(AE) & $F \in$ отрезок(AC) & $G \in$ отрезок(AB) &
$F \in$ окружность(AE) & $G \in$ окружность(AE) $\rightarrow H \in$ дуга(AFG))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Выбор опорной точки на окружности при решении задачи на построение

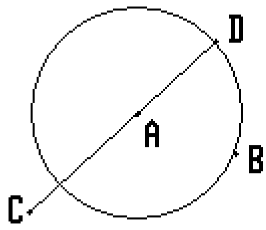
В начале решения планиметрической задачи на построение обычно приходится более или менее произвольным образом выбирать опорные точки, рассматриваемые далее в качестве известных объектов. Для выбора этих точек используются специальные приемы. Они имеют заголовок "замечание", так как лишь корректируют комментарии задачи, не изменяя ее условий и посылок. Здесь мы рассмотрим прием, выбирающий в качестве новой опорной точки некоторую точку C окружности, имеющей своим центром ранее выбранную опорную точку A и проходящей через другую ранее выбранную опорную точку B. Теорема приема имеет вид:

$\forall_{ABC}(C \in$ окружность$(AB) \rightarrow \emptyset)$.

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Выражения A, B известны, а переменная C представляет собой неизвестную. Проверяется, что задача имеет всего две известных точки - A и B. Кроме того, проверяется, что переменная B встречается лишь внутри термов окружность(AB), прямая(AB), расстояние(AB), точка(B), $\neg(B = X)$, где X - произвольные выражения. Проверяется отсутствие комментария (точка C). Прием помечает текущую посылку комментарием (найдено C). Если задача будет решена, то этот комментарий позволит отобрать посылку "$C \in$ окружность(AB)" в качестве утверждения, определяющего точку C. Указатель "найдено(C)" переводит переменную C в разряд известных параметров. Указатель "контроль(...)" вводит установку на откат к текущему состоянию задачи. Этот откат произойдет, если в течение 3000000 шагов работы интерпретатора число известных точек не окажется большим 3. После отката будет введен комментарий (точка C), который заблокирует повторную попытку выбора опорной точки C. Уровень срабатывания равен 5.

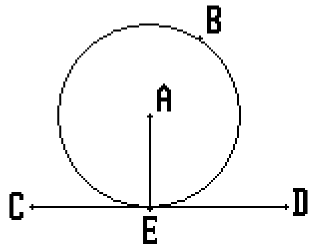
Выражение неизвестной точки через пересечение известных окружности и прямой

Приемы данного раздела имеют заголовок "вывод" и применяются в задачах на исследование, не имеющих цели "известно".



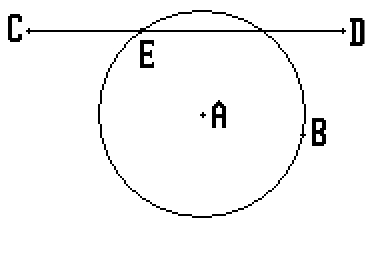
$\forall_{ABCD}$(актив(окружность(AB)) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & D – точка $\rightarrow D \in$ окружность(AB) $\cap$ прямая(AC))

Первый, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Выражения "окружность(AB)" и "прямая(AC)" не содержат неизвестных. Переменная D - неизвестная. Прием переводит переменную D в разряд известных параметров. Он помечает выводимое утверждение и третий антецедент комментарием (найдено D), чтобы они были перенесены в ответ задачи. Третий антецедент позволяет выбрать точку D из пары точек пересечения окружности с прямой. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & актив(прямая(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CD) & E – точка $\rightarrow$ $E \in$ окружность(AB) $\cap$ прямая(CD))

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражения "прямая(CD)" и "окружность(AB)" не содержат неизвестных, переменная E - неизвестная. Выводимое утверждение сопровождается комментарием (найдено E). Уровни срабатывания равны 2 и 5.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & актив(прямая(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) & E – точка $\rightarrow E \in$ окружность(AB) $\cap$ прямая(CD))

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражения "окружность(AB)" и "прямая(CD)" не содержат неизвестных, переменная E - неизвестная. Выводимое утверждение сопровождается комментарием (найдено E). В отличие от первого приема, здесь не удается однозначно выбрать точку E среди пары точек пересечения прямой с окружностью. Поэтому уровень срабатывания данного приема больше: он равен 3 либо 6.

Ввод вспомогательной неизвестной - радиуса окружности, для которой нужно найти расстояние от центра до другой точки

$\forall_{ABa}$(актив(окружность$(AB)) \to l(AB) = a$ & a – число)

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "известно". В задаче рассмаривается расстояние от точки A до некоторой точки C, не лежащей ни на окружности AB, ни на отрезке, концы которого принадлежат этой окружности. Кроме того, точка C не является центром окружности, касающейся окружности AB. Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Отсутствует посылка, указывающая на принадлежность точки A прямой, отрезку либо интервалу, а также посылка, указывающая, что окружность AB вписана в некоторую фигуру. Прием вводит новую переменную a, которая регистрируется как вспомогательная неизвестная. Если уже имелось равенство расстояния AB выражению, содержащему только численные параметры, то действия отменяются. Уровень срабатывания приема равен 9.

Радиус и диаметр окружности

$\forall_{AB}$(радиус(окружность$(AB)) = l(AB)$)

$\forall_{AB}$(диаметр(окружность$(AB)) = 2l(AB)$)

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Они исключают не используемые другими приемами понятия "радиус" и "диаметр". Уровень срабатывания равен 1.

Ориентация равенства

$\forall_{ABC}$(окружность$(AB) = C \leftrightarrow C =$ окружность(AB))

Прием таким образом переориентирует равенство в посылках задачи на исследование, имеющей цель "известно", чтобы переменная C оказалась в левой части, т.е. в остальных посылках вместо нее было подставлено явное обозначение окружности. Уровень срабатывания равен 0.

Окружность в трехмерном пространстве

1. Включение в плоскость.

   $\forall_{ABCDEF}$(Окружность$(ABC) \subseteq$ плоскость$(DEF) \to A \in$ плоскость(DEF) & $B \in$ плоскость(DEF) & $C \in$ плоскость(DEF))

   Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 1.

2. Расстояние до касательной от центра равно радиусу.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая(DE) – касательная к Окружность$(ABC) \to$ расстдопрямой$(A,$ прямая$(DE)) = l(AB)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". В задаче рассматривается некоторая прямоугольная система координат. Уровень срабатывания равен 3.

3.34 Приемы, связанные с кругом

Выражение "круг(A B)" обозначает множество точек круга, ограниченного окружностью, имеющей центр в точке A и проходящей через точку B. Как и выражение "окружность(A B)", это выражение можно использовать только в планиметрических контекстах. Для задания круга в трехмерном пространстве используется выражение "Круг(A B C)", где A - центр, B - точка граничной окружности и C - дополнительная точка, не лежащая на прямой AB и принадлежащая плоскости круга. Приемов, связанных с кругами, в решателе пока совсем мало.

Ввод в рассмотрение окружности

$\forall_{AB}$(актив(окружность(AB)))

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "круг(AB)". Уровень срабатывания равен 0.

Радиус круга

$\forall_{AB}$(радиус(круг(AB)) $= l(AB)$)

$\forall_{AB}$(радиус(Круг(ABC)) $= l(AB)$)

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

3.35 Приемы, связанные с площадями фигур

Площадь плоской фигуры A обозначается "площадь(A)". Заметим, что в разделах решателя, относящихся к физике, таким же образом обозначается площадь материального плоского тела A. Если явно не говорится обратное, инициализация попытки применения приема, выписывающего соотношение для площади, начинается с усмотрения в задаче выражения "площадь(фигура(...))".

Регистрация площади в активе

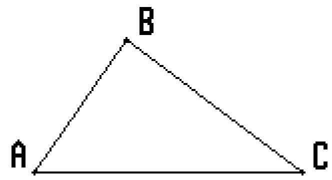
$\forall_a$(актив($S(a)$))

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в задаче на исследование, доказательство либо на преобразование выражения "$S(a)$". Заметим, что это выражение может встречаться как в посылке, так и в условии. В случае задачи на преобразование проверяется наличие цели "класс". Если часть переменных текущего вхождения связаны внешними кванторами либо описателями, то прием блокируется. Блокировка происходит также, если выражение a содержит символ "точки". Это означает, что фигура описана через координаты, и для работы с площадью будут использованы методы аналитической геометрии. Уровень срабатывания равен 0.

Площадь треугольника

Приемы, выводящие сотношение для площади фигуры, делятся на два типа. Приемы первого типа используются, чтобы получить хоть какое-нибудь соотношение, выражающее площадь через расстояния и углы. Среди них выбирается одно, наиболее приоритетное. Приемы второго типа игнорируют наличие ранее выведенных альтернативных соотношений для площади. Механизм выбора наилучшего в эвристическом смысле соотношения приемами первого типа основан на применении указателя приема "оценка($m\ A_1 \dots A_n\ k$)". Этот указатель обеспечивает ввод на предварительном цикле сканирования задачи, при текущем уровне m, комментария ($A_1 \dots A_n k$), означающего, что существует соотношение для рассматриваемой площади, имеющее степень приоритетности k. Данный комментарий так корректируется другими срабатывающими приемами, чтобы сохранялось наименьшее (т.е. наиболее приоритетное) значение k. Впоследствии, когда текущий уровень сканирования поднимется до некоторой величины $m1$, большей m, прием сравнит свою оценку приоритетности k с наименьшим значением этой оценки. Если они совпадут, то прием сработает и введет комментарий, блокирующий срабатывание других аналогичных приемов. Таким образом, приемы первого типа имеют два уровня срабатывания - m и $m1$.

1. Регистрация в активе сторон треугольника.



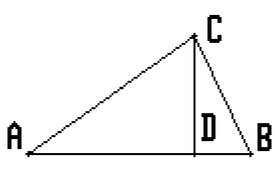
$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$))

Прием инициируется при усмотрении в задаче выражения "площадь(фигура(набор(ABC)))". Заметим, что формульный редактор прорисовывает такие выражения в виде S(фигура(ABC)). Либо в задаче рассматривается прямая, перпендикулярная AB, либо не рассматриваются прямые, перпендикулярные AC и BC. Проверяется отсутствие комментария (площадь фигура(ABC) треугольник), указывающего, что уже выводилось соотношение для площади треугольника ABC. Кроме того, вводится комментарий (пассив ...), указывающий, что как только расстояние AB будет вычислено, вес текущей посылки, содержащей выражение "площадь(...)", должен быть понижен до 1. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)))

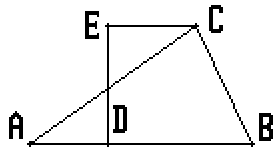
Прием инициируется при усмотрении того же выражения, что и выше. Через каждую из точек A, B должно проходить более одной рассматриваемой в задаче прямой, не проходящих через оставшиеся вершины треугольника. Сама прямая AB при этом в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания приема равен 4.

2. Случай, когда высота треугольника уже проведена.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $D \in$ прямая$(AB) \rightarrow$
$2S$(фигура$(ABC)) = l(AB)l(CD))$

Прием инициируется при усмотрении в посылке либо условии задачи выражения "площадь(фигура(ABC))". Антецеденты выделены указателем "усм". Проверяется отсутствие комментария "(площадь фигура(ABC) треугольник)", после чего такой комментарий вводится. Прием использует указатель "оценка(...)". Степень приоритетности его равен 2. Уровни срабатывания равны 1 и 2 (на уровне 1 регистрируется степень приоритетности, на уровне 2 - выводится соотношение). Создана еще одна версия приема. В ней требуется, чтобы хотя бы одно из расстояний AB, CD было известно. Степень приоритетности этой версии равна 1.

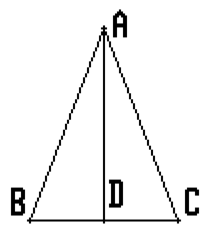


$\forall_{ABCDE}$(прямая$(CE) \parallel$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) &
прямая$(DE) \perp$ прямая$(AB) \rightarrow 2S$(фигура$(ABC)) = l(AB)l(DE))$

Прием инициируется так же, как предыдущий. Антецеденты выделены указателем "усм". Степень приоритетности равна 2, уровни срабатывания - 1 и 2. Прием продублирован для срабатывания на уровнях 4 и 5, где его приоритетность также равна 2.

3. Площадь равнобедренного треугольника.

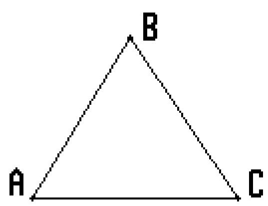
   (a) Выделена середина основания.



   $\forall_{ABCD}(l(AB) = l(AC)$ & $D \in$ прямая(BC) & $l(BD) = l(DC) \rightarrow$
   прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $2S$(фигура$(ABC)) = l(AD)l(BC))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Идентифицирующие операторы не усматривают перпендикулярность прямых AD и BC. Степень приоритетности равна 2, уровни срабатывания - 1 и 2.

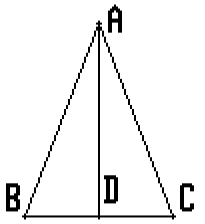
   (b) Равносторонний треугольник.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(AC)\ \&\ l(BC) = l(AC) \to \sqrt{3}l(AB)^2 = 4S(\text{фигура}(ABC)))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Прием не использует указателя "оценка", однако срабатывает лишь при условии, что пока не выводилось соотношение для площади треугольника ABC. Уровень срабатывания равен 2.

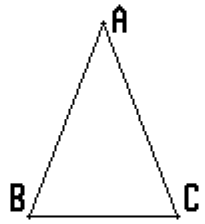
(c) Проведение высоты к основанию треугольника.



$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(AC) \to D - \text{точка}\ \&\ D \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC)\ \&\ l(BD) = l(DC)\ \&\ 2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AD)l(BC))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Не усматривается, что треугольник равносторонний. Середина отрезка BC в задаче пока не введена. Либо расстояние BC известно, либо в задаче не рассматривается окружность с центром A, проходящая через точки B, C, у которой известен некоторый центральный либо вписанный угол. Основание D опущенной из вершины A высоты пока не рассматривается, и прием его вводит. Степень приоритетности равна 3, уровни срабатывания - 1 и 2. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы расстояние BC было не известно, а указанная выше окружность - имелась. Эта версия не использует указателя "оценка" и срабатывает на уровне 8.

(d) Использование угла при вершине треугольника.



$\forall_{ABCa}(l(AB) = l(AC)\ \&\ \angle(BAC) = a \to 2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)^2 \sin a)$

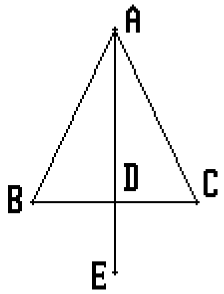
Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражение a не содержит неизвестных. Предварительно проверяется, что треугольник не равносторонний. Степень приоритетности равна 2; уровни срабатывания приема - 1 и 2.

(e) Использование угла при основании треугольника.

$\forall_{ABCa}(l(AB) = l(AC)\ \&\ \angle(ABC) = a \to 2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)^2 \sin(2a))$

Аналогично предыдущему, но дополнительно проверяется, что $l(AB)$ известно.

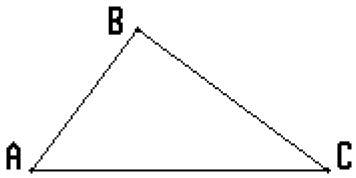
(f) Рассмотрение точки пересечения высоты с основанием для определения площади равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABCDE}$(актив(S(фигура(ABC))) & $l(AB) = l(AC)$ & прямая(AE) $\perp$ прямая(BC) $\to$ D – точка & $D \in$ отрезок(BC) & $D \in$ прямая(AE) & $2S$(фигура(ABC)) $= l(AD)l(BC)$)

Указатели "контрольвывода" и "оценка" отсутствуют. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Выражение для площади имеет тип "неизв". Точка D пересечения прямых AE и BC не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

4. Выражение площади через величину угла и длины двух прилегающих к нему сторон.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) $\to$ $2S$(фигура(ABC)) $= l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC))$)

Инициализация попытки применения приема начинается с усмотрения выражения "площадь(фигура(ABC))". Антецедент идентифицируется с посылкой. Угол BAC, а также хотя бы одна из величин S(фигура(ABC)), $l(AB)$, $l(AC)$ известны. Расстояния AB и AC уже рассматриваются в задаче. Степень приоритетности равна 2. Уровни срабатывания приема равны 3 и 4. Созданы еще несколько версий приема, имеющих ту же теорему:

(a) Требуется, чтобы хотя бы одно из выражений $l(AB)$, $l(AC)$, $\angle(BAC)$, S(фигура(ABC)) было либо известно, либо имело тип "внешнеизв". По-прежнему предполагается, что расстояния AB и AC уже введены. Степень приоритетности данной версии равна 3, уровни срабатывания - 3 и 4.

(b) Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Выражения для расстояний AB, AC и площади треугольника ABC содержат только численные параметры (в частности, могут быть известны). Указатель "оценка" не используется. Допускается срабатывание приема, если другим приемом уже выводилось соотношение для площади треугольника ABC. Уровень срабатывания равен 5.

(c) Расстояния AB и AC, а также угол BAC известны. Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Указатель "оценка" не используется. Уровень срабатывания равен 9.

(d) Угол BAC и площадь треугольника ABC известны, однако хотя бы одно из расстояний AB, AC не известны. Указатель "оценка" не используется. Уровень срабатывания равен 10.

$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($\angle(BAC)$) $\to 2S$(фигура(ABC)) $=$ $l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Расстояния AB и AC, а также угол BAC известны. Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Указатели "контрольвывода" и "оценка"не используются. Уровень срабатывания равен 4.

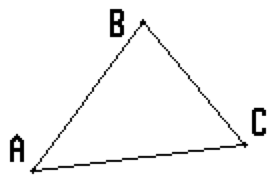
$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) $\to 2S$(фигура(ABC)) $=$ $l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC))$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Площадь треугольника ABC и угол BAC выражены через численные параметры. Указатель "контрольвывода" используется, а указатель "оценка" - нет. Уровень срабатывания равен 8. Создана еще одна версия приема, в которой требуется, чтобы выражения для расстояний AB, AC и угла BAC имели тип "определимо", а выражение для площади треугольника ABC - тип "неизв". Уровень срабатывания этой версии равен 9.

$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & актив($\angle(BAC)$) $\to$ $2S$(фигура(ABC)) $= l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражения для угла BAC и площади треугольника ABC имеют тип "определимо", а выражения для расстояний AB и AC - тип "неизв". Для прямоугольных треугольников прием блокируется. Уровень срабатывания равен 11. Создана еще одна версия приема, имеющая тот же уровень срабатывания. В ней требуется, чтобы расстояния AB, AC и угол BAC были известны, а выражение для площади треугольника ABC имело тип "применимо".

5. Предварительный учет углов треугольника, длины двух сторон которого известны.

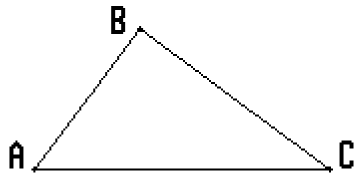


$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив(S(фигура(ABC))) $\to \emptyset$)

Прием имеет заголовок "замечание". Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Расстояния AB и AC известны, выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Существует равенство в посылках, правая часть которого известна, а левая - содержит символ "угол". Прием вводит комментарий (пассив ...), обеспечивающий слежение за появлением равенства, определяющего величину угла BAC.

Как только такое равенство возникнет, вес посылки, идентифицированной с третьим антецедентом, будет понижен до 4. Аналогичный прием введен для слежения за вычислением угла ABC. Уровень срабатывания обоих приемов равен 5.

6. Формула Герона.



$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & $a = (l(AB) + l(AC) + l(BC))/2 \to S$(фигура$(ABC))^2 =$ $a(a - l(AB))(a - l(AC))(a - l(BC)))$

Прием инициируется при усмотрении в задаче выражения "площадь(фигура(ABC))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Расстояния AB, AC, BC известны; площадь треугольника - не известна. Прием срабатывает лишь при условии, что ранее не было выведено другое соотношение для площади ABC. Уровень срабатывания равен 6. Созданы еще несколько версий данного приема:

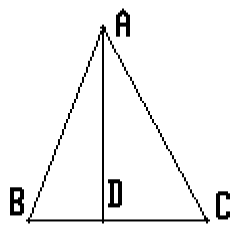
(a) Длины сторон треугольника известны, выражение для площади имеет тип "неизв". Ограничение на отсутствие ранее выведенных соотношений для площади отбрасывается. В случае прямоугольного треугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.

(b) Каждое из выражений для площади и длин сторон треугольника имеет тип "внешнеизв". Остальное - как для предыдущей версии.

(c) Площадь треугольника известна. Выражения для длин сторон пропорциональны некоторой численной неизвестной; коэффициенты - некоторые выражения, не содержащие неизвестных. Уровень срабатывания равен 9.

(d) Выражение для площади треугольника имеет тип "неизв"; выражения для сторон содержат только численные параметры. В случае прямоугольного треугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 9.

7. Проведение высоты.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(BC)$) $\to D -$ точка & $D \in$ прямая(BC) & прямая(AD) $\perp$ прямая(BC) & $2S$(фигура(ABC)) $= l(AD)l(BC)$)

Прием имеет указатели "контрольвывода" и "оценка". Антецедент идентифицируется с посылкой. Длина стороны BC известна; длина хотя бы одной из двух других сторон не известна. На прямой BC выделена точка P, отличная от точек B и C, для которой угол APB известен. Основание D опущенной из точки A высоты пока не введено, и прием его вводит. Степень приоритетности равна 2, уровни срабатывания - 1 и 2. Созданы еще несколько версий приема:

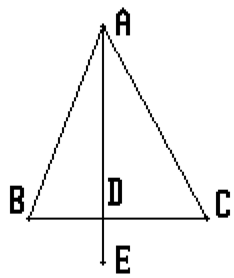
(a) Выражение для расстояния BC либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". В задаче рассматривается прямая, параллельная прямой BC. Степень приоритетности равна 4, уровни срабатывания - 4 и 5.

(b) Выражение для расстояния BC либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". В задаче рассматривается прямая, перпендикулярная прямой BC и пересекающаяся по выделенной точке хотя бы с одной из прямых AB, AC. Степень приоритетности равна 3, уровни срабатывания - 4 и 5.

(c) Либо (а) на прямой BC выделена такая точка P, что угол APC известен, либо (б) рассматривается перпендикуляр к прямой BC, перпендикуляры к двум другим сторонам не рассматриваются, а углы треугольника не известны. Длины сторон AC и AB не известны. Указатель "оценка" здесь и в двух следующих приемах не используется, уровень срабатывания приема равен 9.

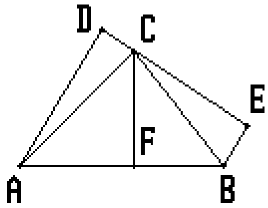
(d) Выражение для расстояния BC либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Если оно известно, то длины двух других сторон не известны. В противном случае - оно либо имеет тип "внешнеизв", либо ни одна из двух других длин сторон не имеет типа "внешнеизв".Если одна из двух других сторон известна, то к ней пока не проведена высота. Уровень срабатывания равен 10.

(e) Выражение для площади треугольника либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Проведена прямая, параллельная стороне BC. Уровень срабатывания равен 12.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BC) \perp$ прямая(AE) & $E \in$ плоскость$(ABC) \to D -$ точка & $D \in$ прямая(AE) & $D \in$ прямая(BC) & $2S$(фигура$(ABC)) = l(AD)l(BC)$)

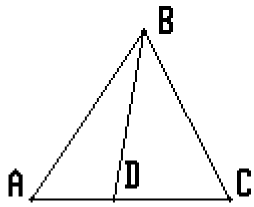
Прием использует указатели "контрольвывода" и "оценка". Антецеденты выделены указателем "усм". Либо расстояние BC известно, либо оно имеет тип "неизв", либо проведена прямая, параллельная прямой BC. Точка D пересечения прямых AE и BC пока не введена, и прием ее вводит. Степень приоритетности равна 2, уровни срабатывания - 4 и 5.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AD) \perp$ прямая(DE) & прямая$(BE) \perp$ прямая(DE) & $C \in$ прямая(DE) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(BE)) \rightarrow$ $F -$ точка & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AB) & $2S$(фигура$(ABC)) = l(CF)l(AB)$)

Прием использует указатель "контрольвывода", но не использует указателя "оценка". Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB, AD и BE известны. Основание F высоты, проведенной из вершины C, пока не введено, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 9.

8. Соотношение для площадей треугольников, имеющих общую высоту.

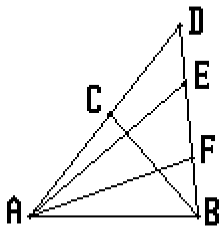


$\forall_{ABCD}(D \in$ прямая$(AC) \rightarrow S$(фигура$(ABD))l(AC) = S$(фигура$(ABC))l(AD))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "S(фигура(ABC))". Антецедент выделен указателем "усм". Площадь треугольника ABD уже рассматривается в задаче. Точка D отлична от точек A, C. Уровень срабатывания равен 7.

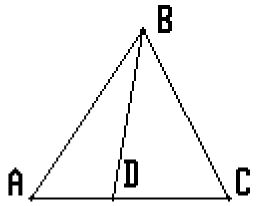
$\forall_{ABCD}$(актив$(l(BD))$ & $D \in$ прямая(AC) & актив$(l(AD))$ & $al(AC) = bl(AD) \rightarrow$ bS(фигура$(ABD)) = aS$(фигура$(ABC)))$

Инициализация приема - аналогично предыдущему. Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Эвристическая оценка перспективы определить площадь треугольника ABC, найденная с помощью пакетного синтезатора "определимость", меньше аналогичной оценки для треугольника ABD. Если прямые BD и AC перпендикулярны, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7. Создана копия приема, срабатывающая на уровне 12.



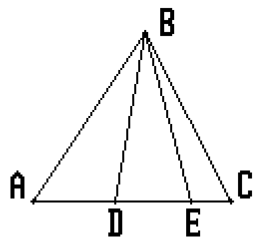
$\forall_{ABCDEFab}$(актив(S(фигура(ACB))) & $C \in$ отрезок(AD) & $al(AC) = bl(CD)$ & $E \in$ отрезок(BD) & $F \in$ отрезок(BD) & актив(S(фигура(AEF))) $\rightarrow$ $bl(BD)S$(фигура(AEF)) $= (a+b)l(EF)S$(фигура(ACB)))

Первый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCDab}$($D \in$ прямая(AC) & $al(AD) = bl(CD) \rightarrow aS$(фигура($ABD$)) $=$ bS(фигура(BCD)))

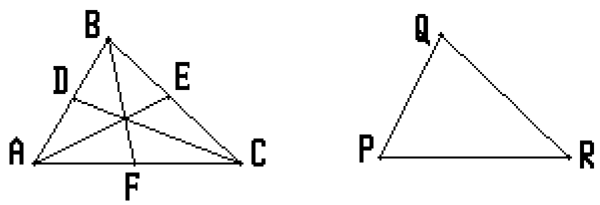
Инициализация попытки применения приема происходит при усмотрении выражения "S(фигура(ABD))". Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Площадь треугольника ABD известна, а площадь треугольника BCD - не известна, но имеет тип "существатом". Уровень срабатывания приема равен 10.



$\forall_{ABCDE}$($D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & $al(DE) = bl(AC) \rightarrow$ bS(фигура(ABC)) $= aS$(фигура(DBE)))

Указатель "контрольвывода" инциирует попытку применения приема при усмотрении выражения "S(фигура(ABC))". Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Площадь треугольника DBE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания приема равен 10.

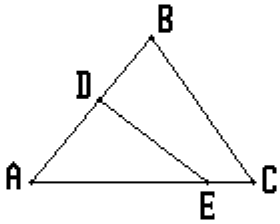
9. Отношение площадей треугольников, длины сторон одного из которых пропорциональны длинам медиан другого.



$\forall_{ABCDEFPQRab}(F \in$ отрезок(AC) & $l(AF) = l(CF)$ & $D \in$ отрезок(AB) & $l(AD) = l(BD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $al(PQ) = bl(AE)$ & $al(QR) = bl(CD)$ & $al(PR) = bl(BF) \rightarrow 3b^2 S($фигура$(ABC)) = 4a^2 S($фигура$(PQR)))$

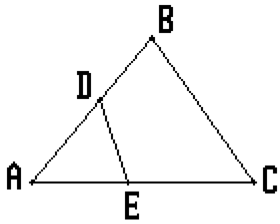
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура(ABC))". Три последних антецедента идентифицируются с посылками. Второй, четвертый и шестой антецеденты выделены указателем "равно". Первый, третий и пятый - указателем "усм". Площадь треугольника PQR уже рассматривается. Уровень срабатывания равен 6.

10. Отношение площадей треугольников, имеющих общий угол.



$\forall_{ABCDEpq}($актив$(S($фигура$(ABC)))$ & актив$(S($фигура$(ADE)))$ & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & $pl(AD) = ql(AB)$ & $rl(AE) = sl(AC) \rightarrow qsS($фигура$(ABC)) = pr(S($фигура$(ADE))))$

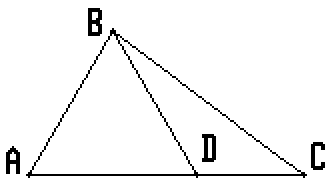
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Пятый и шестой антецеденты обрабатываются пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDEpq}($актив$(S($фигура$(ABC)))$ & актив$(S($фигура$(ADE)))$ & точкалуча(A, B, D) & точкалуча(A, C, E) & $\angle(ADE) = \angle(BCA)$ & $al(DE) = bl(BC) \rightarrow b^2 S($фигура$(ABC)) = a^2(S($фигура$(ADE))))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 5.

11. Разбиение треугольника на два меньших треугольника.



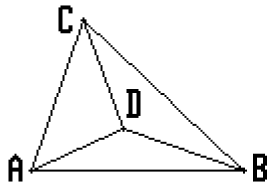
$\forall_{ABCD}(D \in$ отрезок$(AC) \rightarrow S($фигура$(ABC)) = S($фигура$(ABD)) +$
$S($фигура$(BDC)))$

Указатель "контрольввода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура(ABC))". Антецедент выделен указателем "усм". Площади треугольников ABD и BDC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 9. Она применяется в задачах на доказательство, причем инициируется при усмотрении одной лишь площади треугольника ABD.

$\forall_{ABCD}($актив$(\angle(ABD))$ & актив$(\angle(DBC))$ & актив$(l(BD))$ &
$D \in$ отрезок$(AC) \rightarrow 2S($фигура$(ABC)) = l(BD)(l(AB)\sin(\angle(ABD)) +$
$l(BC)\sin(\angle(DBC))))$

Указатель "контрольвывода" инциирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура(ABC))". Антецеденты выделены указателем "усм". Площадь треугольника ABC и углы ABD, DBC известны. Расстояния AB и BC уже рассматриваются в задаче. Если угол ABC прямой, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

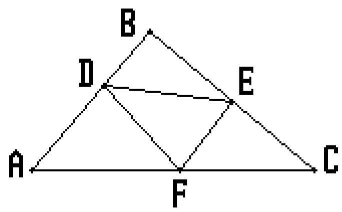
12. Разбиение треугольника на три треугольника отрезками, проведенными от вершин к внутренней точке.



$\forall_{ABCD}($актив$(S($фигура$(ABC)))$ & $D \in$ фигура(ABC) & актив(прямая(CD)) & актив(прямая(AD)) & актив(прямая(BD)) $\rightarrow S($фигура$(ABC)) =$
$S($фигура$(ACD)) + S($фигура$(BCD)) + S($фигура$(ABD)))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

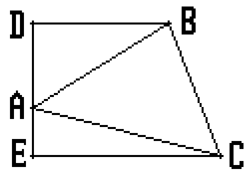
13. Разбиение треугольника на четыре треугольника.



$\forall_{ABCDEFabcdpq}($актив$(S($фигура$(ABC)))$ & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(AC) & актив$(S($фигура$(DEF)))$ & $al(AD) = bl(AB)$ &
$cl(BE) = dl(BC)$ & $pl(AF) = ql(AC) \rightarrow S($фигура$(DEF))acp =$
$S($фигура$(ABC))(cq(a-b) + d(bp - aq)))$

Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Антецеденты со второго по четвертый выделены указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются пакетными синтезаторами. Расстояния AD, AB, BE, BC, AF, AC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

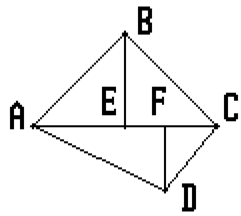
14. Дополнение треугольника до трапеции.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(DE) \perp$ прямая(BD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(DE) & $A \in$ отрезок(DE) & актив(S(фигура(ABC))) $\to S$(фигура$(EDBC)$) $=$ S(фигура(ADB)) $+ S$(фигура(ABC)) $+ S$(фигура(AEC))))

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм". Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

15. Отношение площадей треугольников, имеющих общую сторону.

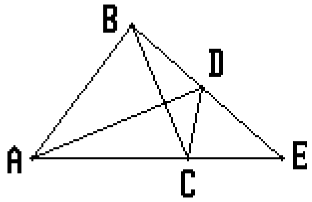


$\forall_{ABCDEF}$(актив(S(фигура(ABC))) & актив(S(фигура(ACD))) & $\neg(S$(фигура$(ACD)) = 0)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \to E -$ точка & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(BE) & $F -$ точка & $F \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(DF) & S(фигура(ABC)) $=$ S(фигура$(ACD))l(BE)/l(DF)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент выделен указателем "усм". В посылках задачи встречается равенство вида

$$mS(\text{фигура}(ABC))/nS(\text{фигура}(ACD)) = X,$$

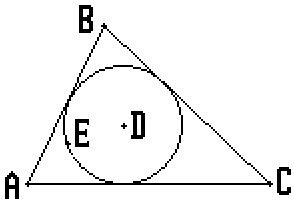
где выражение X имеет тип "неизв". Усматривается перпендикулярность прямых AD и CD. Углы BAC, BCA, CAD, ACD не известны. Основание E опущенной из вершины B высоты пока не введено. Прием вводит это основание, а также основание F высоты, опущенной из вершины D. Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDEpq}$(актив(S(фигура(ABC))) & актив(S(фигура(ACD))) & $D \in$ прямая(BE) & $E \in$ прямая(AC) & pS(фигура(ABC)) = qS(фигура(ACD)) & разныепрямые(прямая(AE), прямая(BE)) $\rightarrow ql(DE) = pl(BE)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, последний - проверочным оператором. Если для расстояний DE, BE уже имеется соотношение пропорциональности с известными коэффициентами, то проверяется, что хотя бы один из коэффициентов p, q не известен. Уровень срабатывания равен 5.

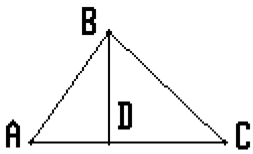
16. Выражение площади треугольника через углы и радиус вписанной окружности.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & актив(S(фигура(ABC))) & актив($\angle(BAC)$) & актив($\angle(ABC)$) $\rightarrow$
S(фигура(ABC)) $\sin(\angle(ABC)/2)\sin(\angle(BAC)/2)\cos(\angle(ABC)/2+\angle(BAC)/2) = l(DE)^2\cos(\angle(ABC)/2)\cos(\angle(BAC)/2)\sin(\angle(ABC)/2+\angle(BAC)/2)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Углы ABC и BAC известны. Хотя бы одно из выражений для площади треугольника ABC и расстояния DE имеет тип "неизв". Если треугольник прямоугольный, то прием блокируется. Уровень срабатывания приема равен 3.

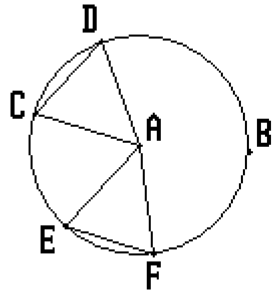
17. Ввод в рассмотрение площади треугольника для последующего применения формулы Герона.



$\forall_{ABCD}$(прямая(BD) $\perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AC)$) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) $\rightarrow$ актив(S(фигура(ABC))))

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Каждое из расстояний AB, BC, AC, BD выражено через численные параметры. Площадь треугольника ABC пока в задаче не рассматривается. Уровень срабатывания равен 13.

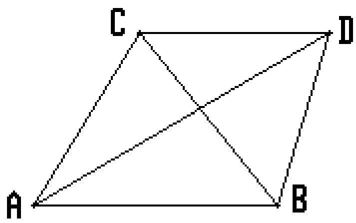
18. Равенство площадей треугольников, основаниями которых служат равные хорды окружности.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(EF)$ & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(S($фигура$(ACD)))$ & актив$(S($фигура$(AEF))) \to S($фигура$(ACD)) = S($фигура$(AEF)))$

Два последних антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

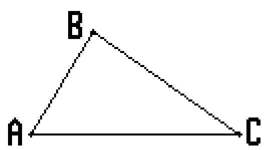
19. Равенство площадей треугольников, имеющих общее основание и вершины, лежащие на прямой, параллельной основанию.



$\forall_{ABCD}($актив$(S($фигура$(ABC)))$ & актив$(S($фигура$(ABD)))$ & прямая$(CD) \parallel$ прямая$(AB) \to S($фигура$(ABC)) = S($фигура$(ABD)))$

Прием применяется в задачах на доказательство. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

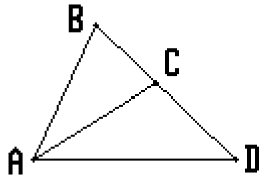
20. Использование синтезатора "вычислениедлины" для нахождения площади треугольника, углы которого известны.



$\forall_{ABC}($актив$(S($фигура$(ABC)))$ & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(ABC))$ & вычислениедлины$(l(AB), p) \to p$ & $S($фигура$(ABC)) =$ $(l(AB)^2 \sin(\angle(ABC)) \sin(\angle(BAC))/(2 \sin(\angle(ABC) + \angle(BAC)))))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два следующих - выделеныуказателем "усм". Последний антецедент использует синтезатор "вычислениедлины" для нахождения конъюнкции p соотношений, позволяющих вычислить расстояние AB. Углы BAC и ABC известны, а длины сторон треугольника не известны. Уровень срабатывания равен 9.

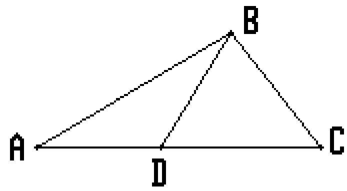
21. Ввод в рассмотрение площади треугольника для последующего использования соотношений пропорциональности площадей.



$\forall_{ABCDab}$(актив(S(фигура(ABC))) & $C \in$ отрезок(BD) & $al(BC) = bl(CD)$ & актив(прямая(AD)) $\rightarrow$ актив(S(фигура(ABD))))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные - выделены указателем "усм". Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Длины хотя бы двух сторон треугольника ABD известны. Не усматривается перпендикулярность прямых AC и BD. Уровень срабатывания равен 7.

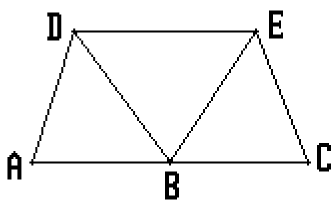
22. Соотношение для длин отрезков, на которые разбивается сторона треугольника, извлекаемое из соотношения для площадей.



$\forall_{ABCD}$($D \in$ отрезок(AC) & актив($\angle(ABD)$) & актив($\angle(DBC)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AD)$) & актив($l(CD)$) $\rightarrow l(AD)l(BC)\sin(\angle(DBC)) = l(CD)l(AB)\sin(\angle(ABD))$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния BC, AB и углы DBC, ABD известны. Хотя бы одно из выражений для расстояний AD, CD имеет тип "неизв". Не усматривается равенство углов DBC и ABD. Уровень срабатывания равен 6.

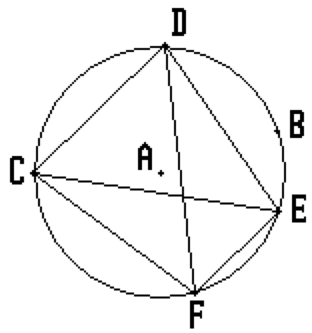
23. Усмотрение параллельности прямых из равенства площадей треугольников.



$\forall_{ABCDE}$($B \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & S(фигура(ABD)) = S(фигура(BEC)) & однасторона(D, E, прямая(AC)) & разныеточки(D, E) $\rightarrow$ прямая(DE) $\parallel$ прямая(AC))

Третий антецедент выделен указателем "равно". Первые два антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Введен ускоряющий фильтр, проверяющий отсутствие общей точки у отрезка DE с прямой AC. Уровень срабатывания равен 3.

24. Площадь вписанного в окружность треугольника и вписанные углы.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & актив(S(фигура(CDE))) & $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(DF)) & актив(прямая(CF)) & актив(прямая(EF)) & разныестороны$(C, E,$ прямая$(DF)) \to S($фигура$(CDE)) = 2l(AB)^2 \sin(\angle(CFD)) \sin(\angle(DFE)) \cdot \sin(\angle(CFD) + \angle(DFE)))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Углы CFD и DFE известны; расстояние AB и площадь треугольника CDE - не известны. Уровень срабатывания равен 5.

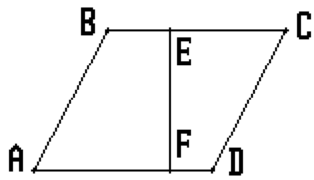
25. Использование синтезатора "пропорцтреуг" для усмотрения треугольника, площадь которого линейно связана с площадью данного треугольника.

$\forall_{ABCDEFak}$(актив(S(фигура(ABC))) & пропорцтреуг$((l(AB), l(BC), l(AC)),$ $a, k, P)$ & $a = (D, E, F) \to k^2 S($фигура$(ABC)) = S($фигура$(DEF))$ & $P)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "идентификатор". Второй антецедент обрабатывается синтезатором "пропорцтреуг", который получает в качестве входного данного тройку $l(AB)$, $l(BC), l(AC)$ длин сторон треугольника ABC. Перечисляются тройки a точек D, E, F, таких, что расстояния $l(DE), l(EF), l(DF)$ равны, соответственно, $kl(AB), kl(BC), kl(AC)$. При этом P становится равно конъюнкции дополнительных утверждений, характеризующих новые точки, если они были введены синтезатором. Фактически, синтезатор "пропорцтреуг" имеет пока единственный прием, который усматривает расстояние $l(DE)$, пропорциональное $l(AB)$, и вводит новую точку F, проводя прямую, параллельную некоторой "старой" прямой. Поэтому обращение к нему равнозначно дополнительному построению, позволяющему связать площади двух треугольников. Выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 10.

Площадь параллелограмма

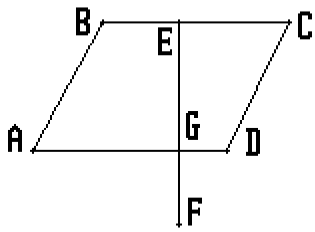
1. Выражение площади параллелограмма через длину стороны и высоту.



$\forall_{ABCDEF}$(параллелограмм$(ABCD)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) &
$E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая$(AD) \to S$(фигура$(ABCD)) = l(AD)l(EF))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при обнаружении выражения "площадь(фигура$(ABCD)$)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Степень приоритетности, определяемая указателем "оценка", равна 1. Уровни срабатывания равны 1 и 2.

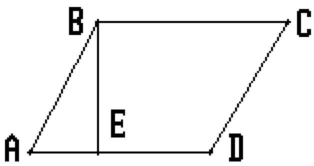
2. Проведение в параллелограмме высоты для выражения его площади - если уже имеется перпендикуляр к стороне, параллельный этой высоте.



$\forall_{ABCDEFG}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & $F \in$ плоскость$(ABC) \to G -$ точка & $G \in$ прямая(AD) &
$G \in$ прямая(EF) & S(фигура$(ABCD)) = l(BC)l(EG))$

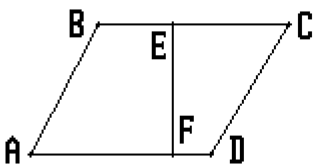
Прием не имеет указателя "контрольвывода". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Площадь параллелограмма $ABCD$ уже рассматривается в задаче. Новая точка G пересечения прямых EF и AD вводится в любом случае, даже если она уже рассматривалась. Степень приоритетности равна 2, уровни срабатывания - 1 и 2.

3. Проведение высоты в параллелограмме для выражения его площади.



$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD) \to E -$ точка & $E \in$ прямая(AD) &
прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & S(фигура$(ABCD)) = l(AD)l(BE))$

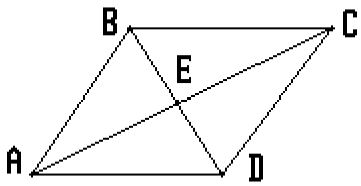
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура$(ABCD)$)". Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче рассматривается расстояние от некоторой точки прямой AB, не совпадающей с точками A, B, до какой-то другой точки. Прием вводит новую точку E - основание высоты, опущенной из точки B на прямую AD. Степень приоритетности равна 3, уровни срабатывания - 1 и 2.



$\forall_{ABCDEF}$(параллелограмм$(ABCD) \to E$−точка & F−точка & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(BC) & S(фигура$(ABCD)) = l(AD)l(EF))$

Прием не имеет указателя "контрольвывода". Антецедент идентифицируется с посылкой. Площадь параллелограмма $ABCD$ уже рассматривается в задаче. Хотя бы один из углов либо одна из сторон параллелограмма выражены через численные параметры. Прием вводит новые точки E, F. Степень приоритетности равна 4, уровни срабатывания - 1 и 2.

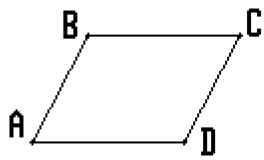
4. Известен угол между диагоналями.



$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BD) & $E \in$ прямая(AC) & актив$(\angle(BEA)) \to 2S$(фигура$(ABCD)) = l(AC)l(BD)\sin(\angle(BEA)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура$(ABCD)$)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол BEA известен; расстояния AC и BD уже рассматриваются в задаче. Степень приоритетности равна 1, уровни срабатывания - 1 и 2.

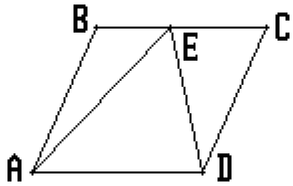
5. Регистрация в активе длин сторон параллелограмма.



$\forall_{ABCD}$(параллелограмм$(ABCD) \to$ актив$(l(AB)))$

Прием использует указатель "контрольвывода", и инициируется при усмотрении в задаче выражения "площадь(фигура$(ABCD)$)". Антецедент идентифицируется с посылкой. Расстояние AB пока в задаче не рассматривается. Уровень срабатывания равен 6.

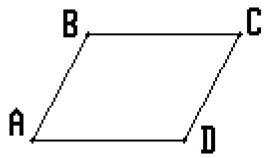
6. Соотношение между площадью параллелограмма и площадью треугольника, ограниченного стороной параллелограмма и двумя отрезками, проведенными к точке на противоположной стороне.



$\forall_{ABCDE}$(актив(S(фигура(ADE))) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(BC) $\rightarrow$ S(фигура($ABCD$)) $= 2S$(фигура(ADE)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". В задаче рассматривается площадь некоторого четырехугольника $PBCQ$, где точка P лежит на прямой AB, а точка Q - на прямой CD. Уровень срабатывания равен 6.

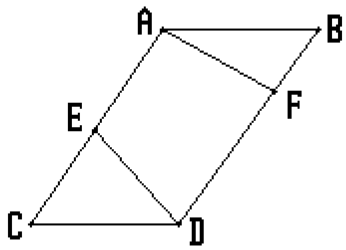
7. Известны длины сторон и угол между ними.



$\forall_{ABCD}$(параллелограмм($ABCD$) & актив($\angle(BAD)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(AD)$) $\rightarrow$ S(фигура($ABCD$)) $= l(AB)l(AD)\sin(\angle(BAD))$)

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Угол BAD и расстояния AB, AD известны. Степень приоритетности равна 1, уровни срабатывания - 1 и 2.

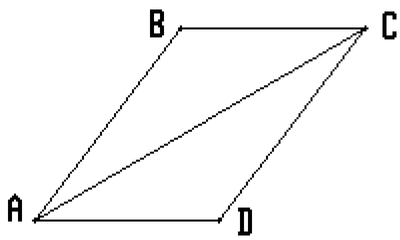
8. Дополнение четырехугольника до параллелограмма.



$\forall_{ABCDEF}$($E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(BD) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(AC) $\parallel$ прямая(BD) & актив(S(фигура($AFDE$))) $\rightarrow$ S(фигура($ABDC$)) $= S$(фигура($AFDE$))$+S$(фигура(CDE))$+S$(фигура(ABF)))

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

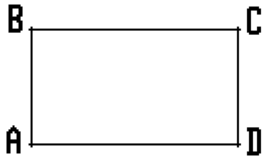
9. Сведение к удвоенной площади треугольника.



$\forall_{ABCD}$(актив(S(фигура($ABCD$))) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) $\rightarrow$ S(фигура($ABCD$)) $= 2S$(фигура(ACD)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". В задаче уже рассматривается площадь некоторого треугольника PQC, где точки P, Q лежат на прямой AD. В случае прямоугольника прием блокируется. Уровень срабатывания равен 7.

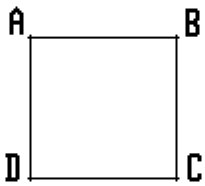
Площадь прямоугольника



$\forall_{ABCD}$(прямоугольник$(ABCD) \to S($фигура$(ABCD)) = l(AB)l(BC))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

Площадь квадрата

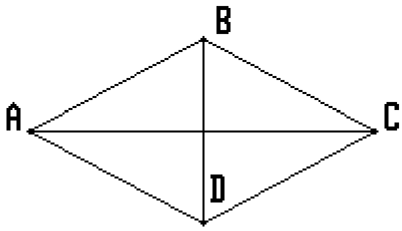


$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \to S($фигура$(ABCD)) = l(AB)^2)$

Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 2.

Площадь ромба

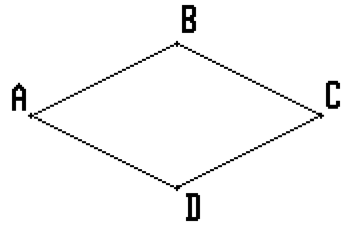
1. Выражение через длины диагоналей.



$\forall_{ABCD}$(ромб$(ABCD) \to 2S($фигура$(ABCD)) = l(AC)l(BD))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Антецедент идентифицируется с посылкой. Хотя бы одно из расстояний AC, BD уже рассматривается в задаче. Указатель "оценка" не используется. Уровни срабатывания равны 2 и 9.

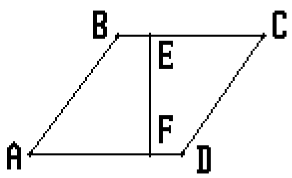
2. Выражение через величину угла и длину стороны.



$\forall_{ABCD}$(ромб($ABCD$) & актив($\angle(BAD)$) $\to$ S(фигура($ABCD$)) $=$ $\sin(\angle(BAD))l(AB)^2$)

Инициализация попытки применения - та же, что у предыдущего приема. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Указатель "оценка" не используется. Уровни срабатывания равны 2 и 4.

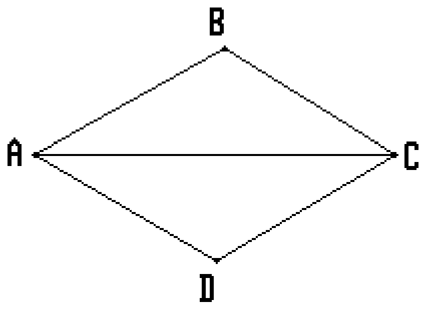
3. Выражение через длины стороны и высоты.



$\forall_{ABCDEF}$(ромб($ABCD$) & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & прямая(EF) $\perp$ прямая(AD) $\to$ S(фигура($ABCD$)) $= l(AD)l(EF)$)

Используется указатель "контрольвывода(площадь(...))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние AD уже рассматривается в задаче. Указатель "оценка" не используется. Уровни срабатывания равны 2 и 4.

4. Выражение через площадь подтреугольника.

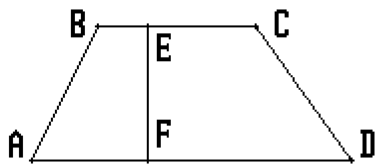


$\forall_{ABCD}$(ромб($ABCD$) & актив(S(фигура($ABCD$))) $\to$ S(фигура($ABCD$)) $=$ $2S$(фигура(ABC)))

Антецеденты идентифицируются с посылками. В задаче рассматривается площадь некоторого треугольника BPQ, где P принадлежит прямой AB, а Q - прямой BC. Уровень срабатывания равен 4.

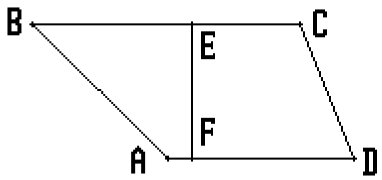
Площадь трапеции

1. Высота уже проведена.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(AD) \to 2S$(фигура$(ABCD)) = (l(BC) + l(AD))l(EF))$

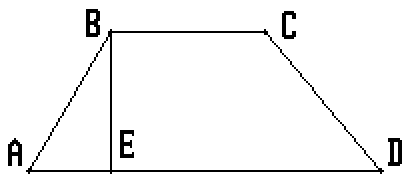
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура$(ABCD)$)". Степень приоритетности приема равна 1, уровни срабатывания - 1 и 2.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AD) \parallel$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) & однасторона$(A, B,$ прямая$(CD)) \to$ $2S$(фигура$(ABCD)) = (l(BC) + l(AD))l(EF))$

Как и выше, используется указатель "контрольвывода", однако указатель "оценка" отсутствует. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка, указывающая, что четырехугольник $ABCD$ имеет один из стандартных типов (трапеция, квадрат, параллелограмм, ромб, прямоугольник). Уровень срабатывания равен 5.

2. Высота не проведена, причем выделен угол при основании трапеции.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD) \to E \in$ отрезок(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $2S$(фигура$(ABCD)) = (l(BC) + l(AD))l(BE)$ & $E -$ точка)

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура$(ABCD)$)". Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче уже рассматривается некоторый угол PAQ, где точка P лежит на прямой AB, а точка Q - на прямой AD. Прием вводит новую точку E. Степень приоритетности равна 2, уровни срабатывания - 1 и 2.

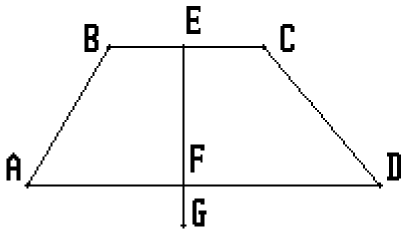
3. Высота не проведена - общий случай.

   $\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD) \to E \in$ отрезок(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $2S$(фигура$(ABCD)) = (l(BC) + l(AD))l(BE)$ & $E -$ точка)

   Аналогично предыдущему, но угла PAQ указанного вида в задаче нет. Степень приоритетности равна 3, уровни срабатывания - 1 и 2.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая$(AD) \parallel$ прямая$(BC) \to E \in$ отрезок(AD) & прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $2S$(фигура$(ABCD)) = (l(BC) + l(AD))l(BE)$ & $E -$ точка)

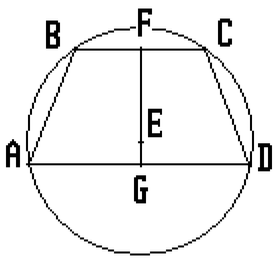
   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура$(ABCD)$)". Антецедент выделен указателем "усм". Указатель "оценка" не используется. Отсутствует посылка, указывающая, что четырехугольник $ABCD$ имеет один из стандартных типов. В задаче не проведен перпендикуляр к прямой BC, пересекающийся по выделенной точке хотя бы с одной из прямых BC, AD. Прием вводит новую точку E. Уровень срабатывания равен 8.

   $\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AD) \parallel$ прямая(BC) & прямая$(EG) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & $G \in$ плоскость$(ABC) \to F -$ точка & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(EG) & $2S$(фигура$(ABCD)) = (l(BC) + l(AD))l(EF)$)

   Используется указатель "контрольвывода". Антецеденты выделены указателем "усм". Отсутствует посылка, указывающая, что четырехугольник $ABCD$ имеет один из стандартных типов. В задаче не введена точка F пересечения прямых EG и AD, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 7.

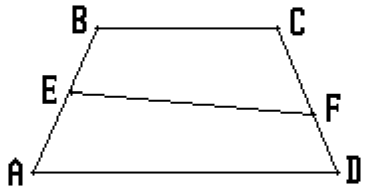
4. Проведение высоты в трапеции, около которой описана окружность.

   $\forall_{ABCDEFGP}$(трапеция$(ABCD)$ & окружность(EP)описана около фигура$(ABCD) \to F \in$ отрезок(BC) & $F -$ точка & $l(BF) = l(CF)$ & $G -$ точка & $G \in$ отрезок(AD) & $l(AG) = l(DG)$ & прямая$(FG) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(FG))

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Через точку E не проведен перпендикуляр к прямой BC. В задаче рассматривается расстояние от точки E до некоторой точки, не лежащей на окружности. Прием вводит новые точки F, G. Уровень срабатывания равен 3.

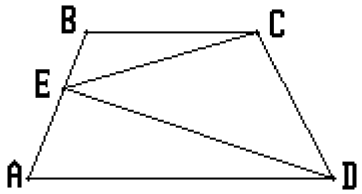
5. Отношение площадей четырехугольников, на которые трапеция разделяется линией, соединяющей точки на боковых сторонах.



$\forall_{ABCDEF}$(трапеция($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & актив(S(фигура($EBCF$))) & актив(S(фигура($AEFD$))) & актив($l(BC)$) & актив($l(AD)$) & $bl(BE) = al(AE)$ & $dl(CF) = cl(FD)$ & $ql(BC) = pl(AD) \rightarrow$ S(фигура($EBCF$))$(bd(p+q)+q(ad+bc)) = S$(фигура($AEFD$))$(ac(p+q)+p(ad+bc)))$)

Первый, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Три последних антецедента обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

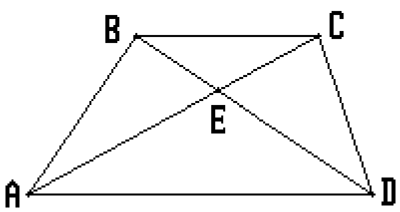
6. Представление площади трапеции в виде суммы площадей составляющих треугольников.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AB) & актив(S(фигура(CDE))) $\rightarrow$ S(фигура($ABCD$)) $= S$(фигура(BCE))$+S$(фигура(ADE))$+S$(фигура(CDE)))

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 10.

7. Пересечение диагоналей трапеции.

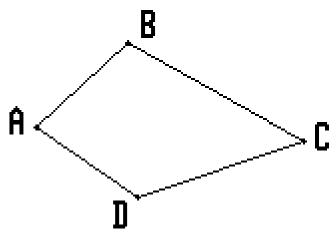


$\forall_{ABCDEab}$(прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) & $E \in$ отрезок(BD) & $E \in$ отрезок(AC) & актив(S(фигура(BCE))) & актив(S(фигура($ABCD$))) & aS(фигура(BCE)) $= bS$(фигура($ABCD$)) & $0 < a$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow$ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})l(BC) = \sqrt{b}l(AD)$)

Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, первые три - выделены указателем "усм". Шестой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, два последних - проверочными операторами. Прямые AB и CD уже рассматриваются. Уровень срабатывания равен 6.

Площадь выпуклого четырехугольника

1. Регистрация в активе сторон четырехугольника.



$\forall_{AB}$(актив(прямая(AB)))

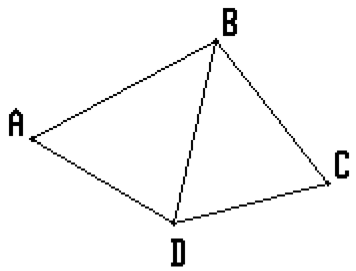
Прием применяется при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Прямая AB пока не рассматривается в задаче, а прямые AD, CD, BC - рассматриваются. Отсутствует посылка, уточняющая стандартный тип четырехугольника (трапеция, квадрат, и т.п.). Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, в которой вместо ограничений на прямые AD, CD, BC требуется, чтобы через точку B была проведена такая прямая PQ, что расстояния BP, BQ уже рассматриваются. Уровень срабатывания этой версии тоже равен 3.

2. Регистрация в активе длин сторон.

$\forall_{AB}$(актив($l(AB)$))

Как и выше, используется указатель "контрольвывода". В задаче не уточнен тип четырехугольника. Расстояние AB пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 9.

3. Представление площади четырехугольника в виде суммы площадей двух треугольников, возникающих при проведении диагонали.



$\forall_{ABCD}$(четырехугольник($ABCD$) $\to$ S(фигура($ABCD$)) $=$ S(фигура(ABD)) $+$ S(фигура(BCD)))

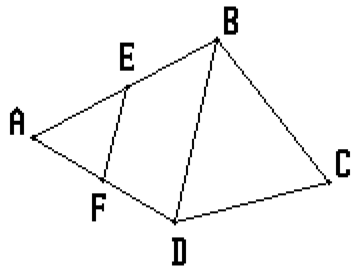
Попытка применения приема инициируется при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Антецедент идентифицируется с посылкой. Проверяется, что до этого никакие соотношения для площади данного четырехугольника не выводились. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(BD)) & разныестороны($A, C,$ прямая(BD)) $\rightarrow$
S(фигура($ABCD$)) $= S$(фигура(ABD)) $+ S$(фигура(BCD)))

Инициализация приема - аналогично предыдущему. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Тип четырехугольника в задаче не уточнен, и ранее соотношения для его площади не выводились. Предпочтение отдается той диагонали BD, к которой проведен перпендикуляр (если таковые вообще имеются). Уровень срабатывания приема равен 5.

$\forall_{ABCD}$(разныестороны($A, C,$ прямая(BD)) $\rightarrow S$(фигура($ABCD$)) $=$
S(фигура(ABD)) $+ S$(фигура(BCD)))

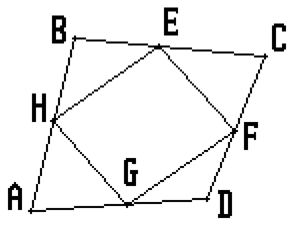
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при обнаружении выражения для площади $ABCD$. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Тип четырехугольника в задаче не уточнен. Прием применяется даже в том случае, если соотношения для данной площади уже выводились. Уровень срабатывания равен 14.



$\forall_{ABCDEF}$(четырехугольник($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(AD)
& актив(прямая(EF)) $\rightarrow S$(фигура($ABCD$)) $= S$(фигура(ABD)) $+$
S(фигура(BCD)))

Используется указатель "контрольвывода". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Точки E, F не совпадают с вершинами A, B, D. Уровень срабатывания равен 6.

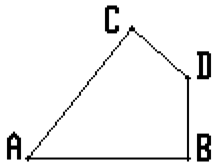
4. Выражение площади четырехугольника через площадь параллелограмма с вершинами в серединах сторон этого четырехугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}$(четырехугольник($ABCD$) & $H \in$ прямая(AB) & $l(AH) = l(BH)$
& $E \in$ прямая(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ прямая(CD) & $l(CF) = l(DF)$
& $G \in$ прямая(AD) & $l(AG) = l(GD) \rightarrow S$(фигура($ABCD$)) $=$
$2S$(фигура($HEFG$)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Третий, пятый, седьмой и девятый антецеденты выделены указателем "равно", остальные - указателем "усм". Площадь четырехугольника $ABCD$ уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

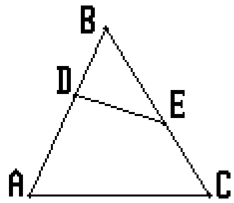
5. Площадь четырехугольника, имеющего два противоположных прямых угла.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(CD) & прямая$(AB) \perp$ прямая$(BD) \to$
$2S$(фигура$(ACDB)) = l(AC)l(CD) + l(AB)l(BD))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура($ACDB$))". Тип четырехугольника в задаче не уточняется. Не усматривается перпендикулярность прямых AC и AB. Соотношения для площади $ACDB$ пока не выводились. Уровень срабатывания равен 5.

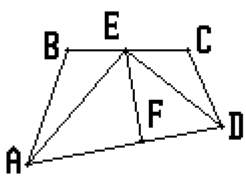
6. Представление площади четырехугольника в виде разности площадей двух треугольников.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок$(BC) \to S$(фигура$(ADEC)) =$
S(фигура$(ABC)) - S$(фигура$(BDE)))$

Используется указатель "контрольвывода". Не усматриваются ни параллельность прямых DE и AC, ни перпендикулярность прямых AE и CD. Соотношения для площади четырехугольника пока не выводились. Уровень срабатывания равен 4.

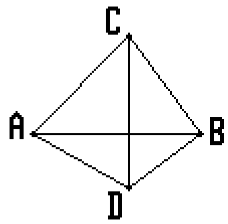
7. Ввод в рассмотрение площади треугольника, имеющего общую сторону с четырехугольником, если известна высота этого треугольника.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(EF) \perp$ прямая$(AD) \to$
S(фигура$(ABCD)) = S$(фигура$(ABE))+S$(фигура$(ECD))+S$(фигура$(AED)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Расстояния AD и EF известны. Параллельность прямых BC и AD не усматривается. Площадь треугольника AED пока в задаче не встречается. Уровень срабатывания равен 7.

8. Площадь четырехугольника, имеющего взаимно перпендикулярные диагонали.



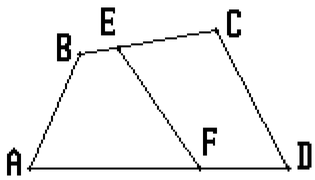
$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(CD) & разныестороны$(C, D,$прямая$(AB))$ $\rightarrow$ $2S$(фигура$(ACBD)) = l(AB)l(CD))$

Используется указатель "контрольвывода". Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. В задаче не указано, что $ACBD$ - ромб либо квадрат. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ACBD)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \rightarrow$ актив$(S$(фигура$(ACBD))))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". В задаче рассматривается площадь какой-либо фигуры. Уровень срабатывания равен 11.

9. Представление площади четырехугольника в виде суммы площадей двух четырехугольников, на которые он разбивается отрезком прямой.

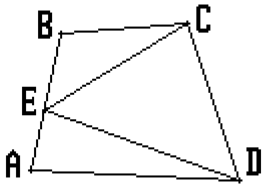


$\forall_{ABCDEF}$(актив$(S$(фигура$(ABCD)))$ & актив$(S$(фигура$(ABEF)))$ & актив$(S$(фигура$(ECDF)))$ & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок$(AD) \rightarrow$ S(фигура$(ABCD)) = S$(фигура$(ABEF)) + S$(фигура$(ECDF)))$

$\forall_{ABCDEF}$(актив$(S$(фигура$(ABCD)))$ & актив$(S$(фигура$(FEBA)))$ & актив$(S$(фигура$(ECDF)))$ & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок$(AD) \rightarrow$ S(фигура$(ABCD)) = S$(фигура$(ABEF)) + S$(фигура$(ECDF)))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Прямые EF, BC, AD, CD и AB уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

10. Разбиение четырехугольника на три треугольника.



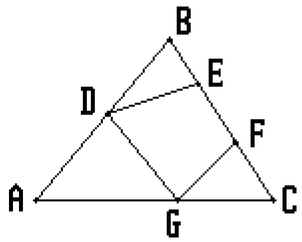
$\forall_{ABCDE}$(актив(S(фигура($ABCD$))) & выпукло(фигура($ABCD$)) & актив(S(фигура(CED))) & $E \in$ отрезок(AB) $\rightarrow S$(фигура($ABCD$)) $=$ S(фигура(CDE)) $+ S$(фигура(BEC)) $+ S$(фигура(ADE)))

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент выделен указателем "усм". Не усматривается параллельность прямых AB и CD.

$\forall_{ABCDE}$(выпукло(фигура($ABCD$)) & актив(S(фигура(CED))) & $E \in$ отрезок(AB) $\rightarrow S$(фигура($ABCD$)) $= S$(фигура(CDE)) $+$ S(фигура(BEC)) $+ S$(фигура(ADE)))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при обнаружении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания приема равен 12.

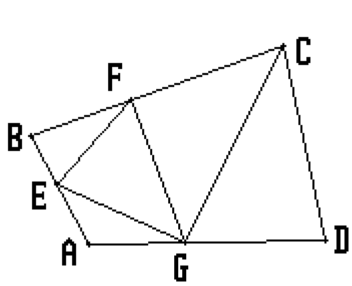
11. Дополнение четырехугольника до треугольника.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(S(фигура(ABC))) & $D \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(BC) $\rightarrow S$(фигура($DEFG$)) $=$ S(фигура(ABC)) $- S$(фигура(ADG)) $- S$(фигура(DBE)) $- S$(фигура(GFC)))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при обнаружении выражения "площадь(фигура($DEFG$))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 9.

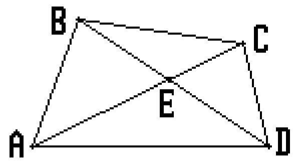
12. Разбиение четырехугольника на пять треугольников.



$\forall_{ABCDEFG}$(выпукло(фигура($ABCD$)) & актив(S(фигура(EFG))) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(AD) $\rightarrow$ S(фигура($ABCD$)) $= S$(фигура(AEG))$+S$(фигура(BEF))$+S$(фигура(EFG))$+$ S(фигура(FCG)) $+ S$(фигура(CDG)))

Указатель "контрольвывода" инциирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

13. Выражение площади четырехугольника через длины диагоналей и синус угла между ними.



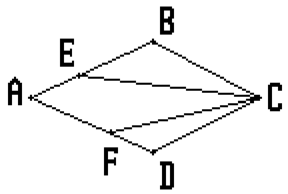
$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(DEC)$) & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD) & актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) $\to 2S$(фигура($ABCD$)) $= l(AC)l(BD)\sin(\angle(DEC))$)

Используется указатель "контрольвывода". Антецеденты выделены указателем "усм". Хотя бы две из величин $l(AC)$, $l(BD)$, $\angle(DEC)$ известны. Уровень срабатывания равен 7.

$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(DEC)$) & $E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD) & актив($l(AC)$) & актив($l(BD)$) & трапеция($ABCD$) $\to 2S$(фигура($ABCD$)) $=$ $l(AC)l(BD)\sin(\angle(DEC))$)

Указатель "контрольвывода" инциирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура($ABCD$))". Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", последний - идентифицируется с посылкой. Угол DEC известен. Уровень срабатывания равен 7.

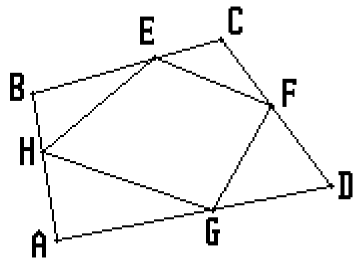
14. Чеытрехугольник, отсекаемый двумя отрезками от четырехугольника стандартного вида.



$\forall_{ABCDEF}$(ромб($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(AD) & актив(S(фигура(BEC))) $\to S$(фигура($AECF$)) $= S$(фигура($ABCD$)) $-$ S(фигура(BEC)) $- S$(фигура(CDF)))

Точка привязки выбрана в четвертом антецеденте, идентифицируемом с посылкой. Первый антецедент тоже идентифицируется с посылкой, причем вместо символа "ромб" допускается любой из символов "параллелограмм", "квадрат", "прямоугольник", "трапеция". Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

15. Четырехугольник, вписанный в другой четырехугольник.



$\forall_{ABCDEFGH}$(актив(S(фигура($ABCD$))) & актив(S(фигура($EFGH$))) & $H \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(AD) & четырехугольник($ABCD$) & четырехугольник($EFGH$) $\rightarrow$ S(фигура($ABCD$)) $=$ S(фигура($EFGH$)) $+$ S(фигура(BHE)) $+$ S(фигура(ECF)) $+$ S(фигура(DFG)) $+$ S(фигура(AGH)))

Два первых и два последних антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Два последних антецедента могут менять заголовки на "параллелограмм", "ромб", "трапеция", "прямоугольник". Созданы две версии приема. Первая применяется в задачах на доказательство и имеет уровень 5. Вторая - применяется в задачах на исследование и имеет уровень 8.

Площадь многоугольника

1. Выражение площади правильного многоугольника через радиус описанной окружности.

   $\forall_{ABCn}$(правмногоугольник(C) & $l(C) = n$ & окружность(AB)описана около фигура(C) $\rightarrow 2S$(фигура(C)) $= l(AB)^2 \sin(2\pi/n)n$)

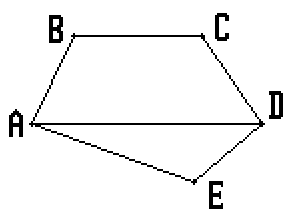
   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура(C))". Здесь C - набор вершин многоугольника. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

2. Выражение площади правильного многоугольника через длину стороны.

   $\forall_{ABCain}$(правмногоугольник(C) & $l(C) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $A = C(i)$ & $B = C(i(\mathrm{mod} n) + 1)$ & $l(AB) = a \rightarrow 4S$(фигура(C)) $= a^2 n \operatorname{ctg}(\pi/n)$)

   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура(C))". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками. Третий антецедент выделен указателем "программа". Он перечисляет номера вершин i. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная n идентифицирована с константой. Уровень срабатывания равен 2.

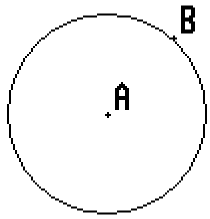
3. Разбиение пятиугольника на трапецию и треугольник.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AD) $\parallel$ прямая(BC) & разныестороны$(B, E,$ прямая$(AD))$ $\rightarrow$ S(фигура$(ABCDE)) = S$(фигура$(ABCD)) + S$(фигура$(ADE)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(фигура$(ABCDE)$)". Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 7.

Площадь круга



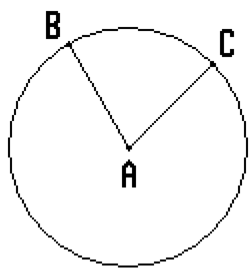
$\forall_{AB}(S(\text{круг}(AB)) = \pi l(AB)^2)$

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется при усмотрении выражения "площадь(круг(AB))". Уровень срабатывания равен 2. Аналогичный прием создан для круга в трехмерном пространстве:

$\forall_{ABC}(S(\text{Круг}(ABC)) = \pi l(AB)^2)$

Площадь частей круга

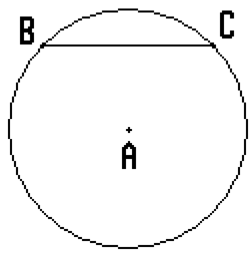
1. Площадь сектора.



$\forall_{ABC}(2S(\text{сектор}(ABC)) = \angle(BAC)l(AB)^2)$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "площадь(сектор(ABC))". Уровень срабатывания равен 2.

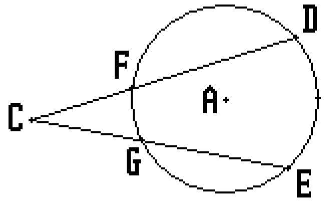
2. Площадь сегмента.



$\forall_{ABC}(2S(\text{сегмент}(ABC)) = (\angle(BAC) - \sin(\angle(BAC)))l(AB)^2)$

Используется указатель "контрольвывода". Уровень срабатывания равен 2.

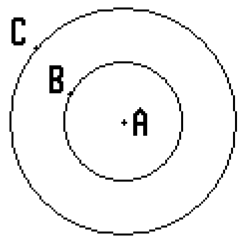
3. Криволинейный четырехугольник, отсекаемый в круге двумя секущими, проведенными из общей точки.



$\forall_{ABCDEFG}(\text{актив}(\text{окружность}(AB))\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ G \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$F \in \text{отрезок}(CD)\ \&\ G \in \text{отрезок}(CE)\ \&\ \text{однасторона}(A, D, \text{прямая}(CE))\ \&$
$\text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \to S(\text{Фигура}(\{\text{дуга}(AFG), \text{дуга}(ADE),$
$\text{отрезок}(DF), \text{отрезок}(EG)\})) = S(\text{круг}(AB)) - S(\text{сегмент}(ADF)) -$
$S(\text{сегмент}(AEG)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Напомним, что выражение "Фигура(X)" обозначает плоскую область, граница которой составлена из простых фрагментов, перечисленных в множестве X. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие шесть - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

4. Площадь кольца.

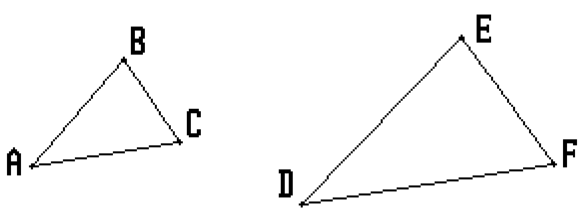


$\forall_{ABC}(S(\text{кольцо}(ABC)) = \pi(l(AC)^2 - l(AB)^2))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения его при усмотрении выражения "площадь(кольцо(ABC))". Уровень срабатывания равен 2.

Площади подобных фигур

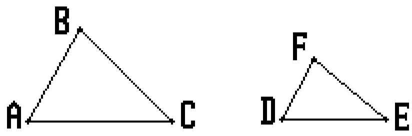
1. Треугольники с соответственно пропорциональными сторонами.



$\forall_{ABCDEFpqrsuv}(ql(AB) = pl(DE)\ \&\ sl(BC) = rl(EF)\ \&\ vl(AC) = ul(DF)\ \&$
$q = s\ \&\ p = r\ \&\ q = v\ \&\ p = u \rightarrow q^2S(\text{фигура}(ABC)) = p^2S(\text{фигура}(DEF)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при обнаружении выражения "площадь(фигура(ABC))". Указатель "контекст(...)" идентифицирует также посылку вида "актив(площадь(фигура(DEF)))". Первые три антецедента обрабатываются пакетными синтезаторами, последние четыре - выделены указателем "идентификатор". Проверяется, что обозначения треугольников ABC и DEF различны. Если в задаче рассматриваются площади не более чем трех различных фигур, то уровень срабатывания равен 4, иначе - он равен 6.

2. Площади треугольников с соответственно параллельными сторонами.



$\forall_{ABCDEF}(\text{актив}(S(\text{фигура}(DEF)))\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DF)\ \&$
$\text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(EF)\ \&\ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow$
$\sqrt{S(\text{фигура}(ABC))}l(DE) = \sqrt{S(\text{фигура}(DEF))}l(AC))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при обнаружении выражения "актив(площадь(фигура(ABC)))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Площадь треугольника ABC известна, выражение для площади треугольника DEF имеет тип "внешнеизв". Хотя бы одна из сторон треугольника ABC параллельна рассматриваемой в задаче прямой, не проходящей через эту сторону. Напомним, что в решателе предикат "параллельны" понимается в расширенном смысле - включая случай совпадения прямых. Уровень срабатывания равен 7.

Неотрицательность площади

$\forall_{Aa}(S(A) = a\ \&\ a < 0 \rightarrow \text{ложь})$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет вхождение символа "минус" и не содержит неизвестных. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

Ввод вспомогательного параметра - площади, входящей в условие задачи на доказательство

$\forall_{Aa}(S(A) = a)$

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на доказательство. Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условии задачи подвыражения "площадь(A)". Проверяется, что данное подвыражение расположено внутри равенства, содержащего также обозначение угла, расстояния либо какой-либо другой площади. Если в условии задачи встречается другое подвыражение вида $S(B)$, то проверяется, что число содержащих его равенств в посылках не больше, чем для подвыражения $S(A)$. Указатель "вспомпараметр" придает новой переменной a статус вспомогательного параметра, т.е. она при решении задачи будет рассматриваться как известная величина. Уровень срабатывания равен 6.

Ввод вспомогательной неизвестной - площади, входящей в условие задачи на доказательство

$\forall_{Aa}(S(A) = a)$

Отличие от предыдущего приема состоит лишь в том, что подвыражение $S(A)$ расположено внутри равенства, не содержащего углов, расстояний и других площадей. Кроме того, должна отсутствовать посылка вида $S(A) = x$, где x - переменная. Указатель "вспомнеизвестная" придает новой переменной a статус неизвестной. Уровень срабатывания равен 6.

Ввод вспомогательного параметра - площади, встречающейся в отношении площадей

$\forall_{ABCa}(\text{актив}(S(\text{фигура}(ABC))) \to S(\text{фигура}(ABC)) = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. В посылках задачи имеется равенство, в котором встречается дробь вида $pS(\text{фигура}(ABC))/qS(D)$, с точностью до перестановки числителя и знаменателя. Предпочтение отдается выбору такого треугольника ABC, что через внутреннюю точку одной из его сторон проведена прямая, пересекающаяся по выделенной точке с другой стороной. В задаче отсутствуют посылки вида $S(D) = m$, где m не содержит неизвестных. Указатель "вспомпараметр" придает новой переменной a статус вспомогательного параметра. Уровень срабатывания равен 12.

Эквивалентные преобразования равенств, содержащих площадь

Приемы этого подраздела имеют заголовок "второйтерм".

1. Извлечение явного выражения для площади из линейного соотношения.

   $\forall_{abcd}(\neg(a = 0) \to aS(d) + b = c \leftrightarrow S(d) = (c - b)/a)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение $S(d)$ должно встречаться в некотором другом равенстве задачи, не являющемся равенством двух площадей. Эвристические оценки сложности невырожденных числовых атомов, содержащихся в выражениях a, b, c, не превосходят 4. В частности, в них могут встречаться углы и расстояния, но не могут - площади и объемы. Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии приема. Одна из них отличается лишь тем, что применяется к посылке задачи на доказательство. Другая - копирует исходный прием, но имеет уровень срабатывания 7.

   $\forall_{abcd}(\neg(a = 0) \to aS(d)/b = c \leftrightarrow S(d) = bc/a)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование. Он совершенно аналогичен предыдущему приему. Уровень срабатывания равен 2.

2. Выражение одной площади через другую из линейного соотношения.

   $\forall_{ABa}(S(A) + aS(B) = 0 \leftrightarrow S(A) = -aS(B))$

Выражение a отлично от единицы. Оно либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABab}(\neg(a = 0) \to aS(A)/c = bS(B)/d \leftrightarrow S(A) = bcS(B)/(ad))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Каждое из выражений a, b, c, d либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Запрещается одновременное обращение в единицы выражений a, c либо b, d. Уровень срабатывания равен 3.

3. Отрицание равенства площади треугольника нулю.

   $\forall_{ABC}(\neg(S(\text{фигура}(ABC)) = 0) \leftrightarrow \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB)))$

   Прием применяется к посылке. Уровень срабатывания равен 1.

4. Сокращение дроби с пропорциональными линейными комбинациями площадей.

   $\forall_{ABabcd}(ad - bc = 0\ \&\ \neg(c = 0) \to (aS(A)+bS(B))p/((cS(A)+dS(B))q) = ap/(cq))$

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

5. Усмотрение равенства двух площадей.

   $\forall_{ABcd}(S(A) + c = d \to (S(B) + c = d \leftrightarrow S(A) = S(B)))$

   Прием применяется к посылке. Уровень срабатывания равен 3.

Теоретико - множественные операции

Все приемы этого подраздела, как и предыдущего, имеют заголовок "второйтерм".

1. Пустое множество.

   $S(\emptyset) = 0.$

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Объединение.

   $\forall_{ab}(a \cap b = \emptyset \to S(a \cup b) = S(a) + S(b))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(c = a \cap b \to S(a \cup b) = S(a) + S(b) - S(c))$

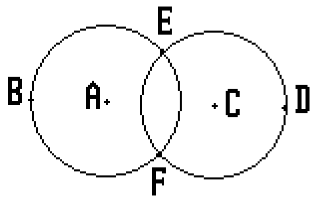
   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 2.

3. Разность.

   $\forall_{ab}(a \subseteq b \to S(b \setminus a) = S(b) - S(a))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

4. Пересечение двух кругов.



$\forall_{ABCDEF}(l(AE) = l(CE)$ & разныеточки(A, C) & разныеточки$(E, F) \rightarrow$
$S($Фигура$(\{$дуга$(AEF),$ дуга$(CEF)\})) = S($сегмент$(AEF)) + S($сегмент$(CEF)))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB)
& $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) & разныестороны$(A, C,$
прямая$(EF)) \rightarrow S($круг$(AB) \cap$круг$(CD)) = S($сегмент$(AEF)) + S($сегмент$(CEF)))$

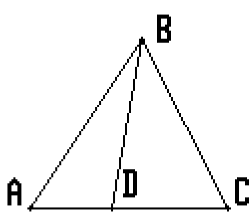
Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор общей стандартизации "нормплощадь"

Нормализатор имеет всего два приема, хотя и используется почти во всех премах, связанных с площадями. Первый прием нормализатора подставляет значение, определяемое равенством $S(A) = a$ из посылок. Ориентация - только слева направо. Теорема второго приема имеет вид $\forall_{abc}(a = b$ & $S(b) = c \rightarrow S(a) = c)$. Оба антецедента идентифицируются с посылками, причем a - не переменная, а b - переменная. Выражение c не содержит символа "площадь".

