А.С.Подколзин

Компьютерное моделирование логических процессов

Том 4. Опыт обучения компьютерного решателя задач

Аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория вероятностей, комплексный анализ и другие разделы

2016 г.

Введение

Под словами "искусственный интеллект" обычно понимается моделирование в компьютере тех процессов рассуждений, которые свойственны человеку. По-видимому, при современном искусстве программирования, такой интеллект давно уже был бы создан, если бы имелось ясное представление от том, как происходят эти рассуждения. Однако, фактический прогресс в области искусственного интеллекта пока невелик, и ближайшие перспективы сомнительны. Несомненные успехи в области компьютерной обработки данных привели к появлению огромного количества прикладных программ, охватывающих почти все мыслимые области. Может возникнуть соблазн считать, что их многообразие и есть искусственный интеллект. Однако, каждая такая программа ориентирована на свой, достаточно узкий класс задач, и даже при небольшом изменении требований нуждается в ручной переделке. Компьютерный интеллект, который мог бы самостоятельно разрабатывать прикладные программы, должен был бы получить всестороннее фундаментальное образование и иметь определенные способности к саморазвитию. Он должен был бы уметь читать научную литературу и адаптировать прочитанное к решению задач. Он должен был бы не просто слепо применять жесткие алгоритмы, но уметь вырабатывать их в процессе рассуждений. Ничего похожего пока нет, и продолжение традиционной линии на ручную разработку прикладных программ никогда к этой цели не приблизит.

Врочем, утверждение о наличии, путь и не самообучающихся, эффективных прикладных программ "во всех мыслимых областях" является чрезмерно оптимистичным. В таких, например, важнейших областях, как понимание естественного языка и понимание изображений, пока приходится довольствоваться суррогатами. За неимением лучшего, во многих случаях они уже сейчас могут приносить ощутимую пользу. Вряд ли, однако, в будущем они смогут составить серьезную конкуренцию системе, вооруженной адекватной системой знаний об окружающем мире и способной использовать эти знания при анализе ситуаций.

Науки о рассуждениях, которая обеспечила бы существенное изменение к лучшему данного положения дел, пока нет, и на повестке дня стоит не столько вопрос о немедленном создании искусственного интеллекта, сколько вопрос о начале систематических исследований, которые могли бы составить фундамент этой науки.

Математическая логика, которая и создавалась как "наука о рассуждениях", на сегодняшний день не может претендовать на указанную роль, ибо она занималась не столько вопросами управления рассуждениями, сколько изучением общих свойств формальных логических систем. Попытки предложить принципы управления рассуждениями "из общих соображений", в отрыве от скрупулезного анализа реальных процессов решения задач, к созданию сколь-нибудь сильных решателей, к сожалению, не привели.

Вместе с тем, появление мощных компьютеров позволяет ставить вопрос о создании своего рода "компьютерного микроскопа" для изучения процессов рассуждений, реализуемых человеком.

Настоящая монография "Компьютерное моделирование логических процессов"посвящена исследованию логических процессов, предпринятому с помощью компьютерной логической системы "Искра". Чтобы промоделировать в системе решение задачи человеком, оно разбивалось на атомарные шаги, и для каждого шага создавалась несложная программа, способная выполнять его в аналогичных ситуациях. Такие программы получили название приемов. Были проработаны многие предметные области, в первую очередь математические, и накоплена база приемов, имеющая более 40000 элементов. Фактически, она представляет собой огромную коллекцию "фотоснимков" с траекторий решения задач, взятых из задачников. В ряде областей база приемов оказалась способной функционировать как автоматический решатель задач, неплохо имитирующий действия человека. Но, что гораздо более важно, она стала исходным сырьем для анализа того, как базисные теоремы предметной области преобразуются в приемы, иными словами, для анализа процесса самообучения "по книгам". Были предприняты стандартизация и оптимизация приемов, создана их классификация. Почти для каждого приема указан источник - некоторая базисная теорема предметной области. Изучена последовательность действий при переходе от теоремы к приему, и предложены предварительные версии алгоритмов, воспроизводящих такие действия. Среди данных алгоритмов имеются процедуры адаптации приемов к обучающим задачам. Результатом явился некоторый прототип "генератора приемов", позволяющий в простых случаях сразу получать вполне осмысленные приемы, в более сложных - приходить к ним после автоматической доводки по задачнику. Совсем сложные случаи дают хороший материал для продолжения исследований. Данный генератор приемов можно уподобить пирамиде, в основании которой лежит база приемов, вершиной служит множество базисных теорем, а промежуточные слои соответствуют этапам синтеза приема.

В целом, проделанная работа подтвердила эффективность использования компьютерной логической системы для изучения логических процессов и наметила пути создания интеллектуальной системы, способной быстро обучаться по традиционным источникам научно-технической информации.

Обучение логической системы "Искра" было предпринято для таких предметных областей, как алгебра множеств и комбинаторика, элементарная алгебра, элементарная геометрия, математический анализ, аналитическая геометрия, дифференциальные уравнения, комплексный анализ, теория вероятностей. Проработаны многие разделы линейной алгебры, общей алгебры, дискретной математики, интегральных уравнений, элементарных физики и химии. Рассматривались нематематические области: шахматы, понимание естественного языка, анализ рисунков. Сразу заметим, что главным образом изучались стандартные задачи вычислительного характера, хотя и для многих теоретических задач тоже создавались приемы, обеспечивающие их решение. В некоторых предметных областях (например, элементарные алгебра и геометрия) удалось добиться достаточно стабильного решения стандартных задач, в других - лишь предложены объяснения отдельных траекторий решения.

При сравнении с обычными системами компьютерной математики становятся очевидны преимущества предлагаемого подхода в тех случаях, когда логика начинает играть существенную роль. По существу, логическую систему "Искра" можно рассматривать как экспериментальную систему компьютерной математики нового типа, допускающую постепенное перерастание в интеллектуальную математическую систему.

Общее число приемов сейчас превышает 42000, число проработанных задач - свыше 10000. При этом, даже без архивации, система занимет всего около 120 Мб. Это означает, что стандартные размеры внешнего твердого диска в 1Тб позволяют увеличить объем решателя в 8000 раз, без существенного замедления его в тех областях, где обучение уже завершено.

Предлагамая книга представляет собой четвертый том монографии "Компьютерное моделирование логических процессов". В первом томе монографии [1] описываются архитектура системы, а также языки ЛОС и ГЕНОЛОГ. Во втором томе рассматриваются общелогические приемы, а также приемы, относящиеся к следующим разделам: алгебра множеств, простейшие свойства функций, мощности множеств и комбинаторика, числовые множества, элементарная алгебра, комбинаторные функции, многочлены. В третьем томе рассматриваются приемы решения задач по математическому анализу, дифференциальным уравнениям и элементарной геометрии. В данном, четвертом томе монографии представлены приемы решателя по аналитической геометрии, линейной алгебре, общей алгебре, комплексному анализу, теории вероятностей, интегральным уравнениям, метрическим пространствам, конечнозначным логикам и теории графов. Кроме того, рассмотрена реализация на ГЕНОЛОГе традиционных нелогических вычислений.

Пятый том монографии будет посвящен рассмотрению приемов решения задач по элементарной физике, элементарной химии, а также приемам, возникшим в таких областях, как понимание естественного языка, шахматы и анализ рисунков. Наконец, в шестом томе монографии предполагается описать архитектуру генератора приемов и его основные блоки.

Параллельно с написанием монографии продолжается развитие системы. Поэтому каждая книга будет сопровождаться своей версией программы. Все эти версии, расположенные в хронологическм порядке, могут быть получены по адресу " www.intsys.msu.ru/invest/solver/logsyst.zip". Сборники задач, использованные при обучении решателя, приводятся в списке литературы.

Автор выражает искреннюю благодарность В.Б.Кудрявцеву, поддержка которого сделала возможным проведение данного исследования. Автор благодарен также П.А. Пантелееву, оказавшему помощь при подготовке рукописи.

Оглавление

10 Вычисления на ГЕНОЛОГе **850**

11 Анализатор решений **938**

Глава 1

Приемы по аналитической геометрии

Задачи по аналитической геометрии, как и задачи по элементарной геометрии, решаются обычно путем вывода следствий в блоке анализа - объединенном списке посылок и условий задачи. В отличие от геометрии, решающие правила приемов здесь большей частью вырожденные: действие выполняется, как только для этого возникает логическая возможность.

1.1 Логические символы, используемые решателем в аналитической геометрии

1.1.1 Понятия, связанные с векторами

Утверждение "Вектор(a)" означает, что a есть вектор на плоскости либо в пространстве. Выражение "вектор(AB)" обозначает вектор, проведенный из точки A к точке B. Выражение "вектор0" обозначает нулевой вектор.

Выражение "проекция(A B)" обозначает прямоугольную проекцию вектора A на прямую либо плоскость B. Заметим, что это же выражение используется, если A - точка либо прямая.

Выражение "минусвект(a)" обозначает вектор, полученный из вектора a изменением направления на противоположное.

Выражение "плюсвект($a_1 \ldots a_n$)" обозначает сумму векторов $a_1, \ldots, a_n$.

Выражение "умножвект(a b)" обозначает произведение вектора b на число a.

Выражение "суммавсехвект(a)" обозначает сумму всех значений векторной функции a на ее конечной области определения. Формульным редактором оно прорисовывается так же, как обычная конечная сумма.

Утверждение "коллинеарны(a b)" означает коллинеарность векторов a, b. Утверждение "однонаправлены(a b)" означает, что векторы a, b получаются друг из друга умножением на положительный коэффициент.

Утверждение "компланарны(a b c)" означает компланарность векторов a, b, c.

Выражение "скалумнож(A B)" обозначает скалярное произведение векторов A, B.

Выражение "вектумнож(a b)" обозначает векторное произведение вектора a на вектор b.

Выражение "конецвектора(a b)" обозначает конец вектора b, начало которого расположено в точке a.

Утверждение "делениеотрезка(A B C p q)", где B - точка прямой AC, означает, что скалярное отношение вектора AB к вектору BC равно p/q.

Утверждение "направление(a b c d)" означает, что вектор d направлен по отношению к векторам a и b в то же полупространство, что и вектор c. Оно используется только в трехмерном случае.

1.1.2 Понятия, связанные с системами координат

Утверждение "сисrecord(a)" означает, что a есть система координат на плоскости либо в пространстве. В первом случае она отождествляется с тройкой точек (A B C), во втором - с четверкой точек (A B C D). Здесь A - начало координат; точки B, C, D - концы координатных векторов. Такая система координат, в зависимости от контекста, может определять либо аффинные, либо полярные, сферические и т.д. координаты. Предполагается, что соответствующая тройка либо четверка точек - общего положения.

Утверждение "прямкоорд(a)" означает, что a есть прямоугольная система координат.

Выражение "коорд(A K)" обозначает координаты точки A в аффинной системе координат K, либо координаты вектора A в этой системе координат, либо множество координат множества точек A.

Выражение "тчкоорд(a K)" обозначает точку, координаты которой в аффинной системе координат равны a.

Выражение "точки(a K)" обозначает множество точек, координаты которых в аффинной системе координат K образуют множество a.

Выражение "крд(a K i)" обозначает значение i-й координаты относительно аффинной системы координат K точки либо вектора a.

Выражение "Крд(a K i)" обозначает множество значений i - й координаты относительно системы координат K точек либо векторов, принадлежащих множеству a.

Выражение "векткоорд(K a)" обозначает вектор, имеющий в аффинной системе координат K координаты a.

Утверждение "коордплоск(K p)" означает, что K - тройка точек, представляющая собой систему координат на плоскости p.

Выражение "полкоорд(P K)" обозначает полярные координаты точки P в полярной системе координат K. Полярная система координат на плоскости - тройка точек (A B C), где A является началом системы координат, луч AB определяет полярную ось, а направление кратчайшего поворота от B к C - положительное направление отсчета углов.

Выражение "полярнточки(a K)" обозначает множество точек, координаты которых в полярной системе координат K принадлежат множеству a.

Выражение "цилкоорд(P K)" обозначает цилиндрические координаты точки P в цилиндрической системе координат K. Цилиндрическая система координат - четвертка точек (A B C D), где A является началом координат, полярный угол отсчитывается от луча AB в направлении луча AC, AD - ось ординат. Луч AD перпендикулярен плоскости ABC.

Выражение "сферкоорд(P K)" обозначает сферические координаты точки P в сферической системе координат K. Сферическая система координат - четверка точек (A B C D), образующих прямоугольную систему координат. Широта отсчитывается от луча AB в направлении луча AC, долгота - от луча AD в направлении плоскости ABC.

Утверждения "влево(a K)", "вправо(a K)" означают, что вектор a в трехмерной прямоугольной системе координат K направлен, соответственно, противоположно оси OX либо вдоль этой оси. Аналогично, утверждения "вниз(a K)", "вверх(a K)" - для оси OZ, и утверждения "назад(a K)", "вперед(a K)" - для оси OY. Эти утверждения, как и вообще понятия, связанные с рассмотрением отдельных компонент координатных наборов, возникли в решателе только при рассмотрении задач по элементарной физике.

Выражение "горизплоск(K)" обозначает плоскость OXY трехмерной прямоугольной системы координат K. Выражение "вертплоск(K)" обозначает плоскость OXZ.

Утверждение "Вертплоск(a K)" означает, что плоскость a параллельна плоскости OYZ прямоугольной трехмерной системы координат K.

Утверждение "вертикнапр(a K)" означает, что вектор a в прямоугольной трехмерной системе координат K направлен вертикально. Утверждение "одномерный(a K)" означает, что вектор a направлен параллельно оси абсцисс системы K.

Утверждение "вертплосквект(a K)" означает, что вектор a расположен в плоскости OXZ прямоугольной системы координат K. Утверждение "верхнапр(a K)" означает, что вектор a расположен в плоскости OXZ, причем его z - компонента неотрицательна. Утверждение "горизплосквект(a K)" означает, что вектор a расположен в плоскости OXY.

Утверждение "нижнточка(a b K)" означает, что a - точка геометрического тела b, имеющая наименьшую z - координату в прямоугольной трехмерной системе координат K. Утверждение "верхнточка(a b K)" означает, что a - точка геометрического тела b, имеющая наибольшую z - координату.

Выражение "верхнийуровень(a K)" обозначает наибольшую из z - координат точек множества a относительно прямоугольной трехмерной системы координат K. Выражение "нижнийуровень(a K)" обозначает наименьшую из z - координат точек множества a. Выражение "высотатела(a K)" обозначает разность между наибольшим и наименьшим значениями z - координат точек множества a.

Выражение "ориентация(K a)" обозначает ориентацию в аффинной системе координат K упорядоченного набора векторов a. Число векторов равно размерности системы K; ориентация полагается равной 1, если она положительная, и -1 в противном случае.

Выражение "орплощадь(K a b)" обозначает ориентированную площадь параллелограмма, стороны которого задаются векторами a, b. Положительная ориентация определяется системой координат K. Выражение "оробъем(K a b c)" обозначает ориентированный объем параллелепипеда, выходящие из одной вершины ребра которого задаются векторами a, b и c.

Выражение "оруголмежду($a\,b\,K$)" обозначает величину ориентированного угла между двумя векторами a и b, если ориентация на плоскости задается системой координат K. Выражение "Оруголмежду(a b n)" обозначает величину ориентированного угла между двумя векторами a и b, если ориентация задается третьим вектором n, ортогональным плоскости векторов a, b. Положительное направление отсчета углов - против часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора n. Выражение "Оругол(A B C n)" обозначает величину ориентированного угла в пространстве с вершиной в точке B, начальной точкой A и конечной точкой C. Здесь n - вектор, ортогональный плоскости угла и задающий ориентацию так же, как и выше.

Выражение "оруголпрям($a\,b\,K$)" обозначает величину ориентированного угла между пересекающимися прямыми a и b относительно прямоугольной системы координат K на плоскости. Эта величина равна величине угла поворота прямой a против часовой стрелки, необходимому для совмещения ее с прямой b. Изменяется от 0 до π, причем всегда строго меньше π.

1.1.3 Понятия, связанные с ориентированными кривыми

Выражение "Отрезок(A B)" обозначает ориентированную кривую, возникающую при прохождении отрезка от точки A до точки B.

Утверждение "прямлинпуть(a)" означает, что a есть ориентированная кривая, возникающая при прохождении некоторого отрезка от одного его конца к другому.

Выражение "напрпути(a)" обозначает единичный направляющий вектор ориентированной кривой a, возникающей при прохождении отрезка.

Выражение "Дуга(A B n c)" обозначает ориентированную кривую в пространстве, возникающую при движении по окружности с центром в точке A, начинающемуся с точки B, на величину ориентированного угла c. Вектор n ортогонален плоскости окружности и задает ориентацию. Положительным считается движение против часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора n. Выражение "ордуга(A B C n)" обозначает ориентированную кривую в пространстве, возникающую при движении по окружности с центром в точке A, начинающемся с точки B и заканчивающемся в точке C. Вектор n - такой же, как и выше.

Выражение "орпрямая(A B)" обозначает ориентированную прямую, проходящую через точки A, B. Положительным направлением является направление от A к B.

Выражение "орокружность(A B n)" обозначает ориентированную окружность в пространстве, имеющую своим центром точку A, проходящую через точку B и расположенную в плоскости, ортогональной вектору n. Ориентация - против часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора n.

Выражение "Луч(A B)" обозначает ориентированную кривую, возникающую при прохождении вдоль луча AB от его начала A.

Выражение "оркривая(f K)" обозначает ориентированную кривую, определяемую вещественной вектор-функцией f одного вещественного аргумента (параметра кривой) в системе координат K. Направление прохождения соответствует возрастанию параметра.

Выражение "путь(a)" обозначает ориентированную кривую, возникающую при последовательном прохождении ориентированных кривых набора a.

Выражение "обратныйпуть(a)" обозначает ориентированную кривую, получающуюся из ориентированной кривой a изменением ориентации на противоположную.

Утверждение "отрезокпути(a b)" означает, что ориентированная кривая a является частью ориентированной кривой b, с сохранением ее ориентации.

Выражение "отрезоклинии(a B C)" обозначает ориентированную кривую, представляющую собой отрезок неориентированной кривой a с началом в точке B и концом в точке C.

Выражения "началопути(a)", "конецпути(a)" обозначают начальную и конечную точки ориентированной кривой a.

Утверждение "простойпуть(a)" означает, что ориентированная кривая a не имеет самопересечений.

Выражение "ориенткривой(a b)"обозначает ориентированную кривую, возникающую из обычной кривой a с помощью указателя ориентации b. Рассматриваются следующие типы указателей ориентации:

1. убывает(K i) - в системе координат K положение точки кривой однозначно определяется ее i - й координатой, и кривая проходится в направлении убывания значения этой координаты.
2. возрастает(K i) - в системе координат K положение точки кривой однозначно определяется ее i - й координатой, и кривая проходится в направлении возрастания значения этой координаты.
3. убывает(K 0) - в системе координат K кривая проходится по часовой стрелке.
4. возрастает(K 0) - в системе координат K кривая проходится против часовой стрелки.

Утверждение "вертикаль(a K)" означает, что ориентированная кривая a состоит из отрезков, расположенных на оси OZ в прямоугольной системе координат K. Утверждение "общнаправл(a b)" означает, что ориентированные кривые a, b составлены из отрезков двух параллельных прямых.

Выражение "точкапути(a b)" обозначает точку ориентированной кривой a, отстоящую от ее начала на расстоянии b. Расстояние измеряется вдоль кривой.

Выражение "точкипути(a)" обозначает множество точек ориентированной кривой a.

1.1.4 Понятия, связанные с прямыми и плоскостями

Используются понятия, введенные в элементарной геометрии, а также ряд дополнительных понятий, перечисляемых ниже.

Выражение "углкоэффициент(a K)" обозначает угловой коэффициент прямой a в системе координат K.

Утверждение "двепрямые(a b c)" характеризует взаимное расположение двух прямых a и b. Если логический символ c есть символ "равно", то прямые совпадают. Если c - символ "параллельно", то прямые параллельны и не совпадают; если c - символ "пересекаются", то прямые различны и пересекаются; если c - символ "скрещивающиеся", то прямые скрещивающиеся.

Утверждение "трипрямые($a\ b\ c\ d$)"характеризует взаимное расположение трех прямых a, b, c на плоскости. Если $d = 0$, то прямые параллельны. Если $d = 1$, то вторая и третья прямые параллельны, а первая - не параллельна им. Если $d = 2$, то первая и третья прямые параллельны, а вторая - не параллельна им. Если $d = 3$, то первая и вторая прямые параллельны, а третья - не параллельна им. Если $d = 4$, то три прямые не параллельны и пересекаются в точке. Если $d = 5$, то три прямые образуют треугольник.

Выражение "расстдоплоскости($a\ b$)" обозначает расстояние от точки a до плоскости b. Выражение "расстдопрямой($a\ b$)" обозначает расстояние от точки a до прямой b.

Утверждение "двеплоскости($a\ b\ c$)" характеризует взаимное расположение двух плоскостей a, b. Если c - символ "равны", то плоскости совпадают. Если c - символ "параллельно", то плоскости параллельны и различны. Если c - символ "пересекаются", то плоскости различны и пересекаются.

Утверждение "прямаяиплоскость($a\ b\ c$)" характеризует взаимное расположение прямой a и плоскости b. Если c - символ "включается", то прямая есть подмножество плоскости. Если c - символ "параллель", то прямая лежит вне плоскости и параллельна ей. Если c - символ "пересекаются", то прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

Выражение "пучокплоскостей($a\ b$)" обозначает множество всех плоскостей, проходящих через общую прямую пересекающихся и не совпадающих плоскостей a, b.

Утверждение "направлпрямой($a\ K\ b$)" означает, что b есть координатный набор направляющего вектора прямой a в системе координат K.

Утверждение "плоскбазис($a\ b\ c\ d$)" означает, что a - набор коэффициентов уравнения плоскости в некоторой прямоугольной системе координат K; b - координатный набор, определяющий относительно K некоторую точку данной плоскости (начало системы координат, привязанной к плоскости); c, d - координатные наборы, определяющие относительно K вектора ортонормированного базиса на плоскости.

Утверждение "Плоскбазис($a\ b\ c$)" означает, что a есть координаты направляющего вектора нормали к плоскости в некотором ортонормированном базисе; b, c - координаты в том же базисе двух единичных ортогональных друг другу векторов, лежащих в плоскости.

Утверждение "осьсимметрии($a\ b$)" означает, что прямая a является осью симметрии плоской фигуры либо тела b.

1.1.5 Понятия, связанные с кривыми

Утверждение "кусгладкривая($a\ b$)" означает, что a есть кусочно-гладкая кривая на плоскости при $b = 2$ либо в пространстве при $b = 3$.

Утверждение "линвторпорядка(a)" означает, что a есть линия второго порядка на плоскости.

Утверждения "эллипс(a)", "гипербола(a)", "парабола(a)" означают, что плоская кривая a является, соответственно, эллипсом, гиперболой и параболой.

Утверждение "равнгипербола(a)" означает, что a есть равносторонняя гипербола.

Выражение "ветвькривой($a\ b$)"обозначает ветвь плоской кривой b, содержащую точку a.

Утверждение "асимптота(a b)" означает, что прямая a является асимптотой плоской кривой b. Утверждение "асимптнаправл(a b)" означает, что прямая a имеет асимптотическое направление относительно кривой второго порядка b.

Утверждение "направлпараболы(a b)" означает, что вектор b определяет направление оси параболы a.

Утверждение "действось(a b)" означает, что прямая a представляет собой действительную ось гиперболы b. Утверждение "мнимаяось(a b)" означает, что прямая a представляет собой мнимую ось гиперболы b.

Утверждение "фокус(a b)" означает, что точка a является фокусом кривой второго порядка b.

Утверждение "директриса(a b c)" означает, что прямая a является директрисой кривой второго порядка c, соответствующей фокусу b.

Выражение "фокпараметр(a)" обозначает фокальный параметр кривой второго порядка a. Используется также для поверхностей второго порядка.

Выражение "фокхорда(a)" обозначает длину хорды кривой второго порядка a, проходящей через ее фокус перпендикулярно фокальной оси.

Выражение "полуось(a b)" обозначает длину полуоси эллипса b по направлению его оси a. Аналогичным образом используется для эллипсоида. Выражения "большаяось(a)", "малаяось(a)" обозначают, соответственно, длину большой и малой осей эллипса a.

Выражения "действполуось(a)", "мнимаяполуось(a)" обозначают, соответственно, длину действительной и мнимой полуосей гиперболы a.

Выражение "эксцентриситет(a)" обозначает эксцентриситет кривой второго порядка a.

Утверждение "Диаметр(a b)" означает, что прямая a является диаметром кривой второго порядка b.

Утверждение "сопряжнаправления(a b c)" означает, что направления прямых a, b сопряжены относительно кривой второго порядка c. Используется также для поверхностей второго порядка, причем в этом случае сопряжены направления плоскости a и прямой b.

Утверждение "фоксистема(a b)" означает, что a есть прямоугольная система координат, начало которой расположено в фокусе кривой второго порядка b, а положительное направление оси абсцисс - совпадает с направлением оси в случае параболы, совпадает с направлением на второй фокус в случае эллипса, противоположно направлению на второй фокус в случае гиперболы.

Утверждение "каноничкоорд(a b)" означает, что a есть каноническая система координат для кривой второго порядка b. Используется также для поверхностей второго порядка.

Утверждение "вершина(a b)" означает, что точка a является вершиной кривой второго порядка b. Используется также для поверхностей второго порядка. В случае гиперболического параболоида под вершиной понимается седловая точка. Заметим, что логический символ "вершина" используется также в других разделах - для рассмотрения вершины многогранника либо вершины графа.

1.1.6 Понятия, связанные с поверхностями

Утверждение "поввторпорядка(a)" означает, что a есть поверхность второго порядка.

Утверждение "сфера(a)" означает, что a есть сфера.

Утверждение "Конус(a)" означает, что a есть коническая поверхность. Утверждение "оськонуса(a b)" означает, что прямая a является осью конуса b.

Утверждение "Цилиндр(a)" означает, что a есть цилиндрическая поверхность. Утверждение "осьцилиндра(a b)" означает, что прямая a является осью цилиндра b.

Утверждение "круглый(a)" уточняет тип конуса либо цилиндра a.

Утверждения "эллипсоид(a)", "гиперболоид(a)", "параболоид(a)" означают, соответственно, что a есть эллипсоид, гиперболоид либо параболоид.

Утверждение "эллиптический(a)" уточняет тип цилиндра либо параболоида a.

Утверждение "гиперболический(a)" уточняет тип цилиндра либо параболоида a.

Утверждение "параболический(a)" уточняет тип цилиндра a.

Утверждения "однополостный(a)", "двуполостный(a)" уточняют тип гиперболоида a.

Утверждение "направляющая(a b)" означает, что линия a является направляющей цилиндра b. Утверждение "образующая(a b)" означает, что прямая a является образующей цилиндра либо конуса b.

Утверждение "осьвращения(a b)" означает, что прямая a представляет собой ось вращения геометрического тела b.

Утверждение "собствкоорд(a b)" означает, что a есть прямоугольная система координат, единичные векторы которой задают главные оси поверхности второго порядка b.

Утверждение "диаметрплоскость(a b)" означает, что плоскость a является диаметральной плоскостью поверхности второго порядка b.

1.2 Приемы, связанные с векторами

Усмотрение вектора

Теорема приема имеет вид "родобъекта(Вектор)", заголовок приема - "родобъекта". Прием применяется к подутверждениям вида "Вектор(a)", где a отлично от переменной. Справочник "тип" определяет список типов значения выражения a. Если в этом списке имеется символ "Вектор", то рассматриваемое подутверждение заменяется на логическую константу "истина". Уровень срабатывания равен 0.

Усмотрение противоречивых указаний на тип объекта

Теорема приема имеет вид "родобъекта(Вектор)", заголовок приема - "различимы". Прием применяется к подутверждениям вида "Вектор(a)", где a - переменная. Если в контексте находится утверждение вида $P(a)$, где P - тип объектов, отличный от типа "Вектор" и не являющийся его подтипом, то рассматриваемое подутверждение заменяется на логическую константу "ложь". Уровень срабатывания равен 1.

Регистрация в активе

$\forall_{AB}$(актив(вектор(AB)))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода(вектор(AB))" инициирует его срабатывание при усмотрении в задаче выражения "вектор(AB)", не связанного внешними кванторами и описателями. Допускаются задачи на доказательство, исследование, а также задачи на преобразование, имеющие цель "класс". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{AB}$(актив(прямая(AB)))

Условия срабатывания - те же, что в предыдущем случае. Таким образом, помимо вектора, в активе регистрируется также его прямая. Уровень срабатывания равен 1.

Конец вектора лежит на его прямой

$\forall_{ABCDPQ}$(вектор(AB) $=$ вектор(CD) & $A \in$ прямая(PQ) & $B \in$ прямая(PQ) & $C \in$ прямая(PQ) $\to D \in$ прямая(PQ))

Первый антецедент выделен указателем "равно", остальные - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCa}$(актив(прямая(AB)) & aвектор(AB) $=$ вектор(AC) $\to C \in$ прямая(AB))

Второй антецедент выделен указателем "равно", первый - указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

Общая стандартизация выражений

1. Вектор с совпадающими началом и концом.

   $\forall_{A}$(вектор(AA) $=$ вектор0)

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Лексикографическое упорядочение операндов в векторных суммах.

   Теорема приема - "коммутативно(плюсвект)". Заголовком служит символ "лексупорядочение". Уровень срабатывания равен 0.

3. Устранение вложенных векторных сумм.

   Теорема приема та же, заголовок - "спускоперандов". Уровень срабатывания равен 1.

4. Вынесение наружу минуса в численном коэффициенте.

   $\forall_{ab}((-a)b = -(ab))$

   Напомним, что формульный редактор отображает выражение "умножвект(A Bb)" как обычное произведение, причем численный коэффициент A расположен слева. Уровень срабатывания равен 1.

5. Вынесение наружу минуса перед вектором, умноженным на число.

   $\forall_{ab}(a(-b) = -(ab))$

   Уровень срабатывания равен 0.

6. Внесение минуса под сумму векторов.

   $\forall_{ab}(-(a+b) = -a - b)$

   Использование нормализаторов общей стандартизации позволяет за одно срабатывание приема опустить минус на каждое слагаемое суммы. "Уровень срабатывания равен 1.

7. Двойной минус.

   $\forall_{a}(- - a = a)$

   Здесь минусом обозначен символ "минусвект". Уровень срабатывания равен 0.

8. Сложение с нулевым вектором.

   $\forall_{a}(a + \text{вектор}0 = a)$

   Здесь имеется в виду символ "плюсвект". Уровень срабатывания равен 0.

9. Умножение на нулевой вектор.

   $\forall_{a}(a\text{вектор}0 = \text{вектор}0)$

   Имеется в виду символ "умножвект". Уровень срабатывания равен 0.

10. Умножение вектора на 0.

    $\forall_{a}(0 \cdot a = \text{вектор}0)$

    Аналогично предыдущему.

11. Минус нулевой вектор.

    $-\text{вектор}0 = \text{вектор}0$

    Уровень срабатывания равен 0.

12. Умножение вектора на 1.

    $\forall_{a}(1 \cdot a = a)$

    Уровень срабатывания равен 0.

13. Приведение подобных членов с векторами.

    $\forall_{abc}(ac + bc = (a+b)c)$

    Имеются в виду символы "плюсвект" и "умножвект". Уровень срабатывания равен 1.

14. Раскрывание скобок при умножении на векторную сумму.

    $\forall_{abcd}(a(bc + d) = (ab)c + ad)$

    Имеюьтся в виду операции "умножвект" и "плюсвект". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Задача не имееть ни цели "длина", ни цели "редакция". Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abcd}(a + b(c+d) = a + bc + bd)$

    Операции - те же, что и выше. Уровень срабатывания равен 1.

15. Вложенные умножения вектора на число.

    $\forall_{abc}(a(bc) = (ab)c)$

    Имеется в виду символ "умножвект". Уровень срабатывания равен 0.

16. Длина нулевого вектора.

    длина(вектор0) $= 0$

    Уровень срабатывания равен 0.

17. Вынесение за скобку общего числового множителя в выражении для длины векторной суммы.

    $\forall_{abc}(a = bc \to$ длина$(a) = |b|$длина$(c))$

    Выражение a имеет заголовок "плюсвект". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором разложения на множители векторных сумм "вектфакторизация". Уровень срабатывания равен 4.

18. Длина минус - вектора.

    $\forall_a($длина$(-a) = -$длина$(a))$

    Имеется в виду символ "минусвект". Уровень срабатывания равен 0.

19. Связь расстояния с длиной вектора.

    $\forall_{AB}($длина(вектор$(AB)) = l(AB))$

    В задаче имеется посылка, содержащая символ "расстояние" либо символ "Место"(последний используется в элементарной физике для указания положения материальной точки в заданный момент). Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abAB}(a =$ вектор(AB) & $b =$ длина$(a) \to l(AB) = b)$

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана в нем. Преобразуемое выражение расположено в посылке, не имеющей заголовка "актив" и не имеющей вида "$l(AB) = c$". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормдлина". Выражение b не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

20. Длина произведения вектора на число.

    $\forall_{ab}($длина$(ab) = |a|$длина$(b))$

    Имеется в виду символ "умножвект". Уровень срабатывания равен 1.

21. Перестановка концов вектора.

    $\forall_{AB}($вектор$(BA) = -$вектор$(AB))$

    Преобразуемое выражение встречается в задаче на доказательство либо на исследование, причем не расположено внутри терма "актив(...)". Имеется посылка, содержащая выражение "вектор(AB)". Для блокировки обратной замены прием создает специальный комментарий. Уровень срабатывания равен 1.

Общая стандартизация утверждений

1. Выражение векторного параметра из равенства $-a = b$.

   $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b) \rightarrow -a = b \leftrightarrow a = -b)$

   Имеется в виду символ "минусвект". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменная a идентифицируется с переменной, переменная b - с выражением, не являющимся переменной. Преобразуемое равенство является посылкой и не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

2. Приведение подобных членов с векторами, находящимися в разных частях равенства.

   $\forall_{ABabc}(a\text{вектор}(AB) = b\text{вектор}(AB) + c \leftrightarrow (a - b)\text{вектор}(AB) = c)$

   Уровень срабатывания равен 2.

3. Равенство двух коллинеарных векторов.

   $\forall_{abc}(\text{Вектор}(a) \rightarrow ba = ca \leftrightarrow a = \text{вектор0}\ \vee\ b = c)$

   Имеется в виду символ "умножвект". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

4. Равенство нулевому вектору произведения вектора на число.

   $\forall_{ab}(ab = \text{вектор0} \leftrightarrow a = 0\ \vee\ b = \text{вектор0})$

   Если утверждение расположено в условии задачи на описание, имеющей цель "свертка" прием блокируется. Если равенство расположено в посылке под корневым отрицанием, либо является условием задачи на описание, имеющей цель "или", то уровень срабатывания равен 0. Иначе он равен 2.

5. Разрешение относительно векторного параметра линейного уравнения в посылках.

   $\forall_{abcx}(\neg(a = 0) \rightarrow ax + b = c \leftrightarrow x = (1/a)(c - b))$

   Имеются в виду операции "умножвект" и "плюсвект". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Преобразуемое равенство является посылкой, причем x - переменная, не входящая в выражения a, b, c. Выражение c отлично от переменной. Уровень срабатывания равен 4.

6. Вектор нулевой длины.

   $\forall_{a}(\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{длина}(a) = 0 \leftrightarrow a = \text{вектор0})$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{a}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \neg(a = \text{вектор0}) \rightarrow \neg(\text{длина}(a) = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он заменяет соответствующее равенство либо его отрицание на логическую константу. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

7. Коллинеарность пропорциональных векторов.

   $\forall_{abc}(\text{коллинеарны}(ac, bc))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

8. Сокращение равенства векторов на числовой множитель.

   $\forall_{abcdefpqrs}(a = pq \ \& \ c = pr \ \& \ e = ps \ \& \ \neg(p = 0) \to ab + cd = ef \leftrightarrow qb + rd = sf)$

   Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

9. Усмотрение ортогональных векторов из соотношения для квадратов их длин.

   $\forall_{ab}((\text{длина}(a))^2 + (\text{длина}(b))^2 = (\text{длина}(a + b))^2 \leftrightarrow a \perp b)$

   Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abc}(a + b = c \to (\text{длина}(a))^2 = (\text{длина}(c))^2 - (\text{длина}(b))^2 \leftrightarrow a \perp b)$

   Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

10. Равенство нулевому вектору вектора, заданного своими координатами.

    $\forall_{Kabc}(\text{векткоорд}(K, (a, b, c)) = \text{вектор0} \leftrightarrow a = 0 \ \& \ b = 0 \ \& \ c = 0)$

    Уровень срабатывания равен 0.

11. Ориентация равенства для длины вектора.

    $\forall_{ab}(b = \text{длина}(a) \leftrightarrow \text{длина}(a) = b)$

    Прием применяется к посылке задачи на исследование. Выражение b не имеет невырожденных числовых атомов. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Уровень срабатывания равен 0.

12. Усмотрение различия векторов из различия их длин.

    $\forall_{abcd}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{длина}(a) = b \ \& \ \text{длина}(c) = d \ \& \ \neg(b - d = 0) \to \neg(a = c))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Он заменяет отрицание равенства, расположенное в условии задачи, на логическую константу "истина". Первый и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, c отличны от нулей. Уровень срабатывания равен 7.

13. Отбрасывание не используемой точки.

    $\forall_{ABa}(B - \text{точка} \ \& \ \text{вектор}(AB) = a \leftrightarrow \text{истина})$

    Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)". Конъюнктивные члены левой части эквивалентности идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "известно". Переменная B идентифицируется с неизвестной, не являющейся неизвестной внешней задачи на описание. Отсутствуют другие посылки, содержащие данную неизвестную, кроме, быть может, посылок вида "актив(...)". Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{ABa}(B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{вектор}(AB) = a \leftrightarrow \text{истина})$

    Аналогично предыдущему.

14. Отбрасывание минуса в условии коллинеарности.

    $\forall_{ab}(\text{коллинеарны}(-a, b) \leftrightarrow \text{коллинеарны}(a, b))$

    Уровень срабатывания равен 1.

15. Отбрасывание множителя либо двух минусов в условии однонаправленности.

    $\forall_{BCa}(0 < a \to$ однонаправлены$(aB, C) \leftrightarrow$ однонаправлены$(B, C))$

    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall ab($однонаправлены$(-a, -b) \leftrightarrow$ однонаправлены$(a, b))$

    Уровень срабатывания равен 0.

16. Выражение одного вектора через другой из соотношения пропорциональности.

    $\forall_{ABab}(\neg(a = 0) \to aA = bB \leftrightarrow A = (b/a)B)$

    Имеется в виду символ "умножвект". Прием применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение A - атомарное для типа "Вектор", т.е. либо является векторной переменной, либо не имеет векторного корневого операнда. Это выражение не встречается внутри a, b, B. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{ABab}(\neg(a = 0) \to aA + bB =$ вектор0 $\leftrightarrow A = -(b/a)B)$

    Аналогично предыдущему.

17. Равенство нулевому вектору.

    $\forall_{AB}($вектор$(AB) =$ вектор0 $\leftrightarrow A = B)$

    Уровень срабатывания равен 0.

18. Ортогональность нулевому вектору.

    $\forall_{a}($Вектор$(a) \to a \perp$ вектор0$)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

19. Переформулировка условия перпендикулярности вектора плоскости в терминах ортогональности векторов.

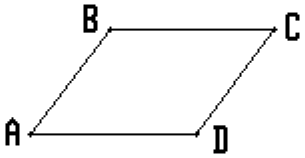
    $\forall_{ABCabc}($Вектор(c) & $a =$ вектор(AB) & $b =$ вектор(AC) &
    $\neg($коллинеарны$(a, b)) \to$ плоскость$(ABC) \perp c \leftrightarrow a \perp c$ & $b \perp c)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат символа "вектор". Уровень срабатывания равен 6.

Вывод соотношений для линейных комбинаций векторов

Все приемы этого раздела имеют заголовок "вывод".

1. Усмотрение равных векторов.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to$ вектор(AB) = вектор(DC))

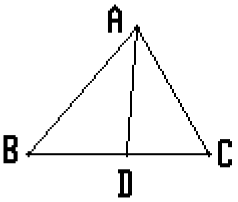
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрениив посылке задачи на исследование либо на доказательство выражения "вектор(AB)". Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражение "вектор(DC)" уже встречается в посылках. Не усматривается совпадение прямых AB и CD, либо BC и AD, либо AB и AD. Уровень срабатывания равен 2.

2. Усмотрение противоположных векторов.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to$ вектор(AB) = $-$вектор(CD))

Аналогично предыдущему приему, но в посылках встречается выражение "вектор (CD)".

3. Усмотрение линейной комбинации двух векторов.



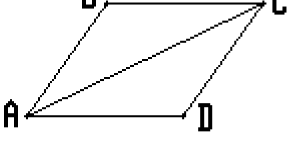
$\forall_{ABCDab}$(актив(вектор(AB)) & актив(вектор(AC)) & актив(вектор(AD)) & $al(BD) = bl(CD)$ & $D \in$ отрезок(BC) & $0 < a + b \to$ вектор$(AD) = a/(a+b) \cdot$ вектор$(AB) + b/(a+b) \cdot$ вектор(AC))

$\forall_{ABCDab}$(актив(вектор(BA)) & актив(вектор(AC)) & актив(вектор(AD)) & $al(BD) = bl(CD)$ & $D \in$ отрезок(BC) & $0 < a + b \to$ вектор$(AD) = -a/(a+b) \cdot$ вектор$(BA) + b/(a+b) \cdot$ вектор(AC))

$\forall_{ABCDab}$(актив(вектор(BA)) & актив(вектор(CA)) & актив(вектор(AD)) & $al(BD) = bl(CD)$ & $D \in$ отрезок(BC) & $0 < a + b \to$ вектор$(AD) = -a/(a+b) \cdot$ вектор$(BA) - b/(a+b) \cdot$ вектор(CA))

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Пятый антецедент выделен указателем "усм", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Расстояния BD и CD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

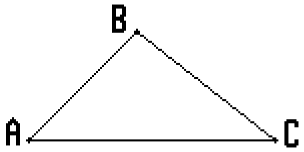
4. Представление вектора в виде суммы двух других векторов, имеющих с ним общее начало.



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to$ вектор(AC) = вектор(AB) + вектор(AD))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "вектор(AC)". В посылках задачи уже встречается либо вектор AB, либо вектор AD, быть может, с переставленными концами. Выражение "вектор(AC)", после обработки нормализатором общей стандартизации, содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема, в которой требование на векторы AB, AD заменено требованием, чтобы оба они имели тип "определимо". Напомним, что приемы пакетного индикатора "определимо" были перечислены в третьем томе монографии - в главе, посвященной элементарной геометрии. Уровень срабатывания данной версии тоже равен 4.

5. Представление вектора в виде суммы двух других векторов, начало одного из которых совпадает с концом другого.



$\forall_{ABC}$(актив(вектор(AB)) & актив(вектор(BC)) $\rightarrow$ вектор(AC) $=$ вектор(AB) $+$ вектор(BC))

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(BA)) & актив(вектор(CB)) $\rightarrow$ вектор(AC) $= -$вектор(BA)$-$ вектор(CB))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "вектор(AC)". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(AB)) $\rightarrow$ вектор(AC) $=$ вектор(AB) $+$ вектор(BC))

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(BC)) $\rightarrow$ вектор(AC) $=$ вектор(AB) $+$ вектор(BC))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование свободного вхождения выражения "вектор(AC)". Антецедент идентифицируется с посылкой. Хотя бы один из векторов AC, AB, BC известен, и хотя бы один - имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(BA)) $\rightarrow$ вектор(AC) $= -$вектор(BA) $+$ вектор(BC))

Аналогично предыдущему, но условие накладывается на векторы AC, BA и BC.

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(CB)) $\rightarrow$ вектор(AC) $=$ вектор(AB) $-$ вектор(CB))

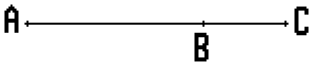
Аналогично предыдущему, но условие накладывается на векторы AC, AB и CB.

6. Представление вектора в виде суммы трех векторов.

$\forall_{ABCD}$(актив(прямая(AC)) & актив(прямая(BD)) $\rightarrow$ вектор(AB) $=$ вектор(AC)$+$ вектор(CD) $+$ вектор(DB))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "вектор(AB)". Антецеденты выделены указателем "усм". Выражения для векторов AC, CD, DB имеют тип "квазикатив", т.е. каждый из этих векторов, с точностью до перестановки концов, встречается в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 6.

7. Коллинеарные векторы.



$\forall_{ABC}$(актив(вектор(AC)) & вектор(AB) $= p$вектор(BC) $\rightarrow$ вектор(AC) $=$ $(1+p)$вектор(BC))

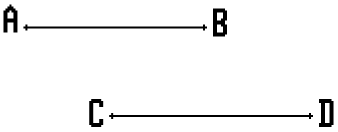
Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(AC)) & $A \in$ прямая(BC) & точкалуча(C, B, A) & разныеточки(A, C) $\rightarrow$ вектор(BC) $= (l(BC)/l(AC))$вектор(AC))

Указатель "контрольвывод" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "вектор(BC)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(AB)) & $B \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, B, C) & разныеточки(A, B) $\rightarrow$ вектор(AC) $= (l(AC)/l(AB))$вектор(AB))

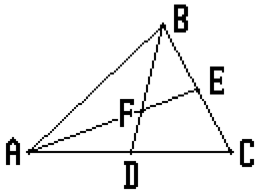
Аналогично предыдущему, но попытка применения приема инициируется при усмотрении выражения "вектор(AC)".



$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & однасторона($B, D,$ прямая(AC)) & разныепрямые(прямая(AC), прямая(CD)) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) $\rightarrow$ вектор(CD) $= (l(CD)/l(AB))$вектор(AB))

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "вектор(CD)". Первый антецедент выделен указателем "усм", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Выражение для вектора AB имеет тип "квазиактив". Уровень срабатывания равен 4.

8. Выражение вектора, соединяющего вершину треугольника с точкой пересечения медиан, через векторы сторон.



$\forall_{ABCDEF}(D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ отрезок(BD) & $F \in$ отрезок(AE) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) & актив(вектор(AF)) $\rightarrow$ вектор$(AF) = (1/3)$вектор$(AB) + (1/3)$вектор$(AC))$

$\forall_{ABCDEF}(D \in$ отрезок(AC) & $l(AD) = l(CD)$ & $E \in$ отрезок(BC) & $l(BE) = l(CE)$ & $F \in$ отрезок(BD) & $F \in$ отрезок(AE) & разныепрямые(прямая(CA), прямая(CB)) & актив(вектор(CF)) $\rightarrow$ вектор$(CF) = (1/3)$вектор$(CA) + (1/3)$вектор$(CB))$

Последний антецедент идентифицируется с посылкой, предпоследний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

9. Если вектор ортогонален трем векторам, два из которых неколлинеарны, то третий вектор является линейной комбинацией первых двух.

   $\forall_{abcdpq}($Вектор(a) & Вектор(b) & Вектор(c) & Вектор(d) & $a \perp d$ & $b \perp d$ & $c \perp d$ & $\neg($коллинеарны$(a,b)) \rightarrow p -$ число & $q -$ число & $c = pa + qb)$

   В консеквенте имеются в виду символы "умножвект" и "плюсвект". Антецеденты с пятого по седьмой идентифицируются с посылками. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Не усматривается компланарность векторов a, b, c. Выражения a, b, c, d не имеют заголовков "прямая", "плоскость". Уровень срабатывания равен 4.

10. Выражение вектора диагонали параллелепипеда через векторы трех ребер.

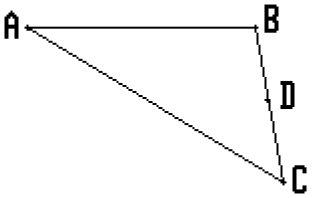
    $\forall_{ABCDEa}($параллелепипед(a) & ребро(отрезок$(AB), a)$ & ребро(отрезок$(AC), a)$ & ребро(отрезок$(AD), a)$ & диагональ(отрезок$(AE), a)$ & разныеточки(B,C) & разныеточки(B,D) & разныеточки(C,D) $\rightarrow$ вектор$(AE) =$ вектор$(AB) +$ вектор$(AC) +$ вектор$(AD))$

    Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками, последние три - обрабатываются проверочными операторами. Задача имеет посылку, содержащую символ "коорд". Уровень срабатывания равен 3.

Выражение вектора через линейную комбинацию других векторов

Все приемы этого раздела имеют заголовок "второйтерм".

1. Представление вектора в виде суммы двух других векторов, начало одного из которых совпадает с концом другого.

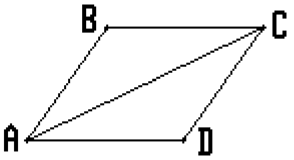


$\forall_{ABCDab}$(актив(вектор(BA)) & актив(вектор(BD)) & $D \in$ отрезок(BC) & $al(BD) = bl(CD)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow$ вектор$(AC) = -$вектор$(BA) +$ $((a + b)/a)$вектор(BD))

Прием применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, пятый - проверочным оператором. Условие задачи содержит подвыражения "вектор(BA)" и "вектор(BD)". Указатель "заменавхождений" обеспечивает одновременную замену всех вхождений выражения "вектор(AC)" в условие задачи. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDab}$(актив(вектор(AB)) & актив(вектор(BD)) & $D \in$ отрезок(BC) & $al(BD) = bl(CD)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow$ вектор$(AC) =$ вектор$(AB) +$ $((a + b)/b)$вектор(BD))

Аналогично предыдущему, но требуется, чтобы условие задачи содержало подвыражение "вектор(AB)".



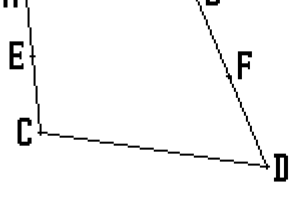
$\forall_{ABC}$(актив(вектор(BA)) $\rightarrow$ вектор$(CA) =$ вектор$(BA) +$ вектор(CB))

Прием применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Антецедент идентифицируется с посылкой. Условие содержит хотя бы одно из выражений "вектор(BA)", "вектор(CB)". Замена применяется ко всем вхождениям в условие терма "вектор(CA)". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABC}$(актив(вектор(AB)) $\rightarrow$ вектор$(AC) =$ вектор$(AB) +$ вектор(BC))

Аналогично предыдущему, но требуется, чтобы условие задачи содержало хотя бы одно из выражений "вектор(AB)", "вектор(BC)".

2. Представление вектора в виде суммы трех векторов.



$\forall_{ABCDEFabcd}$(актив(вектор(AB)) & актив(вектор(AE)) & актив(вектор(BF)) & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(BD) & $al(AE) = bl(AC)$ & $cl(BF) = dl(BD)$ & $\neg(d = 0)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow$ вектор(CD) $= -(a/b)$вектор(AE) $+$ вектор(AB) $+ (c/d)$вектор(BF))

Прием применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "усм", шестой и седьмой - обрабатываются пакетными синтезаторами. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Условие задачи содержит выражения "вектор(AB)", "вектор(AE)", "вектор(BF)". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFabcd}$(актив(вектор(AB)) & актив(вектор(EF)) & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ отрезок(BD) & $al(AE) = bl(AC)$ & $cl(BF) = dl(BD)$ & $ad - bc = 0$ & $\neg(b = 0) \rightarrow$ вектор(CD) $= (1 - (a/b))$вектор(AB) $+ (a/b)$вектор(EF))

Прием применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", пятый и шестой - обрабатываются пакетными синтезаторами. Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Условие задачи содержит выражения "вектор(AB)", "вектор(EF)". Уровень срабатывания равен 4.

Деление отрезка в заданном отношении

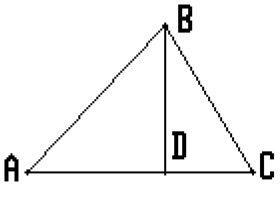
Для рассмотрения отношения векторов, проведенных из концов отрезка AB к точке C прямой AB, введен вспомогательный символ "делениеотрезка". Утверждение "делениеотрезка(A, C, B, p, q)" означает, что точка C лежит на прямой AB, причем скалярное отношение вектора AC к вектору CB равно p/q. Приводимые ниже приемы выписывают соотношения пропорциональности для коэффициентов p, q; при этом комментарий (делениеотрезка A C B) блокирует повторное выписывание таких соотношений.

1. Усмотрение коэффициентов из соотношения пропорциональности для векторов.

   $\forall_{ABCabcde}$(aвектор(AB) $= b$вектор(BC) & делениеотрезка(A, B, C, c, d) $\rightarrow$ $e -$ число & $c = be$ & $d = ae$ & $\neg(e = 0)$)

   Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Прием вводит новую переменную e. Уровень срабатывания равен 1.

2. Отрезки, на которые основание треугольника делится его высотой, если известны углы при основании треугольника.



$\forall_{ABCDabcde}$(прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & актив$(\angle(BAC))$ & актив$(\angle(BCA))$ & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(BCA) = c$ & делениеотрезка$(A, D, C, b, d) \to e -$ число & $b = e\,\mathrm{tg}\,c$ & $d = e\,\mathrm{tg}\,a$ & $\neg(e = 0))$

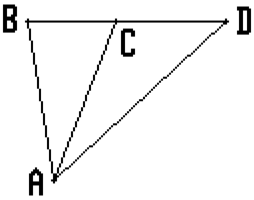
Первые три антецедента выделены указателем "усм", причем точка привязки выбрана в первом из них. Последний антецедент идентифицируется с посылкой. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Прием вводит новую переменную e. Уровень срабатывания равен 2.

3. Точка деления лежит на отрезке.

   $\forall_{ABCab}(B \in$ отрезок(AC) & делениеотрезка$(A, B, C, a, b) \to c -$ число & $a = cl(AB)$ & $b = cl(BC)$ & $\neg(c = 0))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Прием вводит новую переменную e. Уровень срабатывания приема равен 3.

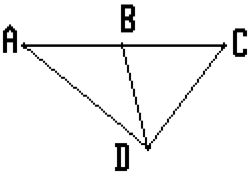
4. Отрезки, на которые основание делится биссектрисой.



   $\forall_{ABCDabcde}$(биссектриса$(BADC)$ & $C \in$ прямая(BD) & $al(AB) = bl(AD)$ & делениеотрезка$(B, C, D, c, d) \to e -$ число & $c = be$ & $d = ae$ & $\neg(e = 0))$

   Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй антецедент выделен указателем "усм", третий - обрабатывается пакетным синтезатором. Вводится новая переменная e. Уровень срабатывания равен 2.

5. Определение проведенного из заданной точки вектора, конец которого делит отрезок в заданном отношении.



   $\forall_{ABCDabp}(a \cdot$ вектор$(AB) = b \cdot$ вектор(BC) & актив$(l(BD))$ & актив$(l(AD))$ & актив$(l(CD))$ & $p = a + b$ & $\neg(a = 0)$ & разныеточки$(A, C) \to$ вектор$(DB) = (a/p)$вектор$(DA) + (b/p)$вектор$(DC))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, следующие три - выделены указателем "усм". Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор", шестой и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Расстояния AD и CD, а также угол ADC имеют тип "определимо". Выражение для расстояния BD имеет тип "неизв". В задаче не рассматривается система координат. Не усматривается принадлежность точки D прямой AC. Уровень срабатывания равен 4.

Уравнения с векторами

1. Выдача ответа задачи на описание.

   Для выдачи ответа задачи на описание, имеющей единственное условие "Вектор(a)", где a - неизвестная, создан прием с теоремой "явное(a набор(Вектор(a)) пустоеслово пустоеслово)". Заголовком приема служит терм "ответ(Вектор(a))". Уровень срабатывания этого приема равен 1.

   Для исключения векторной неизвестной, которую можно считать явно выраженной через остальные неизвестные задачи, созданы еще два приема, имеющие заголовок "ответзадачи". Теорема приема здесь имеет вид конъюнкции утверждений, идентифицируемых со всеми содержащими выделенную неизвестную условиями:

   Вектор(x)

   Указатель "исключнеизв(x)" означает, что прием сводит решение текущей задачи на описание к задаче, полученной из нее отбрасыванием неизвестной x и всех содержащих эту неизвестную условий. Указатель "смответ(1)" определяет выбор точки привязки в первом конъюнктивном члене теоремы приема. Уровень срабатывания равен 2.

   Вектор(x) & скалумнож$(a, x) = 0$ & скалумнож$(b, x) = 0$

   Переменная x идентифицируется с неизвестной задачи на описание, не входящей в выражения a, b. Указатель "смответ(2)" определяет выбор точки привязки во втором конъюнктивном члене. Уровень срабатывания равен 2.

2. Уравнение $-X = A$

   $\forall_{ax}$(Вектор$(x) \to -x = a \leftrightarrow x = -a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование. Допустимые заголовки надутверждений - "и", "или", "существует". Выражение x содержит неизвестные, выражение a - не содержит. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием блокируется, если утверждение содержится внутри дизъюнкции, выведенной для разбора случаев. Он также блокируется, если утверждение расположено под квантором существования, не являющимся параметрическим описанием и не имеющим комментария "серия". Уровень срабатывания равен 0, если либо решается задача на исследование, имеющая цель "известно", либо рассматриваемый терм задачи представляет собой дизъюнкцию. Иначе этот уровень равен 1.

   Создана также версия приема, применяемая к посылкам задачи на доказательство. Ее уровень срабатывания равен 0. Напомним, что в процессе решения задачи на доказательство некоторые переменные могут быть выделены как "известные" (они перечисляются в комментарии (известно ...)). При этом остальные переменные рассматриваются как неизвестные.

3. Уравнение $X + A = B$.

   $\forall_{abx}$(Вектор$(x) \to x + a = b \leftrightarrow x = b - a)$

   Преобразование применяется к подутверждению условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная x идентифицируется с ненулевой суммой всех слагаемых, содержащих неизвестные. Выражение b не содержит неизвестных. Общие ограничения на контекст и уровни срабатывания - те же, что в предыдущем приеме.

4. Уравнение $AX = B$.

   $\forall_{abx}(\text{Вектор}(x)\ \&\ \neg(a = 0) \to ax = b \leftrightarrow x = (1/a)b)$

   Преобразуется подутверждение условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование. Имеется в виду символ "умножвект". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение x содержит неизвестные; выражения a, b - не содержат. Либо преобразуется подутверждение посылки, либо число неизвестных более одной, либо отсутствует другое условие задачи на описание, эвристическая оценка сложности разрешения которого меньше, чем у текущего условия. Общие ограничения на контекст - те же, что и выше. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ax}(ax = \text{вектор}0 \leftrightarrow a = 0\ \vee\ x = \text{вектор}0)$

   Преобразуется условие задачи на описание, содержащее неизвестные. В списке условий отсутствует дизъюнкция. Уровень срабатывания равен 3.

5. Уравнение $XA = B$.

   $\forall_{abx}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \neg(a = \text{вектор}0) \to xa = b \leftrightarrow \text{коллинеарны}(a, b)\ \&\ x = \text{скалумнож}(a, b)/\text{скалумнож}(a, a))$

   Преобразуется условие задачи на описание. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение x содержит неизвестные, а выражения a, b - не содержат. Уровень срабатывания равен 4.

6. Выражение вектора через другие векторы из линейного уравнения.

   $\forall_{ABabc}(\neg(a = 0)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(c) \to a \cdot \text{вектор}(AB) + b = c \leftrightarrow \text{вектор}(AB) = (1/a)(c - b))$

   Преобразование применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения b, c не имеют атомарных векторных подвыражений, не являющихся переменными. Уровень срабатывания равен 0. Создана также версия приема, в которой требуется лишь, чтобы выражения b, c не содержали подвыражения "вектор(AB)", причем c не являлось бы атомарным векторным выражением, отличным от переменной. Уровень срабатывания этой версии равен 3.

   $\forall_{bcx}(x + b = c \leftrightarrow x = c - b)$

   Преобразование применяется к условию задачи на описание. Переменная x идентифицируется с неизвестной, причем она не входит в выражения b, c. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{abcx}(\neg(a = 0) \to ax + b = c \leftrightarrow x = (1/a)(c - b))$

   Преобразуется подутверждение условия задачи на описание. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная x идентифицируется с неизвестной, не входящей в выражения a, b, c. Выражение c не является неизвестной. Уровень срабатывания равен 4.

7. Линейное уравнение с двумя неизвестными векторами.

   $\forall_{abxy}(ax + by = \text{вектор0} \leftrightarrow a = 0 \ \& \ by = \text{вектор0} \ \vee$
   $\exists_c(c - \text{число} \ \& \ x = cy \ \& \ ac + b = 0))$

   Преобразование применяется к условию задачи на описание, имеющей не менее двух неизвестных. Переменная x идентифицируется с неизвестной, входящей в выражение b; переменная y - с выражением, не содержащим x, но содержащим другие неизвестные. Измененное условие снабжается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 5.

8. Система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными векторами.

   $\forall_{abcdefpxy}(p = bd - ae \ \& \ \neg(p = 0) \rightarrow ax + by = c \ \& \ dx + ey = f \leftrightarrow$
   $x = (b/p)f + (e/p)c \ \& \ y = (d/p)c + (a/p)f)$

   Переменные x, y, c, f принимают векторные значения, остальные переменные - численные. Прием применяется к паре посылок задачи на исследование, имеющей цель "известно". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных, выражения x и y - содержат. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

9. Группировка в одной части всех слагаемых уравнения.

   $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \rightarrow a = b \leftrightarrow a - b = \text{вектор0})$

   Преобразование применяется к условию задачи на описание либо к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не имеют атомарных векторных подвыражений, отличных от переменных. Они содержат неизвестные. Если одно из этих выражений представляет собой неизвестную, не входящую в другое, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

10. Условия компланарности и коллинеарности векторов.

    $\forall_{ax}(\neg(a = \text{вектор0}) \rightarrow \text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow \exists_y(y - \text{число} \ \& \ x = ya))$

    Преобразование применяется к условию задачи на описание. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение x содержит неизвестные, выражение a - не содержит. Измененное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{ax}(\text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow a = \text{вектор0} \ \vee \ \neg(a = \text{вектор0}) \ \&$
    $\exists_y(y - \text{число} \ \& \ x = ya))$

    Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

    $\forall_{abc}(\neg(\text{коллинеарны}(a, b)) \rightarrow \text{компланарны}(a, b, c) \leftrightarrow$
    $\exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ c = xa + yb))$

    Преобразуется условие задачи на описание. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение c содержит неизвестные, а выражения a, b - не содержат. Условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

11. Условие ортогональности векторов.

    $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow a \perp b \leftrightarrow \text{скалумнож}(a, b) = 0)$

Преобразование применяется к содержащему численную неизвестную условию задачи на описание. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

12. Представление неизвестного вектора в виде линейной комбинации трех известных некомпланарных векторов.

    $\forall_{abcx}(\text{Вектор}(x)$ & $\text{Вектор}(a)$ & $\text{Вектор}(b)$ & $\text{Вектор}(c)$ & $\neg(\text{компланарны}(a,b,c)) \rightarrow \exists_{pqr}(x = pa + qb + rc$ & $p - \text{число}$ & $q - \text{число}$ & $r - \text{число}))$

    Прием имеет заголовок "выводусловия". Точка привязки выбрана в первом антецеденте, идентифицируемом с условием задачи на описание. Следующие три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста точки привязки. Истинность последнего антецедента устанавливается с помощью вспомогательной задачи на доказательство, решаемой до максимального уровня 4. Переменная x идентифицируется с неизвестной; выражения a, b, c неизвестных не содержат. Выводимое утверждение сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 5.

13. Представление неизвестного вектора в виде линейной комбинации трех известных векторных произведений некомпланарных векторов.

    $\forall_{abcx}(\text{Вектор}(x)$ & $\text{Вектор}(a)$ & $\text{Вектор}(b)$ & $\text{Вектор}(c)$ & $\neg(\text{компланарны}(a,b,c)) \rightarrow \exists_{pqr}(x = p \cdot \text{вектумнож}(a,b) + q \cdot \text{вектумнож}(a,c) + r \cdot \text{вектумнож}(b,c)$ & $p - \text{число}$ & $q - \text{число}$ & $r - \text{число}))$

    Прием имеет заголовок "выводусловия". Антецеденты обрабатываются так же, как в предыдущем случае. Переменная x идентифицируется с неизвестной; выражения a, b, c не содержат неизвестных. Существуют условия задачи, содержащие подвыражения "скалумнож(x,a)" и "скалумнож(x,b)". Выводимое утверждение сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания приема равен 4.

14. Уравнение "вектумнож$(A, X) = B$".

    $\forall_{abx}(\text{Вектор}(x)$ & $\text{Вектор}(a)$ & $\text{Вектор}(b)$ & $\neg(a = \text{вектор0}) \rightarrow \text{вектумнож}(a,x) = b \leftrightarrow \text{скалумнож}(a,b) = 0$ & $\exists_c(c - \text{число}$ & $x = (1/\text{скалумнож}(a,a)) \cdot \text{вектумнож}(b,a) + ca))$

    $\forall_{abx}(\text{Вектор}(x)$ & $\text{Вектор}(a)$ & $\text{Вектор}(b)$ & $\neg(a = \text{вектор0}) \rightarrow \text{вектумнож}(x,a) = b \leftrightarrow \text{скалумнож}(a,b) = 0$ & $\exists_c(c - \text{число}$ & $x = (1/\text{скалумнож}(a,a)) \cdot \text{вектумнож}(a,b) + ca))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение x содержит неизвестные, выражения a и b - не содержат. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

15. Извлечение выражения для неизвестной длины вектора из равенства суммы векторов нулю.

    $\forall_{abx}(\text{длина}(a) = x$ & $a + b = \text{вектор0} \rightarrow \text{длина}(b) = x)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражение x не имеет невырожденных числовых атомов.

16. Переход от уравнения для векторов к уравнению для их длин.

    $\forall_{auvx}(au = v$ & длина$(a) = x \rightarrow |a|x =$ длина$(v))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражения a, x не имеют невырожденных числовых атомов с более чем одним корневым операндом. Эти выражения содержат численную неизвестную. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{auvw}(u + aw = v$ & коллинеарны$(u, v) \rightarrow |a|$длина$(w) =$ длина$(v - u))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{uvw}(u = v + w$ & однонаправлены$(v, -w) \rightarrow$ длина$(u) = |$длина$(v) -$ длина$(w)|)$

    Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

    $\forall_{abvw}(av = bw \rightarrow |a|$длина$(v) = |b|$длина$(w))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент выделен указателем "равно"; он идентифицируется с одной либо двумя посылками задачи на доказательство или на исследование. Выражения "длина(v)" и "длина(w)"встречаются в посылках этой задачи. Выводимое утверждение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

17. Существование вектора, удовлетворяющего заданным условиям.

    Все приемы этого пункта имеют заголовок "связка". Они применяются к группе всех условий задачи на описание, содержащих заданные неизвестные, и заменяют эту группу на условие существования таких неизвестных. Неизвестные идентифицируются с переменными связывающей приставки квантора существования в заменяемой части консеквента теоремы приема. Если консеквент не имеет вида эквивалентности, то группа заменяется на логическую константу "истина". Необходимость в приемах, усматривающих существование вектора, возникла при рассмотрении задач по элементарной физике, связанных с экстремальными значениями параметров.

    $\forall_{Ka}(a -$ число & прямкоорд$(K) \rightarrow \exists_v($Вектор$(v)$ & одномерный(v, K) & крд$(v, K, 1) = a))$

    Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - обрабатывается проверочным оператором. Неизвестная v не входит в выражения a, K. Задача не имеет цели "зависит ...". Уровень срабатывания приема равен 2.

    $\forall_{Ka}($прямкоорд$(K) \rightarrow \exists_v($Вектор$(v)$ & вправо(v, K) & длина$(v) = a) \leftrightarrow 0 < a)$

    Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем вместо символа "прямкоорд" в задачах по элементарной физике допускается использование символа "поверхнземли". Кроме того, вместо символа "вправо" может идентифицироваться любой из символов "влево", "вперед", "назад", "вверх", "вниз". Задача должна иметь цель "исключ", явно указывающую на необходимость исключения несущественных неизвестных. Уровень срабатывания приема равен 2.

    $\forall_{abc}($Вектор(c) & $a -$ число & $b -$ число $\rightarrow \exists_r($Вектор(r) & длина$(r) = a$ & уголмежду$(r, c) = b) \leftrightarrow 0 \leq a$ & $0 \leq b$ & $b \leq \pi)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Неизвестная r не встречается в выражениях a, b, c. Задача имеет цель "исключ". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCab}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & a – число & $0 < a \to \exists_u$(Вектор(u) & длина$(u) = a$ & уголмежду$(u$, вектор$(AB)) = b$ & уголмежду$(u$, вектор$(CA)) < \pi/2) \leftrightarrow 0 < b$ & b – число & $b < \pi$)

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, два других - обрабатываются проверочными операторами. Задача имеет цель "исключ". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kab}$(прямкоорд$(K) \to \exists_u$(Вектор(u) & вертплосквект(u, K) & крд$(u, K, 1) = a$ & крд$(u, K, 3) = b) \leftrightarrow a$ – число & b – число)

Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем вместо заголовка "прямкоорд" допускается заголовок "поверхнземли". Неизвестная u не встречается в выражениях a, b, K. Задача имеет цель "исключ". Уровень срабатывания равен 3.

18. Равенство двух векторов.

    $\forall_{ABCD}(A = C$ & $B = D \to$ вектор$(AB) =$ вектор$(CD))$

    Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с содержащим неизвестные условием задачи на описание, в которой не требуется получить полный ответ. Антецеденты выделены указателем "подборзначений". Прием делает попытку свести задачу к другой задаче, в которой условие равенства векторов заменено двумя условиями равенства концевых точек. Уровень срабатывания равен 5.

19. Конец вектора, отложенного от заданной точки.

    (a) Ввод в рассмотрение конца вектора.

    $\forall_{ABCa}(C$ – точка & $a \cdot$ вектор$(AB) =$ вектор$(AC))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в условии задачи на описание выражения "умножвект(a вектор(AB))", не связанного внешними кванторами и описателями. Задача не должна иметь цель "прямойответ". Выражения A, B не содержат неизвестных. Текущее условие содержит подвыражение "вектор(...)", в котором встречаются неизвестные. Отсутствует посылка вида "равно(умножвект(a вектор(AB)) вектор(AX))". Прием вводит новую переменную C. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{ABCDE}(E$ – точка & вектор$(AB) +$ вектор$(CD) =$ вектор(AE) & вектор$(BE) =$ вектор$(CD))$

    Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в условии задачи на описание подвыражения "плюсвект(вектор(AB) вектор(CD))", не связанного внешними кванторами и описателями. Выражения A, B, C, D не содержат неизвестных. Текущее условие содержит подвыражение "вектор(...)", имеющее неизвестные. Отсутствует посылка вида "равно(плюсвект(вектор(AB) вектор(CD)) вектор(AX))". Прием вводит новую переменную E. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Отождествление концов коллинеарных векторов, проведенных к прямой из точки вне этой прямой.

$\forall_{ABCDE}$(вектор$(AB) = a \cdot$ вектор(AC) & $B \in$ прямая(DE) &
$C \in$ прямая(DE) & $\neg(A \in$ прямая$(DE)) \to B = C)$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание; второй и третий - с утверждениями из контекста этого условия. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Либо B, либо C является неизвестной. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Определение конца вектора.

$\forall_{Abx}$(вектор$(Ax) = b \leftrightarrow x =$ конецвектора$(A, b))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные; выражения A, b - не содержат. Уровень срабатывания равен 4.

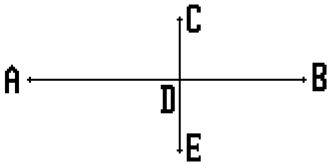
(d) Условие пересечения заданного множества с множеством концов векторов, коллинеарных заданному вектору.

$\forall_{CDM}(\neg(D \in M) \to \exists_a(a -$ число & конецвектора$(C, a \cdot$ вектор$(CD)) \in M) \leftrightarrow \neg(C = D)$ & $\exists_P(P \in M$ & $P -$ точка & $P \in$ прямая$(CD)))$

Прием имеет заголовок "связка" и применяется к группе условий задачи на описание для исключения несущественной неизвестной a. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная a не входит в выражения C, D, M. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы приема при компиляции. Уровень срабатывания равен 3.

Проекции

1. Проекция точки на прямую.



$\forall_{ABCDE}(C -$ точка $\to D -$ точка & $E -$ точка & прямая$(CE) \perp$ прямая(AB) &
$D \in$ прямая(CE) & $D \in$ прямая(AB) & $D =$ проекция$(C,$ прямая$(AB)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "проекция(C прямая(AB))". Антецедент идентифицируется с другой посылкой. Задача не имеет посылки вида "равно(проекция(C прямая(AB))X)", где X - переменная. Через точку C пока не проведен перпендикуляр к прямой AB. Прием вводит новые переменные D, E. Уровень срабатывания равен 1.

2. Умножение вектора на число.

$\forall_{Kav}$(проекция$(av, K) = a \cdot$ проекция$(v, K))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

3. Проекция вертикально направленного вектора на горизонтальную плоскость.

   $\forall_{Kv}(\text{вертикнапр}(v,K) \to \text{проекция}(v,\text{горизплоск}(K)) = \text{вектор0})$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1. Прием понадобился для задач по элементарной физике.

4. Проекция горизонтально направленного вектора на горизонтальную плоскость.

   $\forall_{Kv}(\text{горизплосквект}(v,K) \to \text{проекция}(v,\text{горизплоск}(K)) = v)$

   Аналогично предыдущему.

5. Координаты проекции вектора на горизонтальную плоскость.

   $\forall_{Kabuv}(\text{проекция}(u,\text{горизплоск}(K)) = v \to \text{крд}(v,K,1) = \text{крд}(u,K,1)\ \&\ \text{крд}(v,K,2) = \text{крд}(u,K,2))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 4.

6. Усмотрение проекции вектора на плоскость.

   $\forall_{ABCDEFG}(C = \text{проекция}(A,\text{плоскость}(EFG))\ \&\ D = \text{проекция}(B,\text{плоскость}(EFG))\ \&\ \text{актив}(\text{вектор}(AB)) \to \text{вектор}(CD) = \text{проекция}(\text{вектор}(AB),\text{плоскость}(EFG)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 3.

Угол между векторами

1. Идентичные векторы.

   $\forall_a(\text{уголмежду}(a,a) = 0)$

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Выражение через обычный угол.

   $\forall_{ABC}(\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB),\text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Если в задаче рассматривается прямоугольная система координат, то прием блокируется. Исключение составляет условие задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABC}(\text{уголмежду}(\text{вектор}(BA),\text{вектор}(AC)) = \pi - \angle(BAC))$

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{ABCDE}(E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,E)\ \&\ \text{точкалуча}(C,E,D) \to \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB),\text{вектор}(CD)) = \angle(AEC))$

   Прием выполняет замену слева направо. Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCa}(\text{уголмежду}(a,\text{вектор}(AC)) = 0 \to \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB),a) = \angle(BAC))$

   Указатель "смравно" разрешает идентификацию подвыражения "вектор(AC)" через посредство равенства из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCa}(\text{уголмежду}(a, \text{вектор}(CB)) = 0 \to \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), a) = \angle(ABC))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCab}(\text{однонаправлены}(a, \text{вектор}(AB))\ \&\ \text{однонаправлены}(b, \text{вектор}(CB)) \to \text{уголмежду}(a, b) = \angle(ABC))$

Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

3. Выражение синуса угла между векторами через косинус обычного угла.

   $\forall_{ABCv}(v \perp \text{вектор}(AB) \to \sin(\text{уголмежду}(v, \text{вектор}(CB))) = \cos(\angle(ABC)))$

   $\forall_{ABCv}(v \perp \text{вектор}(BA) \to \sin(\text{уголмежду}(v, \text{вектор}(CB))) = \cos(\angle(ABC)))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "уголмежду(v вектор(CB))" в посылке задачи на исследование, имеющей цель "известно". Уровень срабатывания равен 4.

4. Угол между ортогональными векторами.

   $\forall_{ab}(a \perp b \to \text{уголмежду}(a, b) = \pi/2)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

5. Угол между векторами равен нулю.

   $\forall_{abcd}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{уголмежду}(a, b) = 0 \to \text{уголмежду}(b, c) = \text{уголмежду}(a, c))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "контекст(...)" идентифицирует вхождение в посылки подвыражения "уголмежду(a, c)". Уровень срабатывания равен 2.

6. Угол между векторами равен пи.

   $\forall_{ABC}(\text{Вектор}(A)\ \&\ \text{Вектор}(B)\ \&\ \text{Вектор}(C)\ \&\ \text{уголмежду}(A, B) = \pi \to \text{уголмежду}(A, C) = \pi - \text{уголмежду}(B, C))$

   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения прием при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "уголмежду(A, C)". Последний антецедент идентифицируется с другой посылкой, первые три - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

7. Исключение минуса перед вектором.

   $\forall_{AB}(\text{уголмежду}(-A, B) = \pi - \text{уголмежду}(A, B))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

8. Исключение численного множителя перед вектором.

   $\forall_{abc}(\neg(a = 0) \to \cos(\text{уголмежду}(b, ac)) = \text{sg}(a)\cos(\text{уголмежду}(b, c)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abc}(|a|\cos(\text{уголмежду}(b,ac)) = a\cos(\text{уголмежду}(b,c)))$

Уровень срабатывания равен 2.

9. Явное выражение вектора через концевые точки.

   $\forall_{ABab}(\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB),a) = 0 \to \text{уголмежду}(a,b) = \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB),b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Если выражение b имеет заголовок "вектор", а выражение a - заголовок "сила" либо "Сила", то прием блокируется. Кроме того, преобразуемое выражение не должно располагаться под символами "Наименьший", "Наибольший". Такие символы встречаются в задачах по элементарной физике и указывают на экстремальные ситуации, возникающие при условии истинности прочих посылок задачи. Уровень срабатывания равен 2.

10. Выражение длины суммы либо разности векторов через их длины и угол между векторами.

    $\forall_{abcmn}(\text{уголмежду}(a,b) = c\ \&\ \text{длина}(a) = m\ \&\ \text{длина}(b) = n \to \text{длина}(a-b) = \sqrt{m^2+n^2-2mn\cos c})$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на исследование выражения "длина(плюсвект(a минусвект(b)))". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения c,m,n не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{abcmn}(\text{уголмежду}(a,b) = c\ \&\ \text{длина}(a) = m\ \&\ \text{длина}(b) = n \to \text{длина}(a+b) = \sqrt{m^2+n^2+2mn\cos c})$

    Аналогично предыдущему.

    $\forall_{abcpqruvw}(\neg(a=0)\ \&\ aw = bu + cv\ \&\ \text{уголмежду}(u,v) = p\ \&\ \text{длина}(u) = q\ \&\ \text{длина}(v) = r \to \text{длина}(w) = \sqrt{b^2q^2+c^2r^2+2|b||c|qr\cos(p)\text{sg}(bc)}/|a|)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "длина(w)" в посылке задачи на исследование. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a,b,c,p,q,r не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{abcdmn}(d = a + b\ \&\ \text{уголмежду}(a,b) = c\ \&\ \text{длина}(a) = m\ \&\ \text{длина}(b) = n \to \text{длина}(d) = \sqrt{m^2+n^2+2mn\cos c})$

    Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "длина(d)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражения c,m,n не содержат неизвестных, а выражение для длины вектора d - содержит. Уровень срабатывания равен 4.

    $\forall_{abcdmn}(a = b + d\ \&\ \text{уголмежду}(a,b) = c\ \&\ \text{длина}(a) = m\ \&\ \text{длина}(b) = n \to \text{длина}(d) = \sqrt{m^2+n^2-2mn\cos c})$

    Аналогично предыдущему.

$\forall_{abc}(a+b+c=\text{вектор0}\ \&\ \text{длина}(a)=\text{длина}(b)\to$
$\text{длина}(c)=2\text{длина}(a)\cos(\text{уголмежду}(a,b)/2))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "равно". Уровень срабатывания равен 4.

11. Длина суммы однонаправленных векторов.

    $\forall_{ab}(\text{однонаправлены}(a,b)\to\text{длина}(a+b)=\text{длина}(a)+\text{длина}(b))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

12. Соотношение для длин трех векторов, связанных линейным соотношением.

    $\forall_{abcmnpqr}(pa+qb=rc\ \&\ \text{уголмежду}(a,c)=m\ \&\ \text{уголмежду}(b,c)=n\ \&$
    $0\le p\ \&\ 0\le q\ \&\ 0\le r\to p\cdot\text{длина}(a)\sin m=q\cdot\text{длина}(b)\sin n\ \&\ r\cdot\text{длина}(c)\sin m=$
    $q\cdot\text{длина}(b)\sin(m+n))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Точка привязки выбрана в первом антецеденте, идентифицируемом с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. В этом антецеденте имеются в виду операции "умножвект" и "плюсвект". Второй и третий антецеденты тоже идентифицируются с посылками. Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

13. Теорема Пифагора в векторной форме.

    $\forall_{abcuvw}(u\perp w\ \&\ au+bv=cw\to a^2(\text{длина}(u))^2+c^2(\text{длина}(w))^2-$
    $b^2(\text{длина}(v))^2=0)$

    $\forall_{abcuvw}(u\perp w\ \&\ au+bv+cw=\text{вектор0}\to a^2(\text{длина}(u))^2+c^2(\text{длина}(w))^2-$
    $b^2(\text{длина}(v))^2=0)$

    Приемы имеют заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения "длина(u)", "длина(v)", "длина(w)" уже встречаются в посылках. Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

    $\forall_{abcuvw}(u\perp v\ \&\ au+bv=cw\to a^2(\text{длина}(u))^2+b^2(\text{длина}(v))^2-c^2(\text{длина}(w))^2=0)$

    Аналогично предыдущему, но требуется лишь, чтобы выражения a,b,c не имели нечисленных параметров. Уровень срабатывания равен 10.

14. Угол между суммой ортогональных векторов и одним из слагаемых.