Нормализатор вычисления площади "вычплощадь"

Этот нормализатор имеет три приема. Первый - такой же, как в предыдущем нормализаторе. Другие два используют свойство треугольников, имеющих общую высоту:



$\forall_{ABCDabs}(D \in$ отрезок(AC) & $S($фигура$(DBC)) = s$ & $al(AD) = bl(CD)$ &
$\neg(a = 0) \rightarrow S($фигура$(ABD)) = sb/a)$

$\forall_{ABCDabs}(D \in$ отрезок(AC) & $S($фигура$(ABD)) = s$ & $al(AD) = bl(CD)$ &
$\neg(b = 0) \rightarrow S($фигура$(ABD)) = s(a + b)/b)$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "вычплощадь", сопровождаемым комментарием, блокирующим зацикливание.Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Коэффициенты a, b и выражение s не содержат неизвестных. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. В начале попыток применения приемов проверяется, что в задаче известна площадь некоторого треугольника, две вершины которого лежат на прямой BC, а третья - находится по ту же сторону от BC, что и точка A.

Данный нормализатор используется крайне редко. Обращается к нему следующий прием:

$\forall_{ABCa}$(актив(S(фигура(ABC))) & S(фигура(ABC)) $= a$ & S(фигура(ABC)) $= p$ & $p = q \to S$(фигура(ABC)) $= q$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "идентификатор". Второй и третий антецеденты выполняют чисто вспомогательную работу: они вводят различные обозначения a, p для одной и той же площади. Это необходимо, чтобы компилятор ГЕНОЛОГа мог раздельно использовать нормализаторы "нормплощадь" и "вычплощадь". Первый применяется к a, второй - к p. Четвертый антецедент как раз и реализует последнее обращение, обозначая его результат через q. Проверяется, что результат обработки a содержит неизвестные, а q - не содержит. Кроме того, проверяется, что рассматриваемая площадь имеет тип "неизв", причем в задаче известна площадь какого-то треугольника. Уровень срабатывания равен 4.

Заметим, что для ускоренного вычисления площадей более удобными оказались не нормализаторы, а синтезаторы, к описанию которых мы и переходим.

Синтезатор "вычислениеплощади"

Этот синтезатор предпринимает попытку вычислить площадь фигуры со сложной границей путем разбиения ее на простейшие части. Допускается сохранение в ответе явно не вычисленных площадей треугольников, кругов и т.п. Реализуемое синтезатором утверждение имеет вид "вычислениеплощади(A, S)". Здесь A - множество простейших линий (пока - только отрезков и дуг), ограничивающих фигуру, S - площадь фигуры. Фигура составляется из простейших частей не только с помощью объединения непересекающихся множеств, но и с помощью вычитания вложенных множеств. Поэтому результаты, которые выдает синтезатор при рекурсивных обращениях, могут браться со знаком "минус". Чтобы доопределить нужный знак, обращение к синтезатору сопровождается комментариями (точка P Q k), где P - элемент границы, к которому примыкает ранее введенная простейшая часть, расположенная от P по ту же сторону, что точка Q. Коэффициент k - терм 1 либо -1. Если впоследствии будет добавлена простейшая часть, примыкающая к P со стороны, противоположной точке Q, то k определит знак, с которым следует ее площадь учитывать в общей сумме. Перечислим приемы синтезатора:

1. Площадь треугольника.

   $\forall_{ABCD}$(разныестороны(C, D, прямая(AB)) $\to$ вычислениеплощади({отрезок(AB), отрезок(BC), отрезок(AC)}, aS(фигура(ABC))))

   $\forall_{ABCD}$(однасторона(C, D, прямая(AB)) $\to$ вычислениеплощади({отрезок(AB), отрезок(BC), отрезок(AC)}, $-aS$(фигура(ABC))))

Имеется комментарий (точка отрезок$(AB)D$ a). Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB.

$\forall_{ABCabc}$(вычислениеплощади$(\{;c\},b)$ & разныестороны$(C,g,$прямая$(AB)) \to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$отрезок$(BC),$отрезок$(AC);c\},$ $b+aS($фигура$(ABC))))$

$\forall_{ABCabc}$(вычислениеплощади$(\{;c\},b)$ & однасторона$(C,g,$прямая$(AB)) \to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$отрезок$(BC),$отрезок$(AC);c\},$ $b-aS($фигура$(ABC))))$

Имеется комментарий (точка отрезок(AB) g a). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - реализуется проверочным оператором.

$\forall_{ABC}(C\in$ прямая$(AB)\to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$отрезок$(BC),$ отрезок$(AC)\},0))$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровни срабатывания перечисленных приемов равны 1.

2. Площадь сегмента.

$\forall_{ABCDc}$(однасторона$(C,D,$прямая$(AB))$ & $\neg(C\in$ прямая$(AB))\to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$дуга$(CAB)\},cS($сегмент$(CAB))))$

$\forall_{ABCDc}$(разныестороны$(C,D,$прямая$(AB))$ & $\neg(C\in$ прямая$(AB))\to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$дуга$(CAB)\},-cS($сегмент$(CAB))))$

Имеется комментарий (точка отрезок$(AB)D$ c). Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

$\forall_{ABCDab}$(вычислениеплощади(a,b) & разныестороны$(C,D,$прямая$(AB))$ & $\neg(C\in$ прямая$(AB))\to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$дуга$(CAB);a\},$ $b-cS($сегмент$(CAB))))$

$\forall_{ABCDab}$(вычислениеплощади(a,b) & однасторона$(C,D,$прямая$(AB))$ & $\neg(C\in$ прямая$(AB))\to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$дуга$(CAB);a\},$ $b+cS($сегмент$(CAB))))$

Как и выше, используется комментарий (точка отрезок(AB) D c). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору, два других - обрабатываются проверочными операторами. Уровни срабатывания перечисленных приемов равны 1.

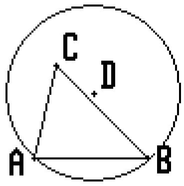
3. Площадь прямоугольника.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB)\parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC)\parallel$ прямая(AD) & прямая$(AB)\perp$ прямая(AD) & однасторона$(C,E,$прямая$(AB))\to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$отрезок$(BC),$отрезок$(CD),$отрезок$(AD)\},$ $-\,al(AB)l(AD)))$

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB)\parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC)\parallel$ прямая(AD) & прямая$(AB)\perp$ прямая(AD) & разныестороны$(C,E,$прямая$(AB))\to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB),$отрезок$(BC),$отрезок$(CD),$отрезок$(AD)\},$ $al(AB)l(AD)))$

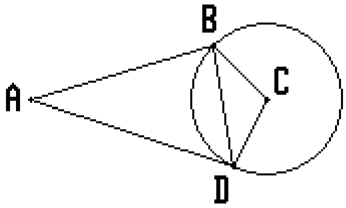
Имеется комментарий (точка отрезок(AB) E a). Первые три антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

4. Площадь криволинейного треугольника. Имеются в виду фигуры, у которых две стороны - отрезки, а третья - дуга. Все приемы этого пункта применяются при отсутствии комментария (точка ...).



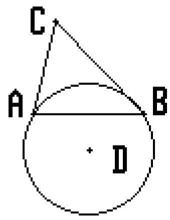
$\forall_{ABCD}(B \in \text{окружность}(DA)\ \&\ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow$
$\text{вычислениеплощади}(\{\text{отрезок}(AC), \text{отрезок}(BC), \text{дуга}(DAB)\},$
$S(\text{фигура}(ABC)) + S(\text{сегмент}(DAB))))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором.



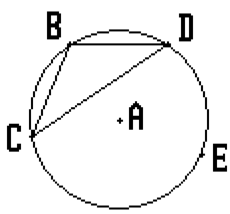
$\forall_{ABCD}(D \in \text{окружность}(CB)\ \&\ 0 \leq \angle(ABC) - \pi/2\ \&\ 0 \leq \angle(ADC) - \pi/2\ \&$
$\text{разныеточки}(B, D) \rightarrow \text{вычислениеплощади}(\{\text{отрезок}(AB), \text{отрезок}(AD),$
$\text{дуга}(CBD)\}, S(\text{фигура}(ABD)) - S(\text{сегмент}(CBD))))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами.



$\forall_{ABCD}(B \in \text{окружность}(DA)\ \&\ \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow$
$\text{вычислениеплощади}(\{\text{отрезок}(AC), \text{отрезок}(BC), \text{большаядуга}(DAB)\},$
$S(\text{фигура}(ABC)) + S(\text{круг}(DA)) - S(\text{сегмент}(DAB))))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором.



$\forall_{ABCDE}(B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) &
$D \in$ окружность$(AE) \to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок(BC), отрезок(CD),
дугаугла$(BCD)\}, S($фигура$(BCD)) + l(AB)^2\angle(BCD) +$
$\mathrm{sg}(\angle(BCD) - \pi/2)S($фигура$(BAD))))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания всех приемов равны 1.

5. Общая сторона с треугольником.

$\forall_{ABCDEFabc}($вычислениеплощади$(\{$отрезок(CE), отрезок$(CD); a\}, b)$ &
однасторона$(A, F,$ прямая$(BD))$ & $A \in$ отрезок(CE) & $B \in$ отрезок$(CD) \to$
вычислениеплощади$(\{$отрезок(AB), отрезок(AE), отрезок$(BD); a\}$,
$b + cS($фигура$(ABC))))$

Имеется комментарий (точка отрезок(BD) F c). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору, второй - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. В некоторой посылке задачи рассматривается площадь многоугольника, имеющего точку C одной из своих вершин. При обработке первого антецедента синтезатору передаются дополнительные комментарии (точка отрезок(CE) D c) и (точка отрезок(CD) E c). Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDab}($вычислениеплощади$(\{$отрезок(AC), отрезок$(BC); a\}, b)$ &
однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & актив(прямая$(AC))$ &
актив(прямая$(BC)) \to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB); a\}$,
$b - cS($фигура$(ABC))))$

$\forall_{ABCDab}($вычислениеплощади$(\{$отрезок(AC), отрезок$(BC); a\}, b)$ &
разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB))$ & актив(прямая$(AC))$ &
актив(прямая$(BC)) \to$ вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB); a\}$,
$b + cS($фигура$(ABC))))$

Имеется комментарий (точка отрезок(AB) D c). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается проверочным оператором, остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. При обработке первого антецедента вводятся дополнительные комментарии (точка отрезок(BC) A $-c$) и (точка отрезок(AC) B $-c$). Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCab}($вычислениеплощади$(\{$отрезок(AC), отрезок$(BC); a\}, b)$ &
актив(прямая$(AC))$ & актив(прямая$(BC)) \to$
вычислениеплощади$(\{$отрезок$(AB); a\}, |b + S($фигура$(ABC))|))$

Комментарии (точка ...) отсутствуют. Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, два других - выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Расстояния AC и BC равны. В наборе a отсутствуют дуги, причем концы каждого отрезка, упомянутого в этом наборе, находятся на окружности CA. При обработке первого антецедента вводятся дополнительные комментарии (точка отрезок$(BC)A$ 1) и (точка отрезок$(AC)B$ 1). Уровень срабатывания равен 3. Имеется версия данного приема, в которой отброшены ограничения на набор a. Ее уровень срабатывания равен 4.

6. Общая сторона с квадратом.

$\forall_{ABCDEab}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(BC), отрезок(CD), отрезок(DA); $a\}$, b) & квадрат$(ABCD)$ & разныестороны$(C, E,$ прямая$(AB))$ $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB); $a\}$, $b + cl(AB)^2$))

$\forall_{ABCDEab}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(BC), отрезок(CD), отрезок(DA); $a\}$, b) & квадрат$(ABCD)$ & однасторона$(C, E,$ прямая$(AB))$ $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB); $a\}$, $b - cl(AB)^2$))

Имеется комментарий (точка отрезок(AB) E c). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - идентифицируется с посылкой. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. При рекурсивном обращении вводятся дополнительные комментарии (точка отрезок$(BC)A$ c) и (точка отрезок$(CD)A$ c). Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEFab}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(AC), отрезок(CF), отрезок(EF), отрезок(DE), отрезок(BD); $a\}$, b) & квадрат$(CDEF)$ & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & $A \in$ отрезок(CD) & $B \in$ отрезок(AD) $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB); $a\}$, $|b + l(CD)^2|$))

$\forall_{ABCDEFab}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(AC), отрезок(CF), отрезок(EF), отрезок(DE), отрезок(BD); $a\}$, b) & квадрат$(FEDC)$ & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & $A \in$ отрезок(CD) & $B \in$ отрезок(AD) $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB); $a\}$, $|b + l(CD)^2|$))

Комментарии (точка ...) отсутствуют. Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, сопровождаемое комментариями (точка отрезок(AC) F 1), (точка отрезок(CF) E 1), (точка отрезок(EF) C 1), (точка отрезок$(DE)C$ 1), (точка отрезок(BD) E 1). Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

7. Спрямление дуги окружности.

   $\forall_{ABCDEabc}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), отрезок(AC); $a\}$, b) & разныестороны$(C, E,$ прямая$(AB))$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), дуга(DAC); $a\}$, $b - cS$(сегмент(DAC))))

   $\forall_{ABCDEabc}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), отрезок(AC); $a\}$, b) & однасторона$(C, E,$ прямая$(AB))$ & разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), дуга(DAC); $a\}$, $b + cS$(сегмент(DAC))))

   $\forall_{ABCDEabc}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), отрезок(AC); $a\}$, b) & однасторона$(C, E,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), дуга(DAC); $a\}$, $b - cS$(сегмент(DAC))))

   Имеется комментарий (точка отрезок$(AB)E$ c). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, два других - обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. В термах набора a точка A не упоминается. При рекурсивном обращении вводится комментарий (точка отрезок$(AC)D$ c). Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCab}$(вычислениеплощадь($\{$отрезок(AB); $a\}$, b) & $\neg(C \in$ прямая$(AB))$ $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$дуга(CAB); $a\}$, $|b + S$(сегмент$(CAB))|$))

   Комментарии (точка ...) отсутствуют. Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, причем вводится комментарий (точка отрезок$(AB)C$ -1). Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

8. Повторная ссылка на сторону.

   $\forall_{abc}$(вычислениеплощадь($\{; a\}, b$) $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{c, c; a\}, b$))

   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

9. Одна сторона является частью другой.

   $\forall_{ABCDab}$(вычислениеплощади($\{$отрезок(AC), отрезок$(BD); a\}, b$) & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & $A \in$ отрезок(CD) & $B \in$ отрезок(AD) $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), отрезок$(CD); a\}, b$))

   Имеется комментарий (точка отрезок$(CD)E$ c). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, которому передаются дополнительные комментарии (точка отрезок$(AC)E$ c) и (точка отрезок(BD) E c). Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

10. Две смежные стороны образуют отрезок.

    $\forall_{ABCab}$(вычислениеплощади($\{$отрезок$(AC); a\}, b$) & $C \in$ прямая(AB) $\rightarrow$ вычислениеплощади($\{$отрезок(AB), отрезок$(BC); a\}, b$))

    Имеется комментарий (точка отрезок$(AB)E$ c). Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, при котором вводится дополнительный комментарий (точка отрезок(AC) E c). Второй антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

Списки отрезков и дуг, возникающие при рекурсивных обращениях, обрабатываются нормализатором "нормграницы". Этот нормализатор отбрасывает пары идентичных элементов, а также отрезки, вырождающиеся в точку. Для обращения к синтезатору "вычислениеплощади" созданы два специальных приема, имеющие заголовок "второйтерм":

$\forall_{anx}$(ычислениеплощади(Val(λ_b(отрезок$(x(b)x(b(\mathrm{mod}\ n) + 1))$, $b -$ целое & $1 \leq b$ & $b \leq n)), a) \rightarrow S$(фигура$(x)) = a$)

Переменная x идентифицируется с выражением "набор(...)". Антецедент обрабатывается синтезатором. При этом подвыражение Val(...) выделено указателем "развертка". Оно формируется как набор отрезков, соединяющих соседние вершины многоугольника. Прием применяется лишь в тех случаях, когда число вершин больше 4. Уровни срабатывания равны 3 и 7, причем во втором случае ограничитель трудоемкости более слабый.

$\forall_{ax}$(вычислениеплощади$(x, a) \rightarrow S$(Фигура$(x)) = a$)

Переменная x идентифицируется с произвольным выражением. Антецедент обрабатывается синтезатором. Уровни срабатывания равны 3 и 7.

Синтезатор "пропорцплощадь"

Этот синтезатор предпринимает попытку вычислить площадь многоугольника из соображений пропорциональности. Реализуемое синтезатором утверждение имеет вид "пропорцплощадь(A, b)". Оно эквивалентно равенству $S(A) = b$. Выдаются только те результаты b, которые не содержат неизвестных. Синтезатор имеет следующие приемы:

1. Усмотрение из посылок.

   $\forall_{ab}(S(a) = b \to \text{пропорцплощадь}(a, b))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение b не содержит неизвестных.

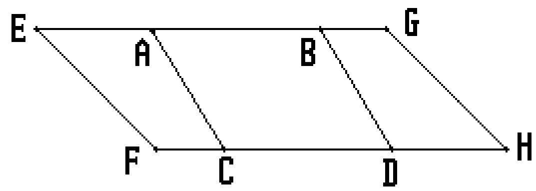
   $\forall_{ABCa}(S(\text{фигура}(ABC)) = a \to \text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(ABC), a))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин треугольника игнорируется. Выражение a не содержит неизвестных.

   $\forall_{ABCDa}(S(\text{фигура}(ABCD)) = a \to \text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(ABCD), a))$

   Аналогично предыдущему, но допускаются не произвольные, а лишь циклические перестановки вершин. Уровни срабатывания перечисленных приемов равны 1.

2. Вложенные параллелограммы.

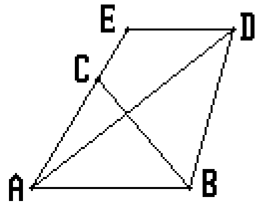


   $\forall_{ABCDEFGHPabcdes}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)$ & $\text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(BD)$ & $A \in \text{отрезок}(GE)$ & $B \in \text{отрезок}(AG)$ & $D \in \text{отрезок}(FH)$ & $C \in \text{отрезок}(FD)$ & $\text{прямая}(EF) \parallel \text{прямая}(GH)$ & $S(P) = a$ & $A \in P$ & $B \in P$ & $C \in P$ & $D \in P$ & $E \in P$ & $G \in P$ & $F \in P$ & $H \in P$ & $\text{пропорцотрезки}(l(AE), l(AB), c, b)$ & $\text{пропорцотрезки}(l(BG), l(AB), e, d)$ & $\text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(FEGH), s) \to$

   $\text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(ABDC), bds/(bd + cd + be)))$

   Восьмой антецедент идентифицируется с посылкой, определяющей площадь a некоторой фигуры P. Выражение a не содержит неизвестных. Прием предпринимает попытку свести нахождение площади параллелограмма $ABDC$ к площади большего параллелограмма $FEGH$, расположенного, как и первый параллелограмм, внутри фигуры P. Таким образом делается шаг "сближения"исходной фигуры с фигурой P. Первые семь антецедентов выделены указателем "усм". Антецеденты с девятого по шестнадцатый обрабатываются проверочными операторами. Три последних антецедента обрабатываются пакетными синтезаторами. Третий из них реализует рекурсивное обращение. Напомним, что синтезатор "пропорцотрезки" представляет собой слегка усиленную версию синтезатора "пропорциональны". Уровень срабатывания равен 2.

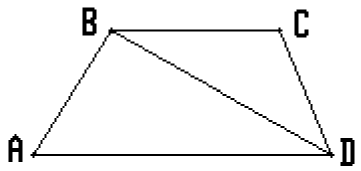
3. Треугольники с общим основанием.



$\forall_{ABCDE}(S(\text{фигура}(ABC)) = a \,\&\, \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB) \,\&\, E \in \text{прямая}(AC)$ $\&\, \text{пропорцотрезки}(l(AC), l(AE), b, c) \to \text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(ABD), ac/b))$

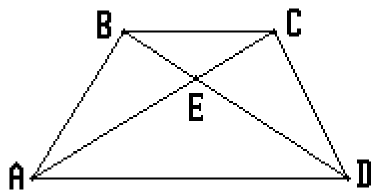
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 2.

4. Диагонали трапеции.



$\forall_{ABCDSab}(\text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD) \,\&\, S(\text{фигура}(ABCD)) = S \,\&$ $al(BC) = bl(AD) \to \text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(BCD), Sb/(a+b)))$

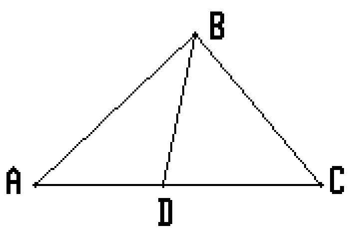
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение S не содержит неизвестных. Первый антецедент выделен указателем "усм", третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDEab}(\text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD) \,\&\, E \in \text{отрезок}(BD) \,\&\, E \in \text{отрезок}(AC)$ $\&\, \text{пропорцотрезки}(l(AD), l(BC), a, b) \,\&\, \text{разныепрямые}(\text{прямая}(BC),$ $\text{прямая}(AD)) \,\&\, \text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(BEC), c) \to$ $\text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(ABCD), c(a+b)^2/b^2))$

Прием предпринимает попытку свести вычисление площади трапеции $ABCD$ к вычислению площади треугольника BEC. Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый и шестой - обрабатываются пакетными синтезаторами. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

5. Основание треугольника делится в заданном отношении.

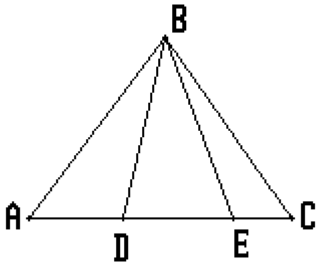


$\forall_{ABCDab}(D \in \text{отрезок}(AC) \,\&\, al(AD) = bl(AC) \,\&\, \text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(ABC),$ $c) \to \text{пропорцплощадь}(\text{фигура}(ABD), bc/a))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и третий - обрабатываются пакетными синтезаторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDab}(D \in$ отрезок(AC) & пропорцотрезки$(l(AC), l(AD), a, b)$ & пропорцплощадь(фигура$(ABC), c) \to$ пропорцплощадь(фигура$(ABD), bc/a))$

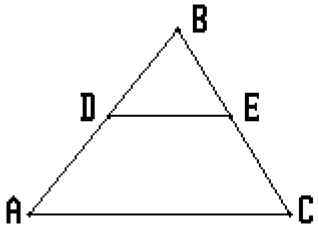
Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDab}(D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & пропорцотрезки$(l(AC), l(DE), a, b)$ & $S($фигура$(ABC)) = c \to$ пропорцплощадь(фигура$(BDE), bc/a))$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается синтезатором. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

6. Треугольники, отсеченные на сторонах одного и того же угла параллельными прямыми.



$\forall_{ABCDEab}($прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ прямая(BC) & $al(BD) = bl(AB)$ & пропорцплощадь(фигура$(ABC), c) \to$ пропорцплощадь(фигура$(BDE), b^2c/a^2))$

$\forall_{ABCDEab}($прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ прямая(BC) & $al(DE) = bl(AC)$ & пропорцплощадь(фигура$(ABC), c) \to$ пропорцплощадь(фигура$(BDE), b^2c/a^2))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый и пятый - обрабатываются пакетными синтезаторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEab}($прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ прямая(BC) & пропорцотрезки$(l(DE), l(AC), b, a)$ & пропорцплощадь(фигура$(ABC), c) \to$ пропорцплощадь(фигура$(BDE), b^2c/a^2))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

7. Трапеция и треугольник, получающийся при продолжении ее боковых сторон.

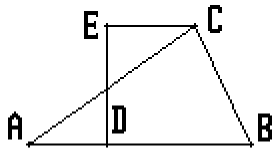
   Чертеж прежний.

   $\forall_{ABCDEab}$(прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(DE), прямая(AC)) & пропорцотрезки$(l(DE), l(AC), b, a)$ & пропорцплощадь(фигура$(ADEC), c) \to$ пропорцплощадь(фигура(ABC), $a^2c/(a^2-b^2)$)))

   $\forall_{ABCDEab}$(прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ прямая(BC) & разныепрямые(прямая(DE), прямая(AC)) & пропорцотрезки$(l(DE), l(AC), b, a)$ & пропорцплощадь(фигура$(ABC), c) \to$ пропорцплощадь(фигура$(ADEC)$, $(a^2-b^2)/a^2$))

   Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Пятый и шестой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Уровень срабатывания равен 2.

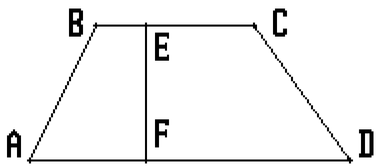
8. Выражение площади треугольника через длину основания и высоту.



   $\forall_{ABCDE}$(прямая$(CE) \parallel$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $l(AB) = a$ & $l(DE) = b \to$ пропорцплощадь(фигура$(ABC), ab/2$))

   Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый и пятый - указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат неизвестных. Прием применяется при наличии комментария "плюс", указывающего на усиленное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

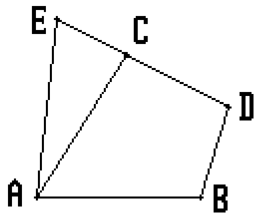
9. Выражение площади трапеции через длины оснований и высоту.



   $\forall_{ABCDEF}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) & $l(BC) = a$ & $l(AD) = b$ & $l(EF) = c \to$ пропорцплощадь(фигура$(ABCD), (a+b)c/2$))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние три антецедента выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Прием применяется при наличии комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 1.

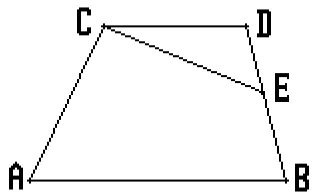
10. Продолжение стороны четырехугольника до пересечения с прямой, параллельной противоположной стороне.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ отрезок(DE) & актив(прямая(AE)) &
пропорцплощадь(фигура$(AEDB), a)$ & пропорцплощадь(фигура$(AEC), b) \rightarrow$
пропорцплощадь(фигура$(ACDB), a - b)$)

Первые два антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются пакетными синтезаторами. Через точку E проведена прямая, параллельная прямой AB, причем не усматривается принадлежность точки E последней прямой. Требуется наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.

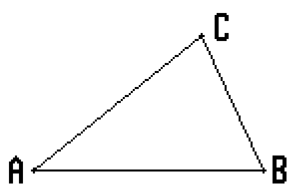
11. Дополнение четырехугольника до трапеции.



$\forall_{ABCDE}(E \in$ отрезок(BD) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(AB) &
пропорцплощадь(фигура$(ACDB), a)$ & пропорцплощадь(фигура$(CDE), b) \rightarrow$
пропорцплощадь(фигура$(ACEB), a - b)$)

Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий и четвертый - реализуют рекурсивные обращения. Требуется наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.

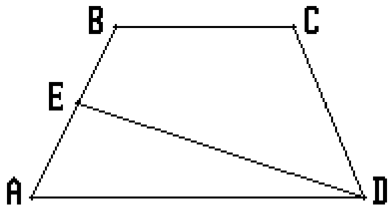
12. Выражение площади треугольника через угол и длины смежных сторон.



$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC)) \rightarrow$
пропорцплощадь(фигура$(ABC), l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC))/2)$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB, AC и угол BAC известны. При идентификации угла BAC ориентация лучей игнорируется. Уровень срабатывания равен 3.

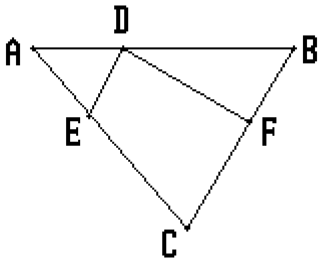
13. Треугольник, возникающий при соединении конца основания трапеции с точкой на противоположной боковой стороне.



$\forall_{ABCDEabpq}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & $E \in$ отрезок(AB) & S(фигура$(ABCD)) = S$ & $al(BC) = bl(AD)$ & $pl(BE) = ql(AE) \rightarrow$ пропорцплощадь(фигура$(ADE), apS/(a+b)(p+q)$))

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение S не содержит неизвестных. Первые два антецедента выделены указателем "усм", четвертый и пятый - обрабатываются пакетными синтезаторами. Выражения a, b, p, q не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

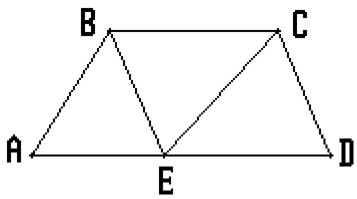
14. Дополнение четырехугольника до треугольника.



$\forall_{ABCDEFabc}(E \in$ отрезок(AC) & $D \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(BC) & актив(прямая(AB)) & пропорцплощадь(фигура$(ABC), a$) & пропорцплощадь(фигура$(ADE), b$) & пропорцплощадь(фигура$(DBF), c) \rightarrow$ пропорцплощадь(фигура$(CEDF), a-b-c$))

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", три последних - обрабатываются пакетными синтезаторами. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Требуется наличие комментария "плюс". Уровень срабатывания равен 3.

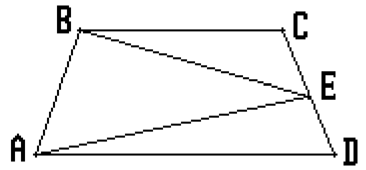
15. Площадь треугольника, вершина которого лежит на одном основании трапеции, а основание совпадает с другим основанием трапеции.



$\forall_{ABCDESab}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & S(фигура$(ABCD)) = S$ & $al(BC) = bl(AD)$ & $E \in$ прямая$(AD) \rightarrow$ пропорцплощадь(фигура(BCE), $Sb/(a+b)$))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, третий - обрабатывается синтезатором. Первый и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Выражения S, a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

16. Площадь треугольника, вершина которого лежит на боковой стороне трапеции, а основанием служит другая боковая сторона.



$\forall_{ABCDESab}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & S(фигура$(ABCD)) = S$ & $E \in$ отрезок(CD) & пропорцплощадь(фигура$(BCE), a)$ & пропорцплощадь(фигура$(ADE), b) \rightarrow$ пропорцплощадь(фигура(ABE), $S - a - b))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый и пятый - обрабатываются синтезаторами. Первый и третий антецеденты выделены указателем "усм". Выражения S, a, b не содержат неизвестных.

Для обращения к синтезатору "пропорцплощадь" созданы следующие приемы сканирования задачи:

$\forall_{ABab}$(актив$(S(A))$ & $S(B) = a$ & пропорцплощадь$(A, b) \rightarrow S(A) = b)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - реализует обращение к синтезатору. Выражение a не содержит неизвестных, выражение $S(A)$ имеет тип "неизв". Выражения A, B имеют заголовок "фигура". Уровень срабатывания равен 3. Создана также копия приема, срабатывающая на уровне 7.

$\forall_{Aab}$(актив$(S(A))$ & пропорцплощадь$(A, b) \rightarrow S(A) = b)$

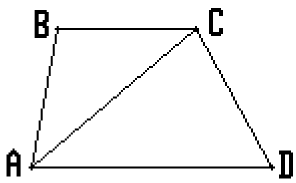
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует обращение к синтезатору. Выражение $S(A)$ имеет тип "неизв", причем заголовок выражения A - символ "фигура". Уровень срабатывания равен 7. Созданы еще две версии приема, в которых обращение к синтезатору снабжается усиливающим комментарием "плюс". Первая, срабатывающая на уровне 9, дополнительно проверяет, что в задаче не рассматриваются неизвестные площади, отличные от $S(A)$. Во второй, срабатывающей на уровне 12, это требование отсутствует.

Синтезатор "пропорцплощади"

Этот синтезатор предпринимает попытку выразить отношение площадей многоугольников через длины отрезков. Реализуемое синтезатором утверждение имеет вид "пропорцплощади(A, B, c, d)". Оно эквивалентно равенству $S(A)/S(B) = c/d$. Синтезатор имеет следующие приемы:

1. Переход от трапеции к треугольнику.

   Уровни срабатывания приемов этого пункта равны 1.

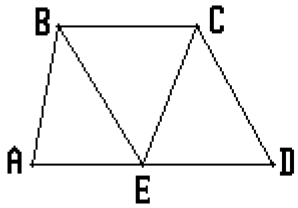


$\forall_{ABCDPQRab}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & пропорцплощади(фигура(ABC), фигура$(PQR), a, b) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура$(ABCD)$, фигура(PQR), $a(l(BC) + l(AD)), bl(BC)))$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - реализует рекурсивное обращение. Одна из точек P, Q, R совпадает с вершиной треугольника ABC, а две другие - лежат на примыкающих сторонах этого треугольника.

$\forall_{ABCDPQRab}$(трапеция$(ABCD)$ & пропорцплощади(фигура(ABC), фигура$(PQR), a, b) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура$(ABCD)$, фигура(PQR), $a(l(BC) + l(AD)), bl(BC)))$

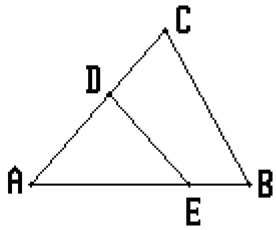
Аналогично предыдущему, но первый антецедент идентифицируется с посылкой.



$\forall_{ABCDE}$(трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая$(AD) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура$(ABCD)$, фигура$(BCE), l(BC) + l(AD), l(BC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм".

2. Треугольники с общим углом.



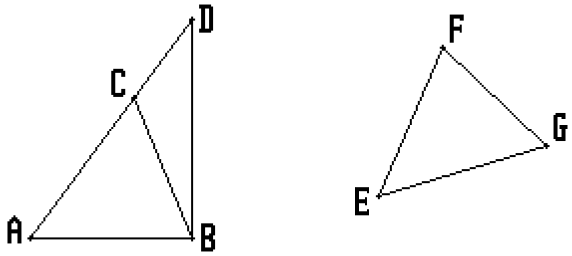
$\forall_{ABCDE}(D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура(ABC), фигура$(ADE), l(AC)l(AB), l(AD)l(AE)))$

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDE}(D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) & пропорцплощади(фигура(ABC), фигура$(MNP), a, b) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура(ADE), фигура$(MNP), al(AD)l(AE), bl(AC)l(AB)))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Точки B, C лежат на прямой MN. Имеется усиливающий комментарий "Плюс". Уровень срабатывания равен 2.

3. Переход к треугольникам с параллельными сторонами.

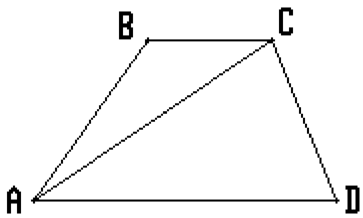


$\forall_{ABCDEFGabcd}(C \in$ отрезок(AD) & прямая$(BD) \parallel$ прямая(MN) & $E \in$ прямая(MN) & пропорцплощади(фигура(ABD), фигура$(EFG), c, d) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура(ABC), фигура$(EFG), cl(AC), dl(AD)))$

$\forall_{ABCDEFGabcd}(C \in$ отрезок(AD) & прямая$(BD) \parallel$ прямая(MN) & $E \in$ прямая(MN) & пропорцплощади(фигура(ABD), фигура$(EFG), c, d) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура(EFG), фигура$(ABC), dl(AD), cl(AC)))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Имеется усиливающий комментарий "плюс". Уровень срабатывания равен 2.

4. Разбиение трапеции на два треугольника.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD) \rightarrow$ пропорцплощади(фигура(ABC), фигура$(ACD), l(BC), l(AD)))$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

Для обращения к синтезатору "пропорцплощади" созданы следующие приемы сканирования задачи, имеющие заголовок "второйтерм" :

$\forall_{abcdpq}$(пропорцплощади$(a, b, c, d) \rightarrow pS(a)/qS(b) = pc/qd)$

Антецедент реализует обращение к синтезатору. Предварительно проверяется отсутствие посылок вида "$S(A) = s$". Уровень срабатывания равен 1. Созданы еще две версии данного приема. Первая, срабатывающая на уровне 4, при обращении к синтезатору вводит усиливающий комментарий "плюс". Вторая, срабатывающая на уровне 9, вводит сразу два усиливающих комментария - "плюс" и "Плюс".

$\forall_{abcdpq}$(пропорцплощади$(a, b, c, d) \rightarrow pS(a) = qS(b) \leftrightarrow pc = qd)$

Проверяется, что кроме текущей посылки, нет посылок вида "$S(A) = B$". Уровень срабатывания равен 3.

3.36 Приемы, связанные с периметром

Периметр плоской фигуры A обозначается "периметр(A)".

Периметр многоугольника

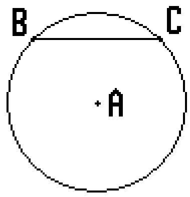
$$\forall_{xn}(\text{периметр}(\text{фигура}(x)) = \sum_{i=1}^{n} l(x(i)x(i(\text{mod } n)+1)))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Заголовком выражения x служит символ "набор". Указатель "контекст(...)" идентифицирует n с числом операндов набора. Указатель "развертка" определяет выписывание заменяющей суммы как обычной суммы n слагаемых. Уровень срабатывания равен 1.

$$\forall_{xn}(n = l(x) \to \text{периметр}(\text{фигура}(x)) = \sum_{i=1}^{n} l(x(i)x(i(\text{mod } n)+1)))$$

Выражение x не имеет заголовка "набор". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормдлинанабора". В заменяющей части рассматривается не обычная, а конечная сумма. Уровень срабатывания равен 1.

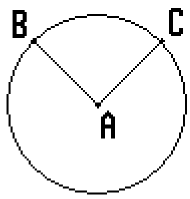
Периметр сегмента



$\forall_{ABC}(\text{периметр}(\text{сегмент}(ABC)) = \text{длина}(\text{дуга}(ABC)) + l(BC))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Периметр сектора



$\forall_{ABC}(\text{периметр}(\text{сектор}(ABC)) = \text{длина}(\text{дуга}(ABC)) + 2l(AB))$

Аналогично предыдущему.

Неотрицательность периметра

$\forall_{ab}(\text{периметр}(a) = b \ \& \ b < 0 \to \text{ложь})$

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение b не содержит неизвестных и в нем встречается символ "минус". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

3.37 Приемы, связанные с длиной

Выражение "длина(A)" используется для обозначения длины кривой A, либо вектора A, либо множества A точек на числовой прямой, либо длины маршрута A в графе или орграфе.

Неотрицательность длины

Приемы этого подраздела используются в задачах на исследование , имеющих цель "известно".

$\forall_{Aa}$(длина$(A) = a$ & $a < 0 \to$ ложь)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных, и в нем встречается символ "минус". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

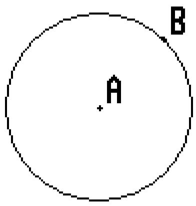
$\forall_{abc}(-a$длина$(b) = c$ & $0 < a$ & $0 < c \to$ ложь)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcT}(c < 0 \to$ длина$(T) = c \leftrightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение c не содержит неизвестных и имеет заголовок "минус". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

Длина окружности

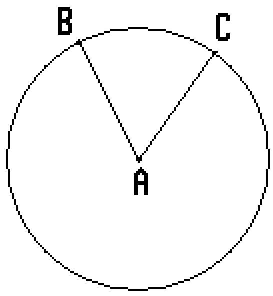


$\forall_{AB}$(длина(окружность$(AB)) = 2\pi l(AB))$

Прием имеет заголовок "вывод". Он срабатывает при усмотрении в задаче выражения "длина(окружность(AB))". Уровень срабатывания равен 1.

Длина дуги

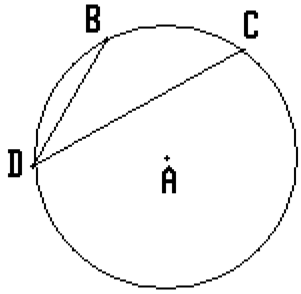
Приемы этого подраздела имеют заголовок "второйтерм".



$\forall_{ABC}$(длина(дуга(ABC)) $= \angle(BAC)l(AB)$)

$\forall_{ABC}$(длина(большаядуга(ABC)) $= (2\pi - \angle(BAC))l(AB)$)

Уровень срабатывания равен 2. Напомним, что "дуга(...)" обозначает меньшую, а "большаядуга(...)" - большую из двух дуг, определяемых заданными концами.



$\forall_{ABCDE}$($B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) & $D \in$ окружность(AE) $\rightarrow$ длина(дугаугла(BDC)) $= 2\angle(BDC)l(AB)$)

Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2. Напомним, что "дугаугла(...)" обозначает дугу, на которую опирается вписанный угол.

$\forall_{ABC}(\neg$(длина(дуга(ABC)) $= 0) \leftrightarrow \neg(B = C))$

Уровень срабатывания равен 1.

Длина отрезка

$\forall_{AB}$(длина(отрезок(AB)) $= l(AB)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{aAB}$($a =$ отрезок(AB) $\rightarrow$ длина(a) $= l(AB)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм", причем точка привязки расположена в антецеденте, идентифицруемом с посылкой. Выражение a - переменная. Уровень срабатывания приема равен 0.

Длина конечного множества точек

$\forall_a$(конечное(a) $\rightarrow$ длина(a) $= 0$)

Прием имеет заголовок "второйтерм", Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a содержит символ "перечень". Уровень срабатывания приема равен 1.

Существование объекта заданной длины

$\forall_a(\exists_b$(длина(b) $= a) \leftrightarrow a -$ число & $0 \leq a$)

Прием имеет заголовок "связка" и применяется в задачах на описание, обладающих целью "исключ". Такая цель форсирует исключение несущественных неизвестных. Переменная b идентифицируется с несущественной неизвестной, не входящей в a, а также в другие условия задачи. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abp}(0 < b$ & $p -$ число $\rightarrow \exists_q$(aдлина($[p, q]$) $= b$ & $q -$ число))

Тип приема и контекст срабатывания - аналогично предыдущему. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Несущественная неизвестная q не встречается в a, b, p и в остальных условиях задачи. Уровень срабатывания равен 3.

Ориентация равенства

$\forall_{ab}(b = \text{длина}(a) \leftrightarrow \text{длина}(a) = b)$

Прием применяется к условию либо посылке задачи на описание, имеющей цель "исключ". Этот терм задачи не сопровождается комментарием "ориентацияравенства", и прием вводит такой комментарий. Выражение b не содержит символа "длина". Уровень срабатывания равен 0. Создана также версия данного приема, применяемая к посылке задачи на исследование. В ней выражение b должно иметь один следующих типов: "крд(...)", "минус(крд(...))", "cдлина$(d)/e$". В последнем случае c, e не содержат неизвестных и не обращаются одновременно в единицу. Уровень срабатывания данной версии равен 3.

Приведение подобных членов

$\forall_{abcd}(c\text{длина}([a, b]) + d\text{длина}([a, b]) = (c + d)\text{длина}([a, b]))$

Выражения c, d не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdAB}(a(b\text{длина}(A) + c) + d\text{длина}(A) = (ab + d)\text{длина}(A) + ac)$

Выражения a, b, d не содержат символа "длина". Уровень срабатывания равен 3.

Нормализатор общей стандартизации "нормдлина"

Нормализатор "нормдлина" содержит несколько несложных приемов, причем все они, кроме первого, связаны с длиной векторов.

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "длина"; оно не является подвыражением выражения b. Уровень срабатывания равен 1.

2. Выражение длины вектора через расстояние между его концами.

   $\forall_{ABc}(l(AB) = c \to \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = c)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

3. Длина произведения вектора на число.

   $\forall_{ab}(\text{длина}(ab) = |a|\text{длина}(b))$

   Здесь рассматривается символ "умножвект", обозначающий произведение числа a на вектор b. Выражение "длина(b)" рекурсивным образом обрабатывается нормализатором "нормдлина". Уровень срабатывания равен 2.

4. Длина нулевого вектора.

   $\text{длина}(\text{вектор}0) = 0$

   Уровень срабатывания равен 1.

5. Длина суммы векторов.

   $\forall_{abcd}(0 \leq c \ \& \ 0 \leq d \ \&$ однонаправлены$(a, b) \rightarrow$ длина$(ca + db) =$
   cдлина$(a) + d$длина$(b))$

   Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abpqr}($длина$(a) = p \ \&$ длина$(b) = q \ \&$ уголмежду$(a, b) = r \rightarrow$
   длина$(a + b) = \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos(r)})$

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Выражения p, q, r не имеют невырожденных числовых атомов. Если рассматриваемая векторная сумма содержит символ векторного умножения, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

6. Длина минус - вектора.

   $\forall_a($длина$(-a) =$ длина$(a))$

   Уровень срабатывания равен 1.

7. Использование координат.

   $\forall_{abK}($влево$(a, K) \ \&$ крд$(a, K, 1) = b \rightarrow$ длина$(a) = b)$

   $\forall_{abK}($вправо$(a, K) \ \&$ крд$(a, K, 1) = b \rightarrow$ длина$(a) = b)$

   Напомним, что "крд(a K i)" обозначает i - ю координату вектора a в системе координат K. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcAK}($прямкоорд$(K) \ \&$ крд$(A, K, 1) = a \ \&$ крд$(A, K, 2) = b \ \&$
   крд$(A, K, 3) = c \rightarrow$ длина$(A) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

8. Длина вектора скорости.

   $\forall_{atKT}($одномерндвиж$(a, K, T) \ \& \ t \in T \rightarrow$ длина(Скорость$(a, K, t)) =$
   $|$крд(Скорость$(a, K, t), K, 1)|)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение "крд(Скорость(a, K, t),K,1)" уже встречается в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{atpK}($скорость$(a, t) = p \ \&$ Неподв$(K, t) \rightarrow$ длина(Скорость$(a, K, t)) = p)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Здесь "скорость" - неотрицательная величина скалярной скорости вдоль траектории движения материальной точки. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение p не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

3.38 Приемы, связанные с символом "центр"

Утверждение "центр(A P)" означает, что точка A является центром фигуры либо тела P. В физике оно может быть использовано для материальной точки A и твердого тела P. Почти все приемы решателя, в которых упоминается центр, отнесены к разделам, соответствующим типам фигур и тел. В данном разделе имеется единственный прием вывода:

$\forall_{ABC}$(центр(A, B) & центр$(C, B) \rightarrow A = C)$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

3.39 Приемы, связанные с символом "фигура"

Выражение "фигура(набор($A_1 \ldots A_n$))" обозначает многоугольник, ограниченный ломаной $A_1 \ldots A_n$. Практически все приемы, в которых встречается символ "фигура", отнесены к другим разделам. В данном разделе имеются всего два приема.

$\forall_{inx}(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ актив(прямая$(x(i)x(i(\bmod n) + 1))))$

Прием вводит в рассмотрение прямые, определяемые сторонами многоугольника. Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "фигура(x)", где x начинается с символа "набор". Указатель "контекст" идентифицирует n с числом корневых операндов набора x, причем проверяет, что это число больше 4. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Он перечисляет натуральные константы i от 1 до n. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ab}$(фигура$(b) = a \rightarrow a =$ фигура$(b))$

Прием предпринимает ориентацию равенства, задающего фигуру, и имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к посылке задачи на исследование, причем перестановка членов равенства при идентификации не допускается. Выражение a не имеет заголовка "фигура". Преобразованное равенство снабжается комментарием "ориентацияравенства", блокирующим прочие попытки перестановки его частей. Уровень срабатывания равен 0.

3.40 Приемы, связанные с символом "дуга"

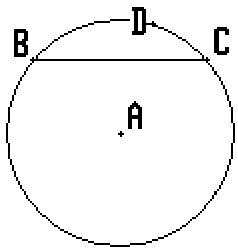
Выражение "дуга(A B C)" обозначает дугу окружности, с центром A, ограниченную точками B и C. Берется меньшая из двух дуг. Если точки B, C диаметрально противоположны, то выбирается произвольная из двух равных дуг. Как и выше, большинство приемов, в которых упоминается дуга, отнесены к другим разделам.

Перестановка операндов

$\forall_{ABC}$(дуга$(ABC) =$ дуга$(ACB))$

Выражение C лексикографически предшествует выражению B. Уровень срабатывания равен 0.

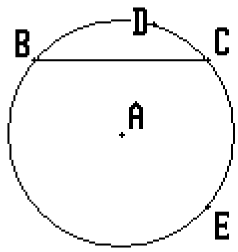
Точка дуги и центр окружности лежат по разные стороны от хорды



$\forall_{ABCD}(D \in \text{дуга}(ABC) \to \text{разныестороны}(A, D, \text{прямая}(BC)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

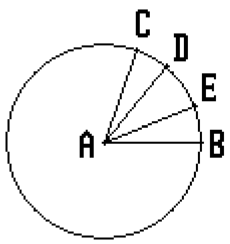
Точка дуги лежит на окружности



$\forall_{ABCDE}(B \in \text{окружность}(AE)\ \&\ D \in \text{дуга}(ABC) \to D \in \text{окружность}(AE))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

Уточнение взаимного расположения двух точек на дуге



$\forall_{ABCDEabc}(D \in \text{дуга}(ABC)\ \&\ E \in \text{дуга}(ABC)\ \&\ \angle(CAE) = a\ \&\ \angle(DAB) = b\ \&$
$\angle(CAB) = c\ \&\ 0 < a + b - c \to D \in \text{дуга}(ACE)\ \&\ E \in \text{дуга}(ABD))$

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c константные. Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор "нормдуга"

В этом нормализаторе имеется единственный прием, дублирующий приведенный выше прием лексикографического переупорядочения двух последних операндов.

3.41 Приемы, связанные с символом "дугаугла"

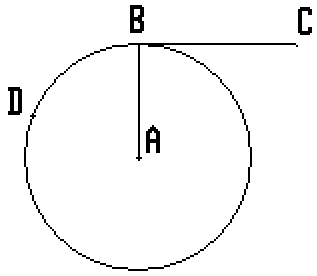
Выражение "дугаугла($A\ B\ C$)" обозначает дугу, на которую опирается вписанный угол ABC. В разделе имеется единственный прием, выполняющий лексикографическое переупорядочение операндов A, C.

3.42 Приемы, связанные с символом "касательная"

Утверждение "касательная($A\ B$)" означает, что прямая A является касательной к окружности B.

Простейшие свойства касательной

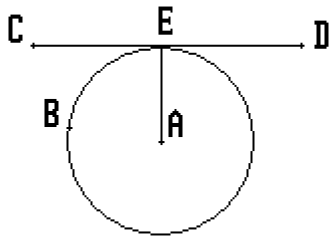
1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.



$\forall_{ABCD}$($B \in$ окружность(AD) & прямая(BC)$-$касательная к окружность(AD) $\to$ прямая(BC) $\perp$ прямая(AB))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой. Первый антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

2. Ввод в рассмотрение точки касания касательной к окружности.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) $\to$ E – точка & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & прямая(AE) $\perp$ прямая(CD))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Общая точка E касательной и окружности пока не введена. Прием вводит эту точку, обозначая ее новой переменной. Уровень срабатывания равен 2.

3. Касание отрезка.

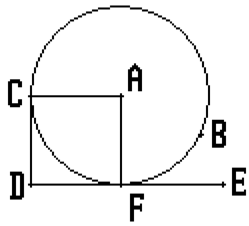
$\forall_{ABCDE}$(отрезок(CD) – касательная к окружность(AB) $\to$ прямая(CD) – касательная к окружность(AB))

Чертеж прежний. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDE}$(отрезок(CD) – касательная к окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность$(AB) \rightarrow E \in$ отрезок(CD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

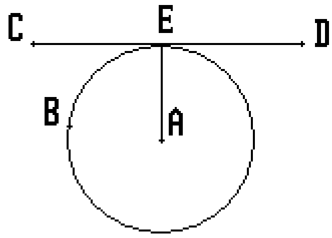
4. Усмотрение касательной в прямой, параллельной радиусу и отстоящей от него на расстояние, равное длине радиуса.



$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & прямая$(DE) \perp$ прямая(CD) & $l(CD) = l(AC) \rightarrow F$ – точка & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(DE) & прямая$(AF) \perp$ прямая(DE))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Общая точка F окружности AB с прямой DE пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

5. Касание луча.



$\forall_{ABCDE}$(луч(CD) – касательная к окружность$(AB) \rightarrow$ прямая(CD) – касательная к окружность(AB))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDE}$(луч(CD) – касательная к окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность$(AB) \rightarrow \neg(C \in$ интервал(DE)))

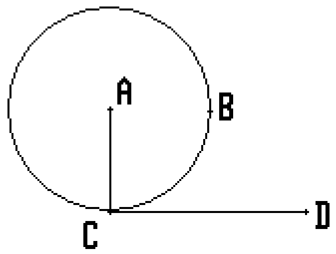
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

6. Усмотрение вписанной в угол окружности.

$\forall_{ABCDE}$(луч(AB) – касательная к окружность(DE) & луч(AC) – касательная к окружность(DE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow$ окружность(DE)вписана в Угол(BAC))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

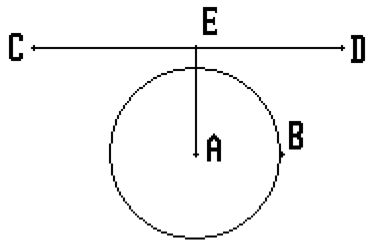
7. Усмотрение принадлежности окружности точки, лежащей на касательной.



$\forall_{ABCD}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая$(AC) \perp$ прямая$(CD) \to C \in$ окружность(AB))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

8. Доказательство того, что отрезок либо прямая являются касательными к окружности.



$\forall_{ABCDE}$($E \in$ прямая(CD) & прямая$(AE) \perp$ прямая$(CD) \to$ отрезок(CD) – касательная к окружность$(AB) \leftrightarrow E \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к конъюнктивному члену условия задачи на доказательство. Первые два антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

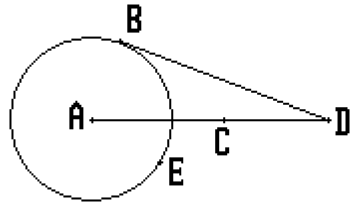
$\forall_{ABCDE}$($E \in$ прямая(CD) & прямая$(AE) \perp$ прямая$(CD) \to$ прямая(CD) – касательная к окружность$(AB) \leftrightarrow E \in$ окружность(AB))

Аналогично предыдущему, но уровней срабатывания два - 3 и 9.

$\forall_{ABCDE}$(E – точка & $E \in$ прямая(CD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CD))

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на доказательство. Указатель "контрольвывода" инициирует его срабатывание при усмотрении условия "касательная(прямая(CD)окружность(AB))". В задача пока не рассматривается основание E перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CD, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 3. Создана версия приема, срабатывающая при усмотрении условия "касательная(отрезок(CD), окружность(AB))".

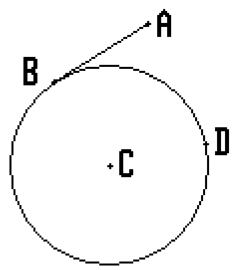
9. Усмотрение принадлежности отрезку с учетом того, что точки касательной находятся вне окружности.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(BD) – касательная к окружность(AE) & $D \in$ прямая(AC) & $0 \leq l(AC) - l(AE)$ & $0 \leq l(AC) - l(CD)$ & $0 < l(AE) + l(CD) - l(AC) \rightarrow$ $C \in$ отрезок(AD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Расстояния AE, AC, CD уже рассматриваются в задаче, причем выражения для них не содержат символа "расстояние". Уровень срабатывания равен 6.

10. Существование касательной к окружности, проходящей через заданную точку.



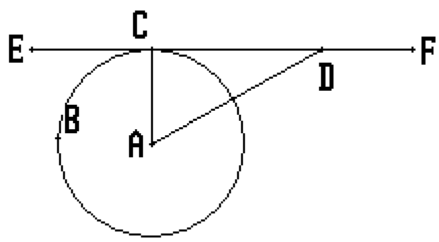
$\forall_{ACD}(\exists_B(B$–точка & $\neg(A = B)$ & прямая(AB)–касательная к окружность(CD) & $B \in$ окружность$(CD)) \leftrightarrow 0 < l(AC) - l(CD))$

$\forall_{ACr}(\exists_B(B$ – точка & $\neg(A = B)$ & прямая(AB) – касательная к окр(C, r) & $B \in$ окр$(C, r)) \leftrightarrow 0 < l(AC) - r)$

Напомним, что "окр(C, r)" - окружность радиуса r с центром в точке C. Как и "окружность(CD)", это выражение используется только в планиметрических контекстах.

Оба приема имеют заголовок "связка", причем переменная B идентифицируется с несущественной неизвестной задачи на описание. Все содержащие B условия задачи идентифицируются с конъюнктивными членами утверждения под квантором существования, причем B не входит в A, C, D, r. Приемы имеют жва уровня срабатывания - 2 и 5.

11. Ввод в рассмотрение прямой, соединяющей центр окружности с точкой на касательной.

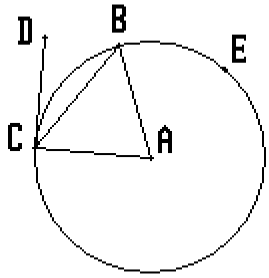


$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & $C \in$ прямая(EF) & $D \in$ прямая(EF) & актив$(l(CD)) \rightarrow$ актив(прямая(AD)))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Прямая AD пока в задаче не рассматривается. Не рассматриваются никакое расстояние между точками прямой EF, отличное от $l(CD)$, а также проходящая через точку D прямая, пересекающаяся с окружностью AB по двум выделенным точкам. Наконец, отсутствует еще одна посылка вида "касательная(прямая(MN окружность(AB))", у которой прямая MN проходит через точку D. Уровень срабатывания равен 4.

Касательная и секущая

1. Угол между касательной и секущей, проведенной через точку касания.



$\forall_{ABCDE}(B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) & прямая(CD) – касательная к окружность(AE) & актив$(\angle(DCB)) \rightarrow 2\min(\angle(DCB),$ $\pi - \angle(DCB)) = \angle(CAB))$

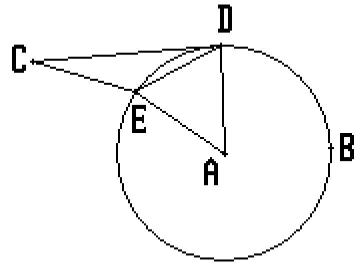
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол DCB известен; угол CAB рассматривается в задаче, но неизвестен. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}(B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) & прямая(CD) – касательная к окружность(AE) & актив$(\angle(DCB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC)) \rightarrow 2\angle(DCB) = \angle(CAB))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

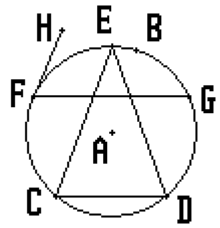
$\forall_{ABCDE}(B \in$ окружность(AE) & $C \in$ окружность(AE) & прямая(CD) – касательная к окружность(AE) & актив$(\angle(DCB))$ & $0 \leq \pi/2 - \angle(DCB) \rightarrow$ $2\angle(DCB) = \angle(CAB))$

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. Один из углов DCB, CAB известен; выражение для другого имеет тип "неизв". Обработка последнего антецедента сопровождается сравнительно сильным ограничителем трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.



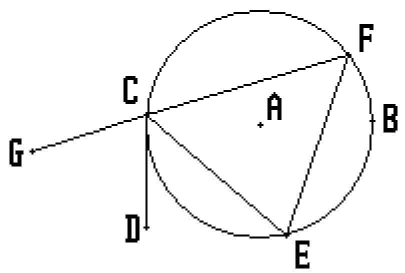
$\forall_{ABCDE}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(DCE))$ & $E \in$ окружность$(AB) \to$ актив$(\angle(CDE)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Один из углов DCE, EAD известен; выражение для другого имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.



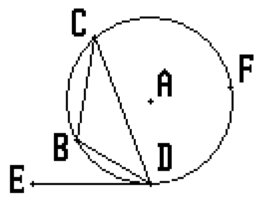
$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(FH) – касательная к окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(FH) \parallel$ прямая(CE) & $C \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(FG) & $G \in$ окружность(AB) & разныеточки(F, G) & разныеточки(C, D) & разныеточки$(C, E) \to l(FG) = l(DE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последние три - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния FG и DE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & $C \in$ отрезок(FG) & актив$(\angle(DCG))$ & однасторона$(D, E,$ прямая$(CF))$ & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(EF)) $\to \angle(DCG) = \angle(CEF))$

Все антецеденты, кроме пятого, выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана во втором антецеденте. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается принадлежность точки A прямой CF. Уровень срабатывания равен 6.

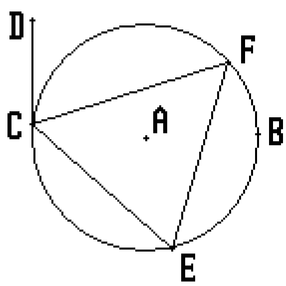


$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) &
$D \in$ окружность(AF) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AD) & $0 \leq \pi/2 - \angle(BCD)$ &
$0 \leq \pi/2 - \angle(BDE)$ & $E \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow \angle(BCD) = \angle(BDE))$

Все антецеденты, кроме пятого и шестого, выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом антецеденте. Пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Выражение для угла BCD имеет тип "определимо". Прямые BC, CD и BD уже рассматриваются в задаче. Не усматриваются ни перпендикулярность прямых BC и BD, ни перпендикулярность прямых BC и CD. Кроме того, не усматривается принадлежность точки A прямой CD. Введены сильные ограничители трудоемкости при обработке пятого и шестого антецедентов. Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 10. В ней требуется лишь, чтобы прямые BC, CD и BD уже рассматривались в задаче.

$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) &
$D \in$ окружность(AF) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AD) &
разныестороны$(C, E,$ прямая$(BD)) \rightarrow \angle(BCD) = \angle(BDE))$

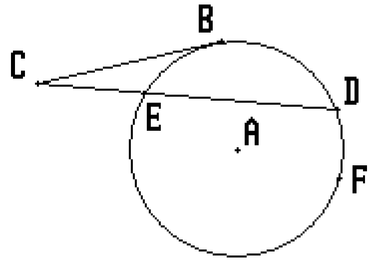
Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в последнем из них. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прямые BC, CD и BD уже рассматриваются в задаче. Не усматривается перпендикулярность прямых BC и BD. Выражение для угла BCD имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) &
актив$(\angle(DCF))$ & разныестороны$(D, E,$ прямая$(CF))$ & $E \in$ окружность(AB)
& $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(EF)) $\rightarrow$
$\angle(DCF) = \angle(CEF))$

Все антецеденты, кроме четвертого, выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором антецеденте. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 8.

2. Длина касательной и длины отрезков секущей.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(CB) – касательная к окружность(AF) &
$B \in$ окружность(AF) & $E \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) &
актив$(l(EC))$ & актив$(l(DE))$ & актив$(\angle(BCD)) \rightarrow$ актив$(l(BC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол BCD известен. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая(CB) – касательная к окружность(AF) &
$B \in$ окружность(AF) & $E \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) &
разныеточки(D, E) & $D \in$ прямая$(CE) \rightarrow l(BC)^2 = l(CE)l(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Хотя бы одно из расстояний BC, CE, CD имеет тип "определимо". Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще несколько версий данного приема:

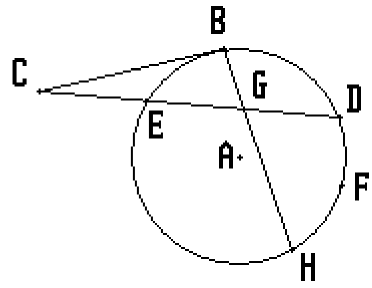
(a) Хотя бы одно из расстояний BC, CE, CD имеет тип "неизв", причем хотя бы одно из двух оставшихся уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.
(b) Два из расстояний BC, CE, CD известны, а третье - нет. Уровень срабатывания равен 7.
(c) Одно из расстояний BC, CE, CD имеет тип "неизв", а хотя бы одно из оставшихся - известно. Уровень срабатывания равен 7.
(d) Хотя бы одно из расстояний BC, CE, CD известно, и хотя бы одно - не известно. Уровень срабатывания равен 9.
(e) Одно из расстояний BC, CE, CD не известно, а два других - известны. Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая(CB) – касательная к окружность(AF) &
$B \in$ окружность(AF) & $E \in$ окружность(AF) & $\neg(l(CE) - l(CB) = 0)$ &
разныеточки$(B, E) \rightarrow D$ – точка & $D \in$ прямая(CE) &$\neg(D = E)$ &
$D \in$ окружность(AF) & $l(BC)^2 = l(CE)l(CD))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Существует равенство в посылках задачи, содержащее как выражение $l(BC)$, так и выражение $l(CE)$. Не усматриваются ни равенство расстояний CB и CE, ни перпендикулярность прямых CE и AE. Вторая точка D пересечения прямой CE с окружностью AF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CB) \perp$ прямая(AB) & $B \in$ окружность(AF) &
$E \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & разныеточки(D, E) &
$D \in$ прямая$(CE) \rightarrow l(BC)^2 = l(CE)l(CD))$

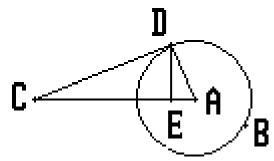
Все антецеденты, кроме пятого, выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Хотя бы одно из расстояний BC, CE, CD имеет тип "неизв". Отсутствует посылка "касательная(прямая(PQ)окружность(AF))", такая, что прямая PQ проходит через точку B. Уровень срабатывания равен 3. Создана копия данного приема, срабатывающая на уровне 7, а также версия приема, срабатывающая на уровне 3. В ней требуется, чтобы хотя бы одно из расстояний BC, CE, CD было известно, и хотя бы одно - не известно.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(BC) – касательная к окружность(AF) &
$B \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & $G \in$ прямая(CD) &
$G \in$ отрезок(BH) & $H \in$ окружность(AF) & актив($l(BG)$) & актив($l(BC)$) &
разныеточки(B, D) & разныеточки(B, H) $\rightarrow$ E – точка & $E \in$ окружность(AF)
& $\neg(D = E)$ & $E \in$ прямая(CD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие семь - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Каждое из расстояний BC, BG либо известно, либо имеет тип "неизв". Вторая точка E пересечения прямой CD с окружностью AF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 9.

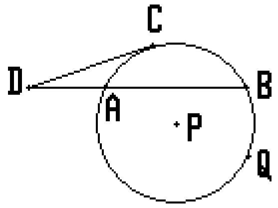
3. Касательная и секущая, проведенные из общей точки: длина перпендикуляра, опущенного из точки касания на секущую.



$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(AB)) & $D \in$ окружность(AB) &
прямая(AD) $\perp$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AC) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AC)
& актив($l(DE)$) $\rightarrow l(DE) = l(AB)\cos(\angle(DCA))$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Выражение для угла DCA имеет тип "определимо". Хотя бы одно из расстояний DE, AB не известно. Уровень срабатывания равен 4.

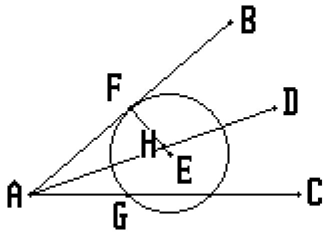
4. Точка пересечения касательной и секущей лежит вне внутренности круга.



$\forall_{ABCDPQ}(C \in$ окружность(PQ) & прямая(CD) – касательная к окружность(PQ) & $A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ) & $D \in$ прямая$(AB) \to \neg(D \in$ интервал$(AB)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

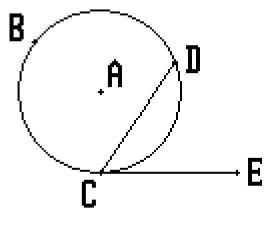
5. Если окружность касается одной стороны угла и пересекает другую, то биссектриса угла пересекает радиус, проведенный в точку касания.



$\forall_{ABCDEFGHP}($прямая(AB) – касательная к окружность(EP) & биссектриса$(BACD)$ & $G \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, G) & $F \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, F) & $F \in$ окружность$(EP) \to$ H – точка & $H \in$ отрезок(FE) & $H \in$ прямая(AD) & $\neg(A \in$ интервал$(DH))$ & актив$(\angle(FHA))$ & $l(EF) = l(FH) + l(EH))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Угол BAC известен, выражение для расстояния EF имеет тип "неизв". Прямая AD и расстояние AF уже рассматриваются в задаче. Общая точка H прямых EF и AD пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 8.

6. Выражение длины хорды через радиус окружности и угол между хордой и касательной.



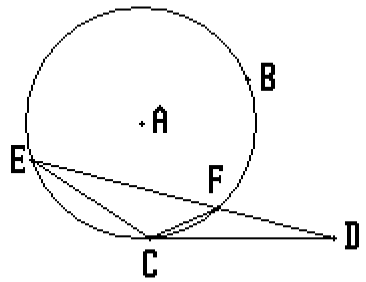
$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая$(AC) \to l(CD) = 2l(AC)\sin(\angle(DCE)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Угол DCE известен, выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Расстояние CD уже рассматривается в задаче. Не усматривается перпендикулярность прямых CD и CE. Уровень срабатывания равен 5. Созданы еще две версии данного приема:

(a) Расстояние AC известно, а выражение для угла DCE имеет тип "применимо". Расстояние CD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 8.

(b) Расстояние AC известно, выражение для угла DCE имеет тип "существатом", а для расстояния CD - тип "определимо". Уровень срабатывания равен 9.

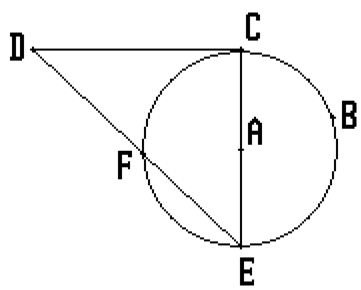
7. Длины касательной, секущей и смежных хорд.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & прямая$(AC) \perp$ прямая(CD) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(ED) &
актив$(l(CE))$ & актив$(l(CD))$ & разныеточки$(E, F) \rightarrow$
$l(DF)l(CE) = l(CD)l(CF))$

Первые восемь антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Среди расстояний DF, CE, CD, CF имеется три известных, а оставшееся - не известно, но уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 9. В ней требования на расстояния DF, CE, CD, CF отброшены.

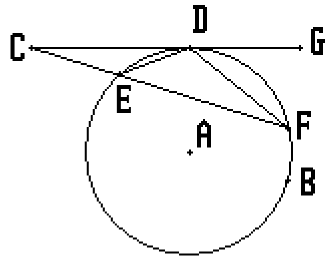
8. Касательная и секущая, опирающиеся на диаметр.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & актив(окружность(AB)) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB)
& $F \in$ отрезок(DE) & разныеточки(E, F) & $E \in$ прямая(CA) &
$pl(DF) = ql(EF) \rightarrow pl(CD)^2 = ql(CE)^2)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается проверочным оператором, последний - синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния DF и EF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

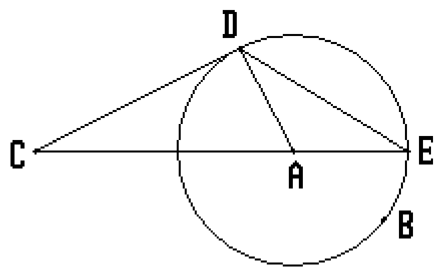
9. Теорема синусов для треугольника, образованного отрезками касательной, секущей и хордой.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(GCF))$ & $D \in$ прямая(CG) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CE) & разныеточки(E, F) & актив$(l(CE))$ & актив$(l(CD)) \rightarrow$ $l(DE)^2 = 2l(CE)l(AD)\sin(\angle(GCF))$ & $(\neg(C \in$ интервал$(DG))$ $\vee$ $C \in$ отрезок(DG) & $\angle(DCF) = \pi - \angle(GCF)))$

Все антецеденты, кроме восьмого, выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в четвертом антецеденте. Восьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния CE и CD, а также угол GCF известны. Выражение для расстояния AE имеет тип "неизв". Не усматривается расположение точки C по отношению к точкам D, G. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 7.

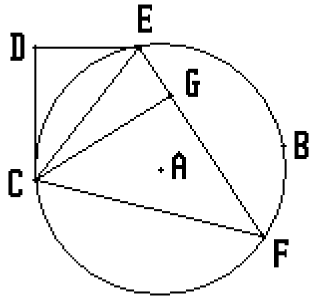
10. Касательная и секущая, проходящая через диаметр.



$\forall_{ABCDEab}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $A \in$ отрезок(CE) & разныеточки(C, D) & $al(DE) = bl(CD) \rightarrow a\cos(2\angle(CED)) = b\sin(\angle(CED)))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором, шестой - пакетным синтезатором. Угол CED уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 6.

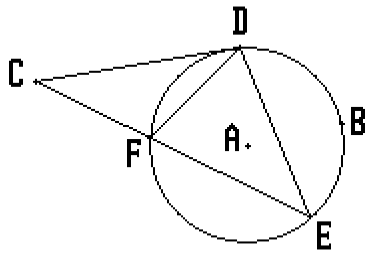
11. Усмотрение подобных прямоугольных треугольников, возникающих при проведении перпендикуляров к касательной и хорде.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(CD) $\perp$ прямая(AC) & $C \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая(CG) $\perp$ прямая(EF)
& $G \in$ прямая(EF) & прямая(DE) $\perp$ прямая(CD) $\rightarrow$
$l(DE)l(CF) = l(CE)l(CG)$)

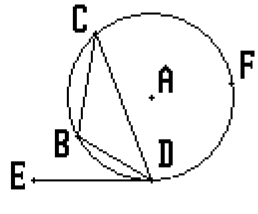
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояния DE и CG, а также прямые CF и CE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 8.

12. Усмотрение касательной из равенства углов, связанных с секущей.



$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & $F \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CE) &
разныеточки(E, F) & разныеточки(C, F) & $\angle(CFD) = \angle(CDE)$ &
актив(прямая(CD)) & актив(прямая(CE)) $\rightarrow$ прямая(CD) – касательная к
окружность(AB))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, восьмой - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не усматриваются наличие еще одной общей точки прямой CD с окружностью AB, а также перпендикулярность прямых CD и AD. Уровень срабатывания равен 4.

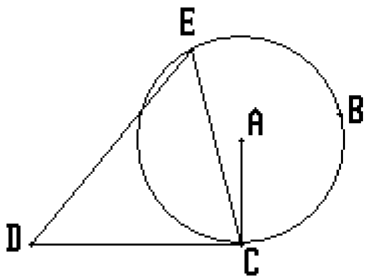


$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AF)) & $C \in$ окружность(AF) &
$B \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & разныестороны(C, E,

прямая(BD)) & актив($\angle(BCD)$) & актив($\angle(BDE)$) & $\angle(BCD) = \angle(BDE)$ & разныеточки(B, D) $\rightarrow$ прямая(DE) $\perp$ прямая(AD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Пятый и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Восьмой антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные антецеденты - указателем "усм". Не усматривается наличие еще одной общей точки прямой DE с окружностью AF. Уровень срабатывания равен 7.

13. Ввод в рассмотрение длины отрезка между точками пересечения и касания.

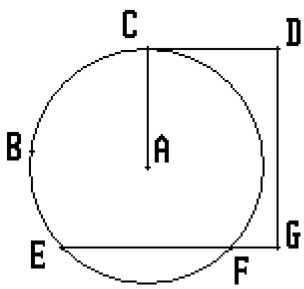


$\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & прямая(CD) $\perp$ прямая(AC) & $E \in$ окружность(AB) & актив($l(DE)$) & актив($l(CD)$) & актив($\angle(EDC)$) $\rightarrow$ актив($l(CE)$))

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором антецеденте. Расстояния DE, CD и угол CDE известны. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Вторая точка пересечения прямой DE с окружностью AB пока не введена. Уровень срабатывания равен 7.

Касательная и параллельная ей хорда

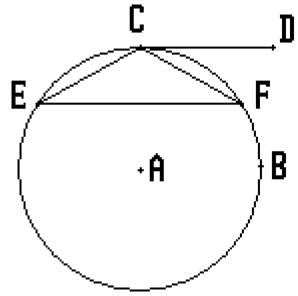
1. Расстояние между касательной и параллельной ей хордой.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & прямая(AC) $\perp$ прямая(CD) & прямая(CD) $\perp$ прямая(DG) & $G \in$ прямая(EF) & разныеточки(E, F) & прямая(CD) $\parallel$ прямая(EF) $\rightarrow 4l(DG)^2 + l(EF)^2 = 8l(DG)l(AB)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния DG, EF, AB уже рассматриваются в задаче, причем хотя бы одно из них не известно. Уровень срабатывания равен 7.

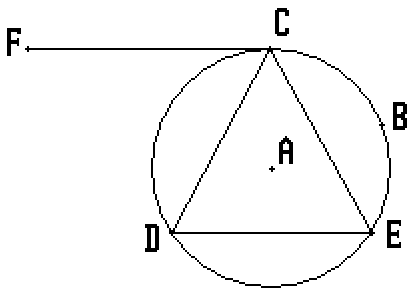
2. Если касательная параллельна хорде, то точка касания равноудалена от концов хорды.



$\forall_{ABCDEF}(E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) &
$C \in$ окружность(AB) & прямая(CD) – касательная к окружность(AB) &
прямая$(CD) \parallel$ прямая$(EF) \to l(CE) = l(CF))$

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние CE уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

3. Усмотрение касательной в прямой, параллельной хорде, концы которой равноудалены от общей точки прямой и окружности.

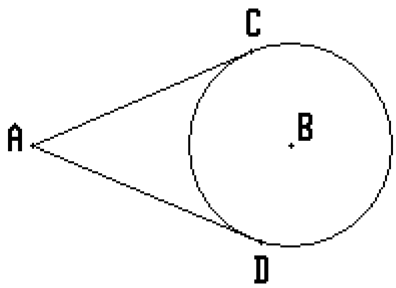


$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
$C \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(CE)$ & прямая$(CF) \parallel$ прямая(DE) &
разныеточки(C, D) & разныеточки$(D, E) \to$ прямая$(CF) \perp$ прямая$(AC))$

Точка привязки выбрана в четвертом антецеденте, выделенном указателем "равно". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

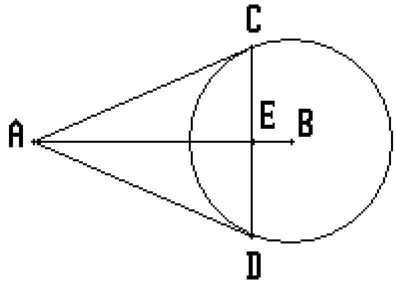
Две касательные к одной окружности

1. Две касательные к окружности, проведенные из общей точки.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AC) – касательная к окружность(BE) & прямая(AD) – касательная к окружность(BE) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность$(BE) \rightarrow l(AC) = l(AD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1. Создана версия данного приема, срабатывающая на уровне 6. В ней требуется, чтобы расстояние AC уже рассматривалось в задаче, а выражение для расстояния AD имело тип "существатом".

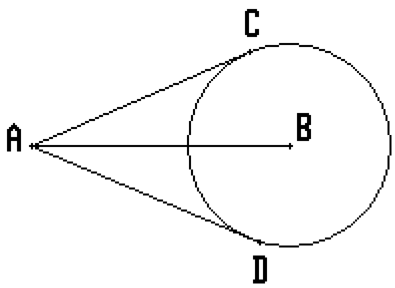


$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AC) – касательная к окружность(BF) & прямая(AD) – касательная к окружность(BF) & $C \in$ окружность(BF) & $D \in$ окружность(BF) & актив(прямая(CD)) $\rightarrow$ прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & E – точка & $E \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(CD))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Не усматривается перпендикулярность прямых CD и AB. Не введена в рассмотрение общая точка E этих прямых, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.

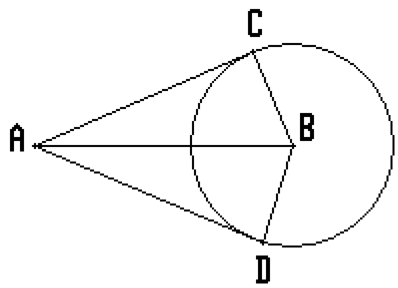
$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AC) – касательная к окружность(BF) & прямая(AD) – касательная к окружность(BF) & $C \in$ окружность(BF) & $D \in$ окружность(BF) & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ прямая$(CD) \perp$ прямая(AB))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AC) – касательная к окружность(BE) & прямая(AD) – касательная к окружность(BE) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность$(BE) \rightarrow$ актив(прямая(AB)))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Прямая AB в задаче пока не рассматривается. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AC) – касательная к окружность(BE) & прямая(AD) – касательная к окружность(BE) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность(BE) & актив$(\angle(CBD)) \rightarrow \angle(CBA) = \angle(ABD)$ & $2\angle(ABD) = \angle(CBD)$)

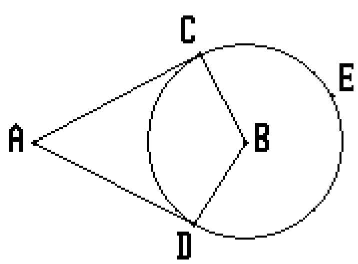
$\forall_{ABCDE}$(прямая(AC) – касательная к окружность(BE) & прямая(AD) – касательная к окружность(BE) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность(BE) & актив$(\angle(CAD)) \rightarrow \angle(CAB) = \angle(BAD)$ & $2\angle(BAD) = \angle(CAD)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 3 и 7.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & $C \in$ окружность(BE) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & $D \in$ окружность(BE) & разныеточки(C, D) & актив$(\angle(CAD)) \rightarrow \angle(CBD) + \angle(CAD) = \pi$)

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & $C \in$ окружность(BE) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & $D \in$ окружность(BE) & разныеточки(C, D) & актив$(\angle(CBD)) \rightarrow \angle(CBD) + \angle(CAD) = \pi$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В первом случае угол CAD известен, а угол CBD - не известен, но имеет тип "применимо". Во втором случае - угол CBD известен, а угол CAD - нет. Уровни срабатывания равны 4.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность$(BE) \rightarrow l(AC) = l(AD)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояния AC и AD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 6. Создана версия данного приема, срабатывающая на уровне 8. В ней требуется лишь, чтобы расстояние AC уже рассматривалось в задаче.

$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(CAD)$) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) & прямая(AD) $\perp$ прямая(BD) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность(BE) & разныеточки(C, D) $\rightarrow l(AD)\,\mathrm{tg}(\angle(CAD)/2) = l(BC)$)

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AD и BC выражены через численные параметры (известные либо не известные). Угол CAD не известен и встречается в одной из исходных посылок задачи. Уровень срабатывания равен 6. Созданы еще три версии данного приема:

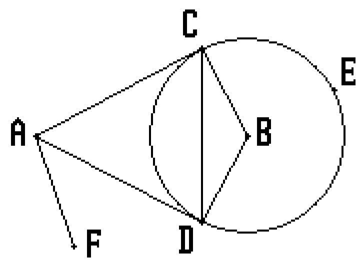
(a) Расстояния BC и AD известны, а угол CAD - нет. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 9.

(b) Одно из выражений для расстояний AD, BC и угла CAD имеет тип "неизв", а два других - известны. Уровень срабатывания равен 10.

(c) Расстояние BC уже рассматривается в задаче. Выражение для угла CAD имеет тип "неизв". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 14.

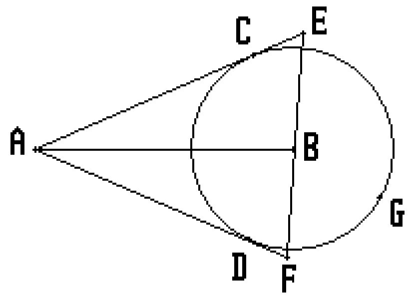
$\forall_{ABCDE}$(актив(окружность(BE) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) & прямая(AD) $\perp$ прямая(BD) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность(BE) & разныеточки(C, D) $\rightarrow l(CD) = 2l(BC)\cos(\angle(CAD)/2)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние BC известно, выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) & прямая(AD) $\perp$ прямая(BD) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность(BE) & актив($l(AF)$) & актив($l(CD)$) & актив($l(DF)$) $\rightarrow$ актив($\angle(CBD)$))

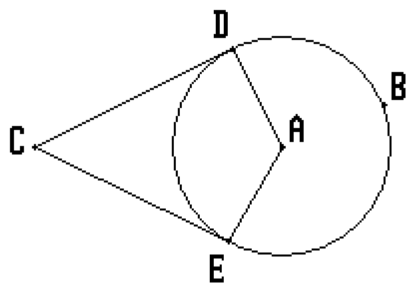
Антецеденты выделены указатеем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояние CD известно, выражение для расстояния AF имеет тип "неизв", причем угол CBD в задаче пока не рассматривается. Не усматривается принадлежность точки F прямой AC либо AD. Уровень срабатывания равен 8.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(AC) – касательная к окружность(BG) & прямая(AD) – касательная к окружность(BG) & $C \in$ окружность(BG) & $D \in$ окружность(BG) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AD) & $B \in$ прямая(EF) & однасторона$(C, D,$ прямая$(EF))$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(AD)) \to C \in$ отрезок(AE) $\vee$ $D \in$ отрезок(AF))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие пять - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается ни принадлежность точки C отрезку AE, ни принадлежность точки D отрезку AF. Выведенная дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 8.

2. Угол между касательными.



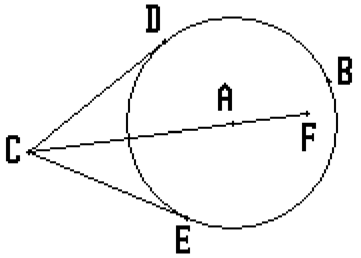
$\forall_{ABCDE}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) & разныеточки(D, E) & актив$(l(CD)) \to \angle(DCE) = 2\,\mathrm{arctg}(l(AD)/l(CD))$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AD и CD известны, выражение для угла DCE имеет тип "применимо". Уровень срабатывания равен 9.

$\forall_{ABCDE}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) & разныеточки(D, E) & актив$(l(CD)) \to l(AD) = l(CD)\,\mathrm{tg}(\angle(DCE)/2)$)

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые четыре - выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние CD известно. Выражение для угла DCE имеет тип "определимо", а для расстояния AD - тип "неизв". Уровень срабатывания равен 9.

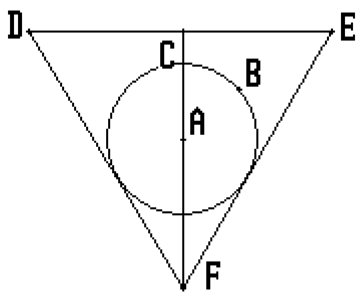
3. Биссектриса угла между двумя касательными, проведенными из общей точки.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) & разныеточки(D, E) & $\angle(DCF) = \angle(FCE)$ & актив$(\angle(DCF))$ & актив$(\angle(FCE))$ & разныестороны$(D, E,$ прямая$(CF)) \rightarrow A \in$ прямая$(CF))$

Первые четыре антецедента, а также седьмой и восьмой выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана во втором из них. Шестой антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый и девятый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 6.

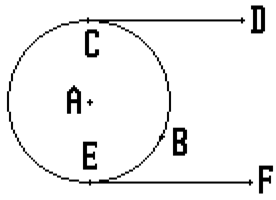
4. Две касательные к окружности, проведенные из точек, симметричных относительно прямой, проходящей через центр окружности.



$\forall_{ABCDEF}($прямая(DF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая$(AC) \perp$ прямая(DE) & $l(CD) = l(EC)$ & разныеточки$(D, E) \rightarrow F \in$ прямая(AC) & $l(DF) = l(EF))$

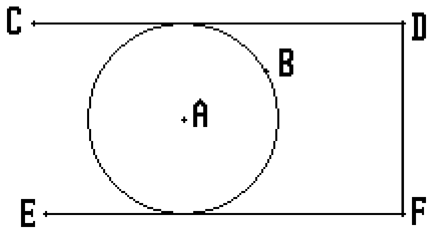
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий и четвертый - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается принадлежность точки F прямой AC. Уровень срабатывания равен 5.

5. Две параллельные касательные.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AC) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AE) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(EF) & разныеточки(C, E) & $A \in$ плоскость$(CDE) \rightarrow$
$A \in$ отрезок(CE) & $l(CE) = 2l(AC))$

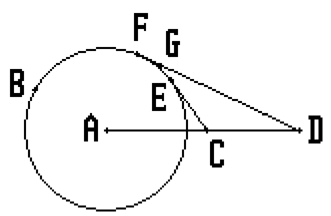
Все антецеденты, кроме шестого, выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана во втором антецеденте. Шестой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCDEF}($прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(EF) &
прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & разныепрямые$($прямая$(CD),$ прямая$(EF)) \rightarrow$
$l(DF) = 2l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние DF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 8.

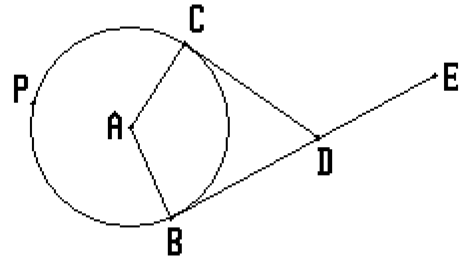
6. Две касательные к окружности, проведенные из точек, лежащих на прямой, проходящей через центр окружности.



$\forall_{ABCDEFG}($прямая(DF) – касательная к окружность(AB) & прямая(CE) – касательная к окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $C \in$ отрезок(AD) & $G \in$ прямая(CE) & $G \in$ прямая(DF) & $F \in$ окружность(AB) &
однасторона$(E, F,$ прямая$(AC)) \rightarrow E \in$ отрезок$(CG))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие пять - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

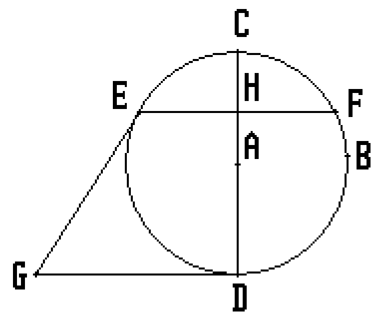
7. Соотношение для длины отрезка касательной, радиуса окружности и угла, смежного с углом между касательными.



$\forall_{ABCDEP}$(актив(окружность(AP)) & $C \in$ окружность(AP) & $B \in$ окружность(AP) & прямая(CD) $\perp$ прямая(AC) & прямая(BD) $\perp$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок(BE) & актив($\angle(CDE)$) & актив($l(CD)$) & разныепрямые(прямая(BD), прямая(CD)) $\rightarrow l(CD) = l(AC)\,\mathrm{tg}(\angle(CDE)/2)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие семь - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние AC уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

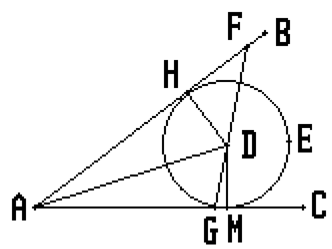
8. Две касательные и хорда, перпендикулярная диаметру.



$\forall_{ABCDEFGH}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая(GE) – касательная к окружность(AB) & прямая(GD) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) $\perp$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(EF) & разныеточки(D, E) $\rightarrow l(CH)l(DG)^2 = l(AB)^2 l(DH)$)

Шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния CH, DG, AB и DH уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 10.

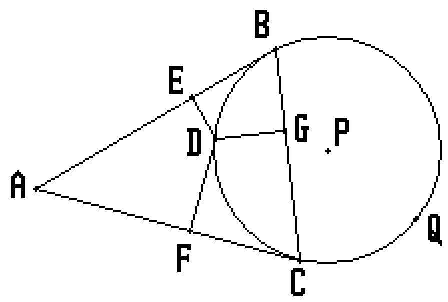
9. Усмотрение биссектрисы угла, образованного касательными.



$\forall_{ABCDEFGHM}(D \in$ отрезок(FG) & $H \in$ окружность(DE) & $H \in$ прямая(AB) & прямая$(AB) \perp$ прямая(DH) & $F \in$ прямая(AB) & $M \in$ окружность(DE) & $M \in$ прямая(AC) & прямая$(AC) \perp$ прямая(DM) & $G \in$ прямая(AC) & актив$(l(DF))$ & актив$(l(DG))$ & актив(прямая(AD)) & точкалуча(A, B, H) & точкалуча(A, C, M) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow$ биссектриса$(BACD)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Усматривается пропорциональность расстояний DF и DG, но не усматривается их равенство. Хотя бы одно из расстояний AF, AG не известно. Уровень срабатывания равен 6.

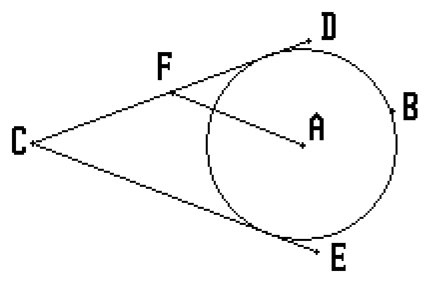
10. Перпендикуляры, проведенные из точки окружности к касательным и к отрезку между точками касания.



$\forall_{ABCDEFGPQ}(B \in$ окружность(PQ) & прямая$(AB) \perp$ прямая(BP) & $C \in$ окружность(PQ) & прямая$(AC) \perp$ прямая(CP) & разныеточки(B, C) & $D \in$ окружность(PQ) & разныеточки(B, D) & разныеточки(C, D) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & прямая$(DG) \perp$ прямая(BC) & $G \in$ прямая(BC) $\rightarrow$ $l(DG)^2 = l(ED)l(DF)$ & $\sin(\angle(EDG)) = \sin(\angle(EDF)/2)$ & $\angle(EDG) = \angle(FDG)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Пятый, седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

11. Две касательные, проведенные из общей точки, и прямая, проходящая через центр параллельно касательной.

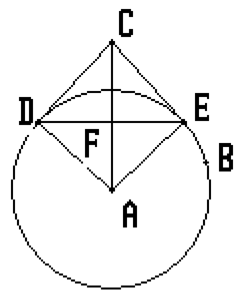


$\forall_{ABCDEF}$(актив(окружность(AB)) & прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая(CE) – касательная к окружность(AB) &

разныепрямые(прямая(CD), прямая(CE)) & $F \in$ прямая(CD) &
прямая$(AF) \parallel$ прямая$(CE) \to l(CF) = l(AF)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Если усматривается перпендикулярность прямых CD и CE, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.

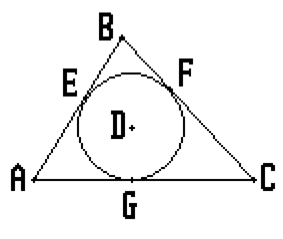
12. Продолжение до центра окружности перпендикуляра к хорде, образованной концами касательных, проведенного из общей точки касательных.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) & прямая$(CF) \perp$
прямая(DE) & актив(прямая(DE)) & актив$(l(CF))$ & разныеточки(D, E) &
актив(окружность(AB)) & $F \in$ прямая$(DE) \to F \in$ отрезок(AC) &
$l(AC) = l(CF) + l(AF)$)

Девятый антецедент идентифицируется с посылкой, восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в пятом из них. Выражение для расстояния CF имеет тип "неизв". Через точку A проведена прямая, параллельная прямой CF. Уровень срабатывания равен 6.

13. Усмотрение принадлежности точки касания отрезку, возникающему при пересечении с двумя другими касательными.

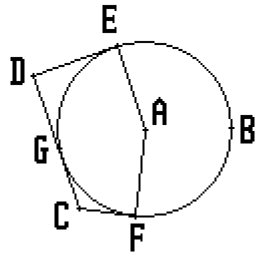


$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(AB) – асательная к окружность(DH) & прямая(BC) – касательная к окружность(DH) & прямая(AC) – касательная к
окружность(DH) & $E \in$ окружность(DH) & $F \in$ окружность(DH) &
$G \in$ окружность(DH) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(BC) &
$G \in$ прямая(AC) & разныестороны$(E, F$, прямая$(DG)) \to G \in$ отрезок(AC))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

Три касательные к одной окружности

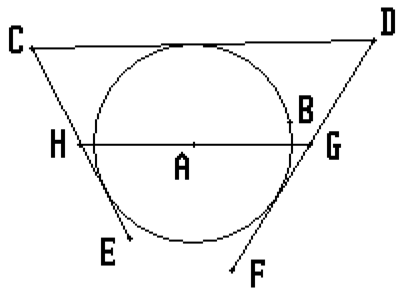
1. Суммы длин отрезков касательных.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая(DE) – касательная к окружность(AB) & прямая(CF) – касательная к окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныепрямые(прямая(CD), прямая(DE)) & разныепрямые(прямая(CD), прямая(CF)) & $G \in$ отрезок(CD) & $G \in$ окружность$(AB) \rightarrow$ $l(CD) = l(DE) + l(CF)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, шестой и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояние CD известно. Уровень срабатывания равен 7. Созданы еще две версии приема. В первой требуется, чтоюы выражение для расстояния CD имело тип "неизв". Ее уровень срабатывания тоже равен 7. Во второй версии требуется лишь, чтобы расстояние CD уже рассматривалось в задаче. Ее уровень срабатывания равен 8.

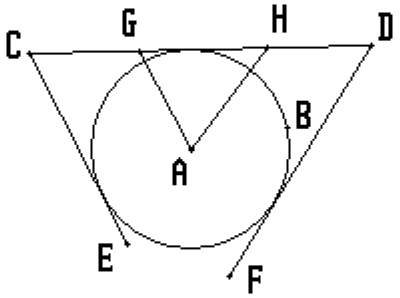
2. Прямая, проведенная через центр параллельно средней касательной.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & прямая(CE) – касательная к окружность(AB) & прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая(DF) – касательная к окружность(AB) & $G \in$ прямая(DF) & $A \in$ прямая(GH) & $H \in$ прямая(CE) & прямая$(GH) \parallel$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(CE), прямая(CD)) & разныепрямые(прямая(CD), прямая(DF)) & разныеточки$(C, D) \rightarrow A \in$ отрезок(GH))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие семь - выделены указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

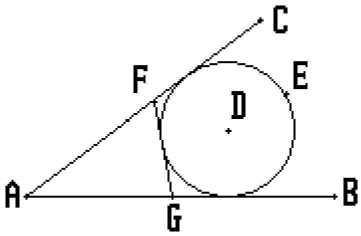
3. Проведение из центра лучей, параллельных боковым касательным.



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AB)) & прямая(CE) – касательная к окружность(AB) & прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая(DF) – касательная к окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & прямая(AG) $\parallel$ прямая(CE) & $H \in$ прямая(CD) & прямая(AH) $\parallel$ прямая(DF) & разныепрямые(прямая(CE), прямая(CD)) & разныепрямые(прямая(CD), прямая(DF)) & разныеточки(C, D) & актив($l(CD)$) & актив($l(GH)$) $\rightarrow$ $l(CD) = l(CG) + l(GH) + l(DH)$ & $G \in$ отрезок(CD) & $H \in$ отрезок(DG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Девятый, десятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

4. Усмотрение вневписанной окружности.

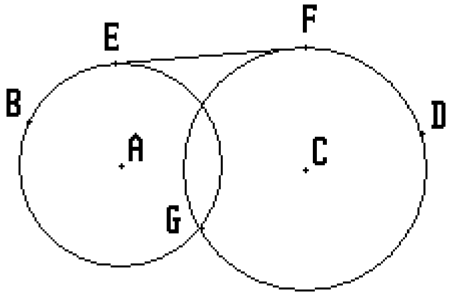


$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(FG) – касательная к окружность(DE) & $F \in$ отрезок(AC) & $G \in$ отрезок(AB) & луч(FC) – касательная к окружность(DE) & луч(GB) – касательная к окружность(DE) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & разныеточки(A, F) & разныеточки(A, G) $\rightarrow$ разныестороны(A, D, прямая(FG)))

Первый, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", три последних - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

Общая касательная к двум окружностям

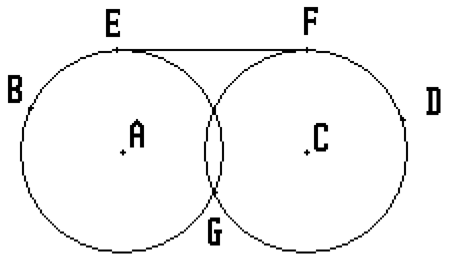
1. Точки касания общей касательной к двум пересекающимся окружностям лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их центры.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) & разныеточки(A, C) & разныеточки(E, F) $\rightarrow$ однасторона(E, F, прямая(AC)) & однасторона(A, C, прямая(EF)))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматриваются ни параллельность прямых EF и AC, ни равенство радиусов окружностей. Уровень срабатывания равен 3.

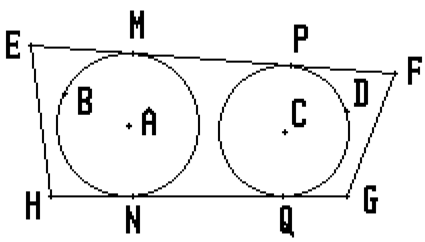
2. Точки касания общей касательной к двум пересекающимся окружностям равных радиусов лежат на прямой, параллельной прямой, соединяющей центры.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) & разныеточки(A, C) & $l(AB) = l(CD)$ & разныеточки(E, F) $\rightarrow$ прямая(AC) $\parallel$ прямая(EF) & $l(EF) = l(AC)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие четыре - выделены указателем "усм". Восьмой антецедент выделен указателем "идентификатор", седьмой и девятый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

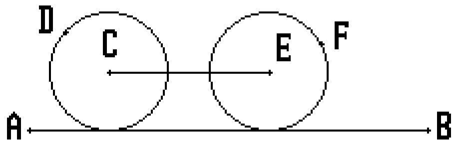
3. Центры двух окружностей, касающихся противоположных сторон выпуклого четырехугольника, лежат по одну сторону от каждой из этих сторон.



$\forall_{ABCDEFGHPQMN}$(четырехугольник$(EFGH)$ & $M \in$ отрезок(EF) & $M \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AM) & $N \in$ отрезок(GH) & $N \in$ окружность(AB) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AN) & $P \in$ отрезок(EF) & $P \in$ окружность(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CP) & $Q \in$ отрезок(GH) & $Q \in$ окружность(CD) & прямая$(GH) \perp$ прямая$(CQ) \rightarrow$ однасторона$(A, C,$ прямая$(EF))$ & однасторона$(A, C,$ прямая$(GH)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

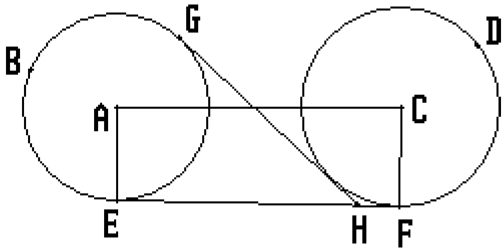
4. Две окружности, имеющие равные радиусы, касаются одной и той же прямой и лежат от нее по одну сторону. Тогда линия центров параллельна прямой.



$\forall_{ABCDEF}(l(CD) = l(EF)$ & актив(окружность$(CD))$ & прямая(AB) – касательная к окружность(CD) & прямая(AB) – касательная к окружность(EF) & однасторона$(C, E,$ прямая$(AB))$ & разныеточки$(C, E) \rightarrow$ прямая$(CE) \parallel$ прямая$(AB))$

Первый антецедент, выделенный указателем "равно", идентифицируется с одной либо двумя посылками. Следующие три антецедента выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

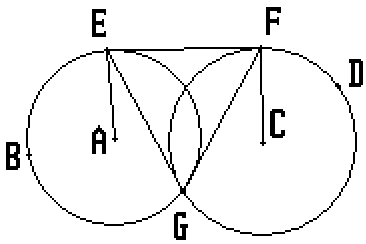
5. Точка пересечения внешней и внутренней касательных.



$\forall_{ABCDEFGH}(E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AE) & прямая$(CF) \perp$ прямая(EF) & однасторона$(A, C,$ прямая$(EF))$ & $G \in$ окружность(AB) & $H \in$ прямая(EF) & прямая(GH) – касательная к окружность(CD) & прямая$(GH) \perp$ прямая(AG) & разныестороны$(A, C,$ прямая$(GH)) \rightarrow$ $H \in$ отрезок(EF) & $l(HE)l(HF) = l(AB)l(CD))$

Восьмой антецедент идентифицируется с посылкой. Пятый и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

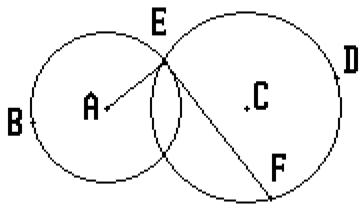
6. Хорды, проведенные из точки пересечения двух окружностей к точкам касания их с общей касательной.



$\forall_{ABCDEFG}(G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) &
прямая$(EF) \perp$ прямая(AE) & $E \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CF) &
актив$(\angle(EGF)) \rightarrow 4l(AB)l(CD)(\sin(\angle(EGF)))^2 = l(EF)^2)$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Одно из выражений для расстояний AB, CD, EF и угла EGF не известно, а три остальные - известны. Уровень срабатывания равен 8.

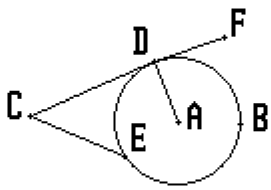
Усмотрение различия центров двух пересекающихся окружностей, если касательная к одной из них является секущей для другой



$\forall_{ABCDE}(E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) &
прямая$(AE) \perp$ прямая(EF) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки$(E, F) \rightarrow$
$\neg(A = C))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Разбор случаев для расположения точки касания на стороне угла либо на ее продолжении



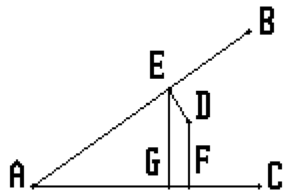
$\forall_{ABCDEF}($прямая$(CF) \perp$ прямая(AD) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(FCE))$
& $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ прямая$(CF) \rightarrow \neg(C \in$ интервал$(DF)) \ \vee$
$C \in$ интервал(DF) & актив$(\angle(DCE)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Угол FCE известен. Уровень срабатывания равен 11.

3.43 Приемы, связанные с символом "Угол"

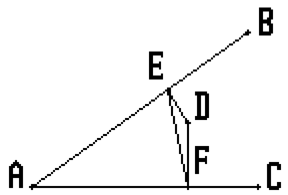
Выражение "Угол(A B C)" обозначает угол с вершиной в точке B, сторонами которого служат лучи BA и BC. Если эти лучи лежат на одной прямой, то выбор полуплоскости происходит некоторым не уточняемым образом.

Точка внутри угла, из которой проведены перпендикуляры к сторонам



$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ прямая(AB) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AC) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & актив(прямая(DE)) & актив(прямая(DF)) & актив(угол(BAC)) $\rightarrow$ $G -$ точка & $G \in$ прямая(AC) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AC) & $l(EG) = l(DF) + l(DE)\cos(\angle(BAC)))$

Все антецеденты, кроме пятого и шестого, выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Каждое из выражений для угла BAC и расстояний DE, DF либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "неизв". Не усматривается принадлежность точки D прямым AB, AC. В задаче не рассматривается окружность с центром D, проходящая через точки E, F. Не рассматривается многоугольник, одной из вершин которого служит точка A, причем D - внутренняя его точка. Основание G перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую AC, пока не введено, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 9.



$\forall_{ABCDEF}$(актив$(\angle(BAC))$ & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AC) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & актив(прямая(DE)) & актив(прямая(DF)) & разныеточки(D, E) & разныеточки(D, F) $\rightarrow$ $\angle(EDF) + \angle(BAC) = \pi)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Шестой, седьмой, десятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния DE, DF и угол BAC известны. Либо прямая EF, либо прямая AD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 9.

Принадлежность точки внутренности угла

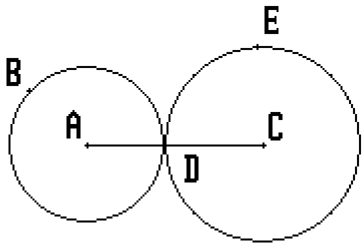
$\forall_{ABCD}(A \in$ внутренность(Угол$(BCD)) \leftrightarrow A \in$ Угол(BCD) & $\neg(A \in$ прямая$(BC))$ & $\neg(A \in$ прямая$(CD)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки. Уровень срабатывания равен 2.

3.44 Приемы, связанные с символом "внешкасаются"

Утверждение "внешкасаются(A B)" означает, что окружности A и B, либо шары или сферы A и B касаются друг друга внешним образом.

Точка касания уже введена в рассмотрение



$\forall_{ABCDE}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CE)) & $D \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность$(CE) \rightarrow D \in$ отрезок(AC) & $l(AC) = l(AD) + l(DC))$

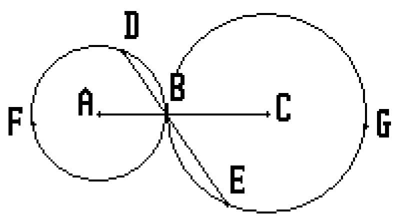
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

Ввод в рассмотрение точки касания

$\forall_{ABCDE}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CE)) $\rightarrow D -$ точка & $D \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(CE) & $D \in$ отрезок(AC) & $l(AC) = l(AD) + l(DC))$

Чертеж прежний. Антецедент идентифицируется с посылкой. Общая точка D двух окружностей пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 2.

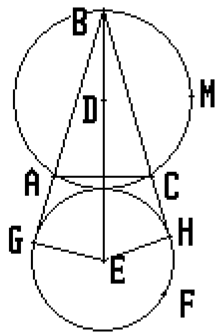
Усмотрение принадлежности общей точки двух касающихся внешним образом окружностей отрезку общей секущей, проходящей через точку касания



$\forall_{ABCDEFG}$(актив(окружность(AF)) & $B \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(CG) & $B \in$ отрезок(AC) & $B \in$ прямая(DE) & $D \in$ окружность(AF) & $E \in$ окружность(CG) $\rightarrow B \in$ отрезок(DE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Внешнее касание двух окружностей, одна из которых описана около равнобедренного треугольника, а другая - вписана в угол при вершине этого треугольника

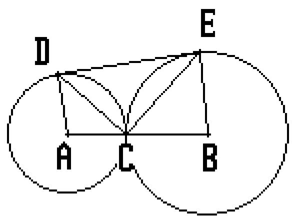


$\forall_{ABCDEFGHM}$(окружность(DM)описана около фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & внешкасаются(окружность(EF), окружность(DM)) & $G \in$ прямая(AB) & прямая(AB) $\perp$ прямая(GE) & $G \in$ окружность(EF) & $H \in$ прямая(BC) & прямая(EH) $\perp$ прямая(BC) & $H \in$ окружность(EF) $\rightarrow D \in$ отрезок(BE))

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

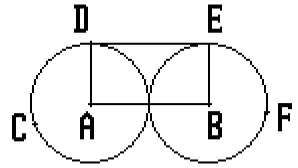
Общая касательная к двум касающимся внешним образом окружностям

1. Общая касательная к двум касающимся внешним образом окружностям.



$\forall_{ABCDE}$(внешкасаются(окружность(AC), окружность(BC)) & прямая(DE) – касательная к окружность(AC) & прямая(DE) – касательная к окружность(BC) & $D \in$ окружность(AC) & $E \in$ окружность(BC) & разныеточки(C, D) $\rightarrow$ прямая(CD) $\perp$ прямая(CE))

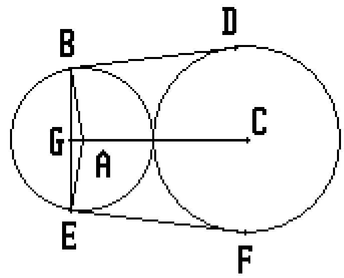
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прямые CD и CE уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEF}$(внешкасаются(окружность(AC), окружность(BF)) & прямая(DE) – касательная к окружность(AC) & прямая(DE) – касательная к окружность(BF) & однасторона$(A, B,$ прямая$(DE))$ & $l(AC) = l(BF) \to$ прямая$(DE) \parallel$ прямая$(AB))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Прямая AB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

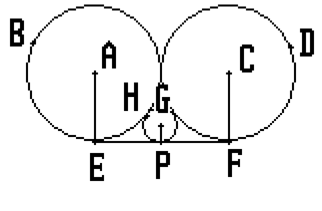
2. Две общие касательные к двум касающимся внешним образом окружностям.



$\forall_{ABCDEFG}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & прямая(BD)– касательная к окружность(AB) & прямая(BD) – касательная к окружность(CD) & прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныепрямые(прямая(BD), прямая(EF)) $\to$ прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & G–точка & $G \in$ отрезок(BE) & $G \in$ прямая(AC) & $l(BG) = l(GE))$

Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками, шестой и седьмой - выделены указателем "усм". Восьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прямые BE и AC уже рассматриваются в задаче, причем их общая точка G пока не введена. Прием вводит эту точку. Уровни его срабатывания равны 3 и 6.

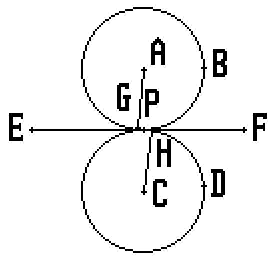
3. Окружность, касающаяся внешним образом двух касающхся внешним образом окружностей, а также их общей касательной.



$\forall_{ABCDEFGHP}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & внешкасаются(окружность(GH), окружность(AB)) & внешкасаются(окружность(GH), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AE) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CF) & $P \in$ окружность(GH) & $P \in$ прямая(EF) & $P \in$ отрезок$(EF) \to l(AB)/l(GH) = (\sqrt{l(AB)/l(CD)} + 1)^2)$

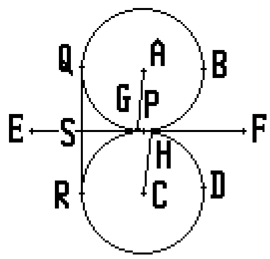
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

4. Отождествление точки касания двух окружностей с точкой касания их общей внутренней касательной.



$\forall_{ABCDEFGHP}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(EF) & прямая$(AG) \perp$ прямая(EF) & $H \in$ окружность(CD) & $H \in$ прямая(EF) & прямая$(CH) \perp$ прямая(EF) & $P \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(CD) & разныестороны$(A, C,$ прямая$(EF)) \to G = P$ & $H = P)$

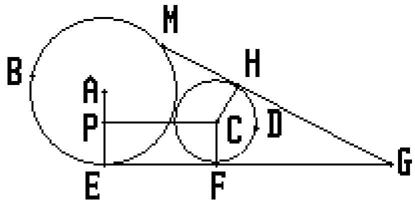
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFGHPQRS}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(EF) & прямая$(AG) \perp$ прямая(EF) & $H \in$ прямая(EF) & прямая$(CH) \perp$ прямая(EF) & $P \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(CD) & $Q \in$ окружность(AB) & $R \in$ окружность(CD) & прямая$(AQ) \perp$ прямая(QR) & прямая$(CR) \perp$ прямая(QR) & $S \in$ отрезок(QR) & $S \in$ прямая(EF) & разныепрямые(прямая(QR), прямая(EF)) & $H \in$ окружность$(CD) \to G = P$ & $H = P)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятнадцатый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

5. Общая касательная к двум касающимся внешним образом окружностям, а также касательная к одной из них, пересекающая другую.

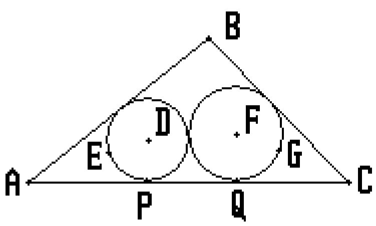


$\forall_{ABCDEFGHMP}$(прямая$(AE) \perp$ прямая(GE) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CF) \perp$ прямая(GE) & $F \in$ прямая(EG) & $F \in$ окружность(CD) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & прямая$(CH) \perp$ прямая(MG) & $H \in$ окружность(CD) & $H \in$ прямая(MG) & $M \in$ окружность(AB) & $H \in$ отрезок(MG) & разныепрямые(прямая(GE), прямая(MG)) & точкалуча(G, E, F) & точкалуча$(G, H, M) \to F \in$ отрезок(GE) & $P -$ точка & $P \in$ отрезок(AE) & прямая$(CP) \perp$ прямая(AE) & $l(AP) = l(AE) - l(CD)$ & $l(CP) + l(FG) = l(EG)$)

$\forall_{ABCDEFGHMP}$(прямая$(AE) \perp$ прямая(GE) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CF) \perp$ прямая(GE) & $F \in$ прямая(EG) & $F \in$ окружность(CD) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & прямая$(CH) \perp$ прямая(MG) & $H \in$ окружность(CD) & $H \in$ прямая(MG) & $M \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(GE) & разныепрямые(прямая(GE), прямая(MG)) & точкалуча(G, E, F) & точкалуча$(G, H, M) \to H \in$ отрезок(MG) & $P -$ точка & $P \in$ отрезок(AE) & прямая$(CP) \perp$ прямая(AE) & $l(AP) = l(AE) - l(CD)$ & $l(CP) + l(FG) = l(EG)$)

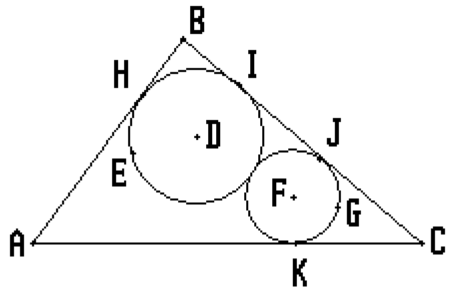
Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, двенадцатый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AE и CD выражены через численные параметры. Основание P опущенного из точки C на прямую AE перпендикуляра пока не введено, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 6.

6. Две касающиеся внешним образом окружности, вписанные в два угла треугольника.



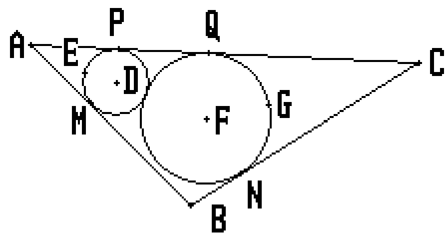
$\forall_{ABCDEFGPQ}$(внешкасаются(окружность(DE), окружность(FG)) & окружность(DE)вписана в Угол(BAC) & окружность(FG)вписана в Угол(ACB) & $P \in$ окружность(DE) & $P \in$ прямая(AC) & $Q \in$ окружность(FG) & $Q \in$ прямая$(AC) \to P \in$ отрезок(AC) & $Q \in$ отрезок(CP) & однасторона(D, F, прямая(AC)))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFGHIJK}$(внешкасаются(окружность(DE), окружность(FG)) & $H \in$ отрезок(AB) & $H \in$ окружность(DE) & прямая$(DH) \perp$ прямая(AB) & $I \in$ окружность(DE) & $I \in$ отрезок(BC) & прямая$(DI) \perp$ прямая(BC) & $J \in$ отрезок(BC) & $J \in$ окружность(FG) & прямая$(FJ) \perp$ прямая(BC) & $K \in$ прямая(AC) & $K \in$ окружность(FG) & прямая$(FK) \perp$ прямая(AC) & $0 \leq l(FG) - l(DE)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) & разныепрямые(прямая(BC), прямая(AC)) $\rightarrow$ круг$(DE) \subseteq$ фигура(ABC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последние три - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не введена общая точка окружности DE и прямой AC. Уровень срабатывания равен 3.



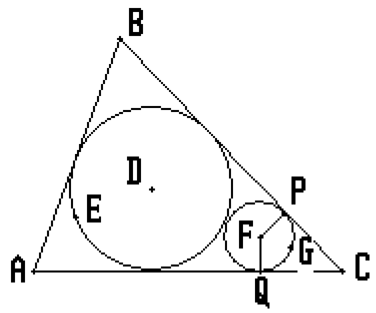
$\forall_{ABCDEFGMNPQ}$(внешкасаются(окружность(DE), окружность(FG)) & $M \in$ отрезок(AB) & $N \in$ отрезок(BC) & $M \in$ окружность(DE) & $N \in$ окружность(FG) & прямая$(AB) \perp$ прямая(DM) & прямая$(FN) \perp$ прямая(BC) & $P \in$ отрезок(AC) & $Q \in$ отрезок(AC) & прямая$(DP) \perp$ прямая(AC) & прямая$(FQ) \perp$ прямая(AC) & $P \in$ окружность(DE) & $Q \in$ окружность(FG) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) $\rightarrow$ $P \in$ отрезок(AQ) & $Q \in$ отрезок(PC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFPQ}$(внешкасаются(окружность(DE), окружность(PQ)) & окружность(DE)вписана в Угол(BAC) & окружность(PQ)вписана в

Угол(ACB) & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая$(CP) \rightarrow D \in$ отрезок(AF) & $P \in$ отрезок$(CF))$

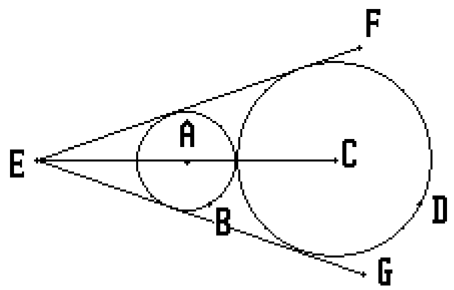
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & внешкасаются(окружность(DE), окружность(FG)) & $P \in$ отрезок(BC) & $P \in$ окружность(FG) & прямая$(FP) \perp$ прямая(BC) & $Q \in$ окружность(FG) & $Q \in$ отрезок(AC) & прямая$(FQ) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow F \in$ отрезок$(CD))$

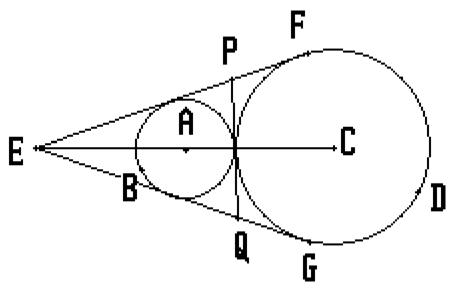
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

7. Две касающиеся внешним образом окружности, вписанные в угол.



$\forall_{ABCDEFG}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & окружность(AB)вписана в Угол(FEG) & окружность(CD)вписана в Угол(FEG) & $0 \leq l(CD) - l(AB) \rightarrow A \in$ отрезок$(CE))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(AB)вписана в фигура(EPQ) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & актив(прямая(EP)) & актив(прямая(EQ)) & актив(прямая(PQ)) & прямая(PQ) – касательная к окружность(CD) & прямая(EP) – касательная к окружность(CD) & прямая(EQ) – касательная к окружность(CD) & $P \in$ отрезок(EF) & $F \in$ окружность(CD) & $Q \in$ отрезок(EG) & $G \in$ окружность(CD) $\rightarrow$ $l(CD) - l(AB) = (l(AB) + l(CD)) \sin(\angle(PEQ)/2)$)

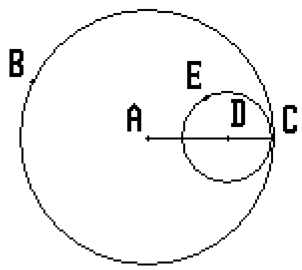
$\forall_{ABCDEFGPQ}$(окружность(AB)вписана в фигура(EPQ) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & актив(прямая(EP)) & актив(прямая(EQ)) & актив(прямая(PQ)) & прямая(PQ) – касательная к окружность(CD) & прямая(EP) – касательная к окружность(CD) & прямая(EQ) – касательная к окружность(CD) & $P \in$ отрезок(EF) & $F \in$ окружность(CD) & $Q \in$ отрезок(EG) & $G \in$ окружность(CD) $\rightarrow$ $A \in$ отрезок(CE))

Первые два антецедента, а также шестой, седьмой и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

3.45 Приемы, связанные с символом "внутркасаются"

Утверждение "внутркасаются(A B)" означает, что окружности A и B, либо шары или сферы A и B касаются друг друга внутренним образом.

Точка касания уже введена в рассмотрение



$\forall_{ABCDE}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(DE)) & $C \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(DE) $\rightarrow$ $D \in$ прямая(AC) & $\neg(C \in$ отрезок(AD)) & $l(AD) = |l(AB) - l(DE)|$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(DE)) & $C \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(DE) & $0 \le l(AB) - l(DE) \rightarrow$ $D \in$ отрезок(AC))

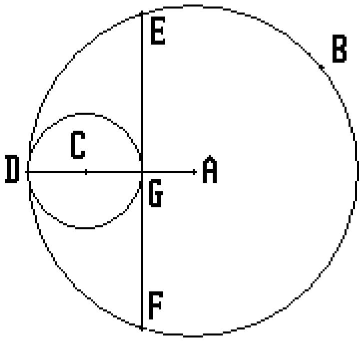
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Ввод в рассмотрение точки касания

$\forall_{ABCDE}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(DE)) $\to C -$ точка &
$C \in$ окружность(DE) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ прямая(AC) &
$\neg(C \in$ отрезок$(AD))$ & $l(AD) = |l(AB) - l(DE)|$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Общая точка C двух окружностей не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 2.

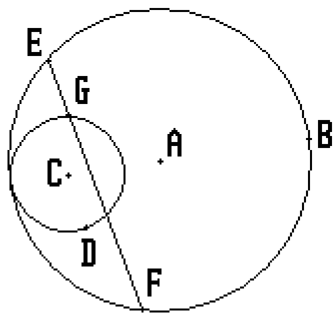
Касательная к меньшей окружности, перпендикулярная линии центров



$\forall_{ABCDEFG}$(внутркасаются(окружность(CD), окружность(AB)) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$ прямая(AC) &
разныеточки(E, F) & $G \in$ прямая(EF) & $G \in$ окружность(CD) &
$G \in$ прямая$(AC) \to \neg(C \in$ интервал(AG)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

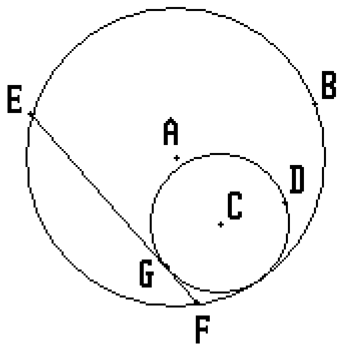
Точка пересечения меньшей окружности с хордой большей окружности



$\forall_{ABCDEFG}$(внутркасаются(окружность(CD), окружность(AB)) & $0 < l(AB) - l(CD)$
& $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) &
$G \in$ прямая(EF) & разныеточки$(E, F) \to G \in$ отрезок(EF))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

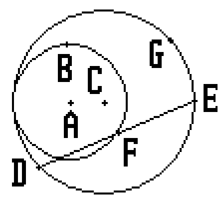
Окружность, касающаяся хорды другой окружности, имеет меньший радиус



$\forall_{ABCDEFG}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ отрезок(EF) &
$G \in$ окружность(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CG) & разныеточки$(E, F) \to$
$0 < l(AB) - l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

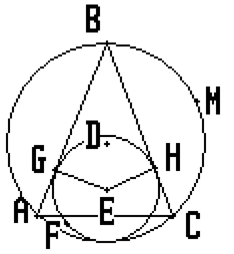
Усмотрение принадлежности точки пересечения меньшей окружности с прямой, проходящей через две точки на большей, отрезку между этими точками



$\forall_{ABCDEFG}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(CG)) & $0 < l(CG) - l(AB)$
& $F \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(CG) & $E \in$ окружность(CG) &
$F \in$ прямая(DE) & разныеточки$(D, E) \to F \in$ отрезок(DE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

Внутреннее касание двух окружностей, одна из которых описана около равнобедренного треугольника, а другая - вписана в угол при вершине этого треугольника



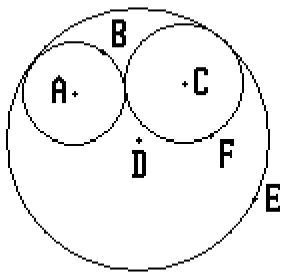
$\forall_{ABCDEFGHM}$(окружность(DM)описана около фигура(ABC) & $l(AB) = l(BC)$ & внутркасаются(окружность(EF), окружность(DM)) & $G \in$ прямая(AB) & прямая$(AB) \perp$ прямая(GE) & $G \in$ окружность(EF) & $H \in$ прямая(BC) & прямая$(EH) \perp$ прямая(BC) & $H \in$ окружность$(EF) \rightarrow D \in$ отрезок(BE) & $2l(DM) = l(BE) + l(EF)$ & $l(BE)\sin(\angle(ABC)/2) = l(EF)$)

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFGHM}$($l(AB) = l(BC)$ & $A \in$ окружность(DM) & $B \in$ окружность(DM) & $C \in$ окружность(DM) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & внутркасаются(окружность(EF), окружность(DM)) & $G \in$ прямая(AB) & прямая$(AB) \perp$ прямая(GE) & $G \in$ окружность(EF) & $H \in$ прямая(BC) & прямая$(EH) \perp$ прямая(BC) & $H \in$ окружность$(EF) \rightarrow D \in$ отрезок(BE) & $2l(DM) = l(BE) + l(EF)$ & $l(BE)\sin(\angle(ABC)/2) = l(EF)$)

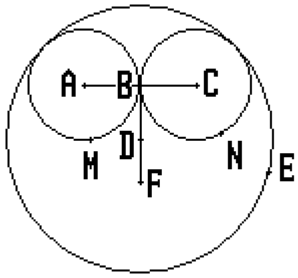
Седьмой антецедент идентифицируется с посылкой, пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Окружность, которой касаются внутренним образом две внешне касающиеся окружности



$\forall_{ABCDEF}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CF)) & внутркасаются(окружность(DE), окружность(AB)) & внутркасаются(окружность(DE), окружность(CF)) $\rightarrow 0 < l(DE) - l(AB)$ & $0 < l(DE) - l(CF)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEFMN}$(внешкасаются(окружность(AM), окружность(CN)) & внутркасаются(окружность(DE), окружность(AM)) & внутркасаются(окружность(DE), окружность(CN)) & $B \in$ окружность(AM) & $B \in$ окружность(CN) & $l(AB) = l(BC)$ & прямая$(BF) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow$ $D \in$ прямая(BF))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDEFMN}$(внешкасаются(окружность(AM), окружность(CN)) & внутркасаются(окружность(DE), окружность(AM)) & внутркасаются(окружность(DE), окружность(CN)) & $B \in$ окружность(AM) & $B \in$ окружность(CN) & $l(AB) = l(BC)$ & прямая$(BF) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow$ $F -$ точка & прямая$(BF) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BF))

Идентификация такая же, как в предыдущем случае. Через точку B не проведена прямая, перпендикулярная прямой AC. Для проведения такой прямой прием вводит вспомогательную точку F. Уровень срабатывания равен 7.

3.46 Приемы, связанные с символом "выпукло"

Утверждение "выпукло(A)" означает, что A есть выпуклое множество точек на плоскости либо в пространстве. Символ "выпукло" пока в задачах встречался редко, и приемов для него создано мало.

Использование точки пересечения диагоналей при доказательстве выпуклости четырехугольника

$\forall_{ABCDE}$(многоугольник$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(BD) \rightarrow$ выпукло(фигура$(ABCD)$) $\leftrightarrow E \in$ отрезок(AC) & $E \in$ отрезок(BD))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3. Если точка пересечения диагоналей пока не рассматривается, то она вводится следующим приемом:

$\forall_{ABCDE}$(многоугольник$(ABCD) \rightarrow E-$точка & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD))

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, у которой условие имеет вид "выпукло(фигура$(ABCD)$)". Дополнительно требуется, чтобы были известны координаты вершины A. Уровень срабатывания равен 4.

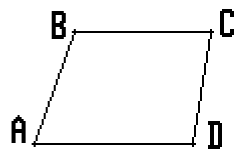
Проверочный оператор "усмвыпукло"

1. Выпуклость треугольника.

   $\forall_{ABC}$(выпукло(фигура(ABC)))

   Уровень срабатывания равен 1.

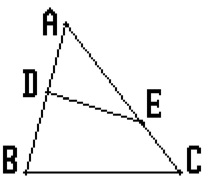
2. Выпуклость четырехугольника с параллельными противоположными сторонами.



   $\forall_{ABCD}$(прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) $\rightarrow$ выпукло(фигура($ABCD$)))

   Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

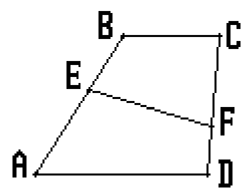
3. Выпуклость четырехугольника, отсеченного от треугольника отрезком прямой.



   $\forall_{ABCDE}$($D \in$ отрезок(AB) & $E \in$ отрезок(AC) $\rightarrow$ выпукло(фигура($BDEC$)))

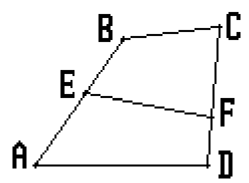
   Антецеденты выделены указателем "усм". Допускается циклическая перестановка вершин четырехугольника. Уровень срабатывания равен 2.

4. Выпуклость четырехугольника, отсеченного от выпуклого четырехугольника отрезком, проходящим через боковые стороны.



   $\forall_{ABCDEF}$(прямая(AD) $\parallel$ прямая(BC) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(CD) & однасторона($C, D,$ прямая(AB)) $\rightarrow$ выпукло(фигура($AEFD$)))

   Антецеденты выделены указателем "усм". Допускаются циклические перестановки вершин четырехугольника $AEFD$. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEF}$(четырехугольник($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок(CD) $\to$ выпукло(фигура($AEFD$)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Допускаются циклические перестановки вершин четырехугольника $ABCD$ и изменение их порядка на противоположный. При этом вершины четырехугольника $AEFD$ тоже могут циклически переставляться. Уровень срабатывания равен 2.

5. Выпуклость квадрата, прямоугольника, трапеции, ромба, параллелограмма, выпуклого четырехугольника.

   $\forall_{ABCD}$(квадрат($ABCD$) $\to$ выпукло(фигура($ABCD$)))

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем в нем допускаются циклические перестановки вершин и изменение символа "квадрат" на любой из символов "прямоугольник", "ромб", "параллелограмм", "трапеция", "четырехугольник". Уровень срабатывания равен 1.

3.47 Приемы, связанные с символом "подобны"

Утверждение "подобны(набор($A_1 \ldots A_n$)набор($B_1 \ldots B_n$))" означает, что многоугольники $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_n$ подобны, причем вершине A_i соответствует вершина B_i; $i = 1, \ldots, n$. Формульный редактор прорисовывает данное утверждение в виде: $(A_1, \ldots, A_n) \sim (B_1, \ldots, B_n)$.
В явном виде указание на подобие многоугольников редко регистрируется в списке посылок. Обычно прием, усматривающий подобие, сразу же выводит соответствующее соотношение пропорциональности либо равенство углов - в зависимости от того, какое из них представляется полезным для текущего контекста.

Равенство углов подобных треугольников

$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \to \angle(ABC) = \angle(DEF)$ & $\angle(BAC) = \angle(EDF))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 7.

Соотношение пропорциональности для длин сторон подобных треугольников

$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \to l(AB)l(DF) = l(AC)l(DE))$

$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \to l(AB)l(EF) = l(BC)l(DE))$

$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \to l(BC)l(DF) = l(AC)l(EF))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Три из участвующих в выводимом соотношении расстояний известны, а четвертое - нет. Уровень срабатывания равен 3. Эти приемы продублированы для уровня срабатывания 10, причем требуется лишь, чтобы хотя бы одна из участвующих в выводимом соотношении длин сторон треугольника ABC уже рассматривалась в задаче.

Периметры подобных треугольников

$\forall_{ABCDEFabc}((A, B, C) \sim (D, E, F)$ & $a = l(AB) + l(BC) + l(AC)$ &
$b = l(DE) + l(EF) + l(DF) \rightarrow bl(AB) = al(DE))$

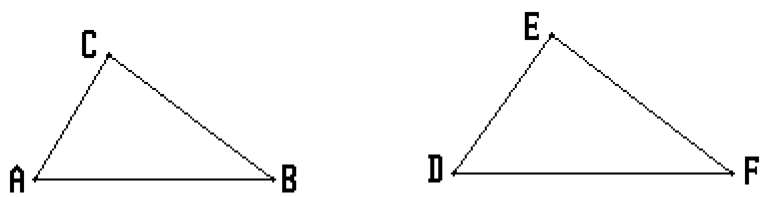
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются вспомогательными задачами на упрощение. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 8.

Ввод в рассмотрение длин сторон при доказательстве подобия треугольников

$\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении условия задачи на доказательство "$(A, B, C) \sim (a, b, c)$". Уровень срабатывания равен 3.

Усмотрение подобия треугольников из равенства углов



$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(FDE)$ & $\angle(ACB) = \angle(DEB) \rightarrow (B, C, A) \sim (F, E, D))$

$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(FDE)$ & $\angle(ACB) = \angle(DEB) \rightarrow (B, A, C) \sim (F, D, E))$

$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(FDE)$ & $\angle(ACB) = \angle(DEB) \rightarrow (A, B, C) \sim (D, F, E))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Они применяются к подутверждению условия задачи на доказательство. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 6.

Усмотрение подобия из равенства углов и пропорциональности сторон

$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(FDE)$ & равнчисл$(l(AC)l(DF), l(AB)l(DE))$ &
разныеточки(A, B) & разныеточки$(D, F) \rightarrow (B, A, C) \sim (F, D, E))$

$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(FDE)$ & равнчисл$(l(AC)l(DF), l(AB)l(DE))$ &
разныеточки(A, B) & разныеточки$(D, F) \rightarrow (B, C, A) \sim (F, E, D))$

$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(FDE)$ & равнчисл$(l(AC)l(DF), l(AB)l(DE))$ &
разныеточки(A, B) & разныеточки$(D, F) \rightarrow (A, B, C) \sim (D, F, E))$

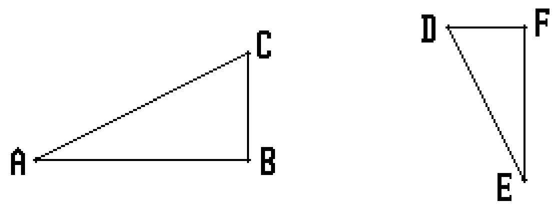
Чертеж прежний. Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подутверждению условия задачи на доказательство. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Напомним, что оператор "равнчисл" усматривает равенство двух выражений a, b, используя равенства вида $a = b$ и $a - b = 0$, содержащиеся в посылках. Уровни срабатывания равны 6 и 12.

Ввод в рассмотрение углов при доказательстве подобия треугольника

$\forall_{ABC}$(актив(ABC) & актив(BAC) & актив($\angle(ACB)$))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении условия задачи на доказательство "$(A, B, C) \sim (a, b, c)$". Уровень срабатывания равен 3.

Подобие двух прямоугольных треугольников со взаимно перпендикулярными катетом и гипотенузой



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(DE) & прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & прямая(DF) $\perp$ прямая(EF) & прямая(AB) $\perp$ прямая(EF) $\rightarrow (A, B, C) \sim (E, F, D)$)

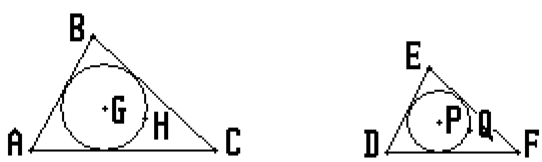
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на доказательство. Уровень срабатывания равен 11.

Известно отношение площадей подобных треугольников

$\forall_{ABCDEFab}((A, B, C) \sim (D, E, F)$ & aS(фигура(ABC)) $= bS$(фигура(DEF)) $\rightarrow$ $al(AB)^2 = bl(DE)^2$ & $al(BC)^2 = bl(EF)^2$ & $al(AC)^2 = bl(DF)^2$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения для площадей определяются с помощью нормализатора общей стандартизации "нормплощадь". Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

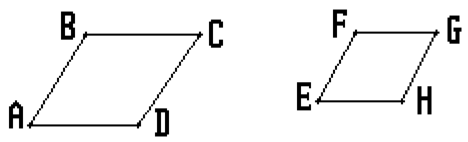
Отношение радиусов вписанных в подобные треугольники окружностей



$\forall_{ABCDEFGHPQ}$(окружность(GH)вписана в фигура(ABC) & окружность(PQ)вписана в фигура(DEF) & $(A, B, C) \sim (D, E, F)$ & $al(GH) = bl(PQ) \rightarrow al(AB) = bl(DE)$ & $al(BC) = bl(EF)$ & $al(AC) = bl(DF)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 3.

Подобные параллелограммы



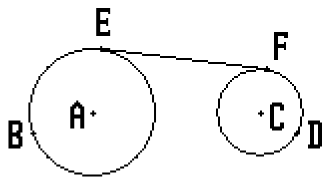
$\forall_{ABCDEFGH}((A, B, C, D) \sim (E, F, G, H)$ & параллелограмм$(ABCD) \rightarrow$ параллелограмм$(EFGH)$ & $\angle(BAD) = \angle(FEH)$ & $l(AB)l(FG) = l(BC)l(EF))$

Уровень срабатывания равен 3.

3.48 Приемы, связанные с символом "внешкасательная"

Утверждение "внешкасательная$(A\ B\ C)$" означает, что прямая либо отрезок A является общей внешней касательной окружностей B и C.

Переформулировка в терминах касательных



$\forall_{ABCDEF}$(внешкасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность$(CD)) \rightarrow$ прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & однасторона$(A, C,$ прямая$(EF))$ & актив(прямая(AC))))

$\forall_{ABCDEF}$(внешкасательная(отрезок(EF), окружность(AB), окружность$(CD)) \rightarrow$ отрезок(EF) – касательная к окружность(AB) & отрезок(EF) – касательная к окружность(CD) & однасторона$(A, C,$ прямая$(EF))$ & актив(прямая(AC))))

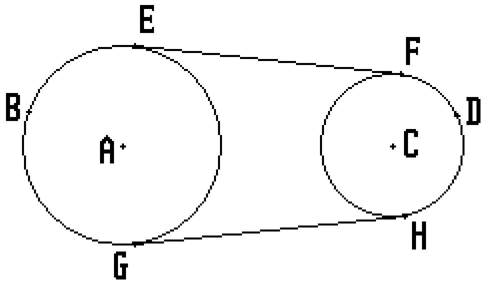
Приемы имеют заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 1.

Различие центров

$\forall_{ABCDEF}$(внешкасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность$(CD)) \rightarrow$ $\neg(A = C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 0.

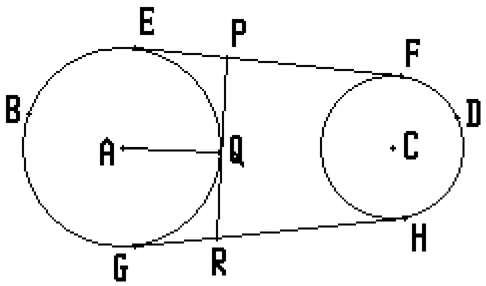
Равенство длин отрезков между точками касания двух внешних касательных



$\forall_{ABCDEFGH}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & прямая(GH) – касательная к окружность(AB) & прямая(GH) – касательная к окружность(CD) & однасторона$(A, C,$ прямая$(EF))$ & однасторона$(A, C,$ прямая$(GH))$ & $E \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $H \in$ окружность$(CD) \to l(EF) = l(GH))$

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Последние четыре антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 8.

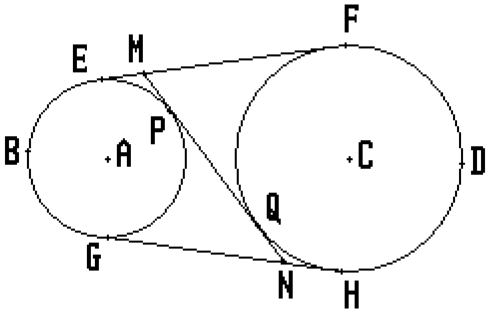
Отрезок касательной к окружности, заключенный между двумя внешними касательными



$\forall_{ABCDEFGHPQR}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & прямая(GH) – касательная к окружность(AB) & прямая(GH) – касательная к окружность(CD) & однасторона$(A, C,$ прямая$(EF))$ & однасторона$(A, C,$ прямая$(GH))$ & $E \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & разныеточки(E, G) & прямая(PR) – касательная к окружность(AB) & $P \in$ прямая(EF) & $R \in$ прямая(GH) & $Q \in$ окружность(AB) & $Q \in$ прямая$(PR) \to$ $Q \in$ отрезок$(PR))$

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками. Пятый, шестой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Две внешние касательные и одна внутренняя: равенство длин отрезков на внутренней касательной



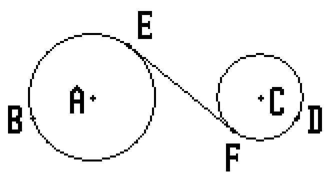
$\forall_{ABCDEFGHPQMN}(E \in$ окружность(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(EF) &
$F \in$ окружность(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CF) & $G \in$ окружность(AB) &
прямая$(AG) \perp$ прямая(GH) & $H \in$ окружность(CD) & прямая$(CD) \perp$ прямая(GH)
& разныеточки(E, G) & $M \in$ отрезок(EF) & $N \in$ отрезок(GH) &
$P \in$ окружность(AB) & прямая$(MN) \perp$ прямая(AP) & $P \in$ прямая(MN) &
$Q \in$ окружность(CD) & прямая$(MN) \perp$ прямая(CQ) & $Q \in$ прямая(MN) &
однасторона$(A, C,$ прямая$(EF))$ & однасторона$(A, C,$ прямая$(GH)) \rightarrow$
$l(MP) = l(NQ))$

Первые восемь антецедентов, а также антецеденты с десятого по семнадцатый выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана во втором антецеденте. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

3.49 Приемы, связанные с символом "внутркасательная"

Утверждение "внутркасательная$(A\ B\ C)$" означает, что прямая либо отрезок A является общей внутренней касательной окружностей B и C.

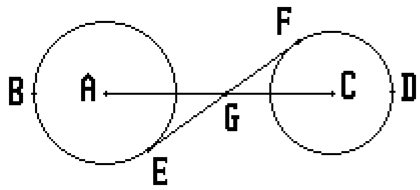
Переформулировка в терминах касательных



$\forall_{ABCDEF}($внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность$(CD)) \rightarrow$
прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к
окружность(CD) & разныестороны$(A, C,$ прямая$(EF))$ & актив(прямая$(AC)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

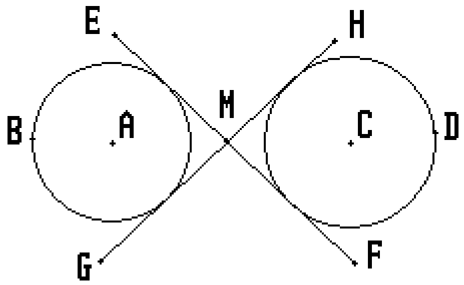
Точка пересечения внутренней касательной с отрезком, соединяющим центры окружностей



$\forall_{ABCDEFG}$(внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & разныеточки(E, F) $\rightarrow$ G – точка & $G \in$ отрезок(EF) & $G \in$ отрезок(AC))

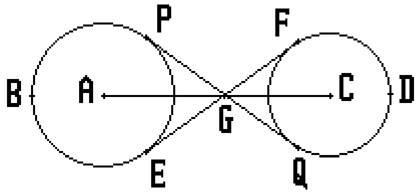
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Общая точка G прямых AC и EF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 10.

Точка пересечения двух внутренних касательных



$\forall_{ABCDEFGHM}$(внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & внутркасательная(прямая(GH), окружность(AB), окружность(CD)) & $M \in$ прямая(GH) & $M \in$ прямая(EF) & разныепрямые(прямая(EF), прямая(GH)) $\rightarrow$ $M \in$ отрезок(AC))

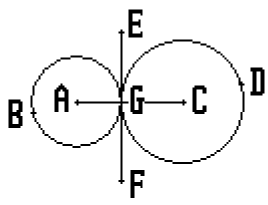
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFGPQ}$(внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & внутркасательная(прямая(PQ), окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $Q \in$ окружность(CD) & разныеточки(P, E) $\rightarrow$ G – точка & $G \in$ отрезок(PQ) & $G \in$ отрезок(EF) & $G \in$ отрезок(AC) & биссектриса($FGQC$))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Общая точка G прямых EF, PQ пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 5.

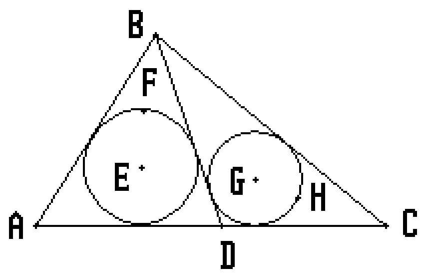
Ввод в рассмотрение точки касания, если окружности касаются



$\forall_{ABCDEFG}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) &
внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) $\rightarrow$
G – точка & $G \in$ прямая(EF) & $G \in$ отрезок(AC) & $G \in$ окружность(AB) &
$G \in$ окружность(CD))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Точка G касания окружностей пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 1.

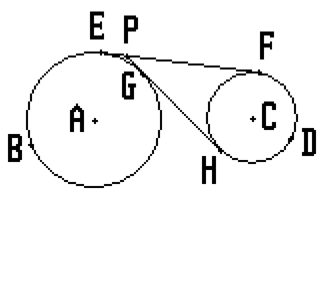
Усмотрение внутренней касательной



$\forall_{ABCDEFH}$($D \in$ отрезок(AC) & окружность(EF)вписана в фигура(ABD) &
окружность(GH)вписана в фигура(BCD) $\rightarrow$ внутркасательная(прямая(BD),
окружность(EF), окружность(GH)))

Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "усм". Расстояние BD уже рассматривается в задаче. Если радиусы окружностей равны и усматривается, что прямые BD, AC перпендикулярны, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

Точка пересечения внутренней касательной и внешней касательной



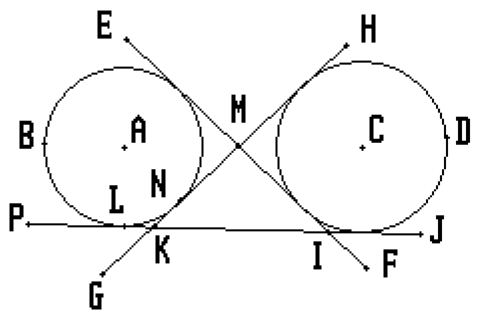
$\forall_{ABCDEFGHP}$(внешкасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & внутркасательная(прямая(GH), окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $P \in$ прямая(GH) & $P \in$ прямая(EF) $\to$ $P \in$ отрезок(EF))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFGHP}$(внешкасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & внутркасательная(прямая(GH), окружность(AB), окружность(CD)) & $G \in$ окружность(AB) & $H \in$ окружность(CD) & $P \in$ прямая(GH) & $P \in$ прямая(EF) $\to \neg$($P \in$ отрезок(GH)))

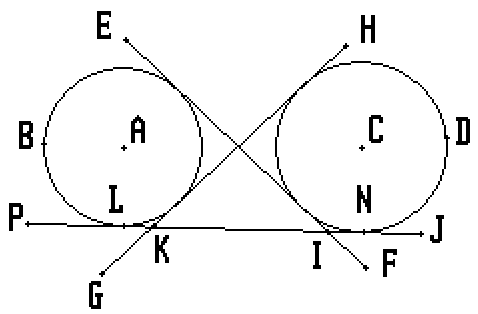
Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 5.

Две внутренних касательных и одна внешняя



$\forall_{ABCDEFGHIJKLMNP}$(внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & внутркасательная(прямая(GH), окружность(AB), окружность(CD)) & $M \in$ прямая(GH) & $M \in$ прямая(EF) & разныепрямые(прямая(EF), прямая(GH)) & внешкасательная(прямая(PJ), окружность(AB), окружность(CD)) & $I \in$ прямая(EF) & $I \in$ прямая(PJ) & $K \in$ прямая(PJ) & $K \in$ прямая(GH) & $L \in$ прямая(PJ) & $L \in$ окружность(AB) & $K \in$ отрезок(LI) & $N \in$ прямая(GH) & $N \in$ окружность(AB) $\to$ $N \in$ отрезок(KM))

Первые два антецедента, а также шестой - идентифицируются с посылками. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFGHIJKLNP}$(внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & внутркасательная(прямая(GH), окружность(AB),

окружность(CD)) & разныепрямые(прямая(EF), прямая(GH)) &
внешкасательная(прямая(PJ), окружность(AB), окружность(CD)) &
$I \in$ прямая(EF) & $I \in$ прямая(PJ) & $K \in$ прямая(PJ) & $K \in$ прямая(GH) &
$L \in$ прямая(PJ) & $L \in$ окружность(AB) & $K \in$ отрезок(LI) & $N \in$ прямая(PJ)
& $N \in$ окружность$(CD) \to I \in$ отрезок(KN))

Первые два антецедента и четвертый - идентифицируются с посылками. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

3.50 Приемы, связанные с символами "Высота", "Медиана", "Биссектреуг"

Утверждения "Высота$(ABCD)$", "Медиана$(ABCD)$", "Биссектреуг$(ABCD)$" используются для задания высоты, медианы и биссектрисы треугольника. Первое из них означает, что D есть основание высоты, проведенной из вершины A треугольника ABC, второе - что D - основание медианы, проведенной из A. В последнем порядок вершин несколько изменен. Здесь D - основание биссектрисы, проведенной из вершины B. Для набора символов "Высота", "Медиана", "Биссектреуг" формульным редактором используются, соответственно, пары клавиш "В Ы", "М Е", "И Т". Буквы - везде большие.

Перечисленные символы используются только для ускоренного ввода формулировок задач. Далее решатель сразу от них избавляется:

$\forall_{ABCD}$(Высота$(ABCD) \leftrightarrow D \in$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC))

$\forall_{ABCD}$(Медиана$(ABCD) \leftrightarrow D \in$ отрезок(BC) & $l(BD) = l(CD)$)

$\forall_{ABCD}$(Биссектреуг$(ABCD) \leftrightarrow$ биссектриса$(ABCD)$ & $D \in$ отрезок(AC))

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3.51 Приемы, связанные с символом "середина"

Выражение "середина(A)" обозначает середину отрезка либо интервала A. Решатель использует его в задачах на построение.

Ввод обозначения для середины отрезка

$\forall_{ABC}$($C -$ точка & $C \in$ отрезок(AB) & $l(AC) = l(BC)$ & середина(отрезок(AB)) $= C$)

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке задачи на исследование выражения "середина(отрезок(AB))". Проверяется, что отсутствует посылка вида "середина(отрезок(AB)) $= D$", где D - переменная. Тогда вводится новая переменная C для обозначения данной середины. Выводимые утверждения сопровождаются комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания приема равен 3.

Характеризация середины

$\forall_{ABC}$($A =$ середина(отрезок(BC)) $\to A \in$ отрезок(BC) & $l(AB) = l(AC)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

Ориентация равенства

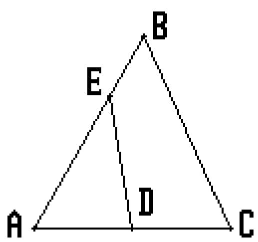
$\forall_{ABC}(A = \text{середина}(\text{отрезок}(BC)) \leftrightarrow \text{середина}(\text{отрезок}(BC)) = A)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". При идентификации заменяемой части перестановка частей равенства не допускается, причем A идентифицируется с переменной. Преобразованное утверждение сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

3.52 Приемы, связанные с символом "разбивает"

Утверждение "разбивает(A, B, C)" означает, что линия либо поверхность A разбивает связную фигуру либо связное тело B на множество C связных фрагментов. Символ "разбивает" встречался при обучении решателя крайне редко, и для него создан пока лишь один прием.

Прямая, разбивающая треугольник на две части



$\forall_{ABCDEpq}(D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{разбивает}(\text{прямая}(DE), \text{фигура}(ABC), \{p, q\}) \rightarrow E \in \text{интервал}(AB)\ \&\ p = \text{фигура}(ADE)\ \&\ q = \text{фигура}(DEBC)\ \vee\ B = E\ \&\ p = \text{фигура}(ADE)\ \&\ q = \text{фигура}(BCD) \vee E \in \text{интервал}(BC)\ \&\ p = \text{фигура}(ABED)\ \&\ q = \text{фигура}(CDE))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Выражения p, q входят в список посылок задачи на исследование симметричным образом. Отсутствует посылка вида $p = x$. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

3.53 Приемы, связанные с символом "куб"

Утверждение "куб(A)" означает, что A есть куб.

Ввод в рассмотрение ребра

$\forall_{ABa}(\text{куб}(a) \rightarrow A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{ребро}(\text{отрезок}(AB), a))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка вида "ребро(C, a)". Прием вводит новые переменные A, B. Уровень срабатывания равен 1.

Длины двух ребер равны

$\forall_{ABCDa}$(куб(a) & ребро(отрезок(AB), a) & ребро(отрезок(CD), a) $\to l(AB) = l(CD)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

Соотношение между длиной ребра и длиной диагонали

$\forall_{ABCDa}$(куб(a) & ребро(отрезок(AB), a) & диагональ(отрезок(CD), a) $\to$ $l(CD) = \sqrt{3}l(AB)$)

Аналогично предыдущему приему.

Грань куба

$\forall_{ABCDa}$(куб(a) & грань(фигура($ABCD$), a) $\to$ ребро(отрезок(AB), a))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Задача не имеет посылки вида "ребро(E, a)". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCDa}$(куб(a) & грань(фигура($ABCD$), a) $\to$ квадрат($ABCD$))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFa}$(куб(a) & грань(фигура($ABCD$), a) & грань(фигура($ADEF$), a) & разныеточки(C, E) $\to$ ребро(отрезок(AD), a))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. При идентификации вершин граней допускаются циклические перестановки и изменение порядка на обратный. Уровень срабатывания равен 2.

Длина стороны грани равна длине ребра

$\forall_{ABCDEFa}$(куб(a) & грань(фигура($ABCD$), a) & ребро(отрезок(EF), a) $\to$ $l(AB) = l(EF)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

Площадь основания куба

$\forall_{ab}$(куб(a) & основание(b, a) $\to S(b) =$ (высота(a))^2)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Высота куба равна длине его ребра

$\forall_{aBC}$(куб(a) & ребро(отрезок(BC), a) $\to$ высота(a) $= l(BC)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче на исследование либо на доказательство выражения $l(BC)$. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражение "высота(a)" уже встречается в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 2.

3.54 Приемы, связанные с символом "параллелепипед"

Утверждение "параллелепипед(A)" означает, что A есть параллелепипед.

Грань параллелепипеда

$\forall_{ABCDa}$(параллелепипед(a) & грань(фигура($ABCD$), a) $\rightarrow$ параллелограмм($ABCD$))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Отсутствуют посылки "прямоугольный(A)", "правильный(A)". Уровень срабатывания равен 2.

Длины параллельных ребер равны

$\forall_{ABCDa}$(параллелепипед(a) & ребро(отрезок(AB), a) & ребро(отрезок(CD), a) & прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) $\rightarrow l(AB) = l(CD)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Ввод в рассмотрение ребра, не принадлежащего выделенной грани

$\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & грань(фигура($ABCD$), a) $\rightarrow E$ – точка & ребро(отрезок(AE), a) & $\neg(E \in$ плоскость(ABC)))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Отсутствует посылка вида "ребро(отрезок(PQ),a)", где P - одна из точек A, B, C, D, а Q отлично от этих точек. Прием вводит новую переменную E. Уровень срабатывания равен 3.

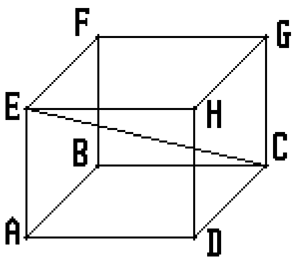
Выделение ребра в одной из двух смежных граней

$\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & грань(фигура($DCBA$), a) & грань(фигура($ABEF$), a) & $\neg(F \in$ плоскость(ABC)) $\rightarrow$ ребро(отрезок(AF), a) & $\neg(F = B)$ & $\neg(F = D)$)

$\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & грань(фигура($ABCD$), a) & грань(фигура($ABEF$), a) & $\neg(F \in$ плоскость(ABC)) $\rightarrow$ ребро(отрезок(AF), a) & $\neg(F = B)$ & $\neg(F = D)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Ввод в рассмотрение бокового ребра, соединяющего конец диагонали с основанием



$\forall_{ABCDEa}$(параллелепипед(a) & диагональ(отрезок(CE), a) & грань(фигура($ABCD$), a) $\rightarrow$ ребро(отрезок(AE), a) & $\neg$($E \in$ плоскость(ABC)))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

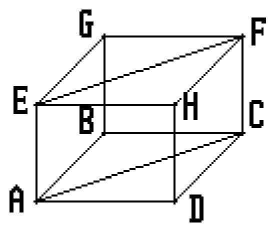
Выражение вектора диагонали параллелепипеда через векторы его сторон

$\forall_{ABCDQp}$(параллелепипед(p) & ребро(отрезок(QA), p) & ребро(отрезок(QB), p) & ребро(отрезок(QC), p) & диагональ(отрезок(QD), p) $\rightarrow$ вектор(QD) = вектор(QA) + вектор(QB) + вектор(QC))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения для расстояний QA, QB, QC и углов AQB, AQC, BQC имеют тип "определимо". Выражение для расстояния QD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия данного приема, у которой требуется только, чтобы вектор QD уже рассматривался в задаче. Ее уровень срабатывания тоже равен 5.

Сечения параллелепипеда плоскостью

1. Диагональное сечение.

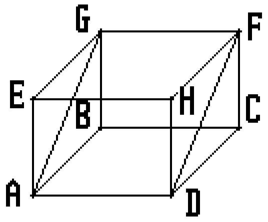


$\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & грань(фигура($ABCD$), a) & ребро(отрезок(AE), a) & $\neg$($E \in$ плоскость(ABC)) & актив(плоскость(ACE)) $\rightarrow$ F – точка & ребро(отрезок(CF), a) & прямая(CF) $\parallel$ прямая(AE) & прямая(EF) $\parallel$ прямая(AC))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент выделен указателем "усм". Не усматривается параллельность прямой AE некоторой выделенной в задаче прямой, проходящей через точку C. Прием вводит в рассмотрение новую точку F - вершину рассматриваемого параллелепипеда. Вместо символа "параллелепипед" допускается символ "куб", и тогда прием выводит дополнительную посылку "прямая(AE) $\perp$ прямая(AC)". Уровень срабатывания приема равен 3.

$\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & грань(фигура($ABCD$), a) & ребро(отрезок(AE), a) & $\neg$($E \in$ плоскость(ABC)) & ребро(отрезок(CF), a) & прямая(CF) $\parallel$ прямая(AE) $\rightarrow$ $a \cap$ плоскость(ACE) = фигура($AEFC$))

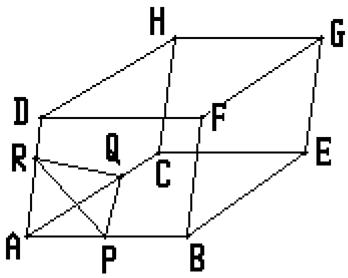
Чертеж прежний. Первые три антецедента, а также пятый антецедент идентифицируются с посылками. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором, шестой - выделен указателем "усм". Вместо символа "параллелепипед" допускается символ "куб". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDEFGa}$(параллелепипед(a) & грань(фигура($ABCD$), a) & грань(фигура($AEGB$), a) & разныеточки(E, B) & разныеточки(E, D) $\to$ $F-$точка & $H-$точка & грань(фигура($BGFC$), a) & грань(фигура($DHFC$), a) & $\neg(F = B)$ & $\neg(F = D)$ & $a \cap$ плоскость(AGD) = фигура($AGFD$) & параллелограмм($DAGF$))

Попытка применения приема предпринимается при усмотрении в посылке задачи выражения "$a \cap$ плоскость(AGD)". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида "$a \cap$ плоскость(AGD) = фигура(c)". Прием вводит новую переменную F, обозначающую вершину параллелепипеда. Вместо символа "параллелепипед" допускается символ "куб". Уровень срабатывания равен 4.

2. Плоскость проходит через три ребра, выходящие из общей вершины.



$\forall_{ABCDPQRa}$(параллелепипед(a) & ребро(отрезок(AB), a) & ребро(отрезок(AC), a) & ребро(отрезок(AD), a) & $P \in$ отрезок(AB) & $Q \in$ отрезок(AC) & $R \in$ отрезок(AD) & разныеточки(B, C) & разныеточки(B, D) & разныеточки(C, D) $\to a \cap$ плоскость(PQR) = фигура(PQR))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - выделены указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Вместо символа "параллелепипед" допускается символ "куб". Уровень срабатывания равен 4.

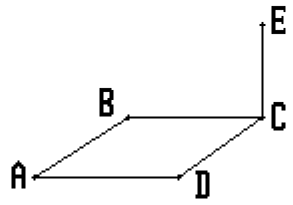
Прямоугольный параллелепипед

1. Грань прямоугольного параллелепипеда.

$\forall_{ABCDa}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & грань(фигура($ABCD$), a) $\to$ прямоугольник($ABCD$))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Вместо символа "грань" допускается символ "основание". Уровень срабатывания равен 2.

2. Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно грани основания.



$\forall_{ABCDEa}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & грань(фигура$(ABCD), a)$ & ребро(отрезок$(CE), a)$ &$\neg(E \in$ плоскость$(ABC)) \to$ прямая$(CE) \perp$ плоскость(ABC))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

3. Два смежных ребра прямоугольного параллелепипеда.

$\forall_{ABCa}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & ребро(отрезок$(AB), a)$ & ребро(отрезок$(AC), a)$ & разныеточки$(B, C) \to$ прямая$(AB) \perp$ плоскость(AC))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

4. Две смежные грани прямоугольного параллелепипеда.

$\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & грань(фигура$(ABCD), a)$ & грань(фигура$(CDEF), a)$ & $\neg(F \in$ плоскость$(ABC)) \to$ ребро(отрезок$(CF), a)$ & прямая$(CF) \perp$ плоскость(ABC))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. В задаче рассматривается некоторая прямая плоскости ABC, проходящая через точку F и некоторую другую выделенную точку, отличную от C. Уровень срабатывания равен 4.

5. Отождествление ребер, выходящих из одной вершины.

$\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & грань(фигура$(ABCD), a)$ & грань(фигура$(DEFC), a)$ & ребро(отрезок$(CG), a)$ & прямая$(CG) \perp$ плоскость$(DEF) \to G = B$)

Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками, последний - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

6. Выражение длины диагонали прямоугольного параллелепипеда через длины сторон.

$\forall_{ABCDEFab}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & диагональ(отрезок$(AB), a)$ & высота$(a) = b$ & основание(фигура$(CDEF), a) \to$ $l(AB)^2 = l(CD)^2 + l(DE)^2 + b^2$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFab}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & диагональ(отрезок$(AB), a)$ & грань(фигура$(CDEF), a)$ &

ребро(отрезок$(CG), a)$ & $\neg(G \in$ плоскость$(CDE)) \rightarrow l(AB)^2 = l(CD)^2 + l(DE)^2 + l(CG)^2)$

Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

7. Усмотрение прямоугольного параллелепипеда в прямой призме.

   $\forall_a$(параллелепипед(a) & правильный(a) & прямой$(a) \rightarrow$ прямоугольный(a))

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Созданы две версии приема, у которых точка привязки выбрана, соответственно, в первом либо в последнем антецедентах. Уровень срабатывания равен 2.

3.55 Приемы, связанные с символом "призма"

Утверждение "призма(A)" означает, что A есть призма.

Боковая грань призмы - параллелограмм

$\forall_{ABCDab}$(призма(a) & основание(b, a) & грань(фигура$(ABCD), a)$ & $\neg(A \in$ плоскостьфигуры$(b)) \rightarrow$ прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка "прямой(a)". Уровень срабатывания равен 4.