    $\forall_{abpqr}(a\perp b\ \&\ \text{длина}(a)=p\ \&\ \text{длина}(b)=q\ \&\ \text{уголмежду}(a+b,a)=r\to$
    $q\cos r=p\sin r)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, два других - выделены указателем "идентификатор". Выражения p,q имеют тип "неизв", выражение r не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{abcp}(\text{уголмежду}(a,c)=p\ \&\ a+b=c\ \&\ a\perp b\to\text{длина}(a)=\text{длина}(c)\cos p)$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, причем точка привязки выбрана в третьем из них. Выражение p не содержит неизвестных. Выражения "длина(a)", "длина(c)" уже встречаются в посылках. Выводимое соотношение помечается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcpq}$(уголмежду$(a,c)=0$ & $b\perp c$ & длина$(a)=p$ & длина$(b)=q$ & $\neg(p=0)\to$ уголмежду$(a+b,c)=\operatorname{arctg}(q/p)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование выражения "уголмежду(плюсвект(a,b),d)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами; третий и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Выражения p,q не содержат неизвестных; выражение "уголмежду(плюсвект(a,b),c)" - содержит. Уровень срабатывания равен 5.

15. Тангенс угла между суммой двух векторов и направлением, перпендикулярным одному из них.

    $\forall_{ABCDabpuv}$(уголмежду(вектор$(AB),u)=0$ & уголмежду(вектор$(AB),v)=p$ & уголмежду(вектор$(CD),u+v)=0$ & прямая$(AC)\perp$ прямая(AB) & $D\in$ прямая(AB) & длина$(u)=a$ & длина$(v)=b\to\operatorname{tg}\angle(ACD)=$ $|a+b\cos p|/(b\sin p)$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "усм", шестой и седьмой - указателем "идентификатор". Выражения a,b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

16. Соотношение для косинусов попарных углов между тремя векторами.

    $\forall_{ABCab}$(Вектор(A) & Вектор(B) & Вектор(C) & $\cos$(уголмежду$(A,B))=a$ & $\cos$(уголмежду$(A,C))=b$ & $\cos$(уголмежду$(B,C))=c\to a^2+b^2+c^2-2abc=1$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, шестой - выделен указателем "идентификатор". Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Задача имеет фиктивную посылку "планиметрия". Выражение a имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

    $\forall_{ABCab}$(Вектор(A) & Вектор(B) & Вектор(C) & $\cos$(уголмежду$(A,B))=a$ & $\cos$(уголмежду$(A,C))=b$ & $\cos$(уголмежду$(B,C))=c$ & компланарны$(A,B,C)\to a^2+b^2+c^2-2abc=1$)

    Аналогично предыдущему, но наличие посылки "планиметрия" не требуется. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания прежний.

17. Отбрасывание слагаемого, ортогонального заданному направлению.

    $\forall_{ABCuv}$(прямая$(AC)\perp$ прямая(AB) & уголмежду$(v,$вектор$(AB))=0\to$ уголмежду(вектор$(CA),u+v)<\pi/2\leftrightarrow$ уголмежду(вектор$(CA),u)<\pi/2$)

    Уровень срабатывания равен 1.

18. Ориентация равенства.

    $\forall_{abc}$(Вектор(a) & Вектор(b) $\to c =$ уголмежду$(a, b) \leftrightarrow$ уголмежду$(a, b) = c$)

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к посылке задачи на исследование, причем перестановка операндов равенства при идентификации не допускается. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменная c идентифицируется с переменной. Хотя бы одно из выражений a, b содержит неизвестные. Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 1.

19. Ввод численного параметра для выражения одного из коллинеарных векторов через другой.

    $\forall_{ABCa}$(разныеточки(A, B) & коллинеарны(вектор$(AB), C) \to a$ – число &
    $C = a \cdot$ вектор(AB))

    Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием вводит новую переменную a. Выводимое утверждение снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 3.

Скалярное умножение

1. Общая стандартизация выражений.

    (a) Лексикографическое упорядочение операндов.

    Прием имеет теорему "коммутативно(скалумнож)". Уровень срабатывания равен 0.

    (b) Умножение коллинеарных векторов.

    $\forall_{ABab}$(скалумнож($a \cdot$ вектор$(AB), b \cdot$ вектор$(AB)) = ab(l(AB))^2$)

    $\forall_{ABab}$(скалумнож($a \cdot$ вектор$(AB), b \cdot$ вектор$(BA)) = -ab(l(AB))^2$)

    Прием блокируется в задачах на доказательство, имеющих комментарий "скалумнож". Такой комментарий означает, что скалярное произведение было введено специально. Аналогичная блокировка имеет место для остальных приемов данного пункта. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_a$(скалумнож$(a, a) =$ (длина$(a))^2$)

    Выражение "длина(a)" встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{AB}$(уголмежду$(A, B) = 0 \to$ скалумнож$(A, B) =$ длина(A)длина(B))

    $\forall_{AB}$(уголмежду$(A, B) = \pi \to$ скалумнож$(A, B) = -$длина(A)длина(B))

    Антецедент выделен указателем "идентификатор". В условиях задач на описание прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{AB}$(однонаправлены$(A, B) \to$ скалумнож$(A, B) =$ длина(A)длина(B))

    $\forall_{AB}$(однонаправлены$(-A, B) \to$ скалумнож$(A, B) = -$длина(A)длина(B))

    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Если задача не имеет типа "исследовать", причем текущий терм содержит хотя бы еще одно скалярное произведение, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcd}$(коллинеарны(a,b) & $cd \leq 0$ & $\neg(d=0) \rightarrow d \cdot$ скалумнож$(a,b) = c \leftrightarrow$ длина(a)длина$(b)d = -c$ & однонаправлены$(a,-b)$)

$\forall_{abcd}$(коллинеарны(a,b) & $0 \leq cd$ & $\neg(d=0) \rightarrow d \cdot$ скалумнож$(a,b) = c \leftrightarrow$ длина(a)длина$(b)d = c$ & однонаправлены(a,b))

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Умножение на нулевой вектор.

$\forall_a$(скалумнож$(a,$ вектор$0) = 0$)

Уровень срабатывания равен 0.

(d) Переход к сумме скалярных произведений.

$\forall_{abc}$(скалумнож$(a, b+c) =$ скалумнож$(a,b) +$ скалумнож(a,c))

Прием не применяется в условиях задач на этапе редактирования ответа. Кроме того, он блокируется, если выражение находится под описателем, связывающим какую-либо переменную выражения a и не связывающим переменных выражений b, c. Если терм задачи содержит символ "вектумнож", то уровень срабатывания равен 3, иначе он равен 1.

(e) Вынесение минуса.

$\forall_{ab}$(скалумнож$(-a,b) = -$скалумнож(a,b))

Уровень срабатывания равен 0.

(f) Вынесение численного множителя.

$\forall_{abc}$(скалумнож$(ab,c) = a \cdot$ скалумнож(b,c))

Уровень срабатывания равен 1.

(g) Скалярное произведение ортогональных векторов.

$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \rightarrow$ скалумнож(вектор(AB), вектор$(CD)) = 0$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "усм". Для посылки, помеченной комментарием "перпендикулярно", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1. Для той же теоремы создан прием с заголовком "вывод", у которого антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Требуется, чтобы символ "скалумнож" уже встречался в задаче, а прямоугольная система координат - не рассматривалась. Уровень срабатывания этой версии равен 5.

$\forall_{ab}(a \perp b \rightarrow$ скалумнож$(a,b) = 0$)

Прием используется в задачах на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Посылки вида "скалумнож$(a,b) = 0$"приемом не затрагиваются. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Изменение знака векторной суммы.

$\forall_{ab}$(скалумнож$(a-b, b-a) = -$скалумнож$(a-b, a-b)$)

Указатель "нормзнака" группирует внутри выражения b все слагаемые со знаком "минус". Уровень срабатывания равен 2.

(i) Умножение на вектор, параллельный оси координат.

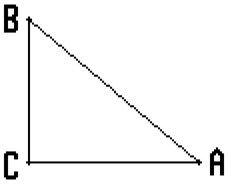
$\forall_{ABK}$(крд$(A,K,1) =$ крд$(B,K,1)$ & крд$(A,K,2) =$ крд$(B,K,2)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow$ скалумнож(вектор$(AB), c) =$ (крд$(B,K,3) -$ крд$(A,K,3)$)крд$(c,K,3)$)

Третий антецедент идентифицируется с посылкой, два первых - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKa}$(вертикнапр(a, K) & прямкоорд$(K) \to$ скалумнож(вектор$(AB), a) =$ (крд$(B, K, 3) -$ крд$(A, K, 3)$)крд$(a, K, 3)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения "крд(B, K, 3)" и "крд(A, K, 3)" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 4.

(j) Рассмотрение прямоугольного треугольника.



$\forall_{ABCa}$(прямая$(AC) \perp$ прямая(BC) & однонаправлены(вектор$(AB), a) \to$ скалумнож$(a,$ вектор$(CA)) = -l(AC)$длина$(a)\cos\angle(BAC)$)

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

2. Общая стандартизация утверждений.

   (a) Равенство скалярного квадрата нулю.

   $\forall_a$(скалумнож$(a, a) = 0 \leftrightarrow a =$ вектор0)

   Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Равенство скалярного произведения нулю.

   $\forall_{ab}$(скалумнож$(a, b) = 0 \leftrightarrow a \perp b$)

   Прием применяется к посылке задачи на исследование, в которой встречаются понятия из элементарной физики. Выражения a, b не имеют заголовка "Сила". Уровень срабатывания равен 1. Создана также версия приема, применяемая к подутверждению содержащего неизвестные условия задачи на описание при редактировании ответа. Уровень срабатывания этой версии равен 4.

3. Выражение скалярного произведения векторов через их длины и косинус угла между ними.

   $\forall_{abc}$(уголмежду$(a, b) = c \to$ скалумнож$(a, b) =$ длина(a)длина$(b)\cos c$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение c не содержит невырожденных числовых атомов. Ни для одного из векторов a, b нет посылки, определяющей координаты этого вектора. Заменяемое выражение содержит неизвестные и не входит в посылку вида "скалумнож$(a, b) = p$", где p не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCbcdp}(\angle(ABC) = p$ & прямая$(BC) \perp$ прямая(AC) & актив$(\angle(ABC))$ & коллинеарны$(b,$ вектор$(AB))$ & $cd \leq 0 \to d \cdot$ скалумнож(вектор$(CA), b) = c \leftrightarrow$ $dl(AC)$длина$(b)\sin p = -c$)

Прием применяется к подутверждению посылки задачи на исследование. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", следующие два - указателем "усм". Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abc}(\text{уголмежду}(a, \text{напрпути}(b)) = c \to \text{скалумнож}(a, \text{напрпути}(b)) = \text{длина}(a) \cos c)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". В посылках отсутствует равенство, определяющее координаты вектора "напрпути(b)". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABC}(\text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), C) = l(AB)\text{длина}(C) \cdot \cos(\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), C)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение "длина(C)" встречается в посылках, причем отсутствует равенство, определяющее координаты вектора C. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCD}(\text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = l(AB)l(CD) \cdot \cos(\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Прямые AB и CD уже рассматриваются в задаче, причем выделена точка их пересечения. Уровень срабатывания приема равен 6.

4. Выражение скалярного произведения через прямоугольные координаты.

$\forall_{Kabcdef}(\text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (b, c) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (e, f) \to \text{скалумнож}(a, d) = be + cf)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "скалумнож(a, d)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Выражения b, c, e, f не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabcdefgh}(\text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (b, c, g) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (e, f, h) \to \text{скалумнож}(a, d) = be + cf + gh)$

Аналогично предыдущему. Создана также версия данного приема, срабатывающая на уровне 5. У нее никаких ограничений на выражения b, c, e, f, g, h не накладывается.

$\forall_{Kabc}(\text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (c, 0, 0) \to \text{скалумнож}(a, b) = c \cdot \text{крд}(b, K, 1))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabc}(\text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (0, 0, c) \to \text{скалумнож}(a, b) = c \cdot \text{крд}(b, K, 3))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kabcdefgh}(\text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{крд}(a, K, 1) = b \ \& \ \text{крд}(a, K, 2) = c \ \& \ \text{крд}(a, K, 3) = g \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (e, f, h) \to \text{скалумнож}(a, d) = be + cf + gh)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на исследование. Первые четыре антецедента идентифицируются с другими посылками, причем точка привязки выбрана в четвертом из них. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражения b, c, e, f, g, h не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

5. Выражение длины вектора через скалярное произведение.

   $\forall_{ABa}(a = \text{вектор}(AB) \rightarrow (l(AB))^2 = \text{скалумнож}(a, a))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Он применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование, содержащему неизвестные. Антецедент идентифицируется с другой посылкой, причем выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

6. Переформулировка условия перпендикулярности прямых либо векторов в терминах равенства нулю скалярного произведения.

   $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ a \perp b \rightarrow \text{скалумнож}(a, b) = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Имеется посылка, определяющая координаты одного из векторов a, b. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b) \rightarrow a \perp b \leftrightarrow \text{скалумнож}(a, b) = 0)$

   Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ABCDKabcd}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{вектор}(CD), K) = (c, d)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow ac + bd = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Точка привязки выбрана в четвертом антецеденте, выделенном указателем "усм". Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выводимое равенство неконстантное. Уровень срабатывания равен 6.

   $\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \leftrightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = 0)$

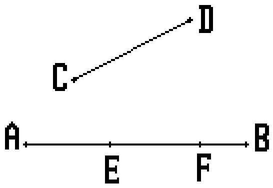
   Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 14.

7. Определение ортогональной проекции вектора на плоскость с помощью скалярного произведения.

   $\forall_{ABCDEa}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{плоскость}(CDE) \rightarrow$
   $\text{проекция}(a, \text{плоскость}(CDE)) = a -$
   $(\text{скалумнож}(a, \text{вектор}(AB))/\text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AB)))\cdot\text{вектор}(AB))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "проекция(a плоскость(CDE))". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

8. Определение ортогональной проекции вектора на прямую с помощью скалярного произведения.



$\forall_{ABEFa}(E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & разныеточки(E, F) & Вектор$(a) \to$ проекция$(a,$ прямая$(AB)) =$ (скалумнож$(a,$ вектор$(EF))/(l(EF))^2) \cdot$ вектор$(EF))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "проекция(a прямая(AB))". Первые два антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

9. Попытка определения скалярного произведения с использованием линейного соотношения, содержащегося в посылках.

   $\forall_{abcdp}(\neg(p = 0)$ & $q =$ скалумнож(a, d) – скалумнож(a, c) & $pb + c = d \to$ скалумнож$(a, b) = q/p)$

   Прием имеет заголовок "творойтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Последний антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Выражения p, q не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания приема равен 4.

10. Выражение скалярного произведения из линейного уравнения.

    $\forall_{abpq}(\neg(p = 0) \to p \cdot$ скалумнож$(a, b) = q \leftrightarrow$ скалумнож$(a, b) = q/p)$

    Прием имеет заголовок "творойтерм" и применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение p не содержит неизвестных. Выражение q не имеет заголовка "скалумнож". Уровень срабатывания равен 2.

11. Ориентация равенства.

    $\forall_{abc}(a =$ скалумнож$(b, c) \leftrightarrow$ скалумнож$(b, c) = a)$

    Прием применяется к посылке задачи. При идентификации блокируется перестановка частей равенства. Выражение a не содержит символов "скалумнож" и "вектумнож". Уровень срабатывания равен 1.

12. Попытка определить длину вектора с помощью нормализатора "значскалумнож".

    $\forall_{ABa}$(скалумнож(вектор(AB), вектор$(AB)) = a$ & актив(вектор$(AB)) \to$ $l(AB) = \sqrt{a})$

    Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Расстояние AB уже рассматривается в задаче и имеет тип "неизв". Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором вычисления скалярного произведения "значскалумнож". Приемы этого нормализатора будут приведены ниже. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 5.

13. Попытка определить угол между векторами с помощью нормализатора "значскалумнож".

    $\forall_{ABCDEFa}$(актив($\angle(BAC)$) & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AC) & актив(вектор(AD)) & актив(вектор(AE)) & точкалуча(A, B, D) & точкалуча(A, C, E) & скалумнож(вектор(AD), вектор(AE)) $= a \to$ $a = \cos(\angle(BAC))l(AD)l(AE)$)

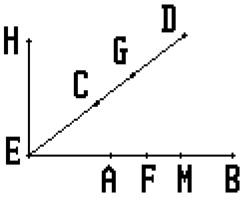
    Прием имеет заголовок "вывод". Первый, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй, третий, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор", и его левая часть обрабатывается нормализатором "значскалумнож". Выражение a не содержит неизвестных. Расстояния AD, AE известны, угол BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 7.

14. Попытка доказательства тождества для расстояний путем перехода к скалярному произведению.

    $\forall_{ABa}(a = l(AB) \to a^2 =$ скалумнож(вектор(AB), вектор(AB)))

    Прием имеет заголовок "воройтерм". Он применяется к подвыражению условия задачи на доказательство при наличии режима усилителя. Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Задача должна иметь комментарий "скалумнож", форсирующий использование скалярных произведений. Переменная a идентифицируется с переменной. Уровень срабатывания равен 2. На той же теореме создана еще одна версия приема. В ней не требуется наличие комментария "скалумнож", причем прием не преобразует текущую задачу, а предпринимает попытку решить вспомогательную задачу, получаемую указанной заменой. Во вспомогательной задаче вводится комментарий "скалумнож". Уровень срабатывания этой версии равен 8.

15. Ввод прямоугольной системы координат.



$\forall_{ABCDEFGH}$($E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) & актив(вектор(AB)) & актив(вектор(CD)) & $G \in$ прямая(CD) & разныеточки(E, G) & $M \in$ прямая(AB) & разныеточки(E, M) $\to$ F – точка & $F \in$ прямая(AB) & $l(EF) = 1$ & $\neg(E \in$ интервал(FM)) & H – точка & прямая(EH) $\perp$ прямая(AB) & $l(EH) = 1$ & однасторона(H, G, прямая(AB)) & прямкоорд(K) & $K = (E, F, H)$)

Прием имеет заголовок "вывод" применяется в планиметрических задачах, пока не имеющих посылки вида "прямкоорд(...)". При усмотрении двух пересекающихся прямых, на которых выделены векторы, прием связывает с точкой пересечения этих прямых прямоугольную систему координат K. Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Первый, второй, шестой и восьмой антецеденты выделены указателем "усм". Третий, седьмой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В посылках задачи встречается скалярное произведение вектора CD на некоторый вектор. Прием вводит новые переменные H, F, K. Уровень срабатывания равен 7.

16. Нормализатор общей стандартизации "нормскалумнож".

    В нормализаторе собраны приемы простейшей стандартизации скалярных произведений. Как и все нормализаторы общей стандартизации, данный нормализатор является корневым, т.е. заменяемая часть теоремы приема идентифицируется со всем текущим термом, а не с его подтермом.

    (a) Умножение коллинеарных векторов.

    $\forall_{ABab}$(скалумнож($a \cdot$ вектор$(AB), b \cdot$ вектор$(AB)) = ab(l(AB))^2$)

    $\forall_{ABab}$(скалумнож($a \cdot$ вектор$(AB), b \cdot$ вектор$(BA)) = -ab(l(AB))^2$)

    Приемы блокируются, если текущая задача имеет тип "доказать", причем символ "скалумнож" входит в ее комментарии. Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Умножение на нулевой вектор.

    $\forall_a$(скалумнож(a, вектор0) $= 0$)

    Уровень срабатывания равен 1.

    (c) Вынесение минуса.

    $\forall_{ab}$(скалумнож$(-a, b) = -$(скалумнож(a, b)))

    Уровень срабатывания равен 1.

    (d) Вынесение численного множителя.

    $\forall_{abc}$(скалумнож$(ab, c) = a \cdot$ скалумнож(b, c))

    Уровень срабатывания равен 1.

    (e) Скалярное произведение ортогональных векторов.

    $\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \rightarrow$ скалумнож(вектор(AB), вектор(CD)) $= 0$)

    Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ab}$(уголмежду$(a, b) = \pi/2 \rightarrow$ скалумнож$(a, b) = 0$)

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 1.

    (f) Усмотрение значения из посылок.

    $\forall_{abc}$(скалумнож$(a, b) = c \rightarrow$ скалумнож$(a, b) = c$)

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение c не содержит символа "скалумнож". Уровень срабатывания равен 2.

    (g) Лексикографическое упорядочение операндов.

    Теорема приема - "коммутативно(скалумнож)". Прием имеет заголовок "замена(лексупорядочение нормскалумнож)". Уровень срабатывания равен 2.

17. Нормализатор вычисления скалярного произведения "значскалумнож".

Нормализатор не является корневым, т.е. приводимые ниже приемы замены применяются к произвольным подвыражениям текущего терма. Приемы для умножения коллинеарных векторов, умножения на нулевой вектор и вынесения минуса - такие же, как в нормализаторе "нормскалумнож". Кроме того, введены следующие приемы:

(a) Переход к сумме скалярных произведений.

$\forall_{abc}(\text{скалумнож}(a, b+c) = \text{скалумнож}(a, b) + \text{скалумнож}(a, c))$

Уровень срабатывания равен 2.

(b) Вынесение численного множителя.

$\forall_{abc}(\text{скалумнож}(ab, c) = a \cdot \text{скалумнож}(b, c))$

Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcd}(a = bc \to \text{скалумнож}(a, d) = b \cdot \text{скалумнож}(c, d))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором вынесения численного множителя из векторного выражения "вектфакторизация". Для срабатывания приема требуется наличие комментария "направл". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Скалярное произведение ортогональных векторов.

$\forall_{ABCD}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \to \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = 0)$

Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(a \perp b \to \text{скалумнож}(a, b) = 0)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Выражение скалярного произведения векторов через их длины и косинус угла между ними.

$\forall_{ABCDa}(\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = a \ \& \ l(AB) = b \ \& \ l(CD) = c \to \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = bc \cos a)$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "нормуголмежду". Выражения a, b, c не содержат неизвестных. В задаче рассматривается точка пересечения прямых AB и CD. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Раскрывание скобок.

$\forall_{abcd}(a(b+c) = d \to a(b+c) = d)$

Имеются в виду обычные сложение и умножение. Антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Хотя бы одно из выражений b, c содержит символ "скалумнож". Уровень срабатывания равен 1.

(f) Преобразование дроби с суммой в числителе к виду суммы дробей.

$\forall_{abc}((a+b)/c = a/c + b/c)$

Имеются в виду обычные операции над числами. Выражение a содержит символ "скалумнож". Уровень срабатывания равен 1.

(g) Устранение вложенных сумм.

Теорема приема имеет вид "коммутативно(плюс)", заголовок приема - "замена(спускоперандов значскалумнож)". Уровень срабатывания равен 1.

(h) Лексикографическое упорядочение операндов скалярного произведения.

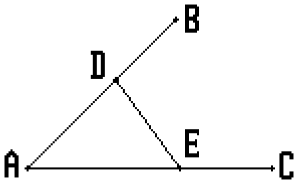
Теорема приема имеет вид "коммутативно(скалумнож)", заголовок приема - "замена(лексупорядочение значскалумнож)". Уровень срабатывания равен 3.

(i) Приведение подобных членов со скалярным произведением.

$\forall_{abcdef}(a \cdot \text{скалумнож}(b, c)/d + e \cdot \text{скалумнож}(b, c)/f = (a/d + e/f)\text{скалумнож}(b, c))$

Выражения a, d, e, f не содержат символа "скалумнож". Допускаются вырожденные единичные значения этих выражений. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Определение скалярного произведения по теореме косинусов.



$\forall_{ABCDEabcde}(D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, D)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, E)\ \&\ l(AD) = a\ \&\ l(AE) = b\ \&\ l(DE) = c\ \&\ l(AB) = d\ \&\ l(AC) = e\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = de(a^2 + b^2 + c^2)/(2ab))$

Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

(k) Использование прямоугольных координат.

$\forall_{Kabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(a, K) = (b, c)\ \&\ \text{коорд}(d, K) = (e, f) \rightarrow \text{скалумнож}(a, d) = be + cf)$

$\forall_{Kabcdefgh}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(a, K) = (b, c, g)\ \&\ \text{коорд}(d, K) = (e, f, h) \rightarrow \text{скалумнож}(a, d) = be + cf + gh)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

Векторное умножение

1. Общая стандартизация выражений.

(a) Умножение на нулевой вектор.

$\forall_a(\text{вектумнож}(a, \text{вектор0}) = \text{вектор0})$

$\forall_a(\text{вектумнож}(\text{вектор0}, a) = \text{вектор0})$

Уровень срабатывания равен 0.

(b) Равные операнды.

$\forall_a(\text{вектумнож}(a, a) = \text{вектор0})$

Уровень срабатывания равен 0.

(c) Перестановка операндов.

$\forall_{ab}(\text{вектумнож}(a, b) = -\text{вектумнож}(b, a))$

Выражение "вектумнож(b, a)" лексикографически предшествует исходному выражению. При редактировании ответов задач на описание либо преобразование прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Вынесение наружу минуса.

$\forall_{ab}(\text{вектумнож}(a, -b) = -\text{вектумнож}(a, b))$

$\forall_{ab}(\text{вектумнож}(-b, a) = -\text{вектумнож}(b, a))$

Уровень срабатывания равен 0.

(e) Вынесение наружу численного множителя.

$\forall_{abc}(\text{вектумнож}(ab, c) = a \cdot \text{вектумнож}(b, c))$

$\forall_{abc}(\text{вектумнож}(c, ab) = a \cdot \text{вектумнож}(c, b))$

Уровень срабатывания равен 2.

(f) Умножение на сумму векторов.

$\forall_{abc}(\text{вектумнож}(a, b + c) = \text{вектумнож}(a, b) + \text{вектумнож}(a, c))$

$\forall_{abc}(\text{вектумнож}(b + c, a) = \text{вектумнож}(b, a) + \text{вектумнож}(c, a))$

При редактировании ответов задач на описание либо на преобразование прием блокируется. Кроме того, он блокируется в условии задачи на описание, если a содержит неизвестные, а b, c - не содержат. Наконец, не допускается размещение преобразуемого выражения в области действия описателя, связывающего какую-либо переменную выражения a и не связывающего переменных выражений b, c. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Скалярное произведение векторных произведений.

$\forall_{abcd}(\text{скалумнож}(\text{вектумнож}(a, b), \text{вектумнож}(c, d)) =$
$\text{скалумнож}(a, c)\text{скалумнож}(b, d) - \text{скалумнож}(b, c)\text{скалумнож}(a, d))$

Уровень срабатывания равен 4.

(h) Упрощение векторной суммы с векторным произведением ортогональных векторов.

$\forall_{abcpqr}(\neg(\text{скалумнож}(a, c) = 0)\ \&\ \text{скалумнож}(b, c) = 0\ \&$
$r = q - \text{скалумнож}(a, \text{вектумнож}(c, b)) \cdot p/\text{скалумнож}(a, c) \rightarrow$
$p \cdot \text{вектумнож}(b, c) + qc =$
$p \cdot (\text{скалумнож}(c, c)/\text{скалумнож}(a, c)) \cdot \text{вектумнож}(b, a) + rc)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется на этапе редактирования ответа к подвыражению условия задачи на преобразование либо на описание. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Правая часть последнего антецедента упрощается с помощью вспомогательной задачи. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри выражения q подвыражения a, отличного от выражений b, c и являющегося операндом скалярного либо векторного произведения. Проверяется, что выражение r короче выражения q. Уровень срабатывания равен 5.

(i) Вложенные векторные произведения.

$\forall_{abc}(\text{вектумнож}(\text{вектумнож}(a, b), c) = -(\text{скалумнож}(b, c) \cdot a) +$
$\text{скалумнож}(a, c) \cdot b)$

$\forall_{abc}$(вектумнож(a, вектумнож(b, c)) = скалумнож(a, c) $\cdot\, b$) − скалумнож(a, b) $\cdot\, c$)

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

2. Общая стандартизация утверждений

   (a) Равенство векторного произведения нулевому вектору.

   $\forall_{ab}$(вектумнож(a, b) = вектор0 $\leftrightarrow$ коллинеарны(a, b))

   Выражения a, b не имеют заголовка "вектумнож". Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Равенство линейной комбинации векторных произведений нулевому вектору.

   $\forall_{abcpqr}$($\neg$(скалумнож(a, вектумнож(b, c)) $= 0$) & ($\neg(p = 0) \vee \neg(q = 0) \vee \neg(r = 0)$) $\rightarrow \neg$($p\cdot$вектумнож(a, b)$+q\cdot$вектумнож(b, c)$+r\cdot$вектумнож(a, c) = вектор0))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Сомножители векторных произведений идентифицируются без учета порядка. Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Условие коллинеарности векторному произведению.

   $\forall_{abc}$($\neg$(коллинеарны(a, b)) $\rightarrow$ коллинеарны(c, вектумнож(a, b)) $\leftrightarrow$ скалумнож(a, c) $= 0$ & скалумнож(b, c) $= 0$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

3. Ортогональность векторного произведения сомножителям.

   $\forall_{abc}$(a = вектумнож(b, c) $\rightarrow$ уголмежду(a, b) $= \pi/2$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "уголмежду(a, b)". Нормализатор общей стандартизации не усматривает, что это подвыражение равно $\pi/2$. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abc}$(a = вектумнож(b, c) $\rightarrow$ уголмежду($a,$) $= \pi/2$)

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{bc}$(уголмежду(вектумнож(b, c)$, b$) $= \pi/2$)

   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "уголмежду(вектумнож(b, c),b)". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{bc}$(уголмежду(вектумнож(b, c)$, c$) $= \pi/2$)

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{abc}$(вектумнож(a, b) $\perp a$)

   $\forall_{abc}$(вектумнож(a, b) $\perp b$)

   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в задаче на доказательство, на исследование, либо в задаче на описание, имеющей цель "пример", подвыражения "вектумнож(a, b)". Уровень срабатывания приема равен 4.

4. Длина векторного произведения.

   $\forall_{abc}(c = \text{уголмежду}(a, b) \to \text{длина}(\text{вектумнож}(a, b)) = \text{длина}(a)\text{длина}(b) \sin c)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор"; его правая часть обрабатывается нормализатором "нормуголмежду". Уровень срабатывания равен 6.

5. Выражение векторного произведения через прямоугольные координаты.

   $\forall_{ABKabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (d, e, f)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{Вектор}(B) \to \text{коорд}(\text{вектумнож}(A, B), K) = (bf - ce, cd - af, ae - bd))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "вектумнож(A, B)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, d, e, f не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

6. Выражение площади треугольника через координаты его вершин в трехмерном пространстве.

   $\forall_{ABCKabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b, c)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (d, e, f)\ \&\ p = bf - ce\ \&\ q = cd - af\ \&\ r = ae - bd \to S(\text{фигура}(ABC)) = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}/2)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "S(фигура(ABC))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Перед их обработкой проверяется существование посылки вида "коорд(X, K) = (u, v, w)". Уровень срабатывания равен 5.

7. Выражение площади параллелограмма через векторное произведение.

   $\forall_{ABCD}(\text{актив}(\text{вектор}(AB))\ \&\ \text{актив}(\text{вектор}(AC))\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(BD) \to S(\text{фигура}(ABDC)) = \text{длина}(\text{вектумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "S(фигура($ABDC$))". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 6.

8. Разложение неизвестного вектора по базису из векторных произведений.

   $\forall_{abcpqrx}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(c)\ \&\ \neg(\text{компланарны}(a, b, c))\ \&\ \text{Вектор}(x) \to p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ x = p \cdot \text{вектумнож}(a, b) + q \cdot \text{вектумнож}(b, c) + r \cdot \text{вектумнож}(c, a))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "уголмежду(x, a)". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию двух равенств в посылках, содержащих, соответственно, подвыражения "уголмежду(x,b)" и "уголмежду(x,c)". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения a,b,c различны и не содержат неизвестных; выражение x имеет тип "неизв". Выражение a лексикографически предшествует выражению b, а выражение b - выражению c. Прием вводит новые переменные p,q,r. Уровень срабатывания равен 8.

9. Преобразование соотношения для угла между векторами, если в выражении одного из векторов встречается векторное произведение с участием другого вектора.

   $\forall_{abp}$(Вектор(a) & Вектор(b) $\rightarrow$ уголмежду$(a,b) = p \leftrightarrow$ длина(a)длина$(b)\cos p =$ скалумнож(a,b) & $0 \le p$ & $0 \le \pi - p)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение b имеет подвыражение вида "вектумнож(a,x)" либо "вектумнож(x,a)". Уровень срабатывания равен 8.

10. Выражение вектора через векторное произведение двух других векторов.

    $\forall_{ABCapq}$(Вектор(a) & $a \perp$ плоскость(ABC) & длина$(a) = pS$(фигура$(ABC)) \rightarrow$ $a = q \cdot$ вектумнож(вектор(AB), вектор$(AC))$ & q – число & $|q| = p/2)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Выражения "вектор(AB)" и "вектор(AC)" уже встречаются в посылках. Выражение a не содержит символа "вектумнож". Прием вводит новую переменную q. Уровень срабатывания равен 3.

11. Смешанное произведение.

    (a) Одинаковые операнды.
    $\forall_{ab}$(скалумнож$(a$, вектумнож$(a,b)) = 0)$
    $\forall_{ab}$(скалумнож$(a$, вектумнож$(b,a)) = 0)$
    Уровень срабатывания равен 0.

    (b) Перестановка операндов.
    $\forall_{abc}$(скалумнож$(a$, вектумнож$(b,c))$ = скалумнож$(b$, вектумнож$(c,a)))$
    $\forall_{abc}$(скалумнож$(a$, вектумнож$(c,b))$ = скалумнож$(b$, вектумнож$(a,c)))$
    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Заменяющее выражение лексикографически предшествует заменяемому. Уровень срабатывания равен 1.

    (c) Выражение условия компланарности векторов через равенство нулю смешанного произведения.
    $\forall_{abc}$(Вектор(a) & Вектор(b) & Вектор(c) $\rightarrow$ компланарны$(a,b,c) \leftrightarrow$ скалумнож$(a$, вектумнож$(b,c)) = 0)$
    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Хотя бы одно из выражений b,c имеет заголовок "вектумнож". Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, применяемая к подутверждению условия задачи на доказательство. В ней требуется лишь, чтобы некоторая посылка содержала подвыражение "вектумнож(b,c)". Уровень срабатывания прежний.

(d) Исключение условия "направление(...)" с помощью смешанного произведения.
$\forall_{abcd}$(направление$(a, b, c, d) \leftrightarrow$
$0 <$ скалумнож$(c,$ вектумнож$(a, b))$скалумнож$(d,$ вектумнож$(a, b)))$
Уровень срабатывания равен 4.

(e) Тождество для векторной суммы с четырьмя смешанными произведениями.
$\forall_{abcd}$(скалумнож(вектумнож$(a, b), c)d =$ скалумнож(вектумнож$(d, b), c)a +$ скалумнож(вектумнож$(d, c), a)b +$ скалумнож(вектумнож$(d, a), b)c)$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемый терм задачи уже имеет вхождения подвыражений "pa, qb, rc" для подходящих численных множителей p, q, r, и не имеет отличного от преобразуемого вхождения подвыражения вида "sd", где s - численный множитель. Уровень срабатывания равен 4.

(f) Усмотрение в определителе третьего порядка произведения двух смешанных произведений.

$$\forall_{abcxyz}(\det\begin{pmatrix} \text{скалумнож}(x, a) & \text{скалумнож}(x, b) & \text{скалумнож}(x, c) \\ \text{скалумнож}(y, a) & \text{скалумнож}(y, b) & \text{скалумнож}(y, c) \\ \text{скалумнож}(z, a) & \text{скалумнож}(z, b) & \text{скалумнож}(z, c) \end{pmatrix} =$$

скалумнож(вектумнож$(a, b), c)$скалумнож(вектумнож$(x, y), z))$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 3.

12. Нормализатор общей стандартизации "нормвектумнож".

(a) Умножение на нулевой вектор.
$\forall_a$(вектумнож(вектор0$, a) =$ вектор0)
Уровень срабатывания равен 1.

(b) Равные операнды.
$\forall_a$(вектумнож$(a, a) =$ вектор0)
Уровень срабатывания равен 1.

(c) Перестановка операндов.
$\forall_{ab}$(вектумнож$(a, b) = -$вектумнож$(b, a))$
Выражение a не предшествует в лексикографическом порядке выражению b. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Вынесение наружу минуса.
$\forall_{ab}$(вектумнож$(-b, a) = -$вектумнож$(b, a))$
$\forall_{ab}$(вектумнож$(a, -b) = -$вектумнож$(a, b))$
Уровень срабатывания равен 1.

(e) Вынесение наружу численного множителя.
$\forall_{abc}$(вектумнож$(c, ab) = a \cdot$ вектумнож$(c, b))$
$\forall_{abc}$(вектумнож$(ab, c) = a \cdot$ вектумнож$(b, c))$
Уровень срабатывания равен 1.

(f) Умножение на сумму векторов.
$\forall_{abc}$(вектумнож$(b + c, a) =$ вектумнож$(b, a) +$ вектумнож$(c, a))$
$\forall_{abc}$(вектумнож$(a, b + c) =$ вектумнож$(a, b) +$ вектумнож$(a, c))$
Уровень срабатывания равен 2.

Ориентация системы векторов

1. Определение ориентации системы векторов.

   $\forall_{ABKabcd}$(коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)\rightarrow$ ориентация$(K,(A,B))=$ sg$(ad-bc))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "ориентация$(K,(a,b))$". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 5.

   $\forall_{ABCKabcdefpqr}$(коорд$(A,K)=(a,b,c)$ & коорд$(B,K)=(d,e,f)$ & коорд$(C,K)=$ $(p,q,r)\rightarrow$ ориентация$(K,(A,B,C))=\text{sgdet}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix})$

   Аналогично предыдущему.

2. Ориентированная площадь параллелограмма.

   $\forall_{ABKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & Вектор(A) & Вектор$(B)\rightarrow$ орплощадь$(K,A,B)=ad-bc)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "орплощадь(K,A,B)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

   $\forall_{Kaxy}$(прямкоорд$(K)\rightarrow x-$ число & $y-$ число & коорд$(a,K)=(x,y))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "орплощадь(K,b,c)". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри выражения b либо c подвыражения a, имеющего заголовок "вектор". Нормализаторы общей стандартизации пока не позволяют найти координатный набор вектора a в системе координат K. Прием вводит новые переменные x,y для обозначения координат данного вектора. Уровень срабатывания равен 4.

3. Ориентированный объем параллелепипеда.

   $\forall_{ABCKabcdefpqr}$(прямкоорд(K) & коорд$(A,K)=(a,b,c)$ & коорд$(B,K)=(d,e,f)$ & коорд$(C,K)=(p,q,r)\rightarrow$ оробъем$(K,A,B,C)=\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "оробъем(K,A,B,C)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDKPabcdefpqr}$(прямкоорд$(K)$ & параллелепипед(P) & ребро(отрезок$(AB),P)$ & ребро(отрезок$(AC),P)$ & ребро(отрезок$(AD),P)$ & коорд(вектор$(AB),K)=$

(a, b, c) & коорд(вектор$(AC), K) = (d, e, f)$ & коорд(вектор$(AD), K) = (p, q, r)$ & разныеточки(B, C) & разныеточки(B, D) & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ объем$(P) = |\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}|)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "объем(P)". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками. Шестой, седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{Kaxyz}$(прямкоорд$(K) \rightarrow x$ – число & y – число & z – число & коорд$(a, K) = (x, y, z))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "оробъем(K, b, c, d)". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри одного из выражений b, c, d подвыражения a, имеющего заголовок "вектор". Нормализаторы общей стандартизации пока не позволяют найти координатный набор вектора a в системе координат K. Прием вводит новые переменные x, y, z для обозначения координат данного вектора. Уровень срабатывания равен 4.

4. Ввод в рассмотрение координатного набора, если рассматриваются ориентация системы векторов либо ориентированный угол.

$\forall_{Kabxy}$(прямкоорд(K) & Вектор(a) & Вектор(b) & $a \perp b \rightarrow x$ – число & y – число & $0 < x$ & $0 < y$ & коорд$(a, K) = (x, 0, 0)$ & коорд$(b, K) = (0, y, 0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "ориентация$(K, (a, e, c))$". Порядок элементов набора (a, e, c) при идентификаци несущественен. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - обрабатываются проверочными операторами. Переменная K встречается в посылках только в качестве операнда символов "прямкоорд", "ориентация". Нормализатор "нормкоорд" пока не позволяет определить координаты вектора a относительно системы K. Прием вводит новые переменные x, y. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kaxy}$(прямкоорд(K) & Вектор$(a) \rightarrow x$ – число & y – число & коорд$(a, K) = (x, y))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "ориентация$(K, (a, b))$". Порядок элементов набора (a, b) несущественен. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Прием вводит новые переменные x, y. Уровень срабатывания равен 4.

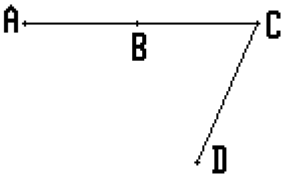
$\forall_{Kaxyz}$(прямкоорд(K) & Вектор$(a) \rightarrow x$ – число & y – число & z – число & коорд$(a, K) = (x, y, z))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCKabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & Вектор(a) & оруголмежду(вектор$(AB), a, K) = b \to c -$ число & коорд$(a, K) = (c\cos b, c\sin b)$ & $0 \leq c$)

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "оруголмежду(d, e, K)". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Прием вводит новую переменную c. Уровень срабатывания равен 4.