Основание треугольной призмы

$\forall_{ABCa}$(призма(a) & основание(фигура$(ABC), a) \rightarrow \triangle(ABC)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение параллелепипеда

$\forall_{ABCDa}$(призма(a) & основание(фигура$(ABCD), a)$ & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD) \rightarrow$ параллелепипед(a))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, два последних - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

Правильная треугольная призма

$\forall_{ABCa}$(призма(a) & правильный(a) & основание(фигура$(ABC), a) \rightarrow l(AB) = l(AC)$ & $l(BC) = l(AC)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Правильная четырехугольная призма

$\forall_{ABCDa}$(призма(a) & правильный(a) & основание(фигура$(ABCD), a) \rightarrow$ квадрат$(ABCD)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Правильная призма - общий случай

$\forall_{ab}$(призма(a) & правильный(a) & основание(фигура(b), a) $\rightarrow$ правмногоугольник(b))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Если призма правильная, то она прямая

$\forall_{a}$(призма(a) & правильный(a) $\rightarrow$ прямой(a))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

Высота прямой призмы

$\forall_{ABab}$(призма(a) & прямой(a) & основание(b, a) & ребро(отрезок(AB), a) & $A \in$ плоскостьфигуры(b) & $\neg$($B \in$ плоскостьфигуры(b)) $\rightarrow$ высота(a) $= l(AB)$)

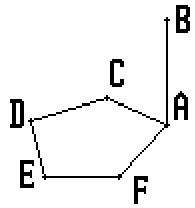
Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

Боковая грань прямой призмы

$\forall_{ABCDab}$(призма(a) & прямой(a) & основание(b, a) & грань(фигура($ABCD$), a) & $A \in$ плоскостьфигуры(b) & $\neg$($B \in$ плоскостьфигуры(b)) $\rightarrow$ прямоугольник($ABCD$) & $l(AB) =$ высота(a))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

Боковое ребро прямой призмы перпендикулярно грани основания

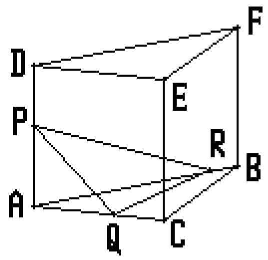


$\forall_{ABCDEab}$(призма(a) & прямой(a) & основание(b, a) & ребро(отрезок(AB), a) & плоскость(CDE) $=$ плоскостьфигуры(b) & $A \in$ плоскость(CDE) & $\neg$($B \in$ плоскость(CDE)) $\rightarrow$ прямая(AB) $\perp$ плоскость(CDE))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор", причем его правая часть обрабатывается нормализатором "нормплоскостьфигуры". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

Сечения призмы плоскостью

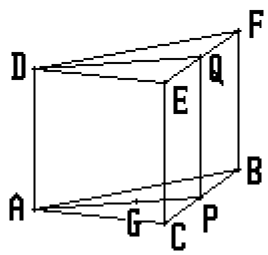
1. Плоскость проходит через точку на боковом ребре треугольной призмы и две точки на примыкающих к нему сторонах основания.



$\forall_{ABCDEFPQRa}$(призма(a) & основание(фигура(ABC), a) & ребро(отрезок(AD), a) & разныеточки(B, D) & разныеточки(C, D) & $P \in$ отрезок(AD) & $Q \in$ отрезок(AC) & $R \in$ отрезок(AB) $\rightarrow$ $a \cap$ плоскость(PQR) = фигура(PQR))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Три последние антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

2. Плоскость проходит через боковое ребро.



$\forall_{ABCDEFGPQa}$(призма(a) & основание(фигура(ABC), a) & ребро(отрезок(AD), a) & разныеточки(B, D) & разныеточки(C, D) & $G \in$ фигура(ABC) $\rightarrow P -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка & $Q -$ точка & грань(фигура(DEF), a) & $\neg(E = A)$ & $\neg(F = A)$ & $P \in$ отрезок(BC) & $G \in$ отрезок(AP) & $Q \in$ отрезок(EF) & $a \cap$плоскость(DAG) = фигура($ADQP$) & параллелограмм($ADQP$))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "$a \cap$плоскость(DAG)". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последние три - обрабатываются проверочными операторами. В задаче отсутствует посылка вида "$a \cap$ плоскость(DAG) = фигура($\ldots$)". Прием вводит новые точки P, E, F, Q. Уровень срабатывания равен 4.

3.56 Приемы, связанные с символом "пирамида"

Утверждение "пирамида(A)" означает, что A есть пирамида.

Ввод в рассмотрение бокового ребра пирамиды

$\forall_{ABab}$(пирамида(a) & Вершина(A, a) & основание(фигура(префикс(B, b)), a) & актив(прямая(AB)) $\rightarrow$ ребро(отрезок(AB), a))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение вершины пирамиды

$\forall_{ABCDEa}$(пирамида(a) & основание(b, a) & плоскость(BCD) $=$ плоскостьфигуры(b) & ребро(отрезок(AE), a) & $\neg(A \in$ плоскость(BCD)) $\rightarrow$ Вершина(A, a))

Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", его правая часть обрабатывается нормализатором "нормплоскостьфигуры". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Ввод в рассмотрение вершины пирамиды

$\forall_{Aa}$(пирамида(a) $\rightarrow$ A – точка & Вершина(A, a))

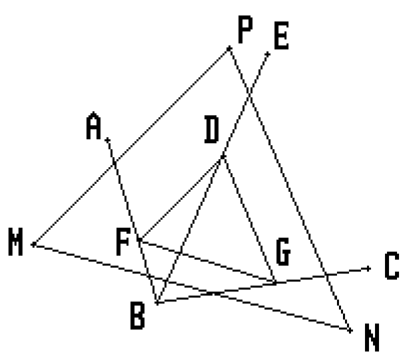
Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка вида "Вершина(P, a)". Прием вводит новую переменную A, обозначающую вершину пирамиды a. Уровень срабатывания равен 4.

Проведение высоты в пирамиде, если введена в рассмотрение длина высоты

$\forall_{ACDEFab}$(пирамида(a) & основание(b, a) & Вершина(A, a) & плоскость(CDE) $=$ плоскостьфигуры(b) $\rightarrow$ F–точка & прямая(AF) $\perp$ плоскость(CDE) & $F \in$ плоскость(CDE) & $l(AF)$)

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке выражения "высота(a)", обозначающего длину высоты пирамиды a. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором, как и выше. Перпендикуляр из точки A на плоскость CDE пока не опущен. Прием вводит в рассмотрение новую переменную F, обозначающую основание данного перпендикуляра. Уровень срабатывания равен 4.

Сечение пирамиды плоскостью



$\forall_{ABCDEFGMNPainp}$(пирамида(p) & основание(фигура$(a), p)$ & $l(a) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $A = a(i)$ & $B = a(i(\mathrm{mod}\ n) + 1)$ & $C = a((i+1)(\mathrm{mod}\ n) + 1)$ & Вершина(E, p) & $D \in$ отрезок(BE) & $F \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(BC) & $D \in$ плоскость(MNP) & $F \in$ плоскость(MNP) & $G \in$ плоскость(MNP) & разныеточки(B, F) & разныеточки(B, G) & разныеточки$(B, D) \to p \cap$ плоскость$(MNP) =$ фигура(FDG))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый, второй и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками. Третий, пятый, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Четвертый антецедент выделен указателем "программа". Он определяет номер i вершины A основания пирамиды, причем следующие две вершины основания суть B и C. Вершиной пирамиды служит точка E. Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, оставшиеся антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

В основании треугольной пирамиды лежит треугольник

$\forall_{ABCa}$(пирамида(a) & основание(фигура$(ABC), a) \to \triangle(ABC)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 0.

Основание высоты пирамиды, имеющей равные боковые ребра, есть центр описанной около основания окружности

$\forall_{ABCDEFa}$(пирамида(a) & основание(фигура$(ABCD), a)$ & Вершина(E, a) & $l(AE) = l(BE)$ & $l(CE) = l(AE)$ & $l(DE) = l(AE)$ & $F \in$ плоскость(ABC) & прямая$(EF) \perp$ плоскость$(ABC) \to$ окружность(FA)описана около фигура$(ABCD)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - выделены указателем "идентификатор". Последние два антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

Правильная пирамида

1. Правильная треугольная пирамида.

   $\forall_{ABCa}$(пирамида(a) & правильный(a) & основание(фигура$(ABC), a) \to$ $l(AB) = l(AC)$ & $l(BC) = l(AC)$)

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

2. Правильная четырехугольная пирамида.

   $\forall_{ABCDa}$(пирамида(a) & правильный(a) & основание(фигура$(ABCD), a) \to$ квадрат$(ABCD)$)

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDEFa}$(пирамида(a) & правильный(a) & основание(фигура$(ABCD), a)$ & Вершина(E, a) & прямая$(EF) \perp$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость$(ABC) \to$ центр$(F,$ фигура$(ABCD)$))

   Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, два последних - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

3. Ввод в рассмотрение длины высоты в правильной пирамиде, если введена в рассмотрение длина ее бокового ребра.

$\forall_{ABab}$(пирамида(a) & правильный(a) & основание(фигура(префикс(B, b)), a) & Вершина(A, a) & актив($l(AB)$) $\to$ актив(высота(a)))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - выделен указателем "усм". Уровни срабатывания равны 3 и 7.

4. Проведение высоты в правильной пирамиде.

   $\forall_{ABCDEFGab}$(пирамида(a) & правильный(a) & основание(b, a) & ребро(отрезок(AB), a) & плоскость(CDE) $=$ плоскостьфигуры(b) & $\neg$($B \in$ плоскость(CDE)) $\to$ $F -$ точка & прямая(BF) $\perp$ плоскость(CDE) & $F \in$ плоскость(CDE) & $G -$ точка & $G \in$ плоскость(CDE) & $\neg(F = G)$ & $\neg(A = G)$ & Окружность(FAG)описана около b & высота(a) $= l(BF)$)

   Указатель "контрольвывода"инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке выражения "высота(a)". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - выделен указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Основание F опущенной из вершины B высоты пока не введено, и прием его вводит. Одновременно вводится направляющая точка G плоскости основания, позволяющая определить трехмерную окружность, описанную около основания. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDEFGab}$(пирамида(a) & правильный(a) & основание(фигура($B, G; b$), a) & Вершина(A, a) & плоскость(CDE) $=$ плоскостьфигуры(фигура($B, G; b$)) $\to$ $F -$ точка & прямая(AF) $\perp$ плоскость(CDE) & $F \in$ плоскость(CDE) & Окружность(FBG)описана около фигура($B, G; b$) & высота(a) $= l(AF)$)

   Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - выделен указателем "идентификатор". Основание F высоты пирамиды пока не введено, и прием его вводит. Одновременно проводится описанная окружность, причем для задания ее плоскости используются концы B, G некоторого ребра основания. Уровень срабатывания равен 3.

5. Длины боковых ребер правильной пирамиды равны.

   $\forall_{ABCac}$(пирамида(a) & правильный(a) & Вершина(A, a) & основание(фигура($B, C; c$), a) & актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) $\to$ $l(AB) = l(AC)$)

   Антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в пятом из них. В четвертом антецеденте точки B, C выбираются из списка вершин основания произвольным образом. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDab}$(пирамида(a) & правильный(a) & Вершина(A, a) & основание(фигура($B, C; b$), a) & актив(прямая(AD)) & $D \in$ прямая(BC) $\to$ $l(AB) = l(AC)$)

   Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками, шестой - выделен указателем "усм". Обозначение точки D отличается от обозначений точек B, C. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ABCDa}$(пирамида(a) & правильный(a) & основание(фигура(ABC), a) & Вершина(D, a) & актив($l(AD)$) $\to$ $l(AD) = l(BD)$ & $l(AD) = l(CD)$)

   Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

6. Плоские углы при вершине правильной пирамиды.

   $\forall_{ABCDEabijn}$(пирамида(a) & правильный(a) & Вершина(A, a) & основание(фигура(b), a) & $l(b) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}$ & $B = b(i)$ & $C = b(i(\text{mod } n) + 1)$ & $D = b(j)$ & $E = b(j(\text{mod } n) + 1)$ & актив($\angle(BAC)$) $\rightarrow \angle(BAC) = \angle(DAE)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента, а также последний антецедент идентифицируются с посылками. Пятый антецедент и антецеденты с восьмого по одиннадцатый выделены указателем "идентификатор". Шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "программа". Они перечисляют номера i, j выбираемых на основании пирамиды вершин B, D. При этом C, E - непосредственно следующие за B, D вершины основания. В некоторой посылке задачи встречается подвыражение "фигура(ADE)", быть может, с измененным порядком вершин. Уровень срабатывания равен 4.

3.57 Приемы, связанные с символом "цилиндр"

Утверждение "цилиндр(A)" означает, что A есть цилиндр.

Ввод в рассмотрение основания цилиндра

$\forall_{ABa}$(цилиндр(a) $\rightarrow A -$точка & $B -$точка & $C -$точка & основание(Круг(ABC), a))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка вида "основание(P, a)". Прием вводит в рассмотрение новые точки A, B, C, где A - центр основания, B - некоторая точка на окружности основания, - точка, доопределяющая вместе с точками A и B плоскость основания. Уровень срабатывания равен 1.

Осевое сечение

Утверждение "осевоесечение(фигура($ABCD$),a)" далее означает, что прямоугольник $ABCD$ является осевым сечением цилиндра, причем A лежит на одном основании, а B - на другом.

$\forall_{ABCDa}$(цилиндр(a) & осевоесечение(фигура($ABCD$), a) $\rightarrow$ прямоугольник($ABCD$) & $l(AB) =$ высота(a))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDPQRa}$(цилиндр(a) & осевоесечение(фигура($ABCD$), a) & основание(Круг(PQR), a) & $E \in$ плоскость(ABC) $\rightarrow$ уголмежду(прямая(AE), плоскость(PQR)) $= \angle(EAD)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEFGa}$(цилиндр(a) & основание(Круг(ABG), a) & осевоесечение(фигура($CDEF$), a) $\rightarrow l(CF) = 2l(AB)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

Центр цилиндра находится на его оси

$\forall_{MNPS}$(цилиндр(P) & Ось(отрезок(MN), P) & центр(S, P) $\rightarrow S \in$ отрезок(MN) & $l(MS) = l(NS)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Расстояние от точки на боковой поверхности до оси равно радиусу основания

$\forall_{ABCDEd}$(цилиндр(A) & основание(d, A) & Ось(отрезок$(BC), A)$ & $D \in$ прямая(BC) & $E \in$ боковаяповерхность(A) & прямая$(DE) \perp$ прямая$(PQ) \to l(DE) =$ радиус(d))

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке выражения "$l(DE)$". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Длина оси равна высоте цилиндра

$\forall_{AMN}$(цилиндр(A) & Ось(отрезок$(MN), A) \to$ высота$(A) = l(MN)$)

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке выражения "высота(A)". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

Два основания цилиндра

$\forall_{ABCDEFG}$(цилиндр(A) & основание(Круг$(BCD), A)$ &
основание(Круг$(EFG), A)$ & $\to l(BC) = l(EF)$ & плоскость$(BCD) \parallel$
плоскость(EFG))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

3.58 Приемы, связанные с символом "конус"

Утверждение "конус(A)" означает, что A есть конус.

Высота конуса

$\forall_{ABCDa}$(конус(a) & основание(Круг$(BCD), a)$ & Вершина$(A, a) \to$
прямая$(AB) \perp$ плоскость(BCD) & высота$(a) = l(AB)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Комментарий (высота конус a) блокирует повторное применение приема. Уровень срабатывания равен 4.

Осевое сечение

$\forall_{ABCPQRa}$(конус(a) & осевоесечение(фигура$(ABC), a)$ & Вершина(A, a) &
основание(Круг$(PQR), a) \to P \in$ отрезок(BC) & $B \in$ плоскость(PQR) &
$C \in$ плоскость(PQR) & $l(BP) = l(PQ)$ & $l(CP) = l(PQ)$ & $l(AB) = l(AC)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

Ввод в рассмотрение основания конуса

$\forall_{ABa}$(конус$(a) \to A$ – точка & B – точка & C – точка & основание(Круг$(ABC), a)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка вида "основание(P, a)". Прием вводит новые точки A, B, C - центр основания, точку на его окружности и дополнительную точку, фиксирующую плоскость основания. Уровень срабатывания равен 1.

3.59 Приемы, связанные с символом "шар"

Утверждение "шар(A)" означает, что A есть шар.

Площадь поперечного сечения

Выражение "поперечнплощ(a, b)" обозначает площадь поперечного сечения имеющего центр симметрии тела a в направлении вектора b. Предполагается, что поперечное сечение проходит через центр.

$\forall_{ab}(\text{шар}(a) \to \text{поперечнплощ}(a, b) = \pi(\text{радиус}(a))^2)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

Общая точка двух касающихся внешним образом шаров лежит на отрезке, соединяющем центры шаров

$\forall_{ABCDE}(\text{шар}(A)\ \&\ \text{шар}(B)\ \&\ \text{внешкасаются}(A, B)\ \&\ \text{центр}(C, A)\ \&\ \text{центр}(D, B)\ \&$
$E \in A\ \&\ E \in B \to E \in \text{отрезок}(CD)\ \&\ E \in \text{поверхнтела}(A)\ \&\ E \in \text{поверхнтела}(B))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Расстояние между центрами двух шаров, касающихся внутренним образом

$\forall_{ABab}(\text{шар}(a)\ \&\ \text{шар}(b)\ \&\ \text{центр}(A, a)\ \&\ \text{центр}(B, b)\ \&\ \text{внутркасаются}(a, b) \to$
$l(AB) = |\text{радиус}(a) - \text{радиус}(b)|)$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

Радиус шара, вписанного в пирамиду

$\forall_{ABCDab}(\text{шар}(a)\ \&\ \text{пирамида}(b)\ \&\ a\ \text{вписана в}\ b\ \&\ \text{основание}(\text{фигура}(ABC), b)\ \&$
$\text{центр}(D, a) \to \text{радиус}(a) = \text{расстдоплоскости}(D, \text{плоскость}(ABC)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

Центр вписанного в пирамиду шара лежит на биссекторных плоскостях двугранных углов при основании пирамиды

$\forall_{ABCDPab}(\text{шар}(a)\ \&\ \text{центр}(P, a)\ \&\ a\ \text{вписана в}\ b\ \&\ \text{пирамида}(b)\ \&$
$\text{основание}(\text{фигура}(ABC), b)\ \&\ \text{Вершина}(D, b) \to \text{биссектрплоск}(C, \text{прямая}(AB), D, P))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

3.60 Приемы, связанные с символом "сфера"

Утверждение "сфера(A)" означает, что A есть сфера. Для этого символа создан пока единственный прием:

$\forall_{AQa}(\text{сфера}(a)\ \&\ A \in a\ \&\ \text{центр}(Q, a) \to l(AQ) = \text{радиус}(a))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровни срабатывания равны 2 и 5.

3.61 Приемы, связанные с символом "площповерхности"

Выражение "площповерхности(A)" обозначает площадь поверхности тела A. Все приемы этого раздела имеют заголовок "второйтерм".

Куб

$\forall_{ABa}$(куб(a) & ребро(отрезок(AB), a) $\rightarrow$ площповерхности(a) $= 6l(AB)^2$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Прямоугольный параллелепипед

$\forall_{ABCDEa}$(параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & грань(фигура($ABCD$), a) & ребро(отрезок(AE), a) & $\neg(E \in$ плоскость(ABC)) $\rightarrow$ площповерхности(a) $=$ $2(l(AB)l(BC) + l(AB)l(AE) + l(BC)l(AE)))$

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

Прямой параллелепипед

$\forall_{ABCDEa}$(параллелепипед(a) & прямой(a) & основание(фигура($ABCD$), a) & ребро(отрезок(AE), a) & $\neg(E \in$ плоскость(ABC)) $\rightarrow$ площповерхности(a) $=$ $2S$(фигура($ABCD$)) $+ 2l(AE)(l(AB) + l(BC)))$

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

Призма

$\forall_{ab}$(призма(a) & прямой(a) & основание(b, a) $\rightarrow$ площповерхности(a) $= 2S(b) +$ периметр(b)высота(a))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFGa}$(призма(a) & основание(фигура($ABCD$), a) & грань(фигура($BEFC$), a) & грань(фигура($CDGF$), a) & $\neg(F \in$ плоскость(ABC)) $\rightarrow$ площповерхности(a) $=$ $2(S$(фигура($ABCD$)) $+ S$(фигура($BEFC$)) $+ S$(фигура($CDGF$))))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Правильная пирамида

$\forall_{ABCabin}$(пирамида(a) & правильный(a) & Вершина(A, a) & основание(фигура(b), a) & $l(b) = n$ & $i \in \{1, \dots, n\}$ & $B = b(i)$ & $C = b(i (\mathrm{mod}\ n) + 1)$ $\rightarrow$ площповерхности(a) $=$ nS(фигура(ABC)) $+ S$(фигура(b)))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками. Пятый, седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Шестой антецедент выделен указателем "программа" - он перечисляет номера i вершин основания. На прямой BC выделена точка, соединенная рассматриваемой в задаче прямой с вершиной A. Уровень срабатывания равен 3. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 4. В ней отброшено требование к прямой BC.

Шар и сфера

$\forall_a(\text{шар}(a) \to \text{площповерхности}(a) = 4\pi(\text{радиус}(a))^2)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем вместо символа "шар"допускается символ "сфера". Уровень срабатывания равен 2.

Цилиндр

$\forall_{ABCa}(\text{цилиндр}(a)\ \&\ \text{основание}(\text{Круг}(ABC), a) \to \text{площповерхности}(a) = 2\pi l(AB)^2 + 2\pi l(AB)\text{высота}(a))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Конус

$\forall_{ABCa}(\text{конус}(a)\ \&\ \text{основание}(\text{Круг}(ABC), a) \to \text{площповерхности}(a) = \pi l(AB)(\sqrt{l(AB)^2 + (\text{высота}(a))^2} + l(AB)))$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

3.62 Приемы, связанные с символом "объем"

Выражение "объем(A)" обозначает объем геометрического тела A, либо материального твердого или жидкого тела A. В данном разделе ограничимся геометрическими телами; приемы для объемов материальных тел будут рассмотрены в главе, посвященной компьютерному решению задач по элементарной физике.

Куб

$\forall_{ABa}(\text{куб}(a)\ \&\ \text{ребро}(\text{отрезок}(AB), a) \to \text{объем}(a) = l(AB)^3)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Параллелепипед

1. Прямоугольный параллелепипед.

   $\forall_{ABCDEFa}(\text{параллелепипед}(a)\ \&\ \text{прямоугольный}(a)\ \&\ \text{грань}(\text{фигура}(ABCD))\ \&\ \text{ребро}(\text{отрезок}(AE), a)\ \&\ \neg(E \in \text{плоскость}(ABC)) \to \text{объем}(a) = l(AE)l(AB)l(BC))$

   $\forall_{ABCDEFa}(\text{параллелепипед}(a)\ \&\ \text{прямоугольный}(a)\ \&\ \text{грань}(\text{фигура}(DCBA))\ \&\ \text{ребро}(\text{отрезок}(AE), a)\ \&\ \neg(E \in \text{плоскость}(ABC)) \to \text{объем}(a) = l(AE)l(AB)l(BC))$

Заголовки приемов - "второйтерм". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания каждого приема равны 2 и 5.

2. Прямой параллелепипед.

   $\forall_{ABCDEFa}$(параллелепипед(a) & прямой(a) & основание(фигура($ABCD$))
   & ребро(отрезок(AE), a) & $\neg$($E \in$ плоскость(ABC)) $\rightarrow$
   объем(a) $=$ S(фигура($ABCD$))$l(AE)$)

   Аналогично предыдущему.

3. Выражение объема параллелепипеда через длины ребер и углы между ними.

   $\forall_{ABCDa}$(параллелепипед(a) & ребро(отрезок(AB), a) & ребро(отрезок(AC), a)
   & ребро(отрезок(AD), a) & разныеточки(B, C) & разныеточки(B, D) &
   разныеточки(C, D) & $\angle(BAC) = f$ & $\angle(BAD) = g$ & $\angle(CAD) = h \rightarrow$ объем(a) $=$
   $l(AB)l(AC)l(AD)\sqrt{1 + 2\cos f \cos g \cos h - (\cos f)^2 - (\cos g)^2 - (\cos h)^2}$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Попытка применения его начинается с усмотрения выражения "объем(a)". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - обрабатываются проверочными операторами. Три последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормугол", причем выражения f, g, h не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 5.

Призма

$\forall_{ab}$(призма(a) & основание(b, a) $\rightarrow$ объем(a) $=$ $S(b)$высота(a))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

Пирамида

$\forall_{ab}$(пирамида(a) & основание(b, a) $\rightarrow$ объем(a) $=$ $S(b)$высота(a)$/3$)

Аналогично предыдущему. Дополнительно требуется, чтобы в задаче не рассматривалась прямоугольная система координат. Кроме того, в задачах на описание, имеющих цель "известно", прием блокируется.

Шар

$\forall_{a}$(шар(a) $= 4\pi$(радиус(a))$^3/3$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Цилиндр

$\forall_{ABCa}$(цилиндр(a) & основание(Круг(ABC), a) $\rightarrow$ объем(a) $= \pi l(AB)^2$высота(a))

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCab}$(полузакрцилиндр(B) & $A =$ слойтела(огрцилиндр(B), C, a, b) $\rightarrow$
объем(A) $= S(C)(b - a)$)

Этот прием, хотя формально и относится к числу геометрических, подсказан задачами по элементарной физике. Утверждение "полузакрцилиндр(B)" обозначает, что B есть объединение боковой поверхности прямого цилиндра с одним из его оснований. Выражение "огрцилиндр(B)" обозначает прямой цилиндр, восстанавливаемый по ограничивающей поверхности B. Наконец, выражение "слойтела(P, C, a, b)" обозначает часть геометрического тела P, состоящую из точек, расстояние которых до плоскости основания C этого тела не менее a и не более b. Прием имеет заголовок "вывод". Он применяется при усмотрении в посылке задачи на исследование выражения "объем(A)". Уровень срабатывания равен 3.

Конус

$\forall_{ABCa}$(конус(a) & основание(Круг(ABC), a) $\rightarrow$ объем(a) $= \pi l(AB)^2$высота(a)/3)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Цилиндрическое тело

$\forall_{AKab}$(цилиндричтело(A, K) & S(нижнееоснование(A, K)) $= a$ &
Высотаповерхн(верхнееоснование(A, K), K) $-$
Высотаповерхн(нижнееоснование(A, K), K) $= b \rightarrow$ объем(A) $= ab$)

Утверждение "цилиндричтело(A, K)" означает, что A есть цилиндрическое геометрическое тело, основания которого имеют ненулевую площадь и расположены в прямоугольной системе координат K горизонтально. Выражения "нижнееоснование(A, K)", "верхнееоснование(A, K)" обозначают, соответственно, нижнее и верхнее основания цилиндрического тела A , расположенного не "горизонтальным" образом (т.е. не лежащего на боку) относительно прямоугольной системы координат K. Выражение "Высотаповерх(B, K)" обозначает z - координату плоской фигуры B, расположенной горизонтально относительно прямоугольной системы координат K. Заметим, что перечисленные понятия возникали при обучении решателя исключительно в задачах по элементарной физике.

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{AKab}$(цилиндричтело(A, K) & S(нижнееоснование(A, K)) $= a$ & объем(A) $= b \rightarrow$
$b = a$(Высотаповерхн(верхнееоснование(A, K), K) $-$
Высотаповерхн(нижнееоснование(A, K), K)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCpq}$($C =$ слойтела(огрцилиндр(A), B, p, q) $\rightarrow$ объем(C) $= S(B)(q - p)$)

Выражение "огрцилиндр(A)" обозначает прямой цилиндр, ограниченный своей боковой поверхностью A, быть может, дополненной одним либо двумя основаниями. Выражение "слойтела(D, B, p, q)" обозначает часть геометрического тела D, состоящую из точек, расстояние которых до онования B этого тела не менее p и не более q. Эти понятия тоже возникали лишь в физических задачах.

Прием имеет заголовок "вывод". Попытка его применения реализуется при усмотрении выражения "объем(C)". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

Неотрицательность объема

$\forall_{Aa}$(объем$(A) = a$ & $a < 0 \rightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит неизвестных; в нем встречается символ "минус". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

Пустое множество

объем$(\emptyset) = 0$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Теоретико - множественные операции

1. Объединение.

   $\forall_{abc}(a = b \cup c$ & непересек$(b, c) \rightarrow$ объем$(a) =$ объем$(b) +$ объем$(c))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "объем(b)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

2. Разность.

   $\forall_{ABC}(A = B\ C$ & $C \subseteq B \rightarrow$ объем$(A) =$ объем$(B) -$ объем$(C))$

   Аналогично предыдущему, но попытка применения приема начинается с усмотрения выражения "объем(A)".

Эквивалентные преобразования равенств, содержащих объем

1. Выражение одного объема через другой из линейного соотношения.

   $\forall_{ABab}(\neg(a = 0) \rightarrow a$ объем$(A) = b$ объем$(B) \leftrightarrow$ объем$(A) = b$ объем$(B)/a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABabcd}(\neg(a = 0) \rightarrow a$ объем$(A) + c = b$ объем$(B) + d \leftrightarrow$ объем$(A) =$
   $(b$ объем$(B) + d - c)/a)$

   Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Допускаются вырожденные нулевые либо единичные значений. При этом запрещаются случаи, когда одна из частей заменяемого равенства имеет заголовок "объем". Уровень срабатывания равен 4.

2. Подобные члены с объемами.

   $\forall_{Aabcde}(a$ объем$(A) + b = (c$ объем$(A) + d)/e \leftrightarrow (ae - c)$объем$(A) + be = d)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение e не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

3. Устранение дроби, содержащей объем.

   $\forall_{Aabcd}(\neg(b = 0)$ & $\neg($объем$(A) = 0)$ & $\neg(d = 0) \rightarrow a/(b$ объем$(A)) = c/d \leftrightarrow$ $ad = bc$ объем$(A))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если d равно 1, а c - невырожденный числовой атом, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

3.63 Приемы, связанные с символом "боковаяповерхность"

Выражение "боковаяповерхность(A)" обозначает боковую поверхность тела A. В отличие от символа "площповерхности", здесь имеется в виду сама поверхность, а не ее площадь. Внутри посылок вида "актив$(S($боковаяповерхность$(\ldots)))$" замены блокируются.

Прямоугольный либо прямой параллелепипед

$\forall_{ABCDEa}($параллелепипед(a) & прямоугольный(a) & основание(фигура$(ABCD), a)$ & ребро(отрезок$(AE), a)$ & $\neg(E \in$ плоскость$(ABC)) \rightarrow S($боковаяповерхность$(a)) =$ $2l(AE)(l(AB) + l(BC)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Вместо символа "прямоугольный" допускается символ "прямой". Уровень срабатывания равен 4.

Призма

$\forall_{ab}($призма(a) & прямой(a) & основание$(b, a) \rightarrow S($боковаяповерхность$(a)) =$ периметр(b)высота$(a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 3.

Пирамида

1. Правильная пирамида.

   $\forall_{ABCabin}($пирамида(a) & правильный(a) & Вершина(A, a) & основание(фигура$(b), a)$ & $l(b) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $B = b(i)$ & $C = b(i(\bmod n) + 1) \rightarrow S($боковаяповерхность$(a)) = nS($фигура$(ABC)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм. Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками. Пятый, седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Шестой антецедент выделен указателем "программа". В задаче рассматривается прямая, проходящая через вершину A и через какую-либо уже выделенную точку прямой BC. Уровень срабатывания приема равен 3. Создана также версия, срабатывающая на уровне 4. В ней отброшено ограничение, связанное с проходящей через A прямой.

2. Общий случай.

   $\forall_{Aabn}$(пирамида(a) & Вершина(A, a) & основание(фигура(b), a) & $l(b) = n \rightarrow$ S(боковаяповерхность(a)) $= \sum_{i=1}^{n} S$(фигура($b(i)b(i(\bmod n) + 1)A$)))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка "правильный(a)". Уровень срабатывания равен 4.

Цилиндр

$\forall_{ABCa}$(цилиндр(a) & основание(Круг(ABC), a) $\rightarrow S$(боковаяповерхность(a)) $=$ $2\pi l(AB)$высота(a))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Конус

$\forall_{ABCa}$(конус(a) & основание(Круг(ABC), a) $\rightarrow S$(боковаяповерхность(a)) $=$ $\pi l(AB)\sqrt{l(AB)^2 + \text{высота}(a)^2}$)

Аналогично предыдущему.

3.64 Приемы, связанные с символом "двугранугол"

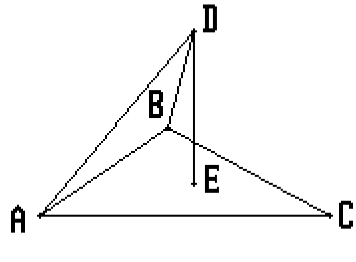
Выражение "двугранугол(A, p, B)" обозначает величину двугранного угла, вершиной которого является прямая p, причем первая полуплоскость определяется точкой A вне прямой p, а вторая - точкой B вне прямой p.

Ввод в рассмотрение плоскостей, являющихся сторонами двугранного угла

$\forall_{ABC}$(актив(плоскость(ABC)))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применение при усмотрении в посылке выражения "двугранугол(A, прямая(BC), D)". Предварительно проверяется, что проходящая через точки A, B, C плоскость пока не рассматривается. Ввиду симметрии, при идентификации возможна перестановка операндов A, D. Уровень срабатывания равен 1.

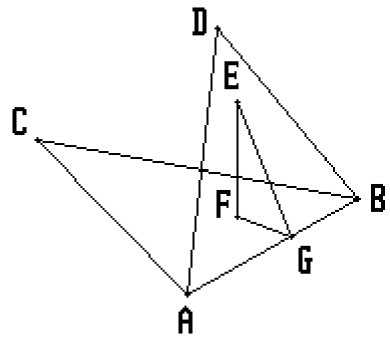
Проекция точки одной стороны острого двугранного угла на другую сторону



$\forall_{ABCDE}(0 < \pi/2 -$двугранугол$(D,$прямая$(AB), C)$ & прямая$(DE) \perp$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ однасторона$(E, C,$прямая$(AB)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "двугранугол$(D,$прямая$(AB), C)$)". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Проведение перпендикуляра из точки одной стороны двугранного угла к его ребру, если из данной точки уже проведен перпендикуляр к противоположной стороне



$\forall_{ABCDEFG}(E \in$ плоскость(ABD) & $F \in$ плоскость(ABC) & прямая$(EF) \perp$ плоскость(ABC) & однасторона$(C, F,$прямая$(AB))$ & однасторона$(D, E,$ прямая$(AB))$ & $\neg(D \in$ плоскость$(ABC)) \rightarrow G -$ точка & $G \in$ прямая(AB) & прямая$(EG) \perp$ прямая(AB) & двугранугол$(D,$прямая$(AB), C) = \angle(EGF))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "двугранугол$(D,$прямая$(AB), C)$". Первые три антецедента выделены указателем "усм", последние три - обрабатываются проверочными операторами. Основание G опущенного из точки E на прямую AB перпендикуляра пока не введено, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 5.

Нормализатор "нормдвугранугол"

Создан нормализатор общей стандартизации "нормдвугранугол". Единственный прием этого нормализатора использует равенство из посылок, дающее явное выражение для величины двугранного угла.

3.65 Приемы, используемые в геометрических задачах на построение

Планиметрическая задача на построение формализуется в решателе как задача на описание, не имеющая цели "известно ...". Ее неизвестными служат точки чертежа, а известными - заданные численные параметры. Соответственно, все описание чертежа сосредотачивается в условиях такой задачи, а посылки могут содержать только ограничения на параметры. Ответом задачи служит последовательность утверждений, описывающих стандартные шаги построения требуемого чертежа. В этих шагах допускается произвольный выбор первой точки, ограниченный выбор второй, и далее

- цепочка однозначных или допускающих конечное число вариантов доопределений остальных точек. Требуется, чтобы истинность утверждений ответа гарантировала истинность исходных условий. В ответах задач на построение используются специальные обозначения, позволяющие выразить вспомогательные точки и линии через уже найденные. Большинство этих обозначений укладываются в рамки традиционных построений "циркулем и линейкой". Если целевая установка задачи допускает, последнее ограничение может быть снято.

Схема решения задачи на построение такова. Прежде всего, вводится и сканируется блок анализа. Его неизвестными служат все неизвестные исходной задачи. Цель "известно" отсутствует. Сначала срабатывает прием, выбирающий привязку первых двух точек. Эти точки переводятся в разряд известных. Далее срабатывают приемы, доопределяющие прочие точки, в том числе вспомогательные. Каждый раз точка переводится из неизвестных в известные. Если посылка определяет нахождение точек $X_1, \ldots, X_n$, то она помечается комментарием (найдено $X_1 \ldots X_m$). Когда все исходные неизвестные точки оказываются найдены, выбирается последовательность P участвующих в их определении посылок, и сканирование блока анализа обрывается. После проверки того, что исходные условия задачи суть следствия утверждений P, выдается ответ - конъюнкция этих утверждений. Для проверки решается задача на доказательство. Последние шаги выполняются реализованным на ЛОСе общим приемом решения задач на исследование, приведенным во втором томе монографии (см. подраздел "усмотрение ответа внешней задачи на описание").

Напомним список понятий, используемых в ответах планиметрической задачи на построение. Выражение "тчк(A, B, c)" обозначает точку, отложенную на ориентированной прямой AB от точки A на величину c. В направлении точки B значения c положительны, в противоположном направлении - отрицательны. Выражение "Биссектриса(A, B, C)" обозначает прямую, являющуюся биссектрсой угла ABC. Выражение "окр(A, b)" обозначает окружность радиуса b с центром в точке A. Выражение "кругградиуса(A, b)" обозначает круг радиуса b с центром в точке A. Выражение "поворотпрямой(A, B, C, d)" обозначает прямую, получаемую поворотом луча AB на угол d в направлении полуплоскости, содержащей точку C. Выражение "доляотрезка(A, B, c)" обозначает точку D ориентированной прямой AB, для которой отношение ориентированной длины отрезка AD к длине отрезка AB равно c. Выражение "перпендикуляр(A, B)" обозначает прямую, проведенную через точку B перпендикулярно прямой A. Выражение "параллелпрямая(A, B)" обозначает прямую, параллельную прямой A и проходящую через точку B. Выражение "вписаннаяокружность(A)" обозначает окружность, вписанную в фигуру A. Выражение "параллель(A, b, C)" обозначает прямую, параллельную прямой A, находящуюся от нее на расстоянии b и расположенную в той же полуплоскости, что и точка C. Наконец, утверждение "симметричны(A, B, C)" означает, что точки A и B симметричны относительно точки, прямой либо плоскости C.

Заметим, что обучение решателя планиметрическим задачам на построение находится пока в начальной стадии - было проработано всего около двух десятков задач. Видимо, этого достаточно для иллюстрации общей схемы их решения. Некоторые приемы решения задач на построение относились к "обычным" геометрическим понятиям и были приведены ранее. В данном разделе приводятся лишь приемы, связанные со специальными понятиями, перечисленными выше.

Приемы, связанные с символом "тчк"

1. Числовая параметризация точек на прямой.

   $\forall_{ABx}$(разныеточки$(A, B) \to x \in$ прямая$(AB) \leftrightarrow \exists_a(a-$число $\&\ x =$ тчк$(A, B, a)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная x - неизвестная, выражения A и B не содержат неизвестных. Если x встречается в другом условии, то либо это условие имеет вид "точка(x)", либо x расположено только внутри выражений "$l(xC)$", где C - точка прямой AB. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 2.

2. Вывод следствий.

   $\forall_{ABCa}(C =$ тчк$(A, B, a) \to l(AC) = |a|)$

   $\forall_{ABCa}(C =$ тчк$(A, B, a) \to C \in$ прямая$(AB))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCa}(0 < a\ \&\ C =$ тчк$(A, B, a) \to \neg(A \in$ интервал$(BC)))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 1.

3. Принадлежность точки отрезку.

   $\forall_{ABx}(A \in$ отрезок$(B$ тчк$(A, B, x)) \leftrightarrow x \leq 0)$

   Прием применяется к подутверждению условия задачи на описание. Переменная x - неизвестная. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABax}(a = l(AB) \to B \in$ отрезок$(A$ тчк$(A, B, x)) \leftrightarrow a \leq x)$

   $\forall_{ABax}(a = l(AB) \to$ тчк$(A, B, x) \in$ отрезок$(AB) \leftrightarrow 0 \leq x\ \&\ x \leq a)$

   Прием применяется к подутверждению условия задачи на описание. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная x идентифицируется с неизвестной. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

4. Исключение символа "тчк".

   $\forall_{ABa}(a = l(AB) \to$ тчк$(A, B, a) = B)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{AB}($тчк$(A, B, 0) = A)$

   Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ABa}(a = l(AB) \to \mathrm{set}_C(\exists_x(C =$ тчк$(A, B, x)\ \&\ x-$число $\&\ 0 \leq x\ \&\ 0 \leq a-x)) =$ отрезок$(AB))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

5. Определение расстояния с "тчк".

   Все приемы этого пункта имеют заголовок "второйтерм".

   $\forall_{ABa}(l(A$ тчк$(A, B, a)) = |a|)$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCa}(C = \text{тчк}(A, B, a) \to l(AC) = a)$

Точка привязка расположены в антецеденте, идентифицируемом с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Однако, прием выполняет замену, а не вывод. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCa}(C = \text{тчк}(A, B, a) \to l(BC) = |l(AB) - a|)$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCDa}(C = \text{тчк}(A, B, a)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AD) \to l(CD) = |l(AD) - a|)$

Аналогично предыдущему, причем второй антецедент выделен указателем "усм".

$\forall_{ABa}(l(B\ \text{тчк}(A, B, a)) = |l(AB) - a|)$

Прием применяется к подвыражению условия задачи на описание. Выражения A, B не содержат неизвестных, а выражение a - содержит. Уровень срабатывания равен 4.

6. Ориентация равенства.

   $\forall_{ABCa}(C = \text{тчк}(A, B, a) \leftrightarrow \text{тчк}(A, B, a) = C)$

   Прием применяется к посылке, у которой C - переменная, причем либо она известна, либо выражение "тчк(A, B, a)" содержит неизвестные. Таким образом, инициируется исключение неизвестных подвыражений "тчк$(\ldots)$". Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

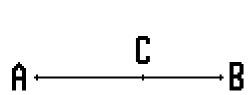
7. Точка на координатной оси, имеющая известные координаты.

   $\forall_{ABCDKa}(K = (A, B, C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, D) \to$
   $\text{тчкоорд}(K, (a, 0)) = \text{тчк}(A, D, a))$

   $\forall_{ABCDKa}(K = (A, B, C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, D) \to$
   $\text{тчкоорд}(K, (0, a)) = \text{тчк}(A, D, a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Выражения A, D суть переменные, не являющиеся вспомогательными параметрами. В то же время, все переменные выражения a суть вспомогательные параметры. Уровень срабатывания равен 4.

8. Определение точки, отстоящей от начала луча на заданное расстояние.

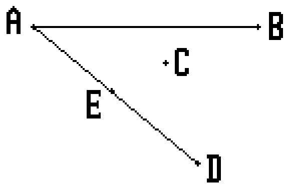
   

   $\forall_{ABCa}(l(AC) = a\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{разныеточки}(A, B)\ \&$
   $\text{точкалуча}(A, B, C) \to \text{тчк}(A, B, a) = C)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Второй и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения A, B, a не содержат неизвестных, переменная

C - неизвестная. Указатель "найдено(C)" переводит переменную C в разряд известных. Выводимое равенство сопровождается комментарием (найдено C). Уровень срабатывания равен 3.

9. Ввод вспомогательной точки, задающей направление луча и необходимой при определении другой точки, отстоящей на заданное расстояние от начала луча.



$\forall_{ABCDEa}(l(AD) = a$ & актив(прямая(AB)) & однасторона(C, D, прямая(AB)) & $\neg(C \in$ прямая$(AB)) \rightarrow E -$ точка & $E \in$ прямая(AD) & однасторона(E, C, прямая(AB)) & $\neg(A = E))$

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками планиметрической задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Второй антецедент выделен указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Переменная D - неизвестная. Выражения A, B, C не содержат неизвестных. Терм "прямая(AD)", после обработки его нормализаторами "нормпрямая" и "нормизвестно", также не содержит неизвестных. Заметим, что реализованный на ЛОСе нормализатор "нормизвестно" обеспечивает переход от содержащего неизвестные выражения X к выражению без неизвестных M, используя посылку $M = X$. Потребность в нем возникла из-за того, что в специальных случаях ориентация частей равенства может оказаться "от известного к неизвестному". На луче AD пока отсутствует известная точка, отличная от точки A, и прием вводит такую точку E. Она регистрируется как известная, причем выводимые посылки помечаются комментарием (найдено E). Вводятся дополнительные посылки "$\neg(A \in$ интервал$(DE))$, $E \in$ прямая(AD)", причем здесь берется выражение для прямой AD, не обработанное никакими нормализаторами. Эти посылки уже не помечаются комментарием (найдено E). Уровень срабатывания приема равен 5.

$\forall_{ABCDa}$(актив($l(AC)$) & $l(AC) = a$ & $C \in$ прямая$(AB) \rightarrow D -$ точка & $D \in$ прямая(AB) & $\neg(A = D))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой планиметрической задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Переменная C - неизвестная. Выражение a, а также нормализованное выражение для прямой AB не содержат неизвестных. На прямой AB пока отсутствует известная точка, отличная от точки A, причем такая, что известно ее расположение относительно точек A, C. Прием вводит такую точку D, регистрируемую как известная. Новые посылки помечаются комменатрием (найдено D). Вводятся, уже без этого комментария, дополнительными посылками "$\neg(A \in$ интервал$(CD)), D \in$ прямая(AB)". Здесь выражение для прямой AB не обрабатывается никакими нормализаторами. Уровень срабатывания равен 6.

10. Расшифровка обозначения "тчк(...)" в задаче на доказательство.

    $\forall_{ABCa}(0 \le a \to C$ – точка & $C \in$ прямая(AB) & $\neg(A \in$ интервал$(BC))$ & $l(AC) = a$ & тчк$(A, B, a) = C)$

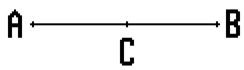
    Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в условии либо посылке задачи на доказательство выражения "тчк(A, B, a)". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "тчк$(A, B, a) = P$", где P - переменная. Прием вводит новую переменную C. Уровень срабатывания равен 2.

11. Усмотрение взаимного расположения точек.

    $\forall_{ABCa}(0 \le a$ & тчк$(A, B, a) = C \to \neg(A \in$ интервал$(BC)))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

12. Определение середины отрезка.

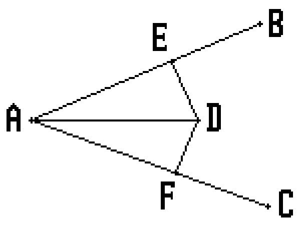


    $\forall_{ABCa}(l(AC) = l(BC)$ & $C \in$ прямая(AB) & разныеточки$(A, B) \to$ тчк$(A, B, l(AB)/2) = C)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент, выделенный указателем "равно", идентифицируется с одной либо с двумя посылками задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Второй антецедент выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения A и B не содержат неизвестных, переменная C - неизвестная. Прием переводит ее в разряд известных и помечает выведенную посылку комментарием (найдено C). Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "Биссектриса"

1. Ввод биссектрисы в задачах на построение.



    $\forall_{ABCDEF}($прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(DF) \perp$ прямая(AC) & $l(DE) = l(DF)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & точкалуча(A, B, E) & точкалуча(A, C, F) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая$(AC) \to$ Биссектриса$(B, A, C) =$ прямая$(AD))$

    Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно". Третий антецедент выделен указателем "равно", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения A, B, C не содержат неизвестных. Нормализованное выражение для прямой AD содержит неизвестные. Прием вводит обозначение этой прямой, задающее ее через известные параметры. Уровень срабатывания равен 4.

2. Ориентация равенства.

   $\forall_{ABCD}(A = \text{Биссектриса}(B, C, D) \leftrightarrow \text{Биссектриса}(B, C, D) = A)$

   Прием применяется к посылке, не помеченной комментарием "ориентацияравенства". После преобразования посылка снабжается этим комментарием. Выражение A имеет заголовок "прямая". Уровень срабатывания равен 0.

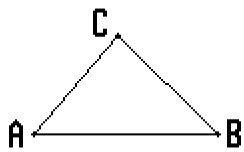
3. Расшифровка посылки задачи на доказательство.

   $\forall_{ABCDE}(A \in \text{Биссектриса}(B, C, D) \leftrightarrow \text{биссектриса}(BCDE)\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
   $A \in \text{прямая}(CE))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство. Он вводит новую переменную E. Уровень срабатывания приема равен 2.

Приемы, связанные с символом "окр"

1. Ввод в рассмотрение пересечения двух окружностей при решении задач на построение.



   $\forall_{ABCab}(l(AC) = a\ \&\ l(BC) = b\ \&\ \text{разныеточки}(A, B) \rightarrow$
   $C \in \text{окр}(A, a) \cap \text{окр}(B, b))$

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения A, B, a, b не содержат неизвестных, переменная C идентифицируется с неизвестной. Прием переводит эту переменную в разряд известных и помечает выведенную посылку комментарием (найдено C). Фактически, этот прием реализует классический шаг построения циркулем и линейкой, заключающийся в нахождении точки пересечения двух окружностей. Уровень срабатывания равен 4.

2. Расшифровка условия принадлежности окружности.

   $\forall_{ABa}(A \in \text{окр}(B, a) \leftrightarrow A - \text{точка}\ \&\ l(AB) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на доказательство. Уровень срабатывания равен 1.

3. Переход к явному описанию.

   $\forall_{ABa}(A - \text{точка}\ \&\ l(AB) = a \leftrightarrow A \in \text{окр}(B, a))$

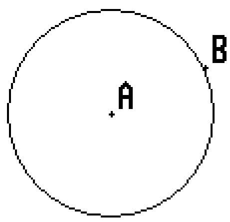
Прием заменяет группу условий задачи на описание, не имеющей цели "известно". Переменная A идентифицируется с неизвестной, причем она не входит в выражение B и в прочие условия задачи. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

4. Переход к обозначению "окружность(...)" при усмотрении известной точки, принадлежащей окружности.

   $\forall_{AKabcdr}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (c, d)$ & $(c-a)^2 + (d-b)^2 - r^2 = 0 \rightarrow$ окр(тчкоорд$(K, (a, b)), r)$ = окружность(тчкоорд$(K, (a, b))A)$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Напомним, что наличие такой цели ориентирует решатель исключать описатели из ответа. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Переменная A идентифицируется с переменной, не являющейся вспомогательным параметром. Уровень срабатывания равен 2.

5. Ввод обозначения "окр(...)" для неизвестной окружности с известными центром и радиусом.



   $\forall_{ABa}$(актив(окружность(AB)) & $l(AB) = a \rightarrow$ окр(A, a) = окружность(AB))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражения A, a не содержат неизвестных, а выражение B - содержит. Выражение "окружность(AB)", даже после обработки нормализатором "нормизвестно", тоже содержит неизвестные. Выводимая посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 3.

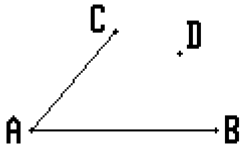
6. Переход к обозначению "окружность(...)" в задаче на вычисление.

   $\forall_{ABr}(B \in$ окр$(A, r) \rightarrow$ окр(A, r) = окружность(AB) & $l(AB) = r)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Выражение r не содержит неизвестных. Задача не имеет посылки вида "окр(A, r) = окружность(AX)". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "поворотпрямой"

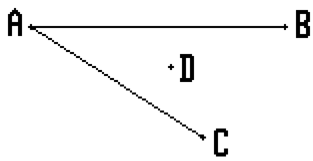
1. Ввод в рассмотрение прямой, полученной при повороте луча на известный угол.



$\forall_{ABCDa}(\angle(BAC) = a$ & разныеточки(A, B) & $\neg(D \in$ прямая$(AB))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \to$ поворотпрямой$(A, B, D, a) =$ прямая$(AC))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, не имеющей цели "известно". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменная C - неизвестная; выражения a, A, B, D не содержат неизвестных. Нормализованное выражение для прямой AC содержит неизвестные. Выводимая посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 4.

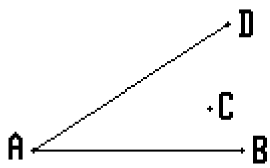
2. Ввод вспомогательной точки, необходимой для выбора полуплоскости, в которой размещается угол.



$\forall_{aABCD}($актив$(\angle(BAC))$ & $\angle(BAC) = a \to D -$ точка & $\neg(D \in$ прямая$(AB)))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой планиметрической задачи на исследование, не имеющей цели "известно", первый - выделен указателем "усм". Переменная C - неизвестная; выражения a, A, B не содержат неизвестных. Отсутствует посылка вида "$\neg(X \in$ прямая$(AB))$, такая, что усматривается размещение точек X, C по одну сторону от прямой AB. Прием вводит новую точку D, регистрируя переменную D как известную. Выводимые посылки снабжаются комментарием (найдено D). Дополнительно выводится посылка "однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$". Уровень срабатывания равен 6.

3. Расшифровка обозначения "поворотпрямой$(\ldots)$" в посылках задачи на доказательство.



$\forall_{ABCDa}(D \in$ поворотпрямой(A, B, C, a) & разныеточки(A, D) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \to \angle(BAD) = a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, два других - обрабатываются проверочными операторами. Для блокировки повтора используется комментарий "(поворотпрямой посылка поворотпрямой(A, B, C, a))". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDa}(D -$ точка & поворотпрямой$(A, B, C, a) =$ прямая(AD) &
$\angle(BAD) = a$ & одностороне$(C, D,$ прямая$(AB))$ & $\neg(A = D))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство выражения "поворотпрямой(A, B, C, a)". Как и выше, блокировка повтора обеспечивается комментарием "(поворотпрямой ...)". Прием вводит новую точку D. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "доляотрезка"

1. Усмотрение точки, делящей отрезок в заданном отношении, если известны координаты точек.

   $\forall_{ABKabcdprxy}(c - a = p$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ &
   $\neg(p = 0)$ & $r = (x - a)/p$ & $(x - a)(d - b) = p(y - b) \to$ тчкоорд$(K, (x, y)) =$ доляотрезка$(A, B, r))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Такие задачи возникают в аналитической геометрии для описания геометрических мест точек. Сначала используются координаты, а затем задача на преобразование с целью "класс" обеспечивает бескоординатную переформулировку результата. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменные A, B идентифицируются с переменными. Если r - константное выражение, то уровень срабатывания равен 3, иначе он равен 5.

   $\forall_{ABKabcpry}(p = c - b$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (a, c)$ &
   $\neg(p = 0)$ & $r = (y - b)/p \to$ тчкоорд$(K, (a, y)) =$ доляотрезка$(A, B, r))$

   Аналогично предыдущему.

2. Концы отрезка.

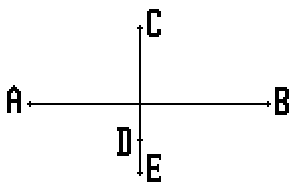
   $\forall_{AB}($доляотрезка$(A, B, 0) = A)$

   $\forall_{AB}($доляотрезка$(A, B, 1) = A)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "перпендикуляр"

1. Представление неизвестной прямой как результата проведения через известную точку прямой, перпендикулярной известной прямой.



   $\forall_{ABCDE}($прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $E \in$ прямая$(CD) \to$
   перпендикуляр(прямая$(AB), E) =$ прямая$(CD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражение E, а также нормализованное выражение для прямой AB не содержат неизвестных. Нормализованное выражение для прямой CD содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 2.

2. Расшифровка обозначения "перпендикуляр(...)" в посылках задачи на доказательство.

   $\forall_{ABCDE}(D-$точка & $E-$точка & $\neg(D=E)$ & перпендикуляр(прямая$(AB),C)=$ прямая(DE) & $C\in$ прямая(DE) & прямая$(AB)\perp$ прямая$(DE))$

   Чертеж прежний. Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство выражения "перпендикуляр(прямая(AB),C)". Прием вводит новые точки D,E. Для блокировки повторов служит специальный комментарий. Уровень срабатывания равен 3.

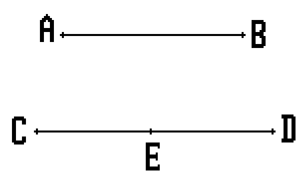
3. Доказательство условия равенства перпендикуляра заданной прямой.

   $\forall_{ABCDE}($перпендикуляр(прямая$(AB),C)=$ прямая$(DE)\leftrightarrow C\in$ прямая(DE) & прямая$(AB)\perp$ прямая$(DE))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "параллелпрямая"

1. Представление неизвестной прямой как результата проведения через известную точку прямой, параллельной известной прямой.

   $\forall_{ABCDE}($прямая$(AB)\parallel$ прямая(CD) & $E\in$ прямая$(CD)\to$ параллелпрямая(прямая$(AB),E)=$ прямая$(CD))$

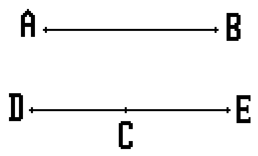
   Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно". Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Выражение E, а также нормализованное выражение для прямой AB не содержат неизвестных. Нормализованное выражение для прямой CD содержит неизвестные. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

2. Точка, через которую проводится параллельная прямая, лежит на исходной прямой.

   $\forall_{ABC}(C\in$ прямая$(AB)\to$ параллелпрямая(прямая$(AB),C)=$ прямая$(AB))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

3. Расшифровка обозначения "параллелпрямая(...)" в посылках задачи на доказательство.

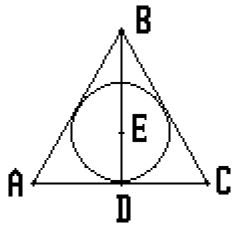


$\forall_{ABCDE}(D-$точка & $E-$точка & $\neg(D = E)$ & параллелпрямая(прямая$(AB), C)$ & $C \in$ прямая(DE) & прямая$(AB) \parallel$ прямая$(DE))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "параллелпрямая(прямая(AB),C)" посылки задачи на доказательство. Прием вводит новые точки D, E. Для блокировки повторов служит специальный комментарий. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "вписаннаяокружность"

Пока для этого символа созданы лишь два приема, связанные с усмотрением окружности, вписанной в равнобедренный треугольник. Они применяются в задачах на описание геометрического места точек.



$\forall_{ABCDEabc}(0 < a$ & $l(AB) = b$ & $l(BC) = b$ & $l(AC) = c$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок(AC) & $4a^2(2b + c) - (2b - c)c^2 = 0$ & актив(прямая(BD)) & актив(прямая(AC)) $\rightarrow$ окружность(тчк$(D, B, a)D) =$ вписаннаяокружность(фигура(ABC)))

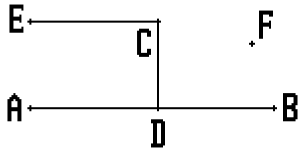
Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Второй, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, седьмой - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}(l(AB) = l(BC)$ & $l(BC) = l(AC)$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ отрезок$(AC) \rightarrow$ окружность(доляотрезка$(D, B, 1/3)D) =$ вписаннаяокружность(фигура(ABC)))

Аналогично предыдущему. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", последние два - указателем "усм".

Приемы, связанные с символом "параллель"

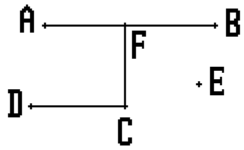
1. Ввод в рассмотрение прямой, параллельной известной прямой, удаленной от нее на известное расстояние и проходящей через неизвестную точку.



$\forall_{ABCDEFa}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $l(CD) = a$ & F – точка & однасторона$(C, F,$ прямая$(AB))$ & $\neg(F \in$ прямая$(AB)) \rightarrow E$ – точка & прямая$(CE) \parallel$ прямая(AB) & параллель(прямая$(AB), a, F) =$ прямая$(CE))$

Прием применяется в задачах на исследование, не имеющих цели "известно". Первый антецедент выделен указателем "усм", и в нем выбрана точка привязки. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a и F, а акже нормализованное выражение для прямой AB не содержат неизвестных. Выражение C содержит неизвестные. Точка C принадлежит либо известной прямой, отличной от CD, либо известной окружности. Через точку C пока не проведена известная прямая, параллельная прямой AB, и прием проводит такую прямую CE, используя новую точку E. Если a не содержит символа "расстояние", то уровни срабатывания равны 3 и 5, иначе - только 5.

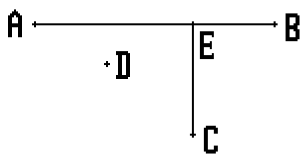
2. Расшифровка обозначения "параллель(...)" в посылках задачи на доказательство.



$\forall_{ABCDEFa}(C$ – точка & D – точка & F – точка & $\neg(C = D)$ & параллель(прямая$(AB), a, E) =$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(CF) \perp$ прямая(AB) & $l(CF) = a$ & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & однасторона$(C, E,$ прямая$(AB)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство выражения "параллель(прямая(AB),a, E)". Вводятся новые точки C, D, F. Для блокировки повтора используется специальный комментарий. Уровень срабатывания равен 3.

3. Ввод вспомогательной точки, необходимой для выбора полуплоскости, в которой находится неизвестная точка.

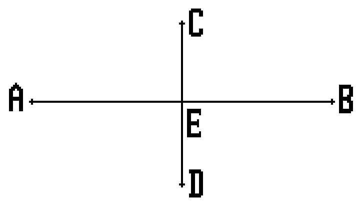


$\forall_{ABCDEa}$(прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & $l(CE) = a$ & $E \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ D – точка & $\neg(D \in$ прямая$(AB)))$

Прием применяется в планиметрических задачах на исследование, не имеющих цели "известно". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Переменная C идентифицируется с неизвестной. Выражение a и нормализованное выражение для прямой AB не содержат неизвестных. Отсутствует посылка вида "$\neg(X \in$ прямая$(AB))$", такая, что усматривается расположение точек C, X по одну сторону от прямой AB. Новая переменная D регистрируется как известная, а выводимые посылки сопровождаются комментарием (найдено D). Дополнительно выводится посылка "однасторона$(C, D,$прямая$(AB))$". Уровень срабатывания равен 6.

Приемы, связанные с символом "симметричны"

1. Усмотрение симметричности известных точек относительно известной прямой.



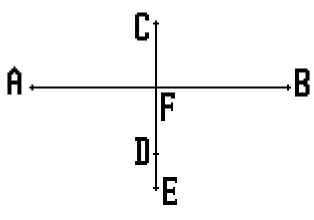
$\forall_{ABCDE}($прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $l(CE) = l(DE) \rightarrow$ симметричны$(C, D,$прямая$(AD)))$

Прием применяется в задаче на исследование, не имеющей цели "известно". Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Выражения C, D, а также нормализованное выражение для прямой AB не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

2. Усмотрение следствий из симметричности точек относительно прямой.

$\forall_{ABCDE}($симметричны$(C, D,$прямая$(AB))$ & $E \in$ отрезок(CD) &
$2l(CE) = l(CD) \rightarrow E \in$ прямая$(AB))$

Чертеж прежний. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEF}($симметричны$(C, D,$прямая$(AB)) \rightarrow E -$ точка & $F -$ точка &
прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CE) & $F \in$ прямая(AB) &
$D \in$ прямая(CE) & $l(CF) = l(DF)$ & разныестороны$(C, D,$прямая$(AB)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Прямая CD пока не рассматривается. Прием вводит в рассмотрение новые точки E, F. Уровень срабатывания равен 3.

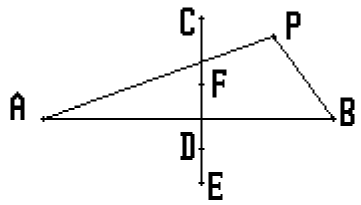
3. Переформулировка условия перпендикулярности в терминах симметричности.

   $\forall_{ABCD}$(перпендикуляр(прямая(CD), тчк($C, D, l(CD)/2$)) = прямая(AB) $\leftrightarrow$ симметричны(C, D, прямая(AB)))

   $\forall_{ABCD}$(разныепрямые(перпендикуляр(прямая(CD), тчк($C, D, l(CD)/2$)), прямая(AB)) $\leftrightarrow \neg$(симметричны(C, D, прямая(AB))))

   Прием имеет заголовок "встоpойтерм". Он применяется при редактировании ответа к подутверждению условия задачи на описание, не содержащего неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

4. Усмотрение следствий из симметричности точек относительно плоскости.



   $\forall_{ABCDEF}$(симметричны(C, D, плоскость(ABP)) $\rightarrow E$ – точка & F – точка & прямая(CE) $\perp$ плоскость(ABP) & $F \in$ прямая(CE) & $F \in$ плоскость(ABP) & $D \in$ прямая(CE) & $F \in$ отрезок(CD) & $l(CF) = l(DF)$)

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Прямая CD пока не рассматривается. Прием вводит новые точки E, F. Уровень срабатывания равен 3.

3.66 Геометрические приемы, реализованные на ЛОСе

Приемы, рассматриваемые в данном разделе, можно найти в оглавлении программ, двигаясь вдоль пути "Приемы решателя - Геометрия". Так как далее используются ссылки на программные переменные ЛОСа, то рекомендуется при чтении описаний приемов иметь возможность просмотра соответствующих программ.

Регистрация в комментарии "известно" геометрической задачи на доказательство всех численных параметров посылок

Прием относится к программе символа "доказать" и срабатывает на уровне 0. Прежде всего, проверяется наличие комментария (раздел A) к текущей задаче на доказательство, у которого в набор A входит символ "геометрия". Проверяется отсутствие комментариев (известно X), (неизвестные X), указывающих, какие переменные X должны рассматриваться как известные либо как неизвестные. Затем последовательно просматриваются переменные x8, имеющие свободные вхождения в посылки задачи. Если некоторая такая переменная встречается в условии задачи, причем все остальные переменные данного условия уже помечены как известные, то она регистрируется в качестве неизвестной. Иначе - вводится комментарий (известно x8).

Решение геометрических задач на оптимизацию путем введения численной параметризации

Прием активируется при просмотре символа "точка" и срабатывает на уровне 4. Проверяется, что данное вхождение расположено в условии "Максимум($f\ M\ X\ Y$)" либо "Минимум($f\ M\ X\ Y$)" задачи на описание, не имеющей цели (известно ...). Отображение f задается выражением "отображение($x_1 \dots x_n$ и(точка(x_1) ... точка(x_n)) $P(x_1 \dots x_n)$)", причем вхождение символа привязки - один из конъюнктивных членов предпоследнего операнда.

Прежде всего, создается вспомогательная задача на описание x13, условиями которой служат утверждения "точка(x_1)", ... "точка(x_n)", а также утверждение "$(x_1, \dots, x_n) \in M$". Посылки задачи суть все утверждения из контекста текущего условия задачи, неизвестные - переменные $x_1, \dots, x_n$. Задача имеет цель "коорд", означающую, что неизвестные должны быть выражены через численные параметры. Предпринимается попытка решить задачу x13; x14 - найденный ответ. Этот ответ дает явное параметрическое описание области поиска максимума либо минимума, выраженное с помощью дизъюнкций и конъюнкций через атомарные описания: "$\exists y_1 \dots y_m (x_1 = t_1(y_1, \dots, y_m)\ \&\ \dots\ \&\ x_n = t_n(y_1, \dots, y_m)\ \&\ Q_1(y_1)\ \&\ Q_m(y_m))$"; $y_1, \dots, y_m$ - численные параметры. Он преобразуется к виду дизъюнктивной нормальной формы, и определяется набор x15 дизъюнктивных членов результата.

После контрольной точки "прием(3)" располагается цикл заполнения накопителя x16 пар (A_1, A_2). Здесь A_1 - набор всех конъюнктивных членов некоторого утверждения B списка x15, не зависящих от $x_1, \dots x_n$. Элемент A_2 - набор наборов зависящих от $x_1, \dots x_n$ конъюнктивных членов утверждений B списка x15, имеющих один и тот же набор A_1. Таким образом, список x16 обеспечивает группировку утверждений списка x15 по принципу одинаковых условий на внешний контекст.

Перед контрольной точкой "прием(5)" вводится пустой накопитель x17 троек (список утверждений с переменными из внешнего контекста рассматриваемого условия задачи, определяющих некоторый подслучай - значение максимума либо минимума в этом подслучае - выражение для множества наборов точек, в которых это значение достигается). Такие тройки могут относиться к перекрывающимся областям значений параметров внешнего контекста, так что по завершении цикла заполнения накопителя x17 будет проводиться подразбиение областей на непересекающиеся и дополнительное нахождение максимума (минимума) из сравниваемых исходных значений.

Цикл заполнения накопителя x17 состоит в просмотре пар (A_1, A_2) набора x16. x18 - текущая такая пара; x19 - набор A_1 утверждений, характеризующих внешний контекст. В наборе A_2 выбирается текущий элемент x20 - набор утверждений, определяющий некоторую версию параметрического описания точек $x_1, \dots, x_n$. Вводятся накопители x21, x22 и x23, заполняемые при анализе данного параметрического описания. Набор x21 становится равен $(t_1(y_1, \dots, y_m), \dots, t_n(y_1, \dots, y_m))$, набор x22 - $(y_1, \dots, y_m)$; набор x23 - $(Q_1(y_1), \dots, Q_m(y_m))$. Обозначения - те же, что и выше. Заметим, что в действительности программа рассчитана на несколько более общую ситуацию - когда параметрическое описание точек $x_1, \dots, x_n$ распадается на несколько кванторов существования, а часть этих точек задается без квантора существования, фиксированным образом.

Цикл заполнения накопителей x21 - x23 начинается после контрольной точки "прием(6)". По завершении цикла - переход через "иначе 2". Прежде всего, здесь проверяется, что накопитель x21 удалось заполнить целиком. Затем выбирается новая переменная x24 (обозначаем ее далее через z). Чтобы получить выражение оптимизируемого выражения $P(x_1 \dots x_n)$ через численные параметры $y_1, \dots, y_m$, решается вспомогательная задача на описание x28. Условиями ее служат утверждения $z = P(x_1 \dots x_n), z -$ число. Посылки задачи - все утверждения внешнего контекста, пополненные утверждениями списков A_1 и x23,а также утверждениями $x_1 = t_1(y_1, \dots, y_m), \dots, x_n = t_n(y_1, \dots, y_m)$. Последние равенства помечены комментарием "блок", блокирующим их использование приемом подстановки значения. Задача имеет единственную неизвестную z и цель (известно $u_1 \dots u_k y_1 \dots y_m$), где $u_1, \dots, u_k$ - все параметры утверждений внешнего контекста.

Далее предпринимается попытка решения задачи x28; переменной x29 присваивается ответ, который преобразуется к виду дизъюнктивной нормальной формы. Просматриваются дизъюнктивные члены x31, и переменной x32 присваивается набор конъюнктивных членов текущего утверждения x31. Среди утверждений списка x32 находится равенство $z = R(y_1, \dots, y_m)$, причем выражение $R(y_1, \dots, y_m)$ присваивается переменной x34. Это - подлежащее оптимизации численное выражение. Переменной x35 присваивается набор остальных содержащих параметры $y_1, \dots, y_m$ утверждений списка x32, переменной x36 - список всех утверждений списка x32, зависящих только от переменных внешнего контекста. Формируется выражение x37 вида "класс$(y_1 \dots y_m\ K)$", где K - конъюнкция утверждений списков x23 и x35. Оно задает область оптимизации по параметрам $y_1, \dots, y_m$. После контрольной точки "прием(9)" располагается обращение к вспомогательной задаче на преобразование, упрощающей x37. Результат упрощения U присваивается переменной x39. Выбираются две новых переменных v, w (пара x41), и создается вспомогательная задача на описание x43 с условиями "$F(\lambda_{y_1 \dots y_m}(R(y_1, \dots, y_m), y_1 -$число & $\dots$ & $y_m -$число$), U, v, w), v -$set$, w -$число". Здесь F - символ "Максимум" либо "Минимум", соответственно исходному условию. Посылками задачи x43 служат все утверждения внешнего контекста, неизвестные - v и w. Эта задача решается, и по дизъюнктивным членам ответа формируются тройки накопителя x17.

По завершении цикла заполнения накопителя x17 - переход через "иначе 1" после оператора "входит(x18 x16)", см. контрольную точку "прием(5)". Здесь вводится накопитель x18 для результата такого преобразования набора x17, при котором различные тройки относятся к несовместным условиям на внешний контекст. Вначале условия на внешний контекст из троек набора x17, по возможности, явно разрешаются относительно своих параметров. После контрольной точки "прием(14)" начинается цикл попыток сопоставления очередной тройки набора x17 с ранее полученными тройками набора x18. Если условия на внешний контекст для двух троек совпадают, то сравниваются соответствующие экстремальные значения. В тройке набора x18 сохраняется лучшее; если значения совпадали, то объединяются множества точек, на которых они достигались. Если условия на внешний контекст были различны, то находятся пересечение и две разности областей истинности данных условий. В каждом случае предпринимается независимое сравнение, и вместо текущей тройки набора x18 вводятся несколько новых. Сравнения экстремальных значений проводятся в два этапа. Сначала с помощью проверочных операторов предпринимается попытка усмотреть большее либо меньшее. Затем, с помощью вспомогательных задач на описание, решаются два неравенства и одно уравнение. По окончании формирования набора x18 - выписывается итоговая дизъюнкция x20, и применяется оператор "заменавхождения".

Решение вспомогательной задачи на исследование для анализа сечения плоскостью, содержащей окружность

Окружности в стереометрических задачах задаются только с помощью выражений "Окружность(A B C)" и "Окружн(A,B,n)" (в последнем случае n - направляющий вектор нормали к плоскости окружности). Однако, большинство связанных с окружностью приемов относится к планиметрическому выражению "окружность(AB)". Чтобы подключить их к решению стереометрических задач, приходится рассматривать вспомогательные задачи, возникающие для различных сечений плокостями, содержащими окружности. Это обеспечивается следующим приемом символа "плоскость", срабатывающим на уровне 7.

Проверяется, что текущий символ "плоскость" относится к посылке "актив(плоскость(ABC))" задачи на исследование, причем ранее данный прием к этой посылке не применялся. Проверяется отсутствие посылок, содержащих символ "коорд". Наконец, проверяется, что некоторая посылка содержит символ "Окружность(PQR)", где точки P, Q, R лежат на плоскости ABC. Находятся список x6 всех переменных, обозначающих в задаче точки плоскости ABC, а также список x8 переменных, обозначающих остальные точки. Формируется список x9 всех посылок, не содержащих переменных списка x8. Проверяется, что x9 непуст. К нему добавляются всевозможные утверждения "фиктпосылка(x)" для переменных списка x8. Это обеспечит отличие новых переменных, которые будут вводиться вспомогательной задачей, от переменных списка x8. К списку x9 добавляется фиктивная посылка "планиметрия". Все подвыражения "Окружность(PQR)" в утверждениях этого списка заменяются на "окружность(PQ)". Далее - создается вспомогательная задача x10 на исследование, имеющая список посылок x9. Неизвестные ее - те же, что у текущей задачи, но за исключением переменных списка x8. Цель "известно" сохраняется. Добавляется комментарий к посылкам (плоскость Z плоскость(ABC)), где Z - левый край набора, представляющего текущую задачу. Далее предпринимается обращение к решению задачи x10. Введен слабый ограничитель трудоемкости. По окончании решения происходит пересылка всех новых невырожденных посылок задачи x10, не содержащих символа "окружность", в текущую задачу x1. Веса посылок задачи x1 сбрасываются до нуля.

Попытка использования прямоугольных координат для нахождения геометрического места точек

Прием относится к программе символа "класс". Он применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Такие задачи возникают при описании геометрического мест точек. Условие их имеет вид "$\mathrm{set}_X(X -$ точка & $P(X))$", причем цель "класс" указывает на необходимость задания множества точек без помощи описателей, в явном виде. Обычно задачи такого типа решаются в два этапа. Сначала вводится система координат, и определяются координаты рассматриваемого множества точек. Затем предпринимается попытка бескоординатного задания. Для реализации первого этапа и служит данный прием.

Прежде всего, проверяется, что текущее выражение имеет вид "$\mathrm{set}_X(X -$точка & $P(X))$". Если $P(X)$ имеет вид $\exists_{y_1 \dots y_m}$(коорд$(X, K) = t$ & Q), где t, Q не содержат X, то попытка применения приема обрывается, так как условие уже дает координаты множества точек. Иначе - находится посылка "прямкоорд(K)", уточняется размерность n системы координат K (2 либо 3), и вводится список x14 новых переменных $x_1, \dots, x_n$. Формируется список x16 посылок вспомогательной задачи на описание x17. К нему относятся все посылки текущей задачи на преобразование, а также утверждения "x_1 – число", ..., "x_n – число", "X – точка", "коорд$(X, K) = (x_1, \ldots, x_n)$". Условия задачи x17 суть все конъюнктивные члены утверждения $P(X)$, единственная неизвестная - X. Задача имеет также цели "полный", "прямойответ", "замещение", "упростить". Цель "замещение" указывает, что в ответ не должны входить неизвестные, т.е. условие $P(X)$ должно быть переформулировано в терминах координат $x_1, \ldots, x_n$. Задача x17 решается, и переменной x18 присваивается ответ - некоторое утверждение $R(x_1, \ldots, x_n)$. Формируется заменяющее выражение "$\mathrm{set}_X(X$ – точка & $\exists_{x_1 \ldots x_n}(x_1$ – число & ... & x_n – число & коорд$(X, K) = (x_1, \ldots, x_n)$ & $R(x_1, \ldots, x_n)))$". Далее реализуется замена. Для блокировки повторных неудачных попыток используется комментарий (нормкоорд K).

3.67 Приемы усилителя, используемые в геометрических анализаторах

Как уже отмечалось выше, в решателе предусмотрен режим усилителя, включаемый после неудачной попытки решения задачи лобовыми методами. В этом режиме делаются дополнительные попытки решения вспомогательных задач и применения различных средств локального перебора, позволяющих усмотреть ценные для продолжения решения факты. Во многих случаях добавляемые приемы должны срабатывать на малом уровне, так как неосмотрительные преобразования задачи могут сделать их неприменимыми. По этой причине, собственно, и требуется режим усилителя, предусматривающий откат к исходной постановке задачи, в противовес добавлению приемов, применяемых по исчерпании обычных средств и имеющих большой уровень срабатывания. Указанием на наличие режима усилителя служит комментарий "усиление" к посылкам исходной задачи.

Для локального перебора усилитель применяет пакетные анализаторы. Пакетные операторы прочих типов обычно успешно применяются в лобовом режиме, так как трудоемкость обращения к ним сравнительно невелика. Пакетный анализатор обеспечивает вывод следствий с помощью ограниченного количества приемов, имеющих слабые фильтры. Приемы отбираются из соображений "кластеризации" - наилучшего их взаимодействия, дающего длинные цепочки следствий. Ослабленные фильтры позволяют приходить к неочевидным следствиям, а ограниченное количество приемов увеличивает глубину перебора. Вывод реализуется в отдельном накопителе, быстро заполняемым большим числом утверждений. При этом в основную задачу переносятся лишь те из них, которые оцениваются как важные.

Пакетный анализатор активируется при сканировании задачи Z на доказательство либо на исследование. Это обеспечивается специальными приемами, реализованными на ГЕНОЛОГе. При обращении к анализатору устанавливается лимит трудоемкости. Входными данными служат текущая задача Z, уровень обращения к анализатору (по исчерпании приемов меньшего либо равного уровней работа анализатора обрывается), а также список целей вспомогательной задачи на исследование Z'. Последняя создается самим анализатором, причем ее список посылок копирует список посылок задачи Z. Приемы пакетного анализатора, за редкими исключениями, изменяют только вспомогательную задачу Z'. Если при этом усматриваются утверждения, представляющие ценность для текущей задачи Z, то они помечаются комментарием "внешвывод". По окончании работы анализатора - при исчерпании лимита трудоемкости либо из-за другой причины - все эти утверждения переносятся из задачи Z' в задачу Z. Как и в случае сканирования задачи, после каждого срабатывания приема анализатора уровень сканирования сбрасывается до нуля.

Некоторые приемы могут оказаться продублированы сразу во многих пакетных анализаторах. Чтобы уменьшить дублирование, создаются так называемые блоки анализаторов, в которых по различным принципам сгруппированы часто используемые приемы. Например, блок анализатора "общгеом" объединяет несколько простейших геометрических приемов, блок "общалг" - несколько десятков простейших алгебраических. В отличие от анализатора, который организует свое собственное сканирование вспомогательной задачи и варьирование текущего уровня, блок анализатора получает координату текущей точки сканирования и текущий уровень из внешнего анализатора. Обращение к блоку анализатора рассматривается как обычный прием анализатора. Он реализуется на ГЕНОЛОГе и имеет заголовок "обращ". Теорема приема - "обращ(A_1A_2)", где A_1 - название анализатора, A_2 - название блока анализатора. Обращение реализуется для каждой точки сканирования и каждого значения текущего уровня. Если блок анализатора внес изменения во вспомогательную задачу, то после его работы текущий уровень заменяется на 0, а сканирование возобновляется с самого начала.

Пакетный анализатор "смчертеж"

В этом пакетном анализаторе сгруппированы приемы усиленного предварительного анализа чертежа - усмотрение равенства расстояний, углов и т.п.

1. Активизация пакетного анализатора "смчертеж".

   Для обращения к анализатору создан прием с теоремой:

   $\forall_{AB}(\text{актив}(l(AB)) \to \emptyset)$"

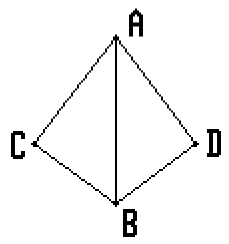
   Заголовок приема - "замечание". Применяется он при усмотрении посылки "актив($l(AB)$)" задачи на доказательство либо на исследование. Дополнительно проверяется наличие режима усилителя. Обращение к анализатору обеспечивается указателем "анализатор(смчертеж уровень(3))". Здесь задается максимальный уровень 3 применяемых анализатором приемов. Лимит трудоемкости, по умолчанию, полагается равным 2000000 шагов работы интерпретатора ЛОСа. Это - сравнительно сильное для анализатора ограничение. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, обращающегося к данному анализатору. Она срабатывает на уровне 5, причем указатель "анализатор(смчертеж лимит(5000000)уровень(5))" повышает лимит трудоемкости до 5000000, а максимальный уровень применяемых анализатором приемов - до 5.

   Переходим к перечислению приемов анализатора.

2. Обращения к блокам анализатора.

   Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом". Приемы этих блоков будут описаны позднее.

3. Два равных прямоугольных треугольника с общей гипотенузой.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BD) & $l(BC) = l(BD) \to l(AC) = l(AD)$ & $\angle(CAB) = \angle(BAD)$ & $\angle(CBA) = \angle(ABD)$)

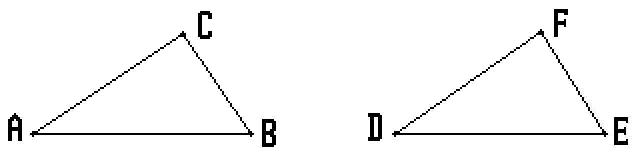
Прием имеет заголовок "внутрвывод(смчертеж)". Такой же заголовок будут иметь и остальные описываемые далее приемы анализатора. Третий антецедент выделен указателем "равно", два других - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Усмотрение равных подотрезков на равных отрезках.

$\forall_{ABCDEF}(l(AC) = l(DE)$ & $B \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(DE) & $l(BC) = l(EF) \to l(AB) = l(DF))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

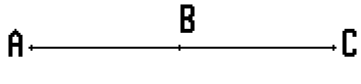
5. Равенство треугольников до двум сторонам и углу между ними.



$\forall_{ABCDEF}$(актив$(\angle(ACB))$ & актив$(\angle(DFE))$ & $\angle(ACB) = \angle(DFE)$ & $l(AC) = l(DF)$ & $l(BC) = l(EF)$ & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(DE)) $\to$ $l(AB) = l(DE)$ & $\angle(CAB) = \angle(FDE)$ & $\angle(CBA) = \angle(FED)$)

Четвертый антецедент выделен указателем "равно", третий и пятый - указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Треугольники различны. Уровень срабатывания равен 2.

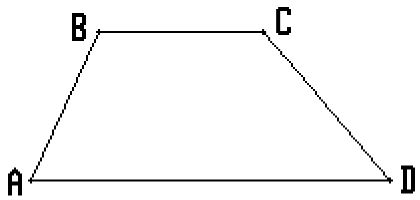
6. Равенство длины отрезка сумме длин подотрезков.



$\forall_{ABC}(B \in$ отрезок(AC) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AB)) \to l(AC) = l(BC) + l(AB))$

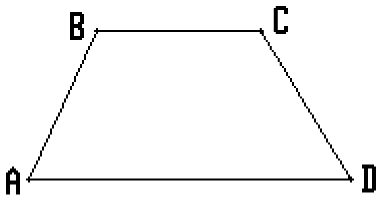
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

7. Углы трапеции.



$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \to \angle(ABC) = \pi - \angle(BAD)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Допускается изменение порядка вершин на обратный. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD)$ & $l(AB) = l(CD) \to \angle(BAD) = \angle(CDA)$)

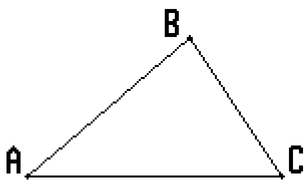
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

8. Подстановка выражения для угла.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \to \angle(ABC) = a)$

Заголовок приема прежний - "внутрвывод(смчертеж)". Но указатель "внутрпреобр" изменяет характер действия приема - вместо вывода следствия осуществляется замена вхождения в некоторую посылку выражения "$\angle(ABC)$" на a. При этом первый антецедент, в котором расположена точка привязки, идентифицируется с другой посылкой. Выражение a не должно содержать символа "угол". Ни одна из двух рассматриваемых посылок не помечена комментарием "внешвывод". В посылках вида "актив(...)" замена блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

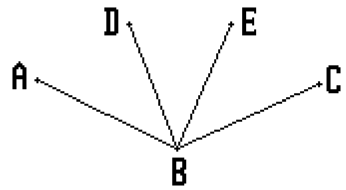
9. Сумма углов треугольника.



$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(BCA)) \to \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi$)

Прием выполняет вывод следствия. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

10. Связь угла с тремя составляющими углами.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(ABD)$) & актив($\angle(EBC)$) &
однасторона($A, E,$ прямая(BC)) & однасторона($A, D,$ прямая(BC)) &
однасторона($C, D,$ прямая(AB)) & однасторона($C, E,$ прямая(AB)) &
$a = \angle(ABD) + \angle(EBC) \to \angle(DBE) = |\angle(ABC) - a|$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Антецеденты с четвертого по седьмой обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Угол ABC и величина a известны. Не усматривается совпадение каких-либо двух из рассматриваемых четырех прямых. Уровень срабатывания равен 4.

11. Отбор утверждений.

Для отбора утверждений используются приемы с заголовком "внутрвывод(смчертеж)", у которых консеквентом теоремы служит символ $\emptyset$. Такие приемы не осуществляют вывод следствий, а лишь вводят комментарии "внешвывод".

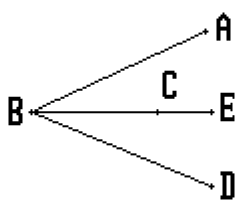
(a) Использование равенства длин отрезков, выходящих из одной точки.
$\forall_{ABC}(l(AB) = l(AC) \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой; прием помечает эту посылку комментарием "внешвывод". Таким образом, по завершении работы анализатора посылка будет перенесена во внешнюю задачу. Предварительно проверяется, что во внешней задаче равенство данных расстояний не усматривается. Кроме того, проверяется, что во внешней задаче отсутствует посылка вида "описана(окружность(AP) фигура($\ldots\ B\ \ldots\ C \ldots$))". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCa}(l(AC) = a\ \&\ l(AB) = a \to \emptyset)$

Антецеденты идентифицируются с посылками; прием помечает первую из них комментарием "внутрвывод". Предварительно проверяется, что эта посылка не встречается во внешней задаче и что там не усматривается равенство расстояний AC, AB. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Усмотрение принадлежности точки биссектрисе угла.



$\forall_{ABCDE}(\angle(ABC) = \angle(CBD)$ & $\angle(ABE) = \angle(DBE)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BD)) \rightarrow E \in$ прямая$(BC))$

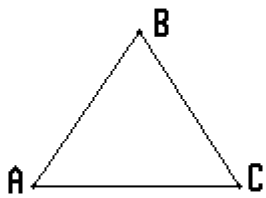
Первые два антецедента выделены указателем "равно", третий - обрабатывается проверочным оператором. Если выводимая посылка не усматривается во внешней задаче, то она помечается комментарием "внешвывод". Предпочтение отдается той точке из пары C, E, для которой во внешней задаче рассматривается прямая, проходящая через нее и через точку B. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Использование равенства с численными параметрами, содержащего неизвестную.

$\forall_{ab}(a = b \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не содержащей невырожденных числовых атомов, но содержащей неизвестные. Эта посылка помечается комментарием "внешвывод". Предварительно проверяется, что она не встречается среди посылок внешней задачи.

(d) Использование равенства, определяющего угол.



$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow \emptyset)$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Расстояния AB, BC и величина a известны. Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Посылка, идентифицированная с первым антецедентом, помечается комментарием "внешвывод". Предварительно проверяется, что она не является посылкой внешней задачи. Уровень срабатывания равен 4.

Пакетный анализатор "смпропорции"

Пакетный анализатор предназначен для усиленного вывода соотношений пропорциональности.

1. Активизация пакетного анализатора "смпропорции".

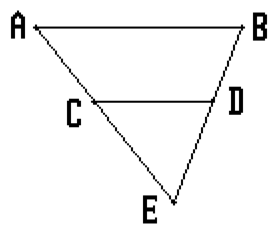
Все приемы данного пункта имеют заголовок "замечание" и применяются к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя.

$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = \angle(CBD) \rightarrow \emptyset)$

Антецедент выделен указателем "равно". Максимальный уровень допустимых приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости - по умолчанию. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 12. В ней лимит трудоемкости поднят до 9000000.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Максимальный уровень приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости - 9000000. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия данного приема, срабатывающая на уровне 6. В ней максимальный уровень приемов анализатора поднят до 6.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(BD) \to \emptyset$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", два других - указателем "усм". Обозначения прямых AB и CD не совпадают. Максимальный уровень допустимых приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости обращения к нему - 9000000. Уровень срабатывания равен 9.

2. Обращения к блокам анализатора.

   Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом".

3. Алгебраические приемы.

   Для работы с соотношениями пропорциональности скромного запаса средств блока анализатора "общалг" оказывается недостаточно, и вводится группа дополнительных алгебраических приемов. За исключением нескольких особо оговариваемых случаев, все приемы данного подраздела имеют указатель "внутрпреобр", означающий, что прием не выводит следствие, а осуществляет тождественную либо эквивалентную замену.

   (a) Раскрывание скобок в выражении с расстояниями.
   $\forall_{ABCDapq}(a(pl(AB) + ql(CD)) = apl(AB) + aql(CD))$
   Выражения a, p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 0.
   $\forall_{ABCDapq}(a(p + ql(CD)) = ap + aql(CD))$
   Уровень срабатывания равен 3.
   $\forall_{ABpq}((p + ql(AB))^2 = p^2 + 2pql(AB) + q^2l(AB)^2)$
   Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Приведение подобных членов с расстояниями.
   $\forall_{ABab}(al(AB) + bl(AB) = (a + b)l(AB))$
   Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 0.

   (c) Приведение подобных членов с неизвестными выражениями, находящимися в различных частях равенства.
   $\forall_{ABabcdef}(al(AB)/e + b = cl(AB)/f + d \leftrightarrow (a/e - c/f)l(AB) = d - b)$

Выражения a, c, e, f не содержат невырожденных числовых атомов. Хотя бы одно из выражений b, d не есть 0. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abcdp}(ap + b = cp + d \leftrightarrow (a - c)p + b = d)$

Выражения a, c не содержат неизвестных, p - содержит. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Ориентация равенства.

$\forall_{ABa}(a = l(AB) \leftrightarrow l(AB) = a)$

Выражение a либо не содержит неизвестных, либо имеет своим сомножителем выражение "расстояние(...)". При идентификации равенства перестановка операндов блокируется. Уровень срабатывания равен 0.

(e) Линейная комбинация двух соотношений пропорциональности.

$\forall_{abcdpq}(ab = cd \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \neg(d = 0) \rightarrow pb = qd \leftrightarrow aq = cp)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - обрабатываются проверочным оператором. Выражения a, c, p, q не содержат невырожденных числовых атомов, а хотя бы одно из выражений b, d - содержит. Заменяющее равенство имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 0.

(f) Сокращение пропорции.

$\forall_{ABCDabc}(\neg(a = 0) \rightarrow abl(AB) = acl(AD) \leftrightarrow bl(AB) = cl(CD))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

(g) Известный квадрат расстояния.

$\forall_{ABa}(l(AB)^2 = a \leftrightarrow l(AB) = \sqrt{a})$

Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Линейная комбинация двух уравнений для исключения произведения расстояний.

$\forall_{ABCDmnkpqr}(\neg(p = 0) \ \& \ pl(AB)l(CD) + q = r \rightarrow ml(AB)l(CD) + n = k \leftrightarrow np - mq = kp - rm)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения k, m, p, r не содержат неизвестных. Выражение q содержит не более одного невырожденного числового атома, причем этот атом, если он есть, встречается в преобразуемом равенстве. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, отличающаяся лишь тем, что точка привязки выбрана во втором антецеденте.

$\forall_{ABCDmnpq}(\neg(p = 0) \ \& \ pl(AB)l(CD) + q = 0 \leftrightarrow ml(AB)l(CD) + n = 0 \leftrightarrow np - mq = 0)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения m, p и заменяющее равенство не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания приема равен 3.

(i) Линейная комбинация трех уравнений для исключения произведения расстояний.

$\forall_{ABCDEFGHmnpqrs}(\neg(n = 0) \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ ml(AB)l(CD) = nl(EF)l(GH)$
$\& \ pl(AB)l(CD) = q \rightarrow rl(EF)l(GH) = s \leftrightarrow qmr = pns)$

Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в третьем. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения m, n, p, r не содержат невырожденных числовых атомов. Выражение q имеет не более одного невырожденного числового атома. Выводимое равенство имеет различающиеся операнды. Уровень срабатывания равен 5.

(j) Вывод линейной комбинации двух уравнений для исключения расстояния.
$\forall_{ABabcdef}(a + bl(AB) = c \ \& \ d + el(AB) = f \to ae - bd - ce + bf = 0)$
Прием реализует вывод следствия. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения c, f не содержат неизвестных. Выражения a, b, d, e не имеют вхождений терма $l(AB)$. Выводимое равенство содержит неизвестные, причем все его невырожденные числовые атомы встречаются в некотором равенстве, уже имеющемся в посылках. Уровень срабатывания равен 4.

(k) Выражение одного расстояния через другое из соотношения пропорциональности.
$\forall_{ABCDabcd}(\neg(a = 0) \to al(AB)/b = cl(CD)/d \leftrightarrow l(AB) = bcl(CD)/ad)$
Прием реализует эквивалентную замену. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d не имеют невырожденных числовых атомов. Не допускается одновременное обращение в единицы коэффициентов a, b либо c, d. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Исключение знаменателей.
$\forall_{abcdpq}(\neg(p = 0) \ \& \ \neg(q = 0) \to ap/(bq) = cp/(dq) \leftrightarrow ad = bc)$
Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения b, d не содержат невырожденных числовых атомов. Если p, q суть единицы, то b, d отличны от единицы. Уровень срабатывания равен 2.

(m) Деление двух соотношений пропорциональности.
$\forall_{ABCDabcd}(al(AB) = bl(CD) \ \& \ cl(AB) = dl(CD) \ \& \ \neg(a = 0) \ \&$
$\text{разныеточки}(C, D) \to ad = bc)$
Прием выполняет вывод следствия. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Хотя бы одно из выражений a, b, c, d содержит символ "расстояние". Уровень срабатывания равен 3.

(n) Подстановка выражения для расстояния через линейную комбинацию других расстояний.
$\forall_{ABab}(l(AB) = a \to l(AB) = a)$
Прием реализует замену. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем точка привязки выбрана в нем. Каждое слагаемое выражения a не содержит символа "угол", причем если оно содержит символ "расстояние", то имеет вид "$pl(DE)/q$". Терм $l(AB)$ не встречается в a. В посылках вида "актив$(\ldots)$" замена блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

(o) Перенесение расстояния в левую часть.
$\forall_{ABab}(l(AB) + a = b \leftrightarrow l(AB) = b - a)$
Прием реализует замену. Терм "$l(AB)$" не встречается в выражениях a, b. Выражение b не имеет заголовка "расстояние". Уровень срабатывания равен 0.

(p) Стандартизация соотношения пропорциональности расстояний.

$\forall_{ABCDab}(al(AB) - bl(CD) = 0 \leftrightarrow al(AB) = bl(CD))$

Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 1.

(q) Выражение расстояния через численные параметры.

$\forall_{ABab}(\neg(a = 0) \to al(AB) = b \leftrightarrow l(AB) = b/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b имеют только такие неизвестные параметры, которые суть неизвестные внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABabcd}(\neg(b = 0) \to (a + bl(AB))/c = d \leftrightarrow l(AB) = (cd - a)/b)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 1.

(r) Определение угла по его косинусу.

$\forall_{ABCabc}(\neg(a = 0) \to a\cos(\angle(ABC)) + b = c \leftrightarrow \angle(ABC) = \arccos((c - b)/a))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

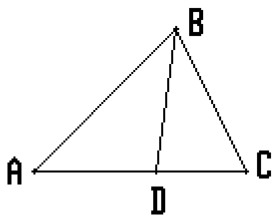
(s) Подстановка выражения для известного угла.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \to \angle(ABC) = a)$

Прием выполняет тождественную замену. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем точка привязки выбрана в нем. Выражение a не содержит неизвестных. Замена внутри посылки "актив(...)" блокируется. Уровень срабатывания равен 0.

Далее, если не оговорено противное, приемы выполняют вывод следствий.

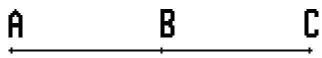
4. Отрезки, отсекаемые биссектрисой, пропорциональны боковым сторонам.



$\forall_{ABCD}(\angle(ABD) = \angle(CBD)$ & $D \in$ прямая(AC) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(BC)) \to l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Обозначения прямых AB и BC различны. Уровень срабатывания равен 0.

5. Равенство длины отрезка сумме длин двух подотрезков.



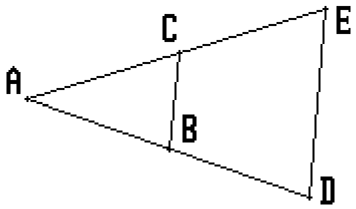
$\forall_{ABC}(B \in \text{отрезок}(AC) \to l(AC) = l(AB) + l(BC))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Существуют посылки вида "$al(AB) = b$", "$cl(BC) = d$", "$pl(AC) = q$". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC) \to l(AC) = l(AB) + l(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Расстояния BC и AC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия данного приема, срабатывающая на уровне 6. В ней требуется, чтобы лишь расстояние BC уже рассматривалось в задаче.

6. Соотношение пропорциональности длин отрезков, отсекаемых параллельными прямыми.



$\forall_{ABCDE}(\text{актив}(l(BC))\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&$
$C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AD), \text{прямая}(AE)) \to$
$l(AB)l(DE) = l(BC)l(AD))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения прямых BC и DE различны. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}(\text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(AD))\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&$
$\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AD),$
$\text{прямая}(AE)) \to l(AB)l(DE) = l(BC)l(AD))$

Четвертый антецедент выделен указателем "равно", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

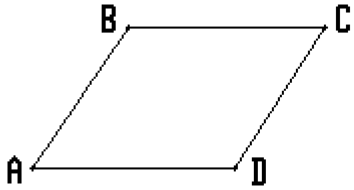
$\forall_{ABCDE}(\text{актив}(l(AE))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AD)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&$
$C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AD), \text{прямая}(AE)) \to$
$l(AD)l(CE) = l(AE)l(BD))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AD, CE и BD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDE}(\text{актив}(l(BD))\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ B \in \text{отрезок}(AD)\ \&$
$\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AD),$
$\text{прямая}(AE)) \to l(AB)l(CE) = l(AC)l(BD))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

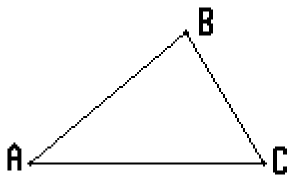
7. Равенство отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на параллельных прямых.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AB)$) & прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD) &
прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\rightarrow$
$l(AB) = l(CD)$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

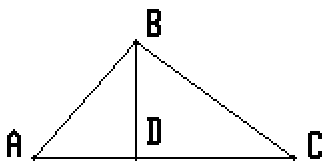
8. Теорема косинусов.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & актив($l(BC)$) & актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) $\rightarrow$
$l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC))$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

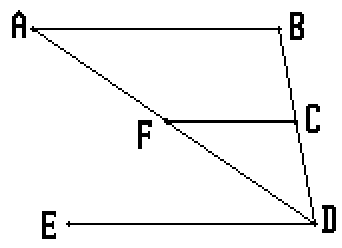
9. Определение высоты треугольника по длинам сторон.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(BD)$) & $D \in$ прямая(AC) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BD) &
актив($l(AB)$) & актив($l(BC)$) & $a = 4l(AB)^2 l(BC)^2 -$
$(l(AB)^2 + l(BC)^2 - l(AC)^2)^2 \rightarrow l(BD) = \sqrt{a/(4l(AC)^2)}$)

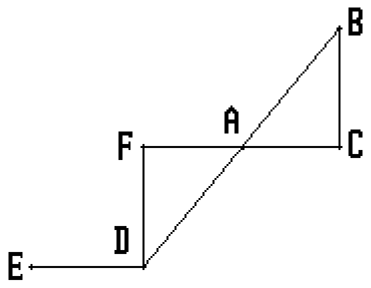
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, последний - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Радикал в выводимом равенстве тоже обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Расстояния AB, BC, AC известны, а расстояние BD - нет. Уровень срабатывания равен 4.

10. Проведение параллельной прямой.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(ED) & $C \in$ отрезок(BD) & $al(BC) = bl(CD)$ & разныепрямые(прямая(BD), прямая(AB)) & разныеточки(B, D) & разныеточки(A, B) $\rightarrow$ F – точка & $F \in$ отрезок(AD) & прямая(CF) $\parallel$ прямая(AB))

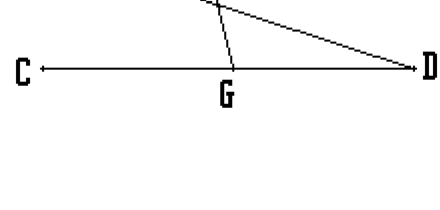
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, три последних - проверочными операторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Через точку C пока не проведеная прямая, паралельная прямой AB. Прием вводит новую точку F. Уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AC) $\parallel$ прямая(DE) & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & актив(прямая(BD)) & $A \in$ прямая(BD) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(DE)) $\rightarrow$ F – точка & прямая(DF) $\parallel$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AC))

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Одно из расстояний BC, AC известно, а другое - не известно, но рассматривается в задаче. Через точку D пока не проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающаяся по рассматриваемой в задаче точке с прямой AC. Уровень срабатывания равен 6.

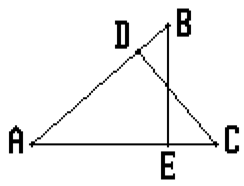
11. Усмотрение принадлежности отрезку.



$\forall_{ABCDEFG}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(AD) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(FG) & разныепрямые(прямая(FG), прямая$(CD)) \rightarrow E \in$ отрезок(FG))

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие четыре - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

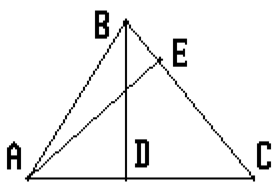
12. Два прямоугольных треугольника, имеющих общий острый угол.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow l(AD)l(AB) = l(AC)l(AE)$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 5.

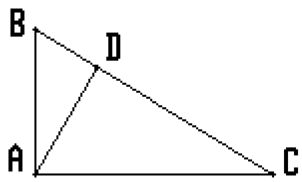
13. Равенство произведений длин высот на длины противоположных сторон.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(l(AE))$ & прямая$(AE) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая$(AC) \rightarrow l(AE)l(BC) = l(BD)l(AC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния BC, BD, AC уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

14. Соотношение для длин катета, гипотенузы и отрезка гипотенузы между основанием высоты и вершиной треугольника.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(BD)l(BC) = l(AB)^2$)

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 4.

15. Отбор утверждений.

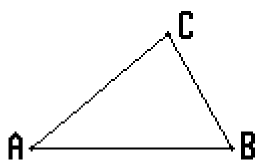
Для отбора посылок вспомогательной задачи, передаваемых во внешнюю задачу, служат приемы, помечающие эти посылки комментарием "внешвывод". Консеквенты теорем этих приемов фиктивные - равны логическому символу "$\emptyset$".

(a) Использование равенства с численными параметрами, содержащего неизвестную.

$\forall_{ab}(a = b \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не содержащей невырожденных числовых атомов. Тип этой посылки - "внешнеизв", причем она имеет единственное вхождение неизвестной. Проверяется, что отбираемая посылка не входит в список посылок внешней задачи. Тогда она помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0. Прием продублирован на уровне 5, где уже не требуются ни тип "внешнеизв", ни единственность вхождения неизвестной.

(b) Использование известных отношений сторон треугольника для нахождения его угла.



$\forall_{ABCamnpx}(\angle(BAC) = x \;\&\; l(AB) = am \;\&\; l(AC) = an \;\&\; l(BC) = ap \rightarrow \emptyset)$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана во втором из них. Выражение x имеет тип "внешнеизв"; выражения m, n, p не содержат неизвестных. Идентифицированные со вторым, третьим и четвертым антецедентами посылки помечаются комментарием "внешнеизв". Указатель "обрыв" уточняет, что на этом работа анализатора завершается. Уровень срабатывания равен 0.

(c) Использование равенства, определяющего расстояние.

$\forall_{ABab}(al(AB) = b \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой; выражения a, b не содержат неизвестных. Расстояние AB уже рассматривается во внешней задаче, причем текущая посылка не встречается в списке посылок внешней задачи. Она помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(d) Использование равенства расстояний.

$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD) \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(e) Использование равенства, выражающего одно расстояние через другое.

$\forall_{ABCD}(l(AB) = al(CD)/b \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Выражения a, b не содержат неизвестных. Расстояния AB, CD встречаются в некотором уравнении внешней задачи. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 4.

(f) Использование равенства для известных численных параметров.

$\forall(a = b \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Эта посылка не содержит ни невырожденных числовых атомов, ни неизвестных. Некоторая переменная имеет единственное вхождение в посылку. Тогда посылка помечается комментариями "внешвывод" и "параметр". Уровень срабатывания равен 4.

Пакетный анализатор "окружности"

Пакетный анализатор предназначен для усиленного вывода соотношений, связанных с окружностями.

1. Активизация пакетного анализатора "окружности".

   Все приемы этого пункта имеют заголовок "замечание" и применяются в задачах на доказательство либо исследование, решаемых с режимом усилителя. Анализатор "окружности" оказался существенно большим, чем остальные анализаторы. Заметим, что размеры и состав анализаторов определялись в процессе обучения - новые приемы заносились лишь по мере надобности.

   $\forall_{AB}(\text{актив}(\text{окружность}(AB) \to \emptyset)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Если число выделенных на окружности точек меньше 5, то лимит трудемкости равен 11000000. Если это число равно 5, то лимит равен 14000000. В прочих случаях он равен 60000000. Максимальный уровень допустимых приемов анализатора - 4. Для блокировки повторного применения приема служит комментарий (анализатор окружности 3). Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии данного приема, срабатывающие на уровне 9. Лимит трудоемкости в обоих случаях равен 85000000, максимальный уровень приемов анализатора - 6. Версии отличаются друг от друга лишь тем, что в одном случае анализатору передается комментарий "углы", подключающий дополнительные приемы, а в другом случае - не передается.

   $\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(CD) \to \emptyset)$

   Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Окружности в задаче не рассматриваются. Лимит трудоемкости равен 4000000, максимальный уровень допустимых приемов анализатор - 3. Блокировка повторного срабатывания - аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 3. Прием продублирован на уровне 7, причем уже допускается рассмотрение окружностей в задаче. Лимит трудоемкости здесь равен 8000000, максимальный уровень приемов анализатора - 4.

2. Обращения к блокам анализатора.

   Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом".

3. Алгебраические приемы.

   Все приемы этого подраздела имеют указатель "внутрпреобр" и выполняют замену.

   (a) Извлечение квадратного корня из частей равенства.
   $\forall_{ABab}(0 \leq a \rightarrow al(AB)^2 = b \leftrightarrow \sqrt{a}l(AB) = \sqrt{b})$
   Выражения a, b не содержат неизвестных. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_{ABCDab}(0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow al(AB)^2 = bl(CD)^2 \leftrightarrow \sqrt{a}l(AB) = \sqrt{b}l(CD))$
   Аналогично предыдущему.

   (b) Линейная комбинация уравнений для исключения числового атома.
   $\forall_{abcdex}(\neg(a = 0) \ \& \ ax + b = c \rightarrow px + d = e \leftrightarrow ad - bp - ae + cp = 0)$
   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Преобразуемое утверждение не является посылкой внешней задачи. Выражение x содержит невырожденный числовой атом, не встречающийся внутри выражений a, b, c, d, e, p. Каждый невырожденный числовой атом посылки, идентифицированной со вторым антецедентом, входит в преобразуемое утверждение. Уровень срабатывания равен 4.

   (c) Сокращение сумм синусов на неизвестный общий множитель.
   $\forall_{abcdx}(b - a - c - d = 0 \rightarrow (\sin(a - x) + \sin(b + x))/(\sin(c + x) - \sin(d + x)) = \sin((a + b)/2)/\sin((c - d)/2))$
   $\forall_{abcdx}(a - b + c + d - \pi = 0 \rightarrow (\sin(a - x) + \sin(b + x))/(\sin(c + x) + \sin(d + x)) = \sin((a + b)/2)/\cos((c - d)/2))$
   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных, а x - содержит.

   (d) Определение угла из линейного уравнения.
   $\forall_{ABCab}(\neg(a = 0) \rightarrow a\angle(ABC) = b \leftrightarrow \angle(ABC) = b/a)$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение b не имеет заголовка "угол". Уровень срабатывания равен 3.

   (e) Подстановка выражения для угла.
   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \rightarrow \angle(ABC) = a)$
   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем точка привязки выбрана в нем. Заменяемое выражение не расположено внутри посылки "актив(...)" и не является частью заменяющего. Ни посылка привязки, ни преобразуемая посылка не помечены комментарием "внешвывод". При идентификации равенства перестановка частей не допускается. Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_{ABa}(\text{уголмежду}(A, B) = a \rightarrow \text{уголмежду}(A, B) = a)$
   Аналогично предыдущему.

   (f) Выражение одного угла через другой из простейшего линейного уравнения.

   Перечисляемые ниже приемы имеют уровень срабатывания, равный 3. Преобразованные равенства снабжаются комментарием "ориентацияравенства".

$\forall_{ABCDEFab}(a - \angle(ABC) = b - \angle(DEF) \leftrightarrow \angle(ABC) = \angle(DEF) + a - b)$

Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов.

$\forall_{ABCDEFa}(\angle(ABC) + \angle(DEF) = a \leftrightarrow \angle(ABC) = a - \angle(DEF))$

Выражения для углов ABC и DEF имеют тип "неизв", выражение a не содержит неизвестных.

$\forall_{ABCDEFab}(\angle(ABC) - \angle(DEF) + a = b \leftrightarrow \angle(ABC) = \angle(DEF) + b - a)$

Выражения для углов ABC, DEF имеют тип "неизв"; выражения a, b не содержат неизвестных.

(g) Выражение одного угла через другой угол из линейного соотношения общего вида.

$\forall_{ABCDEFab}(\neg(a = 0) \rightarrow a\angle(ABC) + b = \angle(DEF) \leftrightarrow \angle(ABC) = (\angle(DEF) - b)/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. В задаче рассматривается окружность с центром B, но не рассматривается окружность, проходящая через точку E либо имеющая эту точку своим центром. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFab}(\neg(a = 0) \rightarrow a\angle(ABC) + b = \angle(DEF) + \leftrightarrow \angle(ABC) = (\angle(DEF) + - b)/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. В задаче рассматривается окружность, проходящая через точку B, но не рассматривается окружность, проходящая через точку E либо имеющая эту точку своим центром. Уровень срабатывания равен 5.

(h) Ориентация равенства для угла.

$\forall_{ABCDEFa}(\angle(ABC) + a = \angle(DEF) \leftrightarrow \angle(DEF) = \angle(ABC) + a)$

Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов. Равенство идентифицируется без перестановки своих частей. Преобразованное равенство снабжается комментарием "ориентацияравенства".

(i) Выражение расстояния через численные параметры.

$\forall_{ABab}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) = b \leftrightarrow l(AB) = b/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a константное, выражение b имеет только численные параметры. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABa}(l(AB)^2 = a \leftrightarrow 0 \leq a \;\&\; l(AB) = \sqrt{a})$

Выражение a имеет только численные параметры. Уровень срабатывания равен 3.

(j) Ориентация равенства для расстояния.

$\forall_{ABa}(a = l(AB) \leftrightarrow l(AB) = a)$

При идентификации равенства перестановка частей не допускается. Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 1.

(k) Подстановка выражения для расстояния.

$\forall_{ABab}(l(AB) = a \rightarrow l(AB) = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем точка привязки выбрана в нем. Заменяемое выражение не содержится внутри посылки вида "актив(...)". При идентификации равенства перестановка частей не допускается. Уровень срабатывания равен 2.

(l) Линейная комбинация двух уравнений с произведениями расстояний.

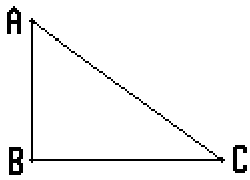
$\forall_{ABCDabcpqr}(\neg(a = 0)\ \&\ al(AB)l(CD) + b = c \rightarrow pl(AB)l(CD) + q = r \leftrightarrow aq - bp - ar + cp = 0)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, p не содержат неизвестных. Ни одно из выражений b, c, q, r не содержит произведения расстояний. Уровень срабатывания равен 5.

4. Общие геометрические приемы.

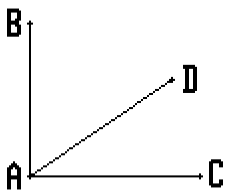
В этом подразделе сгруппированы простые геометрические приемы анализатора, не рассматривающие окружностей. Они понадобились, чтобы действия приемов, связанных с окружностями, доводились "до логического завершения" - нахождения ценных следствий. Как правило, такие дополнительные приемы имеют более сильные ограничения на срабатывание, чем основные приемы анализатора.

(a) Угол, дополняющий острый угол до прямого.



$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BAC)) \rightarrow$
$\angle(BCA) = \pi/2 - \angle(BAC))$

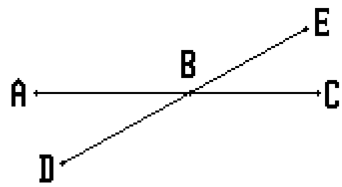
Прием выводит следствие. Оба антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & актив$(\angle(CAD)) \rightarrow$
$\angle(BAD) = \pi/2 - \angle(CAD))$

Первый и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Обозначение прямой AD отлично от обозначений прямых AB, AC. Уровень срабатывания равен 3.

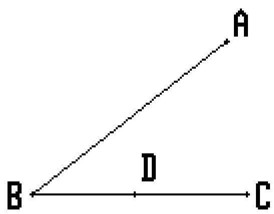
(b) Вертикальные углы.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(ABD)$) & $B \in$ отрезок(AC) & $B \in$ отрезок(DE) & разныеточки(B, E) & разныеточки(B, C) $\to \angle(ABD) = \angle(EBC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

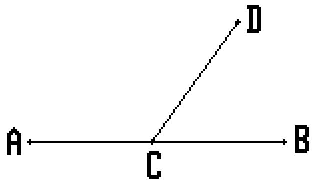
(c) Идентификация углов, отличающихся выбором точек на лучах.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABC)$) & актив($\angle(ABD)$) & $D \in$ отрезок(BC) $\to$ $\angle(ABD) = \angle(ABC)$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

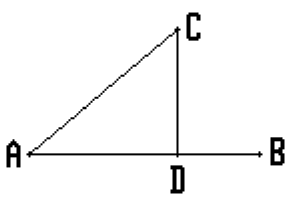
(d) Смежные углы.



$\forall_{ABCD}$($C \in$ отрезок(AB) & актив($\angle(ACD)$) & разныеточки(B, C) $\to$ $\angle(DCB) = \pi - \angle(ACD)$)

Прием выводит следствие. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выводимое утверждене содержит неизвестные. Созданы две версии приема, одна из которых срабатывает на уровне 2, а другая - на уровне 3.

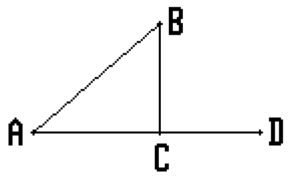
(e) Усмотрение точки луча.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAC)$) & $0 < \pi/2 - \angle(ABC)$ & $D \in$ прямая(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая$(AB) \rightarrow \neg(A \in$ интервал$(BD)))$

Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в четвертом антецеденте. Не усматривается расположение точки D на луче AB. Уровень срабатывания равен 1.

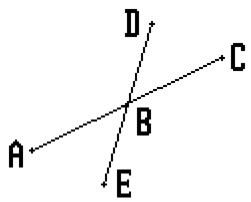
(f) Острый угол и угол, лучи которого лежат на тех же прямых, что и лучи первого угла.



$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(BAD)$) & $C \in$ прямая(AD) & прямая$(BC) \perp$ прямая(AD) & актив($\angle(BAC)$) $\rightarrow \angle(BAC) =$ минугол($\angle(BAD)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол BAD известен. Не усматривается взаимное расположение точек A, C, D. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Усмотрение принадлежности точки отрезку из равенства углов.



$\forall_{ABCDE}(\angle(DBC) = \angle(ABE)$ & $B \in$ отрезок(AC) & разныестороны(прямая(BD), прямая(AC)) $\rightarrow B \in$ отрезок(DE))

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается принадлежность точки E прямой BD. Выводимое утверждение помечается комментарием "внешвывод", и работа анализатора обрывается. Уровень срабатывания равен 1.

(h) Минимум величин угла и смежного с ним угла.

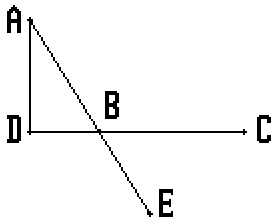
$\forall_a$(минугол$(\pi - a) =$ минугол(a))

Прием реализует замену и имеет уровень срабатывания 0.

$\forall_{ABCa}(\pi - \angle(ABC) =$ минугол$(a) \leftrightarrow$ минугол$(\angle(ABC)) =$ минугол(a))

Реализуется замена; уровень срабатывания равен 1.

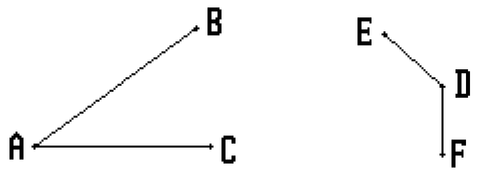
(i) Выражение длины перпендикуляра через синус угла.



$\forall_{ABCDE}$(актив($\angle(CBE)$) & актив($l(AD)$) & прямая(AD) $\perp$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(BC) & $A \in$ прямая(BE) & разныепрямые(прямая(BE), прямая(BC)) $\to l(AB) = l(AD)/\sin(\angle(CBE))$)

Прием выводит следствие. Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние AD и угол CBE известны, расстояние AB - не известно. Уровень срабатывания равен 4.

(j) Углы со взаимно перпендикулярными сторонами.



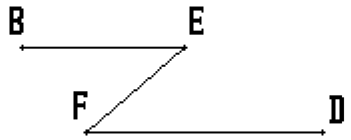
$\forall_{ABCDEF}$(актив($\angle(BAC)$) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AB) & прямая(DF) $\perp$ прямая(AC) & разныеточки(D, E) & разныеточки(D, F) & $E \in$ плоскость(ABC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость(ABC) $\to$ минугол($\angle(BAC)$) = минугол($\angle(EDF)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEF}$(актив($\angle(BAC)$) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AB) & прямая(DF) $\perp$ прямая(AC) & $E \in$ плоскость(ABC) & $D \in$ плоскость(ABC) & $F \in$ плоскость(ABC) $\to$ минугол($\angle(BAC)$) = уголмежду(прямая(DF), прямая(DE)))

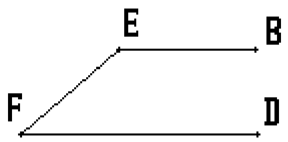
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(k) Углы при параллельных прямых и секущей.



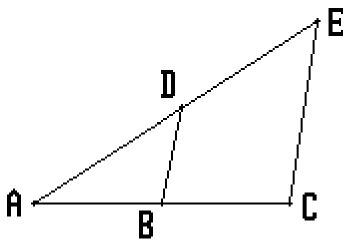
$\forall_{BDEF}$(прямая(BE) $\|$ прямая(FD) & актив(прямая(EF)) & разныестороны(B, D, прямая(EF)) $\to \angle(EFD) = \angle(BEF)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Обозначения прямых BE и FD различны. Не усматривается перпендикулярность прямых EF и BE. При обращении к анализатору была указана дополнительная цель "углы". Уровень срабатывания равен 3. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 5. В ней не требуется наличие цели "углы".



$\forall_{BDEF}$(актив($\angle(BEF)$) & прямая(BE) $\|$ прямая(FD) & однасторона($B, D,$ прямая(EF)) & разныеточки(D, F) $\to$ $\angle(EFD) = \pi - \angle(FEB)$)

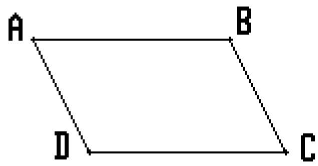
Второй антецедент выделен указателем "равно", первый - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Обозначения прямых BE и FD различны. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}$(прямая(BD) $\|$ прямая(CE) & $B \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AE) & точкалуча(A, D, E) & разныепрямые(прямая(AE), прямая(AC)) $\to \angle(ADB) = \angle(AEC)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается перпендикулярность прямых BD и AE. Вспомогательная задача анализатора имеет цель "углы". Уровень срабатывания равен 4.

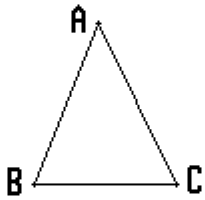
(l) Усмотрение параллельных прямых по паре равных отрезков, лежащих на двух других параллельных прямых.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & $l(AB) = l(CD)$ & актив(прямая(AD)) & актив(прямая(BC)) & однасторона($B, C,$ прямая(AD)) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to$ прямая(AD) $\|$ прямая(BC))

Второй антецедент выделен указателем "равно", пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

(m) Углы равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) & $l(AB) = l(AC)$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
$\angle(BAC) = \pi - 2\angle(ABC)$)

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый - указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Угол ABC известен. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) & $l(AB) = l(AC)$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
$\angle(ABC) = \pi/2 - \angle(BAC)/2$)

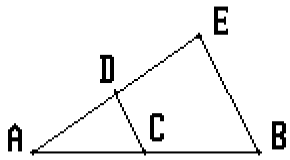
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Угол BAC известен, а угол ABC - нет. Не усматривается, что треугольник равносторонний. Уровень срабатывания равен 4.

(n) Углы между прямой и двумя взаимно перпендикулярными прямыми.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \rightarrow$ уголмежду(прямая(AB), прямая(EF)) $= \pi/2 -$ уголмежду(прямая(CD), прямая(EF)))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "уголмежду(прямая(AB), прямая(EF))". Антецедент выделен указателем "усм". Некоторая посылка содержит выражение "уголмежду(прямая(CD), прямая(EF))". Уровень срабатывания равен 2.

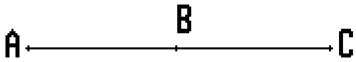
(o) Параллельное перенесение условия принадлежности отрезку.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ отрезок(AB) & прямая$(CD) \parallel$ прямая(BE) &
$D \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AE)) $\rightarrow$
$D \in$ отрезок(AE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(p) Равенство длины отрезка сумме длин двух подотрезков.

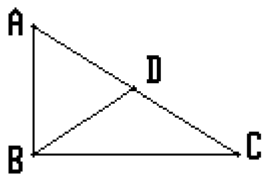


$\forall_{ABC}(B \in$ отрезок(AC) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB)) \rightarrow$
$l(BC) = l(AC) - l(AB)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Расстояния AC и AB известны, расстояние BC - не известно. Уровень срабатывания равен 3.

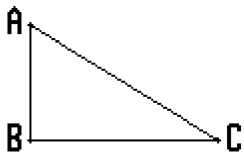
(q) Прямоугольный треугольник.

i. Угол между катетом прямоугольного треугольника и его медианой, проведенной к гипотенузе.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & актив$(\angle(BCA)) \rightarrow \angle(BCA) = \angle(DBC)$)
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

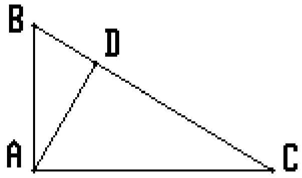
ii. Тригонометрические соотношения.



$\forall_{ABCab}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(AC) = b \rightarrow ab\cos(\angle(BCA)) = al(BC)$)
Прием реализует замену. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - указателем "идентификатор". Расстояние BC известно. Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{ABCbc}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $l(AC) = b$ & уголмежду(прямая(AB), прямая(AC)) $= c \rightarrow l(BC) = b\sin c$)
Прием выводит следствие. Два последних антецедент идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "усм". Выражение b не содержит неизвестных; выражение c не содержит символа "уголмежду". Уровень срабатывания равен 3.

iii. Теорема Пифагора.
$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2$)
Чертеж прежний. Антецедент выделен указателем "усм", причем точка привязки выбрана в нем. Прямая AC и расстояние AB уже рассматриваются в задаче. Выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

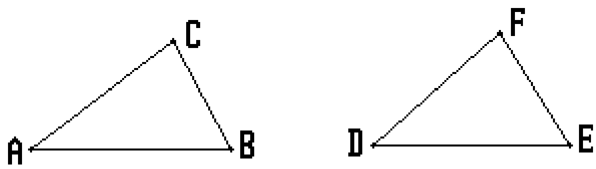
iv. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из прямого угла.



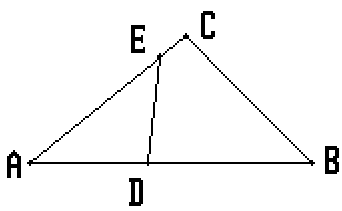
$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(BD)l(CD) = l(AD)^2)$
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояние AD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 5.

(г) Подобные треугольники.

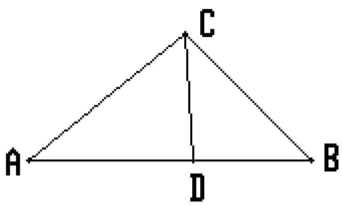
i. Усмотрение подобных треугольников по равенству двух углов.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(EF)) & $\angle(ACB) = \angle(DFE)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) $\rightarrow (A, B, C) \sim (D, E, F))$
$\forall_{ABCDEF}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & актив(прямая(BC)) & актив(прямая(EF)) & $\angle(ACB) = \angle(DFE)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow (A, B, C) \sim (D, E, F))$
Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий - указателями "усм". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый - проверочным оператором. Треугольники не совпадают. Не усматривается, что хотя бы один из углов ACB, ABC - прямой. Уровень срабатывания равен 4.



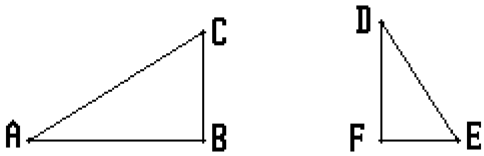
$\forall_{ABCDE}(E \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) & $\angle(ADE) = \angle(ACB)$ & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & точкалуча(A, C, E) & точкалуча$(A, D, B) \rightarrow (A, B, C) \sim (A, E, D))$
Третий антецедент выделен указателем "равно", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается, что хотя бы один из углов ACB, ADE - прямой. Уровень срабатывания равен 4. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}(\angle(CAB) = \angle(DCB)$ & $D \in$ отрезок(AB) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AB)) & разныеточки$(A, C) \rightarrow (A, B, C) \sim (C, B, D))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается перпендикулярность прямых AB и CD. Уровень срабатывания равен 4.

ii. Подобные прямоугольные треугольники.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & прямая$(AC) \perp$ прямая(DE) & прямая$(DF) \perp$ прямая$(AB) \rightarrow (A, B, C) \sim (D, F, E))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & $\angle(BAC) = \angle(EDF) \rightarrow (A, B, C) \sim (D, F, E))$

Третий антецедент выделен указателем "равно", первые два - указателем "усм". Не усматривается равенство расстояний BC и EF. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(DF) \perp$ прямая(EF) & $\angle(BAC) = \pi - \angle(EDF) \rightarrow (A, B, C) \sim (D, F, E))$

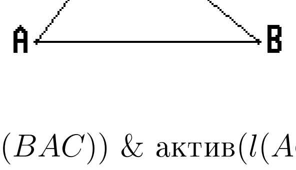
Аналогично предыдущему.

iii. Соотношение пропорциональности для длин сторон подобных треугольников.

$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \rightarrow l(BC)l(DF) = l(AC)l(EF))$
$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \rightarrow l(AB)l(DF) = l(AC)l(DE))$
$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \rightarrow l(AB)l(EF) = l(BC)l(DE))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Не менее трех из расстояний, являющихся сомножителями выводимого равенства, выражены через численные параметры, причем хотя бы одно из четырех расстояний не известно. Уровень срабатывания равен 4. Первый прием продублирован на уровне 5.

(s) Теорема косинусов.



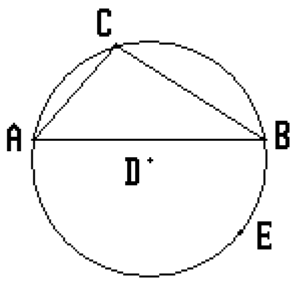
$\forall_{ABCPQ}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив(окружность(PQ)) & $A \in$ окружность(PQ) & $B \in$ окружность(PQ)

& $C \in$ окружность$(PQ) \to l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)))$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AC и AB, а также угол BAC известны. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \to l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)))$

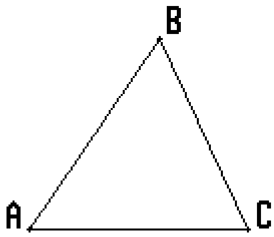
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол BAC известен; хотя бы одно из расстояний AC, BC и AB выражено через численные параметры. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия данного приема, имеющая такой же уровень срабатывания. В ней требуется, чтобы два из расстояний AC, AB, BC были известны, а выражение для третьего имело тип "неизв".



$\forall_{ABC}$(актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & $A \in$ окружность(DE) & $B \in$ окружность(DE) & $C \in$ окружность$(DE) \to \angle(BAC) = \arccos((l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)/(2l(AB)l(AC))))$

Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния AC, AB и BC известны, расстояние DA и угол BAC не известны. Отсутствует посылка, представляющая собой линейное уравнение, позволяющее определить расстояние DA. Уровень срабатывания равен 3.

(t) Теорема синусов.



$\forall_{ABC}$(актив$(\angle(BAC))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(\angle(BAC)) \to \sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Не усматриваются ни совпадение углов BAC и ABC, ни равенство каких - либо двух сторон треугольника, ни наличие у треугольника прямого угла. Выражение для угла ABC имеет тип "неизв". Точки A, C лежат на некоторой рассматриваемой в задаче окружности.

Углы идентифицируются без учета ориентации лучей. Уровень срабатывания равен 4.

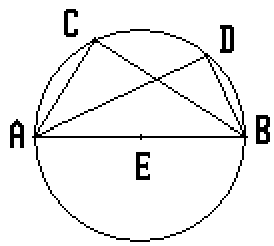
(u) Усмотрение отрицательной величины угла.

$\forall_{ABCa}(a < 0 \to \angle(ABC) = a \leftrightarrow$ ложь$)$

Прием реализует замену и применяется при наличии у вспомогательной задачи цели "контроль". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Сразу же после срабатывания приема работа анализатора обрывается.

5. Ввод в рассмотрение описанной окружности.

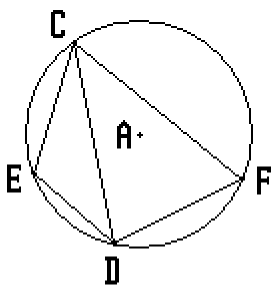
(a) Ввод в рассмотрение окружности, описанной около двух прямоугольных треугольников с общей гипотенузой.



$\forall_{ABCDE}($прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая$(BD) \to$
$E -$ точка & $E \in$ отрезок(AB) & $B \in$ окружность(EA) &
$C \in$ окружность(EA) & $D \in$ окружность(EA) & $l(EA) = l(AB)/2$ &
актив(окружность$(EA)))$

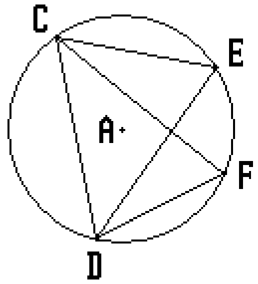
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Прямая CD уже рассматривается в задаче. Не усматривается параллельность прямых AC и BD. Не рассматривается окружность, проходящая через точки A, B, C, D. Не рассматривается также окружность с центром в точке A либо B, проходящая через точки C, D. Прием вводит новую точку E - центр окружности, проходящей через точки A, B, C, D. Уровень срабатывания равен 0.

(b) Сопоставление двух углов, под которыми одни и тот же отрезок виден из двух разных точек.



$\forall_{ACDEFab}(\angle(CED) = b$ & $\angle(CFD) = a$ & $a + b = \pi$ & разныестороны$(E, F,$ прямая$(CD))$ & $\neg(E \in$ прямая$(CD)) \to A -$точка & $D \in$ окружность(AC) & $F \in$ окружность(AC) & $E \in$ окружность$(AC))$

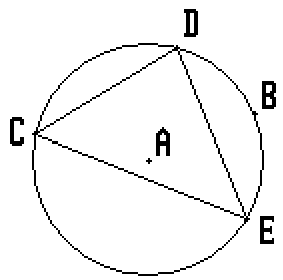
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается, что прямая CE препендикулярна прямой CF, а прямая DE - прямой DF. Выражение a не есть $\pi/2$. Точки C, D, E, F не лежат на окружнсоти, уже рассматриваемой в задаче. Прием вводит в рассмотрение новую точку A - центр окружности, проходящей через точки C, D, E, F. Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ACDEFab}(\angle(CED) = a$ & $\angle(CFD) = a$ & однасторона$(E, F,$ прямая$(CD))$ & $(\neg(E \in$ прямая$(CD))\ \vee\ \neg(F \in$ прямая$(CD))) \rightarrow A -$ точка & $D \in$ окружность(AC) & $F \in$ окружность(AC) & $E \in$ окружность$(AC))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. В остальном - аналогично предыдущему приему.

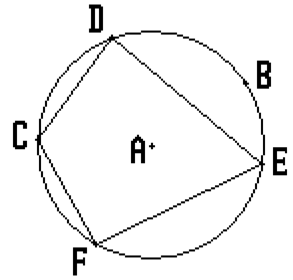
6. Принадлежность окружности вершин описанного треугольника.



$\forall_{ABCDE}($окружность(AB)описана около фигура$(CDE) \rightarrow$ $C \in$ окружность$(AB))$

Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания равен 0. Срабатывания аналогичного приема сканирования задачи сильно ограничены, так как во многих случаях он оказывается избыточным и может сильно замедлять решение.

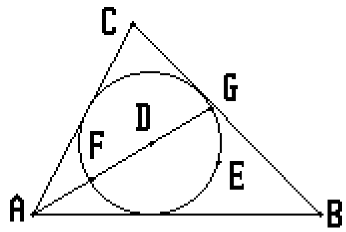
7. Вершины четырехугольника, около которого описана окружность, принадлежат этой окружности.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(AB)описана около фигура$(CDEF) \to$
$C \in$ окружность(AB))

Допусскается циклическая перестановка вершин четырехугольника. Уровень срабатывания равен 0.

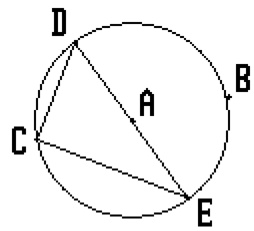
8. Ввод в рассмотрение точек пересечения биссектрисы угла треугольника с вписанной окружностью.



$\forall_{ABCDEFG}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & актив(прямая(AD))) $\to$
F – точка & $F \in$ окружность(DE) & G – точка & $G \in$ окружность(DE) &
$\neg(F = G)$ & $F \in$ отрезок(AG) & $F \in$ отрезок(AD) & $D \in$ отрезок(FG) &
$D \in$ отрезок(AG))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Точки F, G пересечения окружности DE с прямой AD пока не введены, и прием их вводит. Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания равен 5.

9. Усмотрение диаметра.



$\forall_{ABCDE}$($C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB)
& $\angle(DCE) = \pi/2 \to A \in$ отрезок(DE))

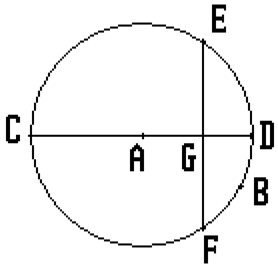
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая$(CE) \to A \in$ отрезок$(DE))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

10. Хорда окружности.

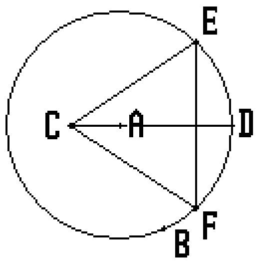
(a) Ввод в рассмотрение общей точки диаметра и перпендикулярной к нему хорды.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) &
прямая$(EF) \perp$ прямая(CD) & разныеточки$(E, F) \to G -$ точка &
$G \in$ отрезок(EF) & $G \in$ отрезок$(CD))$

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в последнем из них. Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Точка G пересечения прямой CD с прямой EF пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 1.

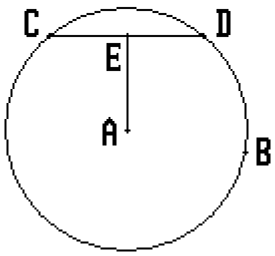
(b) Равенство расстояний до точки диаметра концов перпендикулярной к нему хорды.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ окружность(AB) & $C \in$ прямая(AD) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(EF) \perp$
прямая(AD) & актив$(l(CE))$ & разныеточки$(E, F) \to l(CF) = l(CE)$ &
$\angle(CEF) = \angle(EFC))$

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в пятом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается принадлежность точки C прямой EF. Уровень срабатывания равен 1.

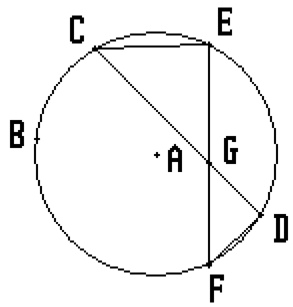
(c) Проведение перпендикуляра к середине хорды.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD))$ & разныеточки$(C, D) \to E -$ точка & $E \in$ отрезок(CD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CD) & $l(CE) = l(DE)$ & $l(AE) = \sqrt{4l(AC)^2 - l(CD)^2}/2)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается принадлежность точки A прямой CD. Расстояния AC и CD известны. На прямой CD выделена некоторая точка P, для которой рассматривается угол CPQ, причем точка Q лежит на окружности AB. Этот угол известен. На окружности выделены не более 5 точек. Основание E опущенного из точки A на хорду CD перпендикуляра пока не введено, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Равенство произведений длин отрезков, на которые разбиваются пересекающиеся хорды.



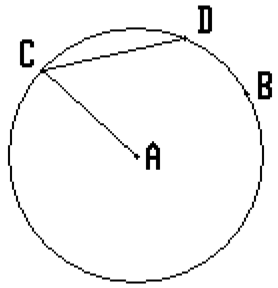
$\forall_{ABCDEFG}($актив(окружность$(AB))$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(EF) & актив$(l(EG))$ & актив$(l(DG)) \to l(CE)l(DG) = l(DF)l(EG))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Одно из расстояний CE, DG, DF, EG не известно, а остальные - известны. Вспомогательная задача на исследование не имеет цели "углы". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEFG}($актив(окружность$(AB))$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая$(EF) \to l(CE)l(DG) = l(DF)l(EG))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояние DG уже рассматривается в задаче. Выводимое соотношение содержит неизвестные. Вспомогательная задача не имеет цели "углы". Уровень срабатывания равен 4.

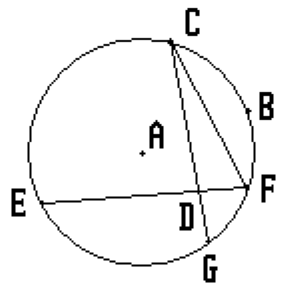
(e) Угол между хордой и радиусом.



$\forall_{ABCD}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD)) \rightarrow \angle(DCA) = \arccos(l(CD)/(2l(AC))))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Расстояния CD и AC известны. Уровень срабатывания равен 4.

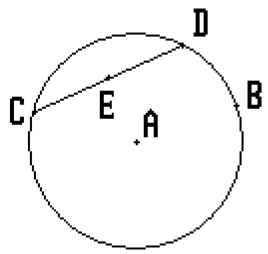
(f) Продолжение хорды до пересечения с окружностью.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $D \in$ отрезок(EF) & актив(прямая(EF)) & разныеточки(E, F) & разныеточки(C, F) & разныеточки$(C, E) \rightarrow$ $G -$ точка & $G \in$ окружность(AB) & $\neg(C = G)$ & $D \in$ отрезок$(CG))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, три последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Либо усматривается принадлежность точки A прямой CD, либо в основной задаче рассматривается хотя бы один из углов CDE, DCF. Точка G пересечения прямой CD с окружностью AB пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 2.

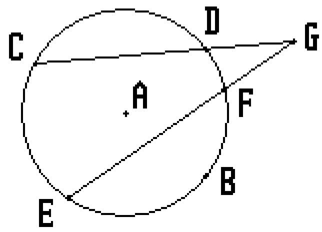
(g) Ввод в рассмотрение длины хорды, поделенной пополам.



$\forall_{ABCDEa}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(CD) & $l(CE) = l(DE)$ & $l(CE) = a \rightarrow l(CD) = 2a)$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Выражение a отлично от "$l(DE)$". Расстояние CD пока в задаче не рассматривается. Уровень срабатывания равен 2.

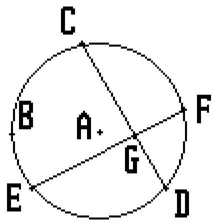
(h) Разбор случаев для точки пересечения двух хорд.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныеточки(C, D) &
разныеточки(E, F) & $G \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая$(EF) \rightarrow$
$D \in$ отрезок(CG) $\vee$ $G \in$ отрезок(CD) $\vee$ $C \in$ отрезок$(DG))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Не усматривается взаимное расположение точек C, D и G. Указатель "Подслучаи" означает, что прием не выводит следствие, а реализует разбор случаев в пакетном анализаторе. Это обеспечивается вставляемым компилятором в программу приема оператором "Подслучаи". Для каждого подслучая выполняется обращение к текущему анализатору, причем вводится своя вспомогательная задача. Остаточный лимит трудоемкости делится поровну между всеми подслучаями. Элементы пересечения представляющих интерес следствий, которое берется по всем подслучаям, регистрируются в "исходной" вспомогательной задаче и снабжаются комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 5.

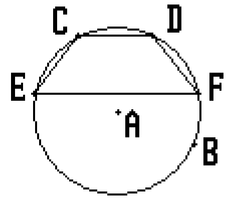
(i) Точка пересечения двух хорд.



$\forall_{ABCDEFG}($актив(окружность$(AB))$ & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $G \in$ трезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & разныеточки(E, F) & $G \in$ прямая$(EF) \rightarrow$
$G \in$ отрезок$(EF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

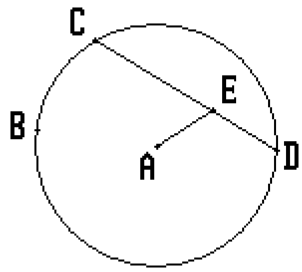
(j) Равенство длин хорд, соединяющих концы параллельных хорд.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \parallel$
прямая(EF) & разныеточки(C, D) & разныеточки$(E, F) \rightarrow$
$l(CE) = l(DF))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямые CE и DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

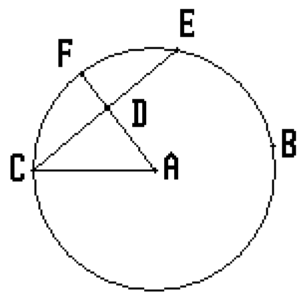
(k) Произведение длин отрезков хорды и расстояние от их общего конца до центра окружности.



$\forall_{ABCDE}($актив$($окружность$(AB))$ & $C \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок$(CD) \rightarrow$
$l(CE)l(ED) = l(AB)^2 - l(AE)^2)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Расстояния CE, DE и AE уже рассматриваются в задаче. Не усматривается перпендикулярность прямых AE и CD. Вспомогательная задача не имеет цели "углы".

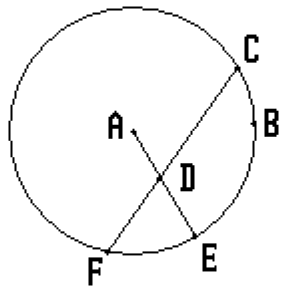
(l) Прямой угол, опирающийся на радиус.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$ прямая$(AD) \rightarrow$
$E -$ точка & $F -$ точка & $D \in$ отрезок(CE) & $E \in$ окружность(AB) &
$l(CD) = l(DE)$ & $F \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) &
$D \in$ отрезок$(AF))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором. Прием вводит ранее не рассматривавшиеся точки E и F. Уровень срабатывания равен 3.

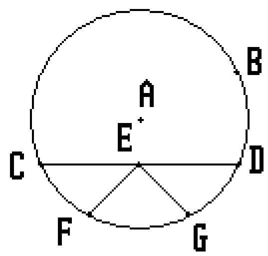
(m) Продолжение фрагмента хорды, пересекающегося с радиусом.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
$D \in$ отрезок(AE) & актив(прямая$(CD)) \to F$ – точка &
$F \in$ окружность(AB) & $D \in$ отрезок(CF) & $F \in$ прямая$(CD))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Отличная от точки C общая точка F прямой CD и окружности AB пока не введена, и прием ее вводит. Заметим, что допускается случай вырожденной хорды, когда точки C, F совпадают. Уровень срабатывания равен 4.

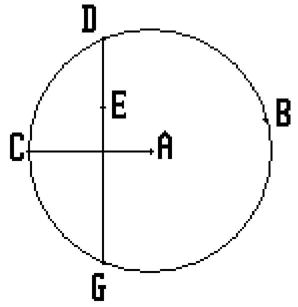
(n) Отрезки, проведенные к окружности под равными углами из середины хорды.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ отрезок(CD) & $l(CE) = l(DE)$ & $\angle(CEF) = \angle(DEG)$ &
$F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & одностронa$(F, G,$
прямая$(CD))$ & разныеточки$(C, D) \to l(EF) = l(EG))$

Пятый антецедент выделен указателем "равно", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

(o) Продолжение перпендикуляра к радиусу до пересечения с окружностью.

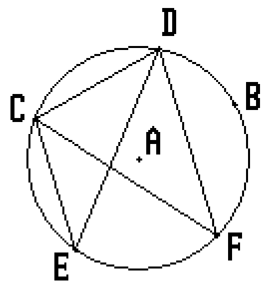


$\forall_{ABCDEG}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & актив(прямая(CD)) &
$\neg(D \in$ прямая$(AC)) \to G \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(DE) &
$G -$ точка & $\neg(D = G)$ & $l(CD) = l(CG))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Противоположный конец G хорды DG пока не введен, и прием его вводит. Заметим, что в отличие от предыдущего приема, здесь уже можно гарантировать различие точек D, G. Уровень срабатывания равен 3.

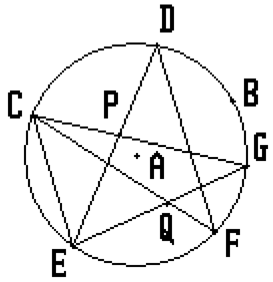
11. Вписанные углы.

    (a) Вписанные углы, опирающиеся на общую хорду.



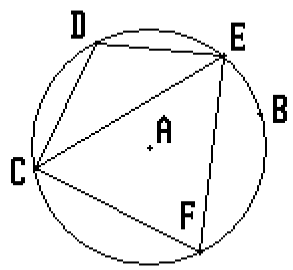
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & однасторона$(E, F,$
прямая$(CD))$ & разныеточки(C, E) & разныеточки(D, E) &
разныеточки(C, F) & разныеточки$(D, F) \to \angle(CFD) = \angle(CED))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние пять антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Прямые CE, DE, CF, DF. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия данного приема, срабатывающая на уровне 4. В ней требуется, чтобы рассматривались прямые CE, DE, CF и угол CED. Кроме того, требуется, чтобы либо одна из хорд CF, DF проходила через центр окружности, либо в посылках имелось равенство вида "$\angle(PFQ) = \ldots$".



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB)
& $P \in$ отрезок(CG) & $P \in$ отрезок(DE) & $Q \in$ отрезок(CF) &
$Q \in$ отрезок(EG) & разныеточки(C, E) & разныеточки(C, G) &
разныеточки(E, G) & разныеточки$(D, G) \to \angle(CFD) = \angle(CED))$

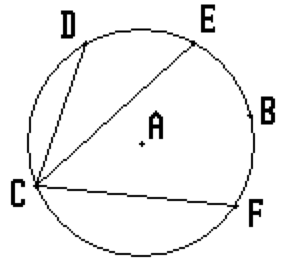
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие восемь - выделены указателем "усм". Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямые CE, DE, CF, DF уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CD))
& актив(прямая(DE)) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(CF)) &
актив(прямая(EF)) & разныестороны$(D, F,$ прямая$(CE))$ &
разныеточки(C, E) & разныеточки(C, F) & разныеточки(E, F) &
разныеточки(C, D) & разныеточки$(D, E) \to \angle(CDE) = \pi - \angle(CFE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие восемь - выделены указателем "усм". Последние шесть антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается ни препендикулярность прямых CD и DE, ни перпендикулярность прямых CF и EF. Число выделенных на окружности точек не более 5. Уровень срабатывания приема равен 3.

(b) Сложение двух примыкающих вписанных углов.



$\forall_{ABCDEFpqr}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныестороны$(D, F,$ прямая$(CE))$ & актив$(\angle(DCE))$ & актив$(\angle(ECF))$ & $\angle(DCE) = p$ & $\angle(ECF) = q$ & $r = p + q \rightarrow \angle(DCF) = r)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Три последних антецедента выделены указателем "идентификатор", остальные - указателем "усм". Выражение r не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

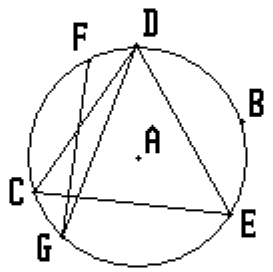
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныестороны$(D, F,$ прямая$(CE))$ & актив$(\angle(DCE))$ & актив$(\angle(ECF))$ & актив$(\angle(DCF)) \rightarrow \angle(DCE) + \angle(ECF) = \angle(DCF))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFp}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныестороны$(D, F,$ прямая$(CE))$ & актив$(\angle(DCE))$ & актив$(\angle(ECF))$ & вычислениеугла$(\angle(DCF), p) \rightarrow \angle(DCE) + \angle(ECF) = \angle(DCF)$ & $p)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент обрабатывается синтезатором, определяющим конъюнкцию p соотношений, позволяющих вычислить угол DCF. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для углов DCE и ECF имеют тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

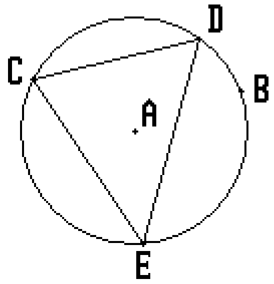
(c) Сложение двух вписанных углов.



$\forall_{ABCDEFG}($актив$($прямая$(DE))$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & & актив$(\angle(CED))$ & актив$(\angle(FGD))$ & $G \in$ окружность(AB) & разныестороны$(F, E,$ прямая$(CD))$ & однасторона$(G, E,$ прямая$(CD))$ & разныеточки(C, D) & разныеточки(D, E) & разныеточки$(C, E) \rightarrow \angle(CED) = \angle(FGD) + \angle(CEF))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, пять последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямая EF пока не рассматривается в задаче, а прямая CF - рассматривается. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Связь между радиусом, вписанным углом и длиной хорды.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD))$ & актив$(\angle(CED)) \rightarrow$
$l(CD) = 2\sin(\angle(CED))l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Два из значений $l(CD)$, $\angle(CED)$, $l(AB)$ известны, а третье - не известно, но уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2. Создана версия приема, срсбатывающая на уровне 4. В ней требуется лишь, чтобы выражение $l(AB)$ имело тип "неизв".

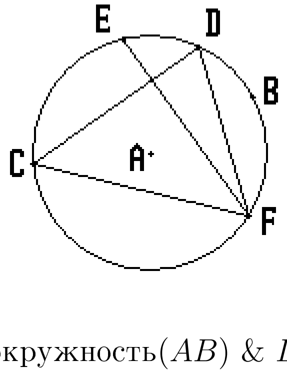
$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CED)) \rightarrow l(CD) = 2\sin(\angle(CED))l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Угол CED и расстояние AE известны, причем выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив$(l(CD))$ & разныеточки(C, E) &
разныеточки$(D, E) \rightarrow l(CD) = 2\sin(\angle(CED))l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямые CE и DE уже рассматриваются в задаче. Выражение для расстояния CD имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

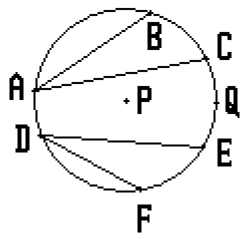
(e) Сумма вписанных углов, связанных с двумя перпендикулярными хордами.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & прямая$(CD) \perp$
прямая(EF) & разныестороны$(E, F,$ прямая$(CD))$ & разныеточки(E, F)
& разныеточки(C, D) & разныеточки(C, F) & актив(прямая$(DF)) \rightarrow$
$\angle(DCF) + \angle(CFE) = \pi/2)$

Первые пять антецедентов, а также последний антецедент выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в пятом из них. Антецеденты с шестого по девятый обрабатываются проверочными операторами. Расстояние DF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Равенство длин хорд, на которые опираются равные вписанные углы.



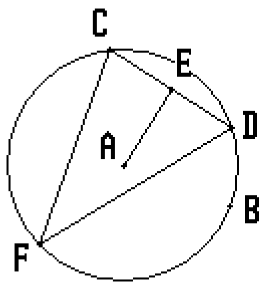
$\forall_{ABCDEFPQ}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $A \in$ окружность(PQ) &
$B \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ окружность(PQ)
& $E \in$ окружность(PQ) & $F \in$ окружность(PQ) &
актив(окружность$(PQ)) \to l(BC) = l(EF))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFPQ}(\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $A \in$ окружность(PQ) &
$B \in$ окружность(PQ) & $C \in$ окружность(PQ) & $D \in$ окружность(PQ) &
$E \in$ окружность(PQ) & $F \in$ окружность(PQ) & актив(прямая(EF)) &
актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(EDF)) \to l(BC) = l(EF))$

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

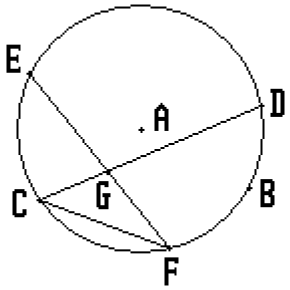
(g) Вписанный угол и угол между радиусами, один из которых проведен к концу хорды, а другой перпендикулярен ей.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$F \in$ окружность(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(CD)
& разныеточки(C, D) & разныеточки(C, F) & разныеточки(D, F) &
разныеточки$(A, E) \to$ минугол$(\angle(CDF)) = \angle(CAE))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямые CF и DF уже рассматриваются в задаче. Не усматривается принадлежность точки A прямой CD. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Угол между пересекающимися хордами и вписанные углы.



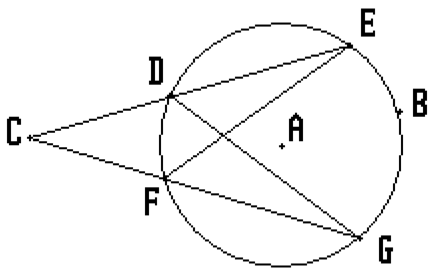
$\forall_{ABCDEFG}(G \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(EF) & актив$(\angle(DGF))$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныеточки(C,D) & разныеточки$(C,F) \rightarrow \angle(DGF) = \angle(DCF) + \angle(CFE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие шесть - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямые CD и EF уже рассматриваются в задаче, причем их обозначения различаются. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFG}(G \in$ отрезок(CD) & $G \in$ отрезок(EF) & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & разныеточки(C,D) & разныеточки$(C,F) \rightarrow \angle(DGF) = \angle(DCF) + \angle(CFE))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие пять - выделены указателем "усм". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Условия на прямые CD и EF - те же, что и выше. Уровень срабатывания равен 5.

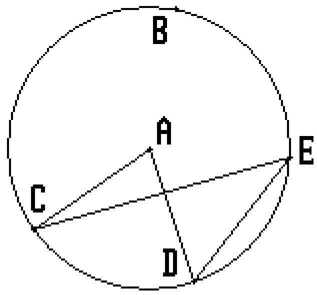
(i) Угол между двумя секущими и вписанные углы.



$\forall_{ABCDEFG}($актив(окружность$(AB))$ & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $D \in$ отрезок(CE) & $F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & разныеточки(D,E) & разныеточки(F,G) & $F \in$ прямая$(CG) \rightarrow \angle(ECG) = \angle(EDG) - \angle(DEF))$

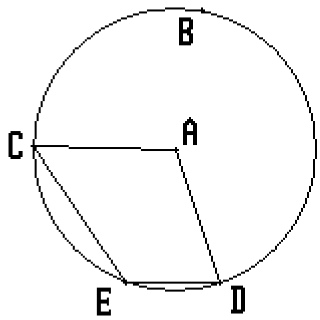
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения прямых CE и CF различны. Уровень срабатывания равен 4.

(j) Вписанный и центральный углы.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) &
однасторона$(A, E,$ прямая$(CD))$ & актив$(\angle(CED)) \rightarrow$
$2\angle(CED) = \angle(CAD))$

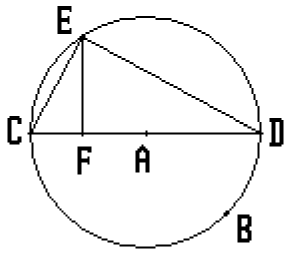
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". В задаче уже рассматриваются либо угол CAD, либо касательная, проведенная через точку C. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & актив(прямая(CE)) & актив(прямая(DE)) &
разныестороны$(A, E,$ прямая$(CD))$ & актив$(\angle(CED)) \rightarrow$
$2\pi - 2\angle(CED) = \angle(CAD))$

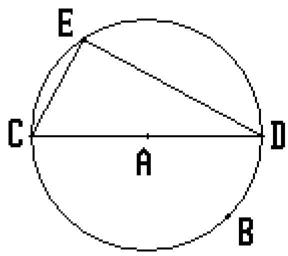
Аналогично предыдущему.

(k) Вписанный угол, опирающийся на диаметр.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CD) &
прямая$(EF) \perp$ прямая$(CD) \rightarrow$ прямая$(CE) \perp$ прямая$(DE))$

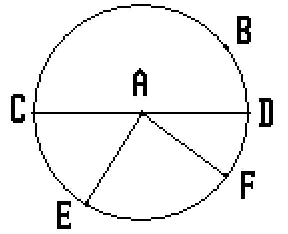
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.



$\forall_{ABCDE}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & актив(прямая$(CE)) \rightarrow$
прямая$(CE) \perp$ прямая$(DE))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

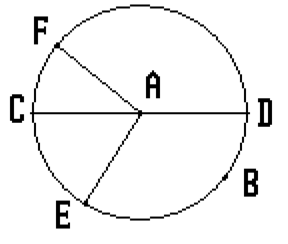
12. Два центральных угла, примыкающих к диаметру.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CAE))$ & актив$(\angle(DAF))$ & однасторона$(E, F,$ прямая$(CD))$ & разныестороны$(C, F,$ прямая$(AE)) \rightarrow \angle(EAF) = \pi - \angle(CAE) - \angle(DAF))$

$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CAE))$ & актив$(\angle(DAF))$ & однасторона$(E, F,$ прямая$(CD))$ & разныестороны$(D, E,$ прямая$(AF)) \rightarrow \angle(EAF) = \pi - \angle(CAE) - \angle(DAF))$

В первом приеме шестой, а во втором - седьмой антецедент идентифицируется с посылкой. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания приемов равен 4.

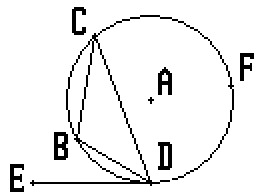


$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(\angle(CAE))$ & актив$(\angle(DAF))$ & разныестороны$(E, F,$ прямая$(CD))$ & разныестороны$(D, F,$ прямая$(AE)) \rightarrow \angle(EAF) = \pi + \angle(CAE) - \angle(DAF))$

Седьмой антецедент идентифицируется с посылкой, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

13. Касательные.

    (a) Угол между касательной и секущей, проведенной в точку касания.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AD) & разныестороны$(C, E,$ прямая$(BD))$ & разныеточки$(B, D) \rightarrow \angle(BCD) = \angle(BDE))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Прямая CD уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

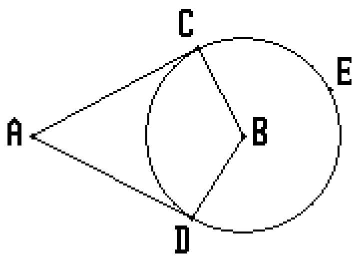
$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & прямая$(DE) \perp$ прямая(AD) & однасторона$(C, E,$ прямая$(BD))$ & разныеточки$(B, D) \rightarrow \angle(BCD) = \pi - \angle(BDE))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & разныестороны$(C, E,$ прямая$(BD))$ & актив$(\angle(BCD))$ & актив$(\angle(BDE))$ & $\angle(BCD) = \angle(BDE)$ & разныеточки$(B, D) \rightarrow$ прямая$(DE) \perp$ прямая$(AD))$

Седьмой антецедент выделен указателем "равно", четвертый и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Перпендикулярность прямых DE и AD не усматривается. Уровень срабатывания равен 6.

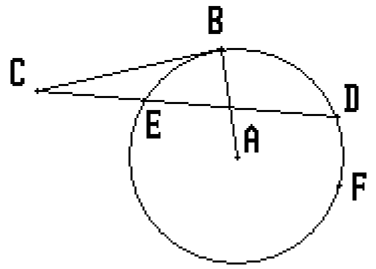
    (b) Две различные касательные, проведенные из общей точки.



$\forall_{ABCDE}($прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $C \in$ окружность(BE) & $D \in$ окружность$(BE) \rightarrow l(AC) = l(AD))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 1.

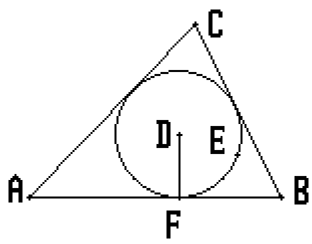
(c) Произведение длин отрезков секущей и квадрат длины отрезка касательной.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(BC) \perp$ прямая(AB) & $B \in$ окружность(AF) &
$E \in$ окружность(AF) & $D \in$ окружность(AF) & разныеточки(D, E) &
$D \in$ прямая$(CE) \rightarrow l(BC)^2 = l(CE)l(CD))$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

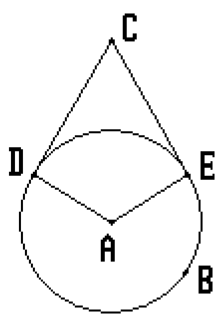
(d) Радиус, проведенный к точке касания вписанной окружности.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) &
$F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ прямая$(DF) \perp$ прямая$(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Вершины треугольника идентифицируются без учет порядка. Уровень срабатывания равен 1.

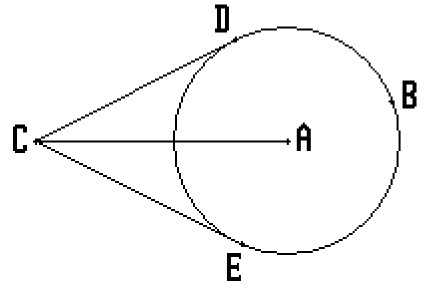
(e) Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, и центральный угол.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) &
актив$(\angle(DAE))$ & разныеточки$(D, E) \rightarrow \angle(DAE) = \pi - \angle(DCE))$

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, первые четыре - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

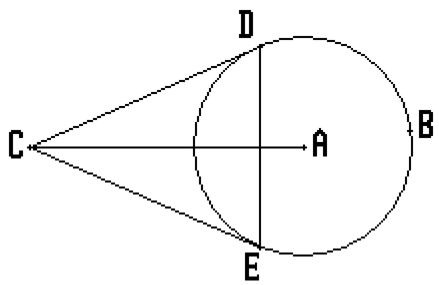
(f) Биссектриса угла между двумя касательными, проведенными из общей точки.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) &
разныеточки(D, E) & актив$(\angle(DCE)) \to \angle(DCA) = \angle(DCE)/2$ &
$\angle(ECA) = \angle(DCE)/2)$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые четыре - выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

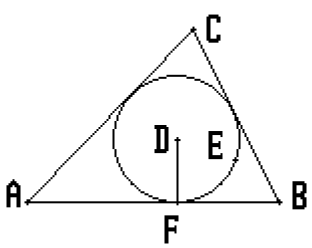
(g) Проведение перпендикуляра к хорде, соединяющей точки касания двух касательных, проведенных из общей точки.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) &
актив(прямая(DE)) & разныеточки$(D, E) \to$ прямая$(AC) \perp$ прямая$(DE))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

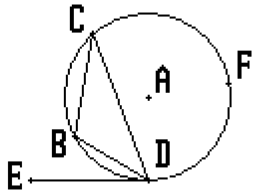
(h) Ввод в рассмотрение точки касания вписанной окружности.



$\forall_{ABCDEF}$(окружность(DE)вписана в фигура$(ABC) \to F$ – точка &
$F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая(AB) & $l(DF) = l(DE)$ &
прямая$(DF) \perp$ прямая$(AB))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Вершины треугольника идентифицируются без учета порядка. Точка касания F пока не рассматривается, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 1.

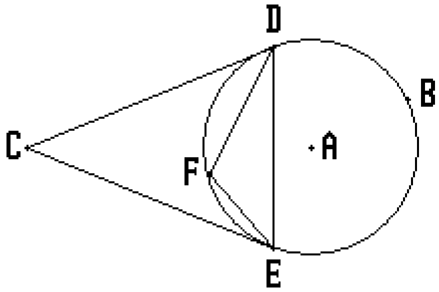
(i) Разбор случаев для расположения вершины вписанного угла и точки касательной относительно хорды.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) &
$D \in$ окружность(AF) & прямая$(DE) \perp$ прямая$(AD) \to$
разныестороны$(C, E,$ прямая$(BD))$ $\vee$ однасторона$(C, E,$ прямая$(BD)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в последнем из них. Прямые CD, BD и BC уже рассматриваются в задаче. Через точку E проведена прямая, не совпадающая с прямой DE. Не усматриваются ни равенство углов EBD и BCD, ни равенство их суммы пи. Не усматривается взаимное расположение точек C, E тносительно прямой BD. Указатель "Подслучаи" уточняет, что прием не выводит следствие, а обращается к разбору случаев в пакетном анализаторе. Уровень срабатывания равен 6.

(j) Расположение точки окружности относительно хорды, соединяющей концы двух пересекающихся касательных.



$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CE) &
$F \in$ окружность(AB) & разныестороны$(C, D,$ прямая$(EF))$ &
разныеточки$(D, E) \to$ однасторона$(C, F,$ прямая$(DE)))$

Шестой антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

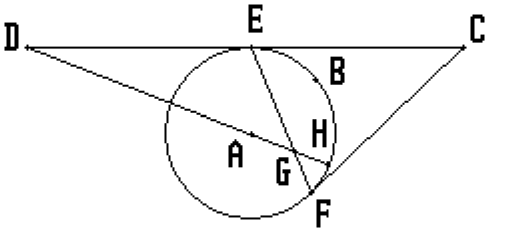
$\forall_{ABCDEF}$(прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & $D \in$ окружность(AB) &
$E \in$ окружность(AB) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CE) &

$F \in$ окружность(AB) & актив(прямая(DF)) &
разныестороны$(C, D,$ прямая$(EF))$ & разныеточки$(D, E) \rightarrow$
разныестороны$(C, E,$ прямая$(DF)))$

Аналогично предыдущему, но с посылкой идентифицируется седьмой антецедент.

14. Усмотрение принадлежности точки сязанному с окружностью отрезку.

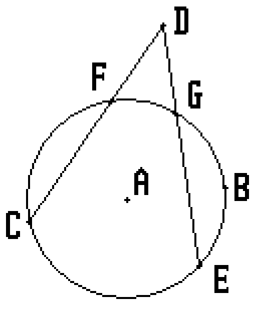
    (a) Пересечение отрезка, соединяющего две точки касания вписанной в треугольник окружности, с биссектрисой другого угла треугольника.