Ввод в рассмотрение вектора, пропорционального заданному вектору



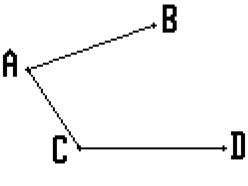
$\forall_{ABCDapq}(a =$ вектор(AB) & актив(вектор(CD)) & $C \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, C) & $pl(AB) = ql(AC) \to$ вектор$(AC) = (p/q)a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Допускается произвольный порядок операндов C, D. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм", последний - обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 5.

Ввод вспомогательного векторного параметра

$\forall_{ABa}$(вектор$(AB) = a$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условии задачи на доказательство подвыражения "вектор(AB)". Либо это подвыражение расположено внутри равенства, имеющего хотя бы одно другое вхождение символа "вектор", либо в задаче введен список неизвестных. Если условие имеет несколько подвыражений "вектор$(\ldots)$", то выбирается имеющее больше вхождений в посылки задачи. Прием вводит новую переменную a, которая объявляется вспомогательным параметром, т.е. до определения ее значения рассматривается как известная. Уровеньс срабатывания равен 5.



$\forall_{ABCDa}$(актив(вектор(AB)) & актив(вектор(CD)) & актив(прямая(AC)) $\to$ $a =$ вектор(AC))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Отсутствует посылка вида "актив(вектор(PQ))", такая, что прямая PQ параллельна прямой AC, а вектор PQ уже известен. Количество равенств в посылках, определяющих вспомогательные векторные параметры, меньше 2. Если тип задачи - "доказать", то выражение "вектор(AC)" не встречается в условии. В задачах на исследование типа кривой либо поверхности прием блокируется. Выражения "вектор(AC)" и "вектор(CA)" не известны, но не имеют типа "внешнеизв". Прием вводит вспомогательный параметр a. Уровень срабатывания равен 9. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 13. В ней допустимое количество равенств, определяющих ранее введенные векторные параметры, поднято до 6.

Нормализатор "нормвектор"

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Заголовком выражения a служит символ "вектор", причем это выражение не является подвыражением выражения b. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение нулевого вектора.

   $\forall_A(\text{вектор}(AA) = \text{вектор}0)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Выражение вектора через векторные параметры.

   $\forall_{ABCab}(\text{вектор}(AB) = a \;\&\; \text{вектор}(AC) = b \to \text{вектор}(BC) = b - a)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b не содержат символа "вектор". При обращении к нормализатору используется комментарий "нормвектор". Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор "нормплюсвект"

1. Устранение вложенных сумм.

   Теорема приема имеет вид "коммутативно(плюсвект)", заголовок приема - "замена(спускоперандов нормплюсвект)". Уровень срабатывания равен 1.

2. Лексикографическое упорядочение операндов.

   Теорема приема - та же. Заголовок приема - "замена(лексупорядочение нормплюсвект)". Уровень срабатывания равен 3.

3. Сложение с нулем.

   $\forall_a(a + \text{вектор}0 = a)$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Приведение подобных членов с векторами.

   $\forall_{abc}(ac + bc = (a + b)c)$

   Первая сумма - векторная, вторая - обычная. Уровень срабатывания равен 1.

5. Раскрывание внутренних скобок.

   $\forall_{abcd}(a + b(c + d) = a + bc + bd)$

   Все суммы - векторные. Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор "нормумножвект"

1. Умножение на 1.

   $\forall_a(1 \cdot a = a)$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Умножение на 0.

   $\forall_a(0 \cdot a = \text{вектор0})$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Вынесение наружу минуса в численном множителе.

   $\forall_{ab}((-a)b = -(ab))$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Вынесение наружу минуса перед вектором, имеющим численный коэффициент.

   $\forall_{ab}(a(-b) = -(ab))$

   Уровень срабатывания равен 1.

5. Вложенные умножения вектора на число.

   $\forall_{abc}(a(bc) = (ab)c)$

   Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор "нормминусвект"

1. Двойной минус.

   $\forall_a(\text{Вектор}(a) \to - - a = a)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Внесение минуса под знак векторной суммы.

   $\forall_{ab}(-(a + b) = -a - b)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Минус ноль-вектор.

   $-\text{вектор0} = \text{вектор0}$

   Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор вынесения за скобку общего численного множителя в векторной сумме "вектфакторизация"

Данный нормализатор является корневым, т.е. его приемы применяются только к корневому вхождению. Уровень срабатывания приемов равен 1.

1. Случай двух слагаемых.

   $\forall_{abcdpqrs}((ap/bq)c + (ar/bs)d = (a/b)((p/q)c + (r/s)d))$

   Указатель "модификатор" ограничивает применение приема суммами с двумя слагаемыми. Хотя бы одно из выражений a, b отлично от единицы.

2. Сведение к случаю с меньшим на единицу числом слагаемых.

   $\forall_{abcdepqrs}(d = (ra/bs)e \to (pa/bq)c + d = (a/b)((p/q)c + (r/s)e))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть d имеет заголовок "плюсвект" и обрабатывается нормализатором "вектфакторизация". Хотя бы одно из выражений a, b отлично от единицы.

Нормализатор сокращенной записи "упрощминусвект"

Нормализатор имеет единственный прием, вносящий минус в векторное произведение.

$\forall_{abc}(-(a \cdot \text{вектумнож}(b, c)) = a \cdot \text{вектумнож}(c, b))$

Нормализатор сокращенной записи "упрощплюсвект"

Нормализатор имеет единственный прием, связанный с вынесением за скобку общего множителя:

$\forall_{abcdpqrs}((ap/bq)c + (ar/bs)d = (a/b)((p/q)c + (r/s)d))$

Хотя бы одно из выражений a, b отлично от единицы.

Проверочный оператор "усмвектор"

Проверочный оператор имеет стандартные приемы усмотрения результата из буфера, непосредственного усмотрения (наличие явного указания на векторный тип переменной в посылках либо векторный тип значений операции), а также прием усмотрения из тождества в посылках:

$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a)\ \&\ b = a \to \text{Вектор}(b))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Ускоряющие фильтры отбрасывают ряд случаев, когда b заведомо не является вектором. Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор усмотрения ненулевого вектора "усмневектор0"

Кроме приемов усмотрения результата из буфера и непосредственного усмотрения, используются следующие приемы:

1. Ненулевое скалярное произведение.

   $\forall_{abc}(\neg(\text{скалумнож}(a,b)=0)\rightarrow\neg(a=\text{вектор0}))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(\text{скалумнож}(a,b)=c\ \&\ \neg(c=0)\rightarrow\neg(a=\text{вектор0}))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение из условия неколлинеарности либо некомпланарности векторов.

   $\forall_{ab}(\neg(\text{коллинеарны}(a,b))\rightarrow\neg(a=\text{вектор0}))$

   $\forall_{abc}(\neg(\text{компланарны}(a,b,c))\rightarrow\neg(a=\text{вектор0}))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

3. Ненулевое векторное произведение.

   $\forall_{abc}(\neg(\text{вектумнож}(a,b)=0)\rightarrow\neg(a=\text{вектор0}))$

   $\forall_{abc}(\neg(\text{вектумнож}(a,b)=0)\rightarrow\neg(b=\text{вектор0}))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

4. Отличие от нуля векторного произведения неколлинеарных векторов.

   $\forall_{ab}(\neg(\text{коллинеарны}(a,b))\rightarrow\neg(\text{вектумнож}(a,b)=\text{вектор0}))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор "усмколлинеарны"

1. Вертикально направленные векторы.

   $\forall_{Kab}(\text{вертикнапр}(a,K)\ \&\ \text{вертикнапр}(b,K)\rightarrow\text{коллинеарны}(a,b))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

2. Равные векторы.

   $\forall_{a}(\text{коллинеарны}(a,a))$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Векторы, заданные концевыми точками.

   $\forall_{ABCD}(C\in\text{прямая}(AB)\ \&\ D\in\text{прямая}(AB)\rightarrow\text{коллинеарны}(\text{вектор}(AB),\text{вектор}(CD)))$

   Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

4. Нормаль к плоскости вращения и направление от точки подвески к центру вращения.

   $\forall_{BCDTabnpst}(\text{гибкаясвязь}(a,b,s,T)\ \&\ \text{неподв}(b,T)\ \&\ \text{Путь}(a,T)=\text{Дуга}(C,D,n,p)\ \&\ t\in T\ \&\ B=\text{Место}(b,t)\ \&\ \text{разныеточки}(B,C)\rightarrow\text{коллинеарны}(n,\text{вектор}(BC)))$

   Прием возник при рассмотрении задач по элементарной физике. Материальная точка a в течение временного промежутка T подвешена без провисания на гибкой нерастяжимой нити s к неподвижной материальной точке b, причем описывает дугу окружности, имеющей центр C и проходящей через точку D. Тогда вектор n нормали к плоскости окружности коллинеарен вектору BC, где B - положение материальной точки b. Второй, четвертый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

5. Однонаправленные векторы.

   $\forall_{ab}$(однонаправлены$(a, b) \to$ коллинеарны(a, b))

   $\forall_{ab}$(однонаправлены$(a, -b) \to$ коллинеарны(a, b))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

6. Умножение вектора на число.

   $\forall_{abk}$(коллинеарны$(a, b) \to$ коллинеарны(a, kb))

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем при неудаче - немедленно выдается отказ. Уровень срабатывания равен 1.

7. Минус перед вектором.

   $\forall_{ab}$(коллинеарны$(a, b) \to$ коллинеарны$(a, -b)$)

   Аналогично предыдущему.

Проверочный оператор "усмоднонаправлены"

1. Изменение знака.

   $\forall_{ABc}$(однонаправлены(вектор$(BA), -c) \to$ однонаправлены(вектор$(AB), c)$)

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Равные векторы.

   $\forall_{a}$(однонаправлены(a, a))

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Направление нормальной реакции и нормаль к поверхности.

   $\forall_{Aabcdt}(A =$ Место(a, t) & нормнапр(A, b, c, t) & однонаправлены$(c, d) \to$ однонаправлены$(d,$ нормреакция$(a, b, t)))$

   Прием используется в задачах по элементарной физике. В момент t материальная точка a находится в геометрической точке A. В этот же момент точка A расположена на ориентированной материальной поверхности b, причем вектор c направлен из a наружу по нормали к b. Для проверки однонаправленности векторов d и вектора силы нормальной реакции, оказываемой объектом b на объект a в момент t, предпринимается проверка однонаправленности векторов c и d. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

4. Векторы, проведенные из точки отрезка к его концам.

   $\forall_{ABCab}(A \in$ отрезок(BC) & однонаправлены(вектор$(AB), a)$ & однонаправлены(вектор$(AC), b) \to$ однонаправлены$(a, -b))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

5. Направление вдоль координатной оси.

   $\forall_{Kab}(\text{вниз}(a,K)\ \&\ \text{вниз}(b,K) \to \text{однонаправлены}(a,b))$

   $\forall_{Kab}(\text{вверх}(a,K)\ \&\ \text{вверх}(b,K) \to \text{однонаправлены}(a,b))$

   $\forall_{Kab}(\text{вправо}(a,K)\ \&\ \text{вправо}(b,K) \to \text{однонаправлены}(a,b))$

   $\forall_{Kab}(\text{влево}(a,K)\ \&\ \text{влево}(b,K) \to \text{однонаправлены}(a,b))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDKa}(\text{вперед}(a,K)\ \&\ K=(A,B,C,D) \to \text{однонаправлены}(\text{вектор}(AC),a))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

6. Отбрасывание положительного коэффициента.

   $\forall_{abk}(0<k\ \&\ \text{однонаправлены}(a,b) \to \text{однонаправлены}(a,kb))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abk}(0<k\ \&\ \text{однонаправлены}(a,-b) \to \text{однонаправлены}(a,-(kb)))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

7. Угол между векторами равен 0.

   $\forall_{ab}(\text{уголмежду}(a,b)=0 \to \text{однонаправлены}(a,b))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор усмотрения неколлинеарности "усмнеколлин"

1. Усмотрение из некомпланарности.

   $\forall_{abc}(\neg(\text{компланарны}(a,b,c)) \to \neg(\text{коллинеарны}(a,b)))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(\neg(\text{компланарны}(a,b,c)) \to \neg(\text{коллинеарны}(b-a,c-a)))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

2. Ненулевые перпендикулярные векторы.

   $\forall_{ab}(\neg(a=\text{вектор0})\ \&\ \neg(b=\text{вектор0})\ \&\ a\perp b \to \neg(\text{коллинеарны}(a,b)))$

   Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор усмотрения компланарности "усмкомплан"

1. Нулевой вектор.

   $\forall_{ab}(\text{компланарны}(a,b,\text{вектор0}))$

   $\forall_{ab}(\text{компланарны}(a,\text{вектор0},b))$

   $\forall_{ab}(\text{компланарны}(\text{вектор0},a,b))$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Пропорциональные векторы.

   $\forall_{abpq}$(компланарны(pa, qa, b))

   $\forall_{abpq}$(компланарны(pa, b, qa))

   $\forall_{abpq}$(компланарны(b, pa, qa))

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Один из векторов представлен в виде линейной комбинации двух других.

   $\forall_{abcpq}$(компланарны$(a, b, pa + qb)$)

   $\forall_{abcpq}$(компланарны$(a, pa + qb, b)$)

   $\forall_{abcpq}$(компланарны$(pa + qb, a, b)$)

   Уровень срабатывания равен 2.

4. Горизонтальные векторы.

   $\forall_{Kabc}$(горизплосквект(a, K) & горизплосквект(b, K) & горизплосквект$(c, K) \rightarrow$ компланарны(a, b, c))

   Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "горизплосквект$(X,\ K)$". После этого антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор усмотрения некомпланарности "усмнекомплан"

В этом операторе имеется всего два приема - извлечения результата из буфера и непосредственного усмотрения с помощью процедуры "стандследствие".

Проверочный оператор усмотрения ортогональности прямых и векторов "усмортогональны"

1. Усмотрение с помощью равенства в посылках.

   $\forall_{abc}(a = b \ \& \ b \perp c \rightarrow a \perp c)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Векторное произведение.

   $\forall_{ab}$(вектумнож$(a, b) \perp a$)

   $\forall_{ab}$(вектумнож$(a, b) \perp b$)

   Уровень срабатывания равен 2.

3. Отбрасывание минуса.

   $\forall_{ab}(a \perp b \rightarrow a \perp -b)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

4. Использование условия равенства угла нулю либо пи.

   $\forall_{ABCDE}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & уголмежду(вектор$(CD), E) = 0 \to$ вектор$(AB) \perp E)$

   Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDab}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & уголмежду$(a,$ вектор$(AB)) = 0$ & уголмежду$(b,$ вектор$(CD)) = 0 \to a \perp b)$

   Первый антецедент выделен указателем "усм", два других - идентифицируются с посылками. Вместо нулей в правой части равенства допускаются символы π. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{abc}$(уголмежду$(a, b) = 0$ & $b \perp c \to a \perp c)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем вместо нуля в правой части равенства допускается символ π. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

5. Вертикальный и горизонтальный векторы.

   $\forall_{Kab}$(прямкоорд(K) & горизплосквект(a, K) & вертикнапр$(b, K) \to a \perp b)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

6. Сила трения и нормаль к поверхности.

   $\forall_{Aabcdt}(A =$ Место(a, t) & нормнапр(A, b, c, t) & коллинеарны$(c, d) \to$ $d \perp$ силатрения$(a, b, t))$

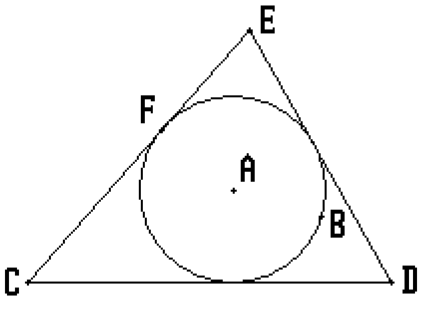
   Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

7. Непосредственное усмотрение перпендикулярности прямых.

   $\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \to$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD))$

   Антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

8. Радиус, проведенный в точку касания вписанной окружности.



   $\forall_{ABCDEF}$(окружность(AB)вписана в фигура(CDE) & $F \in$ окружность(AB) & $F \in$ прямая$(CE) \to$ прямая$(CE) \perp$ прямая$(AF))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем порядок идентификации вершин треугольника - произвольный. Следующие два антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

1.3 Приемы, связанные с системами координат

1.3.1 Координаты на плоскости

Ориентация равенства

Равенства для координат ориентируются таким образом, чтобы выполнялась подстановка явных значений этих координат.

$\forall_{ABab}((a,b) = \text{коорд}(A,B) \leftrightarrow \text{коорд}(A,B) = (a,b))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению посылки задачи на доказательство либо на исследование, не имеющей комментария "ориентацияравенства". Преобразованная посылка снабжается таким комментарием. Уровень срабатывания равен 0.

Переформулировка условия равенства точек в терминах равенства координат

$\forall_{ABKabcd}(\text{коорд}(A,K) = (a,b) \ \& \ \text{коорд}(B,K) = (c,d) \to A = B \leftrightarrow a = c \ \& \ b = d)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, имеющей цель "замещение". Это подутверждение содержит неизвестные, а выражения a, b, c, d - не содержат. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

Отождествление точек, имеющих одинаковые координаты

$\forall_{ABKc}(A = \text{тчкоорд}(K,c) \ \& \ B = \text{тчкоорд}(K,c) \to A = B)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

Координаты точки, заданной своими координатами

$\forall_{Ka}(\text{коорд}(\text{тчкоорд}(K,a)) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Усмотрение противоречия: координаты различных точек одинаковы

$\forall_{ABKab}(\text{коорд}(A,K) = (a,b) \ \& \ \text{коорд}(B,K) = (a,b) \ \& \ \text{разныеточки}(A,B) \to \text{ложь})$

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

Оси координат

1. Ввод в рассмотрение координатных прямых и угла между ними.

   $\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \to \text{актив}(\angle(BAC)))$

   $\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \to \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$

   $\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \to \text{актив}(\text{прямая}(AC)))$

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приемов при усмотрении выражения "коорд(a, K)" в задаче на доказательство, либо на исследование, либо в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Указатель "развязка" блокирует преобразования теоремы перед компиляцией. Уровень срабатывания равен 1.

2. Начало координат.

   $\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \to \text{коорд}(A, K) = (0, 0))$

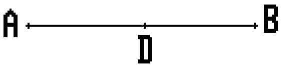
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

3. Точка на оси координат.

   $\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \to \text{коорд}(B, K) = (1, 0))$

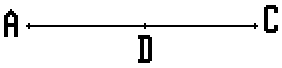
   $\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \to \text{коорд}(C, K) = (0, 1))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

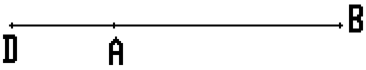


$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча$(A, B, D) \to$ коорд$(D, K) = (l(AD)/l(AB), 0))$

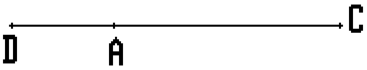
Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Прием не применяется к посылке вида "равно(коорд(D, K) набор$(\ldots)$)". Уровни срабатывания равны 1, 4 и 5.



$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & точкалуча$(A, C, D) \to$ коорд$(D, K) = (0, l(AD)/l(AC)))$

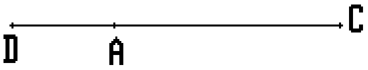


$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & $A \in$ отрезок$(BD) \to$ коорд$(D, K) = (-l(AD)/l(AB), 0))$



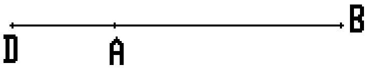
$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок$(CD) \to$ коорд$(D, K) = (0, -l(AD)/l(AC)))$

Приемы аналогичны предыдущему случаю.



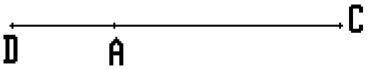
$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая$(AC) \rightarrow$ актив$(l(AD)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "коорд(D, K)" в задаче на доказательство, на исследование либо в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

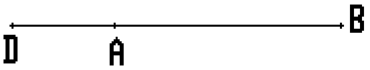


$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ актив$(l(AD)))$

Аналогично предыдущему.



$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & коорд$(D, K) = (a, b) \rightarrow a = 0)$



$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & коорд$(D, K) = (a, b) \rightarrow b = 0)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент выделен указателем "усм". Выводимое равенство неконстантное. Уровень срабатывания равен 3.

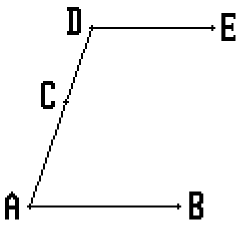
4. Усмотрение принадлежности точки оси координат.

   $\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (0, a)$ & актив(прямая$(AC))$ & D – точка $\rightarrow D \in$ прямая$(AC))$

   $\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, 0)$ & актив(прямая$(AB))$ & D – точка $\rightarrow D \in$ прямая$(AB))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

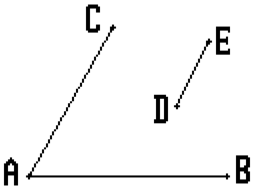
5. Координаты точек, лежащих на прямой, параллельной оси координат.



$\forall_{ABCDEK}(K = (A,B,C)$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & однасторона$(B, E,$ прямая$(AD))$ & коорд$(E,K) = (a,b) \to al(AB) = l(DE))$

$\forall_{ABCDEK}(K = (A,B,C)$ & $D \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & разныестороны$(B, E,$ прямая$(AD))$ & коорд$(E,K) = (a,b) \to -al(AB) = l(DE))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Выражение для расстояния DE не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

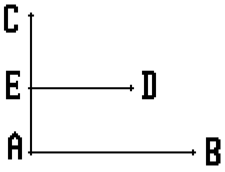


$\forall_{ABCDEKabcd}(K = (A,B,C)$ & коорд$(D,K) = (a,b)$ & коорд$(E,K) = (c,d)$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая$(AC) \to a = c)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "усм". Обозначения прямых DE и AC различны. Уровень срабатывания равен 4.

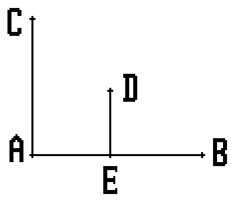
6. Проекции точек на оси координат.

   (a) Проведение из точки прямых, параллельных осям координат.



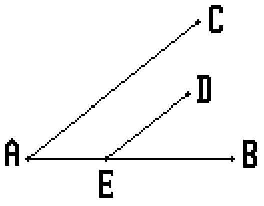
$\forall_{ABCDEK}(D -$ точка & $K = (A,B,C)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \to E -$ точка & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \parallel$ прямая$(AB))$

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "коорд(D,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "усм". Отсутствует посылка вида "равно(коорд(D,X) набор$(\ldots)$)", причем нормализатор "нормкоорд" тоже не находит координатный набор "коорд(D,K)". Не усматривается принадлежность точки D прямой AC. Через эту точку не проведена прямая, параллельная прямой AB и пересекающаяся с AC по выделенной точке. Прием вводит новую точку E. Уровень срабатывания равен 4.



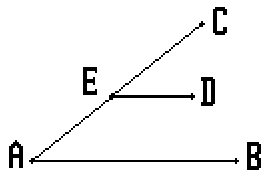
$\forall_{ABCDEK}(D$ – точка & $K = (A, B, C)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow$ E – точка & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(DE) \parallel$ прямая$(AC))$

Аналогично предыдущему.



$\forall_{ABCDEK}(D$ – точка & $K = (A, B, C) \rightarrow E$ – точка & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(DE) \parallel$ прямая$(AC))$

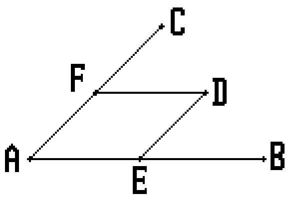
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "коорд(D, K)". Антецеденты идентифицируются с посылками. Прочие ограничения на срабатывание приема - такие же, как и выше. Уровень срабатывания равен 7.



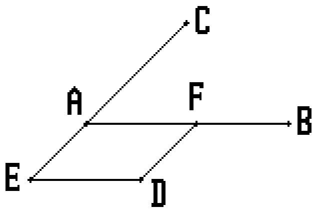
$\forall_{ABCDEK}(D$ – точка & $K = (A, B, C) \rightarrow E$ – точка & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(DE) \parallel$ прямая$(AB))$

Аналогично предыдущему.

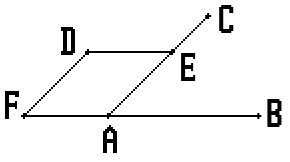
(b) Выражение координат через длины сторон параллелограмма, расположенных по осям координат.



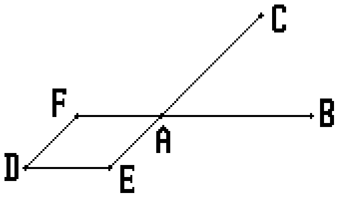
$\forall_{ABCDEFK}(K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, E) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, F) & прямая$(DF) \parallel$ прямая$(AB) \rightarrow$ коорд$(D, K) =$ $(l(AE)/l(AB), l(AF)/l(AC)))$



$\forall_{ABCDEFK}(K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(CE) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, F) & прямая$(DF) \parallel$ прямая$(AC) \rightarrow$ коорд$(D, K) =$ $(l(AF)/l(AB), -l(AE)/l(AC)))$



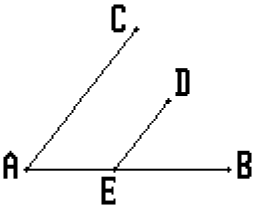
$\forall_{ABCDEFK}(K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(BF) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, C, E) & прямая$(DF) \parallel$ прямая$(AC) \rightarrow$ коорд$(D, K) =$ $(-l(AF)/l(AB), l(AE)/l(AC)))$



$\forall_{ABCDEFK}(K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(CE) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & $A \in$ отрезок(BF) & прямая$(DF) \parallel$ прямая$(AC) \rightarrow$ коорд$(D, K) =$ $(-l(AF)/l(AB), -l(AE)/l(AC)))$

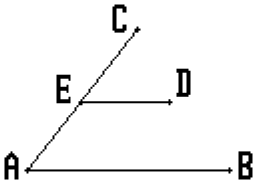
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "коорд(D, K)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "усм". Результат обработки выражения "коорд(D, K)" нормализатором "нормкоорд" не имеет заголовка "набор". Уровень срабатывания равен 5.

(c) Определение координат проекции точки на ось координат.



$\forall_{ABCDEKab}(K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ &
прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ коорд$(E, K) = (a, 0))$

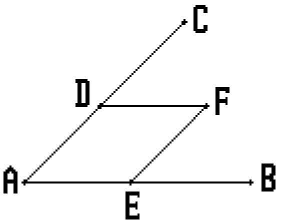
Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, два последних - выделены указателем "усм". Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. В задаче встречается расстояние от точки E до некоторой другой точки. Не усматривается принадлежность точки D прямой AB. Уровень срабатывания равен 6.



$\forall_{ABCDEKab}(K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ &
прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(AC) \rightarrow$ коорд$(E, K) = (0, b))$

Аналогично предыдущему.

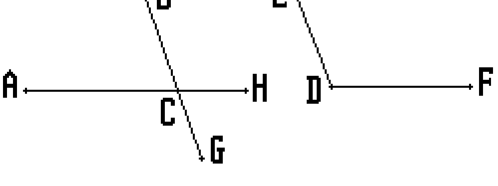
(d) Определение координат точки по координатам проекций.



$\forall_{ABCDEFKab}(K = (A, B, C)$ & прямая$(DF) \parallel$ прямая(AB) &
прямая$(EF) \parallel$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AB) &
коорд$(D, K) = (0, b)$ & коорд$(E, K) = (a, 0) \rightarrow$ коорд$(F, K) = (a, b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент и два последних - идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Определение координат точки, лежащей на пересечении прямых, параллельных осям координат, если на каждой из этих прямых уже имеется точка с известными координатами.



$\forall_{ABCDEFGHabcd}(K = (D, E, F)$ & прямая$(AH) \parallel$ прямая(DF) &
прямая$(BG) \parallel$ прямая(DE) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \rightarrow$

C – точка & $C \in$ прямая(AH) & $C \in$ прямая(BG) & коорд$(C, K) = (a, d))$
Первый антецедент и два последних - идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм". На прямой AH выделена отличная от A точка, координаты которой встречаются в посылках. Аналогично, на прямой BG выделена отличная от B точка, координаты которой встречаются в посылках. Точка C пересечения прямых AH и BG пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.

7. Биссектрисы координатных углов.

   $\forall_{ABCDEKab}(K = (A, B, C)$ & биссектриса$(BACD)$ & $E \in$ прямая(AD) &
   коорд$(E, K) = (a, b) \to a = b)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента, а также последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент выделен указателем "усм". Выводимое утверждение неконстантное (имеет хотя бы одну переменную). Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDEFKab}(K = (A, B, C)$ & $A \in$ отрезок(BD) & биссектриса$(CADE)$ &
   $F \in$ прямая(AE) & коорд$(F, K) = (a, b) \to a = -b)$

   $\forall_{ABCDEFKab}(K = (A, B, C)$ & $A \in$ отрезок(CD) & биссектриса$(BADE)$ &
   $F \in$ прямая(AE) & коорд$(F, K) = (a, b) \to a = -b)$

   Первый, третий и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Выводимое утверждение неконстантное. Уровень срабатывания равен 3.

8. Ввод вспомогательного параметра - длины координатного вектора.

   $\forall_{ABCKa}(K = (A, B, C) \to a = l(AB))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "коорд(X, K). Расстояние AB не известно и не имеет типа "внешнеизв". Отсутствует посылка вида "прямкоорд(K)". Прием вводит вспомогательный параметр a, который временно будет рассматриваться как известная величина. Если этот параметр войдет в найденный ответ, то он будет далее рассматриваться как неизвестный, и решение задачи продолжится. Уровень срабатывания равен 6.

   $\forall_{ABCKa}(K = (A, B, C) \to a = l(AC))$

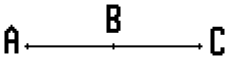
   Аналогично предыдущему.

Точки, лежащие на прямой

1. Определение координат точки, центрально симметричной другой точке.

   $\forall_{ABCDEFG}($ромб$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) &
   коорд$(E, K) = (a, b)$ & $F \in$ прямая(AB) & коорд$(F, K) = (c, d) \to$
   G – точка & $G \in$ прямая(CD) & коорд$(G, K) = (2a - c, 2b - d))$

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй, третий и пятый антецеденты выделены указателем "усм", шестой - указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. В задаче рассматриваются координаты множества точек прямой CD, однако уравнение прямой пока не найдено. Известны координаты некоторой точки прямой CD. Отсутствует посылка, указывающая, что координаты некоторой точки этой прямой равны $(2a-c, 2b-d)$. Прием вводит в рассмотрение новую точку G. Уровень срабатывания равен 2.



$\forall_{ABCKabcd}(B \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ &
коорд$(B, K) = (c, d) \to$ коорд$(C, K) = (2c - a, 2d - b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "коорд(C, K)". Два последних антецедента идентифицируются с посылками, два первых - выделены указателем "усм". Выражения a, b, c, d не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

2. Определение координат середины отрезка.

$\forall_{ABCKabcd}(B \in$ отрезок(AC) & $l(AB) = l(BC)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ &
коорд$(C, K) = (c, d) \to$ коорд$(B, K) = ((a + c)/2, (b + d)/2))$

Прием имеет заголовок "вывод". Два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, два первых - выделены указателем "усм". Выражения a, b, c, d не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

3. Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении.

$\forall_{ABCKabcdpq}($коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(C, K) = (c, d)$ & $B \in$ отрезок(AC) &
$pl(AB) = ql(BC)$ & $\neg(p + q = 0) \to$
коорд$(B, K) = ((ap + cq)/(p + q), (bp + dq)/(p + q)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент выделен указателем "усм", четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, пятый - проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, p, q не имеют невырожденных числовых атомов. Если правая часть выводимого равенства имеет более 100 символов, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{AKabcdpq}(\neg(p + q = 0) \to (A \in$ отрезок(тчкоорд$(K, (a, b))$тчкоорд$(K, (c, d)))$ &
$pl(A$тчкоорд$(K, (a, b))) = ql(A$тчкоорд$(K, (c, d)))) \leftrightarrow$
$A =$ тчкоорд$(K, ((cp + qa)/(p + q), ((dp + qb)/(p + q)))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

4. Определение координат точки, лежащей на луче, если известны отношения расстояний ее и другой точки луча до начала луча.

   $\forall_{ABCKabcdpq}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & точкалуча(A, B, C) & $pl(AB) = ql(AC)$ & $\neg(q = 0) \rightarrow$ коорд$(C, K) = (a + (c - a)p/q, b + (d - b)p/q)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент выделен указателем "усм", четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором, пятый - проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, p, q не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

5. Координатная переформулировка условия принадлежности точки отрезку.

   $\forall_{ABCKabcd}$($C \in$ прямая(AB) & коорд(вектор$(AC), K) = (a, b)$ & коорд(вектор$(CB), K) = (c, d) \rightarrow C \in$ отрезок$(AB) \leftrightarrow 0 \leq ac$ & $0 \leq bd$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи. Не допускаются задачи на описание, имеющие цель "исследовать". Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и третий - указателем "идентификатор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Уровень срабатывания равен 2.

6. Извлечение неравенства для координат из условия принадлежности точки отрезку.

   $\forall_{ABCKabcdef}$($B \in$ отрезок(AC) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & коорд$(C, K) = (e, f) \rightarrow 0 \leq (c - a)(e - c) + (d - b)(f - d)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Он применяется в задаче на исследование, имеющей цель "контроль". Антецеденты идентифицируются с посылками. Сумма в правой части выводимого неравенства обрабатывается нормализатором разложения на множители "видумножение", а само неравенство - нормализатором "нормменьшеилиравно". Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

7. Условие принадлежности точки прямой.

   $\forall_{ABCKabcdxy}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & $C \in$ прямая(AB) & коорд$(C, K) = (x, y) \rightarrow (c - a)(y - b) = (d - b)(x - a)$)

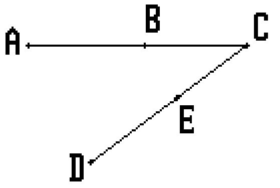
   Прием имеет заголовок "вывод". Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных, а хотя бы одно из выражений x, y - содержит. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ABCKabcde}$($A \in$ прямая(BC) & коорд$(B, K) = (a, b)$ & коорд$(C, K) = (a, c)$ & коорд$(A, K) = (d, e) \rightarrow a = d$)

   $\forall_{ABCKabcde}$($A \in$ прямая(BC) & коорд$(B, K) = (b, a)$ & коорд$(C, K) = (c, a)$ & коорд$(A, K) = (d, e) \rightarrow a = e$)

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". В первом антецеденте вместо символа "отрезок" допускается символ "прямая". Выводимое равенство неконстантное. Уровень срабатывания равен 6.

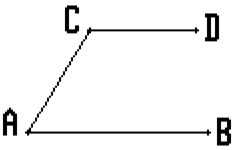
8. Координаты точки, лежащей на пересечении двух прямых.



$\forall_{ABCDEKabcdpqrs}(C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ C \in \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (a,b)\ \&$ $\text{коорд}(\text{вектор}(AB),K) = (c,d)\ \&\ \text{коорд}(D,K) = (p,q)\ \&$ $\text{коорд}(\text{вектор}(DE),K) = (r,s)\ \&\ m = cs - rd\ \&\ \neg(m = 0) \rightarrow \text{коорд}(C,K) =$ $(p + r(c(b-q) - d(a-p))/m, q + s(c(b-q) - d(a-p))/m))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "коорд(C,K)". Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a,b,c,d,p,q,r,s не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для коорд(C,K). Уровень срабатывания равен 6. Создана также версия приема, в которой отсутствует указатель "контрольвывода", а третий и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. В остальном версии совпадают.

9. Координаты точек на параллельных прямых.



$\forall_{ABCDKabcdpquv}(\text{прямая}(CD) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{однасторона}(B,D,\text{прямая}(AC))$ $\&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB),K) = (a,b)\ \&\ pl(AB) = ql(CD)\ \&\ \text{коорд}(C,K) = (c,d)\ \&$ $\neg(q = 0)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AC),K) = (u,v)\ \&\ \neg(bu - av = 0) \rightarrow \text{коорд}(D,K) =$ $(c + ap/q, d + bp/q))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "коорд(D,K)". Первый антецедент выделен указателем "усм". Второй, шестой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, четвертый - пакетным синтезатором. Третий, пятый и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a,b,c,d,p,q не содержат неизвестных. Обозначения прямых AB и CD различны. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDKabcdpquv}(\text{прямая}(CD) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{однасторона}(B,D,\text{прямая}(AC))$ $\&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB),K) = (a,b)\ \&\ l(CD) = p\ \&\ \sqrt{a^2+b^2} = q\ \&\ \text{коорд}(C,K) =$ $(c,d)\ \&\ \neg(q = 0) \rightarrow \text{коорд}(D,K) = (c + ap/q, d + bp/q))$

Указатель "контрольвывода такой же, как и выше. Первый антецедент выделен указателем "усм". Второй и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, p не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

10. Усмотрение центра тяжести треугольника.

    $\forall_{ABCKabcdefpq}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & коорд$(C, K) = (e, f)$ & $3p - a - c = 0$ & $3q - b - d = 0 \rightarrow$ тчкоорд$(K, (p, q)) =$ Центр(фигура(ABC)))

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, два последних - выделены указателем "идентификатор". Заменяемое выражение не расположено под квантором. Оно содержит вспомогательный параметр, а заменяющее - не содержит. Уровень срабатывания равен 4.

Координаты множества точек

1. Принадлежность точки множеству, заданному через координаты.

   $\forall_{AKab}$(тчкоорд$(K, (a, b)) \in$ точки$(A, K) \leftrightarrow (a, b) \in A$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABKPab}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & $A \in B$ & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{xy}(P(x, y)) \rightarrow P(a, b)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Переменная P - функциональная, т.е. $P(x, y)$ идентифицируется с произвольным утверждением. Для блокировки повторных срабатываний посылка, идентифицированная с последним антецедентом, помечается комментарием (нормкоорд A). Уровень срабатывания приема равен 2.

2. Усмотрение совпадения двух множеств, уравнения которых отличаются переобозначением связанных переменных.

   $\forall_{ABKf}$(коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(f(x, y))$ & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{uv}(f(u, v)) \rightarrow A = B$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи. Переменная f - функциональная. Введен ускоряющий фильтр, проверяющий равенство длин выражений "класс(...)". Уровень срабатывания приема равен 2.

3. Переход к представлению множества точек через множество пар координат.

   $\forall_{FKab}(\mathrm{set}_X(X -$ точка & $\exists_z$(коорд$(X, K) = (a(z), b(z))$ & $F(z))) =$ точки$(\mathrm{set}_{xy}(\exists_z(F(z)$ & $x = a(z)$ & $y = b(z))), K))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Переменные a, b, F - функциональные. Переменная z идентифицируется с кванторной приставкой произвольной длины. Переменная K не является вспомогательным параметром. Уровень срабатывания равен 6.

   $\forall_{KQpq}(\mathrm{set}_A(\exists_t(A =$ тчкоорд$(K, (p(t), q(t)))$ & $Q(t))) =$ точки$(\mathrm{set}_{xy}(\exists_t(Q(t)$ & $x = p(t)$ & $y = q(t))), K))$

Преобразование применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Переменные p, q, Q функциональные. Переменная t идентифицируется с кванторной приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания равен 7.

4. Усмотрение уравнений простейших множеств на плоскости.

   Если явно не говорится противное, приемы этого пункта имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс".

   (a) Усмотрение окружности.

   $\forall_{Kabcdpr}$(прямкоорд(K) & $\neg(a = 0)$ & $p = -d/a + (b^2 + c^2)/(4a^2)$ &
   $0 < p$ & $r = \sqrt{p} \to \mathrm{set}_A(A$ – точка & $\exists_{xy}(x$ – число & y – число &
   коорд$(A, K) = (x, y)$ & $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0)) =$
   окр(тчкоорд$(K, (-b/(2a), -c/(2a))), r))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Третий и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов b, c. Уровень срабатывания равен 3. Создана также версия приема, в которой вместо указателей "подстановка" используются указатели "группировка". Они означают, что коэффициенты b, c идентифицируются путем группировки всех соответствующих линейных членов. В остальном версии совпадают.

   $\forall_{Kabcdpr}$(прямкоорд(K) & $\neg(a = 0)$ & $p = -d/a + (b^2 + c^2)/(4a^2) \to$
   $\mathrm{set}_A(A$ – точка & $\exists_{xy}(x$ – число & y – число & коорд$(A, K) =$
   (x, y) & $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0)) =$
   (окр(тчкоорд$(K, (-b/(2a), -c/(2a))), \sqrt{p})$ при $0 < p$, иначе
   ($\{$тчкоорд$(K, (-b/(2a), -c/(2a)))\}$ при $p = 0$, иначе $\emptyset$)))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Коэффициенты b, c выделены указателями "группировка". Уровень срабатывания равен 4.

   (b) Усмотрение прямой, параллельной координатной оси.