$\forall_{ABCDEFGH}(E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) &
$H \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) &
прямая$(AF) \perp$ прямая(CF) & $G \in$ отрезок(EF) & $E \in$ отрезок(CD) &
$A \in$ отрезок(DH) & $G \in$ прямая$(DH) \rightarrow G \in$ отрезок$(AH))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Уровень срабатывания равен 4.

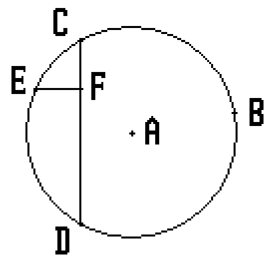
    (b) Две секущие, проведенные из общей точки.



$\forall_{ABCDEFG}(C \in$ окружность(AB) & $F \in$ отрезок(CD) &
$F \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB)
& $G \in$ прямая(DE) & разныеточки(C, F) & точкалуча$(E, G, D) \rightarrow$
$G \in$ отрезок$(DE))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

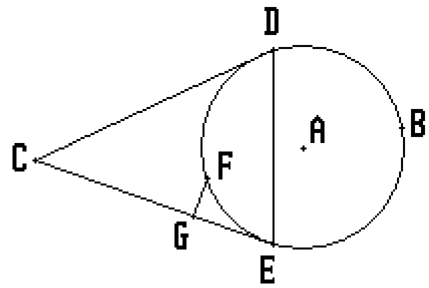
    (c) Проекция точки окружности на хорду.



$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
прямая$(EF) \perp$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CD)
& разныеточки(C, D) & разныестороны$(A, E,$ прямая$(CD)) \rightarrow$
$F \in$ отрезок$(CD))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается взаимное расположение точек C, D, F. Уровень срабатывания равен 3.

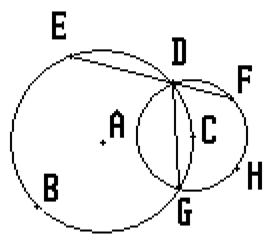
(d) Проекция точки окружности на касательную.



$\forall_{ABCDEFG}(D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) &
прямая$(CD) \perp$ прямая(AD) & прямая$(CE) \perp$ прямая(AE) &
$F \in$ окружность(AB) & прямая$(FG) \perp$ прямая(CE) & $G \in$ прямая(CE)
& разныеточки(D, E) & разныестороны$(A, F,$ прямая$(DE)) \rightarrow$
$G \in$ отрезок$(CE))$

Первые семь антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

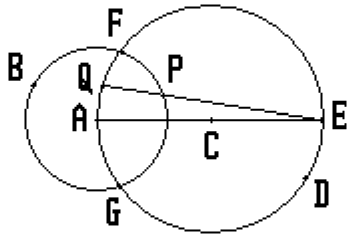
15. Центр одной окружности лежит на другой окружности.



$\forall_{ABCDEFGH}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
$D \in$ окружность(CH) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CH)

& $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CH) & $D \in$ отрезок(EF) & разныеточки(D, G) & актив(окружность(AB)) $\rightarrow$ разныестороны$(E, C,$ прямая$(DG)))$

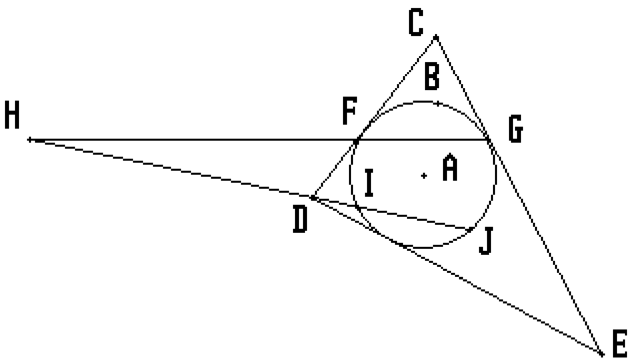
Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые восемь - выделены указателем "усм". Девятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.



$\forall_{ABCDEFGPQ}(A \in$ окружность(CD) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(CD) & $C \in$ отрезок(AE) & $P \in$ окружность(AB) & $Q \in$ окружность(CD) & $P \in$ прямая(QE) & разныеточки(F, G) & разныеточки$(P, Q) \rightarrow$ разныестороны$(F, G,$ прямая$(QE))$ & $\neg(F \in$ прямая$(QE))$ & $\neg(G \in$ прямая$(QE)))$

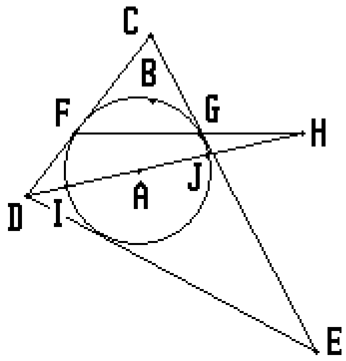
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

16. Точка пересечения двух секущих.



$\forall_{ABCDEFGHIJ}$(окружность(AB)вписана в фигура(CDE) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(CE) & $G \in$ окружность(AB) & $I \in$ окружность(AB) & $J \in$ окружность(AB) & $I \in$ отрезок(DJ) & $H \in$ прямая(FG) & $H \in$ прямая(DJ) & разныеточки(I, J) & $I \in$ отрезок$(HJ) \rightarrow F \in$ отрезок$(GH))$

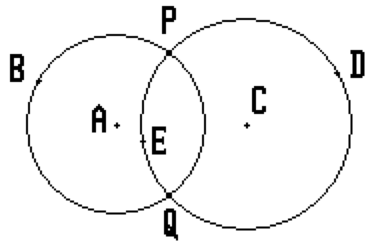
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, одиннадцатый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDEFGHIJ}$(окружность(AB)вписана в фигура(CDE) &
$F \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(CE) &
$G \in$ окружность(AB) & $I \in$ окружность(AB) & $J \in$ окружность(AB)
& $I \in$ отрезок(DJ) & $H \in$ прямая(FG) & $H \in$ прямая(DJ) &
разныеточки(I, J) & $J \in$ отрезок$(HI) \rightarrow G \in$ отрезок(FH))

Аналогично предыдущему.

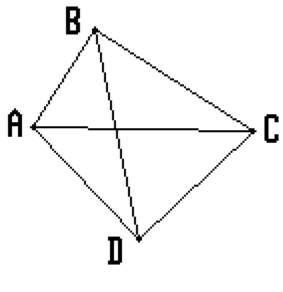
17. Усмотрение непринадлежности точки одной окружности другой окружности.



$\forall_{ABCDEPQ}(P \in$ окружность(AB) & $P \in$ окружность(CD) &
$Q \in$ окружность(AB) & $Q \in$ окружность(CD) & $E \in$ окружность(CD) &
разныеточки(P, Q) & разныеточки(A, C) & разныеточки(P, E) &
разныеточки$(Q, E) \rightarrow \neg(E \in$ окружность$(AB)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие четыре - выделены указателем "усм". Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

18. Четырехугольник с противоположными прямыми углами - вписанный.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AD) \perp$ прямая(CD) &
разныестороны$(B, D,$ прямая$(AC)) \rightarrow \angle(ABD) = \angle(ACD))$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прямая AC уже рассматривается в задаче. Не введена окружность, проходящая через точки A, B, C, D. Не усматривается равенство расстояний AB и AD. Уровень срабатывания равен 4.

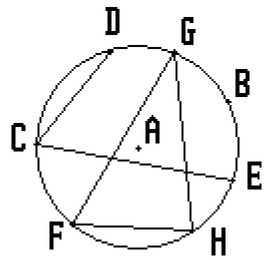
19. Отбор утверждений.

(a) Использование квадратичного соотношения для двух пропорциональных расстояний.

$\forall_{ABCDmn}(ml(AB) = nl(CD)\ \&\ al(AB)^2 + bl(CD)^2 + cl(AB)l(CD) = d \rightarrow \emptyset)$

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем выражения a, b, c, d, m, n не содержат неизвестных. Посылка, идентифицированная со вторым антецедентом, помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0.

(b) Использование известной суммы двух вписанных углов.



$\forall_{ABCDEFGHa}(C \in$ окружность$(AB)\ \&\ D \in$ окружность$(AB)\ \&$
$E \in$ окружность$(AB)\ \&\ F \in$ окружность$(AB)\ \&\ G \in$ окружность$(AB)\ \&$
$H \in$ окружность$(AB)\ \&\ \angle(DCE) + \angle(GFH) = a\ \&$ актив$(l(GH)) \rightarrow \emptyset)$

Два последних антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных, расстояние GH известно. Посылка, идентифицированнная с предпоследним антецедентом, помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Использование подобия треугольников, площади которых ранее выделены.

$\forall_{ABCDEF}($актив$(S($фигура$(ABC)))\ \&$ актив$(S($фигура$(DEF)))\ \&$
$(A, B, C) \sim (D, E, F) \rightarrow \emptyset)$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Посылка, идентифицированная с последним антецедентом, помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Использование подобия треугольников, у которых три из четырех соответственных сторон известны.

$\forall_{ABCDEF}((A, B, C) \sim (D, E, F) \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Треугольники ABC и DEF имеют две пары соответственных сторон, длины трех из которых известны, а длина четвертой - не известна. Посылка сопровождается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Использование известных стороны и угла треугольника, площадь которого представляет интерес.

$\forall_{ABCa}$(актив(S(фигура(ABC))) & $l(AB) = a \to \emptyset$)

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем вторая из них не входит в список посылок внешней задачи. Выражение a не содержит неизвестных, выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Вторая посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDE}$(актив(S(фигура(ABC))) & $\angle(DAE) = a$ & точкалуча(A, D, B) & точкалуча$(A, E, C) \to \emptyset$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем вторая из них не входит в список посылок внешней задачи. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных, выражение для площади треугольника ABC имеет тип "неизв". Вторая посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(f) Использование равенства расстояний, упоминаемых в задаче.

$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD) \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся в списке посылок внешней задачи. При этом оба расстояния AB, CD во внешней задаче рассматриваются. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(g) Определение расстояния, упоминаемого во внешней задаче.

$\forall_{ABab}(al(AB) = b \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся в списке посылок внешней задачи. Каждое из выражений a, b содержит только численные параметры. Во внешней задаче рассматривается либо расстояние AB, либо площадь многоугольника, имеющего точки A и B своими вершинами. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABabc}(al(AB) + b = c \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Выражение a не содержит неизвестных; выражения b и c имеют только численные параметры. Во внешней задаче рассматривается либо расстояние AB, либо пара расстояний AC, CB, где точка C лежит на прямой AB. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(h) Условие принадлежности точки прямой.

$\forall_{ABC}(A \in$ прямая$(BC) \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. При этом точки A, B, C во внешней задаче рассматриваются. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 2.

(i) Использование равенства с численными параметрами, содержащего неизвестную.

$\forall_{ab}(a = b \to \emptyset)$

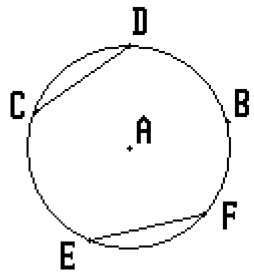
Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Эта посылка не содержит невырожденных числовых атомов, причем относительно внешней задачи имеет тип "внешнеизв". Она помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0.

(j) Использование равенства для угла треугольника при рассмотрении его площади.

$\forall_{ABCa}$(актив(S(фигура(ABC))) & минугол($\angle(ABC)$) $= a \to \emptyset$)

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем вторая из них не встречается во внешней задаче. Выражение a имеет тип "внешнеизв". Вторая посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(k) Равенство длин хорд.



$\forall_{ABCDEF}(l(CD) = l(EF)$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) $\to \emptyset$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Расстояния AB и CD уже рассматриваются во внешней задаче. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(l) Использование соотношения пропорциональности для двух расстояний.

$\forall_{ABCDab}(al(AB) = bl(CD) \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем во внешней задаче отсутствует соотношение пропорциональности для расстояний AB и CD. Точки A, B, C, D во внешней задаче рассматриваются. Выражения a, b не содержат неизвестных. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0.

(m) Условие перпендикулярности двух прямых.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(CD) $\to \emptyset$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Во внешней задаче перпендикулярность прямых AB и CD не усматривается, но точки A, B, C, D рассматриваются. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 2.

(n) Использование равенства двух углов.

$\forall_{ABCDa}(\angle(ABC) = a \ \& \ \angle(ABD) = a \to \angle(ABC) = \angle(ABD))$

Этот прием отличается от предыдущих тем, что комментарием "внешвывод" помечается не старая, а новая посылка. Антецеденты идентифицируются с посылками, отсутствующими во внешней задаче. Первая посылка не помечена комментарием "внешвывод". Не усматривается принадлежность точки D прямой BC. Точки A, B, C, D рассматриваются во внешней задаче, причем там же рассматривается окружность, проходящая через точку A. Уровень срабатывания равен 4.

(o) Условие параллельности двух прямых.
$\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \to \emptyset)$
Антецедент идентифицируется с посылкой. Во внешней задаче параллельность прямых AB и CD не усматривается, но точки A, B, C, D уже введены. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 2.

Пакетный анализатор "синусы"

Анализатор основан на усиленном использовании теоремы синусов.

1. Активизация пакетного анализатора "синусы".

   $\forall_{ABCa}(\text{актив}(\angle(ABC)) \to \emptyset)$

   Прием имеет заголовок "замечание" и применяется к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя. Антецедент идентифицируется с посылкой. Существует уравнение задачи, содержащее выражение "$\angle(ABC)$". Хотя бы одно из расстояний AB и AC уже рассматривается в задаче. Максимальный уровень приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости - 11000000. Уровень срабатывания равен 6. Созданы также версии данного приема, срабатывающие на уровнях 7, 9, 11. Их лимиты трудоемкости равны, соответственно, 23000000, 30000000 и 30000000. Максимальные уровни премов анализатора во всех случаях равны 5.

2. Обращения к блокам анализатора.

   Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом".

3. Алгебраические приемы.

   Все приемы этого подраздела имеют указатель "внутрпреобр" и выполняют замену.

   (a) Линейная комбинация двух соотношений пропорциональности.
   $\forall_{abcdpq}(ab = cd \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \to pb = qd \leftrightarrow aq = cp)$
   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "контекст(...)" определяет дополнительную идентификацию в текущей посылке некоторого угла A, выражение для которого имеет тип "неизв". Эта же посылка имеет хоты бы один содержащий неизвестные числовой атом, отличный от A. Заменяющее равенство не содержит отличных от A неизвестных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 0. Создана еще одна версия данного приема, имеющая тот же уровень срабатывания. В ней требуется, чтобы заменяющее равенство имело тип "внешнеизв", а заменяемое - содержало невырожденный числовой атом.

(b) Сокращение на синус в равенстве с синусом двойного угла.
$\forall_{abc}(\neg(\sin a = 0) \rightarrow b \sin a = c \sin(2a) \leftrightarrow b = 2c \cos a)$
Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Исключение знаменателя в равенстве дроби.
$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \rightarrow a/b = c \leftrightarrow a = bc)$
Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a содержит неизвестные; выражение c не имеет заголовка "угол" либо "расстояние". Уровень срабатывания равен 0.

(d) Раскрывание скобок.
$\forall_{abcAB}((a + bl(AB))c = ac + bcl(AB))$
Заменяющее выражение обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 3.

(e) Группировка вырожденных числовых атомов в правой части.
$\forall_{abc}(a + b = c \leftrightarrow a = c - b)$
Переменная b идентифицируется с суммой всех слагаемых левой части, не имеющих невырожденных числовых атомов, причем эта сумма отлична от 0. Остаточная сумма a содержит невырожденный числовой атом, а выражение c таких атомов не содержит. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Усмотрение двух равенств нулю линейных комбинаций синуса и косинуса.
$\forall_{abcdpqrsx}(c = d \ \& \ a - b = p \sin(\angle(ABC)) + q \cos(\angle(ABC)) \ \&$
$c - d = r \sin(\angle(ABC)) + s \cos(\angle(ABC)) \rightarrow a = b \leftrightarrow ps - qr = 0)$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "контекст(...)" определяет дополнительную идентификацию в текущей посылке выражения "$\angle(ABC)$", расположенного внутри суммы - операнда синуса либо косинуса. Текущая посылка не имеет других невырожденных числовых атомов. Посылка, идентифицированная с первым антецедентом, тоже имеет единственный невырожденный числовой атом "$\angle(ABC)$", причем некоторое его вхождение расположено под синусом либо косинусом. Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются сначала нормализатором "извлечтриг", исключающим суммы под тригонометрическими операциями, а затем нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Коэффициенты p, q, r, s определяются путем группировки подобных тригонометрических членов. Эти коэффициенты не содержат невырожденных числовых атомов, и хотя бы один из них - не известный. Уровень срабатывания равен 5.

(g) Определение синуса угла из линейного соотношения.
$\forall_{ABCab}(\neg(a = 0) \rightarrow a \sin(\angle(ABC)) = b \leftrightarrow \sin(\angle(ABC)) = b/a)$
Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b имеют только численные параметры. Уровень срабатывания равен 0.

(h) Определение острого угла по его синусу.
$\forall_{ABC}(0 \leq \pi/2 - \angle(ABC) \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow a \sin(\angle(ABC)) = b \leftrightarrow$
$\angle(ABC) = \arcsin(b/a))$
Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения a и b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 0.

(i) Определение угла по косинусу.

$\forall_{ABC}(0 \leq \pi - c \ \& \ 0 \leq c \ \& \ \neg(a = 0) \to a \cos c = b \leftrightarrow c = \arccos(b/a))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Выражение c содержит символ "угол". Уровень срабатывания равен 0.

(j) Подстановка выражения для угла.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \to \angle(ABC) = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем не допускается перестановка частей равенства. Преобразуемое выражение не расположено под символом "актив". Выражение a не имеет вхождений терма "$\angle(ABC)$". Созданы две версии приема; у одной из них точка привязка расположена в антецеденте, у другой - в заменяемом выражении. Уровни срабатывания равны 1.

(k) Подстановка выражения для расстояния.

$\forall_{ABab}(l(AB) = a \to l(AB) = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, отсутствующей во внешней задаче, и точка привязки выбрана в нем. Либо выражение a имеет только численные параметры, либо оно имеет вид $pl(CD)/q$, где q известно, а p содержит только численные параметры. Заменяемое выражение не расположено под символами "актив" либо "степень". Кроме того, оно не расположено внутри равенства вида "$pl(AB)/q = r$", где p, q, r известны. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. В ней отброшены ограничения на a и на расположение заменяемого выражения внутри равенства указанного вида.

(l) Ориентация равенства для углов.

$\forall_{ABCa}(a = \angle(ABC) \leftrightarrow \angle(ABC) = a)$

Перестановка частей равенства при идентификации блокируется. Выражение a не имеет заголовка "угол". Уровень срабатывания равен 0.

(m) Подстановка выражения для синуса угла.

$\forall_{ABCa}(\sin(\angle(ABC)) = a \to p \sin(\angle(ABC)) = q \leftrightarrow ap = q)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет только численные параметры. Уровень срабатывания равен 1. Прием продублирован на уровне 5, где ограничение на a отброшено.

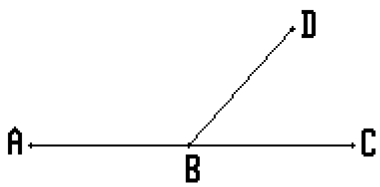
(n) Стандартизация неравенства с пи.

$\forall_a(a + \pi < \pi/2 \leftrightarrow a + \pi/2 < 0)$

Уровень срабатывания равен 0.

4. Общие геометрические приемы.

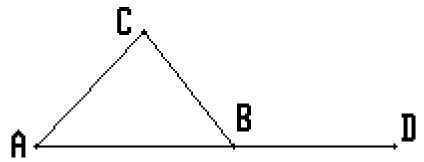
(a) Рассмотрение смежного угла.



$\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AC) & актив$(\angle(ABD))$ & разныеточки$(B,C) \rightarrow$
$\angle(CBD) = \pi - \angle(ABD))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой. Первый антецедент выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

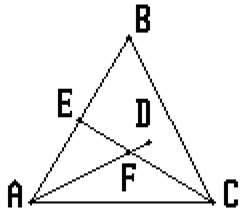
(b) Внешний угол треугольника.



$\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AD) & актив$(\angle(CBD))$ & актив$(\angle(BAC))$ &
актив$(\angle(ACB)) \rightarrow \angle(ACB) = \angle(CBD) - \angle(BAC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

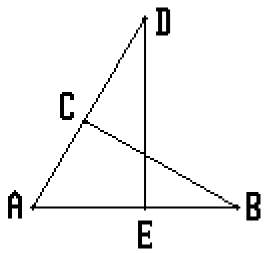
(c) Острый угол между высотами треугольника равен острому углу треугольника.



$\forall_{ABCDEF}($актив$(\angle(ABC))$ & прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AD) \perp$
прямая(BC) & $F \in$ прямая(CE) & $F \in$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AB) &
разныеточки(B,C) & разныеточки(A,B) & разныепрямые(прямая(AB),
прямая$(BC))$ & $0 < \pi/2 - \angle(ABC) \rightarrow \angle(ABC) = \angle(EFA))$

Первые шесть антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором. Последние четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение для угла ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

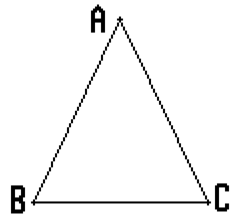
(d) Углы со взаимно перпендикулярными сторонами.



$\forall_{ABCDE}($прямая$(BC) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AB) \perp$ прямая(DE) &
$C \in$ прямая(AD) & $E \in$ прямая(AB) & актив$(\angle(ABC)) \rightarrow$
$\angle(ADE) = \angle(ABC))$

Первые пять антецедентов выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Угол ABC известен. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Углы при основании равнобедренного треугольника.



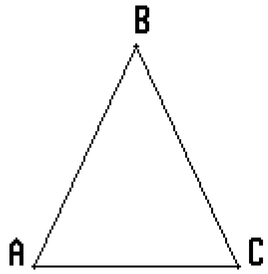
$\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) & $l(AB) = l(AC)$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow$
$\angle(ACB) = \angle(ABC)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$($l(AB) = l(AC)$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow \angle(ACB) = \angle(ABC)$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - обрабатывается проверочным оператором. Прямая BC уже рассматривается в задаче. На прямой BC выделена такая точка D, отличная от точек B, C и не являющаяся основанием высоты, проведенной из A, что угол ADB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

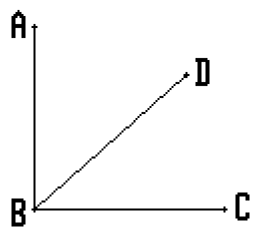
(f) Соотношение между углами при основании и при вершине равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABC}$($l(AB) = l(BC)$ & актив($\angle(ABC)$) & разныеточки$(A, C) \rightarrow$
$\angle(BAC) = \pi/2 - \angle(ABC)/2$)

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Угол ABC известен. Уровень срабатывания равен 2.

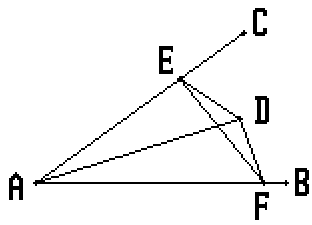
(g) Дополнение острого угла до прямого.



$\forall_{ABCDa}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & $\angle(ABD) = a$ & однасторона$(A, D,$прямая$(BC))$ & однасторона$(C, D,$прямая$(AB)) \to \angle(CBD) = \pi/2 - a)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение a не содержит неизвестных, угол CBD не известен. Уровень срабатывания равен 1.

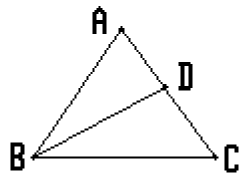
(h) Отрезки равной длины, проведенные к сторонам угла из точки на биссектрисе.



$\forall_{ABCDEF}(\angle(CAD) = \angle(BAD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AB) & $l(DE) = l(DF)$ & $\neg(l(AE) - l(AF) = 0) \to \angle(AEF) = \angle(ADF))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Прямая EF уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 0.

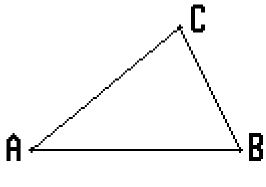
(i) Ввод в рассмотрение разности углов, имеющих общую вершину.



$\forall_{ABCD}$(актив$(\angle(ABC))$ & актив$(\angle(DBC))$ & $D \in$ отрезок$(AC) \to \angle(ABD) = \angle(ABC) - \angle(DBC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

5. В треугольнике выделены угол и две стороны.



$\forall_{ABCpq}$(актив$(\angle(ACB))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & $p = \sin(\angle(BAC))$ & $q = \sin(\angle(ACB)) \to pl(AB) = ql(BC))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. В посылках задачи имеется равенство, содержащее выражение "$\angle(ACB)$". Не усматривается, что треугольник прямоугольный. Каждое из выражений p, q имеет не более одного вхождения символа "угол". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCpq}$(актив($\angle(ACB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) &
$p = \sin(\angle(ACB) + \angle(ABC))$ & $q = \sin(\angle(ABC)) \to pl(AC) = ql(BC)$)

Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем приеме. К ограничениям на контекст, приведенным для предыдущего приема, добавляется требование, чтобы выражения для угла ACB и расстояний AC, BC содержали только численные параметры, и хотя бы один из них являлся неизвестной. Уровень срабатывания равен 5.

6. В треугольнике выделены два угла и сторона против одного из углов.

   $\forall_{ABCpq}$(актив($\angle(ACB)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($l(BC)$) & $p = \sin(\angle(BAC))$ & $q = \sin(\angle(ACB)) \to pl(AB) = ql(BC)$)

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. В посылках задачи имеется равенство, содержащее выражение "$\angle(ACB)$". Не усматривается, что треугольник прямоугольный. Каждое из выражений p, q имеет не более одного вхождения символа "угол". Уровень срабатывания равен 2. Создана также копия приема, срабатывающая на уровне 4.

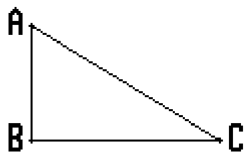
7. В треугольнике выделены два угла и сторона против третьего угла.

   $\forall_{ABCpq}$(актив($\angle(ACB)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($l(AC)$) & $p = \sin(\angle(BAC))$ & $q = \sin(\angle(ACB) + \angle(BAC)) \to pl(AC) = ql(BC)$)

   $\forall_{ABCpq}$(актив($\angle(ACB)$) & актив($\angle(BAC)$) & актив($l(BC)$) & $p = \sin(\angle(BAC))$ & $q = \sin(\angle(ACB) + \angle(BAC)) \to pl(AC) = ql(BC)$)

   Аналогично предыдущему, но ограничение на q отброшено. Уровень срабатывания первого приема равен 3, второго - 4.

8. Прямоугольный треугольник.



   $\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & актив($\angle(BCA)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) $\to l(BC) = l(AC)\cos(\angle(BCA))$)

   $\forall_{ABC}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & актив($\angle(BCA)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(AB)$) $\to l(AB) = l(AC)\sin(\angle(BCA))$)

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BCA))$ & актив$(l(BC)) \to$ $l(BC) = l(AC)\cos(\angle(BCA)))$

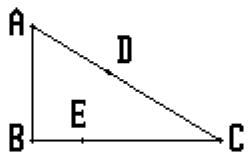
$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BCA))$ & актив$(l(AB)) \to$ $l(AB) = l(AC)\sin(\angle(BCA)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BCA))$ & актив$(l(AC)) \to$ $l(AB) = l(AC)\sin(\angle(BCA)))$

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(BCA))$ & актив$(l(AC)) \to$ $l(BC) = l(AC)\cos(\angle(BCA)))$

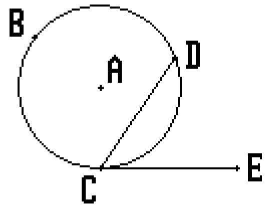
Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(\angle(ECD))$ & $E \in$ прямая(BC) & $D \in$ прямая(AC) & актив$(l(AB)) \to$ $l(AB)|\cos(\angle(ECD))| = l(BC)\sin(\angle(ECD)))$

Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Расстояние AB и угол ECD известны, расстояние BC - не известно. Уровень срабатывания равен 4.

9. Выражение длины хорды через радиус окружности и угол между хордой и касательной.



$\forall_{ABCDE}(D \in$ окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая$(AC) \to l(CD) = 2l(AC)\sin(\angle(DCE)))$

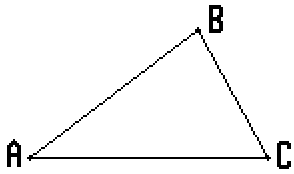
Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в третьем из них. Расстояние AC известно. Уровень срабатывания равен 3.

10. Отбор утверждений.

   (a) Использование соотношения пропорциональности для двух расстояний.
   $\forall_{ABCDab}(al(AB) = bl(CD) \to \emptyset)$
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражения a, b не содержат неизвестных. Синтезатор "пропорциональны" не усматривает из посылок

внешней задачи соотношение пропорциональности, связывающее расстояния AB и CD, однако сами эти расстояния во внешней задаче рассматриваются. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0.

(b) Использование найденного угла для определения противоположной стороны по теореме косинусов.



$\forall_{ABCa}(\angle(BAC) = a\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC)) \to \emptyset)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Два других антецедента выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных. Одно из расстояний AB, BC известно, причем выражение для другого имеет тип "неизв". Посылка помечается комментарием "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 0.

(c) Использование равенства с численными параметрами, содержащего неизвестную.

$\forall_{ab}(a = b) \to \emptyset$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не имеющей невырожденных числовых атомов и не встречающейся во внешней задаче. Эта посылка имеет тип "внешнеизв". Прием помечает ее комментарием "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 0.

(d) Использование равенства, определяющего расстояние.

$\forall_{ABab}(al(AB) = b \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Выражения a, b не содержат неизвестных. Во внешней задаче рассматривается расстояние от точки A до некоторой точки прямой AB. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

(e) Использование равенства, определяющего угол.

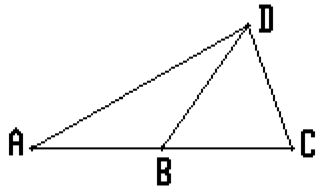
$\forall_{ABab}(a\angle(ABC) = b \to \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Выражения a, b не содержат неизвестных. Угол ABC рассматривается во внешней задаче. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный анализатор "косинусы"

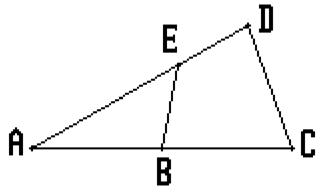
Анализатор основан на усиленном использовании теоремы косинусов.

1. Активизация пакетного анализатора "косинусы".



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AD)$) & актив($l(BD)$) & актив($l(CD)$) & $B \in$ прямая$(AC) \to \emptyset$)

Прием имеет заголовок "замечание" и применяется к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Максимальный уровень приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости - 15000000. Уровень срабатывания равен 7.



$\forall_{ABCD}$(актив($l(AD)$) & $E \in$ прямая(AD) & $B \in$ прямая(AC) & актив($l(AB)$) & актив($l(AE)$) & актив($l(BE)$) & актив($l(CD)$) $\to \emptyset$)

Первый антецедент идентифицирован с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Максимальный уровень приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости - 9000000. Уровень срабатывания равен 10.

2. Обращения к блокам анализатора.

   Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом".

3. Алгебраические приемы.

   Все приемы этого подраздела имеют указатель "внутрпреобр" и выполняют замену.

   (a) Нормализация косинуса.
   $\forall_{abcde}(e = \cos b \to a \cos b/c + d = f \leftrightarrow ae/c + d = f)$
   Антецедент выделен указателем "идентификатор"; его правая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации. Выражение b имеет заголовок "плюс" либо "минус", причем результат нормализации e отличен от исходного косинуса. Главным образом, прием применяет формулы приведения. Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Линейная комбинация уравнений для исключения косинуса.
   $\forall_{abcdpqrsu}(a \cos u/b + c = d \,\&\, \neg(a = 0) \to p \cos u/q + r = s \leftrightarrow aqr - bpc - aqs + bdp = 0)$
   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Аргумент u содержит неизвестные. Выражения a, b, c, d, p, q, r, s не содержат неизвестных синусов и косинусов. Результирующее уравнение содержит неизвестные. Уровень срабатывания приема равен 1.

(c) Исключение знаменателя в уравнении.

$\forall_{abcd}(\neg(b=0) \to a/b+c=d \leftrightarrow a+bc-bd=0)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Преобразуемое равенство не входит в список посылок внешней задачи. Левая часть результирующео равенства обрабатывается нормализатором разложения на множители "видумножение", а само это равенство - нормализатором числовых равенств "нормчисло". Введен слаюый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Определение угла из линейного уравнения для косинуса.

$\forall_{ABCabc}(\neg(a=0) \to a\cos(\angle(ABC))+b=c \leftrightarrow \angle(ABC)=\arccos((c-b)/a))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Внешняя задача на исследование не имеет цели "косвнеизв". Заметим, что такие цели используются в задачах на исследование при поиске новых "теоретических" соотношений, где явное разрешение относительно неизвестных не требуется, а нужно лишь связать их между собой некоторым уравнением. Уровень срабатывания равен 0.

(e) Подстановка выражения для расстояния.

$\forall_{ABab}(l(AB)=a \to l(AB)=a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Точка привязки выбрана в этом антецеденте. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Преобразуемое выражение не расположено под символом "актив". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABab}(l(AB)^2=a \to l(AB)^2=a)$

Аналогично предыдущему.

(f) Подстановка выражения для угла.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC)=a \to \angle(ABC)=a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем точка привязки выбрана в нем. Выражение a не содержит внутри себя терма "$\angle(ABC)$". Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Преобразуемое выражение не расположено под символом "актив". Уровень срабатывания равен 1.

(g) Выражение одного расстояния через другое из соотношения пропорциональности.

$\forall_{ABCDab}(\neg(a=0) \to al(AB)=bl(CD) \leftrightarrow l(AB)=bl(CD)/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a и b не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания приема равен 3.

(h) Приведение подобных членов с расстоянием.

$\forall_{ABabcn}(al(AB)^n+bl(AB)^n+c=(a+b)l(AB)^n+c)$

Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Переменная n идентифицируется с натуральной константой, возможно, равной единице. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDabc}(al(AB)l(CD)+bl(AB)l(CD)+c=(a+b)l(AB)l(CD)+c)$

Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 1.

(i) Линейная комбинация уравнений для исключения суммы квадратов расстояний.

$\forall_{ABCDabcdpq}(ad - bc = 0 \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ al(AB)^2 + bl(CD)^2 + p = 0 \to cl(AB)^2 + dl(CD)^2 + q = 0 \leftrightarrow pc - aq = 0)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Выражения p, q не содержат невырожденных числовых атомов, отличных от $l(AB)$ и $l(CD)$. Уровень срабатывания равен 4.

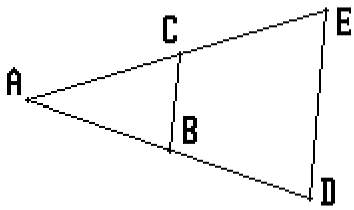
(j) Линейная комбинация двух уравнений для исключения произведения расстояний.

$\forall_{ABCDmnpqrs}(\neg(p = 0) \ \& \ pl(AB)l(CD) + q = r \to ml(AB)l(CD) + n = s \leftrightarrow np - mq - sp + mr = 0)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения m, n, p, q, r, s не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 5.

4. Общие геометрические приемы.

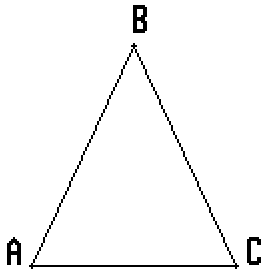
(a) Соотношение пропорциональности длин отрезков, отсекаемых параллельными прямыми.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(l(BC))$ & $B \in$ прямая(AD) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(AE) & разныепрямые(прямая(AD), прямая(AE)) & актив$(l(DE))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(AD)) \to l(AB)l(DE) = l(BC)l(AD)$)

Третий антецедент выделен указателем "равно", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Среди расстояний AB, DE, BC, AD имеется два либо три известных, а остальные - неизвестны. Уровень срабатывания равен 3.

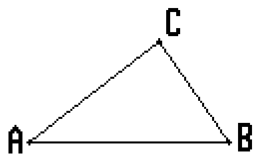
(b) Углы равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & разныеточки(A, C) & актив$(\angle(BAC)) \rightarrow$
$2\angle(BAC) + \angle(ABC) = \pi)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается ни принадлежность точки B прямой AC, ни перпендикулярность прямых AB и BC. Уровень срабатывания равен 2.

5. Теорема косинусов: все три стороны уже выделены.



$\forall_{ABC}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow$
$l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Хотя бы два из расстояний AB, AC, BC известны. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{ABC}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(AC))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(\angle(BAC)) \rightarrow$
$l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

6. Теорема косинусов: выделены угол, боковая сторона и противоположная сторона.

$\forall_{ABC}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(\angle(BAC)) \rightarrow$
$l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 5.

7. Отбор утверждений.

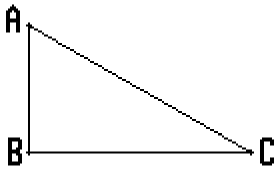
   (a) Использование равенства с численными параметрами, содержащего неизвестную.
   $\forall_{ab}(a = b \rightarrow \emptyset)$
   Антецедент идентифицируется с посылкой, не содержащей невырожденных числовых атомов и не встречающейся во внешней задаче. Эта посылка имеет тип "внешнеизв". Прием помечает ее комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0. После срабатывания приема работа анализатора обрывается.

   (b) Использование уравнения для определения расстояния.
   $\forall_{ab}(a = b \rightarrow \emptyset)$
   Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Эта посылка имеет единственный неизвестный числовой атом - некоторое расстояние $l(AB)$. Она помечается комментарием "внешвывод", и работа анализатора обрывается. Уровень срабатывания равен 0.

Пакетный анализатор "тангенсы"

Анализатор основан на усиленном использовании соотношений с тангенсами.

1. Активизация пакетного анализатора "тангенсы".



$\forall_{ABC}$(актив($\angle(BAC)$) & прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) $\to \emptyset$)

Прием имеет заголовок "замечание" и применяется к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя. Антецеденты выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана во втором из них. Выражения для расстояний AB и BC имеют тип "возмактив". Максимальный уровень приемов анализатора равен 4, лимит трудоемкости - 5000000. Уровень срабатывания равен 8.

2. Обращения к блокам анализатора.

Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом".

3. Алгебраические приемы.

Все приемы этого подраздела имеют указатель "внутрпреобр" и выполняют замену.

(a) Исключение отношения расстояний с помощью равенства из посылок.

$\forall_{ABCDabcdpq}(\neg(a = 0)\ \&\ p = al(AB)/(bl(CD)) \to q = cl(AB)/(dl(CD)) \leftrightarrow q = pbc/(ad))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d не имеют невырожденных числовых атомов. Выражения p, q не содержат символа "расстояние". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCDabcdpq}(\neg(a = 0)\ \&\ p = al(AB)/(bl(CD)) \to q = cl(CD)/(dl(AB)) \leftrightarrow q = ac/(pbd))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

(b) Подстановка выражения для тангенса угла.

$\forall_{ab}(\operatorname{tg} a = b \leftrightarrow \operatorname{tg} a = b)$

Точка привязки выбрана в антецеденте, идентифицируемом с посылкой. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение a содержит символ "угол". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Отбрасывание тождества с котангенсом и тангенсом.

$\forall_{abx}(a \operatorname{ctg} x/b = a/(b \operatorname{tg} x) \leftrightarrow$ истина)

Уровень срабатывания равен 0.

(d) Ориентация равенства с тангенсом.

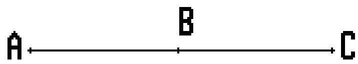
$\forall_{ab}(a = \operatorname{tg} b \leftrightarrow \operatorname{tg} b = a)$

Перестановка частей идентифицируемого равенства не допускается. Выражение b содержит символ "угол", а выражение a - не содержит. Уровень срабатывания равен 0.

4. Общие геометрические приемы.

В анализаторе имеется лишь один такой прием:

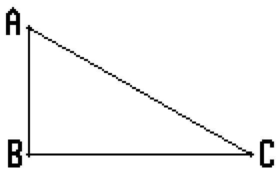
(a) Равенство длины отрезка сумме длин двух подотрезков.



$\forall_{ABC}(B \in$ отрезок(AC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \rightarrow$
$l(AC) = l(BC) + l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Расстояние AC пока в задаче не рассматривается. Уровень срабатывания равен 1.

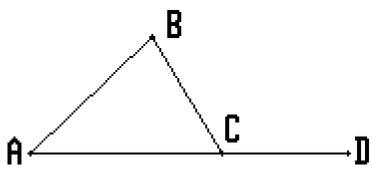
5. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABC}($прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ &
разныеточки$(A, B) \rightarrow \operatorname{tg}(\angle(BAC)) = l(BC)/l(AB))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

6. Тангенс внешнего угла треугольника.



$\forall_{ABCDabc}(C \in$ отрезок(AD) & $\operatorname{tg}(\angle(BAC)) = a$ & $\operatorname{tg}(\angle(ABC)) = b$ &
$\operatorname{tg}(\angle(BCD)) = c \rightarrow c = a + b + abc)$

Три последних антецедента идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "усм". Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

7. Использование равенства с численными параметрами, содержащего неизвестную.

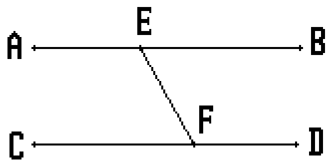
   $\forall_{ab}(a = b \to \emptyset)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче и не содержащей невырожденных числовых атомов. Она имеет тип "внешнеизв". Прием помечает посылку комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный анализатор "проекции"

Анализатор основан на усиленном рассмотрении ортогонального проектирования для точек параллельных прямых.

1. Активизация пакетного анализатора "проекции".

   $\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & актив(прямая(EF)) & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CD)) \to \emptyset$)

   Прием имеет заголовок "замечание" и применяется к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя. Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Максимальный уровень приемов анализатора равен 4, лимит трудоемкости - 5000000. Уровень срабатывания равен 13.

2. Обращения к блокам анализатора.

   Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом".

3. Алгебраические приемы.

   Все приемы этого подраздела имеют указатель "внутрпреобр" и выполняют замену.

   (a) Выражение одного расстояния через другое из соотношения пропорциональности.
   $\forall_{ABCDab}(\neg(a = 0) \to al(AB) = bl(CD) \leftrightarrow l(AB) = bl(CD)/a)$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Хотя бы одна из точек A, B не рассматривается во внешней задаче, а обе точки C, D - рассматриваются. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Выражение одного расстояния через другое из линейного уравнения.
   $\forall_{ABCDabcep}(\neg(a = 0) \to al(AB)/b + cl(CD)/e = p \leftrightarrow$
   $l(AB) = bep/a - bcl(CD)/a)$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, e, p не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

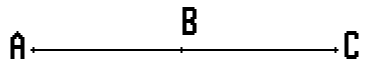
(c) Подстановка выражения для расстояния через линейную комбинацию других расстояний.

$\forall_{ABab}(l(AB) = a \to l(AB) = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем точка привязка выбрана в нем. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение a не содержит символа "угол", причем каждое его слагаемое, содержащее символ "расстояние", имеет вид "$cl(CD)$". Заменяемое выражение не расположено под символом "актив". Уровень срабатывания равен 2.

4. Общие геометрические приемы.

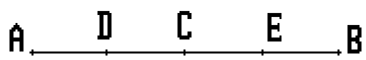
(a) Равенство длины отрезка сумме длин подотрезков.



$\forall_{ABC}(B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ \text{актив}(l(AC)) \to l(AC) = l(BC) + l(AB))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". В задаче рассматривается прямая, параллельная прямой AC и отличная от нее. Уровень срабатывания равен 2.

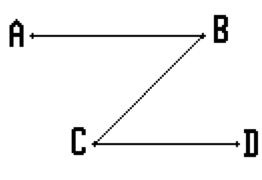
(b) Усмотрение принадлежности точки отрезку из принадлежностей концов этого отрезка двум смежным отрезкам с концами в данной точке.



$\forall_{ABCDE}(D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ C \in \text{отрезок}(AB) \to$
$C \in \text{отрезок}(DE))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 0.

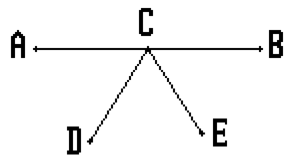
(c) Усмотрение расположения относительно секущей точек на двух параллельных прямых из сравнения углов.



$\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{актив}(\angle(ABC))\ \&\ \text{актив}(\angle(BCD))$
$\&\ 0 < \pi/2 - \angle(ABC)\ \&\ 0 < \pi/2 - \angle(BCD) \to \text{разныестороны}(A, D,$
$\text{прямая}(BC)))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", второй и третий - указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается расположение точки C на прямой AB. Уровень срабатывания равен 0.

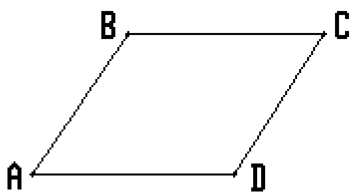
(d) Усмотрение принадлежности отрезку при помощи оператора "разныестороны".



$\forall_{ABCDE}$(разныестороны($A, E,$ прямая(CD)) & разныестороны($B, D,$ прямая(CE)) & однасторона($D, E,$ прямая(AB)) & $\neg(E \in$ прямая$(CD))$ & $C \in$ прямая$(AB) \to C \in$ отрезок(AB))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

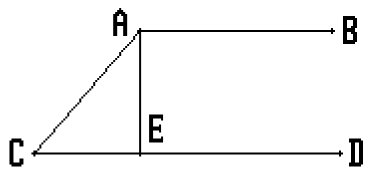
(e) Равенство отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на параллельных прямых.



$\forall_{ABCD}$(актив$(l(AB))$ & прямая$(BC) \parallel$ прямая(AD) & прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \to l(AB) = l(CD)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Обозначение прямой AB отлично от обозначений прямых CD, AD и BC. Уровень срабатывания равен 4.

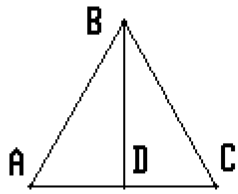
5. Проведение перпендикуляра.



$\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(CD))$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) $\to E -$ точка & $E \in$ прямая(CD) & прямая$(AE) \perp$ прямая(CD))

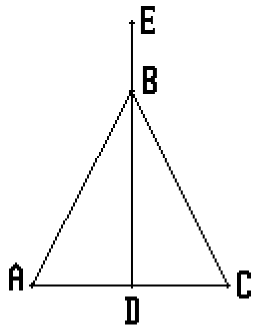
Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие три - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Либо угол ACD выражен через численные параметры, либо рассматривается расстояние от точки A до некоторой точки прямой CD, отличной от точки C. Основание E опущенного из точки A на прямую CD перпендикуляра пока не введено, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 2.

6. Высота равнобедренного треугольника.



$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC)$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & разныеточки$(A, C) \to D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(DC))$

Первый антецедент выделен указателем "равно", следующие два - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.



$\forall_{ABCDE}$(актив$(l(AB))$ & $l(AB) = l(BC)$ & актив(прямая(AC)) & разныеточки$(A, B) \to D -$ точка & $E -$ точка & $\neg(B = E)$ & $\neg(A = D)$ & $\neg(C = D)$ & прямая$(BE) \perp$ прямая(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & $D \in$ прямая(BE) & $D \in$ отрезок(AC))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Через точку B не проведен перпендикуляр к прямой AC. Не усматривается принадлежность точки B прямой AC. Прием вводит новые точки D, E, определяющие перпендикуляр DE. Уровень срабатывания равен 4.

7. Использование уравнения для численной неизвестной.

   $\forall_{abcx}(a + bx = c \to \emptyset)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Переменная x - неизвестная; выражения a, b, c не содержат неизвестных. Посылка сопровождается комментарием "внешвывод", и работа анализатора обрывается. Уровень срабатывания равен 0.

Пакетный анализатор "геомразличия"

Анализатор реализует усиленный вывод утверждений о различии точек и прямых.

1. Активизация пакетного анализатора "геомразличия".

   $\forall_{AB}$(актив(прямая(AB)) $\to \emptyset$)

Прием имеет заголовок "замечание" и применяется к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя. Антецедент идентифицируется с посылкой. Максимальный уровень приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости - 2000000. Уровень срабатывания равен 2.

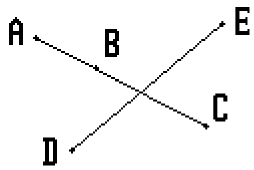
2. Общие геометрические приемы анализатора.

(a) Отрезок, проходящий через прямую.

$\forall_{ABCDE}(A \in$ отрезок(BC) & $A \in$ прямая$(DE) \rightarrow$ разныестороны$(B, C,$ прямая$(DE)))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Не усматривается принадлежность точек B, C прямой DE. Отсутствует посылка, указывающая на расположение точек B, C по разные стороны от прямой, проходящей через точки D, E. Уровень срабатывания равен 0.

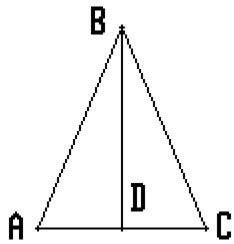
(b) Отделение точкой отрезка.



$\forall_{ABCDE}(B \in$ отрезок(AC) & разныестороны$(B, C,$прямая$(DE))$ & разныеточки$(B, C) \rightarrow$ разныестороны$(A, C,$прямая$(DE)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении посылки "разныестороны$(P,\ Q,$ прямая$(DE))$". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается принадлежность точек A, B, C прямой DE. Отсутствует посылка , указывающая на расположение точек A, C по разные стороны от прямой, проходящей через точки D, E. Уровень срабатывания равен 2.

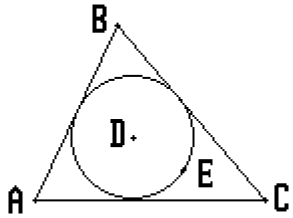
(c) Основание высоты равнобедренного треугольника принадлежит основанию треугольника.



$\forall_{ABCD}($прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & разныеточки$(A, C) \rightarrow D \in$ отрезок$(AC))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Центр вписанной окружности лежит по ту же сторону от стороны треугольника, что и его противоположная вершина.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) $\to$
однасторона($A, D,$ прямая(BC)))

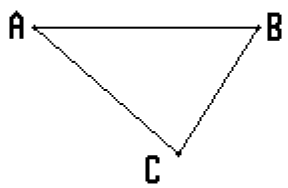
Антецедент идентифицируется с посылкой, причем вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Имеется также посылка, утверждающая, что некоторые две точки лежат по разные стороны либо по одну сторону от прямой, проходящей через точки B, C. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Вершины треугольника принадлежат описанной около него окружности.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)описана около фигура(ABC) $\to$
$A \in$ окружность(DE))

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания приема равен 1.

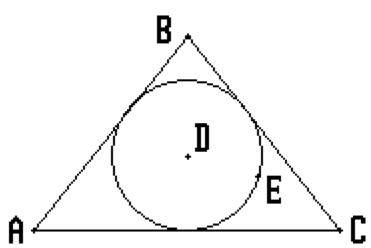
3. Различие точек, взятых на двух различных пересекающихся прямых.



$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BC)) &
разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & $\neg(A = B) \to \neg(B = C)$)

Последний антецедент идентифицируется с посылкой. Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

4. Центр вписанной в треугольник окружности не принадлежит стороне треугольника.



$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура$(ABC) \rightarrow \neg(D \in$ прямая$(BC)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении утверждения "разныестороны(P Q прямая(BC))". Антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок рассмотрения вершин треугольника - произвольный. Уровень срабатывания равен 2.

5. Усмотрение различия точек, лежащих по разные стороны от прямой.

   $\forall_{ABCD}(\neg(A \in$ прямая$(BC))$ & разныестороны$(A, D,$ прямая$(BC)) \rightarrow \neg(A = D))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

6. Усмотрение непринадлежности точки окружности.

   $\forall_{ABCDE}(A \in$ окружность(DE) & $B \in$ окружность(DE) & $C \in$ прямая(AB) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) & разныеточки$(B, C) \rightarrow$ $\neg(C \in$ окружность$(DE)))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

7. Усмотрение различия окружностей.

   $\forall_{ABCDE}(A \in$ окружность(BC) & $\neg(A \in$ окружность$(DE)) \rightarrow$ $\neg($окружность$(BC) =$ окружность$(DE)))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана во втором из них. Уровень срабатывания равен 2.

8. Различие центров различных пересекающихся окружностей.

   $\forall_{ABCDE}(\neg($окружность$(AB) =$ окружность$(CD))$ & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность$(CD) \rightarrow \neg(A = C))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

9. Использование различия точек.

   $\forall_{ab}(\neg(a = b) \rightarrow \emptyset)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. При этом переменные a, b идентифицируются с переменными же. Посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0.

Пакетный анализатор "смотрезок"

Анализатор реализует усиленный вывод утверждений о принадлежности точек отрезкам и лучам. Пока его развитие лишь начато, причем созданные приемы связаны с выпуклыми фигурами.

1. Активизация пакетного анализатора "смотрезок".

   $\forall_{AB}($актив$($прямая$(AB)) \rightarrow \emptyset)$

Прием имеет заголовок "замечание" и применяется к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя. Антецедент идентифицируется с посылкой. Максимальный уровень приемов анализатора равен 5, лимит трудоемкости - 4000000. Уровень срабатывания равен 3.

2. Ввод обозначения для выпуклого четырехугольника.

   $\forall_{ABCDa}(\text{квадрат}(ABCD) \to \text{фигура}(ABCD) = a \ \& \ \text{выпукло}(a))$

   $\forall_{ABCDa}(\text{прямоугольник}(ABCD) \to \text{фигура}(ABCD) = a \ \& \ \text{выпукло}(a))$

   $\forall_{ABCDa}(\text{ромб}(ABCD) \to \text{фигура}(ABCD) = a \ \& \ \text{выпукло}(a))$

   $\forall_{ABCDa}(\text{трапеция}(ABCD) \to \text{фигура}(ABCD) = a \ \& \ \text{выпукло}(a))$

   $\forall_{ABCDa}(\text{параллелограмм}(ABCD) \to \text{фигура}(ABCD) = a \ \& \ \text{выпукло}(a))$

   $\forall_{ABCDa}(\text{четырехугольник}(ABCD) \to \text{фигура}(ABCD) = a \ \& \ \text{выпукло}(a))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Для рассматриваемого четырехугольника пока не введено обозначение a, и прием его вводит. Уровень срабатывания равен 0.

3. Принадлежность четырехугольнику его вершин.

   $\forall_{ABCDa}(a = \text{фигура}(ABCD) \to A \in a)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются циклические перестановки вершин четырехугольника. Уровень срабатывания равен 1.

4. Точка отрезка, концы которого принадлежат выпуклой фигуре, тоже принадлежит этой фигуре.

   $\forall_{ABCa}(A \in a \ \& \ B \in a \ \& \ \text{выпукло}(a) \ \& \ C \in \text{отрезок}(AB) \to C \in a)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

5. Прямые, проходящие через пары противоположных сторон выпуклого четырехугольника, пересекаются во внутренней точке четырехугольника.

   $\forall_{ABCDEFGHPa}(\text{фигура}(ABCD) = a \ \& \ E \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ F \in \text{отрезок}(CD) \ \& \ G \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ H \in \text{отрезок}(AD) \ \& \ \text{выпукло}(a) \ \& \ P \in \text{прямая}(EF) \ \& \ P \in \text{прямая}(GH) \to P \in \text{отрезок}(EF) \ \& \ P \in \text{отрезок}(GH))$

   Первый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

6. Точка отрезка, концы которого лежат на противоположных сторонах выпуклого четырехугольника.

   $\forall_{ABCDMNPa}(a = \text{фигура}(ABCD) \ \& \ \text{выпукло}(a) \ \& \ M \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ N \in \text{отрезок}(CD) \ \& \ P \in \text{прямая}(MN) \ \& \ P \in a \to P \in \text{отрезок}(MN))$

   Первые два антецедента, а также последний антецедент идентифицируются с посылками. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

7. Использование принадлежности отрезку.

   $\forall_{ABC}(A \in \text{отрезок}(BC) \to \emptyset)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, отсутствующей во внешней задаче. Эта посылка помечается комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 0.

Пакетный анализатор "смуглы"

Анализатор предназначен для усиленного вывода соотношений, связывающих между собой углы, а также усмотрения параллельности прямых. Понадобился он пока в единственном случае, и имеет совсем мало приемов. Предполагается, что его развитие будет продолжено.

1. Активизация пакетного анализатора "смуглы".

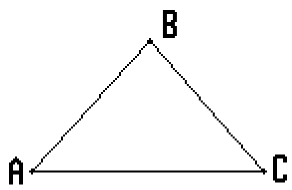
   $\forall_{AB}(\text{актив}(l(AB)) \to \emptyset)$

   Прием имеет заголовок "замечание" и применяется к задачам на доказательство либо исследование, решаемым в режиме усилителя. Антецедент идентифицируется с посылкой. Максимальный уровень приемов анализатора равен 3, лимит трудоемкости - 2000000. Уровень срабатывания равен 5.

2. Обращения к блокам анализатора.

   Предпринимаются обращения к блокам анализатора "общалг" и "общгеом".

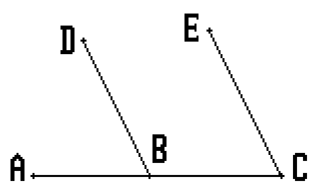
3. Углы при основании равнобедренного треугольника.

   $\forall_{ABC}(l(AB) = l(BC)$ & разныеточки(A, C) & разныеточки$(A, B) \to$
   $\angle(BAC) = \angle(BCA))$

   Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Уровень срабатывания равен 1.

4. Усмотрение параллельности прямых из равенства углов, образуемых ими с секущей.

   $\forall_{ABCDE}(C \in$ прямая(AB) & актив$(\angle(ABD))$ & актив$(\angle(ACE))$ &
   $\angle(ABD) = \angle(ACE)$ & точкалуча(A, B, C) & однасторона$(D, E,$ прямая$(AB)) \to$
   прямая$(BD) \parallel$ прямая$(CE))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - выделен указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Использование условия параллельности двух прямых.

   $\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая$(CD) \to \emptyset$)

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Параллельность данных прямых во внешней задаче не усматривается, хотя точки A, B, C, D в ее посылках встречаются. Прием снабжает текущую посылку комментарием "внешвывод". Уровень срабатывания равен 2.

Блок анализатора "общгеом"

Как уже говорилось выше, блок анализатора представляет собой группу приемов, к которой могут обращаться различные пакетные анализаторы. Она реализована в виде программы, получающей от внешнего анализатора координату текущей точки сканирования и текущий уровень сканирования. Если срабатывает какой - либо прием, изменяющий задачу пакетного анализатора, то реализуется выход из блока анализатора по значению "истина", иначе - по значению "ложь". Приемы блока анализатора реализованы на ГЕНОЛОГе. В отличие от заголовков "внутрвывод(A)" приемов анализатора, здесь используется заголовок "Внутрвывод(A)".

В блоке анализатора "общгеом" собраны несколько простейших геометрических приемов, необходимых для поддержания общей стандартизации геометрических посылок анализаторов.

1. Регистрация в активе.

   Уровни срабатывания приемов этого подраздела равны 0.

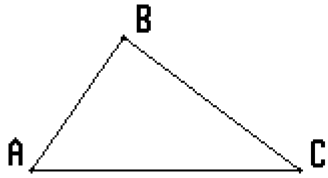
   (a) Регистрация угла в активе.
   $\forall_{ABC}$(актив$(\angle(ABC))$)
   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке выражения "$\angle(ABC)$".

   (b) Регистрация расстояния в активе.
   $\forall_{AB}$(актив$(l(AB))$)
   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке выражения "$l(AB)$".

   (c) Регистрация окружности в активе.
   $\forall_{AB}$(актив(окружность(AB)))
   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке выражения "окружность(AB)".

   (d) Учет прямой.
   $\forall_{AB}$(актив(прямая(AB)))
   Созданы три приема, у которых указатель "контрольвывода" инициирует срабатывание при усмотрении в посылке, соответственно, выражений "прямая(AB)", "расстояние(AB)"и "отрезок(AB)".

   (e) Регистрация в активе сторон треугольника, для которого рассматривается площадь.



$\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)))

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке выражения "площадь(фигура(ABC))". Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке.

(f) Учет сторон угла.

$\forall_{ABC}$(актив($\angle$(ABC)) $\rightarrow$ актив(прямая(AB)))

Антецедент идентифицируется с посылкой.

2. Отождествление прямых по паре общих точек.

$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ прямая(AB) & $C \in$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(DE) & разныеточки(C, F) $\rightarrow$ прямая(AB) $=$ прямая(DE))

$\forall_{ABCDEF}$($C \in$ отрезок(AB) & $C \in$ прямая(DE) & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(DE) & разныеточки(C, F) $\rightarrow$ прямая(AB) $=$ прямая(DE))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Обозначения прямых AB и DE различны. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(AB)) & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) $\rightarrow$ прямая(AB) $=$ прямая(CD))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Выражение "прямая(AB)" встречается в задаче только в посылке "актив(прямая(AB))". Обозначения прямых AB и CD различны.Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Уровень срабатывания равен 0.

3. Усмотрение принадлежности прямой из принадлежности отрезку.

$\forall_{ABCPQ}$($A \in$ отрезок(BC) & $B \in$ прямая(PQ) & $C \in$ прямая(PQ) $\rightarrow$ $A \in$ прямая(PQ))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Утверждение "точка(B)" во внешней задаче не встречается, а утверждение "актив(прямая(PQ))" - встречается. Уровень срабатывания приема равен 0.

$\forall_{ABCPQ}$($A \in$ отрезок(BC) & $B \in$ прямая(PQ) & $A \in$ прямая(PQ) & разныеточки(A, B) $\rightarrow$ $C \in$ прямая(PQ))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Утверждение "точка(C)" во внешней задаче не встречается, а утверждение "актив(прямая(PQ))" - встречается. Уровень срабатывания равен 0.

4. Перпендикуляр к перпендикуляру.

   $\forall_{ABCDEFGH}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(CD) \perp$ прямая(EF) & $B \in$ плоскость(AGH) & $E \in$ плоскость(AGH) & $F \in$ плоскость$(AGH) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(GH) \leftrightarrow$ прямая$(EF) \parallel$ прямая(GH))

   Прием имеет указатель "внутрпреобр" и выполняет эквивалентную замену. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки A прямой GH. Уровень срабатывания равен 0.

5. Переход к общему представителю класса параллельных прямых.

   $\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая$(EF) \leftrightarrow$ прямая$(AB) \perp$ прямая(EF))

   $\forall_{ABCDEF}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \to$ прямая$(CD) \parallel$ прямая$(EF) \leftrightarrow$ прямая$(AB) \parallel$ прямая(EF))

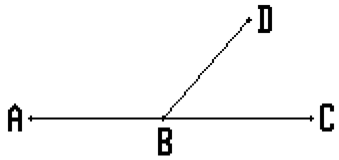
   Приемы выполняют эквивалентную замену. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка корневых операндов не допускается. Первый операнд лексикографически предшествует второму. Уровень срабатывания равен 0.

6. Определение угла из линейного уравнения.

   $\forall_{ABCabc}(\neg(a=0) \to a\angle(ABC) + b = c \leftrightarrow \angle(ABC) = (c-b)/a)$

   Прием выполняет эквивалентную замену. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 0.

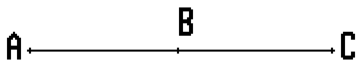
7. Смежные углы.

   $\forall_{ABCD}(B \in$ отрезок(AC) & актив$(\angle(ABD))$ & актив$(\angle(DBC)) \to \angle(DBC) = \pi - \angle(ABD))$

   Прием выводит следствие. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". В посылках отсутствует равенство для угла DBC. Уровень срабатывания равен 1.

8. Равенство длины отрезка сумме длин подотрезков.

   $\forall_{ABC}(B \in$ отрезок(AC) & актив$(l(AC))$ & актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC)) \to l(AC) = l(BC) + l(AB))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, не встречающейся во внешней задаче. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

Блок анализатора "общалг"

В блоке анализатора "общалг" собраны простейшие алгебраические приемы, необходимые для общей стандартизации численных равенств. Все они имеют указатель "внутрпреобр" и выполняют замену.

1. Вложенные умножения.

   $\forall_{abc}((ab)c = abc)$

   Прием устраняет вложенные умножения. Уровень срабатывания равен 0.

2. Вложенные суммы.

   $\forall_{abc}((a+b)+c = a+b+c)$

   Аналогично предыдущему.

3. Умножение на дробь.

   $\forall_{abc}(a \cdot (b/c) = (ab)/c)$

   Уровень срабатывания равен 0.

4. Деление дроби.

   $\forall_{abc}((b/c)/a = b/(ac))$

   Уровень срабатывания равен 0.

5. Устранение многоэтажных дробей.

   $\forall_{abcd}(((a/b)+c)/d = a/(bd)+c/d)$

   Допускается минус перед дробью a/b. Уровень срабатывания равен 0.

6. Приведение подобных членов.

   $\forall_{abc}(ab+ac = (b+c)a)$

   Переменные b, c идентифицируются с десятичными числами. Уровень срабатывания равен 1.

7. Одинаковые операнды равенства.

   $\forall_{a}(a = a \leftrightarrow \text{истина})$

   Уровень срабатывания равен 0.

8. Минус перед суммой.

   $\forall_{abc}(-(a+b)+c = -a-b+c)$

   Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ab}(-(a+b) = -a-b)$

   Уровень срабатывания равен 1.

9. Одинаковые слагаемые в различных частях равенства.

   $\forall_{abc}(a+b = a+c \leftrightarrow b = c)$

   Уровень срабатывания равен 1.

10. Подобные члены по разные стороны равенства.

    $\forall_{abmn}(a + mb = c + nb \leftrightarrow a + (m - n)b = c)$

    Переменные m, n идентифицируются с константными выражениями. Допускается обращение a и c в ноль. Уровень срабатывания равен 1.

11. Сокращение частей равенства на общий ненулевой множитель.

    $\forall_{abc}(\neg(a = 0) \to ab = ac \leftrightarrow b = c)$

    $\forall_{abc}(\neg(a = 0) \to ab + ac = 0 \leftrightarrow b + c = 0)$

    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

12. Равенство с минусами в обеих частях.

    $\forall_{abc}(-a = -b - c \leftrightarrow a = b + c)$

    $\forall_{ab}(-a = -b \leftrightarrow a = b)$

    Уровень срабатывания равен 1.

13. Сложение дробей с общим знаменателем.

    $\forall_{abc}(a/b + c/b = (a + c)/b)$

    Уровень срабатывания равен 0.

14. Дробь в основании степени.

    $\forall_{abc}(c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

15. Подстановка известного значения произведения.

    $\forall_{acd}(a = c \to ad = cd)$

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a содержит неизвестные и представляет собой невырожденное подпроизведение заменяемого произведения. Выражение c не содержит неизвестных. Уровень срабатывания приема равен 2.

16. Извлечение квадратного корня из частей равенства.

    $\forall_{ab}(0 \leq a\ \&\ 0 \leq b \to a^2 = b^2 \leftrightarrow a = b)$

    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

17. Формула приведения.

    В процессе обучения анализаторов понадобилась лишь одна формула приведения:

    $\forall_a(\sin(\pi + a) = -\sin a)$

    Уровень срабатывания равен 0.

18. Арксинус синуса.

    $\forall_a(0 \leq a \ \& \ 0 \leq \pi/2 - a \rightarrow \arcsin(\sin a) = a)$

    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

19. Минус под синусом.

    $\forall_{abc}(-a\sin(-b-c) = a\sin(b+c))$

    Уровень срабатывания равен 1.

20. Сокращение дробей с радикалами.

    $\forall_{ABabcdkmnp}(p = \text{нод}(\text{нод}(a,c),d) \ \& \ a = mp \ \& \ c = np \ \& \ d = kp \rightarrow$
    $(a\sqrt{b}+c)A/(dB) = (m\sqrt{b}+n)A/(kB))$

    Переменные a, c, d идентифицируются с целочисленными константами. Антецеденты выделены указателем "программа" и реализуются с помощью непосредственных вычислений. Выражение p отлично от единицы. Уровень срабатывания равен 0.

21. Разложение на множители числителя и знаменателя дроби для ее сокращения.

    $\forall_{abcpqr}(a+b = pq \ \& \ c = pr \ \& \ \neg(p=0) \rightarrow (a+b)/c = q/r)$

    Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором упрощенного разложения на множители "факторизация". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение p отлично от единицы. Уровень срабатывания равен 1.

3.68 Приемы усилителя, используемые в геометрических синтезаторах

Специально для усилителя были созданы два геометрических синтезатора. Пока они имеют совсем мало приемов, однако оказались весьма полезными для решения без специальных "заготовок" той задачи, из-за которой возникли.

Пакетный синтезатор "связрасст"

Синтезатор "связрасст" определяет конъюнкцию соотношений, связывающих заданное расстояние с другими числовыми атомами, уже рассматриваемыми в задаче. Реализуемое им утверждение (шаблон обращения к синтезатору из теорем приемов) имеет вид "связрасст(a,b)", где a - заданное расстояние, b - конъюнкция соотношений. Заметим, что само расстояние a тоже может относиться к числу уже рассматриваемых в задаче. Синтезатор работает в режиме перечисления.

1. Обращение к синтезатору "связрасст".

    $\forall_{ABpq}(\text{актив}(l(AB)) \ \& \ \text{связрасст}(l(AB),p) \ \& \ \text{исхатомы}(p,q) \rightarrow q)$

    Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, решаемых в режиме усилителя. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - обрабатываются пакетными синтезаторами.

Заметим, что синтезатор "исхатомы" реализован на ЛОСе. Он предпринимает попытку исключить из конъюнкции соотношений все невырожденные числовые атомы, не встречающиеся в задаче. Для этого используется реализованный на ГЕНОЛОГе нормализатор числовых равенств "опредатом", разрешающий соотношение относительно заданного числового атома. Здесь рассматриваются лишь простейшие случаи - линейные уравнения, степенное уравнение и уравнение с тангенсом.

Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Невырожденные числовые атомы должны входить в утверждение q только под операциями "равно", "плюс", "минус", "умножение" либо в числителе дроби, имеющей известный знаменатель. Уровень срабатывания равен 10.

2. Усмотрение "старого" расстояния.

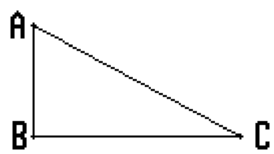
   $\forall_{AB}(\text{актив}(l(AB)) \to \text{связрасст}(l(AB), \text{истина}))$

   Антецедент выделен указателем "усм". Прием срабатывает только при наличии комментария "внутрвывод", означающего, что обращение к синтезатору "связрасст" произошло из него же самого. Таким образом отсекается выдача вырожденного ответа для исходного расстояния $l(AB)$, если оно уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_a(\text{связрасст}(a, \text{истина}))$

   Выражение a не имеет заголовка "расстояние". Необходимо наличие комментария "внутрвывод". Уровень срабатывания равен 1.

3. Теорема Пифагора.



   $\forall_{ABC}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{связрасст}(l(BC), a) \to \text{связрасст}(l(AC), a\ \&\ l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2))$

   Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - реализует рекурсивное обращение к синтезатору. При этом обращении синтезатору передается комментарий "внутрвывод". Для предотвращения зацикливания используется комментарий (стоп ...), блокирующий повторное рассмотрение расстояния AC. Уровень срабатывания равен 2.

4. Тригонометрическое соотношение в прямоугольном треугольнике.

   $\forall_{ABC}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{связрасст}(l(AC), a)\ \&\ \text{связугол}(\angle(BAC), b) \to \text{связрасст}(l(BC), a\ \&\ b\ \&\ l(BC) = \sin(\angle(BAC))l(AC)))$

   Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и третий - реализуют рекурсивные обращения к синтезатору. При этих обращениях передается комментарий "внутрвывод". Как и выше, комментарии (стоп ...) блокируют повторное рассмотрение расстояния BC. Уровень срабатывания равен 3.

Пакетный синтезатор "связугол"

Синтезатор "связугол" определяет конъюнкцию соотношений, связывающих заданный угол с другими числовыми атомами, уже рассматриваемыми в задаче. Реализуемое им утверждение имеет вид "связугол(a, b)", где a - заданный угол, b - конъюнкция соотношений. Обращения к синтезатору "связугол" происходят из синтезатора "связрасст".

1. Усмотрение "старого" угла.

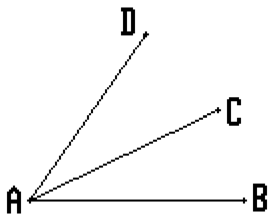
   $\forall_{ABC}(\text{актив}(\angle(ABC)) \to \text{связугол}(\angle(ABC), \text{истина}))$

   Антецедент выделен указателем "усм". Прием срабатывает при наличии комментария "внутрвывод". Заметим, что при обращении из синтезатора "связрасст" такой комментарий возникает автоматически. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_a(\text{связугол}(a, \text{истина}))$

   Выражение a не имеет своим заголовком символ "угол". Требуется наличие комментария "внутрвывод". Уровень срабатывания равен 1.

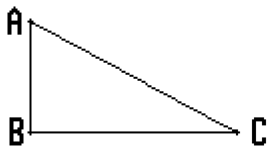
2. Равенство угла сумме двух составляющих его углов.

   $\forall_{ABCD}(\text{актив}(\text{прямая}(AD))\ \&\ \text{актив}(\text{прямая}(AB))\ \&\ \text{актив}(\angle(BAD))\ \&$
   $\text{связугол}(\angle(CAD), a)\ \&\ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB))\ \&$
   $\text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC)) \to \text{связугол}(\angle(BAC),$
   $a\ \&\ \angle(BAD) = \angle(CAD) + \angle(BAC)))$

   Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Для блокировки повторной обработки угла BAC используется комментарий (стоп ...), передаваемый при рекурсивном обращении. Уровень срабатывания равен 2.

3. Тригонометрическое соотношение в прямоугольном треугольнике.

   $\forall_{ABC}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC)) \to$
   $\text{связугол}(\angle(BAC), \text{tg}(\angle(BAC))l(AB) = l(BC)))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

3.69 Автоматическое построение рисунка в геометрической задаче

Для упрощения анализа поведения решателя при решении геометрических задач разработана процедура, сопровождающая введенное логическое условие задачи приблизительным чертежем. Подавляющее большинство чертежей в задачнике решателя созданы именно этой процедурой. В особых случаях, когда процедура требует дальнейшего обучения, чертежи были введены вручную. Напомним, что для создания чертежа геометрическим редактором следует после набора условия задачи нажать клавишу "ч". Это же нажатие позволяет скорректировать ранее созданный чертеж. Чтобы запустить процедуру автоматического создания чертежа, служат клавиши "Ctr - ч" и "Ч". Вторая из них обеспечивает усиленный анализ задачи перед построением чертежа и иногда дает лучшую картинку, чем первая. Однако, она обладает тем недостатком, что на чертеже могут появиться вспомогательные точки, отсутствовавшие в первоначальном условии.

Основную работу при автоматическом построении чертежа выполняют приемы, реализованные на ГЕНОЛОГе. Они относятся к анализатору "чертеж" и справочнику "опр". Детальному описанию процедуры предпошлем краткое изложение ее схемы.

1. При запуске процедуры создается вспомогательная задача, отличающаяся от рассматриваемой геометрической задачи только наличием дополнительной цели "чертеж". В случае задач на доказательство вместо цели вводится комментарий "чертеж". Если была нажата клавиша "Ч", то дополнительно вводятся цель либо комментарий "геомформат". Далее реализуется обычное обращение к решению вспомогательной задачи.

2. Если вспомогательная задача имела тип "доказать", то она сразу же преобразуется в задачу на исследование, причем комментарии "чертеж", "геомформат" перебрасываются в список целей. Рассматриваемые в условии геометрические объекты A (прямые, окружности, расстояния и т.п.) порождают в преобразованной задаче дополнительные посылки "актив(A)".

3. На малых уровнях сканирования реализуется обычное решение задачи. При этом цель "чертеж" дополнительно активирует ряд специальных приемов, ориентированных на построение чертежа.

4. Если цель "геомформат" отсутствует, то на уровне 2 происходит обращение к пакетному анализатору "чертеж". Дальнейшее решение задачи при этом обрывается. При наличии цели "геомформат" обращение к анализатору выполняется на уровне 4. Перед обращение к анализатору "чертеж" создается комментарий (чертеж ...) к посылкам вспомогательной задачи (она является внешней задачей анализатора). Данный комментарий представляет собой накопитель, в котором создается схема вычислений, необходимых для построения чертежа.

5. Работа анализатора "чертеж" заключается в последовательном пополнении схемы вычислений новыми ячейками. Ячейки схемы обеспечивают либо непосредственное вычисление параметров чертежа в соответствии с условиями задачи, либо вычисление оценок расхождения чертежа с этими условиями. Прием анализатора не только дополняет схему вычислений, но и реализует обращение

к программам, использующим ее для определения численных значений параметров и их итеративной оптимизации, минимизирующей оценки расхождений. Фактически последние действия реализуются процедурой "вывод(...)" по информационным элементам (опр ...), получаемым от программы приема.

6. По завершении работы анализатора запускается программа "геомформат", создающая структуру данных геометрического редактора для отображения чертежа. Эта структура данных регистрируется в файлах задачника. Далее предпринимается внутренний перезапуск системы для последующего автоматического выхода на текущую задачу задачника. При этом уже будет прорисован новый чертеж.

Дополнительные геометрические приемы, используемые для построения чертежа

Начнем с рассмотрения приемов, используемых до обращения к анализатору "чертеж". Все они срабатывают только в задачах на исследование, имеющих цель "чертеж". Данные приемы выявляют связи между элементами задачи, упрощающие построение эскиза.

1. Ввод в рассмотрение прямой, соответствующей биссектрисе.

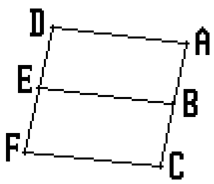
   $\forall_{ABCD}$(биссектриса($ABCD$) $\rightarrow$ актив(прямая(BD)))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение принадлежности отрезку.

   $\forall_{ABCD}$($B \in$ отрезок(AC) & $C \in$ отрезок(BD) $\rightarrow$ $B \in$ отрезок(AD) & $C \in$ отрезок(AD))

   Антецеденты идентифицируются с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.



   $\forall_{ABCDEF}$($B \in$ отрезок(AC) & прямая(BE) $\parallel$ прямая(AD) & прямая(BE) $\parallel$ прямая(CF) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(AD)) & $E \in$ прямая(DF) $\rightarrow$ $E \in$ отрезок(DF))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Для него введен сильный ограничитель трудоемкости. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Обозначения прямых BE и AD, а также прямых BE и CF различны. Уровень срабатывания приема равен 1.

   $\forall_{ABCDEFGH}$(окружность(DE)вписана в Угол(BAC) & $B \in$ окружность(DE) & $C \in$ окружность(DE) & прямая(FG) $-$ касательная к окружность(DE) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AC) & $H \in$ прямая(FG) & $H \in$ дуга(DBC) $\rightarrow$ $F \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(AC))

   Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

3. Вписанная окружность.

   $\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$
   прямая(AB) – касательная к окружность(DE))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая(CE) – касательная к окружность(AB) & однасторона(A, D, прямая(CE)) $\rightarrow$ окружность(AB)вписана в Угол(CDE) $\leftrightarrow$
   окружность(AB)вписана в фигура(CDE))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в Угол(ABC) $\rightarrow$
   прямая(AB) – касательная к окружность(DE) & прямая(BC) –
   касательная к окружность(DE))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$
   прямая(AB) – касательная к окружность(DE))

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок идентификации вершин треугольника - произвольный. Через точку D проведена некоторая другая окружность. Уровень срабатывания равен 1.

4. Прямоугольная трапеция.

   $\forall_{ABCD}$(трапеция($ABCD$) & прямая(AB) $\perp$ прямая(AD) $\rightarrow \angle(BAD) = \pi/2$)

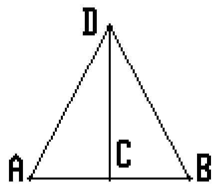
   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

5. Углы трапеции.

   $\forall_{ABCDa}$(трапеция($ABCD$) & $\angle(ABC) = a \rightarrow \angle(BAD) = \pi - a$)

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок вершин может быть изменен на обратный. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Выражение a - константное. Выражение для угла BAD - не константное. Уровень срабатывания равен 1.

6. Усмотрение середины отрезка.

   $\forall_{ABCD}$(прямая(CD) $\perp$ прямая(AB) & $l(AD) = l(BD)$ & $C \in$ прямая(AB) $\rightarrow$ $l(AC) = l(BC)$)

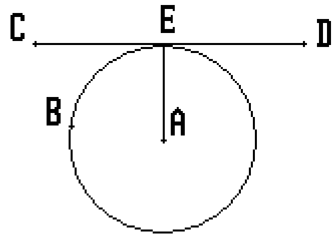
   Второй антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

7. Окружности кольца.

   $\forall_{ABC}$(актив(окружность(AB)) & актив(окружность(AC)) & $0 \leq l(AC) - l(AB)$)

   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении выражения "кольцо(ABC)". Уровень срабатывания равен 1.

8. Ввод точки касания.



   $\forall_{ABCDE}$(отрезок(CD) – касательная к окружность(AB) $\to$ E – точка &
   $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ отрезок(CD))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Точка E касания окружности и отрезка пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) $\to$ E – точка &
   $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Либо на прямой CD не выделены точки, отличные от точек C и D, либо имеется посылка, указывающая, что прямая CD - касательная к еще одной окружности. Отсутствует посылка, указывающая на принадлежность какому-либо отрезку точки C либо точки D. Не рассматривается прямая, параллельная прямой CD. Точка касания E пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDE}$(внутркасательная(прямая(CD), окружность(AB), окружность(FG)) $\to$
   E – точка & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD))

   $\forall_{ABCDE}$(внешкасательная(прямая(CD), окружность(AB), окружность(FG)) $\to$
   E – точка & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Точка касания E пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 1.

9. Стандартизация соотношения пропорциональности.

   $\forall_{ABCDabcd}(al(AB)/b = cl(CD)/d \leftrightarrow adl(AB) = bcl(CD))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, b, c, d константные. Хотя бы одно из выражений b, d, а также хотя бы одно из выражений c, d и хотя бы одно из выражений a, b отличны от единицы. Уровень срабатывания равен 1.

10. Описанная окружность.

    $\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)описана около фигура($ABCD$) $\to$
    $A \in$ окружность(EF))

    $\forall_{ABCEF}$(окружность(EF)описана около фигура(ABC) $\to$
    $A \in$ окружность(EF))

    Антецедент идентифицируется с посылкой. При идентификации допускаются циклические перестановки вершин. Уровень срабатывания равен 1.

11. Описанный четырехугольник с равными противоположными сторонами.

    $\forall_{ABCDEF}$(четырехугольник($ABCD$) & окружность(EF)описана около фигура($ABCD$) & $l(AB) = l(CD) \rightarrow$ прямая(BC) $\parallel$ прямая(AD))

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Вершины четырехугольника идентифицируются с точностью до циклических перестановок. Уровень срабатывания равен 1.

12. Касание окружностей.

    $\forall_{ABCDEFG}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & прямая(EF) – касательная к окружность(CD) & $G \in$ прямая(EF) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ окружность(CD) & разныестороны($A, C,$ прямая(EF)) $\rightarrow$ внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)))

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

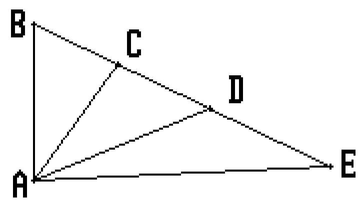
    $\forall_{ABCDE}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) $\rightarrow E \in$ отрезок(AC))

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ABCDE}$($E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & $C \in$ прямая(AE) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(PQ)) & внутркасаются(окружность(PQ), окружность(CD)) $\rightarrow$ внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)))

    Два последних антецедента идентифицируются с посылками, три первых - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

13. Равенство трех углов с общей вершиной.

    $\forall_{ABCDE}(\angle(BAC) = \angle(CAD)$ & $\angle(CAD) = \angle(DAE)$ & $C \in$ отрезок(BE) & $D \in$ отрезок(BE) $\rightarrow C \in$ отрезок(BD))

    Первые два антецедента выделены указателем "равно", два последних - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

14. Сектор.

    $\forall_{ABC}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)))

    Указатель "контрольвывода" инициирует срабатывание приема при усмотрении выражения "сектор(ABC)". Уровень срабатывания равен 1.