   $\forall_{ABCKa}$(коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(x = a$ & y – число$) \to B =$ тчкоорд$(K, (-a, 0))$
   & $C =$ тчкоорд$(K, (-a, 1))$ & $A =$ прямая$(BC))$

   $\forall_{ABCKa}$(коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{yx}(x = a$ & y – число$) \to B =$ тчкоорд$(K, (0, -a))$
   & $C =$ тчкоорд$(K, (1, -a))$ & $A =$ прямая$(BC))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "точки". Такая цель означает, что требуется получить бескоординатное описание множества точек. Отсутствует посылка вида "$A = X$", где выражение X не содержит символа "точки". Прием вводит новые переменные B, C. Выводимые равенства снабжаются комментарием "блок", блокирующим применение этих равенств. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) &
   $E \in$ прямая(AB) & разныеточки$(D, E) \to \mathrm{set}_X(X$ – точка &
   $\exists_y(y$ – число & коорд$(X, K) = (a, y))) =$ перпендикуляр(прямая(DE),
   тчкоорд$(K, (a, 0))))$

$\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & разныеточки$(D, E) \rightarrow \mathrm{set}_X(X -$ точка & $\exists_x(x -$ число & коорд$(X, K) = (x, a))) =$ перпендикуляр(прямая(DE), тчкоорд$(K, (0, a))))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подутверждению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Как и условлено выше, пока не оговорено противное, это принимается по умолчанию. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AB) & разныеточки$(D, E) \rightarrow \mathrm{set}_X(X -$ точка & $\exists_x(x -$ число & коорд$(X, K) = (x, a))) =$ параллелпрямая(прямая(DE), тчкоорд$(K, (0, a))))$

$\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & разныеточки$(D, E) \rightarrow \mathrm{set}_X(X -$ точка & $\exists_y(y -$ число & коорд$(X, K) = (a, y))) =$ параллелпрямая(прямая(DE), тчкоорд$(K, (a, 0))))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

(c) Усмотрение прямой, проходящей через две заданные точки.

$\forall_{ABKabcpqrs}$(коорд$(A, K) = (p, q)$ & коорд$(B, K) = (r, s)$ & $ap + bq + c = 0$ & $ar + bs + c = 0$ & разныеточки(A, B) & $(\neg(a = 0) \ \vee \ \neg(b = 0)) \rightarrow \mathrm{set}_X(X -$ точка & $\exists_{xy}(x -$ число & $y -$ число & коорд$(X, K) = (x, y)$ & $ax + by + c = 0)) =$ прямая$(AB))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Хотя бы одно из выражений a, b, c, K содержит вспомогательные параметры. Переменные A, B не являются вспомогательными параметрами. Заменяемое вхождение не расположено под квантором либо описателем. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Усмотрение точки.

$\forall_{Kab}(\mathrm{set}_X(X -$ точка & коорд$(X, K) = (a, b)) = \{$тчкоорд$(K, (a, b))\})$

Уровень срабатывания равен 4.

(e) Усмотрение луча.

$\forall_{ABCKab}$(коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(x = a$ & $b < y$ & $y -$ число$) \rightarrow$ $B =$ тчкоорд$(K, (a, b))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (a, b + 1))$ & $A =$ луч$(BC))$

$\forall_{ABCKab}$(коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{yx}(x = a$ & $b < y$ & $y -$ число$) \rightarrow$ $B =$ тчкоорд$(K, (b, a))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (b + 1, a))$ & $A =$ луч$(BC))$

Приемы имеют заголовок "вывод", Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "точки". Отсутствует посылка вида "$A = X$", где выражение X не содержит символа "точки". Прием вводит новые переменные B, C. Выводимые равенства снабжаются комментарием "блок". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKabc}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, b)$ & $0 < c - a \rightarrow$ $\mathrm{set}_X(X -$точка & $\exists_x(x -$число & коорд$(X, K) = (x, b)$ & $a \leq x)) =$ луч$(AB))$

$\forall_{ABKabc}(\text{коорд}(A,K)=(a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(c,b)\ \&\ c-a<0\to \text{set}_X(X-\text{точка}\ \&\ \exists_x(x-\text{число}\ \&\ \text{коорд}(X,K)=(x,b)\ \&\ a\le x))=\text{обратныйлуч}(AB))$

$\forall_{ABKabc}(\text{коорд}(A,K)=(b,a)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(b,c)\ \&\ 0<c-a\to \text{set}_X(X-\text{точка}\ \&\ \exists_x(x-\text{число}\ \&\ \text{коорд}(X,K)=(b,x)\ \&\ a\le x))=\text{луч}(AB))$

$\forall_{ABKabc}(\text{коорд}(A,K)=(b,a)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(b,c)\ \&\ c-a<0\to \text{set}_X(X-\text{точка}\ \&\ \exists_x(x-\text{число}\ \&\ \text{коорд}(X,K)=(b,x)\ \&\ a\le x))=\text{обратныйлуч}(AB))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подутверждению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Допускается одновременная перестановка частей неравенств. Переменные A, B не являются вспомогательными параметрами, а хотя бы одно из выражений a, b, K содержит вспомогательный параметр. Преобразуемое вхождение не расположено внутри квантора либо описателя. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Усмотрение разности с кругом.

$\forall_{Kabcdprf}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ 0<a\ \&\ p=-d/a+(b^2+c^2)/(4a^2)\ \&\ 0<p\ \&\ r=\sqrt{p}\to \text{set}_A(A-\text{точка}\ \&\ \exists_{xy}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(x,y)\ \&\ f(x,y)\ \&\ 0<ax^2+ay^2+bx+cy+d))=\text{set}_A(A-\text{точка}\ \&\ \exists_{xy}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(x,y)\ \&\ f(x,y)))\setminus \text{круградиуса}(\text{тчкоорд}(K,(-b/(2a),-c/(2a))),r))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Истинность четвертого антецедента проверяется с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов b, c. Переменная f функциональная, т.е. $f(x,y)$ идентифицируется с утверждением, остающимся после идентификации прочих членов конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Усмотрение полуплоскости.

$\forall_{ABCDKabc}(\text{коорд}(A,K)=\text{set}_{xy}(0<ax+by+c\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \neg(a=0)\to B=\text{тчкоорд}(K,(-c/a,0))\ \&\ C=\text{тчкоорд}(K,(-c/a+b,-a))\ \&\ D=\text{тчкоорд}(K,(-c/a+\text{sg}(a),0))\ \&\ A=\text{внутренность}(\text{полуплоскость}(\text{прямая}(BC),D)))$

$\forall_{ABCDKabc}(\text{коорд}(A,K)=\text{set}_{xy}(ax+by+c<0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \neg(a=0)\to B=\text{тчкоорд}(K,(-c/a,0))\ \&\ C=\text{тчкоорд}(K,(-c/a+b,-a))\ \&\ D=\text{тчкоорд}(K,(-c/a-\text{sg}(a),0))\ \&\ A=\text{внутренность}(\text{полуплоскость}(\text{прямая}(BC),D)))$

Приемы имеют заголовок "вывод" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "точки". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "$A = X$", где выражение X не содержит символа "точки". Указатель "подстановка" допускает вырожденное нулевое значение коэффициента b. Выводимые равенства сопровождаются комментарием "блок", не разрешающим их применение для стандартизации обозначений. Приемы вводят новые переменные B, C. Уровень срабатывания равен 2.

5. Теоретико - множественные операции.

   (a) Представление множества точек, заданного через координаты, в виде разности двух множеств.

   $\forall_{ABCKfg}(\text{коорд}(A,K) = \text{set}_{xy}(\neg(f(x,y)=0)\ \&\ g(x,y)\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \to A = B \setminus C\ \&\ \text{коорд}(B,K) = \text{set}_{xy}(g(x,y)\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(C,K) = \text{set}_{xy}(f(x,y) = 0\ \&\ \text{одз}(f(x,y)))))$

   Прием выводит следствия в задаче на исследование, имеющей цель "исследовать". Такие задачи решаются для получения списка утверждений, описывающих исследуемый объект в соответствии с заданной целевой установкой. К их числу относятся, например, задачи на определение типа и общих характеристик кривых либо поверхностей. Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные f, g - функциональные. Выводимые равенства помечаются комментарием "блок". Прием вводит новые переменные B, C. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Усмотрение разности множеств, заданных через условия на координаты точек.

   $\forall_{KPab}(\text{set}_X(X - \text{точка}\ \&\ \exists_{xy}((x,y) = \text{коорд}(X,K)\ \&\ (\neg(x=a)\ \vee\ \neg(y=b))\ \&\ P(x,y))) = \text{set}_X(X - \text{точка}\ \&\ \exists_{xy}((x,y) = \text{коорд}(X,K)\ \&\ P(x,y))) \setminus \{\text{тчкоорд}(K,(a,b))\})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{KPQ}(\text{set}_A(A - \text{точка}\ \&\ \exists_{xy}((x,y) = \text{коорд}(A,K)\ \&\ \neg P(x,y)\ \&\ Q(x,y))) = \text{set}_A(A - \text{точка}\ \&\ \exists_{xy}((x,y) = \text{коорд}(A,K)\ \&Q(x,y))) \setminus \text{set}_A(A - \text{точка}\ \&\ \exists_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ (x,y) = \text{коорд}(A,K)\ \&\ P(x,y))))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 7.

   $\forall_{ABCKP}(K = (A,B,C) \to \text{set}_X(X - \text{точка}\ \&\ \exists_{xy}((x,y) = \text{коорд}(X,K)\ \&\ 0 < x^2 + y^2\ \&\ P(x,y))) = \text{set}_X(X - \text{точка}\ \&\ \exists_{xy}((x,y) = \text{коорд}(X,K)\ \&\ P(x,y))) \setminus \{A\})$

   Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания тоже равен 7.

6. Мощность семейства множеств, заданных через координаты.

   $\forall_{AKf}(\text{card}(\text{set}_{xz}(\exists_y(x = \text{точки}(f(y,z),K)\ \&\ A(y,z)))) = \text{card}(\text{set}_{xz}(\exists_y(x = f(y,z)\ \&\ A(y,z)))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, A функциональные. Переменные y, z идентифицируются с кванторными приставками произвольной длины. Уровень срабатывания равен 0.

7. Использование координат точек при описании вида областей.

   (a) Пересечение двух полос.

   Чтобы усмотреть параллелограмм в пересечении двух полос, сначала вводятся недостающие его вершины, выражаемые через известные координаты:

   $\forall_{ABCDHKPQRSabcdefghmn}(H = \text{внутренность}(\text{полоса}(\text{прямая}(PQ), m)) \cap \text{внутренность}(\text{полоса}(\text{прямая}(RS), n))\ \&\ P = \text{тчкоорд}(K,(a,b))\ \&$

$Q = \text{тчкоорд}(K, (c, d))\ \&\ R = \text{тчкоорд}(K, (e, f))\ \&\ S = \text{тчкоорд}(K, (g, h))$
$\&\ A = g - e\ \&\ B = h - f\ \&\ C = c - a\ \&\ D = d - b\ \&$
$p = AD - BC\ \&\ \neg(p = 0) \rightarrow E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{прямая}(PQ)\ \&$
$E \in \text{прямая}(RS)\ \&\ E = \text{тчкоорд}(K, ((A(aD - bC) + C(fA - eB))/p,$
$(B(aD - bC) + D(fA - eB))/p)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Следующие пять антецедентов выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Точка E пересечения прямых PQ и RS в задаче пока не рассматривается, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.

После того, как все вершины параллелограмма введены, применяется следующий прием:

$\forall_{ABCDEFGHPQRS}(A \in \text{прямая}(EF)\ \&\ A \in \text{прямая}(PQ)\ \&\ B \in \text{прямая}(EF)$
$\&\ B \in \text{прямая}(RS)\ \&\ C \in \text{прямая}(GH)\ \&\ C \in \text{прямая}(PQ)\ \&$
$D \in \text{прямая}(GH)\ \&\ D \in \text{прямая}(RS) \rightarrow T = \text{внутренность}(\text{полоса}($
$\text{прямая}(EF), \text{прямая}(GH))) \cap \text{внутренность}(\text{полоса}(\text{прямая}(PQ),$
$\text{прямая}(RS))) \leftrightarrow T = \text{внутренность}(\text{фигура}(ABDC))\ \&$
$\text{параллелограмм}(ABDC))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задаче на исследование, имеющей цель "исследовать". Антецеденты выделены указателем "усм". Преобразованная посылка сопровождается комментарием "блок", не разрешающим применение равенства "$T = \ldots$" для стандартизации обозначений. Уровень срабатывания равен 4.

(b) Усмотрение сектора.

Аналогично предыдыщему случаю, сначала вводятся недостающие точки, определяющие сектор:

$\forall_{ABCDEHKabcdmnpq}(H = \text{внутренность}(\text{круг}(AB)) \cap \text{внутренность}(\text{Угол}($
$CAD))\ \&\ A = \text{тчкоорд}(K, (a, b))\ \&\ B = \text{тчкоорд}(K, (c, d))\ \&$
$C = \text{тчкоорд}(K, (p, q))\ \&\ m = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}\ \&$
$n = \sqrt{(a - p)^2 + (b - q)^2} \rightarrow E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E = \text{тчкоорд}(K, (a + (p - a)m/n, b + (q - b)m/n))\ \&$
$\neg(A \in \text{отрезок}(CE)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать", следующие два - выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Общая точка E прямой AC и окружности AB пока не введена, и прием ее вводит. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEF}(E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)$
$\&\ F \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, E)\ \&\ \text{точкалуча}(A, D, F) \rightarrow$
$\text{внутренность}(\text{круг}(AB)) \cap \text{внутренность}(\text{Угол}(CAD)) =$
$\text{внутренность}(\text{сектор}(AEF)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в том же контексте, что и предыдущий прием. Антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

(c) Усмотрение прямоугольника.

$\forall_{ABCDKabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ A = \text{тчкоорд}(K,(a,b))\ \&\ B = \text{тчкоорд}(K,(c,d))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K,(e,f))\ \&\ (e-c)(a-c)+(f-d)(b-d) = 0 \to \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{прямоугольник}(ABCD))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "исследовать". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

8. Условие существования точки множества переформулируется как условие существования ее координат.

   $\forall_{AKPQ}(\exists_{xy}(x - \text{точка}\ \&\ x \in A\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \text{set}_{uv}(P(u,v))\ \&\ Q(x,y)) \leftrightarrow \exists_{aby}(Q(\text{тчкоорд}(K,(a,b)),y)\ \&\ P(a,b)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \text{set}_{uv}(P(u,v))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Переменная y идентифицируется с остатком кванторной приставки, имеющим произвольную длину. Переменные P,Q функциональные. Указатель "обобщподст" блокирует проверку невхождения переменных кванторной приставки x,y в термы, идентифицированные с прочими переменными под квантором существования. Уровень срабатывания равен 4.

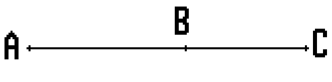
Координаты векторов

1. Определение координат точки, радиус - вектор которой представлен как линейная комбинация базисных векторов.

   $\forall_{ABCDKabpqr}(K = (A,B,C)\ \&\ \text{вектор}(AB) = a\ \&\ \text{вектор}(AC) = b\ \&\ \text{вектор}(AD) = p(qa+rb) \to \text{коорд}(D,K) = (pq,pr))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "коорд(D,K)". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками. Допускаются вырожденные единичные значения коэффициентов p,q,r. Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые частиобрабатываются нормализатором "нормвектор". Выражения p,q,r не содержат невырожденных числовых атомов. Координатный набор для "коорд(D,K)" нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровень срабатывания равен 2.

2. Векторное деление отрезка в заданном отношении.



   $\forall_{ABCKabcdp}(C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{вектор}(AB) = p \cdot \text{вектор}(BC)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB),K) = (c,d)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (a,b)\ \&\ \neg(p=0) \to \text{коорд}(C,K) = (a + c/p, b + d/p))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, p не имеют невырожденных числовых атомов. Координатный набор для "коорд(C, K)" нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCKabcdp}(\text{вектор}(AB) = p \cdot \text{вектор}(BC)$ & $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b)$ & $\text{коорд}(\text{вектор}(BC), K) = (c, d) \to a = pc$ & $b = pd)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(B, K) = (u, v)$". Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выводимая конъюнкция неконстантная. Уровень срабатывания равен 4.

3. Усмотрение коллинеарных векторов через их координаты.

   $\forall_{Kabcdefghijmpqrsuv}(\text{Вектор}(a)$ & $\text{коорд}(a, K) = (g/h, c)$ & $\text{Вектор}(d)$ & $\text{коорд}(d, K) = (i/j, f)$ & $g = ru$ & $i = su$ & $h = pv$ & $j = qv$ & $\neg(p = 0)$ & $\neg(q = 0)$ & $\neg(s = 0)$ & $m = rq/(ps)$ & $mf - c = 0 \to a = md)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты с пятого по восьмой, а также два последних выделены указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

4. Определение координат вектора, пропорционального заданному.

   $\forall_{ABKabc}(\text{коорд}(B, K) = (a, b)$ & $\text{Вектор}(A)$ & $\text{Вектор}(B)$ & $A = cB \to \text{коорд}(A, K) = (ac, bc))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Координатный набор для "коорд(A, K)" нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ABKabc}(\text{коорд}(A, K) = (a, b)$ & $\text{Вектор}(A)$ & $\text{Вектор}(B)$ & $A = cB$ & $\neg(c = 0) \to \text{коорд}(B, K) = (a/c, b/c))$

   Аналогично предыдущему.

5. Определение координат суммы векторов.

   $\forall_{ABKabcd}(\text{коорд}(A, K) = (a, b)$ & $\text{коорд}(B, K) = (c, d) \to \text{коорд}(A + B, K) = (a + c, b + d))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

6. Выражение координатных векторов через известные векторы.

   $\forall_{ABCDEKab}(K = (C, D, E)$ & $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (b, 0)$ & $\text{вектор}(AB) = a$ & $\neg(b = 0) \to \text{вектор}(CD) = 1/b \cdot a)$

$\forall_{ABCDEKab}(K = (C, D, E)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (0, b)$ & вектор$(AB) = a$ & $\neg(b = 0) \to$ вектор$(CE) = 1/b \cdot a)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных, а левые части выводимых равенств - содержат. Уровень срабатывания равен 5.

7. Выражение неизвестного вектора через известные координатные векторы и известные координаты.

   $\forall_{ABCDKab}$(Вектор(A) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & $K = (B, C, D) \to$ $A = a \cdot$ вектор$(BC) + b \cdot$ вектор$(BD))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a и b, а также выражения для векторов BC и BD не содержат неизвестных. Выражение A содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

8. Определение координат вектора через координаты концов.

   $\forall_{ABKabcd}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \to$ коорд(вектор$(AB), K) = (c - a, d - b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

9. Усмотрение конца известного вектора, отложенного от известной точки.

   $\forall_{ABCDEKabcdef}(K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & коорд$(E, K) = (c, d)$ & $e - a - c = 0$ & $f - b - d = 0 \to$ тчкоорд$(K, (e, f)) =$ конецвектора$(A,$ вектор$(AD)+$ вектор$(AE)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Переменные A, D, E не являются вспомогательными параметрами. Хотя бы одно из выражений e, f, K содержит вспомогательный параметр. Преобразуемое выражение не расположено внутри квантора либо описателя. Уровень срабатывания равен 3.

10. Ввод вспомогательного параметра - координатного вектора.

    $\forall_{ABCKa}(K = (A, B, C) \to$ вектор$(AB) = a$ & Вектор$(a))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(e, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Не усматривается перпендикулярность прямых AB и AC. Выражение для вектора AB содержит неизвестные и не имеет типа "внешнеизв". В посылках отсутствует равенство, определяющее координаты множества точек, а также равенство, определяющее координаты точки и содержавшееся в исходной формулировке задачи. Вспомогательный параметр a для обозначения вектора AB пока не введен, и прием его вводит. Уровень срабатывания приема равен 4.

$\forall_{ABCKa}(K = (A, B, C) \to \text{вектор}(AC) = a \;\&\; \text{Вектор}(a))$

Аналогично предыдущему.

11. Ввод вспомогательной неизвестной для радиус-вектора точки с неизвестными координатами.

    $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C) \;\&\; D - \text{точка} \to \text{вектор}(AD) = a \;\&\; \text{Вектор}(a))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в уравнении задачи на исследование подвыражения "коорд(D, K)". Это уравнение должно содержать неизвестную внешней задачи на описание. Антецеденты идентифицируются с посылками. Не усматривается перпендикулярность прямых AB, AC. В исходной формулировке задачи не были явно указаны какие-либо координатные наборы. Если уже имеется посылка вида "вектор$(AD) = X$", то выражение X содержит невырожденные числовые атомы. Прием вводит новую вспомогательную неизвестную a. Уровень срабатывания равен 4.

Переход к новой системе координат

1. Выражение координат точки в новой системе координат через ее координаты в старой, если известны координаты в новой системе начала координат и базисных векторов старой системы.

   $\forall_{ABCKQabcdefxy}(K = (A, B, C) \;\&\; \text{коорд}(A, Q) = (a, b) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AB), Q) = (c, d) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AC), Q) = (e, f) \;\&\; \text{коорд}(D, K) = (x, y) \;\&\; D - \text{точка} \to \text{коорд}(D, Q) = (a + xc + ye, b + xd + yf))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "коорд(D, Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент и два последних антецедента идентифицируются с посылками. Второй, третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменные K, Q различны. Уровни срабатывания равны 3 и 4.

   $\forall_{ABCKQabcdefxy}(K = (A, B, C) \;\&\; \text{коорд}(A, Q) = (a, b) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AB), Q) = (c, d) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AC), Q) = (e, f) \;\&\; \text{коорд}(D, K) = (x, y) \;\&\; D - \text{точка} \;\&\; \text{прямкоорд}(Q) \to \text{коорд}(D, Q) = (a + xc + ye, b + xd + yf))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент и три последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Такая цель означает, что в задаче изучаются свойства линии, заданной своим уравнением. Второй, третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменные K, Q различны. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема. Идентификация аналогичная, но допускаются любые задачи на доказательство либо на исследование. Должны существовать посылка вида "$D \in M$", а также посылка, задающая уравнение для координат точек множества M в системе Q. Уровень срабатывания этой версии равен 6.

2. Выражение координат точки в новой системе координат через ее координаты в старой, если известны координаты в старой системе начала координат и базисных векторов новой системы.

   $\forall_{ABCKMTabcdefpxy}(T = (A, B, C)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (c, d)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (e, f)$ & коорд$(M, K) = (x, y)$ & $p = cf - de$ & $\neg(p = 0)$ & M – точка $\rightarrow$ коорд$(M, T) = ((fx - ey + be - af)/p, (cy - dx + ad - bc)/p))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(M, T)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый, пятый и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками. Антецеденты со второго по четвертый, а также шестой выделены указателем "идентификатор". Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные K, T различны. Уровень срабатывания равен 5.

3. Определение координат базисных точек старой системы координат, если известны формулы перехода к новой системе.

   $\forall_{ABCKQabcdef}(Q = (A, B, C)$ & $\forall_{Pxy}(P$ – точка & коорд$(P, Q) = (x, y) \rightarrow$ коорд$(P, K) = (ax + by + c, dx + ey + f)) \rightarrow$ коорд$(A, K) = (c, f)$ & коорд$(B, K) = (a + c, d + f)$ & коорд$(C, K) = (b + c, e + f))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Указатели "подстановка" допускают вырожденные нулевые значения переменных a, b, d, e. Уровень срабатывания равен 3.

4. Ввод в рассмотрение координат начала старой системы относительно новой системы.

   $\forall_{ABCDEFKTa}(K = (A, B, C)$ & $T = (D, E, F)$ & коорд$(M, K) = a \rightarrow$ актив(вектор(DA)) & актив(коорд(A, T)))

   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "коорд(M, T)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменные K, T различны. Выражение a не содержит неизвестных, а выражение для "коорд(M, T) содержит. Уровень срабатывания равен 4.

5. Выражение координат множества точек в новой системе координат через его координаты в старой, если известны координаты в старой системе начала координат и базисных векторов новой системы.

   $\forall_{ABCKMTabcdef}(T = (A, B, C)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (c, d)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (e, f)$ & коорд$(M, K) = \mathrm{set}_{xy}(x$ – число & y – число & $f(x, y)) \rightarrow$ коорд$(M, T) = \mathrm{set}_{xy}(x$ – число & y – число & $f(a + cx + ey, b + dx + fy)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(M, T)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная f функциональная и идентифицируется с произвольным утверждением, ограничивающим допустимые координаты точек множества M. Переменные K, T различны. Явное соотношение для координат точек множества M в системе координат T пока отсутствует, и прием его выводит. Уровень срабатывания равен 5.

6. Выражение координат множества точек в новой системе координат через его координаты в старой, если известны координаты в новой системе начала координат и базисных векторов старой системы.

   $\forall_{ABCKMQabcdefp}(K = (A, B, C)$ & коорд$(A, Q) = (a, b)$ & коорд(вектор$(AB), Q) = (c, d)$ & коорд(вектор$(AC), Q) = (e, f)$ & коорд$(M, K) = \mathrm{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $f(x, y))$ & $p = cf - de$ & $\neg(p = 0) \rightarrow$ коорд$(M, Q) = \mathrm{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $f((fx - ey + be - af)/p, (cy - dx + ad - bc)/p)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(M, Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Антецеденты со второго по четвертый, а также шестой выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная f функциональная. Переменные K, Q различны. Явное соотношение для координат точек множества M в системе координат Q пока отсутствует, и прием его выводит. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

   $\forall_{ABCKMQabcdefp}(K = (A, B, C)$ & коорд$(A, Q) = (a, b)$ & коорд(вектор$(AB), Q) = (c, d)$ & коорд(вектор$(AC), Q) = (e, f)$ & коорд$(M, K) = \mathrm{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $f(x, y))$ & $p = cf - de$ & $\neg(p = 0)$ & прямкоорд$(Q) \rightarrow$ коорд$(M, Q) = \mathrm{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $f((fx - ey + be - af)/p, (cy - dx + ad - bc)/p)))$

   Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, обладающих целью "линия". Идентификация происходи аналогично предыдущему случаю, но указатель "контрольвывода" отсутствует, а последний антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение M должно иметь заголовок "прямая". Уровень срабатывания равен 5.

7. Параметризация связи между двумя системами координат в задаче, допускающей рассмотрение дополнительных параметров.

   $\forall_{ABCDEFKQabcdpx}(K = (A, B, C)$ & прямкоорд(K) & $Q = (D, E, F)$ &
   прямкоорд(Q) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AB) & коорд$(M, K) = x$ &
   коорд$(M, Q) = p \rightarrow a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
   $|c| = 1$ & $|d| = 1$ & коорд(вектор$(DE), K) = (c, 0)$ & коорд(вектор$(DF), K) = (0, d)$ & коорд$(D, K) = (a, b))$

   Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на исследование, обладающих целью "новпарам". Эта цель возникает в задачах на описание либо на исследование, имеющих также цель "известно ...". Она указывает, что разрешен ввод дополнительных "известных" параметров, причем ответ задачи будет представлен в форме квантора существования по этим параметрам. Для учета вводимых параметров применяется комментарий (известные G H), где G - список параметров, H - набор исходных утверждений, ограничивающих значения параметров.

   Пятый антецедент выделен указателем "усм", остальные - идентифицируются с посылками. Выражение p не содержит неизвестных, выражение "коорд(D, K)"

- содержит. Выражение x имеет тип "неизв". Прием вводит дополнительные параметры a, b, c, d. Уровень срабатывания равен 4.

8. Переключение внимания.

   $\forall_{AMTab}$(коорд$(A, T) = (a, b)$ & коорд$(M, T) = x$ & коорд$(M, K) = (c, d)$ & $K = (A, B, C) \to \emptyset)$

   Прием имеет заголовок "замечание". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных, переменная x - неизвестная. Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Прием уменьшает до 3 вес посылки, идентифицированной со вторым антецедентом. Уровень срабатывания равен 3.

Ориентация равенства, определяющего аффинную систему координат

$\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \leftrightarrow (A, B, C) = K)$

Прием применяется к посылке. Вводимая им ориентация равенства блокирует повсеместную подстановку набора (A, B, C) вместо обозначающей систему координат переменной K. В задаче либо имеется посылка "прямкоорд(K)", либо рассматриваются координаты какой-либо точки относительно K, либо встречается выражение "точки(X, K)". Таким образом прием проверяет, что K - именно система координат, а не какой-либо иной набор длины 3. Преобразованное утверждение сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

Вычисление координат точки в задаче на преобразование, имеющей цель "класс"

$\forall_{AKab}$(прямкоорд(K) & A – точка & коорд$(A, K) = (a, b) \to$ коорд$(A, K) = (a, b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкоорд". Отсутствует посылка вида "коорд$(A, K) = (x, y)$". Уровень срабатывания равен 4.

Ввод в рассмотрение координатного набора

Все приемы этого подраздела имеют заголовок "вывод".

$\forall_{ABKP}(A \in B$ & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{xy}(P(x, y)) \to a$ – число & b – число & коорд$(A, K) = (a, b))$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Переменная P функциональная. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(A, K)". Отсутствует также посылка, задающая координаты точки A относительно какой-либо другой системы координат. Прием вводит новые переменные a, b. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKPabc}$(расстдопрямой$(A, B) = c$ & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{xy}(P(x, y)) \to a$ – число & b – число & коорд$(A, K) = (a, b))$

Аналогично предыдущему приему. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{DKabc}$(коорд$(D, K) = a \to b$ – число & c – число & $a = (b, c))$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Выражение a не имеет заголовка "набор". В задаче рассматривается расстояние от точки D до некоторой точки, для которой явно указан координатный набор. Отсутствуют посылки вида "равно(коорд(D, Q)набор$(\ldots)$)" и "равно(a набор$(\ldots)$)". Прием вводит новые переменные b, c. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKabcd}($коорд$(A, K) = (a, b)$ & актив(вектор$(AB)) \to c -$ число & $d -$ число & коорд$(B, K) = (c, d))$

$\forall_{ABKabcd}($коорд$(A, K) = (a, b)$ & актив(вектор$(BA)) \to c -$ число & $d -$ число & коорд$(B, K) = (c, d))$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(B, K)". Отсутствует также посылка, задающая координаты точки B относительно какой-либо другой системы координат. Прием вводит новые переменные c, d. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKabc}($прямкоорд(K) & вектор$(AB) = a \to b -$ число & $c -$ число & коорд$(a, K) = (b, c))$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражение a не содержит неизвестных и не является вспомогательным параметром. В некоторой посылке встречается скалярное произведение вектора a на некоторый вектор. Имеется посылка "$K = (P, Q, R)$", позволяющая усмотреть, что система координат K двумерная. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(a, K)". Прием вводит новые переменные b, c и регистрирует их как вспомогательные параметры (вплоть до получения ответа они будут рассматриваться как известные, а затем - как неизвестные). Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKabc}($прямкоорд(K) & Вектор$(a) \to b -$ число & $c -$ число & коорд$(a, K) = (b, c))$

Аналогично предыдущему приему. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{ABCKPQ}(K = (A, B, C)$ & прямкоорд(K) & актив$(l(PQ)) \to a -$ число & $b -$ число & коорд$(P, K) = (a, b))$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражение для расстояния PQ имеет тип "внешнеизв". Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(P, K)". Отсутствует также посылка, задающая координаты точки P относительно какой-либо другой системы координат. Прием вводит новые переменные a, b. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEKabcm}(K = (A, B, C)$ & прямкоорд(K) & коорд$(D, K) = (a, b)$ & $E \in$ прямая(AC) & $l(DE) = m \to c -$ число & коорд$(E, K) = (0, c))$

$\forall_{ABCDEKabcm}(K = (A, B, C)$ & прямкоорд(K) & коорд$(D, K) = (a, b)$ & $E \in$ прямая(AB) & $l(DE) = m \to c -$ число & коорд$(E, K) = (c, 0))$

Четвертый антецедент выделен указателем "усм", остальные - идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражение m не содержит неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(E, K)". Отсутствует также посылка, задающая координаты точки E относительно какой-либо другой системы координат. Прием вводит новую переменную c. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKPQRab}$(прямкоорд(K) & $K = (P, Q, R)$ & актив(вектор(AB)) $\to a$ – число & b – число & коорд$(A, K) = (a, b)$)

$\forall_{ABKPQRab}$(прямкоорд(K) & $K = (P, Q, R)$ & актив(вектор(AB)) $\to a$ – число & b – число & коорд$(B, K) = (a, b)$)

Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "скалумнож(вектор$(AB)X$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Это подвыражение имеет тип "неизв". Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(A, K)" в первом приеме и для "коорд(B, K)" во втором. Прием вводит новые переменные a, b. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{DKabc}$(коорд$(D, K) = a$ & D – точка $\to b$ – число & c – число & $a = (b, c)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Переменная a представляет собой неизвестную внешней задачи на описание. Усматривается, что система координат K - двумерная. Отсутствует посылка вида "равно(a набор$(\ldots)$)". Отсутствует также посылка, задающая координаты точки D относительно какой-либо системы координат. Прием вводит новые переменные b, c. Уровень срабатывания равен 6.

Прямоугольная система координат

1. Перпендикулярность осей координат.

   $\forall_{ABCK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) $\to$ прямая$(AB) \perp$ прямая(AC))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "чертеж". Такие задачи решаются при построении эскиза, сопровождающего логическое условие геометрической задачи. Два последних антецедента выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1. Создана также версия приема, срабатывающая в посылках произвольной задачи на доказательство либо на исследование. В последнем случае не допускаются цели "точки" и "линия". Уровень срабатывания этой версии равен 2.

2. Длины координатных векторов.

   $\forall_{ABCK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C) \to l(AB) = 1$)

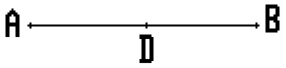
   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем расстояние AB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

3. Усмотрение прямоугольной системы.

   $\forall_{ABCK}$($K = (A, B, C)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & $l(AB) = 1$ & $l(AC) = 1 \to$ прямкоорд(K))

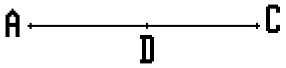
   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент выделен указателем "усм", остальные - идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

4. Точка на оси координат.

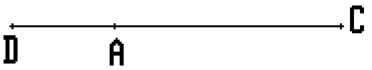


$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & прямкоорд(K) & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, D) & коорд$(D, K) = (a, b) \to a = l(AD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.



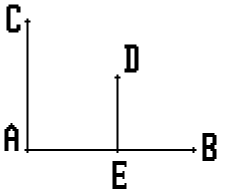
$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & прямкоорд(K) & $D \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, D) & коорд$(D, K) = (a, b) \to b = l(AD))$



$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & прямкоорд(K) & $D \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(CD) & коорд$(D, K) = (a, b) \to b = -l(AD))$

Аналогично первому приему.

5. Расстояние до оси координат.

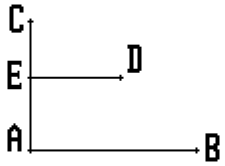


$\forall_{ABCDEKab}($прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AB) & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \to l(DE) = b)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(DE)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Заголовком этой посылки не должен являться символ "актив". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKab}($прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AB) & $E \in$ прямая$(AB) \to l(DE) = |b|)$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

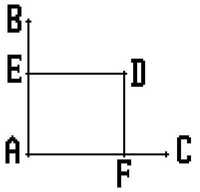


$\forall_{ABCDEKab}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & односторона$(B, D,$ прямая$(AC)) \to l(DE) = a)$

$\forall_{ABCDEKab}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & прямая$(DE) \perp$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(AC) \to l(DE) = |a|)$

Приемы аналогичны предыдущим двум приемам.

6. Проекции на оси координат.



$\forall_{ABCDEFKab}$(прямкоорд(K) & $K = (A, C, B)$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & прямая$(DF) \parallel$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) & коорд$(E, K) = (0, a)$ & коорд$(F, K) = (b, 0) \to$ коорд$(D, K) = (b, a))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента, а также последние два идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

7. Расстояние между двумя точками либо длина вектора.

$\forall_{ABKabpq}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (p, q) \to l(AB) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Заголовок этой посылки отличен от символа "актив". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Либо условие задачи имеет заголовок "класс", либо хотя бы одна из переменных A, B является вспомогательным параметром. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, применяемая в задачах на доказательство либо на исследование. В ней отброшено требование на условие и на переменные A, B. Уровни срабатывания этой версии равны 2 и 5.

$\forall_{Kabd}$(прямкоорд(K) & Вектор(d) & коорд$(d, K) = (a, b) \to$ длина$(d) = \sqrt{a^2 + b^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "длина(d)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 6.

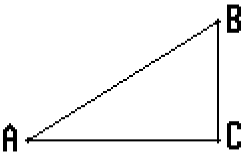
$\forall_{ABCKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд(A, K) $= (a, b)$ & коорд(B, K) $= (c, d)$ & коорд(C, K) $= (e, f)$ & $l(AB) = l(BC) \to a^2 + b^2 + 2ce - 2ac + 2df - 2bd - e^2 - f^2 = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний - выделен указателем "усм". Выражения a, b, c, d, e, f имеют в совокупности ровно одну неизвестную. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор(AB), K) $= (a, b) \to l(AB) = \sqrt{a^2 + b^2}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Заголовок этой посылки отличен от символа "актив". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 7.

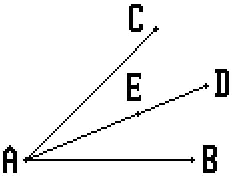
8. Теорема Пифагора для случая, когда известны координаты концов гипотенузы и длина одного из катетов.



$\forall_{ABCabcd}$(прямая(BC) $\perp$ прямая(AC) & прямкоорд(K) & коорд(A, K) $= (a, b)$ & коорд(B, K) $= (c, d) \to l(AC)^2 + l(BC)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2 = 0$)

Прием имеет заголовок "выод". Точка привязки выбрана в первом антецеденте, выделенном указателем "усм". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Расстояние BC известно, выражение для расстояния AC имеет тип "неизв". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 4.

9. Определение координат точки на биссектрисе угла.



$\forall_{ABCDEKabdepqxy}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор(AC), K) $= (a, b)$ & коорд(вектор(AB), K) $= (d, e)$ & коорд(A, K) $= (x, y)$ & $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $q = \sqrt{d^2 + e^2}$ & биссектриса($BACD$) $\to E$ – точка & $E \in$ прямая(AD) & $\neg$($A \in$ интервал(DE)) & коорд(E, K) $= (x + a/p + d/q, y + b/p + e/q)$)

Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Пока не известны координаты никакой точки прямой AD, отличной от точки A. Прием вводит новую точку E на луче AD и определяет ее координаты. Уровень срабатывания равен 5.

10. Выражение координат через угол между радиус-вектором и осью абсцисс.

    $\forall_{ABCDKbc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & коорд$(D, K) = (b, c) \to b = l(AD)\cos(\angle(BAD))$ & $c = l(AD)\sin(\angle(BAD)))$

    Первые два антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Расстояние AD и угол BAD уже рассматриваются в задаче. Выводимые соотношения содержат неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

11. Угол между двумя векторами.

    $\forall_{ABCKabcdpq}$(прямкоорд(K) & направлвектор(B, A, K, p) & направлвектор(B, C, K, q) & $p = (a, b)$ & $q = (c, d) \to \cos(\angle(ABC)) = (ac + bd)/(\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}))$

    В теореме приема встречается отношение "направлвектор(X, Y, Z, V)", означающее, что V есть координаты в системе координат Z некоторого вектора, расположенного на луче XY. Это отношение обрабатывается одноименным пакетным синтезатором, определяющим V по заданным X, Y, Z. Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\angle(ABC)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй и третий антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Выражение для угла ABC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{ABKabcd}$(прямкоорд(K) & Вектор(A) & Вектор(B) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & уголмежду$(A, B) < \pi/2 \to 0 < ac + bd)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{ABCKabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (c, d)$ & $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $q = \sqrt{c^2 + d^2} \to$ $\cos(\angle(BAC)) = (ac + bd)/(pq))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\angle(BAC)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCKabcdefpq}$(прямкоорд(K) & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & коорд$(C,K)=(e,f)$ & $p=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$ & $q=\sqrt{(e-a)^2+(f-b)^2} \to \cos(\angle(BAC))pq=(c-a)(e-a)+(f-b)(d-b)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Идентификация аналогична предыдущему приему, однако выражения a,b,c,d,e,f могут содержать неизвестные. Угол BAC известен. Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABKabdepq}$(прямкоорд(K) & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(d,e)$ & $p=\sqrt{a^2+b^2}$ & $q=\sqrt{d^2+e^2} \to \cos($уголмежду$(A,B))=(ad+be)/(pq)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(A,B)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 7.

12. Касательная к кривой.

    (a) Длина касательной к окружности, проведенной из заданной точки.

    $\forall_{ABQKabcdpq}(\neg(a=0)$ & точки(set$_{xy}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & $x-$ число & $y-$ число$),K)=Q$ & прямая(AB) $-$ касательная к Q & $A\in Q$ & коорд$(B,K)=(p,q)$ & прямкоорд(K) & $0<b^2+c^2-4ad \to l(AB)=\sqrt{(ap^2+bp+aq^2+cq+d)/a}$)

    Антецеденты со второго по четвертый, а также шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первый и последний антецеденты обрабатываются проверочными операторами, пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатели "подстановка" допускают вырожденные нулевые значения b,c. Уровень срабатывания равен 4.