Формат схемы вычислений, определяющей параметры чертежа

Как уже говорилось выше, чертеж строится в два этапа. Сначала создается схема из функциональных элементов, вычисляющая параметры чертежа по некоторым произвольно выбранным исходным данным. При этом гарантируется выполнение лишь части условий задачи, а для остальных условий схема вычисляет оценку отклонения действительного от требуемого. Так как исходные данные выбираются из некоторых допустимых интервалов, то имеется возможность их варьирования, для минимизации суммы квадратов оценок отклонения. На втором этапе предпринимаются оптимизация данных и вычисление всех параметров чертежа согласно построенной схеме. В действительности оба этапа реализуются одновременно: варьирование исходных данных и пересчет параметров происходят после каждого шага доопределения схемы.

Схема вычислений определяется комментарием (чертеж $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$) к посылкам вспомогательной задачи на исследование. Из этой задачи происходит обращение к анализатору "чертеж", для которого она окажется внешней задачей. Первоначально накопители схемы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 суть пустые наборы. Они заполняются анализатором в соответствии со следующими требованиями:

1. A_1 - набор ячеек схемы. Каждая ячейка задается набором (B_1, B_2, B_3, B_4), где B_1 - логический символ, задающий тип ячейки; B_2 - набор ссылок на входы ячейки; B_3 - набор комментариев к ячейке; B_4 - список выходов ячейки. Выделяются входные ячейки, у которых типом служит логический символ "вход".

2. A_2 - набор, определяющий найденные значения параметров чертежа. Каждый его элемент - набор (C_1, C_2, C_3, C_4). Здесь C_1 - название параметра, C_2 - значение параметра (число либо пара чисел в формате с плавающей запятой), C_3 - ссылка на ячейку, вычисляющую данный параметр (в случае константного параметра - 0), C_4 - список ячеек, использующих данный параметр в качестве входного значения.

3. A_3 - набор ограничений на параметры. Каждый его элемент - набор $(D_1\ D_2\ D_3)$, где D_1 - логический символ "оценка", D_2 - величина отклонения от требуемого условия, D_3 - ссылка на ячейку, вычисляющую величину отклонения.

4. A_4 - набор констант. Его элементы суть пары (название константы - значение константы).

5. A_5 - набор общих комментариев к схеме.

Заметим, что входом ячейки служит элемент набора A_2, выходом - элемент набора A_2 либо A_3. Под ссылкой на вход либо выход понимается вхождение первого разряда набора (левый край), представляющего этот вход либо выход.

Типы ячеек схемы и справочник "опр"

Функционирование ячеек схемы обеспечивается справочником "опр", реализованным на ГЕНОЛОГе. Заголовок приема этого справочника имеет вид "выч(опр A)", где A - название ячейки схемы. Указатель "вход($B_1 \dots B_n$)" определяет совокупность входных данных ячейки. Каждое B_i - либо переменная, обозначающая численный параметр, либо терм "набор($x_i\ x_j$)", где x_i, x_j - переменные, обозначающие численные параметры. Указатель "выход($C_1 \dots C_k$)" определяет совокупность выходных значений ячейки. Эти значения определяются по входным данным теоремой приема. Каждое C_i - переменная, которой теорема присваивает в качестве значения число либо пару чисел. Теорема может иметь дизъюнктивный консеквент, и тогда прием определяет несколько альтернативных наборов значений переменных C_i. Результатом R обращения к справочнику "опр" служит набор этих наборов (даже если альтернативных наборов нет). Этот результат будет сохранен в комментарии (вариант R A) к ячейке, где A - вхождение в R фактически выбранного на текущий момент варианта значений выходных переменных.

Компилятор ГЕНОЛОГа обеспечивает построение программы приема, реализующей вычисления в формате "с плавающей запятой".

Перейдем к перечислению приемов справочника "опр". Названием пункта в нижеследующем перечислении служит терм вида "$A(b_1 \ldots b_n)$", где A - название ячейки; $b_1, \ldots, b_n$ - входные параметры. Заметим, что координаты точек вычисляются для прорисовки на экране, т.е. ось ординат направлена сверху вниз.

1. Арифметические операции.

   (a) умножение(b c).
   $\forall_{abc}(a = bc)$
   Входные параметры - b, c; выход - a.

   (b) плюс(b c).
   $\forall_{abc}(a = b + c)$
   Аналогично предыдущему.

   (c) вычитание(a b).
   $\forall_{abc}(c = a - b)$

   (d) норммодуль(a b) - вычисляется модуль разности.
   $\forall_{abc}(c = |a - b|)$

2. Операции, связанные с отрезком.

   (a) делениеотрезка(A B p) - определение координат точки C, для которой отношение AC к AB равно p.
   $\forall_{abcdpC}(C = (a + (c - a)p, b + (d - b)p))$
   Входные параметры - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и число p. Выход C представляет собой пару координат одноименной точки.

   (b) конецотрезка(A B p) - нахождение противоположного конца C отрезка AC, содержащего точку B, делящую данный отрезок в отношении 1 к p, считая от точки A.
   $\forall_{abcdpC}(C = (c(p + 1) - pa, d(p + 1) - pb))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и число p. Выход - C.

3. Операции, связанные с расстояниями.

(a) расст($A\ B\ r$) - находится точка, отстоящая от точки A на расстояние r и лежащая на проходящей через точку A в направлении вектора B прямой. Выдаются два альтернативных варианта.
$\forall_{abcdmpqC}(m = \sqrt{c^2+d^2}\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ p = cr/m\ \&\ q = dr/m \rightarrow$
$C = (a+p, b+q)\ \vee\ C = (a-p, b-q))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат вектора B и число r. Выход - C.

(b) расстояние($A\ B\ p$) - находится расстояние между точками A и B, умноженное на p.
$\forall_{abcdpr}(r = p\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2})$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, и число p. Выход - r.

(c) точкалуча($A\ B\ r$) - находится точка , расположенная на луче AB и отстоящая от A на растояние r.
$\forall_{abcdmrC}(m = \sqrt{c^2+d^2}\ \&\ \neg(m=0) \rightarrow C = (a+cr/m, b+dr/m))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и число r. Выход - C.

(d) усмделит($A\ B\ p\ q$) - находится точка C, лежащая на прямой AB и такая, что отношение ее расстояний до точек A и B равно p/q. Выдаются два альтернативных варианта.
$\forall_{abcdmnpqC}(m = p+q\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ n = q-p\ \&\ \neg(n=0) \rightarrow$
$C = ((cp+aq)/m, (dp+bq)/m)\ \vee\ C = ((aq-cp)/n, (bq-dp)/n))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и числа p, q. Выход - C.

(e) расстояния($A\ B\ C\ r$) - находится точка, лежащая на прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор C, отстоящая от точки A на расстояние r. Выдаются два альтернативных варианта.
$\forall_{abcdghimnpqrstD}(p = c-a\ \&\ q = d-b\ \&\ g = m^2+n^2\ \&\ 0.0001 < |g|\ \&$
$i = gr^2 - (mq-np)^2 + 0.00001\ \&\ 0 \leq i\ \&\ h = \sqrt{i}\ \&\ t = (h-mp-nq)/g\ \&$
$s = -(mp+nq+h)/g \rightarrow D = (c+tm, d+tn)\ \vee\ D = (c+sm, d+sn))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (m, n) координат вектора C и число r. Выход - D.

(f) расстдопрямой($A\ B\ C$) - находится расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор C.
$\forall_{abcdefpqr}(p = \sqrt{e^2+f^2}\ \&\ \neg(p=0)\ \&\ q = |-af+be+cf-de| \rightarrow r = q/p)$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара координат (c, d) точки B и пара (e, f) координат вектора C. Выход - r.

(g) смрасстояние($A\ B\ p\ q\ r\ s$) - находятся координаты точки, отношение расстояний которой до A и B равно q/p, а отношение расстояния ее до A к расстоянию между A и B равно s/r. Выдаются два альтернативных результата.
$\forall_{abcdefmnpqrsx}(m = (r^2q+s^2q-psr)/(2srq)\ \&\ k = 1-m^2\ \&\ 0 \leq k\ \&$
$n = \sqrt{k}\ \&\ e = c-a\ \&\ f = d-b \rightarrow x = (a+(em-fn)s/r, b+(fm+en)s/r)\ \vee$
$x = (a+(em+fn)s/r, b+(fm-en)s/r))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, и числа p, q, r, s. Выход - x.

(h) длина($A\ B\ C\ D\ r$) - находится точка на прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор C, отстоящей от точки A на расстояние r и отличной от точки D.

$\forall_{abcdefghikmnpqrstE}(p = c - a \ \&\ q = d - b \ \&\ g = m^2 + n^2 \ \&\ \neg(g = 0) \ \&$
$i = gr^2 - (mq - np)^2 \ \&\ 0 \leq i \ \&\ h = \sqrt{i} \ \&\ t = (h - mp - nq)/g \ \&$
$s = -(mp + nq + h)/g \ \&\ k = |c + tm - e| + |d + tn - f| \ \&\ k < 0.1 \rightarrow$
$E = (c + sm, d + sn))$

$\forall_{abcdefghikmnpqrstE}(p = c - a \ \&\ q = d - b \ \&\ g = m^2 + n^2 \ \&\ \neg(g = 0) \ \&$
$i = gr^2 - (mq - np)^2 \ \&\ 0 \leq i \ \&\ h = \sqrt{i} \ \&\ s = (h - mp - nq)/g \ \&$
$t = -(mp + nq + h)/g \ \&\ k = |c + tm - e| + |d + tn - f| \ \&\ k < 0.1 \rightarrow$
$E = (c + sm, d + sn))$

Ячейка реализуется двумя приемами. Если условия первого из них выполнены, то он и выдает результат. Иначе - предпринимается попытка получить результат с помощью второго приема. В обоих случаях входные данные суть: пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (m, n) координат вектора C, пара (e, f) координат точки D, и число r. Выход - E.

(i) точкапривязки($A\ B\ C\ D\ r\ k$) - находится точка, лежащая на прямой, проходящей через точку B и имеющей направляющий вектор C, причем отстоящая от точки A на расстояние r, а от точки D - на расстояние k.

$\forall_{abcdefghikmnpqrstD}(p = c - a \ \&\ q = d - b \ \&\ g = m^2 + n^2 \ \&\ \neg(g = 0) \ \&$
$i = gr^2 - (mq - np)^2 + 0.00001 \ \&\ 0 \leq i \ \&\ h = \sqrt{i} \ \&\ t = (h - mp - nq)/g \ \&$
$s = -(mp + nq + h)/g \ \&\ 0.1 < |\sqrt{(c + tm - e)^2 + (d + tn - f)^2} - k| \rightarrow$
$D = (c + sm, d + sn))$

$\forall_{abcdefghikmnpqrstD}(p = c - a \ \&\ q = d - b \ \&\ g = m^2 + n^2 \ \&\ \neg(g = 0) \ \&$
$i = gr^2 - (mq - np)^2 + 0.00001 \ \&\ 0 \leq i \ \&\ h = \sqrt{i} \ \&\ t = (h - mp - nq)/g \ \&$
$s = -(mp + nq + h)/g \ \&\ 0.1 < |\sqrt{(c + sm - e)^2 + (d + sn - f)^2} - k| \rightarrow$
$D = (c + tm, d + tn))$

Как и в предыдущем случае, ячейка реализуется двумя приемами. Входные данные суть: пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (m, n) координат вектора C, пара (e, f) координат точки D, и числа r, k. Выход - D.

(j) проекция($A\ B\ C\ D\ p$) - находится точка, лежащая на прямой, проходящей через точку A в направлении вектора B и отстоящая от прямой, проходящей через точку C в направлении вектора D на расстояние p. Выдаются два альтернативных результата.

$\forall_{abcdefghpqmnijE}(q = p\sqrt{h^2 + g^2} \ \&\ m = gd - hc \ \&\ n = g(f - b) + h(a - e) \ \&$
$\neg(m = 0) \ \&\ i = (q + n)/m \ \&\ j = (n - q)/m \rightarrow E = (a + ic, b + id) \ \vee$
$E = (a + jc, b + jd))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат вектора B, пара (e, f) координат точки C, пара (g, h) координат вектора D и число p. Выход - B.

(k) разныеточки($a\ b\ p\ q$) - находится пара расстояний от некоторой точки A до двух других точек B, C, если известно, что эти расстояния относятся как p к q, a - расстояние между B и C, $b = l(AB) + l(AC) - l(BC)$. Фактически b используется как варьируемый параметр, позволяющий регулировать степень отклонения точки A от прямой BC.

$\forall_{abcdpq}(c = q(a+b)/(p+q)\ \&\ d = p(a+b)/(p+q))$
Входные данные - a, b, p, q. Выходы - c и d.

4. Операции, связанные с углами.

   (a) оругол($A\ p$) - находится направляющий вектор луча, полученного поворотом луча с направляющим вектором A на угол p против часовой стрелки.
   $\forall_{abpqrB}(q = \sin p\ \&\ r = \cos p \to B = (ar + bq, br - aq))$
   Входные данные - пара (a, b) координат вектора A и число p. Выход - B.

   (b) биссектриса($A\ B$) - находится направляющий вектор биссектрисы угла между векторами A и B.
   $\forall_{abcdmnC}(m = \sqrt{a^2 + b^2}\ \&\ \neg(m = 0)\ \&\ n = \sqrt{c^2 + d^2}\ \&\ \neg(n = 0) \to$
   $C = (a/m + c/n, b/m + d/n))$
   Входные данные - пара (a, b) координат вектора A и пара (c, d) координат вектора B. Выход - C.

   (c) угол($A\ p$) - находится направляющий вектор луча, полученного поворотом луча с направляющим вектором A на угол p. Выдаются два альтернативных разультата (в зависимости от направления поворота).
   $\forall_{abprsB}(r = \sin p\ \&\ s = \cos p \to B = (as - br, bs + ar)\ \vee\ B = (as + br, bs - ar))$
   Входные данные - пара (a, b) координат вектора A и число p. Выход - B.

   (d) Угол($A\ B\ C\ p\ q$) - находятся координаты точки, расположенной внутри угла ABC, проекция которой на луч BA параллельно прямой BC равна p, а на луч BC параллельно прямой BA - равна q.
   $\forall_{abcdefpqmnD}(m = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\ \&\ \neg(m = 0)\ \&\ n = \sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}$
   $\&\ \neg(n = 0) \to D = (c + p(a-c)/m + q(e-c)/n, d + p(b-d)/m + q(f-d)/n))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (e, f) координат точки C, а также числа p, q. Выход - D.

   (e) нормугол($A\ B\ C$) - находится величина угла ABC.
   $\forall_{abcdefgmnp}(m = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}\ \&\ n = \sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}\ \&$
   $\neg(m = 0)\ \&\ \neg(n = 0)\ \&\ g = ((a-c)(e-c) + (b-d)(f-d))/(mn) \to p =$
   $(\pi \text{ при} g \leq -1,\ \text{иначе } (\arccos g \text{ при } g < 1,\ \text{иначе } 0)))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и пара (e, f) координат точки C. Выход - p.

   (f) уголмежду($A\ B\ p$) - находятся координаты точки, полученной поворотом точки B относительно точки A на угол p. Выдаются два альтернативных результата.
   $\forall_{abcdpC}(C = (a + (c-a)\cos p + (d-b)\sin p, b + (d-b)\cos p - (c-a)\sin p)\ \vee$
   $C = (a + (c-a)\cos p - (d-b)\sin p, b + (d-b)\cos p + (c-a)\sin p))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и число p. Выход - C.

   (g) синус($a\ b\ c\ p$) - вспомогательная ячейка, используемая при определении второй вершины выпуклого четырехугольника с известным углом наклона стороны.
   $\forall_{abcdepe}(d = a + p\cos c\ \&\ e = b - p\sin c)$
   Входные данные - a, b, c, p. Выходы - d, e.

(h) окр(a) - произвольным образом выбираются третья вершина угла и центр вписанной в угол окружности, если задана величина угла a.
$\forall_{aAD}(A = (200 + 200\cos a, 700 - 200\cos a)\ \&\ D = (200 + 90\cos(a/2),$
$700 - 90\sin(a/2)))$
Входное данное - a. Выходы - A, D.

(i) Синус($A\ B\ p$) - находится точка, полученная поворотом точки A относительно точки B на ориентированный угол p.
$\forall_{abcdefpC}(e = a - c\ \&\ f = b - d \to C = (c + e\cos p + f\sin p, d + f\cos p - e\sin p))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и число p. Выход - C.

5. Операции, связанные с векторами.

(a) луч($A\ B$) - находятся координаты направляющего вектора луча AB.
$\forall_{abcdC}(C = (c - a, d - b))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A и пара (c, d) координат точки B. Выход - C.

(b) перпендикулярно(A) - находятся координаты вектора, ортогонального вектору A.
$\forall_{abB}(B = (-b, a))$
Входное данное - пара (a, b) координат вектора A. Выход - B.

(c) перпендикуляр($A\ B\ C$) - находятся координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую, проходящую через точку B и имеющую направляющий вектор C.
$\forall_{abcdefmpD}(m = e^2 + f^2\ \&\ \neg(m = 0)\ \&\ p = (f(a - c) + e(d - b))/m \to$
$D = (a - pf, b + pe))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, и пара (e, f) координат вектора C. Выход - D.

(d) общаяточка($A\ B\ C\ D$) - находится общая точка двух прямых, проходящих, соответственно, через точки A и C, и имеющих направляющие векторы B и D.
$\forall_{abcdefghmnE}(m = dg - ch\ \&\ 0.01 < |m|\ \&\ n = g(f - b) + h(a - e) \to$
$E = (a + cn/m, b + dn/m))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат вектора B, пара (e, f) координат точки C, и пара (g, h) координат вектора D. Выход - E.

(e) разнстор($A\ B\ C\ D\ E\ k$) - находится точка прямой, проходящей через точку A и имеющей направляющий вектор B, лежащая с точкой E по разные стороны от прямой, проходящей через точку C и имеющей направляющий вектор D. Варьирование положительного параметра k позволяет получать различные такие точки.
$\forall_{abcdeghikmnpqrsF}(e = -sm + rn + sp - rq\ \&\ g = (-as + rb + sp - rq)e\ \&$
$h = (-sc + rd)e\ \&\ \neg(h = 0)\ \&\ i = -g/h - (-1 \text{ при } h < 0,\ \text{иначе } 1)k \to$
$F = (a + ic, b + id))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат вектора B, пара (p, q) координат точки C, пара (r, s) координат вектора D, пара (m, n) координат точки E, и число k. Выход - F.

6. Операции, связанные с треугольниками.

   (a) треугольник($A\ B\ C\ p\ q$) - находится точка внутри треугольника ABC, координаты которой в системе координат с единичными векторами AB и AC суть p и q.
   $\forall_{abcdefpqD}(D = (a + (e - a)p + (c - a)q, b + (f - b)p + (d - b)q))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (e, f) координат точки B, пара (c, d) координат точки C, и пара чисел p, q. Выход - D.

   (b) центр($A\ B\ C$) - находится центр тяжести треугольника ABC.
   $\forall_{abcdefD}(D = ((a + c + e)/3, (b + d + f)/3))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, и пара (e, f) координат точки C. Выход - D.

7. Операции, связанные с окружностями.

   (a) окружность($A\ r\ p$) - находятся координаты точки окружности с центром A и радиусом r, полярный угол которой равен p.
   $\forall_{abcrp}(c = (a + r\cos p, b + r\sin p))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A и числа r, p. Выход - c.

   (b) касательная($A\ B\ C\ D\ E$) - находятся центр и радиус окружности, касающейся прямой, определяемой своей точкой A и направляющим вектором B, проходящей через точку D, если известно, что этот центр лежит на прямой, проходящей через точку C и имеющей направляющий вектор E. Созданы два приема. Первый ориентирован на общий случай и выдает два альтернативных результата. Если он не сработал, применяется второй прием, ориентированный на случай ортогональных векторов B, E и выдающий единственный результат.
   $\forall_{abcdefghijklprstuwF}(r = h(e - i) - g(f - j)\ \&\ k = (a - i)(b + d - j) - (b - j)(a + c - i)\ \&\ p = k(kh^2 + kg^2 - 2dhr - 2cgr)(c^2 + d^2)\ \&\ 0 \le p\ \&\ t = \sqrt{p}\ \&\ u = -kdg^2 + kcgh + dcgr + hrd^2\ \&\ w = kch^2 - kdgh - cdhr - grc^2\ \&\ s = (cg + dh)^2\ \&\ \neg(s = 0) \to F = ((gt + u)/s + i, (ht + w)/s + j)\ \&\ l = \sqrt{((gt + u)/s)^2 + ((ht + w)/s)^2}\ \vee\ F = ((u - gt)/s + i, (w - ht)/s + j)\ \&\ l = \sqrt{((u - gt)/s)^2 + ((w - ht)/s)^2})$
   $\forall_{abcdefghijklmnprsF}(cg + dh = 0\ \&\ p = \sqrt{c^2 + d^2}\ \&\ m = c/p\ \&\ n = d/p\ \&\ k = (d(e - a) + c(b - f))/p\ \&\ r = 2(n(e - i) + m(j - f) - k)\ \&\ \neg(r = 0)\ \&\ s = ((e - i)^2 + (f - j)^2 - k^2)/r \to F = (e - ns, f + ms)\ \&\ l = |k - s|)$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат вектора B, пара (e, f) координат точки C, пара (i, j) координат точки D, и пара (g, h) координат вектора E. Выходы - F, l.

   (c) точкаокружности($A\ r\ B$) - находится точка касания окружности, имеющей центр A и радиус r, с прямой, проведенной из точки B. Выдаются два альтернативных результата.
   $\forall_{abcdmnpqrsF}(c = m - a\ \&\ d = n - b\ \&\ s = c^2 + d^2 - r^2\ \&\ 0 \le s\ \&\ p = \sqrt{s}\ \&\ q = c^2 + d^2 \to F = (a + (dp + cr)r/q, b + (dr - cp)r/q)\ \vee\ F = (a + (cr - dp)r/q, b + (cp + dr)r/q))$
   Входные данные - пара (a, b) координат точки A, число r и пара (m, n) координат точки B. Выход - F.

(d) Окружность($A\ B\ m\ n$) - находится точка пересечения окружностей с центрами A, B и радиусами m, n. Выдаются два альтернативных результата.
$\forall_{abcdkmnpqrstC}(p = c - a \ \&\ q = d - b \ \&\ s = ((m+n)^2 - p^2 - q^2)(p^2 + q^2 - (m-n)^2) \ \&\ 0 \le s \ \&\ r = p^2 + q^2 + m^2 - n^2 \ \&\ t = \sqrt{s} \ \&\ k = 2(p^2 + q^2) \rightarrow$
$C = (a + (qt + pr)/k, b + (qr - pt)/k) \ \vee\ C = (a + (pr - qt)/k, b + (pt + qr)/k))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и числа m, n. Выход - C.

(e) линия($A\ B\ C\ r$) - находится направляющий вектор касательной к окружности с центром A и радиусом r, проведенной из точки B и отличный от направляющего вектора C. Созданы два приема, соответствующих двум версиям направляющего вектора. Срабатывает тот из них, у которого оставшийся вектор близок к C.

$\forall_{abcdefghijmnpqrsD}(c = m - a \ \&\ d = n - b \ \&\ s = c^2 + d^2 - r^2 \ \&\ 0 < s \ \&$
$p = \sqrt{s} \ \&\ q = c^2 + d^2 \ \&\ e = a + (dp + cr)r/q - m \ \&\ f = b + (dr - cp)r/q - n \ \&$
$g = a + (cr - dp)r/q - m \ \&\ h = b + (cp + dr)r/q - n \ \&\ |ej - fi| < 0.0001 \rightarrow$
$D = (g, h))$

$\forall_{abcdefghijmnpqrsD}(c = m - a \ \&\ d = n - b \ \&\ s = c^2 + d^2 - r^2 \ \&\ 0 < s \ \&$
$p = \sqrt{s} \ \&\ q = c^2 + d^2 \ \&\ e = a + (dp + cr)r/q - m \ \&\ f = b + (dr - cp)r/q - n \ \&$
$g = a + (cr - dp)r/q - m \ \&\ h = b + (cp + dr)r/q - n \ \&\ |gj - hi| < 0.0001 \rightarrow$
$D = (e, f))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (m, n) координат точки B, пара (i, j) координат вектора C и число r. Выход - D.

(f) параллель($A\ B\ r$) - находится точка касания окружности с центром A и радиусом r с прямой, имеющей направляющий вектор B. Выдаются два альтернативных результата.
$\forall_{abcdpqrsC}(p = \sqrt{c^2 + d^2} \ \&\ q = dr/p \ \&\ s = cr/p \rightarrow C = (a + q, b + s) \ \vee$
$C = (a - q, b - s))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат вектора B и число r. Выход - C.

(g) двойнаядлина($A\ B\ C\ p\ q\ m\ n\ k\ g\ h$) - находятся центры двух касающихся внешним образом окружностей, вписанных в углы BAC и ABC треугольника ABC. Радиус второй окружности относится к радиусу первой как p к q; m, n, k - длины сторон AC, BC и AB; g, h - величины углов BAC и ABC.
$\forall_{abcdefghijkmnpqrtuvwxyDE}(i = (e - a)/m + (c - a)/k \ \&\ j = (f - b)/m +$
$(d - b)/k \ \&\ u = (e - c)/n + (a - c)/k \ \&\ v = (f - d)/n + (b - d)/k \ \&$
$t = \sqrt{i^2 + j^2} \ \&\ w = \sqrt{u^2 + v^2} \ \&\ r = q\,\mathrm{ctg}(g/2) + p\,\mathrm{ctg}(h/2) + 2\sqrt{pq} \ \&$
$x = tr\sin(g/2) \ \&\ y = qwr\sin(h/2) \rightarrow D = (a + ik/x, b + jk/x) \ \&$
$E = (c + upk/y, d + vpk/y))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (e, f) координат точки C и числа p, q, m, n, k, g, h. Выходы - D, E.

(h) Смугол($A\ B\ C\ g\ r$) - находится центр окружности, вписанной в угол с вершиной A и касающейся другой окружности с центром C и радиусом r. B - направляющий вектор от точки A к искомому центру, g - величина рассматриваемого угла. Выдаются два альтернативных результата.

$\forall_{abcdefghjkmnqrstDMN}(q = \sqrt{m^2+n^2}$ & $M = m/q$ & $N = n/q$ & $e = a-c$ & $f = b-d$ & $h = \sin(g/2)$ & $t = (Me+Nf)^2 + (eh-Mr)^2 + (fh-Nr)^2 - e^2 - f^2$ & $0 \le t$ & $s = \sqrt{t}$ & $k = (s+hr-Me-Nf)/(1-h^2)$ & $j = (-s+hr-Me-Nf)/(1-h^2) \to D = (a+Mj, b+Nj) \ \vee$ $D = (a+Mk, b+Nk))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (m, n) координат вектора B, пара (c, d) координат точки C и числа g, r. Выход - D.

(i) сектор$(A\ C\ D\ r)$ - находятся центр и радиус окружности, вписанной в сектор окружности с центром A и радиусом r. Граничный радиус сектора проходит через точку C последней окружности; D - направляющий вектор от точки A к центру искомой окружности.

$\forall_{abcdefhmrstER}(s = \sqrt{e^2+f^2}$ & $t = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ & $h = \arccos((e(a-c)+f(b-d))/(st))$ & $m = r\sin h/(1+\sin h) \to$ $E = (a+e(r-m)/s, b+f(r-m)/s)$ & $R = m)$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки C, пара (e, f) координат вектора D и число r. Выходы - E, R.

(j) внешкасательная$(A\ B\ r\ s)$ - находится пара точек касания внешней касательной окружностей с центрами A, B и радиусами r, s. Выдаются два альтернативных результата.

$\forall_{abcdefghijmnprsCD}(f = d-b$ & $e = c-a$ & $p = \sqrt{e^2+f^2}$ & $n = (r-s)/p$ & $m = (\arccos n \text{ при } n < 1, \text{ иначе } 0)$ & $g = (e\cos m + f\sin m)/p$ & $h = (f\cos m - e\sin m)/p$ & $i = (e\cos m - f\sin m)/p$ & $j = (f\cos m + e\sin m)/p \to C = (a+gr, b+hr)$ & $D = (c+gs, d+hs) \ \vee$ $C = (a+ir, b+jr)$ & $D = (c+is, d+js))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, и числа r, s. Выходы - C, D.

(k) внутркасательная$(A\ B\ r\ s)$ - находится пара точек касания внутренней касательной окружностей с центрами A, B и радиусами r, s. Выдаются два альтернативных результата.

$\forall_{abcdefghijmprsCD}(f = d-b$ & $e = c-a$ & $p = \sqrt{e^2+f^2}$ & $m = \arccos(r+s)/p$ & $g = (e\cos m + f\sin m)/p$ & $h = (f\cos m - e\sin m)/p$ & $i = (e\cos m - f\sin m)/p$ & $j = (f\cos m + e\sin m)/p \to$ $C = (a+gr, b+hr)$ & $D = (c-gs, d-hs) \ \vee \ C = (a+ir, b+jr)$ & $D = (c-is, d-js))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, и числа r, s. Выходы - C, D.

(l) углывершины$(A\ B\ r\ m\ e)$ - находятся центр и радиус окружности, касающейся заданной окружности с центром в точке B и радиусом r, а также касающейся прямой, проходящей через точку A и образующей с прямой AB угол e. Центр искомой окружности должен лежать на отрезке AB, причем задано расстояние m от точки A до дальней точки пересечения луча AB с заданной окружностью.

$\forall_{abcdefgmpqrC}(f = (m-2r)\sin e/(1+\sin e)$ & $p = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ & $q = f + r \to C = (c+(a-c)q/p, d+(b-d)q/p)$ & $g = f)$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, и числа r, m, e. Выходы - C, g.

(m) пересекаются($p\ q$) - находятся радиусы двух пересекающихся окружностей, центры которых расположены в точках (200,400) и (320,400), причем p - расстояние по горизонтали от точки пересечения до центра левой окружности, q - расстояние от этой точки до оси центров. Центры окружностей лежат по разные стороны от прямой, проходящей через точки пересечения.
$\forall_{pqrs}(r = \sqrt{p^2+q^2}\ \&\ s = \sqrt{(120-p)^2+q^2})$
Входные данные - p, q. Выходы - r, s.

(n) внутркасаются($a\ b\ c\ p$) - по заданным двум окружностям находится третья, касающаяся их внутренним образом, причем результатом становится тройка: расстояние от центра искомой окружности до центра первой окружности, расстояние от центра искомой окружности до центра второй окружности, и радиус искомой окружности. Числа a, b суть радиусы первых двух окружностей, c - расстояние между их центрами. Параметр p доопределяет искомую окружность. При построении чертежа он варьируется. Созданы два приема - отдельно для случаев, когда две окружности не пересекаются либо пересекаются. В последнем случае выдаются два альтернативных результата.
$\forall_{abcdefp}(b < a+c\ \&\ a < b+c\ \&\ a+b \leq c \rightarrow d = p+(b+c-a)/2\ \&$
$e = p+(a+c-b)/2\ \&\ f = p+(a+b+c)/2)$

$\forall_{abcdefghi}(b < a+c\ \&\ a < b+c\ \&\ c < a+b\ \&\ g = p/2\ \&\ h = (a+b-c)/2\ \&$
$i = (g \text{ при } g < h,\ \text{иначе } h) \rightarrow d = p+(b+c-a)/2\ \&\ e = p+(a+c-b)/2\ \&$
$f = p+(a+b+c)/2\ \vee\ d = a-i\ \&\ e = b-i\ \&\ f = i)$
Входные данные - числа a, b, c, p. Выходы - d, e, f.

(o) внешкасаются($a\ b\ c\ p$) - по заданным двум окружностям находится третья, касающаяся их внешним образом, причем результатом становится тройка: расстояние от центра искомой окружности до центра первой окружности, расстояние от центра искомой окружности до центра второй окружности, и радиус искомой окружности. Числа a, b суть радиусы первых двух окружностей, c - расстояние между их центрами. Параметр p доопределяет искомую окружность. При построении чертежа он варьируется. Создан только прием для случая, когда окружности не пересекаются.
$\forall_{abcdefp}(a+b \leq c+0.00001 \rightarrow d = p+(c+a-b)/2\ \&\ e = p+(c+b-a)/2\ \&$
$f = p+(c-a-b)/2)$
Входные данные - числа a, b, c, p. Выходы - d, e, f.

(p) радиус($a\ b$) - находится радиус окружности, внутренним образом касающейся другой окружности, если радиус последней равен a, а расстояние между центрами равно b.
$\forall_{abc}(c = (a-b \text{ при } b < a,\ \text{иначе } a+b))$
Входные данные - числа a, b. Выход - c.

(q) сегмент($A\ B\ C\ D\ r$) - находится центр окружности, касающейся внутренним образом окружности с центром C и радиусом r а также касающейся хорды AB этой окружности. Известен направляющий вектор D луча, проведенного из точки A через центр искомой окружности.
$\forall_{abcdefghijkmnpqrtuvwxE}(m = \sqrt{p^2+q^2}\ \&\ i = p/m\ \&\ j = q/m\ \&$
$g = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\ \&\ f = (i(c-a)+j(d-b))/g\ \&\ x = 1-f^2\ \&$
$0 \leq x\ \&\ h = \sqrt{x}\ \&\ n = e-a\ \&\ k = w-b\ \&$

$t = (nh - ir)^2 + (kh - jr)^2 - (nj - ik)^2$ & $0 \leq t$ & $u = \sqrt{t}$ & $v = ni + kj - hr \rightarrow$
$E = (a + (v + u)i/(f^2), b + (v + u)j/(f^2)))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (e, w) координат точки C, пара (p, q) координат вектора D, а также число r. Выход - E.

(r) периметр($A\ C\ D\ r$) - находится центр окружности, проходящей через точку A и касающейся внутренним образом окружности с центром C и радиусом r. Известен направляющий вектор D луча, проведенного из точки A через центр искомой окружности.

$\forall_{abcdefghmnqrEMN}(f = a - c$ & $g = b - d$ & $q = \sqrt{m^2 + n^2}$ & $M = m/q$ &
$N = n/q$ & $h = fM + gN + r$ & $1 < h$ & $e = (r^2 - f^2 - g^2)/(2h) \rightarrow$
$E = (a + eM, b + eN))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки C, пара (m, n) координат вектор D, и число r. Выход - E.

(s) внешточка($A\ r\ p\ m$) - находятся координаты центра окружности радиуса p, касающейся внешним образом окружности с центром A и радиусом r. Параметр m доопределяет искомую окружность. При построении чертежа он варьируется.

$\forall_{abmprB}(B = (a + (r + p)\cos m, b + (r + p)\sin m))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A, а также числа r, p, m. Выход - B.

8. Операции, связанные с трапециями.

(a) левыйкрай($A\ p\ h$) - находится левая верхняя вершины трапеции, если известны ее левая нижняя вершина A, котангенс p угла наклона левой боковой стороны и высота h.

$\forall_{abhpB}(B = (a + ph, b - h))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A и числа p, h. Выход - B.

(b) правыйкрай($A\ p\ h$) - находится правая верхняя вершина трапеции, если известны ее правая нижеяя вершина A котангенс p угла наклона правой боковой стороны и высота h.

$\forall_{abhpB}(B = (a - ph, b - h))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A и числа p, h. Выход - B.

(c) трапеция($p\ h\ a$) - находятся верхняя левая и верхняя правая вершины трапеции, нижние вершины которой имеют координаты (200,800) и (400,800). Заданы высота трапеции h, длина верхнего основания p и отношение a проекции левой боковой стороны на нижнее основание к сумме проекций боковых сторон.

$\forall_{ahpBC}(B = (200 + a(200 - p), 800 - h)$ & $C = (400 - (1 - a)(200 - p), 800 - h))$

Входные данные - числа p, h, a. Выходы - B, C.

(d) Трапеция($p\ h\ a$) - находятся верхняя левая и верхняя правая вершины трапеции общего вида, нижние вершины которой имеют координаты (200,800) и (400,800). Заданы высота трапеции h, длина верхнего основания p и смещение a левой верхней вершины по горизонтали относительно левой нижней.

$\forall_{ahpBC}(B = (200 + a, 800 - h)$ & $C = (200 + a + p, 800 - h))$

Входные данные - числа p, h, a. Выходы - B, C.

(e) углы($a\ b\ p$) - находятся верхняя левая и верхняя правая вершины трапеции, нижние вершины которой имеют координаты (200,800) и (400,800). Заданы углы a, b при левом и правом концах нижнего основания, а также длина p верхней стороны.

$\forall_{abdhpBC}(d = \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b$ & $\neg(d = 0)$ & $h = (200 - p)/d \rightarrow$
$B = (200 + h \operatorname{ctg} a, 800 - h)$ & $C = (400 - h \operatorname{ctg} b, 800 - h))$

Входные данные - числа a, b, p. Выходы - B, C.

(f) описана($a\ b$) - находятся верхние вершины описанной трапеции с углами при основании a и b.

$\forall_{abpqBC}(p = \operatorname{ctg}(a/2) + \operatorname{ctg}(b/2)$ & $q = 400/p \rightarrow$
$B = (200 + q \operatorname{ctg} a, 400 - q)$ & $C = (400 - q \operatorname{ctg} b, 400 - q))$

Входные данные - a, b. Выходы - B, C.

9. параллелограмм($a\ b$) - находятся верхние вершины параллелограмма, нижние вершины которого имеют координаты (200,800) и (350,800), причем a - смещение вправо от левой нижней к левой верхней вершине, b - высота.

   $\forall_{abBC}(B = (200 + a, 800 - b)$ & $C = (350 + a, 800 - b))$

   Входные данные - a, b. Выходы - B, C.

10. ромб(a) - находятся верхняя и нижняя вершины ромба, средние вершины которого имеют координаты (200,700) и (400,700), причем известна половина a вертикальной диагонали.

    $\forall_{aBC}(B = (300, 700 - a)$ & $C = (300, 700 + a))$

    Входное данное - a. Выходы - B, C.

11. квадрат($A\ B$) - находятся вершины C, D квадрата $ABCD$. Выдаются два альтернативных результата.

    $\forall_{abcdCD}(C = (a + b - d, b + c - a)$ & $D = (c + b - d, d + c - a)\ \vee$
    $C = (a - b + d, a + b - c)$ & $D = (c - b + d, a + d - c))$

    Входные данные - пара (a, b) координат точки A и пара (c, d) координат точки B. Выходы - C, D.

12. четырехугольник($a\ b\ c\ d$) - находится третья вершина выпуклого четырехугольника, у которого (a, b) - координаты второй вершины; (200, 800) и (360, 800) - координаты первой и четвертой вершины. Параметры c, d доопределяют искомый четырехугольник. При построении чертежа они варьируются.

    $\forall_{abcdmnpqrsA}(m = 360 - a$ & $n = 800 - b$ & $p = a - 200$ & $q = b - 800$ &
    $r = \sqrt{m^2 + n^2}$ & $s = \sqrt{p^2 + q^2} \rightarrow A = (a + mc/r + pd/s, b + nc/r + qd/s))$

    Входные данные - числа a, b, c, d. Выход - A.

13. фигуры($a\ b\ c$) - находятся вторая, третья и четвертая вершины описанного четырехугольника с известным углом a. Параметры b, c доопределяют искомый четырехугольник. При построении чертежа они варьируются. Смысл параметра b - полярный угол четвертой вершины, параметра c - доля, в которой делится дуга между второй и четвертой вершинами.

$\forall_{abcdABC}(d = cb + (1-c)(2a+b) \to A = (300 + 100\cos b, 400 + 100\sin b)$ & $B = (300 + 100\cos(2a+b), 400 + 100\sin(2a+b))$ & $C = (300 + 100\cos d, 400 + 100\sin d))$

Входные данные - числа a, b, c . Выходы - A, B, C.

14. правмногоугольник($A\ B\ C\ i\ j\ n$) - находится j - я вершина правильного n - угольника с центром A и i - й, $i+1$-й вершинами B, C.

    $\forall_{abcdefghijnpqrF}(p = a - c$ & $q = b - d$ & $g = (e-c)q - (f-d)p$ & $h = 2(j-i)\pi/n$ & $r = (-h$ при $g < 0,$ иначе $h) \to F = (c + p\cos r + q\sin r, d + q\cos r - p\sin r))$

    Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (e, f) координат точки C, а также числа i, j, n. Выход - F.

15. Операции, используемые для проверки условий. Значением такой операции служит неотрицательная эвристическая оценка степени нарушения условия. Для выполненных условий она равна 0.

    (a) разныестороны($A\ B\ C\ D$) - условие размещения точек A, B по разные стороны от прямой, проходящей через точку C в направлении вектора D.
    $\forall_{abcdefghmpqrR}(m = eh - fg$ & $p = gb - ha + m$ & $q = gd - hc + m$ & $r = pq \to R = (r$ при $0.0001 < r,$ иначе $0))$

    Входные данные - пары координат (a, b), (c, d), (e, f), (g, h) точек A, B, C, D. Выход - R.

    (b) однасторона($A\ B\ C\ D$) - условие размещения точек A, B по одну сторону от прямой, проходящей через точку C в направлении вектора D.

    $\forall_{abcdefghmpqrR}(m = eh - fg$ & $p = gb - ha + m$ & $q = gd - hc + m$ & $r = pq \to R = (10 - r$ при $r < -0.0001,$ иначе $0))$

    Входные данные - пары координат (a, b), (c, d), (e, f), (g, h) точек A, B, C, D. Выход - R.

    (c) пропорциональны($a\ b\ c\ d$) - условие равенства отношений a к b и c к d.
    $\forall_{abcdmp}(\neg(b = 0)$ & $\neg(c = 0)$ & $m = |ad/(bc) - 1| \to$
    $p = (0$ при $m < 0.01,$ иначе $m))$

    Входные данные - числа a, b, c, d. Выход - p.

    (d) меньшеилиравно($a\ b$) - нестрогое неравенство для величин a, b.
    $\forall_{abc}(c = (0$ при $a \le b + 0.00001,$ иначе $1 + a - b))$

    Входные данные - числа a, b. Выход - c.

    (e) меньше($a\ b$) - строгое неравенство для величин a, b.
    $\forall_{abc}(c = (0$ при $a < b,$ иначе $1 + a - b))$

    Входные данные - числа a, b. Выход - c.

    (f) направляющая($A\ B\ C$) - проверка того, что векторы A и BC (B, C - точки) направлены в одну сторону.

    $\forall_{abcdefpqr}(p = e - c$ & $q = f - d \to r = (1$ при $ap < 0,$ иначе$(1$ при $bq < 0,$ иначе $0)))$

    Входные данные - пара (a, b) координат вектора A, пара (c, d) координат точки B и пара (e, f) координат точки C. Выход - r.

(g) разность($a\ b$) - условие равенства величин a и b.
$\forall_{abcd}(c = |a-b| \to d = (0 \text{ при } c < 0.01, \text{ иначе } c))$
Входные данные - числа a, b. Выход - d.

(h) перпендикпрямые($A\ B\ C\ D$) - условие перпендикулярности прямых AB и CD.
$\forall_{abcdefghijmn}(m = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ n = \sqrt{(g-e)^2+(h-f)^2}$
$\&\ \neg(n=0)\ \&\ i = |(c-a)(g-e)+(d-b)(h-f)|/(mn) \to$
$j = (0 \text{ при } i < 0.001, \text{ иначе } i))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (e, f) координат точки C и пара (g, h) координат точки D. Выход - j.

(i) параллелпрямые($A\ B\ C\ D$) - условие параллельности прямых AB и CD.
$\forall_{abcdefghijmn}(m = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ n = \sqrt{(g-e)^2+(h-f)^2}$
$\&\ \neg(n=0)\ \&\ i = |(c-a)(h-f)-(d-b)(g-e)|/(mn) \to$
$j = (0 \text{ при } i < 0.001, \text{ иначе } i))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B, пара (e, f) координат точки C и пара (g, h) координат точки D. Выход - j.

(j) интервал($A\ B\ C$) - условие непринадлежности точки C интервалу AB.
$\forall_{abcdefg}(g = (0 \text{ при } (e-a)(c-e) < 0, \text{ иначе } (0 \text{ при } (f-b)(d-f) < 0, \text{ иначе } 10)))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и пара (e, f) координат точки C. Выход - g.

(k) близкиеточки($A\ B$) - условие размещения точек A и B не в непосредственной близости друг от друга. Учитываются масштабы чертежа на экране.
$\forall_{abcdpq}(p = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} \to q = ((0 \text{ при } 12 < q, \text{ иначе } 1) \text{ при } 6 < p, \text{ иначе } 10))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A и пара (c, d) координат точки B. Выход - q.

(l) равныедлины($A\ B\ e$) - условие равенства величины e расстоянию между точками A и B.
$\forall_{abcdemnp}(m = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ n = |e/m-1| \to$
$p = (0 \text{ при } n < 0.2, \text{ иначе } n))$
Входные данные - пара (a, b) координат точки A, пара (c, d) координат точки B и число e. Выход - p.

(m) внешконтроль($A\ B\ e$) - усиленные вариант ячейки "равныедлины($A\ B\ e$). Усиление заключается в увеличенном значении оценки, делающем выполнение данного условия более приоритетным.
$\forall_{abcdemnp}(m = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ n = |e/m-1| \to p = (0 \text{ при } n < 0.01, \text{ иначе } 10n))$.
Входные данные - пары координат (a, b) и (c, d) точек A и B, а также число e. Выход - p.

(n) сумма($a\ b\ c$) - условие равенства величины c сумме величин a и b.
$\forall_{abcd}(d = |c-a-b|/4)$
Входные данные - числа a, b, c. Выход - d.

(o) фигура($A\ B\ C\ D\ E$) - условие принадлежности точки E выпуклому четырехугольнику $ABCD$.

$\forall_{abcdefghkmnpqrs}(m = ((b-d)p + (c-a)q + ad - bc)((b-d)e + (c-a)f + ad - bc)\ \&\ n = ((d-f)p + (e-c)q + cf - de)((d-f)g + (e-c)h + cf - de)\ \&\ k = ((f-h)p + (g-e)q + he - fg)((f-h)a + (g-e)b + he - fg)\ \&\ r = ((h-b)p + (a-g)q + bg - ah)((h-b)c + (a-g)d + bg - ah) \to s = (1 \text{ при } m < 0, \text{ иначе } (1 \text{ при } n < 0, \text{ иначе } (1 \text{ при } k < 0, \text{ иначе } (1 \text{ при } r < 0, \text{ иначе } 0)))))$

Входные данные - пары координат (a, b), (c, d), (e, f), (g, h), (p, q) точек A, B, C, D, E. Выход - s.

(p) модуль($a\ b\ c$) - условие равенства величины c модулю разности величин a, b.

$\forall_{abcd}(d = |c - |a - b||)$

Входные данные - a, b, c. Выход - d.

(q) непересек($A\ r\ B$) - условие существования касательной к окружности с центром A и радиусом r, проведенной из точки B.

$\forall_{abcdpqr}(p = (c-a)^2 + (d-b)^2 - r^2 \to q = (0 \text{ при } 1 \leq p, \text{ иначе } 10))$

Входные данные - пара координат (a, b) точки A, число r и пара (c, d) координат точки B. Выход - q.

(r) ограничена(A) - условие не слишком большого удаления точки A от области, отображаемой на экране.

$\forall_{abc}(c = (10 \text{ при } 1000 < |a|, \text{ иначе } (10 \text{ при } 2000 < |b|, \text{ иначе } 0)))$

Входные данные - пара (a, b) координат точки A. Выход - c.

16. Приемы справочника "опр", реализованные на ЛОСе.

Несколько приемов справочника "опр" оказалось удобнее реализовать на ЛОСе. Эти приемы можно найти в разделе оглавления программ (Приемы решателя - Геометрия - Процедуры справочника ОПР).

(a) вход($a\ b\ c$) - выдается значение a рассматриваемого параметра. При этом в ячейке сохраняется информация о границах b, c его изменения.

(b) набор($a_1 \ldots a_n$) - выдается набор $(a_1 \ldots a_n)$.

(c) равно(a) - копируется значение a.

(d) тчкоорд($K\ A\ B$) - находится оценка размещения концевой точки B луча AB на позиции K. Учитываются уже размещенные элементы чертежа, и "штрафуются" неоправданные близости и пересечения.

(e) точкапрямой($K\ A\ B$) - находится оценка размещения точки A прямой B на позиции K.

(f) окрточка($K\ B\ A$) - находится оценка размещения точки B окружности A на позиции K.

(g) точкаотрезка($A\ B\ C$) - оценивается степень нарушения условия принадлежности точки C отрезку AB.

(h) Круг($A\ B\ C\ D\ r\ R$) - находятся центр и радиус окружности, касающейся окружностей с центрами A, B и радиусами r, R, а также касающейся прямой, проходящей через точку C в направлении вектора D.

Обработка указателей на доопределение схемы вычислений

Построение схемы вычислений параметров чертежа осуществляется анализатором "чертеж", приемы которого будут описаны ниже. Эти приемы добавляют к списку посылок вспомогательной задачи анализатора утверждения "опр(...)", указывающие, какие элементы чертежа становятся определены после присоединения к схеме вычислений новых ячеек. Указатели на новые ячейки передаются приемом процедуре "вывод" в виде информационных элементов (опр B C). Здесь B - группа названий определяемых ячейкой объектов (точек, векторов, чисел), C - терм, реализующий обращение к справочнику "опр". Опишем фрагмент процедуры "вывод", выполняющий обработку таких указателей.

Из корня оглавления программ переходим к подразделу (Приемы решателя - Общие процедуры, используемые в приемах - Процедура ВЫВОД - Анализатор ЧЕРТЕЖ). Затем нажимаем "курсор вправо" и оказываемся в фрагменте программы ЛОСа, содержащем контрольную точку "прием(4 4)". Перед этой контрольной точкой расположен оператор, проверяющий, что обращение к процедуре "вывод" произошло из анализатора "чертеж". Переменной x4 присваивается внешняя задача анализатора "чертеж". Вводится пустой накопитель x5, который будет заполняться ячейками, присоединяемыми к схеме.

После оператора "ветвь 2" предпринимается коррекция указателей (опр выбор(a_1, b_1, c_1) ... выбор(a_n, b_n, c_n) t). Эти указатели используются при произвольном доопределении параметров чертежа. Для численных параметров $a_1, \dots a_n$ указываются допустимые промежутки значений $[b_1, c_1], \dots, [b_n, c_n]$. Терм t - обращение к справочнику "опр", позволяющее вычислить качество выбранных значений параметров. Рассматриваемый указатель заменяется на группу указателей (опр a_1 вход($b_1 b_1 c_1$)), ..., (опр a_n вход($b_n b_n c_n$)), (опр оценка $a_1 \dots a_n$ t). Заметим, что таким образом параметры a_i будут получать исходные значения b_i.

Далее - переход через оператор "ветвь 2". Здесь реализуется цикл извлечения из набора x3 информационных элементов (опр B C) и регистрации определяемых ими элементов в схеме вычислений. Напомним, что эта схема хранится в комментарии (чертеж A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) к посылкам задачи x4. x6 - текущий такой элемент. Переменной x7 присваивается терм C (обращение к справочнику "опр"), переменной x8 - набор B названий определяемых новой ячейкой объектов.

Прежде всего, рассматривается случай, когда терм C задает численную константу. Тогда x8 состоит из единственного названия r. Вычисляется значение x9 данной константы в формате "с плавающей запятой". Если в списке A_2 значений величин, определяемых схемой, уже имелся набор для величины r, то регистрируется ее значение x9, иначе - в A_2 заносится новый набор (r x9 0 пустоеслово).

Если терм C не задает численную константу, то переход через "иначе 2". Переменной x9 присваивается заголовок терма C (тип новой ячейки), а переменной x10 - набор корневых операндов терма B. Переменной x11 присваивается комментарий (чертеж $A_1 A_2 A_2 A_4 A_5$), а переменной x12 - накопитель ссылок на элементы наборов A_2, A_4, определяющие значения корневых операндов x10. Ссылкой на набор здесь служит вхождение первого элемента набора. Для заполнения накопителя x12 последовательно просматриваются элементы x13 набора x10. Отдельно рассматриваются следующие случаи (в указанной последовательности):

1. Элемент x13 имеет вид "терм(T)". Тогда в x12 заносится сам терм T.

2. Элемент x13 - константный терм. Если он уже зарегистрирован в наборе A_4

значений констант, то в x12 заносится ссылка на определяющую его значение пару. Иначе - значение x13 (число либо пара чисел в формате с плавающей запятой) вычисляется, регистрируется в A_4, и в x12 заносится ссылка на новую пару набора A_4.

3. Если в наборе A_2 имеется элемент, определяющий значение x13, то в x12 заносится ссылка на него.

4. Если x13 имеет вид "направл(P Q)", то предпринимается попытка найти в A_2 элемент, определяющий значение "луч(P Q)". При удаче - в x12 заносится ссылка на такой элемент.

5. Если x13 имеет вид "расстояние(P Q)", то предпринимается попытка найти в A_2 элемент, определяющий значение "расстояние(Q P)". При удаче - в x12 заносится ссылка.

6. В A_2 регистрируется новый элемент (x13 0 0 пустоеслово), и в x12 заносится ссылка на него.

По окончании просмотра элементов x13 - переход через "иначе 1". Здесь вводится набор x13 вида (x9 x12 пустоеслово пустоеслово) - заготовка новой ячейки. Он регистрируется в списке x5 и в наборе ячеек A_1. Для каждого элемента набора x12, являющегося ссылкой на некоторый элемент (P_1 P_2 P_3 P_4) набора A_2, предпринимается регистрация в списке P_4 ячеек, использующих величину P_1, ссылки на ячейку x13. Далее - переход через "иначе 1".

Здесь рассматриваются два случая:

1. Первый элемент набора x8 не является символом "оценка". Тогда все элементы набора x8 суть названия вычисляемых ячейкой объектов. Для текущего такого названия x14 проверяется, имеется ли в наборе A_2 набор x15 вида (x14 $P_1 P_2 P_3$). Если он найден, то разряд P_2 заменяется ссылкой на новую ячейку x13, а к списку выходов ячейки x13 добавляется ссылка на x15. При неудаче, в случае x14 = "расстояние(MN)" попытка повторяется для терма "расстояние(NM)". Наконец, если в наборе A_2 подходящего элемента нет, то в этот набор заносится новый элемент (x14 0 левыйкрай(x13) пустоеслово). Как и выше, ссылка на него регистрируется в списке выходов ячейки x13.

2. Первый элемент набора x8 есть символ "оценка". В списке ограничений на параметры A_3 регистрируется новый набор (оценка 0 левыйкрай(x13)). Этот набор добавляется к списку выходов ячейки x13. Если в наборе x8 после символа "оценка" располагаются переменные $x_1, \ldots, x_k$, то вводится комментарий (выбор $x_1 \ldots x_k$) к ячейке x13. Он означает, что ячейка вычисляет функционал, значение которого должно быть минимизировано для инициализации значений параметров $x_1, \ldots, x_k$.

После того, как все элементы x6 вида (опр ...), переданные оператору "вывод", обработаны указанным образом, в комментарии (чертеж ...) оказываются созданы бланки новых ячеек и их входов - выходов. Теперь возвращаемся к оператору "ключ(x3 опр x6)" и переходим через "иначе 1".

Начинается цикл определения значений, вычисляемых новыми ячейками. Эти ячейки перечислены в списке x5. Так как обработанные ячейки будут исключаться из данного списка, для последующего использования создается его копия x6. Комментарий (чертеж ...), хранящий схему вычислений, присваивается переменной x7. После оператора "повторение" просматриваются ячейки x8 списка x5. Откаты к данному оператору позволят вычислять значения тех ячеек, значения входов которых были найдены на предыдущей итерации.

Переменной x9 присваивается тип ячейки x8, переменной x10 - набор значений ее входов. Если все входные значения определены (т.е. в x10 не входит символ 0), то ячейка x8 исключается из списка x5 и предпринимается обращение к справочнику "опр", вычисляющему набор x11 альтернативных наборов значений выходов ячейки.

Если x11 оказалось равно 0, то для специального случая x9 = "точкаокружности" предпринимается попытка скорректировать значения параметров чертежа. В этом случае ищется точка касания касательной, проведенной к данной окружности из данной точки. Для коррекции создается новая ячейка "непересек" с теми же входными данными, что и ячейка x8. Она вычисляет оценку, штрафующую попытки разместить внешнюю точку слишком близко к кругу. Затем применяется процедура "выбор", оптимизирующая значения параметров с учетом добавленной оценки, и снова предпринимается попытка обратиться к справочнику "опр". Найденное значение переприсваивается переменной x11.

Далее, при наличии указанной выше коррекции либо без нее, возвращаемся к оператору "равно(x11 справка(опр x9 x10 x7))", и переходим через "ветвь 2".

Здесь сначала рассматривается случай, когда x11 не равно 0. Если набор x11 альтернативных наборов значений имеет более одного элемента, то предпринимаются следующие действия:

1. Создается либо корректируется комментарий (вариант P_1 P_2) к ячейке x8. Этот комментарий указывает список P_1 альтернативных наборов значений, вычисляемых ячейкой, а также вхождение P_2 в набор P_1 текущего используемого варианта. Если такой комментарий уже был, то P_1 заменяется на x11, а P_2 - на вхождение первого элемента P_1. Если его не было, то он точно таким же образом создается.

2. Если x11 имеет два элемента E_1 и E_2, которые суть пары координат точки, причем в списке A_2 усматривается пара координат точки, практически неотличимая от E_1, то указатель P_2 текущего варианта в комментарии (вариант P_1 P_2) переустанавливается на второй элемент E_2.

При любой длине списка x11, далее выполняется переход через "ветвь 2", расположенную перед оператором "не(длинатекста(x11 1))". Переменной x12 присваивается текущий набор значений, вычисленных ячейкой x8. Эти значения пересылаются в элементы наборов A_2, A_3, являющиеся выходами ячейки x8.

Возвращаемся к случаю, когда x11 равнялось 0 и имел место переход через "иначе 1". Здесь предпринимается расчистка комментария (чертеж ...): удаляются все новые элементы, введенные в него при реализации процедуры "вывод", после чего происходит выход из данной процедуры по значению "ложь".

По завершении просмотра всех ячеек x8 списка x5 - переход через "иначе 1". Если список x5 остается непустым, то откат к оператору "повторение", и начало следующей итерации вычисления значений. Если список x5 пуст, то регистрация новых ячеек и предварительное вычисление значений их выходов завершены. Далее предпринимается обращение к процедуре "выбор", оптимизирующей параметры чертежа для текущей схемы вычислений, и обработка указателей (опр ...) заканчивается.

Процедура "выбор"

Процедура "выбор(x1)" получает в качестве входного значения x1 комментарий (чертеж A_1 A_2 A_3 A_4 A_5), определяющий текущее состояние схемы вычислений параметров чертежа. Она выполняет коррекцию параметров чертежа для минимизации значений оценок, хранящихся в наборе A_3. В оглавлении программ эта процедура занимает подраздел (Приемы решателя - Геометрия - Процедура ВЫБОР). Проследим ход выполнения ее программы.

Оператор "повторение" служит точкой отката для повторных рассмотрений списка оценок A_3. Перед ним инициируется нулем индикатор требущих пересмотра изменений x2. Если по окончании очередного цикла просмотра позиций x3 списка A_3 он остается равным нулю, то просмотр списка A_3 обрывается, и переход через "ветвь 2".

По текущей позиции x3 списка A_3 определяются расположенный на ней набор x4. Он представляет собой тройку (логический символ "оценка величина оценки - ссылка на ячейку, определяющую оценку). Смысл оценки - неотрицательная эвристическая величина отклонения от некоторого условия на чертеж. Нулевое значение означает выполнение данного условия. Переменной x5 присваивается величина оценки x4. Если она пренебрежимо мала, то переход к очередной позиции x3. Иначе - переменной x6 присваивается ячейка, вычисляющая оценку x4, а переменной x7 - список комментариев к ячейке x6.

Прежде всего, проверяется наличие в x7 комментария (выбор x), означающего, что ячейка вычисляет функционал, значение которого должно быть минимизировано для инициализации (произвольного выбора) параметра x. Если это так, то переменной x9 присваивается символ x, а переменной x10 - элемент набора A_2, определяющий значение x. Этот элемент представляет собой четверку (x - текущее значение x - ссылка на ячейку, вычисляющую x - список ячеек, использующих x в качестве входного значения). Переменной x11 присваивается ячейка, вычисляющая значение x. Проверяется, что она имеет заголовок "вход", и переменной x12 присваивается набор ссылок на входы данной ячейки. В данном случае входов ровно три, и все они суть константы, представленные в наборе A_5. Две последние константы определяют диапазон $[a, b]$ изменений параметра x. Они присваиваются, соответственно, переменным x13 и x14. Переменной x15 присваивается шаг $h = (b - a)/10$ изменения параметра x.

Далее реализуется цикл последовательного увеличения параметра с шагом h, начиная со значения a. Для каждого нового значения x выполняется обращение к процедуре "пересчет", модифицирующей все значения выходов ячеек схемы по заданным списку изменяемых величин (наборов из A_2) и списку их новых значений. Переменная x16 сохраняет наименьшее значение оценки x4, а переменная x17 - значение c переменной x, при котором оно достигается. По завершении цикла - рассматривается промежуток $[\max(a, c - h), \min(b, c + h)]$, который снова делится на 10 частей, и реализуется повторный цикл поиска наименьшего значения. Как и выше, найденные значения сохраняются в переменных x16 и x17. По завершении цикла - процедура "пересчет" применяется для установки значения x17 переменной x. Ненужный далее элемент x4 удаляется из списка A_3. Если ячейка $x6$ нигде более не использовалась, то она тоже удаляется из схемы. Затем - переход к очередной позиции x3 списка оценок A_3.

Если ячейка x6 не имела комментария (выбор x), то переход через оператор "иначе 4", расположенный перед контрольной точкой "прием(2)". Оператор "вхпарам" присваивает переменной x8 список всех участвующих в определении оценки x4 ячеек, имеющих альтернативные варианты выходных значений, а переменной x9 - список ссылок на все входные ячейки для параметров, участвующих в определении этой оценки. Здесь и далее имеется в виду участие по цепочке вычислений. Сначала предпринимается попытка обнулить оценку x4 за счет варьирования альтернативных выходных значений ячеек. Для этого просматриваются элементы x10 списка x8. Переменной x11 присваивается список всех вычисленных при использовании ячейки x10 величин списка A_2 и оценок списка A_3. Проверяется, что число оценок в этом списке не чрезмерно велико. Кроме того, проверяется, что заголовок ячейки, вычисляющей оценку x4, отличен от символов "разность", "пропорциональны", "модуль", "сумма", "близкиеточки". В этих случаях целесообразнее добиваться выполнения условия путем варьирования входных параметров. После перечисленных проверок - переход через "ветвь 2". Здесь переменной x13 присваивается комментарий (вариант P_1 P_2) ячейки x10. Просматриваются вхождения x14 в список альтернативных наборов значений P_1, отличные от текущего вхождения P_2. Для переустановки выходных значений ячейки x10 согласно набору x14 применяется процедура "пересчет". Если в результате значение оценки x4 оказывается равным 0, то указатель P_2 переустанавливается на x14, и к списку комментариев ячейки x10 добавляется (даже если он уже там имелся) логический символ "новый". Такие символы указывают количество ранее предпринимавшихся попыток выбора альтернативного выходного набора значений ячейки. Если их число достигает 3, дальнейшие попытки варьирования выхода ячейки блокируются. Далее - откат к выбору очередной позиции x3.

Если просмотр вхождений x14 закончился безрезультатно, то реализуется обращение к процедуре "пересчет" для возвращения к исходной версии выходных значений ячейки x10.

Если просмотр всех ячеек x10 списка x8 не позволил занулить значение оценки x4, то переход через "иначе 1".

Для каждой входной ячейки P, участвующей в определении оценки x4, находится список P' вычисленных при ее использовании величин и оценок. Ячейки P образуют набор x9, списки P' - набор x10. Создается список x11 пар (P, P') для тех входных параметров, которые не используются для определения оценок, отличных от x4. Пары упорядочены в наборе x11 по возрастанию длин списков P'. Затем - переход через оператор "ветвь 1", расположенный после инициализации x11 пустым словом.

После контрольной точки "прием(6)" реализуется цикл попыток уменьшения оценки x4 за счет варьирования параметров списка x11. Переменной x12 присваивается текущая пара из списка x11. Ее первый элемент x13 - вхождение левого края входной ячейки, соответствующей варьируемому параметру x. Переменной x14 присваивается сама эта ячейка, переменной x15 - список ее входов. По этим входам определяется диапазон $[a, b]$ варьирования параметра. Переменной x16 присваивается a, переменной x17 - b. Переменной x18 присваивается шаг $h = (b - a)/20$ изменения параметра. Находится набор x19 - выход ячейки x14.

Далее реализуется цикл последовательного увеличения параметра с шагом h, начиная со значения a. Для каждого нового значения x выполняется обращение к процедуре "пересчет", модифицирующей все значения выходов ячеек схемы. Отбрасываются точки, в которых после пересчета значение какой-либо ячейки вычислить не удалось. Переменная x20 сохраняет наименьшее значение оценки x4, а переменная x21 - значение c переменной x, при котором оно достигается.

По завершении цикла - рассматривается промежуток $[\max(a, c-h), \min(b, c+h)]$, который делится на 40 частей, и реализуется повторный цикл поиска наименьшего значения. Как и выше, найденные значения сохраняются в переменных x20 и x21. По окончании - процедура "пересчет" применяется для установки значения x21 переменной x. Если значение оценки x4 стало равным 0, то откат к рассмотрению очередной позиции x3. Иначе - проверяется, уменьшилось ли значение этой оценки по сравнению с исходным хотя бы на 0.0001. Если уменьшилось, то указатель изменений x2 устанавливается на 1, и откат к рассмотрению очередного элемента x12 списка x11. Иначе - восстанавливается исходное значение параметра x, и также откат к выбору очередного x12.

По завершении просмотра всех элементов списка x11 - переход через "иначе 1". Сначала рассматривается случай, когда список x8 участвующих в определении оценки x4 ячеек, имеющих альтернативные варианты выходных значений, состоит из единственной ячейки x12, а список x11 непуст. Тогда последовательно устанавливаются альтернативные значения выходов ячейки x12, и для каждого такого значения повторно запускается описанная выше процедура варьирования параметров списка x11 для уменьшения значения оценки x4. Если таким образом удается занулить оценку x4, то откат к очередной позиции x3. Если оценку x4 уменьшить не удается, то восстанавливаются исходные значения выходов ячейки x12.

После попытки рассмотрения указанного специального случая - переход через "ветвь 1". Здесь список x9 входных ячеек P, участвующих в определении оценки x4, переупорядочивается по возрастанию длин списков P' вычисленных при использовании P величин и оценок. Далее - переход через "ветвь 1" к контрольной точке "прием(7)".

Здесь предпринимается попытка варьировать сразу все входные параметры, участвующие в определении значения оценки x4, причем целью варьирования является уменьшение не единственной оценки x4, а суммы квадратов всех оценок схемы. Прежде всего, указатель пересмотра x2 сбрасывается на 0. Вместо этого, вводится локальный указатель пересмотра x12, инициируемый нулем. Далее просматривается список x9; x13 - текущий его элемент, x14 - соответствующая входная ячейка. По входу ячейки x14 определяется диапазон $[a, b]$ варьирования ее параметра x. Переменной x16 присваивается a, переменной x17 - b. Переменной x18 присваивается шаг $h = (b - a)/25$ изменения параметра. Находится набор x19 - выход ячейки x14. Вычисляется сумма x20 квадратов значений всех оценок схемы.

Далее реализуется цикл последовательного увеличения параметра с шагом h, начиная со значения a. Для каждого нового значения x выполняется обращение к процедуре "пересчет", модифицирующей все значения выходов ячеек схемы. Отбрасываются точки, в которых после пересчета значение какой-либо ячейки вычислить не удалось. Переменная x21 сохраняет наименьшее значение суммы квадратов значений оценок, а переменная x22 - значение c переменной x, при котором оно достигается.

По завершении цикла - рассматривается промежуток $[\max(a, c - h), \min(b, c + h)]$, который делится на 20 частей, и реализуется повторный цикл поиска наименьшего значения. Как и выше, найденные значения сохраняются в переменных x21 и x22. По окончании - процедура "пересчет" применяется для установки значения x22 переменной x. Если значение x21 суммы квадратов уменьшилось по сравнению с x20 хотя бы на 0.0001, то x12 присваивается 1, и откат к выбору очередного x13. Иначе - восстанавливается исходное значение параметра x, и тоже переход к очередному x13. Если по окончании просмотра списка x9 оказывается, что x12 равно 1, то просмотр повторяется. Иначе - рассматривается специальный случай, когда ячейка x4 имеет заголовок "близкиеточки", т.е. проверяет, что две точки на чертеже не "слипаются". Тогда предпринимается попытка занулить оценку x4 переходом к альтернативным значениям выходов ячеек списка x8. Во всех случаях далее - откат к выбору очередной позиции x3.

Если просмотр всех позиций x3 завершен, причем указатель пересмотра x2 оказался равен 0, то переход через "ветвь 2", расположенную после контрольной точки "прием(1)".

Здесь предпринимается контроль наличия точек, координаты которых слишком велики для отображения на экране, либо пар слишком близких точек. Для этих случаев вводятся дополнительные оценки, штрафующие указанные ситуации. Они вычисляются ячейками с заголовками "ограничена" и "близкиеточки". Сначала новые ячейки заносятся в накопитель x2, а новые оценки - в накопитель x3. Затем они регистрируются в схеме, и предпринимается рекурсивное обращение к процедуре "выбор". Чтобы заблокировать повторную рекурсию, используется комментарий "близкиеточки", заносимый в набор A_5 комментария "чертеж".

Завершает работу процедуры "выбор" зануление значений всех оценок. Это позволяет экономить на обработке "старых" оценок при последующих шагах расширения схемы вычислений. Заметим, что как только варьируется параметр, затрагивающий зануленную оценку, процедура "пересчет" восстанавливает ее корректное значение.

Пакетный анализатор "чертеж"

Пакетный анализатор "чертеж" осуществляет последовательное построение схемы вычислений параметров чертежа для списка посылок текущей планиметрической задачи на исследование. Перед обращением к нему создается комментарий (чертеж A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) к данной задаче - накопитель схемы вычислений. Первоначально все списки A_i пустые. Если элемент чертежа P (точка, расстояние, вектор либо число) к текущему моменту уже определен схемой вычислений, то в список посылок внутренней задачи анализатора заносится посылка "опр(P)". Если определен направляющий вектор луча, то используется запись "опр(луч(...))". Если же определено лишь направление прямой, то вместо этого записывается "опр(направл(...))". Указатель приема анализатора "опр($B_1 \ldots B_k$ C)" определяет ввод новой ячейки схемы, выходные объекты которой суть $B_1, \ldots, B_k$, а обращение к справочнику "опр" задается термом C. Этот указатель означает, что реализующей действия приема процедуре "вывод" будет передан информационный элемент (опр $B_1 \ldots B_k$ C).

Чтобы описанная выше численная оптимизация, выполняемая процедурой "выбор", была достаточно эффективной, чрезвычайно важна эвристика построения схемы вычислений. Приемы анализатора, выполняющие эту работу, должны обеспечивать гарантированное выполнение как можно большего числа условий задачи. Следует стремиться к тому, чтобы оставшиеся условия задачи имели как можно меньшие пересечения по варьируемым параметрам.

Перейдем к описанию приемов анализатора.

1. Инициализация чертежа.

   Начнем с рассмотрения группы приемов, вводящих в рассмотрение исходные точки чертежа. Если не оговорено противное, для приемов этого раздела предполагается, что список посылок не содержит утверждений вида "опр(...)".

   (a) Концы отрезка.
   $\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB) \to \text{опр}(A)\ \&\ \text{опр}(B))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка, указывающая на принадлежность точки C подотрезку отрезка AB. В задаче не рассматриваются ни треугольники, ни окружности. Указатели "опр(A набор(200 200))", "опр(B набор(400 200))" определяют выбор точек A, B с фиксированными координатами (200,200) и (400,200). Уровень срабатывания равен 5.

(b) Пара параллельных прямых.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) $\rightarrow$ опр(A) & опр(луч(AB)) & опр(C) & опр(направл(C, D)) & опр(p))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "опр(A набор(200 400))" определяет точку A с фиксированными координатами. Указатель "опр(p вход(200 10 600))" определяет варьируемый входной параметр p, диапазон изменений которого - от 10 до 600, а стартовое значение равно 200. Указатель "опр(C набор(p 520))" определяет точку C, абсцисса которой равна p, а ордината - 520. Указатели "опр(луч(A B)набор(1 0))" и "опр(направл(C D)набор(1 0))" определяют горизонтальные направления прямых AB и CD. Уровень срабатывания равен 6.

(c) Угол с биссектрисой.

$\forall_{ABCDp}$(биссектриса($BACD$) $\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(луч(AC)) & опр(луч(AD)) & опр(p))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Не рассматриваются вписанные окружности, внешние и внутренние касательные, а также внешнее либо внутреннее касание окружностей. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(B набор(400 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (400,400) точек A, B. Указатель "опр(p вход(дробь(умножение(2 пи)7) дробь(пи 5)дробь(умножение 9 пи)10))" определяет входной параметр p - величину угла, инициируемую значением $2\pi/7$ и изменемую от $\pi/5$ до $9\pi/10$. Указатель "опр(луч(A B)набор(1 0))" задает направляющий вектор луча AB. Хотя этот вектор уже определен по точкам A, B, дополнительная информация в структуре данных схемы вычислений может упростить выкладки. Указатель "опр(луч(A C)оругол(луч(A B)p))" определяет проведение луча AC. Наконец, указатель "опр(луч(A D)биссектриса(луч(A C)луч(A B)))" определяет направление биссектрисы. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Известная величина угла.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \rightarrow$ опр(B) & опр(C) & опр(луч(BA)))

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a константное. В задаче не рассматриваются треугольники, параллелограммы, трапеции и прямоугольники. Не рассматриваются также окружности, не имеющие своим центром точку B и не проходящие через эту точку. Не рассматривается окружность с центром A либо C, проходящая через точку B. Указатели "опр(B набор(200 500))" и "опр(C набор(350 500))" определяют фиксированные координаты (200,500) и (350,500) точек B, C. Указатель "опр(луч(B C)набор(1 0))" фиксирует направление луча BC, а указатель "опр(луч(B A)оругол(луч(B C)a))" - направление луча BA. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Угол.

$\forall_{ABCap}(a \in$ Угол$(ABC) \to$ опр(A) & опр(B) & опр(луч(BC)) & опр(a))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатели "опр(B набор(200 400))" и "опр(A набор(350 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (350,400) точек B, A. Указатель "опр(p вход(дробь(умножение(2 пи)7)дробь(пи 10)дробь(умножение(9 пи)10)))" определяет начальное значение и диапазон изменений варьируемого параметра p, равного величине угла. Указатели "опр(луч(B A)набор(1 0))" и "опр(луч(B C)оругол(луч(B A)p))" определяют направления лучей BA и BC. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCap}(\angle(ABC) = a \to$ опр(A) & опр(B) & опр(луч(BC)) & опр(a))

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных, но неконстантное. Указатели "опр$(\ldots)$ те же, что в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 6.

(f) Пара точек, определяющих прямую.

$\forall_{AB}(C \in$ прямая$(AB) \to$ опр(A) & опр(луч(AB)))

Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче не рассматриваются окружности. Указатель "опр(A набор(200 400))" фиксирует координаты точки A, а указатель "опр(луч(A B)набор(1 0))"задает направление луча AB. Уровень срабатывания равен 6.

(g) Пара перпендикулярных прямых.

$\forall_{ABC}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \to$ опр(A) & опр(C) & опр(направл(A, B)))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Число рассматриваемых в задаче прямых, параллельных прямой AB, не меньше числа таких прямых для прямой AC. Других посылок с заголовком "перпендикулярно" нет. Прямоугольники в задаче не рассматриваются. Указатели "опр(A набор(200 600))" и "опр(C набор(300 600))" определяют фиксированные координаты (200,600) и (300,600) точек A, C. Указатель "опр(луч(A B)набор(0 1))" определяет направление луча AB. Уровень срабатывания равен 4.

(h) Треугольник

i. Общий случай.

$\forall_{ABCpq}(\triangle(ABC) \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(p) & опр(q))

Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче не рассматриваются правильные многоугольники. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(350 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (350,400) точек A, C. Указатели "опр(p вход(230 10 520))" и "опр(q вход(300 100 380))" определяют начальные значения и диапазоны изменения варьируемых параметров p, q - координат вершины B. Наконец, указатель "опр(B набор(p q))" определяет вершину B. Уровень срабатывания равен 4.

ii. Известны отношения двух пар углов.

$\forall_{ABCabnpqrs}(\triangle(ABC)$ & $p\angle(ABC) = q\angle(ACB)$ & $r\angle(ACB) = s\angle(BAC)$ & $n = ps + pr + qs$ & $a = ps\pi/n$ & $b = pr\pi/n \to$ опр(A) & опр(C) & опр(луч(AB)) & опр(луч(CB)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - обрабатываются пакетными синтезаторами, три последних - выделены указателем "выч", т.е. обрабатываются при помощи вычислений в формате "с плавающей запятой". Переменные p, q, r, s идентифицируются с константными выражениями. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(400 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (400,400) точек A, C. Указатели "опр(луч(A B)оругол(луч(A C)b))", "опр(луч(C B)оругол(луч(A C)минус(a)))" и "опр(луч(A C)набор(1 0))" определяют направления лучей AB, CB и AC. Уровень срабатывания равен 1.

iii. Известно отношение двух углов.
$\forall_{ABCapq}(\triangle(ABC)$ & $p\angle(BAC) = q\angle(ACB) \rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр(луч(AB)) & опр(луч(CB)) & опр(a) & опр(b))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором. Переменные p, q идентифицируются с константными выражениями. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(400 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (400,400) точек A, C. Указатель "опр(a вход(дробь(умножение (пи q) умножение(2 плюс(p q))) 0.1 дробь(умножение(9 пи q) умножение(10 плюс(p q)))))" определяет начальное значение и диапазон изменений варьируемого параметра a, равного величине ориентированного угла BAC. Указатель "опр(b умножение(a минус(дробь(pq)))" определяет значение параметра b, равного величине ориентированного угла BCA. Указатели "опр(луч(A C)набор(1 0))", "опр(луч(A B)оругол(луч(A C)a))", "опр(луч(C B)оругол(луч(C A)b))"определяют направления лучей AC, AB и CB. Дополнительно введен указатель "опр(луч(C A)набор(минус(1)0))", определяющий направление луча CA. Уровень срабатывания равен 3.

iv. Известны угол и отношение прилегающих сторон.
$\forall_{ABCapq}(\triangle(ABC)$ & $\angle(BAC) = a$ & $pl(AB) = ql(AC) \rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр(луч(AB)) & опр(B))
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения a, p, q константные. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(400 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (400,400) точек A, C. Указатели "опр(луч(A C)набор(1 0))", "опр(луч(A B)оругол(луч(A C)a))" определяют направления лучей AC и AB. Указатель "опр(B точкалуча(луч(A B)дробь(умножение(200 q)p)))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 2.

v. Известен угол.
$\forall_{ABCa}(\triangle(ABC)$ & $\angle(BAC) = a \rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр(B) & опр(p))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормугол". Выражение a константное. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(400 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (400,400) точек A, C. Указатель "опр(p вход(110 20 300))" определяет начальное значение и диапазон изменения варьируемого параметра p, равного расстоянию AB. Указатели "опр(луч(A C)набор(1 0))", "опр(луч(A B)оругол(луч(A C)a))" определяют направления лучей AC и AB. Уровень срабатывания приема

равен 3.

vi. Известны два угла.
$\forall_{ABC}(\triangle(ABC)\ \&\ \angle(BAC)=a\ \&\ \angle(BCA)=b \rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр(луч(AB)) & опр(луч(CB)))
Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b константные. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(400 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (400,400) точек A, C. Указатели "опр(луч(A C)набор(1 0))", "опр(луч(A B)оругол(луч(A C)a))", "опр(луч(C B)оругол(луч(C A)минус(b)))"определяют направления лучей AC, AB и CB. Дополнительно введен указатель "опр(луч(C A)набор(минус(1)0))", определяющий направление луча CA. Уровень срабатывания равен 2.

vii. Известно отношение сторон.
$\forall_{ABCmnpqrs}(\triangle(ABC)\ \&\ pl(AB)=ql(BC)\ \&\ rl(BC)=sl(AC)\ \&$
$0\le s-r\ \&\ 0\le p-q\ \&\ m=1+q^2/p^2-r^2/s^2\ \&\ n=\sqrt{4q^2/p^2-m^2}\rightarrow$ опр(B) & опр(C) & опр(A))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - обрабатываются пакетными синтезаторами. Выражения p, q, r, s константные. Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, шестой и седьмой - выделены указателем "выч". Указатели "опр(B набор(200 800))" и "опр(C набор(400 800))" определяют фиксированные координаты (200,800) и (400,800) точек B, C. Указатель "опр(A набор(умножение(100 плюс(n 2)) плюс(800 минус(умножение(100 n)))))" определяет координаты точки A. Уровень срабатывания равен 1.

viii. Равнобедренный треугольник.

A. Общий случай.
$\forall_{ABCp}(\triangle(ABC)\ \&\ l(AB)=l(BC)\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(p))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(300 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (300,400) точек A, C. Указатель "опр(p вход(270 100 380))" определяет начальное значение и диапазон изменения варьируемого параметра p, равного ординате точки B. Указатель "опр(B набор(250 p))" определяет точку B. Уровень срабатывания равен 1.

B. Известно отношение боковой стороны и основания.
$\forall_{ABCmpq}(\triangle(ABC)\ \&\ l(AB)=l(BC)\ \&\ pl(AB)=ql(AC)\ \&$
$m=4q^2-p^2\ \&\ 0\le m\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Четвертый антецедент выделен указателем "выч", пятый - указателем "программа". Выражения p, q константные. Не усматривается равенство расстояний AB и AC. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(C набор(400 400))" определяют фиксированные координаты (200,400) и (400,400) точек A, C. Указатель "опр(B набор(300 плюс(400 минус(дробь(умножение(100 степень(m дробь(1 2)))p)))))" определяет точку B. Уровень срабаты-

вания равен 0.

C. Известный угол при вершине.
$\forall_{ABCa}(\triangle(ABC)$ & $l(AB) = l(BC)$ & $\angle(ABC) = a \to$ опр(A) & опр(B) & опр$(C))$
Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Выражение a константное и отлично от $\pi/2$. Не усматривается равенство расстояний AB и AC. Указатели "опр(A набор(200 600))" и "опр(C набор(400 600))" определяют фиксированные координаты (200,600) и (400,600) точек A, C. Указатель "опр(B набор(300 плюс(600 минус(умножение(100 тангенс(плюс(дробь(пи 2)минус(дробь(a 2)))))))))" определяет точку B. Уровень срабатывания равен 0.

D. Известный угол при основании.
$\forall_{ABCa}(\triangle(ABC)$ & $l(AB) = l(BC)$ & $\angle(BAC) = a \to$ опр(A) & опр(B) & опр$(C))$
Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Выражение a константное. Не усматривается равенство расстояний AB и AC. Указатели "опр(A набор(200 600))" и "опр(C набор(400 600))" определяют фиксированные координаты (200,600) и (400,600) точек A, C. Указатель "опр(B набор(300 плюс(600 минус(умножение(100 тангенс(a))))))" определяет точку B. Уровень срабатывания равен 0.

E. Равносторонний треугольник.
$\forall_{ABC}(\triangle(ABC)$ & $l(AB) = l(BC)$ & $l(AC) = l(BC) \to$ опр(A) & опр(B) & опр$(C))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". В задаче не рассматриваются трапеции. Указатели "опр(A набор(200 400))", "опр(C набор(300 400))" и "опр(B набор(250 плюс(400 минус(умножение(50 степень(3 дробь(1 2)))))))" определяют положение точек A, C, B.

ix. Прямоугольный треугольник.

A. Общий случай.
$\forall_{ABC}(\triangle(ABC)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр$(p))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(C набор(370 800))" определяют координаты точек A, C. Указатель "опр(p вход(700 780 400))" определяет начальное значение и диапазон изменения варьируемого параметра p, равного ординате точки B. Указатель "опр(B набор(200 p))" определяет точку B. Уровень срабатывания равен 2.

B. Равнобедренный прямоугольный треугольник.
$\forall_{ABC}(\triangle(ABC)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $l(AB) = l(AC) \to$ опр(A) & опр(B) & опр$(C))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Указатели "опр(A набор(200 800))", "опр(C набор(320 800))" и "опр(B набор(200 680))" определяют положение точек A, C, B. Уровень срабатывания равен 0.

C. Известно отношение длин катета и гипотенузы.
$\forall_{ABCpqr}(\triangle(ABC)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $pl(AB) = ql(BC)$ & $r = \sqrt{p^2 - q^2} \to$ опр(A) & опр(B) & опр$(C))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Последний антецедент выделен указателем "выч". Выражения p, q константные. Указатели "опр(A набор(200 800))", "опр(C набор(400 800))" и "опр(B набор(200 плюс(800 минус(дробь(умножение(200 q)r)))))" определяют положение точек A, C, B. Уровень срабатывания равен 0.

(i) Трапеция

i. Общий случай.
$\forall_{ABCD}$(трапеция$(ABCD) \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(a) & опр(p) & опр$(h))$
Антецедент идентифицируется с посылкой. Не усматривается равенство расстояний AB и CD. Не рассматривается вписанная в трапецию $ABCD$ окружность. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(400 800))" определяют положение концов нижнего основания трапеции. Указатели "опр(a вход(0.3 0 1))", "опр(p вход(110 15 180))" и "опр(h вход(80 20 700))" определяют начальные значения и диапазоны изменения варьируемых параметров трапеции. Наконец, указатель "опр(B C трапеция(p h a))" определяет положение концов верхнего основания трапеции. Уровень срабатывания равен 3.

ii. Известны углы при основании.
$\forall_{ABCDabmpqr}$(трапеция$(ABCD)$ & $\angle(BAD) = a$ & $\angle(CDA) = b$ & $m = \operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b$ & $r = 120/m$ & $q = \min(r, 100) \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр$(p))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "выч", последний антецедент - указателем "программа". Выражения a, b константные. В задаче не рассматривается окружность, вписанная в трапецию $ABCD$. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(400 800))" определяют положение концов нижнего основания трапеции. Указатель "опр(p вход(q 20 дробь(умножение(3 r)2)))" определяет начальное значение и диапазон изменений варьируемого параметра - высоты трапеции p. Наконец, указатели "опр(B левыйкрай(A котангенс(a)p))" и "опр(C правыйкрай(A котангенс(b)p))" определяют положение концов верхнего основания. Уровень срабатывания равен 1.

iii. Известны отношения длин сторон.
$\forall_{ABCDabchmnpqrs}$(трапеция$(ABCD)$ & $pl(AB) = ql(CD)$ & $rl(AB) = sl(AD)$ & $ml(BC) = nl(AD)$ & $a = 200s/r$ & $b = 200n/m$ & $c = 200ps/(qr)$ & $\neg(200 - b = 0)$ & $h = \sqrt{(a+b+c-200)(a+b-c-200)(a+c-b-200)(b+c-a-200)} : (2(200 - b)) \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр$(D))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой; второй, третий и четвертый - обрабатываются пакетными синтезаторами. Антецеденты с номерами 5,6,7,9 выделены указателем "выч", восьмой антеце-

дент - указателем "программа". Выражения p, q, r, s, m, n константные. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(400 800))" определяют положение концов нижнего основания трапеции, а указатели "опр(B набор(плюс(200 степень(плюс(степень(a 2)минус(степень(h 2)))дробь(1 2)))плюс(800 минус(h))))" и "опр(C набор(плюс(400 минус(степень(плюс(степень(c 2)минус(степень(h 2)))дробь(1 2))))плюс(800 минус(h))))" - положение концов верхнего основания. Уровень срабатывания равен 0.

iv. Трапеция общего вида.
$\forall_{ABCD}$(Трапеция($ABCD$) $\to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(a) & опр(p) & опр(h))
Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(400 800))" определяют положение концов нижнего основания трапеции. Указатели "опр(a вход(30 минус(150) 200))", "опр(p вход(110 15 180))" и "опр(h вход(80 20 700))" определяют начальные значения и диапазоны изменения варьируемых параметров трапеции. Наконец, указатель "опр(B C Трапеция(p h a))" определяет положение концов верхнего основания трапеции. Уровень срабатывания равен 3.

v. Известен угол при основании.
$\forall_{ABCDap}$(трапеция($ABCD$) & $\angle(BAD) = a \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(b) & опр(p))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение a константное. Не усматривается, что трапеция равнобедренная. В задаче не рассматривается вписанная в эту трапецию окружность. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(400 800))" определяют положение концов нижнего основания трапеции. Указатели "опр(b вход(дробь(умножение(3 пи)10)0,1 дробь(пи 2)))" и "опр(p вход(110 20 180))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров трапеции. Наконец, указатель "опр(B C углы(a b p))" определяет положение концов верхнего основания. Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{ABCDap}$(трапеция($ABCD$) & $\angle(CDA) = a \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(b) & опр(p))
Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(B C углы(a b p))".

vi. Равнобедренная трапеция.
$\forall_{ABCDph}$(трапеция($ABCD$) & $l(AB) = l(CD) \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(p) & опр(h))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(400 800))" определяют положение концов нижнего основания трапеции. Указатели "опр(p вход(110 15 180))" и "опр(h вход(80 15 700))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров трапеции. Наконец, указатель "опр(B C трапеция(p h 0,5))" определяет положение концов верхнего основания. Уровень срабатывания равен 2.

vii. Описанная трапеция.

$\forall_{ABCDEFab}$(трапеция($ABCD$) & окружность(EF) вписана в фигура($ABCD$) $\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр() & опр(D) & опр(a) & опр(b))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатели "опр(A набор(200 400))" и "опр(D набор(400 400))" определяют положение концов нижнего основания трапеции. Указатели "опр(a вход(дробь(пи 3) дробь(пи 10) дробь(пи 2)))" и "опр(b вход(дробь(пи 4) дробь(пи 10) дробь(пи 2)))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров трапеции. Наконец, указатель "опр(B C описана(a b))" определяет положение концов верхнего основания. Уровень срабатывания равен 2.

(j) Параллелограмм.

$\forall_{ABCDab}$(параллелограмм($ABCD$) $\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(a) & опр(b))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(350 800))" определяют положение концов нижней стороны параллелограмма. Указатели "опр(a вход(70 минус(400)400))" и "опр(b вход(100 20 500))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров параллелограмма. Указатель "опр(B C параллелограмм (a b))" определяе положение концов верхней стороны параллелограмма. Уровень срабатывания равен 3.

(k) Ромб.

$\forall_{ABCDp}$(ромб($ABCD$) $\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(p))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатели "опр(A набор(200 700))" и "опр(набор(400 700))" определяют положение левой и правой вершин ромба. Указатель "опр(p вход(50 20 400))" определяет начальное значение и диапазон изменения параметра p - половины длины вертикальной диагонали. Указатель "опр(B D ромб(p))" определяет положение верхней и нижней вершин ромба. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Прямоугольник.

$\forall_{ABCDpq}$(прямоугольник($ABCD$) & $pl(AB) = ql(BC)$ & $m = 200q/p$ $\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором, третий - выделен указателем "выч". Выражения p, q константные. Указатели "опр(A набор(200 900))", "опр(B набор(200 плюс(900 минус(m))))", "опр(C набор(400 плюс(900 минус(m))))", "опр(D набор(400 900))"определяют положение вершин прямоугольника. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDp}$(прямоугольник($ABCD$) $\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(p))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(350 800))" определяют положение концов нижней стороны прямоугольника. Указатель "опр(p вход(700 780 400))"определяет начальное значение и диапазон изменения варьируемого параметра p - ординаты верхней стороны. Указатели "опр(B набор(200 p))" и "опр(C набор(350 p))" определяют положение концов верхней стороны прямоугольника. Уровень срабатывания равен 4.

(m) Квадрат.

$\forall_{ABCD}$(квадрат$(ABCD) \rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Если в задаче рассматривается треугольник, ни одна из вершин которого не является внутренней точкой стороны квадрата $ABCD$, причем не рассматриваются окружности, то прием блокируется. Указатели "опр(A набор(300 800))", "опр(B набор(300 650))", "опр(C набор(450 650))" и "опр(D набор(450 800))" определяют положение вершин квадрата. Уровень срабатывания равен 0.

(n) Выпуклый четырехугольник.

i. Общий случай.

$\forall_{ABCDabcd}$(четырехугольник$(ABCD) \rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(a) & опр(b) & опр(c) & опр(d))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Не усматриваетс параллельность противоположных сторон. Ни для одного из углов четырехугольника не известно его константное значение. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(360 800))" определяют положение вершин A и D. Указатели "опр(a вход(230 50 300))", "опр(b вход(720 740 500))", "опр(c вход(50 20 150))" и "опр(d вход(30 5 150))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров четырехугольника. Указатели "опр(B набор(a b))" и "опр(C четырехугольник(a b c d))" определяют положение вершин B и C. Уровень срабатывания равен 3.

ii. Параллельные противоположные стороны.

$\forall_{ABCD}$(четырехугольник$(ABCD)$ & прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD) \rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(a) & опр(b) & опр(c))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(360 800))" определяют положение вершин A и D. Указатели "опр(a вход(120 8 300))", "опр(b вход(80 20 200))" и "опр(c вход(30 минус(100) 100))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров четырехугольника. Указатель "опр(B C Трапеция(a b c))" определяет положение вершин B и C. Уровень срабатывания равен 3.

iii. Известный угол.

$\forall_{ABCDabcd}$(четырехугольник$(ABCD)$ & $\angle(BAD) = a \rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(b) & опр(c) & опр(d) & опр(e) & опр(f))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение a константное. Не усматриваются ни параллельность противоположных сторон четырехугольника, ни равенство сторон AB и CD. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(D набор(360 800))" определяют положение вершин A и D. Указатели "опр(b вход(100 30 300))", "опр(c вход(50 20 150))" и "опр(d вход(30 5 150))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров четырехугольника. Указатель "опр(e f синус(200 800 a b))" определяет пару координат вершины B, а указатель "опр(B набор(e f)) определяет саму вершину B. Указатель "опр(C четырехугольник(e f c d))" определяет вершину C. Уровень срабатывания равен 3.

iv. Описанный четырехугольник с известным углом.
$\forall_{ABCDabc}$(четырехугольник($ABCD$) & $\angle(BAD) = a$ & окружность(EF) описана около фигура($ABCD$) $\rightarrow$ опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(b) & опр(c))
Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение a константное. Не усматриваются ни параллельность противоположных сторон, ни равенство сторон AB и CD. Указатель "опр(A набор(200 400))" определяет положение вершины A. Указатели "опр(b вход(минус(дробь (пи 3))минус(дробь(умножение(4 пи)5))дробь(умножение(3 пи)4)))" и "опр(c вход(0.4 0.1 0.9))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров четырехугольника. Указатель "опр(D B C фигуры(a b c))" определяет положение вершин D, B, C. Уровень срабатывания равен 2.

(o) Окружность.

$\forall_{AB}$(актив(окружность(AB)) $\rightarrow$ опр(A) & опр(B))

Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче не рассматривается описанная окружность, отличная от окружности AB. Если окружностей несколько, то предпочтение отдается той окружности AB, на которой выделена точка, отличная от точки B. Указатели "опр(A набор(400 900))" и "опр(B набор(500 800))" определяют положение точек A, B. Уровень срабатывания равен 6.

(p) Две изолированные окружности.

$\forall_{ABCDmnpq}$(актив(окружность(AB)) & актив(окружность(CD)) & $pl(AB) = ql(CD)$ & $m = 150q/(p+q)$ & $n = 150p/(p+q)$ $\rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Последние два антецедента выделены указателем "выч". Выражения p, q константные. Точки A, C различны. В задаче не рассматриваются треугольники. Не выделена общая точка окружностей AB и CD, и не указано, что эти окружности касаются друг друга. Не рассматривается третья окружность. Выделенные в задаче хорды одной окружности не пересекаются по выделенным точкам с другой окружностью. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(C набор(400 800))" определяют положение центров A и C. Указатели "опр(фикс(расстояние (AB))m)" и "опр(фикс(расстояние(CD))n)" определяют радиусы окружностей. Символ "фикс" здесь введен, чтобы терм "расстояние(...)" не был заменен на результат обработки нормализатором "нормрасстояние". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}$(актив(окружность(AB)) & актив(окружность(CD)) $\rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Точки A, C различны. В задаче не рассматриваются треугольники. Не выделена общая точка окружностей AB и CD, и не указано, что эти окружности касаются друг друга. Не усматривается пропорциональность радиусов с константными коэффициентами. Центр одной окружности не лежит на другой. Не рассматривается третья окружность. Выделенные в задаче хорды одной окружности не пересекаются по выделенным точкам с другой окружностью. Указатели "опр(A набор(200 800))" и "опр(C набор(400 800))" определяют положение центров A и C. Указатели "опр(фикс(расстояние(AB))60)" и "опр(фикс(расстояние(CD))80)" определяют радиусы окружностей. Уровень срабатывания равен 5.

(q) Окружность с известным центральным углом.

$\forall_{ABCD}$(актив(окружность(AB)) & $B \in$ окружность(AD) &
$C \in$ окружность(AD) & $\angle(BAC) = p \to$ опр(A) & опр(B) & опр(C))

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - выделены указателем "усм". Выражение p константное. Указатели "опр(A набор(300 800))", "опр(B набор(плюс(300 минус(умножение(100 синус(дробь(p 2))))) плюс(800 минус(умножение(100 косинус(дробь(p 2)))))))", "опр(C набор(плюс(300 умножение(100 синус(дробь(p 2)))) плюс(800 минус(умножение(100 косинус(дробь(p 2)))))))" определяют положение точек A, B, C. Уровень срабатывания равен 4.

(r) Окружность, вписанная в угол.

$\forall_{ABCDEp}$(окружность(DE)вписана в Угол(ABC) & $\angle(ABC) = p \to$
опр(B) & опр(C) & опр(A) & опр(D))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение p константное. Не рассматривается вписанная в тот же угол окружность меньшего радиуса. В задаче не рассматриваются треугольники. Точки A, C не лежат на окружности DE. Точки A, B, C не лежат на рассматриваемой в задаче окружности. Указатели "опр(B набор(200 700))", "опр(C набор(400 700))", "опр(A набор(плюс(200 умножение(200 косинус(p)))плюс(700 минус(умножение(200 синус(p))))))", "опр(D набор(плюс(200 умножение(70 косинус(дробь(p 2)))) плюс(700 минус(умножение(70 синус(дробь(p 2)))))))" определяют положение точек B, C, A, D. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEp}$(окружность(DE)вписана в Угол(ABC) $\to$ опр(B) & опр(C) &
опр(A) & опр(D) & опр(p))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Не рассматривается вписанная в тот же угол окружность меньшего радиуса. В задаче не рассматриваются треугольники. Точки A, C не лежат на окружности DE. Точки A, B, C не лежат на рассматриваемой в задаче окружности. Не известна константная величина угла ABC. Ни пара точек A, B, ни пара точек B, C не являются концами хорды окружности, отличной от окружности DE. Указатели "опр(B набор(200 700))", "опр(C набор(400 700))" определяют положение точек B, C. Указатель "опр(p вход(дробь(умножение(2 пи)9) дробь(пи 7) дробь(умножение(3 пи)4)))" определяет начальное значение и диапазон изменения варьируемого параметра p. Наконец, указатель "опр(A D окр(p))" определяет положение точек A, D. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEa}$(окружность(DE)вписана в Угол(ABC) & $\angle(ABC) = a \to$
опр(B) & опр(C) & опр(A))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение a константное. Хотя бы одна из точек A, C лежит на окружности DE. Указатели "опр(B набор(200 700))", "опр(C набор(400 700))" определяют положение точек B, C. Указатель "опр(A набор(плюс(200 умножение(200 косинус(a))) плюс(700 минус(умножение (200 синус(a))))))" определяет положение точки A. Уровень срабатывания равен 4.

(s) Две касающиеся внешним образом окружности.

$\forall_{ABCDpqrs}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & $pl(AB) = ql(CD)$ & $r = 200p/(p+q)$ & $s = 200 - r \rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором, третий - выделен указателем "выч". Последний антецедент выделен указателем "программа". Выражения p, q константные. В задаче не рассматриваются треугольники, параллелограммы, выпуклые четырехугольники общего вида, а также вписанные окружности. Указатели "опр(A набор(200 800))", "опр(C набор(400 800))" определяют положение точек A, C. Указатель "опр(фикс(расстояние(AB))s)" определяет радиус окружности AB, а указатель "опр(фикс(расстояние(CD)) r)" - радиус окружности CD. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDa}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) $\rightarrow$ опр(A) & опр(C) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) & опр(a))

Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче не рассматриваются треугольники. Указатели "опр(A набор(200 800))", "опр(C набор(400 800))" определяют положение точек A, C. Указатель "опр(a вход(70 20 180))" определяет начальное значение и диапазон изменения варьируемого параметра a - радиуса окружности AB. Указатели "опр(расстояние(AB)a)", "опр(расстояние(CD)вычитание(200 a)))" определяют радиусы окружностей. Уровень срабатывания равен 5.

(t) Две пересекающиеся окружности.

$\forall_{ABCDpq}$(актив(окружность(AB)) & актив(окружность(CD)) $\rightarrow$ опр(p) & опр(q) & опр(A) & опр($l(AB)$) & опр(C) & опр($l(CD)$))

Антецеденты идентифицируются с посылками. В задаче рассматривается общая точка окружностей AB и CD, причем не усматривается, что центры окружностей лежат по одну сторону от их общей хорды. Не указано, что окружности AB, CD касаются. Их центры различны. Не рассматривается третья окружность. Кроме того, в задае не рассматриваются треугольники. Указатели "опр(A набор(200 400))", "опр(C набор(320 400))" определяют положение точек A, C. Указатели "опр(p вход(40 20 100))" и "опр(q вход(60 20 250))" определяют начальные значения и диапазоны изменения варьируемых параметров p, q. Указатель "опр(расстояние(AB) расстояние(CD) пересекаются(p q))" определяет радиусы окружностей. Уровень срабатывания равен 5.

2. Выбор выделяемых на чертеже отрезков и окружностей. В этом подразделе собраны приемы, указывающие, какие отрезки и окружности будут прорисовываться на чертеже после того, как фиксированы положения точек чертежа и численные параметры. Для указания на прорисовку отрезка вводится комментарий (См отрезок(AB)), для указания на прорисовку окружности - комментарий (См окружность(AB)). В качестве консеквента теоремы приема используется логическая константа "истина", т.е. никаких следствий прием фактически не выводит.

(a) Принадлежность отрезку.

$\forall_{ABC}(C \in$ отрезок$(AB) \to$ истина$)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Не введены комментарии, указывающие прорисовку отрезков AD, BD для какой-либо точки D. Вводится комментарий (См отрезок(AB)). Уровень срабатывания равен 0.

(b) Сторона угла.

$\forall_{ABC}($актив$(\angle(ABC)) \to$ истина$)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Вводится комментарий (См отрезок(AB)). По умолчанию, при идентификации игнорируется порядок сторон угла. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCDE}($окружность(AB)вписана в Угол$(CDE) \to$ истина$)$

Вводится комментарий (См отрезок(CD)). Уровень срабатывания равен 0.

(c) Выделенное расстояние.

$\forall_{AB}($актив$(l(AB)) \to$ истина$)$

Вводится комментарий (См отрезок(AB)). Уровень срабатывания равен 0.

(d) Прямая.

$\forall_{AB}($актив$($прямая$(AB)) \to$ истина$)$

Аналогично предудущему.

(e) Последовательные вершины рассматриваемого многоугольника.

$\forall_{ABCin}($актив$(S($фигура$(A)))$ & $n = l(A)$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $B = A(i)$ & $C = A(i(\mathrm{mod}\ n) + 1) \to$ истина$)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "программа". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Выражение A имеет заголовок "набор". Вводится комментарий (См отрезок (BC)). Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCDEin}($окружность(DE)вписана в фигура(A) & $n = l(A)$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $B = A(i)$ & $C = A(i(\mathrm{mod}\ n) + 1) \to$ истина$)$

$\forall_{ABCDEin}($окружность(DE)описана около фигура(A) & $n = l(A)$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $B = A(i)$ & $C = A(i(\mathrm{mod}\ n) + 1) \to$ истина$)$

Аналогично предыдущему.

(f) Окружность.

$\forall_{AB}($актив$($окружность$(AB)) \to$ истина$)$

Вводится комментарий (См окружность(AB)). Уровень срабатывания равен 0.

3. Вычисление параметров чертежа.

(a) Определение общей точки двух прямых.

$\forall_{ABCDE}(E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & опр(A) & опр(C) & опр$($направл$(A, B))$ & опр$($направл$(C, D))$ & $E -$ точка $\to$ опр$(E))$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первый и второй - выделены указателем "усм". Антецеденты с третьего по шестой выделены указателем "чертеж". Они идентифицируются с помощью посылок "опр(...)" внутренней задачи анализатора, а также с помощью комментария (чертеж ...) к внешней задаче анализатора. Например, наличие в последнем комментарии значения направляющего вектора луча может быть использовано для определения направляющего вектора соответствующей прямой. Указатель "опр(E общаяточка(A направл(AB)C направл(CD)))" определяет положение общей точки E прямых AB, CD. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(опр(A) & опр(B) & опр(направл(A,C)) & опр(направл(B,C)) $\to$ опр(C))

Два последних антецедента идентифицируются с посылками, два первых - выделены указателем "чертеж". Обозначения точек A, B - две различные переменные. Указатель "опр(C общаяточка(A направл(AC)B направл(BC)))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(опр(A) & опр(B) & опр(луч(AC)) & опр(луч(BC)) & опр(направл(A,C)) & опр(направл(B,C)) $\to$ опр(C))

Первые четыре антецедент идентифицируются с посылками, два последних - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(C общаяточка(A направл(AC)B направл(BC)))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$($D \in$ прямая(AB) & опр(A) & опр(направл(A,B)) & опр(C) & опр(направл(C,D)) $\to$ опр(D))

Антецеденты с номерами 2,4,5 идентифицируются с посылками. Первый антецедент выделен указателем "усм", третий - указателем "чертеж". Точки A, C обозначены различными переменными. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Указатель "опр(D общаяточка(A направл(AB)C направл(CD)))" определяет положение точки D. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Расстояние.

i. Деление отрезка в заданном отношении.

$\forall_{ABCpq}$($C \in$ отрезок(AB) & $pl(AC) = ql(BC)$ & опр(A) & опр(B) $\to$ опр(C))

Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - идентифицируются с посылками. Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Выражения p, q константные. Указатель "опр(C делениеотрезка(A B дробь(q плюс(p q))))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCpq}$($C \in$ отрезок(AB) & $pl(AB) = ql(BC)$ & опр(A) & опр(B) $\to$ опр(C))

Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(C делениеотрезка (A B дробь(плюс(q минус(p))q)))".

$\forall_{ABCpq}$($C \in$ прямая(AB) & $l(AC) = l(BC)$ & опр(A) & опр(B) $\to$ опр(C))

Первый антецедент выделен указателем "усм", остальные - идентифицируются с посылками. Точка привязки выбрана во втором антецеденте. Указатель "опр(C делениеотрезка(A B 0.5))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 2.

ii. Определение противоположного конца отрезка по одному концу и внутренней точке, делящей отрезок в заданном отношении.

$\forall_{ABCabcdpq}(B \in$ отрезок(AC) & $pl(AB) = ql(BC)$ & опр(A) & опр$(B) \rightarrow$ опр$(C))$
Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - идентифицируются с посылками. Выражения p, q константные. Указатель "опр(C конецотрезка(A B дробь(p q)))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 3.
$\forall_{ABCabcdpq}(B \in$ отрезок(AC) & $pl(AB) = ql(AC)$ & опр(A) & опр$(B) \rightarrow$ опр$(C))$
Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(C конецотрезка (A B дробь(плюс(p минус(q))q)))".

iii. Определение точки на прямой по отношению ее расстояний до двух других точек.
$\forall_{ABCpq}(C \in$ прямая(AB) & $pl(AB) = ql(BC)$ & опр(B) & опр(A) & опр(направл$(B, A)) \rightarrow$ опр(C) & опр$(e))$
Первый антецедент выделен указателем "усм", пятый - указателем "чертеж". Остальные антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения p, q константные. Указатель "опр(e расстояние(A B дробь(p q)))" определяет расстояние BC. Указатель "опр(C расст(B направл(BA)e))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания приема равен 3.
$\forall_{ABCpq}(C \in$ прямая(AB) & $pl(AC) = ql(BC)$ & опр(A) & опр$(B) \rightarrow$ опр$(C))$
Первый антецедент выделен указателем "усм", остальные - идентифицируются с посылками. Выражения p, q константные. Указатель "опр(C усмделит(A B q p))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 3.
$\forall_{ABCaepq}(C \in$ прямая(AB) & $l(AB) = qa$ & $l(BC) = pa$ & опр(B) & опр(A) & опр(направл$(B, A)) \rightarrow$ опр(C) & опр$(e))$
Первый антецедент выделен указателем "усм", последний - указателем "чертеж". Остальные антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения p, q константные. Выражение a не содержит символа "расстояние". Указатель "опр(e расстояние(A B дробь(p q)))" определяет расстояние BC. Указатель "опр(C расст(B направл(BA)e))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 3.
$\forall_{ABCapq}(C \in$ прямая(AB) & $l(AC) = qa$ & $l(BC) = pa$ & опр(A) & опр$(B) \rightarrow$ опр$(C))$
Первый антецедент выделен указателем "усм", остальные - идентифицируются с посылками. Выражения p, q константные, выражение a не содержит символа "расстояние". Указатель "опр(C усмделит(A B q p))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 3.

iv. Определение точки на прямой, находящейся на заданном расстоянии от заданной точки.
$\forall_{ABCDE}($опр(A) & опр(направл$(A, C))$ & опр(D) & опр$(l(CD))$ & опр(E) & опр$(l(CE)) \rightarrow$ опр$(C))$
Первый, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "чертеж". Остальные антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "опр(C точкапривязки(D A направл(A C)E расстояние(CD) расстояние(CE)))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{BCDE}(E \in$ окружность(DC) & опр(E) & опр(направл(E,B)) & $B \in$ окружность(DC) & опр(D) & опр$(l(CD)) \to$ опр$(B))$
Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый и четвертый - выделены указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Переменные B, E различны. Указатель "опр(B длина(D E направл(EB)E расстояние(CD)))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{ABCDE}(C \in$ прямая(AB) & опр(A) & опр(направл(A,B)) & опр(D) & опр$(l(CD))$ & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ окружность(DC) & опр(E) & актив(окружность(DC)) $\to$ опр$(C))$
Последний антецедент идентифицируется с посылкой. Первый, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(C длина(D A направл(AB)E расстояние(CD)))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{ABCDE}(C \in$ прямая(AB) & опр(A) & опр(направл(A,B)) & опр(D) & опр$(l(CD))$ & $E \in$ прямая(AB) & $l(DE) = l(CD)$ & опр(E) & актив$(l(DE)) \to$ опр$(C))$
Аналогично предыдущему.
$\forall_{ABCD}(C \in$ прямая(AB) & опр(A) & опр(направл(A,B)) & опр(D) & опр$(l(CD)) \to$ опр$(C))$
Второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками. Перві антецедент выделен указателем "усм", третий и пятый - указателем "чертеж". Указатель "опр(C расстояния(D A направл(AB) расстояние(CD)))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{ABCD}($опр(A) & опр(направл(A,C)) & опр(D) & опр$(l(CD)) \to$ опр$(C))$
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "чертеж". A, D идентифицируются с переменными. Указатель "опр(C расстояния(D A направл(AC)расстояние(CD)))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 3.

v. Точка, для которой известны расстояния до двух других точек.
$\forall_{ABCpqrs}($актив$(l(AB))$ & актив$(l(BC))$ & актив$(l(AC))$ & $pl(AC) = ql(BC)$ & $rl(AC) = sl(AB)$ & $\neg(s = 0)$ & $\neg(r = 0)$ & $\neg(q = 0)$ & опр(A) & опр$(B) \to$ опр$(C))$
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм", четвертый и пятый - обрабатываются пакетными синтезаторами. Шестой, седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Два последних антецедента выделены указателем "чертеж". Выражения p, q, r, s константные. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Указатель "опр(C смрасстояние(A B p q r s))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 4.
$\forall_{ABC}($опр$(l(AB))$ & опр$(l(AC))$ & опр(B) & опр$(C) \to$ опр$(A))$
Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменные B, C различны. Указатель "опр(A Окружность(B C расстояние(AB) расстояние (AC)))" определяет положение точки A. Уровень срабатывания равен 4.

vi. Определение расстояния из соотношения пропорциональности.

$\forall_{ABCDapqrs}(l(AB) = pa/r \ \& \ l(CD) = qa/s \ \& \ \text{опр}(l(AB)) \to \text{опр}(l(CD)))$
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "чертеж". Выражения p, q, r, s константные. В задаче рассматривается окружность CD. Указатель "опр(расстояние(CD) умножение(дробь(умножение(qr)умножение(ps))расстояние(AB)))" определяет радиус этой окружности. Уровень срабатывания равен 2. На той же теореме создан еще две версии приема. В первой версии отброшено условие на окружность CD, но зато требуется, чтобы уже было определено направление луча CD и имелась посылка "опр(C)". Уровень срабатывания этой версии равен 4. Во второй версии условие на окружность отброшено, а новые условия не добавлены. Ее уровень срабатывания равен 6.

vii. Точка на прямой, отстоящая на заданное расстояние от другой прямой.
$\forall_{ABCDP}(\text{прямая}(PQ) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ Q \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{опр}(A) \ \& \ \text{опр}(\text{направл}(A, P)) \ \& \ \text{опр}(C) \ \& \ \text{опр}(\text{направл}(C, D)) \ \& \ \text{опр}(l(PQ)) \to \text{опр}(P))$
Первый, третий, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй антецедент выделен указателем "усм", шестой и седьмой - указателем "чертеж". Указатель "опр(P проекция(A направл(AP) C направл(CD) расстояние(PQ)))" определяет положение точки P. Уровень срабатывания равен 2.

viii. Точка на луче, находящаяся на заданном расстоянии от его начала.
$\forall_{AB}(\text{опр}(A) \ \& \ \text{опр}(\text{луч}(AB)) \ \& \ \text{опр}(l(AB)) \to \text{опр}(B))$
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(B точкалуча(A луч(AB) расстояние(AB)))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 1.

ix. Направляющий вектор для прямой, на которой лежат равноудаленные от концов отрезка точки.
$\forall_{ABCDE}(\text{актив}(\text{окружность}(CE)) \ \& \ B \in \text{окружность}(CE) \ \& \ A \in \text{окружность}(CE) \ \& \ \text{опр}(\text{направл}(A, B)) \ \& \ \text{опр}(A) \ \& \ \text{опр}(B) \to \text{опр}(D) \ \& \ \text{опр}(\text{направл}(D, C)))$
Первый и два последних антецедента идентифицируются с посылками. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", четвертый - указателем "чертеж". Переменные A, B различны. На прямой AB не выделена точка, равноудаленная от точек A, B. Пока не определено положение какой-либо точки, равноудаленной от точек A, B. На окружности CE выделена точка, отличная от точек A и B, положение которой уже определено. Точки A, B не являются вершинами многоугольника, около которого описана окружность CE. Указатель "опр(D делениеотрезка(A B 0.5))" определяет положение точки D, а указатель "опр(направл(DC)перпендикулярно(направл(AB)))" - направляющий вектор прямой DC. Уровень срабатывания равен 0. На этой теореме создана еще одна версия приема, в которой оставлены лишь требования различия точек A, B и отсутствия указания на то, что окружность CE описана около многоугольника с вершинами A, B. Уровень срабатывания этой версии равен 2.
$\forall_{ABCD}(l(AD) = l(BD) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ \text{опр}(A) \ \& \ \text{опр}(B) \ \&$

опр(направл(A, B)) & опр(D) $\rightarrow$ опр(направл(D, C)))
Второй антецедент выделен указателем "равно", третий и четвертый - идентифицируются с посылками. Первый антецедент выделен указателем "усм", пятый - указателем "чертеж". Положение точки C пока не определено. Указатель "опр(направл(DC) перпендикулярно(направл(AB)))" определяет направляющий вектор прямой DC. Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{ABCD}(l(AC) = l(BC)$ & опр(направл(A, B)) & опр(A) & опр(B) $\rightarrow$ опр(D) & опр(направл(D, C)))
Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные антецеденты - указателем "чертеж". Положение точки C пока не определено. На прямой AB не выделена точка, равноудаленная от точек A, B. Не определено положение какой-либо точки, равноудаленной от точек A, B. Указатель "опр(D делениеотрезка(A B 0.5))" определяет положение точки D, а указатель "опр(направл(DC) перпендикулярно(направл(AB)))" - направляющий вектор прямой DC. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Перпендикуляр.

i. Направление перпендикуляра к прямой.
$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(CD) & опр(направл(A, B)) $\rightarrow$ опр(направл(C, D)))
Первый антецедент выделен указателем "усм", причем точка привязки выбрана в нем. Второй антецедент выделен указателем "чертеж". Указатель "опр(направл(CD) перпендикулярно(направл(AB)))" определяет направляющий вектор прямой CD. Уровень срабатывания равен 1.

ii. Проведение перпендикуляра к заданной прямой из заданной точки.
$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & опр(A) & опр(C) & опр(направл(C, D)) $\rightarrow$ опр(B))
Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, первые два - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "чертеж". На прямой AB не выделена уже определенная точка, отличная от точек A, B. Указатель "опр(B перпендикуляр(A C направл(CD)))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 2.

iii. Геометрическое место точек, из которых отрезок виден под прямым углом.
$\forall_{ABCD}$(прямая(AC) $\perp$ прямая(BC) & опр(A) & опр(B) & опр$(l(AB))$ $\rightarrow$ опр(D) & опр$(l(CD))$)
Первый антецедент выделен указателем "усм", причем точка привязки выбрана в нем. Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Прием вводит новую переменную D - обозначение центра окружности, являющейся искомым геометрическим местом. Указатель "опр(D делениеотрезка(A B 0.5))" определяет положение точки D. Указатель "опр(расстояние(CD) умножение(расстояние(AB)дробь(1 2)))" определяет расстояние от точки C рассматриваемой окружности до ее центра D. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Угол

i. Направляющий вектор одной из сторон известного угла.
$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a$ & опр(B) & опр(луч$(BC)) \to$ опр(луч$(BA)))$
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "чертеж". Выражение a константное, отличное от $\pi/2$. Указатель "опр(луч(BA)угол(луч(BC)a))" определяет направляющий вектор луча BA. Уровень срабатывания равен 4.

ii. Направляющий вектор биссектрисы угла.
$\forall_{ABCD}$(биссектриса($ABCD$) & опр(луч(BA)) & опр(луч(BC)) $\to$ опр(луч(BD)))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(луч(BD) биссектриса(луч(BA)луч(BC)))" определяет направляющий вектор луча BD. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Направление прямой, параллельной данной.
$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & опр(направл(A, B)) $\to$ опр(направл(C, D)))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "чертеж". Ни для каких двух различных точек P, Q прямой CD не определен вектор PQ. Указатель "опр(направл(CD)равно(направл(AB)))" определяет направляющий вектор прямой CD. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Окружность.

i. Направляющий вектор для прямой, на которой лежит центр описанной окружности.
$\forall_{ABCDEFin}$(окружность(AB)описана около фигура(C) & $l(C) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $D = C(i)$ & $E = C(i(\mathrm{mod}\ n) + 1)$ & опр(D) & опр(E) & опр(направл(D, E)) $\to$ опр(F) & опр(направл(F, A)))
Первый, шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками. Второй, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий - указателем "программа". Последний антецедент выделен указателем "чертеж". Выражение C имеет заголовок "набор". Число посылок вида "опр(направл(XA))" не более 1. Переменные D, E различны. Указатель "опр(F делениеотрезка(D E 0.5))" определяет точку F, а указатель "опр(направл(FA) перпендикулярно(направл(DE)))" - направляющий вектор прямой FA. Уровень срабатывания равен 1.

ii. Направляющий вектор для прямой, на которой лежит центр вписанной окружности.
$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)вписана в фигура(ABC) & опр(луч(AB)) & опр(луч(AC)) $\to$ опр(луч(AD)))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "чертеж". Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Число посылок вида "опр(луч(XD))" не более одной. Указатель "опр(луч(AD) биссектриса(луч(AB)луч(AC)))" определяет направляющий вектор луча AD. Уровень срабатывания равен 1.

iii. Радиус окружности.

$\forall_{ABC}$(актив(окружность(BC)) & $A \in$ окружность(BC) & опр($l(AB)$) $\rightarrow$ опр($l(BC)$))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - указателем "чертеж". Указатель "опр(расстояние (BC) равно(расстояние(AB)))" определяет радиус окружности BC. Уровень срабатывания равен 0.

iv. Касательная.

A. Радиус окружности, касающейся заданной прямой и имеющей заданный центр.
$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) – касательная к окружность(CD) & опр(C) & опр(A) & опр(луч(AB)) $\rightarrow$ опр($l(CD)$))
Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "чертеж". Указатель "опр(расстояние(CD) расстдопрямой(C A луч(AB)))" определяет радиус окружности CD. Уровень срабатывания равен 1.

B. Направляющий вектор для касательной к окружности в ее заданной точке.
$\forall_{ABCD}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & $C \in$ окружность(AB) & опр(направл(A, C)) $\rightarrow$ опр(направл(C, D)))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - указателем "чертеж". Не существует двух выделенных на прямой CD различных точек, для которых уже определены координаты. Указатель "опр(направл(CD) перпендикулярно(направл(AC)))" определяет направляющий вектор прямой CD. Уровень срабатывания равен 2.

C. Центр окружности, касающейся заданной прямой и проходящей через заданную точку, если известна прямая, на которой лежит этот центр.
$\forall_{ABCDEF}$(прямая(AB) – касательная к окружность(EF) & $D \in$ окружность(EF) & опр(направл(C, E)) & опр(A) & опр(направл(A, B)) & опр(D) & опр(C) $\rightarrow$ опр(E) & опр($l(EF)$))
Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками. Второй антецедент выделен указателем "усм", остальные - указателем "чертеж". Не усматривается принадлежность точки D прямой AB. Указатель "опр(E расстояние(EF) касательная(A направл(AB C D направл(C E))))" определяет положение точки E и направляющий вектор прямой EF. Уровень срабатывания приема равен 2.

D. Точка касания окружности с прямой, проведенной из заданной точки.
$\forall_{ABCDE}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & опр(A) & опр(C) & опр($l(AB)$) $\rightarrow$ опр(E))
Первый антецедент, а также три последних идентифицируются с посылками. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм". На прямой CD не выделена отличная от C точка, положение которой уже определено. Указатель "опр(E точкаокружности(A расстояние(AB)C))" определяет положение точки E. Уровень сра-

батывания равен 2.

E. Точка касания окружности с прямой, имеющей заданное направление.
$\forall_{ABCEF}$(прямая(EF) – касательная к окружность(AB) & опр(A) & опр($l(AB)$) & опр(направл(E, F)) $\rightarrow$ опр(C) & опр(направл(C, F)))
Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - выделены указателем "чертеж". В задаче не выделена общая точка прямой EF и окружности AB. Не определено положение никакой точки прямой EF. Прием вводит в рассмотрение точку касания C. Указатель "опр(C параллель(A направл(EF) расстояние(AB)))" определяет положение точки C, а указатель "опр(направл(CF) равно(направл(EF)))" - направляющий вектор прямой CF. Фактически эти действия нужны только для доопределения положения прямой EF. Уровень срабатывания равен 3.

F. Общая внешняя касательная к двум окружностям.
$\forall_{ABCDEF}$(внешкасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & опр(A) & опр(C) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) $\rightarrow$ опр(E) & опр(F))
Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последние четыре антецедента выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(E F внешкасательная(A C расстояние(AB) расстояние(CD)))" определяет положение точек E, F. Уровень срабатывания равен 1.

G. Общая внутренняя касательная к двум окружностям.
$\forall_{ABCDEF}$(внутркасательная(прямая(EF), окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(CD) & опр(A) & опр(C) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) $\rightarrow$ опр(E) & опр(F))
Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(E F внутркасательная(A C расстояние(AB) расстояние(CD)))"

H. Направляющий вектор касательной к окружности, проведенной из заданной точки.
$\forall_{ABCD}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & опр(A) & опр($l(AB)$) & опр(C) & прямая(CE) – касательная к окружность(AB) & опр(направл(C, E)) $\rightarrow$ опр(направл(C, D)))
Третий и шестой антецеденты выделены указателем "чертеж", остальные - идентифицируются с посылками. Указатель "опр(направл(CD) линия(A C направл(CE) расстояние(AB)))" определяет направляющий вектор прямой CD. Уровень срабатывания равен 3.

v. Точка на окружности, для которой известен опирающийся на нее и на другую точку центральный угол.
$\forall_{ABCQpqr}$($A \in$ окружность(QC) & $B \in$ окружность(QC) & pдлина(дуга(QBA)) + qдлина(большаядуга(QBA)) = 0 & опр(Q) & опр(A) & $r = 2\pi p/(p-q) \rightarrow$ опр(B))
$\forall_{ABCQpqr}$($A \in$ окружность(QC) & $B \in$ окружность(QC) & pдлина(дуга(QAB)) + qдлина(большаядуга(QAB)) = 0 & опр(Q) & опр(A) & $r = 2\pi p/(p-q) \rightarrow$ опр(B))
Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - вы-

делены указателем "усм". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "чертеж", последний антецедент - указателем "выч". Выражения p, q константные. Переменные A, B различны. Указатель "опр(B уголмежду($Q\ A\ r$))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 2.

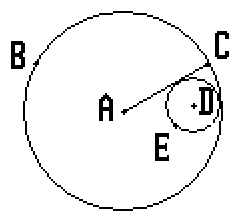
vi. Касание окружностей.

A. Две окружности, касающиеся внешним образом друг друга и касающиеся каждая двух сторон треугольника.

$\forall_{ABCDEFGMNPQabpq}$(внешкасаются(окружность(DE), окружность(FG)) & окружность(DE)вписана в Угол(MAP) & окружность(FG) вписана в Угол(NBQ) & точкалуча(A, C, M) & точкалуча(B, C, N) & точкалуча(A, B, P) & точкалуча(B, A, Q) & $pl(DE) = ql(FG)$ & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр($l(AC)$) & опр($l(BC)$) & опр($l(AB)$) $\rightarrow$ опр(D) & опр(F) & опр(a) & опр(b))

Первые три антецедента, а также антецеденты с девятого по одиннадцатый идентифицируются с посылками. Антецеденты с четвертого по седьмой выделены указателем "усм", восьмой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Три последних антецедента выделены указателем "чертеж". Выражения p, q константные. Указатели "опр(a нормугол(CAB))" и "опр(b нормугол(ABC))" определяют вспомогательные параметры a, b. Наконец, указатель "опр($D\ F$ двойнаядлина($A\ B\ C\ p\ q$ расстояние(AC) расстояние(BC) расстояние(AB)$a\ b$))" определяет положение точек D, F. Уровень срабатывания равен 2.

B. Центр окружности, касающейся внутренним образом другой окружности и касающейся заданного радиуса последней окружности, если известна прямая, на которой лежит этот центр.



$\forall_{ABCDE}$(внутркасаются(окружность(DE), окружность(AC)) & прямая(AC) – касательная к окружность(DE) & $C \in$ окружность(AB) & опр(A) & опр(C) & опр(направл(A, D)) & опр($l(AB)$) $\rightarrow$ опр(D) & опр($l(DE)$)))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(D расстояние(DE) сектор($A\ C$ направл(AD) расстояние(AB)))" определяет положение точки D. Уровень срабатывания равен 0.

C. Центр окружности, касающейся внешним образом двух данных окружностей и касающейся данной прямой.

$\forall_{ABCDEFGH}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(EF)) & прямая(GH) – касательная к окружность(AB) & опр(C) & опр(E)

& опр($l(CD)$) & опр($l(EF)$) & опр(G) & опр(направл(G, H)) $\rightarrow$ опр(A) & опр($l(AB)$)))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Переменные C, E различны. Указатель "опр(A расстояние(AB) Круг(C E G направл(GH) расстояние(CD) расстояние(EF)))" определяет положение центра окружности AB и ее радиус. Уровень срабатывания равен 2.

D. Центр окружности, касающейся внутренним образом другой окружности и касающейся заданной прямой, если известна прямая, на которой лежит этот центр.

$\forall_{ABCDEP}$(внутркасаются(окружность(DE), окружность(CP))
& $A \in$ окружность(CP) & $B \in$ окружность(CP) & прямая(AB) – касательная к окружность(DE) & опр(направл(A, D)) &
опр($l(CP)$) & опр(A) & опр(C) & опр(B) $\rightarrow$ опр(D))

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - выделены указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Переменные A, B различны. Указатель "опр(D сегмент(A B C направл(AD) расстояние (CP)))" определяет положение точки D. Уровень срабатывания равен 3.

E. Центр окружности, касающейся внутренним образом двух заданных окружностей, причем лежащий на заданной прямой.

$\forall_{ABCDEFGH}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)) &
внутркасаются(окружность(AB), окружность(EF)) &
$A \in$ прямая(GH) & опр(G) & опр(направл(G, H)) & опр(C) &
опр(E) & опр($l(CD)$) & опр($l(EF)$) $\rightarrow$ опр(A))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(A нормдуга(G направл(GH) C E расстояние(CD) расстояние(EF)))" определяет положение точки A. Уровень срабатывания равен 1.

F. Радиус окружности с заданным центром, касающейся другой окружности.

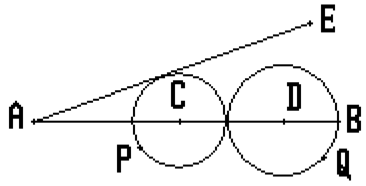
$\forall_{ABCD}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)) &
опр(C) & опр($l(AC)$) & опр($l(AB)$) $\rightarrow$ опр($l(CD)$)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(расстояние(CD) радиус(расстояние(AB) расстояние(AC)))" определяет расстояние CD. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) &
опр(C) & опр($l(AC)$) & опр($l(AB)$) $\rightarrow$ опр($l(CD)$)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(расстояние(CD) вычитание(расстояние(A) расстояние(AB)))" определяет расстояние CD. Уровень срабатывания равен 3.

G. Центр окружности, касающейся внешним образом другой окружности и касающейся заданной прямой, если известна прямая, на которой лежит этот центр.



$\forall_{ABCDEPQa}$(внешкасаются(окружность(CP), окружность(DQ)) & прямая(AE) – касательная к окружность(CP) & $C \in$ отрезок(AB) & $B \in$ окружность(DQ) & $D \in$ отрезок(AB) & опр(A) & опр(D) & опр($l(AB)$) & опр($l(DQ)$) & опр(E) $\rightarrow$ опр(C) & опр(a) & опр($l(CP)$))

Первые два антецедента, а также последний антецедент идентифицируются с посылками. Антецеденты с третьего по пятый выделены указателем "усм", остальные - указателем "чертеж". Указатель "опр(a нормугол(E A D))" определяет вспомогательный параметр a, указатель "опр(C расстояние(CP) углывершины(A D расстояние(DQ) расстояние(AB) a))" определяет положение вершины C и расстояние CP. Уровень срабатывания равен 2.

H. Центр окружности, вписанной в угол и касающейся внешним образом заданной окружности.

$\forall_{ABCDEFGg}$(внешкасаются(окружность(FG), окружность(DE)) & окружность(FG)вписана в Угол(BAC) & опр(A) & опр(направл(A, F)) & опр(D) & опр(B) & опр(C) & опр($l(DE)$) $\rightarrow$ опр(g) & опр(F))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(g нормугол(B A C))" определяет вспомогательный параметр g, указатель "опр(F Смугол(A направл(AF) D g расстояние(DE)))" определяет положение точки F. Уровень срабатывания равен 1.

I. Центр окружности, проходящей через заданную точку и касающейся другой окружности, если известна прямая, на которой лежит этот центр.

$\forall_{ABCD}$(внутркасаются(окружность(BE), окружность(CD)) & $A \in$ окружность(BE) & опр(A) & опр(направл(A, B)) & опр($l(CD)$) & опр(C) $\rightarrow$ опр(B))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(B периметр(A C направл(AB) расстояние(C D)))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 6.

vii. Определение центра окружности по концам диаметра.

$\forall_{ABCD}$($A \in$ окружность(CD) & $B \in$ окружность(CD) & $C \in$ отрезок(AB) & опр(A) & опр(B) $\rightarrow$ опр(C))

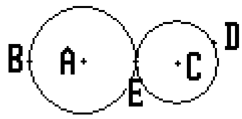
Первый, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "опр(C делениеотрезка(A B 0.5))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 1.

viii. Определение радиуса окружности, описанной около правильного многоугольника.

$\forall_{ABCDEin}$(правмногоугольник(A) & $l(A) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ &
$B = A(i)$ & $C = A(i(\mathrm{mod}\ n) + 1)$ & опр($l(BC)$) & окружность(DE) описана около фигура(A) $\rightarrow$ опр($l(DE)$))

Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками. Второй, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий - указателем "программа". Шестой антецедент выделен указателем "чертеж". Выражение A имеет заголовок "набор". Не усматривается точка окружности DE, для которой уже определено ее расстояние до центра. Указатель "опр(расстояние(DE) умножение(расстояние(BC)дробь(1 умножение(2 синус(дробь(пи n))))))" определяет расстояние DE. Уровень срабатывания равен 3.

ix. Окружность, касающаяся заданной окружности в заданной точке.



$\forall_{ABCDE}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) &
$E \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(CD) & опр(луч(CE)) $\rightarrow$ опр(луч(EA)))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм", четвертый - выделен указателем "чертеж". Указатель "опр(луч(EA) равно(луч(CE)))" определяет направляющий вектор луча EA. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Доопределение двух вершин квадрата.

$\forall_{ABCD}$(квадрат($ABCD$) & опр(A) & опр(D) $\rightarrow$ опр(B) & опр(C))

Антецеденты идентифицируются с посылками, причем допускаются циклические перестановки вершин квадрата. Указатель "опр(B C квадрат(A D))" определяет положение вершин B и C. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Центр квадрата.

$\forall_{ABCDE}$(квадрат($ABCD$) & центр(E, фигура($ABCD$)) & опр(A) &
опр(C) $\rightarrow$ опр(E))

Антецеденты идентифицируются с посылками; допускаются циклические перестановки вершин квадрата. Указатель "опр(E делениеотрезка(A C 0.5))" определяет положение точки E. Уровень срабатывания равен 0.

(i) Центр треугольника.

$\forall_($центр(D, фигура(ABC)) & опр(A) & опр(B) & опр(C) $\rightarrow$ опр(D))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "опр(D центр(A B C))" определяет положение точки D. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Вершина правильного многоугольника.

$\forall_{ABCDEFijn}$(правмногоугольник(A) & $l(A) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ &
$B = A(i)$ & $C = A(i(\mathrm{mod}\ n) + 1)$ & окружность(DE)описана около фигура(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & $j \in \{1, \ldots, n\}$ & $F = A(j)$ $\rightarrow$ опр(F))

Первый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками. Третий и десятый антецеденты выделены указателем "программа". Второй, четвертый, пятый и одиннадцатый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Наконец, антецеденты с седьмого по девятый выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(F правмногоугольник(B D C i j n))" определяет положение вершины F. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFijn}$(правмногоугольник(A) & $l(A) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $B = A(i)$ & окружность(DE)описана около фигура(A) & опр(B) & опр(D) & $C = A(i(\mathrm{mod}\ n) + 1) \to$ опр(C))

Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "программа". Второй, четвертый и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "чертеж". Не определ ено положение вершин многоугольника A, отличных от вершины B. Указатель "опр(C Синус(B D дробь(умножение(2 пи)n)))" определяет положение вершины C. Уровень срабатывания равен 1.

4. Произвольный выбор новых элементов чертежа.

   В процессе обработки посылок задачи может сложиться ситуация, когда новый элемент чертежа не определяется однозначно (или в конечном числе вариантов) по уже найденным элементам. Тогда используются приемы, добавляющие новый элемент A с помощью варьируемых параметров. Либо начальное значение параметра определяется явно - через указатель "опр(A вход($\ldots$))", либо задаются диапазон изменений параметра и оценка, штрафующая неудобные для визуализации положения точек - через указатель "опр(выбор(A p q)B)". Здесь $[p, q]$ - промежуток изменения параметра A; B - терм, определяющий оценку.

   (a) Точка на отрезке.

   $\forall_{ABCp}$($C \in$ отрезок(AB) & опр(A) & опр(B) $\to$ опр(C) & опр(p))

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Положение точки C пока не определено. Отсутствует посылка, указывающая на принадлежность точки C отличному от AB отрезку PQ, концы которого лежат на отрезке AB и отличны от точки C. Указатель "опр(выбор(p 0.1 0.9) точкапрямой(C терм(C) терм(прямая(AB))))" определяет выбор параметра p - отношения, в котором отрезок AB делится точкой C. Кроме того, подтерм "точкапрямой($\ldots$)" вводит новую оценку схемы вычислений, штрафующую плохие для визуализации выборы точки C. Указатель "опр(C делениеотрезка(A B p))" определяет положение точки C через параметр p. Заметим, что оценка "точкапрямой($\ldots$)" реагирует на значение параметра p лишь косвенным образом - через положение точки C. Созданы две версии данного приема, отличающиеся уровнем срабатывания. Если точка C упоминается в некоторой посылке вида "вписана($\ldots$)", то срабатывание имеет место на уровне 5, иначе - на уровне 6.

   (b) Направление луча угла.

   $\forall_{ABCp}$(актив($\angle(BAC)$) & опр(луч(AB)) $\to$ опр(луч(AC)) & опр(p))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "чертеж". Не усматривается константная величина угла BAC. Направляющий вектор луча AC пока не определен. Указатель "опр(p вход(

дробь(умножение(2 пи)5) дробь(пи 20) дробь(умножение(19 пи)20)))" определяет начальное значение и диапазон изменения варьируемого параметра p - величины угла BAC. Указатель "опр(луч(AC)угол(луч(AB)p))" определяет направление луча AC. Уровень срабатывания равен 9.

(c) Выбор направляющей точки луча.

$\forall_{ABp}$(актив(прямая(AB)) & опр(A) & опр(луч(AB)) $\rightarrow$ опр(B) & опр(p))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "чертеж". Требуется наличие комментария (луч B). Такой комментарий вводится несколькими приемами, инициализирующими построение чертежа и связанными с рассмотрением угла либо пары перпендикулярных прямых. Указатель "опр(выбор(p 20 600) тчкоорд(B терм(A) терм(B)))" определяет диапазон изменения варьируемого параметра p, а также оценку "тчкоорд(...)", уточняющую выбор его значения. Указатель "опр(B точкалуча(A луч(AB) p))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия данного приема, в которой не требуется наличие комментария (луч B), однако требуется, чтобы не было определено положение накакой точки прямой AB, отличной от точки A. Уровень ее срабатывания равен 7.

(d) Выбор точки на прямой.

$\forall_{ABp}$(актив(прямая(AB)) & опр(A) & опр(направл(A, B)) $\rightarrow$ опр(B) & опр(p))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "чертеж". Требуется наличие комментария (луч B). Указатель "опр(выбор(p 100 400) тчкоорд(B терм(A) терм(B)))" определяет диапазон изменения варьируемого параметра p, а также оценку, уточняющую выбор его значения. Указатель "опр(B расст(A направл(AB) p))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия данного приема, в которой требование наличия комментария (луч B) заменено требованием отсутствия отличной от A точки прямой AB, положение которой было бы определено на текущий момент. Диапазон изменения параметра p здесь увеличен - от 20 до 600. Уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{ABC}$($C \in$ прямая(AB) & опр(A) & опр(B) $\rightarrow$ опр(C) & опр(p))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Не усматривается перпендикулярность прямой AB некоторой рассматриваемой в задае прямой, проведенной через точку C. Имеется посылка, определяющая константное значение некоторого угла с вершиной C. Указатель "опр(выбор(p минус(1) 0.9) точкапрямой(C терм(C) терм(прямая(A B))))" определяет диапазон изменения варьируемого параметра p, а также оценку, уточняющую выбор его значения. Указатель "опр(C делениеотрезка(A B p))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 4. Созданы еще две версии данного приема, в которых ослаблено требование отсутствия перпендикуляра к AB, проведенного через точку C. Такой перпендикуляр должен отсутствовать во внешней задаче анализатора, а во внутренней - допустим. В первой из двух дополнительных версий предполагается отсутствие касательной к окружности, проходящей через точку C и отличной от прямой AB. Во второя версии предполагается наличие такой касательной. Соответственно, в первой версии диапазон изменения параметра p - от 0.1 до

0.9, а во второй - такой же, как в исходном приеме. Уровни срабатывания обеих версий равны 7.

$\forall_{ABp}$(актив(опр(A) & опр(направл(A, B)) $\rightarrow$ опр(B) & опр(p))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "опр(выбор(p минус(200) 300) тчкоорд(B терм(A) терм(B)))" определяет диапазон изменения варьируемого параметра p, а также оценку, уточняющую выбор его значения. Указатель "опр(B расст(A направл(AB) p))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 9.

(e) Выбор точки на заданной прямой, лежащей в заданной полуплоскости.

$\forall_{ABCDEp}$(разныестороны(B, E, прямая(CD)) & опр(A) & опр(направл(A, B)) & опр(C) & опр(направл(C, D)) & опр(E) $\rightarrow$ опр(B) & опр(p))

Третий и пятый антецеденты выделены указателем "чертеж", остальные - идентифицируются с посылками. Не определено положение никакой точки прямой AB, отличной от точек A, B. Указатель "опр(p вход(0.5 0.1 3))" определяет начальное значение и диапазон изменений варьируемого параметра p. Указатель "опр(B разнстор(A направл(AB) C направл(CD) E p))" определяет выбор положения точки B. Уровень срабатывания приема равен 6.

(f) Выбор конца отрезка по заданным противоположному концу и точке отрезка.

$\forall_{ABCp}$($B \in$ отрезок(AC) & опр(A) & опр(B) $\rightarrow$ опр(C) & опр(p))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Не усматривается принадлежность точки B такому отрезку AP, что P лежит на отрезке AC и отлично от C. Указатель "опр(p вход(1.1 0.1 10))" определяет начальное значение и диапазон изменения параметра p. Указатель "опр(C конецотрезка(A B p))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 6.

(g) Точка внутри угла.

$\forall_{ABCDab}$($D \in$ Угол(ABC) & опр(A) & опр(B) & опр(C) $\rightarrow$ опр(D) & опр(a) & опр(b))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатели "опр(a вход(80 30 200))" и "опр(b вход(40 30 200))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров a, b. Указатель "опр(D Угол(A B C a b))" определяет положение точки D. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABCDab}$(однасторона(C, D, прямая(AB)) & однасторона(A, D, прямая(BC)) & опр(A) & опр(B) & опр(C) $\rightarrow$ опр(D) & опр(a) & опр(b))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Прямые AB, BC не идентичны. Указатели "опр" - те же, что в предыдущем приеме. Уровень срабатывания равен 7.

(h) Точка внутри треугольника.

$\forall_{ABCDpq}$($D \in$ фигура(ABC) & опр(A) & опр(B) & опр(C) $\rightarrow$ опр(D) & опр(p) & опр(q))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатели "опр(p вход(0.3 0.1 0.9))" и "опр(q вход(0.4 0.1 0.9))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров p, q. Указатель "опр(D треугольник(A B C p q))" определяет положение точки D. Уровень срабатывания приема равен 5.

(i) Точка по заданную сторону от прямой.

$\forall_{ABCDpq}$(разныестороны$(A, B,$ прямая$(CD))$ & опр(A) & опр(C) & опр$(D) \rightarrow$ опр(B) & опр(p) & опр(q))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатели "опр(p вход(минус(1) минус(0.2) минус(2)))" и "опр(q вход(0.5 0.1 14))" определяют начальные значения и диапазоны изменения параметров p, q. Положение точки B определяется указателем "опр(B треугольник(C A D p q))". Уровень срабатывания равен 9.

(j) Точка на окружности.

$\forall_{ABCp}$(актив(окружность(BC)) & $A \in$ окружность(BC) & опр(B) & опр$(l(BC)) \rightarrow$ опр(A) & опр(p))

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "чертеж". В задаче рассматривается прямая, проходящая через точку A и некоторую отличную от B точку, положение которой уже определено. Указатель "опр(выбор(p минус(пи) пи) окрточка(A терм(A) терм(окружность(BC))))" определяет диапазон изменения варьируемого параметра p, а также оценку, уточняющую выбор его значения. Указатель "опр(A окружность (B расстояние(BC)p))" определяет положение точки A. Уровень срабатывания равен 7. На этой же теореме создана еще одна версия приема, в которой требование о прямой, проходящей через точку A, отброшено. Ее уровень срабатывания равен 8.

$\forall_{ABp}$(опр(A) & опр$(l(AB)) \rightarrow$ опр(B) & опр(p))

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "опр(выбор(p 0 умножение(2 пи)) окрточка(B терм(B) терм(окружность(AB))))" определяет диапазон изменения варьируемого параметра p, а также оценку, уточняющую выбор его значения. Указатель "опр(B окружность(A расстояние (AB)p))" определяет положение точки B. Уровень срабатывания равен 9.

(k) Радиус окружности, центр которой известен.

$\forall_{ABp}$(актив(окружность(AB)) & опр$(A) \rightarrow$ опр(p) & опр$(l(AB))$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "опр(выбор(p 10 300) кольцо(p A))" определяет диапазон изменения варьируемого параметра p, а также оценку, уточняющую выбор его значения. Указатель "опр(расстояние(AB) равно(p))" определяет расстояние AB. Уровень срабатывания равен 6.

(l) Выбор окружности, касающейся внешним образом другой окружности, для которой уже выбрана третья окружность, также касающаяся ее внешним образом.

$\forall_{ABCDEFp}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(EF)) & опр$(l(CD))$ & опр$(l(EF))$ & опр$(l(CE))$ & опр(C) & опр$(E) \rightarrow$ опр(p) & опр$(l(AB))$ & опр$(l(AC))$ & опр$(l(AE))$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Расстояния AB, AC, AE пока не определены. Указатель "опр(p вход(70 5 300))" определяет начальное значение и диапазон изменения параметра p. Указатель "опр(расстояние(AC) расстояние (AE) расстояние(AB) внешкасаются(расстояние(CD) расстояние(EF)

расстояние(CE)p))" определяет расстояния AC, AE и AB. Уровень срабатывания равен 4. Чтобы обеспечить этот прием входными данными, создан следующий вспомогательный прием:

$\forall_{ABCDEF}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(EF)) & внешкасаются(окружность(CD), окружность(EF)) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) & опр(A) & опр(C) & опр($l(EF)$) $\to$ опр($l(AE)$) & опр($l(CE)$))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатели "опр(расстояние(AE) плюс(расстояние (AB) расстояние(EF)))" "опр(расстояние(CE) плюс(расстояние (CD) расстояние(EF)))" определяют расстояния AE и CE. Уровень срабатывания равен 2.

(m) Радиусы двух касающихся внешним образом окружностей с заданными центрами.

$\forall_{ABCDp}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & опр(A) & опр(C) & опр($l(AC)$) $\to$ опр(p) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(p вход(0.4 0.1 0.9))" определяет начальное значение и диапазон изменений параметра p. Указатели "опр(расстояние (AB) умножение(расстояние(AC) p))" и "опр(расстояние(CD) вычитание(расстояние(AC) расстояние(AB)))" определяют расстояния AB и CD. Уровень срабатывания равен 3.

(n) Окружность, касающаяся внутренним образом двух заданных окружностей.

$\forall_{ABCDEFp}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(EF)) & внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & опр($l(EF)$) & опр($l(CD)$) & опр($l(CE)$) $\to$ опр($l(AE)$) & опр($l(AC)$) & опр($l(AB)$) & опр(p))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(p вход(30 0 200))" определяет начальное значение и диапазон изменения параметра p. Указатель "опр(расстояние(AC) расстояние(AE) расстояние(AB) внутркасаются(расстояние(CD) расстояние(EF) расстояние(CE) p))" определяет расстояния AC, AE и AB. Уровень срабатывания равен 5.

(o) Расстояния от точки до двух других точек, если известно отношение этих расстояний.

$\forall_{ABCapq}$(актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & $pl(AC) = ql(BC)$ & опр(A) & опр(B) & опр($l(AB)$) $\to$ опр($l(AC)$) & опр($l(BC)$) & опр(a))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обарабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Положение точки C пока не определено. Выражения p, q константные. Указатель "опр(a вход(60 10 200))" определяет начальное значение и диапазон изменения параметра a. Указатель "опр(фикс(расстояние(AC)) фикс(расстояние(BC)) разныеточки(фикс(расстояние(AB)) a p q))" определяет расстояния AC и BC. Символ "фикс" в этом указателе означает, что расстояния рассматриваются до обработки их нормализатором "нормрасстояние", используемым данным приемом. Уровень срабатывания равен 6.

(p) Центр окружности заданного радиуса, касающейся внешним образом заданной окружности.

$\forall_{ABCDm}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & опр(A) & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) $\rightarrow$ опр(C) & опр(m))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(m вход(0 минус(дробь(умножение(4 пи)5)) дробь(умножение(4 пи)5)))" определяет начальное значение и диапазон изменения параметра m. Указатель "опр(C внешточка(A расстояние(AB) расстояние(CD) m))" определяет положение точки C. Уровень срабатывания равен 6.

5. Установка на подбор параметров.

В этом разделе собраны приемы, вводящие оценки "степени невыполнения" тех посылок задачи, истинность которых не гарантирована предшествующими шагами работы анализатора. Чтобы определить, какие именно посылки заведомо выполнены на текущий момент построения схемы вычислений, используются специальные комментарии. Они вводятся перечисленными выше приемами, но для краткости изложения опущены. Приемы данного раздела срабатывают лишь после проверки того, что соответствущие комментарии отсутствуют. Как правило, консеквентом теоремы приема служит константа "истина", так как основное действие определяется указателем "опр".

(a) Расположение точек по одну либо по разные стороны от прямой.

$\forall_{ABCD}$(однасторона(A, B, прямая(CD)) & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(направл(C, D)) $\rightarrow$ истина)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "опр(оценка однасторона(A B C направл(CD)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$(разныестороны(A, B, прямая(CD)) & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(направл(C, D)) $\rightarrow$ истина)

Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(оценка разныестороны(A B C направл(CD)))".

(b) Заданное отношение длин отрезков.

$\forall_{ABCDpq}$($pl(AB) = ql(CD)$ & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) $\rightarrow$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "чертеж". Выражения p, q константные. Указатель "опр(оценка пропорциональны(расстояние(AB) расстояние(CD) q p))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDapqrs}$($l(AB) = pa/r$ & $l(CD) = qa/s$ & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) $\rightarrow$ истина)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Выражения p, q, r, s константные. Терм a не содержит символа "расстояние". Если AB и CD суть радиусы одной и той же выделенной в задаче окружности, то прием блокируется. Указатель "опр(оценка пропорциональны(расстояние(AB) расстояние(CD) дробь(p

r) дробь(q s)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первых двух антецедентов. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{AB}$(опр($l(AB)$) & опр(A) & опр(B) $\rightarrow$ истина)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Имеется комментарий (равнойдлины расстояние(AB)), указывающий на то, что расстояние AB было определено независимо от определения координат точек A, B (например, из некоторого соотношения пропорциональности для расстояний). В этом случае требуется контроль того, что найденная величина расстояния соответствует фактическому расстоянию между точками. Такой контроль обеспечивается указателем "опр(оценка равныедлины A B расстояние(AB))". Уровень срабатывания равен 5.

(c) Заданное отношение углов.

$\forall_{ABCDpq}$($p\angle(ABC) = q\angle(DEF)$ & опр($\angle(ABC)$) & опр($\angle(DEF)$) $\rightarrow$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Выражения p, q константные. Указатель "опр(оценка пропорциональны(угол(ABC) угол(DEF) q p))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания приема равен 0.

$\forall_{ABCDpq}$($\angle(ABC)/q = \angle(DEF)/p$ & опр($\angle(ABC)$) & опр($\angle(DEF)$) $\rightarrow$ истина)

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCD}$(биссектриса($ABCD$) & опр($\angle(ABD)$) & опр($\angle(DBC)$) $\rightarrow$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка пропорциональны(угол(ABD) угол(DBC) 1 1))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Заданная разность углов.

$\forall_{ABCDEFp}$($\angle(ABC) = p + \angle(DEF)$ & опр($\angle(ABC)$) & опр($\angle(DEF)$) $\rightarrow$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Выражение p константное. Указатель "опр(оценка сумма(угол(DEF) p угол(ABC)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 0.

(e) Принадлежность точки отрезку.

$\forall_{ABC}$($A \in$ отрезок(BC) & опр(A) & опр(B) & опр(C) $\rightarrow$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка точкаотрезка(B C A))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Неравенство для угла.

$\forall_{ABC}$($\angle(ABC) < \pi/2$ & опр($\angle(ABC)$) $\rightarrow$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка меньше(угол(A B C)дробь(умножение(49 пи)100)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABC}(\pi/2 < \angle(ABC)$ & опр$(\angle(ABC)) \to$ истина)

Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(оценка меньше(дробь(умножение(51 пи)100)угол(A B C)))".

$\forall_{ABCab}(\angle(ABC) = a$ & $0 < b - a$ & опр$(\angle(ABC)) \to$ истина)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "чертеж". Выражение b константное. Указатель "опр(оценка меньше(угол(A B C)дробь(умножение(4 b)5)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания приема равен 4.

$\forall_{ABCab}(\angle(ABC) = a$ & $a < b$ & опр$(\angle(ABC)) \to$ истина)

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCab}(\angle(ABC) = a$ & $0 < a - b$ & опр$(\angle(ABC)) \to$ истина)

Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(оценка меньше(дробь(умножение(9 b)10) угол(A B C)))".

(g) Направление луча.

$\forall_{AB}$(опр(луч(AB)) & опр(A) & опр$(B) \to$ истина)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Проверяется соответствие координат точек A, B направляющему вектору луча AB. Эту проверку обеспечивает указатель "опр(оценка направляющая(луч(AB) A B))". Уровень срабатывания равен 0.

(h) Заданная величина угла.

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a$ & опр$(\angle(ABC)) \to$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "чертеж". Выражение a константное и отлично от $\pi/2$. Указатель "опр(оценка разность(угол(A B C)a))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 4.

(i) Непринадлежность интервалу.

$\forall_{ABC}(\neg(C \in$ интервал$(AB))$ & опр(A) & опр(B) & опр$(C) \to$ истина)

$\forall_{ABC}(A \in$ луч$(CB))$ & опр(A) & опр(B) & опр$(C) \to$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка интервал(A B C))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 4.

(j) Перпендикулярные прямые.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр$(D) \to$ истина)

Первый антецедент выделен указателем "усм", причем точка привязки выбрана в нем. Остальные антецеденты выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка перпендикпрямые(A B C D))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания приема равен 5.

(k) Параллельные прямые.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр$(D) \to$ истина)

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка параллелпрямые($A\ B\ C\ D$))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 5.

(l) Соотношение радиусов окружностей.

$\forall_{ABCDp}$(актив(окружность(AB)) & актив(окружность(AD)) &
$0 < l(AD) - l(AB)$ & опр($l(AB)$) & опр($l(AD)$) $\rightarrow$ опр(p))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "чертеж". Либо правая часть неравенства содержит не менее двух символов "расстояние", либо в задаче рассматривается внешнее касание окружностей. Указатель "опр(p умножение(фикс(расстояние($A\ D$)) 0.7))" определяет вспомогательный параметр p, а указатель "опр(оценка меньше(фикс(расстояние(AB))p))" - вводит оценку, контролирующую выполнение неравенства. Точнее, контролируется необходимое для хорошей визуализации усиленное неравенство. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}$(актив(окружность(AB)) & актив(окружность(CD)) &
$0 \leq l(CD) - l(AB)$ & опр($l(AB)$) & опр($l(CD)$) $\rightarrow$ истина)

Антецеденты обрабатываются так же, как и выше, и дополнительное ограничение - прежнее. Указатель "опр(оценка меньшеилиравно(фикс(расстояние(AB))фикс(расстояние(CD))))"вводит оценку, контролирующую выполнение неравенства. Уровень срабатывания равен 5.

(m) Вписанная окружность касается стороны.

$\forall_{ABCDEFp}$(окружность(EF)вписана в фигура($ABCD$) & опр(E) &
опр($l(EF)$) & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(направл(A, B)) $\rightarrow$
опр(p))

Третий и восьмой антецеденты выделены указателем "чертеж", остальные - идентифицируются с посылками. При идентификации вершин четырехугольника допускаются циклические перестановки. Указатель "опр(p расстдопрямой($E\ A$ направл(AB)))" определяет вспомогательный параметр p, а указатель "опр(оценка разность(p расстояние(EF)))" - вводит оценку, контролирующую касание окружностью стороны AB. Уровень срабатывания равен 6.

(n) Принадлежность точки окружности.

$\forall_{ABC}$($A \in$ окружность(BC) & опр(A) & опр(B) & опр($l(BC)$) $\rightarrow$ истина)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - выделен указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка внешконтроль($A\ B$ расстояние(BC)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABC}$(актив(окружность(BA)) & опр(A) & опр(B) & опр($l(BA)$) $\rightarrow$ истина)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "чертеж". Требуется наличие комментария (конус $A\ P$), где P отлично от B. Этот комментарий вводился приемом, допускающим двоякое размещение точки A. Указатель "опр(оценка внешконтроль($A\ B$ расстояние(AB)))" вводит оценку, контролирующую соответствие радиуса окружности расстоянию между точками A, B, вычисленному через их координаты. Уровень срабатывания равен 5.

(o) Принадлежность точки дуге окружности.

$\forall_{ABCD}(A \in$ дуга(BCD) & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(направл(B,C)) & опр(направл(B,D)) $\to$ истина)

Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатели "опр(оценка однасторона(A C B направл(BD)))" и "опр(оценка однасторона(A D B направл(BC)))"водят оценки, контролирующие размещение точки A внутри угла, соответствующего дуге BCD. Уровень срабатывания равен 1.

(p) Радиус окружности меньше расстояния от ее центра до внешней точки.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) – касательная к окружность(CD) & опр(A) & опр(C) & опр$(l(CD))$ & опр$(l(AC))$ $\to$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "чертеж". Не умстаривается принадлежность точки A окружности CD. Указатель "опр(оценка меньше(расстояние(CD) расстояние(AC)))" вводит оценку, контролирующую выполнение неравенства для радиуса и расстояния AC от центра до внешней точки. Уровень срабатывания равен 1.

(q) Внешнее касание окружностей.

$\forall_{ABCD}$(внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD) & опр(A) & опр(C) & опр$(l(AB))$ & опр$(l(CD))$ & опр$(l(AC))$ $\to$ истина)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка сумма(расстояние(AB) расстояние(CD) расстояние(AC)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 3.

(r) Внутреннее касание окружностей.

$\forall_{ABCD}$(внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD) & опр(A) & опр(C) & опр$(l(AB))$ & опр$(l(CD))$ & опр$(l(AC))$ $\to$ истина)

Аналогично предыдущему, но используется указатель "опр(оценка модуль(расстояние(AB) расстояние(CD) расстояние(AC)))".

(s) Принадлежность точки четырехугольнику.

$\forall_{ABCDE}(E \in$ фигура$(ABCD)$ & опр(A) & опр(B) & опр(C) & опр(D) & опр(E) $\to$ истина)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "опр(оценка фигура(A B C D E))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 0.

(t) Касательная к окружности.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) – касательная к окружность(CD) & опр(A) & опр(направл(A,B)) & опр(C) & опр(D) & опр$(l(CD))$ $\to$ опр(a))

Третий антецедент выделен указателем "чертеж", остальные - идентифицируются с посылками. Указатель "опр(a расстдопрямой(C A направл(AB)))" определяет значение вспомогательного параметра a. а указатель "опр(оценка разность(a расстояние(CD)))" вводит оценку, контролирующую выполнение первого антецедента. Уровень срабатывания равен 3.

(u) Неравенство для расстояний.

$\forall_{ABCD}(0 < l(AB) - l(CD)$ & опр$(l(AB))$ & опр$(l(CD))$ $\to$ истина)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "чертеж". Указатель "опр(оценка меньше(расстояние(CD) расстояние(AB)))". Уровень срабатывания равен 6.

6. Дополнительный анализ чертежа.

   В разделе собраны приемы, выполняющие дополнительный анализ списка посылок внутренней задачи анализатора.

   (a) Две касательные к окружности.

   $\forall_{ABCDEF}$(отрезок(CE) – касательная к окружность(AB) & прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & разныестороны($A, D,$ прямая(CE)) & опр(C) & опр(D) $\to$ опр(F) & биссектриса($FCEA$))

   Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - идентифицируются с посылками. Точка касания окружности с прямой CD находится в стороне, противоположной лучу CD. Прием вводит вспомогательную точку F. Указатель "опр(F делениеотрезка(C D минус(0.5)))" определяет размещение точки F на луче, противоположному лучу CD. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDE}$(отрезок(AB) – касательная к окружность(DE) & отрезок(BC) – касательная к окружность(DE) $\to$ биссектриса($ABCD$))

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Касательная перпендикулярна радиусу.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая(DE) – касательная к окружность(AB) &
   $C \in$ окружность(AB) & $C \in$ прямая(DE) $\to$ прямая(AC) $\perp$ прямая(DE))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Переменные C, D различны. Перпендикулярность прямых AC и DE идентифицирующими операторами не усматривается. Уровень срабатывания равен 0.

   (c) Вписанная окружность.

   $\forall_{ABCDEF}$(окружность(AB)вписана в фигура($CDEF$) & опр(C) & опр(D) & опр(E) & опр(F) $\to$ биссектриса($DCFA$) & биссектриса($CDEA$) & прямая(CD) – касательная к окружность(AB))

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на противоположный. Уровень срабатывания равен 1.

   (d) Равенство длин дуг.

   $\forall_{ABCDE}$(длина(дуга(ADE)) = длина(дуга(ABC)) & $D \in$ окружность(AF) & $B \in$ окружность(AF) $\to l(DE) = l(BC)$)

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 0.

   (e) Ввод в рассмотрение треугольника.

   $\forall_{ABCDE}$(окружность(AB)вписана в фигура(CDE) $\to \triangle(CDE)$)

   В задаче не рассматриваются ни треугольники, ни ромбы. Уровень срабатывания равен 0.

(f) Окружность, вписанная в угол.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(AB)вписана в Угол(CDE) $\rightarrow$
прямая(CD) – касательная к окружность(AB))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Положение точки A пока не определено. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCDE}$(луч(AB) – касательная к окружность(DE) & луч(AC) – касательная к окружность(DE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\rightarrow$ окружность(DE)вписана в Угол(BAC))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCDE}$(прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & прямая(DE) – касательная к окружность(AB) & однасторона($A, C,$ прямая(DE)) & однасторона($A, E,$ прямая(CD)) $\rightarrow$ биссектриса($CDEA$))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Положение точки A пока не определено. Отсутствует посылка вида "биссектриса($PDQR$)", у которой точки P, Q лежат, соответственно, на прямых CD и DE. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(AB)вписана в Угол(CDE) $\rightarrow$ биссектриса($CDEA$))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Положение точки A пока не определено. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(CD)–касательная к окружность(AB) & прямая(DE)– касательная к окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) &
$F \in$ прямая(CD) & $G \in$ окружность(AB) & $G \in$ прямая(DE) &
точкалуча(D, C, F) & точкалуча(D, E, G) $\rightarrow$ биссектриса($CDEA$))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Положение точки A пока не определено. Отсутствует посылка вида "биссектриса($PDQR$)", у которой точки P, Q лежат, соответственно, на прямых CD и DE. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Равносторонний треугольник, вписанный в окружность.

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE)описана около фигура(ABC) & $l(AB) = l(AC)$ & $l(AB) = l(BC) \rightarrow l(AB) = \sqrt{3}l(DE)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

(h) Вписанная трапеция.

$\forall_{ABCDEF}$(окружность(EF)описана около фигура($ABCD$) &
трапеция($ABCD$) $\rightarrow l(AB) = l(CD)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Допускаются циклические перестановки вершин и изменение их порядка на противоположный при идентификации первого антецедента, а также изменение порядка вершин на противоположный при идентификации второго. Уровень срабатывания равен 1.

(i) Окружность, вписанная в сектор.

$\forall_{ABMNPQ}$(окружность(AB)вписана в сектор(MNP) &
$N \in$ окружность(MQ) $\rightarrow$ внутркасаются(окружность(AB),

окружность(MQ)) & прямая(MN) – касательная к окружность(AB) & прямая(MP) – касательная к окружность(AB) & биссектриса$(NMPA)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

(j) Усмотрение общей внешней касательной.

$\forall_{ABCDEFG}$(прямая(FG) – касательная к окружность(AB) & прямая(FG) – касательная к окружность(CD) & внешкасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & $E \in$ прямая(FG) & $E \in$ окружность$(AB) \rightarrow$ внешкасательная(прямая(FG), окружность(AB), окружность(CD))))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Не усматривается принадлежность точки E окружности CD. Переменные A, C различны. Уровень срабатывания равен 1.

(k) Расположение центра окружности, касающейся нескольких других окружностей.

$\forall_{ABCDEF}$(внешкасаются(окружность(CD), окружность(EF)) & $A \in$ окружность(CD) & $A \in$ окружность(EF) & внутркасаются(окружность(AB), окружность(CD)) & внутркасаются(окружность(EF), окружность(AB)) $\rightarrow l(CD) = l(EF)$)

Первый, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

Список литературы

1. А.Черч. Введение в математическую логику. Том 1. М.: ИЛ, 1960, с.484.
2. С.К.Клини. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. 526с.
3. С.К.Клини. Математическая логика. М.: Мир, 1973, 480с.
4. Ч.Чень, Р.Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1983, 360 с.
5. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971, с.320.
6. Г.Метакидес, А Нероуд. Принципы логики и логического программирования. М.: Факториал, 1998, 288с.
7. И.Братко. Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. М.: Мир, 1990, 560 с.
8. Дж.Малпас. Реляционный язык Пролог и его применение. М.: Наука, 1990, 464 с.
9. Э.Хант. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1978, 558с.
10. Ж.-Л. Лорьер. Системы искусственного интеллекта. М.: Мир, 1991, 568с.
11. E.A.Bender. Mathematical methods in artificial intelligence. Los Alamitos, IEEE, Comp.Society Press, 1996, 638p.

12. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975, 463с.

13. Д. Пойа. Математическое открытие. М.: Наука, 1976, 448с.

14. Лавров И.А., Максимова Л.Л., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., "Наука", 1975, 232 с.

15. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И.. Сборник задач по элементарной математике, М., "Наука", 1964, 528 с.

16. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. М., "Наука", 1988, 431 с.

17. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., "Наука", 1988, 237 с.

18. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике. М., "Наука", 1992, 478 с.

19. Сканави М.И. Сборник задач по математике. М., "Высшая школа", 1988, 431 с.

20. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике. М., "Наука", 1971, 360 с.

21. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И., Федосов Б.В. Задачи по элементарной математике. М., 1973, 415 с.

22. Сергеев И.Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. М., "Высшая школа", 2003, 336 с.

23. Шарыгин И.Ф. Геометрия, 9-11 классы. М., "Дрофа", 1997, 396 с.

24. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. М., Астрель, 2001, 396 с.

25. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., "Наука", 1969, 544 с.

26. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. т.1. М., "Высшая школа", 2000, 722 с.

27. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., "Наука", 1976, 384 с.

28. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., "Наука", 1965, 100 с.

29. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М., "Высшая школа", 2000, 364 с.

30. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М., "Высшая школа", 2001, 445 с.

31. Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями. М., Книжный дом "Университет", 2001, 335.

32. Подколзин А.С. Об организации баз знаний, ориентированных на автоматическое решение задач. "Дискретная математика", 1990, т.2., вып.1., с. 13-30.

33. Подколзин А.С. Система автоматического решения задач по элементарной алгебре. "Дискретная математика", 1994, т.6., вып.4., с. 35-57.

34. Подколзин А.С. Компьютерный решатель математических задач. ДАН РФ, 1994, т.335, № 4.

35. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование процессов решения математических задач. Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2001. 235 с.

36. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 1. Архитектура и языки решателя задач. М., "Физматлит", 2008. 1022 с.

37. Подколзин А.С. О самообучении интеллектуальной системы. "Интеллектуальные системы", 2014, том 18, выпуск 2, с. 197 - 266.