    (b) Существование касательной к окружности, проведенной через заданную точку.

    $\forall_{AQKabcdpq}(\neg(a=0)$ & точки(set$_{xy}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & $x-$ число & $y-$ число$),K)=Q$ & прямкоорд(K) & коорд$(A,K)=(p,q)$ & $0<b^2+c^2-4ad \to \exists_B(B\in Q$ & прямая(AB) $-$ касательная к Q & $\neg(A=B)$ & $B-$ точка$)\leftrightarrow 0<a(ap^2+pb+aq^2+cq+d))$

    Прием имеет заголовок "связка". Он применяется в условиях задачи на описание и позволяет исключить несущественную неизвестную B. Второй и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Первый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 2 и 5.

    (c) Использование производной.

    $\forall_{ABFKabcpqrs}$(прямая(AB) $-$ касательная к a & $a=$ точки(set$_{xy}(x-$ число & $y-$ число & $F(x,y)=0),K)$ & прямкоорд(K) & разныеточки(A,B) & коорд$(A,K)=(p,q)$ & коорд$(B,K)=(r,s)$ & $A\in a$ & $b=dF(p,q)/dp$ & $c=dF(p,q)/dq \to (p-r)b+(q-s)c=0$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и седьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Частные производные обрабатываются вспомогательными задачами на преобразование, причем проверяется невхождение символа "частнпроизв"в результаты b, c. Это означает, что производные существуют и их удалось вычислить. Уровень срабатывания равен 6.

13. Длина кривой, распадающейся на фрагменты.

    $\forall_{ABKPabf}$(прямкоорд(K) & $\mathrm{set}_{xy}((x, y) \in A) = \bigcup_{i=1}^{n} B(i)$ & конечнпересечения$(B) \rightarrow$ длина(точки$(A, K)) = \sum_{i=1}^{n}$ длина(точки$(B(i), K)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Выражение A имеет заголовок "класс", причем длина его связывающей приставки равна 2. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Утверждение под описателем "класс" в этом антецеденте разрешается относительно y при помощи вспомогательной задачи на описание. После этого к описателю применяется нормализатор "нормкласс". Конечное объединение идентифицируется с помощью указателя "развертка" как обычное объединение, причем n должно быть больше 1. Аналогичным образом, конечная сумма выписывается как обычная сумма. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Здесь устанавливается, что любые два различных элемента семейства множеств B пересекаются по конечному числу точек. Уровень срабатывания равен 4.

14. Попытка определить координаты для векторной неизвестной.

    $\forall_{Kabcx}$(прямкоорд(K) & $x = a$ & Вектор(a) & коорд$(a, K) = (b, c) \rightarrow$ коорд$(x, K) = (b, c))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, последний - выделен указателем "идентификатор". Выражение x имеет тип "внешнеизв", выражения b и c не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" до применения прием не позволяет определить координатный набор для "коорд(x, K)". Уровень срабатывания равен 4.

15. Подбор примера при координатном задании квадрата.

    $\forall_{Kabcdefgh}$(прямкоорд(K) & $a = c$ & $d = f$ & $g = e$ & $b = h$ & $d - b = e - c$ & $0 < d - b \rightarrow$ квадрат(тчкоорд$(K, (a, b))$ тчкоорд$(K, (c, d))$ тчкоорд$(K, (e, f))$ тчкоорд$(K, (g, h))))$

    Прием имеет заголовок "подборзначений". Он применяется к условию задачи на описание, не имеющей цели "полный". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные антецеденты выделены указателем "подборзначений". Они замещают во вспомогательной задаче условие "квадрат(...)". Уровень срабатывания равен 4.

16. Усмотрение противоречия в знаках скалярного произведения векторов и тангенса угла между ними.

$\forall_{ABCabcdefp}(\text{tg}(\angle(BAC)) = p$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & прямкоорд(K) &
коорд$(B, K) = (c, d)$ & коорд$(C, K) = (e, f)$ &
$((c - a)(e - a) + (d - b)(f - b))p < 0 \to$ ложь$)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Выражения a, b, c, d, e, f, p не содержат неизвестных. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

17. Использование координат в задачах на определение геометрического места точек.

    Все приемы этого подраздела применяются в задачах на преобразование, имеющих цель "класс". Задача на определение геометрического места точек Обычно формализуется именно в таком виде. Рассматриваемое множество точек задается через описатель "класс". На первом этапе вводится вспомогательная система координат, и условие переформулируется в координатном виде. После упрощений реализуется обратный переход к бескоординатному заданию множества.

    (a) Ввод прямоугольной системы координат.

    Все приемы этого пункта имеют заголовок "вывод".

    i. Использование пары точек с выделенным расстоянием между ними.
    $\forall_{ABCDK}(A-$точка & $B-$точка & актив$(l(AB))$ & разныеточки$(A, B) \to$
    C – точка & D – точка & $(A, C, D) = K$ & прямкоорд(K) &
    $C \in$ прямая(AB) & $\neg(A \in$ интервал$(BC)))$
    Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Третий антецедент выделен указателем "усм", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Задача имеет посылку "планиметрия" и не имеет посылок, содержащих символ "коорд". Прием вводит новые переменные C, D, K и регистрирует их как вспомогательные параметры. Уровень срабатывания равен 6.

    ii. Использование пары перпендикулярных прямых.
    $\forall_{ABCDEK}($прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & разныеточки(A, B) &
    разныеточки$(A, C) \to D$ – точка & E – точка & $(A, D, E) = K$ &
    прямкоорд(K) & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) &
    $\neg(A \in$ интервал$(CE))$ & $\neg(A \in$ интервал$(BD)))$
    Точка привязки выбрана в первом антецеденте, выделенном указателем "усм". Остальные антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Задача имеет посылку "планиметрия" и не имеет посылок, содержащих символ "коорд". Прием вводит новые переменные D, E, K и регистрирует их как вспомогательные параметры. Уровень срабатывания равен 4.

    iii. Использование пары точек, для которых выделены расстояния от варьируемой точки.
    $\forall_{ABCDK}(A$ – точка & B – точка & разныеточки$(A, B) \to C$ – точка &
    D – точка & $(A, C, D) = K$ & прямкоорд(K) & $C \in$ прямая(AB) &
    $\neg(A \in$ интервал$(BC)))$
    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Задача имеет посылку "планиметрия" и не имеет посылок, содержащих символ "коорд". Условие

задачи имеет заголовок "класс". Для каждой из точек A, B в условии рассматривается либо окружность с центром в этой точке, либо ее расстояние до некоторой точки, связанной корневым описателем. Прием вводит новые переменные C, D, K и регистрирует их как вспомогательные параметры. Уровень срабатывания равен 7.

(b) Переформулировка утверждений и выражений в терминах известных точек.

i. Усмотрение скалярного произведения двух известных векторов.
$\forall_{ABCDEKabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & коорд$(E, K) = (c, 0) \rightarrow ac =$ скалумнож(вектор(AD), вектор(AE)))
Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Хотя бы одно из выражений a, c содержит вспомогательны параметр, а переменные A, D, E не являются вспомогательными параметрами. Преобразуемое выражение не расположено внутри описателя "класс" либо квантора существования. Уровень срабатывания равен 6.

ii. Усмотрение расстояния между двумя известными точками.
$\forall_{ABCDKaxy}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (x, y) \rightarrow ax^2 + ay^2 = al(AD)^2$)
Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Хотя бы одно из выражений x, y содержит вспомогательный параметр. Переменные A, D не являются вспомогательными параметрами. Отсутствует внешний описатель "класс" либо квантор существования. Уровень срабатывания равен 5.
$\forall_{ABCDx}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (x, 0) \rightarrow$
$x^2 = l(AD)^2$)
Аналогично предыдущему, но вспомогательный параметр должно содержать выражение x. Кроме того, указатель "вид" блокирует неявную идентификацию степени: квадрат выражения x усматривается в явном виде.
$\forall_{ABCDKx}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (x, 0)$ &
$0 \leq x \rightarrow x = l(AD)$)
Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Выражение x содержит вспомогательный параметр. Переменные A, D не являются вспомогательынми параметрами. Условие задачи не содержит символа "класс", но содержит переменную x. Выводимое равенство сопровождается комментарием "ориентацияравенства", так что впоследствии все вхождения переменной x в условие окажутся заменены на $l(AD)$. Уровень срабатывания равен 8.

iii. Усмотрение острого, тупого либо прямого угла из знака абсциссы.
$\forall_{ABCDEKabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & коорд$(E, K) = (c, 0)$ & $0 < c$ & разныеточки$(A, D) \rightarrow 0 < a \leftrightarrow \angle(DAE) < \pi/2$)

$\forall_{ABCDEKabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & коорд$(E, K) = (c, 0)$ & $0 < c$ & разныеточки$(A, D) \rightarrow a = 0 \leftrightarrow \angle(DAE) = \pi/2$)

$\forall_{ABCDEKabc}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b)\ \&$
$\text{коорд}(E, K) = (c, 0)\ \&\ 0 < c\ \&\ \text{разныеточки}(A, D) \rightarrow a < 0 \leftrightarrow$
$\pi/2 < \angle(DAE) < \pi/2)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Выражение a содержит вспомогательный параметр, а выражения A, D, E - не содержат. Уровень срабатывания равен 7.

(c) Ввод координатного набора для исходной точки.

$\forall_{ABCDKa}(K = (A, B, C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow$
$a - \text{число}\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, 0))$

$\forall_{ABCDKa}(K = (A, B, C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow$
$a - \text{число}\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (0, a))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Переменная D не является вспомогательным параметром, причем координатный набор для "коорд(D, K)" пока не введен. Прием вводит новую переменную a и регистрирует ее в качестве вспомогательного параметра. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow a - \text{число}\ \&$
$b - \text{число}\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Условия на D прежние. Прием вводит новые переменные a, b и регистрирует их в качестве вспомогательных параметров. Выводимое равенство снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 6.

18. Переход к прямоугольной системе координат.

$\forall_{ABCDEKQ}(Q = (A, B, C)\ \&\ K = (A, D, E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&$
$\text{коорд}(B, K) = (a, 0)\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (0, b)\ \&\ 0 \leq ab \rightarrow$
$\text{оруголмежду}(c, d, Q) = \text{оруголмежду}(c, d, K))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", последний - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка "прямкоорд(Q)". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEQK}(Q = (A, B, C)\ \&\ \text{вектор}(AB) \perp \text{вектор}(AC) \rightarrow D - \text{точка}\ \&$
$E - \text{точка}\ \&\ K = (A, D, E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (l(AB), 0)\ \&$
$\text{коорд}(C, K) = (0, l(AC)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "оруголмежду(a, b, Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Задача не имеет посылки вида "прямкоорд$(\ldots)$". Прием вводит новые переменные K, D, E. Уровень срабатывания равен 6.

19. Переход от одной прямоугольной системы координат к другой.

$\forall_{ABCDEFGQKabcd}$(прямкоорд(K) & прямкоорд(Q) & $K = (B, C, D)$ & $Q = (E, F, G)$ & коорд$(B, Q) = (a, b)$ & вектор(BC) = вектор(EF) & вектор(BD) = вектор(EG) & коорд$(A, K) = (c, d) \to$ коорд$(A, Q) = (a+c, b+d)$)

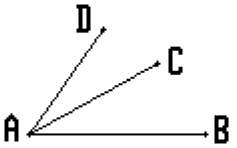
$\forall_{ABCDEFGQKabcd}$(прямкоорд(K) & прямкоорд(Q) & $K = (B, C, D)$ & $Q = (E, F, G)$ & коорд$(B, Q) = (a, b)$ & вектор(BC) = вектор(EG) & вектор(BD) = вектор(EF) & коорд$(A, K) = (c, d) \to$ коорд$(A, Q) = (a-d, b+c)$)

$\forall_{ABCDEFGQKabcd}$(прямкоорд(K) & прямкоорд(Q) & $K = (B, C, D)$ & $Q = (E, F, G)$ & коорд$(B, Q) = (a, b)$ & вектор(BC) = вектор(EG) & вектор(BD) = вектор(EF) & коорд$(A, Q) = (c, d) \to$ коорд$(A, K) = (d-b, a-c)$)

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые пять антецедентов и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, шестой и седьмой - выделены указателем "идентификатор". Выражения Q, K различны. Уровень срабатывания равен 3.

Полярные координаты

1. Выражение полярных координат через угол и расстояние.



$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)) \to$ полкоорд$(D, K) = (l(AD), \angle(BAD)))$

$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB)) \to$ полкоорд$(D, K) = (l(AD), -\angle(BAD)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение либо входит в условие, либо не является одной из частей посылки вида "полкоорд(D, K) = набор$(\ldots)$". Уровень срабатывания равен 3.

2. Расстояние между двумя точками.

$\forall_{ABKabcd}$(полкоорд$(A, K) = (a, b)$ & полкоорд$(B, K) = (c, d) \to$ $l(AB) = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos(b - d)}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" посылки задачи на доказательство либо на исследование. Эта посылка не имеет заголовка "актив". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

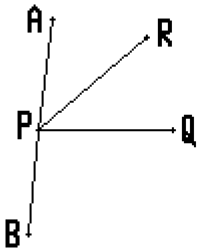
3. Деление отрезка в заданном отношении.

$\forall_{ABCKabcdefgpq}$(полкоорд$(A, K) = (a, b)$ & полкоорд$(B, K) = (c, d)$ & полкоорд$(C, K) = (e, f)$ & $C \in$ отрезок(AB) & $pl(AC) = ql(BC)$ & $g = \sqrt{p^2c^2 + q^2a^2 + 2acpq\cos(b - d)}/(p + q) \to e = g$ & $\sin f = (pc\sin d + qa\sin b)/(g(p + q))$ & $\cos f = (pc\cos d + qa\cos b)/(g(p + q))$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый

- выделен указателем "усм". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором, шестой - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Выводимые утверждения неконстантные. Уровень срабатывания равен 5.

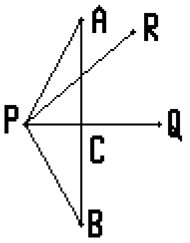
4. Координаты точек, симметричных относительно начала координат либо относительно полярной оси.



$\forall_{ABKPQab}$(полкоорд$(A,K)=(a,b)$ & $P\in$ отрезок(AB) & $K=(P,Q,R)$ & $l(AP)=l(PB)$ & $0\le b\to$ полкоорд$(B,K)=(a,b-\pi)$)

$\forall_{ABKPQab}$(полкоорд$(A,K)=(a,b)$ & $P\in$ отрезок(AB) & $K=(P,Q,R)$ & $l(AP)=l(PB)$ & $b\le 0\to$ полкоорд$(B,K)=(a,b+\pi)$)

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "усм". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Расстояния AP и PB уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания приемов равен 4.



$\forall_{ABCKPQRab}$(полкоорд$(A,K)=(a,b)$ & $C\in$ отрезок(AB) & $C\in$ прямая(PQ) & $l(AC)=l(BC)$ & $K=(P,Q,R)\to$ полкоорд$(B,K)=(a,-b)$)

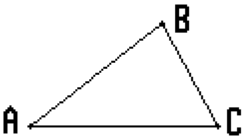
Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

5. Изменение координат при повороте полярного луча.

$\forall_{AKMPQRSTabc}(K=(P,Q,R)$ & $M=(P,S,T)$ & оругол$(Q,P,S)=a$ & полкоорд$(A,K)=(b,c)\to$ полкоорд$(A,M)=(b,c-a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

6. Площадь треугольника через полярные координаты его вершин.



$\forall_{ABCKabcdef}$(полкоорд$(A, K) = (a, b)$ & полкоорд$(B, K) = (c, d)$ & полкоорд$(C, K) = (e, f) \rightarrow S$(фигура$(ABC)) =$ $(ac \sin(d - b) + ce \sin(f - d) + ae \sin(b - f))/2)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "S(фигура(ABC))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 5.

7. Переход от полярных координат точки к прямоугольным.

$\forall_{AKab}$(прямкоорд(K) & полкоорд$(A, K) = (a, b) \rightarrow$ коорд$(A, K) =$ $(a \cos b, a \sin b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(A, X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

8. Переход от прямоугольных координат точки к полярным.

$\forall_{AKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & полкоорд$(A, K) = (c, d) \rightarrow$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $\sin d = b/\sqrt{a^2 + b^2}$ & $\cos d = a/\sqrt{a^2 + b^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 3.

9. Переход от прямоугольных координат множества точек к полярным.

$\forall_{AKf}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(f(x, y) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$) \rightarrow$ полкоорд$(A, K) = \mathrm{set}_{pq}(f(p \cos q, p \sin q) = 0$ & $0 \leq p$ & $-\pi < q$ & $q \leq \pi$ & $p -$ число & $q -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "полкоорд(A, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменная f функциональная. Явного выражения для полярных координат множества A в посылках не имеется. Утверждение под описателем "класс" в заменяющем выражении разрешается относительно p, q с помощью вспомогательной задачи на описание. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровни срабатывания равны 3 и 6. На той же теореме создан еще один прием, в котором утверждение под заменяющим описателем не разрешается относительно p, q. Его уровень срабатывания равен 7.

10. Ввод в рассмотрение вспомогательных прямоугольных координат множества точек кривой при поиске полярных координат.

    $\forall_{EKab}$(прямкоорд$(K) \rightarrow$ коорд$(E, K) = c)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "полкоорд(E, K)" в посылке задачи на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Либо имеется посылка вида "равно(коорд(E, X)класс$(\ldots)$)", либо имеется посылка, указывающая, что E - гипербола, эллипс, парабола либо окружность. Отсутствует посылка вида "равно(коорд$(E, K)\ldots$)". Прием вводит новую переменную c и регистрирует ее в качестве вспомогательной неизвестной. Уровень срабатывания равен 5.

11. Объединение множеств точек.

    $\forall_{AKn}$(полярнточки$(\bigcup_{i=1}^{n} A(i), K) = \bigcup_{i=1}^{n}$ полярнточки$(A(i), K))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Указатель "развертка" обеспечивает идентификацию и запись конечных объединений как обычных объединений. Уровень срабатывания равен 2.

12. Ввод координатного набора.

    $\forall_{DKabc}(D -$ точка & полкоорд$(D, K) = a \rightarrow b -$ число & $c -$ число &
    $a = (b, c)$ & $0 \leq b$ & $0 < \pi + c$ & $0 \leq \pi - c)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражение a не имеет заголовка "набор". Задача не имеет посылок вида "равно(a набор$(\ldots)$)" и "равно(полкоорд(D, X) набор$(\ldots)$)". Прием вводит новые переменные b, c. Уровень срабатывания приема равен 3.

13. Нормализатор общей стандартизации "норморугол".

    (a) Использование равенства из посылок.
    $\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$

    Антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a имеет заголовок "оругол" и не является подвыражением выражения b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Использование полярных координат.
    $\forall_{ABKPQRabcd}$(полкоорд$(A, K) = (a, b)$ & полкоорд$(B, K) = (c, d)$ &
    $K = (P, Q, R) \rightarrow$ оругол$(A, P, B) = d - b)$

    Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормполкоорд". Уровень срабатывания равен 2.

14. Нормализатор общей стандартизации "нормполкоорд".

    (a) Использование равенства из посылок.
    $\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение a имеет заголовок "полкоорд" и не является подвыражением выражения b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Нормировка угла.

$\forall_{apq}(0 < p - q \;\&\; 0 < 2q \to (a, p\pi/q) = (a, (p - 2q)\pi/q))$

Переменные p, q идентифицируются с натуральными константами. Антецеденты выделены указателем "программа", т.е. обрабатываются путем непосредственных вычислений. Уровень срабатываня равен 1.

1.3.2 Координаты в пространстве

Ориентация равенства

$\forall ABabc((a, b, c) = \text{коорд}(A, B) \leftrightarrow \text{коорд}(A, B) = (a, b, c))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Преобразованное утверждение снабжается комментарием "ориентацияравенства". Таким образом, обеспечивается подстановка во всех остальных термах задачи координатного набора (a, b, c) вместо "коорд(A, B)". Уровень срабатывания равен 0.

Отождествление точек, имеющих одинаковые координаты

$\forall_{ABKabc}(A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \;\&\; \text{коорд}(B, K) = (a, b, c) \to A = B)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

Оси координат

1. Ввод в рассмотрение координатных прямых и углов между ними.

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to \text{актив}(\text{прямая}(AC)))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to \text{актив}(\text{прямая}(AD)))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to \text{актив}(\text{угол}(BAC)))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to \text{актив}(\text{угол}(BAD)))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to \text{актив}(\text{угол}(CAD)))$

   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приемов при усмотрении в задаче на доказательство либо на исследование выражения "коорд(a, K)". Уровень срабатывания равен 1.

2. Начало координат.

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to \text{коорд}(A, K) = (0, 0, 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Прием не применяется к посылкам и условиям вида "равно(коорд(A, K) набор$(0, 0, 0)$)". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & $E \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABD) & $E \in$ плоскость$(ACD) \to E = A)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2.

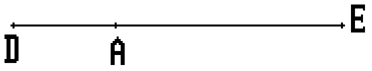
3. Точка на оси координат.

$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to$ коорд$(D, K) = (0, 0, 1))$

$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to$ коорд$(C, K) = (0, 1, 0))$

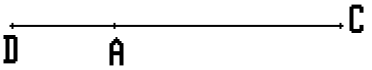
$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to$ коорд$(B, K) = (1, 0, 0))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Прием не применяется к посылкам и условиям вида "равно(коорд(X, K) набор$(0, 0, 0)$)". Уровень срабатывания равен 1.

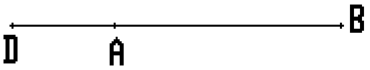


$\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AE) & коорд$(D, K) = (a, b, c) \to a = 0$ & $b = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще два аналогичных приема:



$\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AC) & коорд$(D, K) = (a, b, c) \to a = 0$ & $c = 0)$



$\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AB) & коорд$(D, K) = (a, b, c) \to b = 0$ & $c = 0)$

Следующие три приема вводят в рассмотрение расстояние от начала координат до точки на оси:

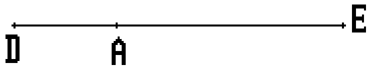
$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая$(AE) \to$ актив$(l(AD)))$

$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая$(AC) \to$ актив$(l(AD)))$

$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая$(AB) \to$ актив$(l(AD)))$

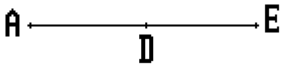
Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "коорд(D, K)" в задаче на доказательство, либо на исследование, либо в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм".

Не усматривается взаимное расположение точек A, D и направляющей точки соответствующей оси. Уровень срабатывания равен 3.

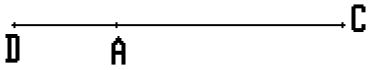


$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AE) & $A \in$ отрезок$(ED) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (0, 0, -l(AD)/l(AE)))$

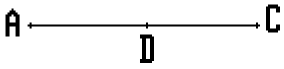
Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "усм". Прием не применяется к посылкам вида "равно(коорд(D, K) набор$(\ldots)$)". Уровни срабатывания равны 1, 4 и 5. Созданы еще пять аналогичных приемов:



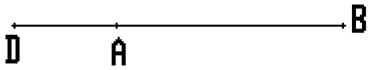
$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AE) & точкалуча$(A, E, D) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (0, 0, l(AD)/l(AE)))$



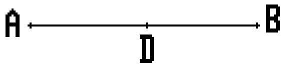
$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок$(CD) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (0, -l(AD)/l(AC), 0))$



$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AC) & точкалуча$(A, C, D) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (0, l(AD)/l(AC), 0))$



$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AB) & $A \in$ отрезок$(BD) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (-l(AD)/l(AB), 0, 0))$



$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча$(A, B, D) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (l(AD)/l(AB), 0, 0))$

Координатные плоскости

1. Ввод в рассмотрение координатных плоскостей.

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to$ актив(плоскость$(ABC)))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to$ актив(плоскость$(ABD)))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to$ актив(плоскость$(ACD)))$

   Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в задаче на доказательство либо на исследование выражения "коорд(a, K)". Уровень срабатывания равен 1.

2. Координаты точки, принадлежащей координатной плоскости.

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд$(E, K) = (a, b, c)\ \&\ E \in$ плоскость$(ABC) \to c = 0)$

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд$(E, K) = (a, b, c)\ \&\ E \in$ плоскость$(ABD) \to b = 0)$

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд$(E, K) = (a, b, c)\ \&\ E \in$ плоскость$(ACD) \to a = 0)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Выводимое соотношение неконстантное. Уровни срабатывания равны 2 и 5.

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд(вектор$(AE), K) = (a, b, c)\ \&$
   $E \in$ плоскость$(ACD) \to a = 0)$

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд(вектор$(AE), K) = (a, b, c)\ \&$
   $E \in$ плоскость$(ABD) \to b = 0)$

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд(вектор$(AE), K) = (a, b, c)\ \&$
   $E \in$ плоскость$(ABC) \to c = 0)$

   Аналогично предыдущему.

3. Неравенства для координат точки, принадлежащей заданному квадранту координатной плоскости.

   $\forall_{ABCDKPab}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд$(P, K) = (a, b, 0)\ \&\ P \in$ Угол$(BAC) \to$
   $0 \le a\ \&\ 0 \le b)$

   $\forall_{ABCDKPab}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд$(P, K) = (a, 0, b)\ \&\ P \in$ Угол$(BAD) \to$
   $0 \le a\ \&\ 0 \le b)$

   $\forall_{ABCDKPab}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд$(P, K) = (0, a, b)\ \&\ P \in$ Угол$(CAD) \to$
   $0 \le a\ \&\ 0 \le b)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 5.

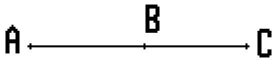
Точки, лежащие на прямой

1. Условие принадлежности точки прямой.

$\forall_{ABCKabcdefxyz}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (d, e, f)\ \&$
$C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (x, y, z) \to (d - a)(y - b) = (e - b)(x - a)\ \&$
$(f - c)(y - b) = (e - b)(z - c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Хотя бы одно из выражений x, y, z содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

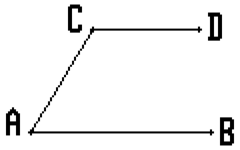
2. Определение координат точки, делящей отрезок в заданном отношении.



$\forall_{ABCKabcdefpq}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c)\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (d, e, f)\ \&$
$B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ pl(AB) = ql(BC)\ \&\ \neg(p + q = 0) \to \text{коорд}(B, K) =$
$((ap + dq)/(p + q), (bp + eq)/(p + q), (cp + fq)/(p + q)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, пятый - проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, e, f, p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

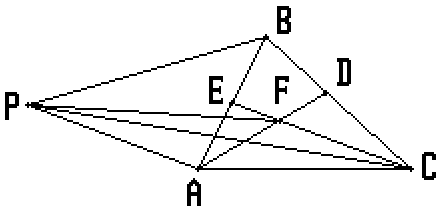
3. Координаты точек на параллельных прямых.



$\forall_{ABCDKabcdefpquv}(\text{прямая}(CD) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(AC))$
$\&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b, c)\ \&\ l(CD) = p\ \&\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = q\ \&$
$\text{коорд}(C, K) = (d, e, f)\ \&\ \neg(q = 0) \to \text{коорд}(D, K) = (d + ap/q, e + bp/q, f + cp/q))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(D, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f, p не содержат неизвестных. Обозначения прямых AB и CD различны. Уровень срабатывания равен 4.

4. Определение координат точки внутри треугольника с помощью двух соотношений пропорциональности.



$\forall_{ABCDEFKPabcdefklmnpqrsuvw}$(коорд(вектор($PA$), K) $= (a,b,c)$ & коорд(вектор(PB), K) $= (d,e,f)$ & коорд(вектор(PC), K) $= (p,q,r)$ & $E \in$ отрезок(AB) & $D \in$ отрезок(BC) & $F \in$ отрезок(CE) & $ml(BE) = nl(AE)$ & $kl(BD) = ll(CD)$ & $u = lm$ & $v = km$ & $w = kn$ & $u+v+w = s$ & $0 < s \to$ коорд(вектор(PF), K) $= ((aw+dv+pu)/s, (bw+ev+qu)/s, (cw+lv+ru)/s)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "вектор(XF)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты с четвертого по седьмой выделены указателем "усм". Первый и второй антецеденты, а также антецеденты с десятого по тринадцатый выделены указателем "идентификатор". Восьмой и девятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения $a, b, c, d, e, f, p, q, r, s, u, v, w$ не имеют невырожденных числовых атомов. Расстояния BE, AE, BD, CD уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 7. Создана еще одна версия приема, в которой указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "вектор(FX)". В остальном она идентична первой версии.

Точки, лежащие на плоскости

1. Условие принадлежности точки плоскому углу.

$\forall_{ABCDKabcdefmnpqr}$($A \in$ Угол(BCD) & коорд(вектор(CA), K) $= (a,b,c)$ & коорд(вектор(CB), K) $= (d,e,f)$ & коорд(вектор(CD), K) $= (p,q,r) \to$ m – число & n – число & $0 \leq m$ & $0 \leq n$ & $a = md + np$ & $b = me + nq$ & $c = mf + nr$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Переменные a, b, c идентифицируются с переменными. Прием вводит новые переменные m, n. Выводимые соотношения сопровождаются комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 5.

2. Условие компланарности векторов, заданных своими координатами.

$\forall_{ABCKabcdefpq}$(компланарны(A, B, C) & коорд(A, K) $= (a,b,c)$ & коорд(B, K) $= (d,e,f)$ & $(\neg(ae - bd = 0) \lor \neg(bf - ce = 0)) \to p$ – число & q – число & коорд(C, K) $= (ap + dq, bp + eq, cp + fq)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Последний антецедент обрабатывается проверочными операторами. Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Координатный набор для "коорд(C, K)" нормализатором "норкоорд" пока не находится, и отсутствует посылка, определяюшая координаты вектора C относительно какой-либо иной системы координат. Прием вводит новые переменные p, q. Уровень срабатывания равен 4.

Координаты множества точек

1. Принадлежность точки множеству, заданному через координаты.

$\forall_{ABKPabc}(\text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=\text{set}_{xyz}(P(x,y,z))\ \&\ P(a,b,c)\rightarrow A\in B)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Переменная P функциональная. Имеется посылка, в которой рассматривается пересечение множества B с некоторой плоскостью, содержащей точку A. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKPabc}(\text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&\ A\in B\ \&\ \text{коорд}(B,K)=\text{set}_{xyz}(P(x,y,z))\rightarrow P(a,b,c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Выводимое утверждение упрощается с помощью вспомогательной задачина преобразование. Чтобы заблокировать избыточные срабатывания, оба приема используют комментарий (нормкоорд A), которым сопровождается уравнение множества B. Уровень срабатывания равен 3.

2. Существование множества с заданными координатами.

   $\forall_{AK}(\text{прямкоорд}(K)\rightarrow\exists_E(\text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(A(x,y,z)\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}))\leftrightarrow\text{истина})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Указатель "кванторнаясвертка" допускает идентификацию с квантором общности, рассматриваемым как отрицание квантора существования. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{AK}(\text{прямкоорд}(K)\rightarrow\exists_E(\text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(A(x,y,z)\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})))$

   Прием имеет заголовок "связка" и устраняет несущественную неизвестную E задачи на описание. Уровень срабатывания равен 3.

3. Объемы вырожденных тел.

   $\forall_{BCKa}(\text{объем}(\text{точки}(\{a\}\times B\times C,K))=0)$

   $\forall_{BCKa}(\text{объем}(\text{точки}(B\times\{a\}\times C,K))=0)$

   $\forall_{BCKa}(\text{объем}(\text{точки}(B\times C\times\{a\},K))=0)$

   $\forall_{Kabc}(\text{объем}(\text{точки}(\{a,b,c\},K))=0)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Длина кривой, распадающейся на фрагменты.

   $\forall_{ABKn}(\text{set}_{xyz}((x,y,z)\in A)=\bigcup_{i=1}^{n}B(i)\ \&\ \text{конечнпересечения}(B)\rightarrow\text{длина}(\text{точки}(A,K))=\sum_{i=1}^{n}\text{длина}(\text{точки}(B(i),K)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Утверждение под описателем "класс" разрешается с помощью вспомогательной задачи на описание относительно неизвестных y,z, после чего сам описатель обрабатывается нормализатором "нормкласс". Указатель "развертка" определяет идентификацию объединения семейства с обычным объединением, а также выписывание конечной суммы в виде обычной. Значение n не менее двух. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, усматривающим, что любые два элемента семейства множеств B пересекаются по конечному числу точек. Выражение A должно иметь заголовок "класс", причем длина его связывающей приставки равна 3. Уровень срабатывания равен 4.

5. Объем тела, распадающегося на фрагменты.

   $\forall_{AKQn}(\mathrm{set}_{xyz}((x,y,z) \in A) = \bigcup_{i=1}^{n} Q(i)$ & разделены$(Q) \rightarrow$
   объем(точки$(A,K)) = \sum_{i=1}^{n}$ объем(точки$(Q(i),K)))$

   Аналогично предыдущему, но используется проверочный оператор, усматривающий, что любые два элемента семейства множеств Q пересекаются по множеству меры ноль. Уровень срабатывания равен 3.

Координаты векторов

1. Ввод вспомогательного параметра - длины координатного вектора.

   $\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow a = l(AB))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow a = l(AC))$

   $\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow a = l(AD))$

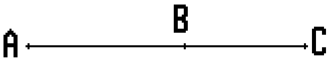
   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку их применения при усмотрении подвыражения "коорд(X,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка "прямкоорд(K)". Выражение для обозначаемого вспомогательным параметром a расстояния содержит неизвестные и не имеет типа "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 6.

2. Ввод вспомогательной неизвестной - радиус-вектора точки с неизвестными координатами.

   $\forall_{ABCDEKa}(K = (A,B,C,E)$ & $D -$ точка $\rightarrow$ вектор$(AD) = a$ & Вектор$(a))$

   Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "коорд(D,K)" в уравнении задачи на исследование, содержащем неизвестную внешней задачи на описание. Антецеденты идентифицируются с посылками. Не усматривается перпендикулярность хотя бы одной пары координатных осей. Отсутствуют посылка вида "равно(коорд$(D,X)p)$", где p не содержит неизвестных, а также посылка вида "равно(вектор$(AD)x)$", где x - переменная. Прием вводит новую переменную a и регистрирует ее в качестве вспомогательной неизвестной. Уровень срабатывания равен 4.

3. Векторное деление отрезка в заданном отношении.



   $\forall_{ABCKabcdefp}(C \in$ прямая(AB) & вектор$(AB) = p \cdot$ вектор(BC) &
   коорд(вектор$(AB),K) = (d,e,f)$ & коорд$(B,K) = (a,b,c)$ & $(\neg(d=0) \vee$
   $\neg(e=0) \vee \neg(f=0)) \rightarrow \neg(p=0)$ & коорд$(C,K) = (a+d/p, b+e/p, c+f/p))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, e, f, p не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

4. Координаты конца вектора.

$\forall_{ABK}$(коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ & коорд$(A, K) = (d, e, f) \rightarrow$ коорд$(B, K) = (a + d, b + e, c + f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(B, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не находит координатный набор для "коорд(B, K)". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии приема, отличающихся лишь тем, что указатель "контрольвывода" относится к подвыражениям "цилкоорд(B, K)" и "сферкоорд(B, K)".

5. Определение координат суммы либо разности векторов.

$\forall_{ABCDKabcdef}$(коорд(вектор$(AB), K) = (d, e, f) \rightarrow$ коорд(вектор(AB) + вектор$(CD), K) = (a, b, c) \leftrightarrow$ коорд(вектор$(CD), K) = (a - d, b - e, c - f))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDabcdefpqr}$(коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & коорд$(C, K) = (p, q, r)$ & $D =$ вектор$(AB) + C \rightarrow$ коорд$(D, K) = (d - a + p, e - b + q, f - c + r))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не находит координатный набор для "коорд(D, K)". Выражения $a, b, c, d, e, f, p, q, r$ не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKabcdef}$(прямкоорд(K) & $C = A + B$ & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(C, K) = (d, e, f) \rightarrow$ коорд$(B, K) = (d - a, e - b, f - c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Во втором антецеденте имеется в виду символ "плюсвект". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не находит координатный набор для "коорд(B, K)". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKabcdef}$(прямкоорд(K) & $C = A + B$ & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f) \rightarrow$ коорд$(C, K) = (a + d, b + e, c + f))$

Аналогично предыдущему, но на выражения a, b, c, d, e, f никакие условия не накладываются. Уровень срабатывания равен 9.

6. Координаты минус-вектора.

   $\forall_{Kabcd}$(коорд$(-a, K) = (b, c, d) \leftrightarrow$ коорд$(a, K) = (-b, -c, -d)$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

7. Определение координат вектора через координаты концов.

   $\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f) \rightarrow$
   коорд(вектор$(AB), K) = (d - a, e - b, f - c)$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется в посылках задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 5.

8. Координаты вектора, лежащего в плоскости, параллельной координатной.

   $\forall_{ABCDEKPQRSxyz}(D \in$ плоскость(ABC) & $E \in$ плоскость(ABC) &
   $K = (P, Q, R, S)$ & плоскость$(ABC) \parallel$ плоскость(PQR) &
   коорд(вектор$(DE), K) = (x, y, z) \rightarrow z = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Выводимое равенство неконстантное. Уровень срабатывания равен 2.

9. Вектор лежит в координатной плоскости, причем известен угол между ним и координатной осью.

   $\forall_{ABCDKabcp}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & коорд$(p, K) = (a, 0, b)$ &
   уголмежду(вектор$(DA), p) = c$ & $q = \sqrt{a^2 = b^2} \rightarrow |a| = q \sin c$ & $b = -q \cos c$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". В задаче уже встречается выражение "уголмежду(вектор(DA),p)". Выводимое утверждение содержит неизвестные. Оно сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 2.

Переход к новой системе координат

1. Выражение координат точки в новой системе координат через ее координаты в старой, если известны координаты в новой системе начала координат и базисных векторов старой системы.

   $\forall_{ABCDEQKabcdefghkpqrxyz}(K = (A, B, C, D)$ & коорд$(A, Q) = (a, b, c)$ &
   коорд(вектор$(AB), Q) = (d, e, f)$ & коорд(вектор$(AC), Q) = (g, h, k)$ &
   коорд(вектор$(AD), Q) = (p, q, r)$ & коорд$(E, K) = (x, y, z)$ & E – точка $\rightarrow$
   коорд$(E, Q) = (a + xd + eg + zp, b + xe + yh + zq, c + xf + yk + zr)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(E, Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент и два последних - идентифицируются с посылками. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменные K, Q различны. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема. В ней не используется указатель "контрольвывода", но требуется, чтобы текущая задача на исследование имела цель "эллипсоид". Такая цель сопровождает цель "исследовать"и означает, что исследуются свойства поверхности, заданной своим уравнением. Чтобы как-то идентифицировать новую систему координат Q, добавляется антецедент "прямкоорд(Q)". В остальном приемы идентичны.

2. Выражение координат точки в новой системе координат через ее координаты в старой, если известны координаты в старой системе начала координат и базисных векторов новой системы.

   $\forall_{ABCDKMTabcdefghkpqrm}(T = (A, B, C, D)$ & коорд$(A, K) = (p, q, r)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (d, e, f)$ & коорд(вектор$(AD), K) = (g, h, k)$ & коорд$(M, K) = (x, y, z)$ & $m = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ & $\neg(m = 0)$ & M – точка $\rightarrow$ коорд$(M, T) =$ $(((ek - fh)x + (fg - dk)y + (dh - eg)z + dkq + egr + fhp - dhr - ekp - fgq)/m,$ $((ch - bk)x + (ak - cg)y + (bg - ah)z + ahr + bkp + cgq - akq - bgr - chp)/m,$ $((bf - ce)x + (cd - af)y + (ae - bd)z + afq + bdr + cep - aer - bfp - cdq)/m))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый, шестой и девятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты со второй по пятый, а также седьмой выделены указателем "идентификатор". Восьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Задача имеет посылки "$M \in X$" и "равно(коорд(X, T)класс$(\ldots)$)". Переменные K, T различны. Уровень срабатывания равен 4. На этой же теореме создана еще одна версия приема. Она имеет указатель "контрольвывода", инициирующий попытку срабатывания при усмотрении подвыражения "коорд(M, T)" в посылке задачи. Требование на существование посылок для множества X в этой версии отсутствует. Уровень срабатывания равен 5; в остальном версии идентичны.

3. Определение координат базисных точек старой системы координат, если известны формулы перехода к новой системе.

   $\forall_{ABCDQKabcdefghkpqr}(Q = (A, B, C, D)$ & $\forall_{Pxyz}(P$ – точка & коорд$(P, Q) =$ $(x, y, z) \rightarrow$ коорд$(P, K) = (ax + by + cz + d, ex + fy + gz + h, px + qy + rz + k)) \rightarrow$ коорд$(A, K) = (d, h, k)$ & коорд$(B, K) = (a + d, e + h, p + k)$ & коорд$(C, K) = (b + d, f + h, q + k)$ & коорд$(D, K) = (c + d, g + h, r + k))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов $a, b, c, e, f, g, p, q, r$. Указатели "единица" разрешают также единичные значения этих коэффициентов и нулевые значения свободных членов d, h, k. Уровень срабатывания приема равен 3.

4. Определение координат множества точек в трехмерном пространстве, если известны его координаты в двумерной системе координат и координаты базисных точек этой системы в трехмерной системе.

   $\forall_{ABCEQKabcdefghjpqr}(Q = (A, B, C)$ & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uv}(pu + qv + r = 0$ & u – число & v – число) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд(вектор$(AB), K) =$

(d,e,f) & коорд(вектор$(AC),K)=(g,h,j)$ & точканапрямой$((p,q,r),s)$ & $s=(m,n)\to$ коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x-a-md-ng, y-b-me-nh, z-c-mf-nj),(-qd+pg,-qe+ph,-qf+pj))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(E,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Шестой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "точканапрямой". По тройке (p,q,r) коэффициентов уравнения прямой в некотором базисе синтезатор определяет пару s координат некоторой точки данной прямой в том же базисе. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов p,q. Переменные Q,K различны. Уравнение множества точек E в системе координат K нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровень срабатывания равен 3. Создана версия приема, в которой вместо указателя "контрольвывода" введен идентифицируемый с посылкой антецедент "прямкоорд(K)". Эта версия применяется только в задачах на исследование, имеющих цель "линия", т.е. при нахождении свойств линии, заданной своим уравнением. В остальном версии идентичны.

$\forall_{ABCDEFKPQabcdefghkmnpq}(Q=(A,B,C)$ & коорд$(E,Q)=\mathrm{set}_{uv}(P(u,v)$ & u – число & v – число) & коорд$(A,K)=(a,b,c)$ & коорд(вектор$(AB),K)=(d,e,f)$ & коорд(вектор$(AC),K)=(g,h,k)$ & $(x=a+ud+vg$ & $y=b+ue+vh$ & $z=c+uf+vk$ & u – число & v – число$)=(u=D(x,y,z)$ & $v=F(x,y,z)$ & $G(x,y,z))\to$ коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{xyz}(P(D(x,y,z),F(x,y,z))$ & $G(x,y,z)$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(E,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "идентификатор". Переменные D,F,G,P функциональные. Левая часть последнего антецедента выписывается с использованием новых переменных x,y,z. Затем она разрешается с помощью вспомогательной задачи на описание относительно переменных u,v. Уравнение множества точек E в системе координат K нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровень срабатывания равен 4. Создана версия приема, в которой вместо указателя "контрольвывода" введен идентифицируемый с посылкой антецедент "прямкоорд(K)". Эта версия применяется только в задачах на исследование, имеющих цель "линия". Уровень срабатывания равен 5. В остальном версии идентичны.

5. Выражение координат множества точек в новой системе координат через его координаты в старой, если известны координаты в новой системе начала координат и базисных векторов старой системы.

   $\forall_{ABCDFKMNPQRSabcdefmnkpqr}(K=(A,B,C,D)$ & коорд$(A,Q)=(a,b,c)$ & коорд(вектор$(AB),Q)=(d,e,f)$ & коорд(вектор$(AC),Q)=(m,n,k)$ & коорд(вектор$(AD),Q)=(p,q,r)$ & коорд$(R,K)=\mathrm{set}_{xyz}(F(x,y,z)$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & $P=\det\begin{pmatrix}d&m&p\\e&n&q\\f&k&r\end{pmatrix}$ & $M=\det\begin{pmatrix}x-a&m&p\\y-b&n&q\\z-c&k&r\end{pmatrix}$ &

$$N = \det\begin{pmatrix} d & x-a & p \\ e & y-b & q \\ f & z-c & r \end{pmatrix} \;\&\; S = \det\begin{pmatrix} d & m & x-a \\ e & n & y-b \\ f & k & z-c \end{pmatrix} \;\&\; \neg(P=0) \to$$
$$\text{коорд}(R,Q) = \text{set}_{xyz}(F(M/P, N/P, S/P) \;\&\; x - \text{число} \;\&\; y - \text{число} \;\&\; z - \text{число}))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(R, Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Определители вычисляются нормализатором "нормопределитель". Переменная F функциональная. Переменные Q, K различны. Уравнение множества точек R в системе координат Q нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

6. Выражение координат множества точек в новой системе координат через его координаты в старой, если известны координаты в старой системе начала координат и базисных векторов новой системы.

   $\forall_{ABCDKMPTabcdefghpqrs}(T = (A, B, C, D) \;\&\; \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \;\&\;$
   $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (d, e, f) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (p, q, r) \;\&\;$
   $\text{коорд}(\text{вектор}(AD), K) = (g, h, s) \;\&\; \text{коорд}(M, K) = \text{set}_{xyz}(P(x, y, z) \;\&\; x - \text{число}$
   $\&\; y - \text{число} \;\&\; z - \text{число}) \;\&\; \text{прямкоорд}(K) \to \text{коорд}(M, T) = \text{set}_{xyz}(P(a + dx +$
   $py + gz, b + ex + qy + hz, c + fx + ry + sz) \;\&\; x - \text{число} \;\&\; y - \text{число} \;\&\; z - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(M, T)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "идентификатор". Переменная P функциональная. Переменные T, K различны. Уравнение множества точек M в системе координат T нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровень срабатывания равен 3.

7. Выражение координат точки в трехмерной системе координат через ее координаты в двумерной, если известны координаты в трехмерной системе начала координат и базисных векторов двумерной системы.

   $\forall_{ABCQKabcdefxy}(K = (A, B, C) \;\&\; \text{коорд}(A, Q) = (a, b, g) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AB),$
   $Q) = (c, d, h) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AC), Q) = (e, f, i) \;\&\; \text{коорд}(D, K) = (x, y) \;\&\;$
   $D - \text{точка} \;\&\; \text{прямкоорд}(Q) \to \text{коорд}(D, Q) = (a + xc + ye, b + xd + yf, g + xh + yi))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент, а также три последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты со второго по четвертый выделены указателем "идентификатор". Переменные Q, K различны. Уровень срабатывания равен 5.

8. Определение координат прямой в двумерной системе координат через ее координаты в трехмерной системе.

   $\forall_{ABCKMNQabcdefghijkmnpqrst}(Q = (A, B, C) \;\&\; \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \;\&\;$
   $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (d, e, f) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (g, h, i) \;\&\;$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(MN), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + p, y + q, z + r), (k, m, n)) \;\&\;$
   $x - \text{число} \;\&\; y - \text{число} \;\&\; z - \text{число}) \;\&\; (k = Xd + Yg \;\&\; m = Xe + Yh \;\&\;$
   $n = Xf + Yi \;\&\; X - \text{число} \;\&\; Y - \text{число}) = (X = s \;\&\; Y = t) \;\&\; (-p = Xd + Yg +$

$$\begin{gathered}a \ \& \ -q = Xe + Yh + b \ \& \ -r = Xf + Yi + c \ \& \ X - \text{число} \ \& \ Y - \text{число}) = \\ (X = D \ \& \ Y = E) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \to \text{коорд}(\text{прямая}(MN), Q) = \mathrm{set}_{uv}(-tu + \\ sv + tD - sE = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}))\end{gathered}$$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "касательная(прямая(MN)U)" посылки задачи на доказательство либо на исследование. Первый и последний антецеденты идентифифируются с посылками, остальные - выделены указателем "идентификатор". Левые части шестого и седьмого антецедентов содержат новые переменные X, Y. Они разрешаются относительно X, Y с помощью вспомогательных задач на описание. Задача имеет посылку, задающую уравнение множества точек U в системе координат Q, а также посылку, определяющую координаты некоторого множества точек в трехмерной системе координат K. Уравнение прямой MN в системе координат Q нормализатором "нормкоорд" пока не определяется. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия данного приема. Ее указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "Уголмежду($U, V,$ прямая(MN))". Ввиду отсутствия множества U, требуется лишь, чтобы имелась посылка, задающая координаты какого-либо множества точек относительно системы Q. Уровень срабатывания равен 5; в остальном приемы идентичны.

9. Определение координат вектора в двумерной системе координат по его координатам в трехмерной системе.

$$\begin{gathered}\forall_{ABCDEKQabcdefghijmnxy}(Q = (C, D, E) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b, c) \ \& \\ \text{коорд}(\text{вектор}(CD), K) = (d, e, f) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(CE), K) = (g, h, j) \ \& \\ (x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ xd + yg = a \ \& \ xe + yh = b \ \& \ xf + yj = c) = \\ (x = m \ \& \ y = n) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \to \text{коорд}(\text{вектор}(AB), Q) = (m, n))\end{gathered}$$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(вектор(AB)Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и последний антецедент идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "идентификатор". Левая часть пятого антецедента содержит новые переменные x, y. Она разрешается относительно этих переменных с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 3.

10. Связь между пространственными координатами точки и ее координатами на плоскости, если известны координаты опорных точек плоской системы координат в пространственной системе.

$$\begin{gathered}\forall_{ABCDKQabdefghkmnp}(Q = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \\ \text{коорд}(D, Q) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (d, e, f) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (g, h, k) \ \& \\ \text{коорд}(C, K) = (m, n, p) \to \text{коорд}(D, K) = (d + a(g - d) + b(m - d), \\ e + a(h - e) + b(n - e), f + a(k - f) + b(p - f)))\end{gathered}$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент выделен указателем "усм", остальные - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

$$\begin{gathered}\forall_{ABCDEKQabcdefghkmn}(Q = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \\ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (d, e, f) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (g, h, k) \ \& \\ \text{коорд}(D, K) = (p, q, r) \ \& \ (x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ p = a + x(d - a) + y(g - a) \ \&\end{gathered}$$

$q = b + x(e - b) + y(h - b)$ & $r = c + x(f - c) + y(k - c)) = (x = m$ & $y = n$ & $E) \rightarrow$ коорд$(D, Q) = (m, n))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(A, Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть последнего антецедента содержит новые переменные x, y. Она разрешается относительно этих переменных с помощью вспомогательной задачи на описание. Уровень срабатывания равен 4.

11. Определение координат вектора в старой системе координат по его координатам в новой и по координатам базисных векторов новой системы относительно старой системы.

    $\forall_{ABCDFGKQabcdefghkpqrxyz}(K = (A, B, C, D)$ & коорд(вектор$(AB), Q) = (d, e, f)$ & коорд(вектор$(AC), Q) = (g, h, k)$ & коорд(вектор$(AD), Q) = (p, q, r)$ & коорд(вектор$(FG), K) = (x, y, z)$ & прямкоорд$(Q) \rightarrow$ коорд(вектор$(FG), Q) = (xd + yg + zp, xe + yh + zq, xf + yk + zr))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый, пятый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", т.е. ориентированной на описание свойств поверхности, заданной своим уравнением. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменные Q, K различны. Уровень срабатывания равен 3.

Ввод в рассмотрение координатного набора

$\forall_{DKabcd}($коорд$(D, K) = a \rightarrow b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $a = (b, c, d))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Выражение a не имеет заголовка "набор", причем отсутствует как посылка вида "равно(a набор$(\ldots)$)", так и посылка вида "равно(коорд(D, X)набор$(\ldots)$)". Имеется посылка вида "равно(коорд(P, K)набор(m, n, k))", причем в задаче рассамтривается прямая, проходящая через точки D, P, и выделены расстояния от точек D, P до некоторой точки Q. Прием вводит новые переменные b, c, d. Уровень срабатывания равен 3. Созданы еще две версии приема. В первой из них условие про точку P заменено дизъюнкцией следующих двух условий:

1. Имеется посылка вида "равно(коорд(P, K)набор(m, n, k))", причем в задаче уже рассматривается расстояние DP.
2. Имеется посылка вида "равно(K набор(E, F, G, H))", причем усматривается принадлежность точки D одной из координатных плоскостей.

Во второй версии берется дизъюнкция двух других условий:

1. Существуют посылки вида "равно(коорд(P, K)набор(m, n, k))" и "равно(коорд($Q, K)$набор(u, v, w))", такие, что точка D лежит на прямой PQ.
2. Имеется посылка, в которой вхождение символа D расположено внутри скалярного либо векторного произведения, а также посылка вида "равно(коорд(X, K) набор(m, n, k))".

Уровни срабатывания обеих версий равны 4.

$\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A,K) = (a,b,c)$ & актив(вектор(BA)) $\to d$ – число & e – число & f – число & коорд$(B,K) = (d,e,f)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не находит координатный набор ни для "коорд(B,K)", ни для "коорд(вектор(BA),K)". Отсутствует посылка вида "равно(коорд(B,X)набор$(\ldots)$)". Прием вводит новые переменные d,e,f. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A,K) = (a,b,c)$ & актив(вектор(AB)) $\to d$ – число & e – число & f – число & коорд$(B,K) = (d,e,f)$)

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCDKMQabcde}(K = (A,B,C,D)$ & коорд$(M,Q) = a \to c$ – число & d – число & e – число & коорд$(D,Q) = (c,d,e)$)

$\forall_{ABCDKMQabcde}(K = (A,B,C,D)$ & коорд$(M,Q) = a \to c$ – число & d – число & e – число & коорд$(C,Q) = (c,d,e)$)

$\forall_{ABCDKMQabcde}(K = (A,B,C,D)$ & коорд$(M,Q) = a \to c$ – число & d – число & e – число & коорд$(B,Q) = (c,d,e)$)

$\forall_{ABCDKMQabcde}(K = (A,B,C,D)$ & коорд$(M,Q) = a \to c$ – число & d – число & e – число & коорд$(A,Q) = (c,d,e)$)

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "коорд(M,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками, причем выражение a не содержит неизвестных. Выражение "коорд(M,K)", преобразованное нормализатором "нормкоорд", содержит неизвестные. Преобразованное этим нормализатором выражение "коорд$(\ldots,Q)$" из консеквента теоремы приема не имеет заголовка "набор". Прием вводит новые переменные c,d,e. Уровень срабатывания равен 5.

Прямоугольная система координат

1. Перпендикулярность осей координат.

   $\forall_{ABCDK}$(прямкоорд(K) & $K = (A,B,C,D)$ & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AC)) $\to$ прямая$(AB) \perp$ прямая(AC))

   $\forall_{ABCDK}$(прямкоорд(K) & $K = (A,B,C,D)$ & актив(прямая(AB)) & актив(прямая(AD)) $\to$ прямая$(AB) \perp$ прямая(AD))

   $\forall_{ABCDK}$(прямкоорд(K) & $K = (A,B,C,D)$ & актив(прямая(AC)) & актив(прямая(AD)) $\to$ прямая$(AC) \perp$ прямая(AD))

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "усм". Должна существовать посылка, содержащая хотя бы одну из переменных A,B,C,D и не имеющая заголовка "точка" либо "актив". Уровень срабатывания равен 2.

2. Длины координатных векторов.

   $\forall_{ABCDK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K=(A,B,C,D)\to l(AD)=1)$

   $\forall_{ABCDK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K=(A,B,C,D)\to l(AC)=1)$

   $\forall_{ABCDK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K=(A,B,C,D)\to l(AB)=1)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Расстояние, упоминаемое в выводимом утверждении, уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 2.

3. Ввод в рассмотрение точек, задающих систему координат.

   $\forall_{ABCDK}(\text{прямкоорд}(K)\to (A,B,C,D)=K\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
   $C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Существует посылка, содержащая подтерм одного из следущих типов: "вертплоск(K)", "крд(x,K,i)", "равно(коорд(x,K)набор(u,v,w))". Кроме того, в некоторую посылку входит символ "Оругол". Отсутствует посылка вида "равно(K набор($\ldots$))". Прием вводит новые переменные A,B,C,D. Выводимое утверждение сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 1.

4. Усмотрение прямоугольной системы.

   $\forall_{ABCDK}(K=(A,B,C,D)\ \&\ \text{прямая}(AB)\perp\text{прямая}(AC)\ \&$
   $\text{прямая}(AB)\perp\text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(AC)\perp\text{прямая}(AD)\ \&\ l(AB)=1\ \&$
   $l(AC)=1\ \&\ l(AD)=1\to\text{прямкоорд}(K))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие три - выделены указателем "усм". Последние три антецедента выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

5. Существование прямоугольной системы координат.

   $\forall_A(\exists_K(\text{прямкоорд}(K)))$

   $\forall_A(\exists_K(\text{поверхнземли}(K)))$

   Заметим, что предикат "поверхнземли(K)" указывает на некоторую прямоугольную систему координат K, расположенную у поверхности Земли и ориентированную естественным образом. Этот предикат используется в задачах по элементарной физике.

   Приемы имеют заголовок "связка" и позволяют исключить несущественную неизвестную K задачи на описание, не встречающуюся в других условиях. Уровень срабатывания равен 3.

6. Существование точки, условие на которую выражено через координаты.

   $\forall_{Kabc}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\to\exists_B(B-\text{точка}\ \&$
   $B\in\text{осьабсцисс}(K)\ \&\ a\cdot\text{крд}(B,K,1)+b=c)\leftrightarrow c-\text{число})$

   Прием имеет заголовок "связка". Конъюнктивные члены утверждения под квантором существования идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими несущественную неизвестную B. Задача имеет цель "исключ", т.е. решается для исключения несущественных неизвестных. Первый антецедент идентифицируется с посылкой либо условием задачи, два других - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, K не содержат переменной B. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_K(\text{прямкоорд}(K) \rightarrow \exists_B(B - \text{точка} \ \& \ B \in \text{осьабсцисс}(K)))$

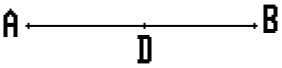
Прием имеет заголовок "связка". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Отсутствует цель "независит". Переменная B не входит в выражение K. Уровень срабатывания равен 3.

7. Ориентация равенства, определяющего систему координат.

   $\forall_{ABCDK}(\text{прямкоорд}(K) \rightarrow K = (A, B, C, D) \leftrightarrow (A, B, C, D) = K)$

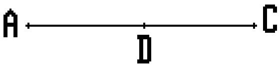
   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство. Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентация-равенства". Уровень срабатывания равен 0.

8. Точка на оси координат.

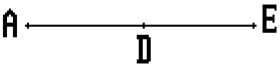


$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (l(AD), 0, 0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй и третий - выделены указателем "усм". Выражение для расстояния AD не содержит невырожденных числовых атомов. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(D, K)". Уровень срабатывания равен 2.

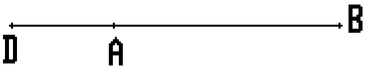


$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{точкалуча}(A, C, D) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (0, l(AD), 0))$

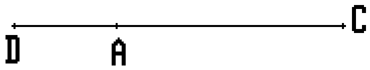


$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E) \ \& \ D \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \text{точкалуча}(A, E, D) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (0, 0, l(AD)))$

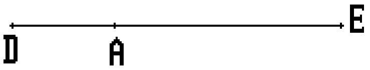
Приемы аналогичны предыдущему случаю.



$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BD) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (-l(AB), 0, 0))$



$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(CD) & прямкоорд$(K) \to$ коорд$(D, K) = (0, -l(AB), 0))$



$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AE) & $A \in$ отрезок(ED) & прямкоорд$(K) \to$ коорд$(D, K) = (0, 0, -l(AB)))$

Приемы аналогичны приведенным выше, но уровни срабатывания их равны 4.

9. Проекции в прямоугольной системе координат.

   (a) Координаты проекции точки на ось прямоугольной системы координат.

   $\forall_{ABCDEFKabc}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AB) & $F \in$ прямая$(AB) \to$ коорд$(F, K) = (a, 0, 0))$

   $\forall_{ABCDEFKabc}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AC) & $F \in$ прямая$(AC) \to$ коорд$(F, K) = (0, b, 0))$

   $\forall_{ABCDEFKabc}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) & $F \in$ прямая$(AD) \to$ коорд$(F, K) = (0, 0, c))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие два - выделены указателем "усм". Координатный набор в выводимом утверждении не имеет невырожденных числовых атомов. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(F, K)". Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Координаты проекции точки на координатную плоскость.

   $\forall_{ABCDEFKabc}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & $F \in$ плоскость(ABC) & прямая$(EF) \perp$ плоскость$(ABC) \to$ коорд$(F, K) = (a, b, 0))$

   $\forall_{ABCDEFKabc}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & $F \in$ плоскость(ABD) & прямая$(EF) \perp$ плоскость$(ABD) \to$ коорд$(F, K) = (a, 0, c))$

   $\forall_{ABCDEFKabc}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & $F \in$ плоскость(ACD) & прямая$(EF) \perp$ плоскость$(ACD) \to$ коорд$(F, K) = (0, b, c))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "усм". Координатный набор в выводимом утверждении не содержит невырожденных числовых атомов. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(F, K)". Уровень срабатывания равен 3.

(c) Координаты проекции вектора на плоскость, для которой известен вектор нормали.

$\forall_{ABCKabcdefpq}$(прямкоорд(K) & $q =$ проекция$(p,$ плоскость$(ABC))$ & $r \perp$ плоскость(ABC) & Вектор(p) & Вектор(r) & коорд$(p, K) = (a, b, c)$ & коорд$(r, K) = (d, e, f)$ & $m = d^2 + e^2 + f^2$ & $\neg(m = 0)$ & $n = -(ad + be + cf)/m \to$ коорд$(q, K) = (a + nd, b + ne, c + nf))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками. ЧетвертыйЮ пятый и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Правая часть восьмого антецедента обрабатывается нормализатором разложения на множители. Элементы координатного набора в выводимом утверждении упрощаются с помощью вспомогательных задач на преобразование. Выражения a, b, c, d, e, f не содержат невырожденных числовых атомов. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(q, K)". Уровень срабатывания равен 5.

(d) Проекция вектора на координатную плоскость.

$\forall_{ABCDKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & коорд(вектор(PQ), $K) = (a, b, c) \to$ коорд(проекция(вектор(PQ), плоскость$(ABC)), K) = (a, b, 0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "проекция(вектор(PQ) плоскость(ABC))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для рассматриваемой проекции. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & коорд(вектор(PQ), $K) = (a, b, c) \to$ коорд(проекция(вектор(PQ), плоскость$(ABD)), K) = (a, 0, c))$

$\forall_{ABCDKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & коорд(вектор(PQ), $K) = (a, b, c) \to$ коорд(проекция(вектор(PQ), плоскость$(ACD)), K) = (0, b, c))$

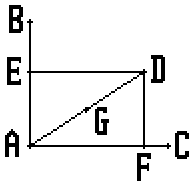
Аналогично первому приему.

(e) Проведение нормали к плоскости при прямоугольном проектировании на эту плоскость.

$\forall_{ABCDEKxyz}$(прямкоорд$(K) \to A -$ точка & $B -$ точка & $\neg(A = B)$ & прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & коорд(вектор$(AB), K) = (x, y, z)$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "проекция$(c,$ плоскость(CDE))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Усматривается векторный тип значения c. Перпендикуляр к плоскости CDE в задаче пока не проведен. Уровень срабатывания равен 6.

(f) Определение координат точки на координатной плоскости, если известны расстояние ее до начала координат и отношение длин проекций на оси координат точки рассматриваемого луча.



$\forall_{ABCDEFGHKabc}$(прямкоорд(K) & $K=(A,C,B,H)$ & $D\in$ плоскость(ABC) & $G\in$ прямая(AD) & $l(AG)=c$ & точкалуча(A,G,D) & $E\in$ прямая(AB) & прямая(DE) $\perp$ прямая(AB) & $F\in$ прямая(AC) & прямая(DF) $\perp$ прямая(AC) & точкалуча(A,C,F) & точкалуча(A,B,E) & $al(AE)=bl(AF)$ & $p=\sqrt{a^2+b^2}$ & $\neg(p=0)$ $\to$ коорд(G,K) $=(c|a|/p,c|b|/p,0)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий и четвертый антецеденты, а также антецеденты с номерами от 6 до 12 выделены указателем "усм". Тринадцатый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, пятнадцатый - проверочным оператором. Наконец, пятый и четырнадцатый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатель "сдвиг" допускает циклическую перестановку операндов C,B,H второго антецедента с соответствующей перестановкой операндов координатного набора. Выражения a,b,c не содержат неизвестных. Не усматривается принадлежность точки G прямым AB и AC. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для "коорд(G,K)". Уровень срабатывания равен 3.

10. Углы и направления.

    (a) Угол между вектором и положительным направлением координатной оси.

    $\forall_{ABCDEFKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K=(A,B,C,D)$ & $F\in$ прямая(PQ) & точкалуча(P,Q,F) & коорд(вектор(PF), K) $=(a,b,c)$ & $E\in$ прямая(AB) & точкалуча(A,B,E) $\to$ cos(уголмежду(вектор(PQ), вектор(AE))) $=a/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$)

    $\forall_{ABCDEFKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K=(A,B,C,D)$ & $F\in$ прямая(PQ) & точкалуча(P,Q,F) & коорд(вектор(PF), K) $=(a,b,c)$ & $E\in$ прямая(AC) & точкалуча($A,,E$) $\to$ cos(уголмежду(вектор(PQ), вектор(AE))) $=b/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$)

    $\forall_{ABCDEFKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K=(A,B,C,D)$ & $F\in$ прямая(PQ) & точкалуча(P,Q,F) & коорд(вектор(PF), K) $=(a,b,c)$ & $E\in$ прямая(AD) & точкалуча(A,D,E) $\to$ cos(уголмежду(вектор(PQ), вектор(AE))) $=c/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(вектор(PQ), вектор(AE))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, пятый - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Уровни срабатывания равны 2 и 3.

(b) Угол между вектором и координатной плоскостью.

$\forall_{ABCDEKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ прямая(PQ) & точкалуча(P, Q, E) & коорд(вектор$(PE), K) = (a, b, c) \to$ $\sin$(уголмежду(вектор(PQ), плоскость(ACD))) $= a/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

$\forall_{ABCDEKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ прямая(PQ) & точкалуча(P, Q, E) & коорд(вектор$(PE), K) = (a, b, c) \to$ $\sin$(уголмежду(вектор(PQ), плоскость(ABD))) $= b/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

$\forall_{ABCDEKPQabc}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ прямая(PQ) & точкалуча(P, Q, E) & коорд(вектор$(PE), K) = (a, b, c) \to$ $\sin$(уголмежду(вектор(PQ), плоскость(ABC))) $= c/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(вектор(PQ), плоскость(ABC))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

(c) Угол между двумя векторами.

$\forall_{ABKabcdefpq}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & $p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $q = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \to$ $\cos$(уголмежду(A, B)) $= (ad + be + cf)/(pq)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "уголмежду(A, B)" в посылке задачи на исследование, имеющей цель "контроль", т.е. решаемой на этапе контроля выполнимости подслучая. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии данного приема. Первая из них срабатывает на уровне 4. В ней допускаются задачи на доказательство либо на исследование. Вместо условия про цель "контроль" требуется, чтобы выражение для угла между векторами A, B имело тип "неизв". Другая версия срабатывает на уровне 8. В ней отброшены все дополнительные ограничения, в том числе на выражения a, b, c, d, e, f.

$\forall_{ABKbcdpqr}$(прямкоорд(K) & Вектор(A) & Вектор(B) & коорд$(A, K) = (b, c, d)$ & коорд$(B, K) = (p, q, r) \to (bp + cq + dr)^2 =$ $\cos$(уголмежду$(A, B))^2(b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(A, B)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Последние два антецедента выделены указателем "идентификатор". Выводимое соотношение содержит неизвестные. Прием применяется только в задачах, содержащих понятия из элементарной физики. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCKabcdefpq}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (d, e, f)$ & $p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $q = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \to$ $\cos(\angle(BAC)) = (ad + be + cf)/(pq)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\angle(BAC)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифифирцется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных, выражение для угла BAC имеет тип "неизв". Уровень срабатывания приема равен 5.

$\forall_{ABKabcdef}$(прямкоорд(K) & Вектор(A) & Вектор(B) & коорд$(A, K) =$
(a, b, c) & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & уголмежду$(A, B) < \pi/2 \rightarrow$
$0 < ad + be + cf)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5.

(d) Угол между прямой и плоскостью.

$\forall_{ABCDKQRabcdefpqrmxyz}$(прямкоорд$(K)$ & $B \in$ плоскость(AQR) &
$C \in$ плоскость(AQR) & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ &
коорд(вектор$(AC), K) = (d, e, f)$ & коорд(вектор$(AD), K) = (p, q, r)$ &
$x = bf - ce$ & $y = cd - af$ & $z = ae - bd$ & $m = x^2 + y^2 + z^2$ &
$\neg(m = 0) \rightarrow \sin($уголмежду(прямая$(AD)$, плоскость$(AQR))) =$
$|px + qy + rz|/(\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \cdot \sqrt{m}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(прямая(AD), плоскость(AQR))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Антецеденты с четвертого по десятый выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

(e) Условие перпендикулярности вектора плоскости.

$\forall_{ABCDEKabcdef}$(актив(плоскость(CDE) & прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE)
& коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ & коорд(вектор$(CD), K) = (d, e, f)$ &
прямкоорд$(K) \rightarrow ad + be + cf = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент выделен указателем "усм", третий и четвертый - указателем "идентификатор". Выражения d, e, f не содержат неизвестных, а хотя бы одно из выражений a, b, c - содержит. Уровень срабатывания приема равен 5.

$\forall_{ABCDEFKabcdef}$(актив(плоскость(CDE)) & прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE)
& $B \in$ плоскость(CDE) & $F \in$ плоскость(CDE) & коорд(вектор$(AB), K)$
& коорд(вектор$(BF), K) = (d, e, f)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow ad + be + cf = 0)$

Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты со второго по четвертый выделены указателем "усм", пятый и шестой - указателем "идентификатор". Выводимое утверждение неконстантное. Уровень срабатывания равен 7.

(f) Усмотрение перпендикулярности прямой и плоскости.

$\forall_{ABCDEFGMNK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ &
плоскость(EFG) $\parallel$ плоскость(ABC) & прямая(MN) $\parallel$ прямая(AD) $\rightarrow$
плоскость(EFG) $\perp$ прямая(MN))

$\forall_{ABCDEFGMNK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ &
плоскость(EFG) $\parallel$ плоскость(ABD) & прямая(MN) $\parallel$ прямая(AC) $\rightarrow$
плоскость(EFG) $\perp$ прямая(MN))

$\forall_{ABCDEFGMNK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ &
плоскость(EFG) $\parallel$ плоскость(ADC) & прямая(MN) $\parallel$ прямая(AB) $\rightarrow$
плоскость(EFG) $\perp$ прямая(MN))

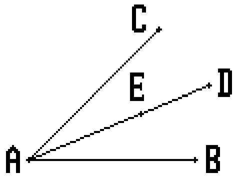
Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, последние два - выделены указателем "усм". Обозначения рассматриваемых параллельных прямых и плоскостей различны. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Специальные случаи соотношений для направляющих косинусов.

$\forall_{abc}(a/\sqrt{a^2+b^2+c^2} = p$ & $b/\sqrt{a^2+b^2+c^2} = p$ & $c/\sqrt{a^2+b^2+c^2} = p \rightarrow$
$a = b$ & $b = c)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

(h) Определение координаты точки на биссектрисе угла.



$\forall_{ABCDEKabcdefpqxyz}$(прямкоорд($K$) & коорд(вектор($AC$), K) $= (a, b, c)$ &
коорд(вектор(AB), K) $= (d, e, f)$ & коорд(A, K) $= (x, y, z)$ &
$p = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $q = \sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & биссектриса($BACD$) $\rightarrow$
E – точка & $E \in$ прямая(AD) & $\neg$($A \in$ интервал(DE)) & коорд(E, K) $=$
$(x + a/p + d/q, y + b/p + e/q, z + c/p + f/q))$

Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты со второго по шестой выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для какой-либо отличной от A точки прямой AD. Прием вводит новую переменную E. Если координатный набор для точки E содержит менее четырех параметров, то уровень срабатывания равен 3, иначе - 4.

$\forall_{ABCDEKabcdefpq}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор(AC), K) $= (a, b, c)$ &
коорд(вектор(AB), K) $= (d, e, f)$ & $p = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $q = \sqrt{d^2+e^2+f^2}$
& биссектриса($BACD$) $\rightarrow E$ – точка & $E \in$ прямая(AD) &
$\neg$($A \in$ интервал(DE)) & коорд(вектор(AE), K) $=$
$(a/p + d/q, b/p + e/q, c/p + f/q))$

Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты со второго по пятый выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "норкоорд" не в состоянии определить ни координатный набор точки A, ни координаты какого-либо вектора AP для лежащей на прямой AD и отличной от A точки P. Прием вводит новую переменную E. Уровень срабатывания приема равен 4.

(i) Сумма квадратов направляющих косинусов равна 1.

$\forall_{ABCDKPQabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C, D)\ \&$
$d = \text{уголмежду}(\text{вектор}(PQ), \text{вектор}(AB))\ \&\ e = \text{уголмежду}(\text{вектор}(PQ),$
$\text{вектор}(AC))\ \&\ f = \text{уголмежду}(\text{вектор}(PQ), \text{вектор}(AD)) \rightarrow$
$(\cos d)^2 + (\cos e)^2 + (\cos f)^2 = 1)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(вектор(PQ), вектор(AB))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Указатели "контекст" обеспечивают проверку вхождения в посылки подвыражений "уголмежду(вектор(PQ), вектор(AC))" и "уголмежду(вектор(PQ), вектор(AD))". Не более чем одно из выражений d, e, f содержит символ "уголмежду". Уровень срабатывания равен 4.

(j) Определение направляющих косинусов вектора, перпендикулярного двум неколлинеарным векторам.

$\forall_{ABKabcdefrstuvwxyz}(\text{Вектор}(A)\ \&\ \text{Вектор}(B)\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (ra, rb, rc)$
$\&\ \text{коорд}(B, K) = (sd, se, sf)\ \&\ \neg(\text{коллинеарны}(A, B))\ \&\ ax + by + cz = 0\ \&\ dx + ey + fz = 0\ \&\ u = ce - bf\ \&\ v = af - cd\ \&\ w = bd - ae\ \&\ \neg(x^2 + y^2 + z^2 = 0)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow t - \text{число}\ \&\ \neg(t = 0)\ \&\ x = tu\ \&\ y = tv\ \&\ z = tw)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$x/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий, четвертый, шестой, седьмой и двенадцатый антецеденты идентифицируются с посылками. Антецеденты с восьмого по десятый выделены указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные x, y, z идентифицируются с переменными. Прием вводит новую переменную t. Уровень срабатывания равен 6.

(k) Вектор, параллельный оси координат.

$\forall_{ABCDKx}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C, D) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(DA),$
$x) = 0 \leftrightarrow \text{коорд}(x, K) = (0, 0, -\text{длина}(x)))$

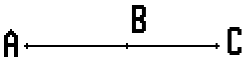
$\forall_{ABCDKx}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C, D) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(DA),$
$x) = 0 \leftrightarrow \text{коорд}(x, K) = (\text{длина}(x), 0, 0))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются в задачах на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDx}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C, D) \rightarrow \text{вниз}(x, K) \leftrightarrow$
$\text{коорд}(x, K) = (0, 0, -\text{длина}(x)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование. Хотя бы одна посылка содержит символ "коорд". Уровень срабатывания равен 2.

(l) Однонаправленные векторы.



$\forall_{ABCKabcdp}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ &
$B \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, B, C) & $l(AC) = d$ & $p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
& $\neg(p = 0) \rightarrow$ коорд(вектор$(AC), K) = (ad/p, bd/p, cd/p)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(вектор(AC), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй, пятый и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий и четвертый антецеденты - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, p не содержат невырожденных числовых атомов. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для вектора AC. Уровни срабатывания равны 4 и 6.

11. Расстояние между двумя точками либо длина вектора.

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (0, 0, a)$ & коорд$(B, K) = (0, 0, b) \rightarrow$
$l(AB) = |a - b|$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKabcpqr}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (p, q, r) \rightarrow$
$l(AB) = \sqrt{(a - p)^2 + (b - q)^2 + (c - r)^2}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 6. На той же теореме создана еще одна версия приема, имеющая заголовок "второйтерм". Она применяется в условиях задач на преобразование, имеющих цель "крд". Такая цель активирует выражение числовых атомов через координаты. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания данной версии равен 3.

$\forall_{ABKabc}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c) \rightarrow$
$l(AB) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Существует посылка "актив(вектор(AB))". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kabcd}$(прямкоорд(K) & Вектор(d) & коорд$(d, K) = (a, b, c) \rightarrow$
длина$(d) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "длина(d)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 6.

$\forall_{ABKabc}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ & актив$(l(AB)) \rightarrow l(AB) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKabcdpqr}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ &
коорд$(B, K) = (p, q, r)$ & $d = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2 + (c-r)^2} \rightarrow l(AB) = d)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Выражение d не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 6.

12. Длина пространственного отрезка, заданного своими координатами.

    $\forall_{Kabcd}$(прямкоорд$(K) \rightarrow$ длина(точки(set$_{xyz}(a \leq x$ & $x \leq b$ & $x -$ число &
    $y = c$ & $z = d), K)) = (b - a$ при $0 \leq b - a,$ иначе $0))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

13. Площадь пространственного прямоугольника, заданного своими координатами.

    $\forall_{Kabcdp}(0 \leq b - a$ & $0 \leq d - c$ & прямкоорд$(K) \rightarrow S$(точки(set$_{xyz}(z = p$ &
    $a \leq x$ & $x \leq b$ & $c \leq y$ & $y \leq d$ & $x -$ число & $y -$ число$), K)) = (b-a)(d-c))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

14. Объем треугольной пирамиды.

    $\forall_{ABCDKPabcdefghkpqr}$(пирамида$(P)$ & основание(фигура$(ABC), P)$ &
    Вершина(D, P) & прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ &
    коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & коорд$(C, K) = (g, h, k)$ & коорд$(D, K) = (p, q, r) \rightarrow$

    $$\text{объем}(P) = |\det \begin{pmatrix} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & k & 1 \\ p & q & r & 1 \end{pmatrix} |/6)$$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние три - выделены указателем "идентификатор". Выражения $a, b, c, d, e, f, g, h, k, p, q, r$ не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

15. Обращение к вспомогательной задаче на преобразование для вычисления объема.

    $\forall_{Ap}$(объем$(A) = p \rightarrow$ объем$(A) = p)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению задачи на исследование. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается с помощью вспомогательной задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Выражение p не содержит символа "объем". Задача имеет посылки "прямкоорд(K)" и "A = точки(B, K)". Напомним, что для таких ситуаций в разделе "математический анализ" предусмотрены приемы, вычисляющие объемы с помощью кратных интегралов. Уровень срабатывания равен 3.

16. Ввод в рассмотрение координатного набора.

    (a) Ввод в рассмотрение координатного набора при определении угла между вектором и положительным направлением координатной оси.

    $\forall_{ABCDKPQ}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D) \to a$ – число & b – число & c – число & коорд(вектор(PQ), K) $= (a, b, c)$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(вектор(PQ), вектор(AD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для вектора PQ. Прием вводит новые переменные a, b, c. Уровень срабатывания равен 6. Созданы еще две версии приема, отличающиеся только тем, что указатель "контрольвывода" относится в них к выражениям "уголмежду(вектор(PQ), вектор(AB))" и "уголмежду(вектор(PQ), вектор(AC))".

    (b) Ввод в рассмотрение координатного набора для вектора, если известны углы, образуемые им с положительными направлениями координатных осей.

    $\forall_{ABCDKPQ}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & уголмежду(вектор(PQ), вектор(AB)) $= a$ & уголмежду(вектор(PQ), вектор(AC)) $= b$ & уголмежду(вектор(PQ), вектор(AD)) $= c \to d$ – число & $0 < d$ & коорд(вектор(PQ), K) $= (d \cos a, d \cos b, d \cos c)$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "ориентация(K, X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b, c не содержат неизвестных. Выражение "вектор(PQ)"встречается в терме X. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для вектора PQ. Прием вводит новую переменную d. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, в которой указатель "контрольвывода" не используется. Дополнительно требуется, чтобы отсутствовала посылка, определяющая координатный набор для вектора PQ в какой-либо иной системе координат. Уровень срабатывания этой версии равен 5.

    $\forall_{ABCDKp}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & точкалуча(A, B, E) & точкалуча(A, D, F) & $\angle(AEF) = p \to m$ – число & $0 < m$ & коорд(вектор(FE), K) $= (m \cos p, 0, -m \sin p)$)

    Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "вектор(FE)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Выражение p не содержит неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить координатный набор для вектора FE. Прием вводит новую переменную m. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Ввод в рассмотрение координатного набора для основания перпендикуляра, опущенного на плоскость.

$\forall_{ABCDEKabc}$(прямкоорд(K) & актив(плоскость(CDE)) &
прямая(AB) $\perp$ плоскость(CDE) & $B \in$ плоскость(CDE) $\rightarrow$
$a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & коорд(B, K) $= (a, b, c)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстояние(AB)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Это подвыражение имеет тип "неизв". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие два - выделены указателем "усм". Координатный набор для "коорд(A, K)" нормализатором "нормкоорд" определяется, а для "коорд(B, K)" - нет. Отсутствует посылка, определяющая координатный набор для точки B в какой-либо другой системе координат. Выделена точка плоскости CDE, для которой нормализатор "норкоорд" умеет определять координатный набор. Уровень срабатывания равен 5.

17. Ввод прямоугольной системы координат при рассмотрении куба либо прямоугольного параллелепипеда.

$\forall_{ABCDEFGa}$(куб(a) & ребро(отрезок(AB), a) & ребро(отрезок(AC), a) &
ребро(отрезок(AD), a) & разныеточки(B, C) & разныеточки(B, D) &
разныеточки(C, D) $\rightarrow E -$ точка & $F -$ точка & $G -$ точка & $K = (A, E, F, G)$
& прямкоорд(K) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AD)
& точкалуча(A, B, E) & точкалуча(A, C, F) & точкалуча(A, D, G))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние три - обрабатываются проверочными операторами. В задаче встречается выражение вида "вектор(AX)". Отсутствует посылка вида "прямкоорд(...)". Прием вводит новые переменные E, F, G, K. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFGa}$(параллелепипед(a) & ребро(отрезок(AB), a) & ребро(отрезок(AC), a)
& ребро(отрезок(AD), a) & разныеточки(B, C) & разныеточки(B, D) &
разныеточки(C, D) & прямоугольный(a) $\rightarrow E -$ точка & $F -$ точка &
$G -$ точка & $K = (A, E, F, G)$ & прямкоорд(K) & $E \in$ прямая(AB) &
$F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, B, E) & точкалуча(A, C, F)
& точкалуча(A, D, G))

Аналогично предыдущему, но с посылкой идентифицируется также и последний антецедент.

Раздельное рассмотрение координат

В задачах по элементарной физике оказалось удобным работать не с координатными наборами, а с отдельными координатами физических векторов. Поэтому было введено обозначение "крд(a, K, i)" i-й координаты вектора либо точки a в системе координат K. Уравнения, выписываемые при решении задач приемами по элементарной физике, сформулированы в терминах данного обозначения. В данном подразделе собраны геометрические приемы, связанные с символом "крд".

1. Нулевой вектор.

   $\forall_{Ki}(\text{крд}(\text{вектор}0, K, i) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Минус перед вектором.

   $\forall_{Kai}(\text{крд}(-a, K, i) = -\text{крд}(a, K, i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3. Вынесение наружу численного множителя.

   $\forall_{Kabi}(\text{крд}(ab, K, i) = a \cdot \text{крд}(b, K, i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". В левой части равенства рассматривается операция "умножвект". Уровень срабатывания равен 0.

4. Связь с координатным набором.

   $\forall_{Kabpqr}(\text{коорд}(a, K) = (p, q, r)\ \&\ \text{крд}(a, K, 1) = b \rightarrow p = b)$

   $\forall_{Kabpqr}(\text{коорд}(a, K) = (p, q, r)\ \&\ \text{крд}(a, K, 2) = b \rightarrow q = b)$

   $\forall_{Kabpqr}(\text{коорд}(a, K) = (p, q, r)\ \&\ \text{крд}(a, K, 3) = b \rightarrow r = b)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровни срабатывания равны 1 и 3. Для каждого приема созданы две версии: одна с привязкой по первому антецеденту, а другая - по второму.

   $\forall_{Kapqr}(\text{коорд}(a, K) = (p, q, r) \rightarrow \text{крд}(a, K, 1) = p\ \&\ \text{крд}(a, K, 2) = q\ \&$
   $\text{крд}(a, K, 3) = r)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Выражения p, q, r не содержат невырожденных числовых атомов. Выражение вида "крд(a, K, i)" уже встречается в некоторой посылке. Уровень срабатывания равен 3.

5. Определение точки по ее координатам.

   $\forall_{Kabcx}(\text{крд}(x, K, 1) = a\ \&\ \text{крд}(x, K, 2) = b\ \&\ \text{крд}(x, K, 3) = c \leftrightarrow$
   $x = \text{тчкоорд}(K, (a, b, c)))$

   Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и заменяет группу условий задачи на описание. Выражения a, b, c, K не содержат неизвестных, выражение x - содержит. Уровень срабатывания равен 2.

6. Координаты векторов.

   (a) Длина вектора. Приемы этого раздела, связанные с понятиями "вверх", "вниз", и т.п., - возникли при рассмотрении задач по элементарной физике. Многие из них относятся лишь к одному из таких направлений - тому, которое фактически было востребовано в данных задачах.

   $\forall_{Ka}(\text{вверх}(a, K) \rightarrow \text{длина}(a) = \text{крд}(a, K, 3))$

   $\forall_{Ka}(\text{вниз}(a, K) \rightarrow \text{длина}(a) = -\text{крд}(a, K, 3))$

   $\forall_{Ka}(\text{вправо}(a, K) \rightarrow \text{длина}(a) = \text{крд}(a, K, 1))$

   $\forall_{Ka}(\text{влево}(a, K) \rightarrow \text{длина}(a) = -\text{крд}(a, K, 1))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Ka}$(Вектор(a) & вертикнапр(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $= |$крд$(a, K, 3)|$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

$\forall_{Ka}$(вперед(a, K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ крд$(a, K, 2)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "длина(a)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kab}$(вправо(a, K) & крд$(a, K, 1) = b \rightarrow$ длина$(a) = b$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана в нем. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение b не содержит неизвестных, а выражение a - содержит. Прием блокируется для посылок вида "равно(длина(a)...)". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Ka}$(крд$(a, K, 1) = 0$ & крд$(a, K, 2) = 0$ & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $= |$крд$(a, K, 3)|$)

$\forall_{Ka}$(крд$(a, K, 3) = 0$ & крд$(a, K, 2) = 0$ & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $= |$крд$(a, K, 1)|$)

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана в первом из них. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия второго приема, у которой точка привязки выбрана во втором антецеденте, а первый - выделен указателем "идентификатор".

$\forall_{Kabu}$(крд$(u, K, 1) = a$ & $\underline{\text{крд}(u, K, 3) = b}$ & крд$(u, K, 2) = c$ & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина$(u) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана во втором из них. Выражения a, b, c не содержат неизвестных, а выражение u - содержит. Прием блокируется для посылок вида "равно(длина(u)p)", где p не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2. Создана версия приема, срабатывающая на уровне 7. В ней третий антецедент выделен указателем "идентификатор", причем ограничения на выражения a, b, c и указанная выше блокировка отсутствуют.

$\forall_{Ka}$(Вектор(a) & одномерный(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $= |$крд$(a, K, 1)|$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд($a, K, 1$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Некоторая посылка задачи имеет подвыражение "длина(a)". Уровни срабатывания равны 2 и 4.

$\forall_{Ka}$(влево(a, K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ $-$крд($a, K, 1$))

$\forall_{Ka}$(вправо(a, K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ крд($a, K, 1$))

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд($a, K, 1$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Существует посылка, содержащая подвыражение "длина(a)". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Ka}$(вверх(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ крд($a, K, 3$))

$\forall_{Ka}$(вправо(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ крд($a, K, 1$))

$\forall_{Ka}$(влево(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ $-$крд($a, K, 1$))

$\forall_{Ka}$(вниз(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ $-$крд($a, K, 3$))

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Ka}$(вертикнапр(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ $|$крд($a, K, 3$)$|$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCK}$(прямая(BC) $\perp$ прямая(AC) & однонаправлены(a, вектор(AB)) &
прямкоорд(K) & вертикнапр(вектор(BC), K) $\rightarrow$
$|$крд($a, K, 3$)$|$ $= \sin(\angle(BAC))$длина(a))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд($a, K, 3$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Угол BAC уже рассматривается в задаче. Некоторая посылка содержит подвыражение "длина(a)". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kabu}$(крд($u, K, 1$) $= a$ & крд($u, K, 3$) $= b$ & крд($u, K, 2$) $= c$ &
прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(u) $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражения a, b, c не имеют невырожденных числовых атомов. Созданы две версии приема, соответственно выбору точки привязки в первом либо втором антецеденте. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kav}$(вправо(v, K) & длина(v) $= a \rightarrow$ крд($v, K, 1$) $= a$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{Ka}$(одномерный(a, K) $\rightarrow$ длина(a) $=$ $|$крд($a, K, 1$)$|$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения его при усмотрении подвыражения "длина(a)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 5.

(b) Минус перед вектором в указателе направления.

$\forall_a$(вниз$(-a, K) \leftrightarrow$ вверх$(a, K))$

$\forall_a$(вверх$(-a, K) \leftrightarrow$ вниз$(a, K))$

$\forall_a$(влево$(-a, K) \leftrightarrow$ вправо$(a, K))$

$\forall_a$(вправо$(-a, K) \leftrightarrow$ влево$(a, K))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Нулевая координата.

$\forall_{Ka}$(прямкоорд(K) & вправо$(v, K) \rightarrow$ крд$(v, K, 2) = 0)$

$\forall_{Ka}$(прямкоорд(K) & вправо$(v, K) \rightarrow$ крд$(v, K, 3) = 0)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" допускает заголовки "влево", "вверх", "вниз", "одномерный" второго антецедента в первом приеме и заголовки "влево", "вперед", "назад", "одномерный" во втором приеме. Кроме того, допускается заголовок "поверхнземли" первого антецедента. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Знак координаты.

$\forall_{Ka}$(вправо$(a, K) \rightarrow 0 \leq$ крд$(a, K, 1))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(a, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Точка отрезка.

$\forall_{ABCK}(A \in$ отрезок(BC) & крд$(B, K, 3) =$ крд$(C, K, 3) \rightarrow$
крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "равно". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCK}(A \in$ отрезок(BC) & вниз(вектор$(BC), K)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow$
крд$(B, K, 3) =$ крд$(A, K, 3) + l(AB)$ & крд$(C, K, 3) =$ крд$(A, K, 3) - l(AC))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана в первом. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Связь между координатами концов вектора.

$\forall_{ABK}$(вправо(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3))$

$\forall_{ABK}$(влево(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3))$

$\forall_{ABK}$(вверх(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2))$

$\forall_{ABK}$(вверх(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 1) =$ крд$(B, K, 1))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Уровни срабатывания первых трех приемов равны 1, последнего приема - 4.

$\forall_{ABK}$(вперед(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 1) =$ крд$(B, K, 1))$

$\forall_{ABK}$(влево(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2))$

$\forall_{ABK}$(вправо(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2))$

$\forall_{ABK}$(вперед(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении подвыражения "крд(A, K, i)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Здесь i равно 1 для первого приема, 2 для второго и третьего, и 3 для последнего. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKa}(l(AB) = a$ & вправо(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(B, K, 1) =$ крд$(A, K, 1)+$ $a)$

$\forall_{ABKa}(l(AB) = a$ & вниз(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3) +$ $a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2. Во втором приеме точка привязки выбрана в первом антецеденте.

$\forall_{ABK}$(вправо(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(B, K, 1) =$ крд$(A, K, 1) + l(AB))$

$\forall_{ABK}$(вниз(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3) + l(AB))$

$\forall_{ABK}$(вверх(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(B, K, 3) =$ крд$(A, K, 3) + l(AB))$

$\forall_{ABK}$(вперед(вектор$(AB), K) \rightarrow$ крд$(B, K, 2) =$ крд$(A, K, 2) + l(AB))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Расстояние AB уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания первого приема равен 2, остальных - 3.

(g) Умножение на положительную константу в указателе направления.

$\forall_{Kab}(0 < a \rightarrow$ вправо$(ab, K) \leftrightarrow$ вправо$(b, K))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

(h) Извлечение соотношения для координат из соотношения для векторов.

$\forall_{Kabcdi}(ab + c = d \rightarrow a \cdot$ крд$(b, K, i) +$ крд$(c, K, i) =$ крд$(d, K, i))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд(b, K, i)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровни срабатывания равны 2 и 4.

$\forall_{Kabpqr}$(одномерный(p, K) & одномерный(q, K) & одномерный$(r, K) \rightarrow$
$ap + bq = r \leftrightarrow a \cdot$ крд$(p, K, 1) + b \cdot$ крд$(q, K, 1) =$ крд$(r, K, 1))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 3.

(i) Равенство нулю суммы двух векторов, один из которых направлен вниз.

$\forall_{Kab}(a + b =$ вектор0 & вниз(a, K) & прямкоорд$(K) \rightarrow$
длина$(b) = -$крд$(a, K, 3))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение "длина(b)" уже встречается в послыках. Уровень срабатывания равен 4.

(j) Проекция вектора на координатную ось.

$\forall_{ABCDKab}$(уголмежду$(a,$ вектор$(AB)) = b$ & прямкоорд(K) &
$K = (A, B, C, D) \to$ крд$(a, K, 1) =$ длина$(a) \cos b)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(a, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражение b не содержит невырожденных числовых атомов. Выражение "длина(a)" уже встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, не использующая указателя "контрольвывода". В ней требуется, чтобы в посылках встречалось подвыражение "крд$(X, K, 1)$", где X содержит a. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{ABCDKab}$(уголмежду$(a,$ вектор$(AD)) = b$ & прямкоорд(K) &
$K = (A, B, C, D) \to$ крд$(a, K, 3) =$ длина$(a) \cos b)$

$\forall_{ABCDKab}$(уголмежду$(a,$ вектор$(DA)) = b$ & прямкоорд(K) &
$K = (A, B, C, D) \to$ крд$(a, K, 3) = -$длина$(a) \cos b)$

Аналогично предыдущему, причем указатель "контрольвывода" связан с подвыражением "крд$(a, K, 3)$".

$\forall_{ABCDKab}$(уголмежду$(a,$ вектор$(DA)) = b$ & прямкоорд(K) &
$K = (A, B, C, D) \to |$крд$(a, K, 1)| =$ длина$(a) \sin b)$

Аналогично предыдущему, но указатель "контрольвывода" связан с выражением "крд$(a, K, 1)$".

$\forall_{ABCDKab}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & $0 \le$ крд$(a, K, 1) \to$
крд$(a, K, 1) =$ длина$(a) \sin($уголмежду$(a,$ вектор$(AD))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(a, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения "длина(a)" и "уголмежду$(a,$ вектор$(AD))$" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKap}$(вертикнапр(вектор$(CB), K)$ & коллинеарны(вектор$(AB), a)$ &
актив$(\angle(ABC))$ & $\angle(ABC) = p$ & прямкоорд$(K) \to$
$|$крд$(a, K, 3)| =$ длина$(a) \cos p)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(a, K, 3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Уровень срабатывания равен 3.

(k) Угол между вектором и координатной осью.

$\forall_{ABCDEKab}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & $0 \le$ крд$(E, K, 1)$ &
$b = \mathrm{tg}($уголмежду$(E,$ вектор$(AB))) \to 0 \le b)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEK}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & $0 \leq$ крд($E, K, 1$) $\rightarrow$ уголмежду(E, вектор(AB)) $\leq \pi/2$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(E, вектор(AB))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & уголмежду(вектор(DA), вектор(EF)) $= a \rightarrow$ крд($F, K, 3$) = крд($E, K, 3$) $- l(EF) \cos a$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд($E, K, 3$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Однонаправленные векторы.

$\forall_{ABCKipq}$(однонаправлены(вектор(AB), p) & однонаправлены(вектор(AC), q) & крд(p, K, i) = $-$крд(q, K, i) & крд(B, K, i) = крд(C, K, i) $\rightarrow$ крд(A, K, i) = крд(C, K, i))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Последний антецедент выделен указателем "равно". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKa}$(однонаправлены(вектор(AB), a) $\rightarrow l(AB)$крд($a, K, 3$) = длина(a)(крд($B, K, 3$) $-$ крд($A, K, 3$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения его при усмотрении подвыражения "крд($a, K, 3$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Выражения "$l(AB)$" и "длина(a)" уже встречаются в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABKapq}$(однонаправлены(вектор(AB), a) & крд($B, K, 3$) $-$ крд($A, K, 3$) $= p$ & крд($B, K, 1$) $-$ крд($A, K, 1$) $= q \rightarrow$ крд($a, K, 1$)p = крд($a, K, 3$)q)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд($a, K, 3$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Выражения p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Выражение "крд($a, K, 1$)" уже встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{DEFGK}$(вперед(вектор(DE), K) & прямкоорд(K) & однонаправлены(вектор(DE), вектор(GF)) & крд($D, K, 3$) = крд($G, K, 3$) & крд($D, K, 2$) = крд($G, K, 2$) $\rightarrow$ расстмежду(отрезок(DE), отрезок(FG)) = |крд($D, K, 1$) $-$ крд($G, K, 1$)|)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстмежду(отрезок(DE), отрезок(FG))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируютс с посылками, причем указатель "вариант" разрешает заголовок "назад" первого антецедента. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

(m) Существование вектора, лежащего в горизонтальной плоскости и имеющего заданную длину.

$\forall_{Ka}(\exists_b(\text{Вектор}(b)\ \&\ \text{горизплосквект}(b,K)\ \&\ \text{длина}(b)=a)\leftrightarrow 0\le a)$

Прием имеет заголовок "связка". Он устраняет несущественную неизвестную b и применяется в задачах на описание, имеющих цель "исключ". Выражения a,K не содержат b. Уровень срабатывания равен 4.

(n) Использование координат направляющего вектора.

Чтобы определять тройку координат b относительно системы координат K некоторого вектора, коллинеарного заданному вектору a, создан пакетный синтезатор "напрвектор(a,K,b)". Его используют следующие два приема:

$\forall_{Kapqx}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{напрвектор}(a,K,x)\ \&\ x=(p,0,q)\ \&\ \neg(p=0)\rightarrow \text{крд}(a,K,3)=\text{крд}(a,K,1)q/p)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(a,K,3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, третий - выделен указателем "идентификатор". Выражение "крд$(a,K,1)$" уже рассматривается в задаче. Выражения p,q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABKapqx}(\text{напрвектор}(\text{вектор}(AB),K,x)\ \&\ x=(p,0,q)\ \&\ \neg(p=0)\rightarrow \text{крд}(B,K,3)=\text{крд}(A,K,3)+(q\text{крд}(B,K,1)-\text{крд}(A,K,1))/p)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(B,K,3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" обеспечивает дополнительную идентификацию подвыражения "вектор(AB)" некоторой посылки задачи. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения "крд$(A,K,3)$", "крд$(B,K,1)$" и "крд$(A,K,1)$" уже встречаются в посылках. Выражения p,q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 5.

(o) Вычисление скалярного произведения в простейших случаях.

Все приемы этого пункта имеют заголовок "второйтерм".

$\forall_{Kab}(\text{горизплосквект}(a,K)\ \&\ \text{однонаправлены}(a,\text{проекция}(b,\text{горизплоск}(K)))\rightarrow \text{скалумнож}(a,b)=\text{длина}(a)\text{длина}(\text{проекция}(b,\text{горизплоск}(K))))$

Точка привязки выбрана во втором антецеденте, идентифицируемом с посылкой либо условием. Преобразуемое выражение имеет эту посылку либо условие в своем контексте. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kuv}(\text{вверх}(u,K)\ \&\ \text{вниз}(v,K)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\rightarrow \text{скалумнож}(u,v)=-\text{длина}(u)\text{длина}(v))$

$\forall_{Kuv}(\text{вниз}(u,K)\ \&\ \text{вниз}(v,K)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\rightarrow \text{скалумнож}(u,v)=\text{длина}(u)\text{длина}(v))$

Последний антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabcuv}(\text{вертикнапр}(u, K)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(v, K) = (a, b, c) \rightarrow$ $\text{скалумнож}(u, v) = \text{крд}(u, K, 3)c)$

Два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKc}(\text{вниз}(\text{вектор}(AB), K)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow$ $\text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), C) = -\text{крд}(c, K, 3)l(AB))$

$\forall_{ABKc}(\text{вверх}(\text{вектор}(AB), K)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow$ $\text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), C) = \text{крд}(c, K, 3)l(AB))$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(p) Вертикально направленный вектор.

  i. Минус - вектор.

  $\forall_{Kab}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{вертикнапр}(b, K) \rightarrow a = -b \leftrightarrow$ $\text{вертикнапр}(a, K)\ \&\ \text{крд}(a, K, 3) = -\text{крд}(b, K, 3))$

  Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

  $\forall_{Ka}(\text{вертикнапр}(-a, K) \leftrightarrow \text{вертикнапр}(a, K))$

  Уровень срабатывания равен 1.

  ii. Координаты по горизонтали.

  $\forall_{Ka}(\text{вертикнапр}(a, K) \rightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0)$

  Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "вариант" допускает двойку вместо единицы в заменяемом выражении. Уровень срабатывания равен 1.

  iii. Координата по вертикали.

  $\forall_{ABK}(\text{вверх}(\text{вектор}(AB), K) \rightarrow \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 3) = l(AB))$

  $\forall_{ABK}(\text{вниз}(\text{вектор}(AB), K) \rightarrow \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 3) = -l(AB))$

  Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

  iv. Точка вертикального отрезка.

  $\forall_{ABCK}(A \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ \text{вниз}(\text{вектор}(CA), K)\ \&$ $\text{разныеточки}(A, B) \rightarrow \text{вниз}(\text{вектор}(AB), K))$

  Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана в первом из них. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

v. Смещение концов вертикального вектора в горизонтальных направлениях.

$\forall_{ABK}$(вниз(вектор$(AB), K) \to$ крд$(A, K, 1) =$ крд$(B, K, 1)$)

$\forall_{ABK}$(вниз(вектор$(AB), K) \to$ крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2)$)

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "крд(A, K, i)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Здесь i равно 1 для первого приема и 2 для второго. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускаются также символы "вверх" и "вертикнапр". Порядок идентификации концов вектора несущественен. Уровень срабатывания равен 3.

vi. Соотношение для координат точек, лежащих на вертикальной прямой.

$\forall_{ABCDKPQ}$(прямая$(PQ) \parallel$ прямая(AD) & $K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд$(K) \to$ крд$(Q, K, 1) =$ крд$(P, K, 1)$ & крд$(Q, K, 2) =$ крд$(P, K, 2)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд(Q, K, i)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "усм". Обозначения прямых PQ и AD различны. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCK}$(прямкоорд(K) & $A \in$ отрезок(BC) & вверх(вектор$(BC), K) \to l(AB) =$ крд$(A, K, 3) -$ крд$(B, K, 3)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(B, K, 3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения $l(AB)$ и "крд$(A, K, 3)$" уже встречаются в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 3.

vii. Усмотрение вертикально направленного вектора.

$\forall_{ab}(a + b =$ вектор0 & поверхнземли(K) & вертикнапр$(b, K) \to$ вертикнапр(a, K))

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах по элементарной физике. Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, третий - обрабатывается проверочным оператором. В задаче имеется посылка, заголовком которой служит один из символов "вверх", "вниз", "вертикнапр". Уровень срабатывания равен 6.

viii. Усмотрение противоречия.

$\forall_{Kab}$(крд$(a, K, 3) = b$ & $b < 0$ & вверх$(a, K) \to$ ложь)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение b содержит символ "минус" и не имеет неизвестных.

Введен сильный органичитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

7. Координата точки отрезка.

$\forall_{ABCK}(A \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ \text{крд}(B, K, 2) = \text{крд}(C, K, 2) \rightarrow$
$\text{крд}(A, K, 2) = \text{крд}(C, K, 2))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент выделен указателем "равно". Он идентифицируется с одной либо двумя посылками задачи на доказательство или на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKpq}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ pl(AC) = ql(BC) \rightarrow \text{крд}(C, K, 2) =$
$(p \cdot \text{крд}(A, K, 2) + q \cdot \text{крд}(B, K, 2))/(p + q))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения его при усмотрении подвыражения "крд$(A, K, 2)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKipq}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ pl(AC) = ql(BC) \rightarrow \text{крд}(C, K, i) =$
$(p \cdot \text{крд}(A, K, i) + q \cdot \text{крд}(B, K, i))/(p + q))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд(C, K, i)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором. Выражения p, q не имеют невырожденных числовых атомов. Выражения "крд(A, K, i)" и "крд(B, K, i)" уже встречаются в посылках. Переменные A, B, C различны. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{BCDKabim}(D \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ l(BC) = a\ \&\ l(BD) = b\ \&$
$\text{крд}(D, K, i) - \text{крд}(B, K, i) = m \rightarrow \text{крд}(C, K, i) - \text{крд}(B, K, i) = am/b)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд(C, K, i)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками. Первый антецедент выделен указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Выражения a, b, m не содержат неизвестных. Выражения "крд(D, K, i)" и "крд(B, K, i)" уже встречаются в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{BCDKapq}(D \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ l(BC) = a\ \&\ \text{крд}(D, K, 3) - \text{крд}(C, K, 3) = p\ \&$
$\text{крд}(B, K, 3) - \text{крд}(C, K, 3) = q\ \&\ \neg(q - p = 0) \rightarrow l(CD) = ap/q)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(D, K, 3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, p, q не содержат неизвестных, а выражение для расстояния CD - содержит. Это расстояние уже рассматривается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

8. Соотношения для координат точки на наклонной плоскости.

   $\forall_{ABCDEFKMa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & точкалуча(A, B, E) & точкалуча(A, D, F) & $\angle(AEF) = a$ & $M \in$ отрезок$(EF) \rightarrow$ крд$(M, K, 3) =$ крд$(F, K, 3) -$ крд$(M, K, 1) \operatorname{tg} a$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(M, K, 3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый, второй и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Третий, четвертый и шестой антецеденты выделены указателем "усм". Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов. Выражения "крд$(F, K, 3)$" и "крд$(M, K, 1)$" уже рссматриваются в задаче. Не усматривается принадлежность точки F прямой AE. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDEFKMa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & точкалуча(A, B, E) & точкалуча(A, D, F) & $\angle(AEF) = a$ & $M \in$ отрезок$(EF) \rightarrow$ крд$(M, K, 3) =$ крд$(E, K, 1) -$ крд$(M, K, 1) \operatorname{tg} a$)

   Аналогично предыдущему, но вместо "крд$(F, K, 3)$" в задаче должно встречаться выражение "крд$(E, K, 1)$".

9. Расстояние между двумя точками, лежащими на одной вертикали либо на одной горизонтали.

   $\forall_{ABK}$(прямкоорд(K) & крд$(A, K, 1) =$ крд$(B, K, 1)$ & крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2) \rightarrow l(AB) = |$крд$(A, K, 3) -$ крд$(B, K, 3)|$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование, имеющей заголовок "равно". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABK}$(прямкоорд(K) & горизплосквект(вектор$(AB), K)$ & крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2) \rightarrow l(AB) = |$крд$(A, K, 1) -$ крд$(B, K, 1)|$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование, имеющей заголовок "равно". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABK}$(прямкоорд(K) & вертикнапр(вектор$(AB), K) \rightarrow$ $l(AB) = |$крд$(A, K, 3) -$ крд$(B, K, 3)|$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

10. Вертикальная плоскость.

    (a) Расстояние между двумя точками, лежащими в вертикальной плоскости.

$\forall_{ABKbc}(\text{крд}(B,K,3) - \text{крд}(A,K,3) = b\ \&\ \text{вертплосквект}(\text{вектор}(AB),K)$ $\&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ c = \text{крд}(B,K,1) - \text{крд}(A,K,1) \to l(AB) = \sqrt{b^2+c^2})$
Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$l(AB)$" в посылке задачи на исследование. Третий антецедент идентифицируется с посылкой. Первый и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражения b, c не содержат неизвестных, а выражение для расстояния AB - содержит. Выражения "$\text{крд}(B,K,3)$", "$\text{крд}(A,K,3)$", "$\text{крд}(B,K,1)$", "$\text{крд}(A,K,1)$" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABKabc}(l(AB) = a\ \&\ \text{крд}(B,K,3) - \text{крд}(A,K,3) = b\ \&$ $\text{крд}(B,K,2) = \text{крд}(A,K,2)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ c = \text{крд}(B,K,1) -$ $\text{крд}(A,K,1) \to c^2 = a^2 - b^2)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\text{крд}(A,K,1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Выражения a, b не содержат неизвестных, а выражение c - содержит. Выражение b не нулевое. Уровень срабатывания равен 4.

(b) Три точки, лежащие в вертикальной плоскости.

$\forall_{ABCp}(l(AC) = l(BC)\ \&\ \angle(ACB) = p\ \&\ \text{крд}(A,K,3) = \text{крд}(B,K,3)\ \&$ $\text{крд}(A,K,2) = \text{крд}(B,K,2)\ \&\ \text{крд}(B,K,2) = \text{крд}(C,K,2) \to$ $|\text{крд}(A,K,3) - \text{крд}(C,K,3)| = l(AC)\cos(p/2))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\text{крд}(C,K,3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент идентифифируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Три последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Выражение p не содержит невырожденных числовых атомов. Выражение "$\text{крд}(A,K,3)$" уже встречается в посылках. Не усматривается принадлежность точки B прямой AC. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCp}(pl(AB) = ql(BC)\ \&\ \angle(ABC) = u\ \&\ \text{крд}(A,K,3) = \text{крд}(C,K,3)\ \&$ $\text{крд}(A,K,2) = \text{крд}(B,K,2)\ \&\ \text{крд}(B,K,2) = \text{крд}(C,K,2)\ \&$ $0 \le \text{крд}(C,K,1) - \text{крд}(A,K,1)\ \&\ v = \sqrt{p^2+q^2-2pq\cos u} \to$ $\text{крд}(A,K,1) = \text{крд}(B,K,1) - (q - p\cos u)l(AB)/v\ \&$ $\text{крд}(C,K,1) = \text{крд}(B,K,1) + p(p - q\cos u)l(AB)/(qv))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\text{крд}(B,K,1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, третий - выделен указателем "равно". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, шестой - проверочным оператором. Четвертый, пятый и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKu}(\angle(ABC) = u\ \&\ \text{крд}(B,K,3) = \text{крд}(C,K,3)\ \&\ \text{крд}(A,K,2) =$ $\text{крд}(B,K,2)\ \&\ \text{крд}(B,K,2) = \text{крд}(C,K,2)\ \&\ 0 \le \text{крд}(B,K,1) -$ $\text{крд}(C,K,1) \to \text{крд}(A,K,1) = \text{крд}(B,K,1) - l(AB)\cos u)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\text{крд}(A,K,1)$"

в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Антецеденты со второго по четвертый выделены указателем "идентификатор". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение u не содержит невырожденных числовых атомов. Выражения "$l(AB)$" и "крд$(B, K, 1)$" уже встречаются в посылках. Не усматривается принадлежность точки C прямой AB. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Вектор лежит в вертикальной плоскости.

$\forall_{Ka}$(вертплосквект$(-a, K) \leftrightarrow$ вертплосквект$(a, K))$

Прием имеет заголовок "615ройтерм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Kv}$(вертплосквект$(v, K) \to$ крд$(v, K, 2) = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

(d) Смещение по вертикали при известных расстоянии и горизонтальном смещении.

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & вертплосквект(вектор$(AB), K)$ & крд$(A, K, 1) -$ крд$(B, K, 1) = a$ & $l(AB) = b$ & $0 \leq$ крд$(B, K, 3) -$ крд$(A, K, 3) \to$ крд$(B, K, 3) =$ крд$(A, K, 3) + \sqrt{b^2 - a^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(B, K, 3)$" в посылке задачи на исследование. Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Задача имеет посылку с заголовком "вертплосквект". Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2)$ & крд$(A, K, 1) -$ крд$(B, K, 1) = a$ & $l(AB) = b$ & $0 \leq$ крд$(B, K, 3) -$ крд$(A, K, 3) \to$ крд$(B, K, 3) =$ крд$(A, K, 3) + \sqrt{b^2 - a^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(B, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 5.

(e) Угол между вектором и координатной осью.

$\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & уголмежду$(E,$ вектор$(AB)) = a$ & крд$(E, K, 2) = 0$ & $0 \leq$ крд$(E, K, 3)$ & длина$(E) = b \to$ крд$(E, K, 1) = b \cos a$ & крд$(E, K, 3) = b \sin a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKPQRSav}$(коллинеарны(вектор$(AB), a)$ & $K = (P, Q, R, S)$ &

уголмежду(вектор(PS), вектор$(AB)) = a$ & вертплосквект(вектор(AB), $K) \to |$крд$(v, K, 1) \cos a| = |$крд$(v, K, 3)| \sin a)$

$\forall_{ABKPQRSav}$(коллинеарны(вектор$(AB), a)$ & $K = (P, Q, R, S)$ & уголмежду(вектор(SP), вектор$(AB)) = a$ & вертплосквект(вектор(AB), $K) \to |$крд$(v, K, 1) \cos a| = |$крд$(v, K, 3)| \sin a)$

Приемы имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "крд$(v, K, 3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Задача имеет посылку, в которую входит выражение "крд$(v, K, 1)$". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & уголмежду$(E$, вектор$(AB)) = a$ & крд$(E, K, 2) = 0$ & $0 \leq$ крд$(E, K, 3) \to$ крд$(E, K, 3) \cos a =$ крд$(E, K, 1) \sin a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(E, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Выражение "крд$(E, K, 3)$" уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKPQRSa}$(вертплосквект(вектор$(AB), K)$ & уголмежду(вектор(PQ), вектор$(AB)) = a$ & $K = (P, Q, R, S)$ & $0 \leq$ крд(вектор$(AB), K, 3) \to$ крд$(B, K, 3) =$ крд$(A, K, 3) + l(AB) \sin a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(B, K, 3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор", первый и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Выражения "$l(AB)$" и "крд$(A, K, 3)$" уже встречаются в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKPQRSa}$(вертплосквект(вектор$(AB), K)$ & уголмежду(вектор(PQ), вектор$(AB)) = a$ & $K = (P, Q, R, S)$ & $0 \leq$ крд(вектор$(AB), K, 3) \to$ крд$(A, K, 1) =$ крд$(B, K, 1) - l(AB) \cos a)$

Аналогично предыдущему, но указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "крд$(A, K, 1)$", а в посылках должно встречаться выражение "крд$(B, K, 1)$".

$\forall_{ABKPQRSa}$(вертплосквект(вектор$(AB), K)$ & уголмежду(вектор(PQ), вектор$(AB)) = a$ & $K = (P, Q, R, S) \to$ (крд$(B, K, 3) -$ крд$(A, K, 3)) \cos a =$ (крд$(B, K, 1) -$ крд$(A, K, 1)) \sin a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(A, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию подвыражения "вектор(AB)" некоторой посылки. Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Выражения "крд$(B, K, 3)$", "крд$(A, K, 3)$", "крд$(B, K, 1)$" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKPQRSav}(K = (P, Q, R, S)$ & уголмежду(вектор$(SP), v) = a$ & вертплосквект$(v, K) \to |$крд$(v, K, 1)\cos a| = |$крд$(v, K, 3)|\sin a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(v, K, 3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Выражение "крд$(v, K, 1)$" уже встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{ABKPQRSa}($вертплосквект(вектор$(AB), K)$ & уголмежду(вектор(SP), вектор$(AB)) = a$ & $K = (P, Q, R, S)$ & $0 \leq$ крд(вектор$(AB), K, 1) \to$ крд$(B, K, 1) =$ крд$(A, K, 1) + l(AB)\sin a)$

$\forall_{ABKPQRSa}($вертплосквект(вектор$(AB), K)$ & уголмежду(вектор(SP), вектор$(AB)) = a$ & $K = (P, Q, R, S)$ & крд(вектор$(AB), K, 1) \leq 0 \to$ крд$(B, K, 1) =$ крд$(A, K, 1) - l(AB)\sin a)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "крд$(B, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Первый и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение a не содержит невырожденных числовых атомов. Выражения "$l(AB)$" и "крд$(A, K, 1)$" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 6.

(f) Длина вектора.

$\forall_{Kabu}($вертплосквект(u, K) & крд$(u, K, 1) = a$ & крд$(u, K, 3) = b$ & прямкоорд$(K) \to$ длина$(u) = \sqrt{a^2 + b^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "длина(u)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения a, b не содержат неизвестных. Выражение для длины вектора u имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии данного приема, у которых первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. В первой из них, срабатывающей на уровне 4, вместо указанных выше условий на a, b, u требуется, чтобы выражения a, b не содержали невырожденных числовых атомов. Вторая версия, срабатывающая на уровне 6, имеет заголовок "второйтерм". В ней все дополнительные требования на параметры отброшены.

(g) Вектор, ортогональный горизонтальному.

$\forall_{Kab}($влево(a, K) & $a \perp b \to$ крд$(b, K, 1) = 0)$

$\forall_{Kab}($вправо(a, K) & $a \perp b \to$ крд$(b, K, 1) = 0)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

(h) y-координата точки, лежащей в плоскости OXZ.

$\forall_{AEK}$(прямкоорд(K) & $E =$ вертплоск(K) & $A \in E \to$ крд$(A, K, 2) = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, причем точка привязки выбрана в третьем из них. Уровень срабатывания равен 1.

(i) Угол между векторами, лежащими в вертикальной плоскости.

$\forall_{ABKcpq}$(одномерный(c, K) & крд$(B, K, 3) -$ крд$(A, K, 3) = q$ &
$l(AB) = p$ & $A \in$ вертплоск(K) & $B \in$ вертплоск$(K) \to$
$\sin$(уголмежду(вектор$(AB), c)) = |q|/p)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(вектор(AB),c)" в посылке задачи на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения p, q не содержат неизвестных, выражение для рассматриваемого угла между векторами имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 4.

(j) Координаты двух точек, лежащих на одной вертикали.

$\forall_{ABK}$(вертикаль(прямая$(AB), K) \to$ крд$(B, K, 1) =$ крд$(A, K, 1))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Точка привязки выбрана в антецеденте, который идентифицируется с посылкой либо условием. Эта посылка либо условие принадлежит контексту заменяемого выражения. Переменная A лексикографически предшествует переменной B. Указатель "альтернатива" допускает применение приема для вторых координат точек A, B. Уровень срабатывания равен 1.

(k) Существование концевой точки вертикально направленного вектора, имеющей заданную третью координату.

$\forall_{AKabc}(A -$ точка & прямкоорд(K) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число
& $\neg(a = 0) \to \exists_B(B -$ точка & вертикаль(прямая$(AB), K)$ & $\neg(A = B)$ &
$a \cdot$ крд$(B, K, 3) + b = c) \leftrightarrow \neg(a \cdot$ крд$(A, K, 3) + b = c))$

Прием имеет заголовок связка и исключает несущественную неизвестную B в задаче на описание, имеющей цель "исключ". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем допускается альтернативный заголовок "поверхнземли". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменная B не встречается в выражениях a, b, c, A, K. Уровень срабатывания равен 3.

11. Горизонтальная плоскость.

(a) Вектор лежит в горизонтальной плоскости.

$\forall_{Ka}$(горизплосквект$(-a, K) \leftrightarrow$ горизплосквект$(a, K))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Ka}$(горизплосквект$(a, K) \to$ крд$(a, K, 3) = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Вектор a выражает ускорение, силу либо импульс. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Ka}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{горизплосквект}(a,K) \rightarrow \text{крд}(a,K,3)=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\text{крд}(a,K,3)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания приема равен 2.

(b) Две точки лежат на прямой, параллельной оси абсцисс.

$\forall_{ABK}(\text{крд}(A,K,2)=\text{крд}(B,K,2)\ \&\ \text{крд}(A,K,3)=\text{крд}(B,K,3)\ \&$
$0 \leq \text{крд}(B,K,1)-\text{крд}(A,K,1) \rightarrow \text{крд}(B,K,1)=\text{крд}(A,K,1)+l(AB))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\text{крд}(A,K,1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения "$l(AB)$" и "$\text{крд}(B,K,1)$" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCK}(A \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ \text{вправо}(\text{вектор}(BC),K) \rightarrow$
$a \cdot \text{крд}(A,K,1) - a \cdot \text{крд}(B,K,1) = al(AB))$

Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение для расстояния AB имеет тип "существатом". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCK}(\text{крд}(A,K,1) = \text{крд}(B,K,1)+a\ \&\ \text{одномерный}(\text{вектор}(AB),K) \rightarrow l(AB)=|a|)$

Прием имеет заголовок "вывод". Точка привязки выбрана в первом антецеденте, идентифицируемом с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит неизвестных, а выражение для расстояния AB - содержит. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Три точки, лежащие в горизонтальной плоскости.

$\forall_{ABCK}(\text{прямкоорд}(K) \rightarrow \text{плоскость}(ABC) \parallel \text{горизплоск}(K) \leftrightarrow$
$\text{крд}(A,K,3)=\text{крд}(B,K,3)\ \&\ \text{крд}(B,K,3)=\text{крд}(C,K,3))$

Прием имеет заголовок "воройтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Угол между вектором и координатной осью.

$\forall_{ABCKa}(\text{вправо}(\text{вектор}(AB),K)\ \&\ \text{однонаправлены}(v,\text{вектор}(AC))\ \&$
$\text{горизплосквект}(v,K) \rightarrow |\text{крд}(v,K,1)| = \text{длина}(v)|\cos\angle(BAC)|)$

$\forall_{ABCKa}(\text{вправо}(\text{вектор}(AB),K)\ \&\ \text{однонаправлены}(v,\text{вектор}(AC))\ \&$
$\text{горизплосквект}(v,K) \rightarrow |\text{крд}(v,K,2)| = \text{длина}(v)\sin\angle(BAC))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения "$\angle(BAC)$" и "$\text{длина}(v)$" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 5.

(e) Длина вектора.

$\forall_{Ka}$(крд$(a, K, 2) = 0$ & горизплосквект(a, K) & прямкоорд$(K) \to$ длина$(a) = |$крд$(a, K, 1)|$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй антецедент - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabc}$(горизплосквект(a, K) & крд$(a, K, 1) = b$ & крд$(a, K, 2) = c \to$ длина$(a) = \sqrt{b^2 + c^2}$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения b, c не содержат неизвестных, а преобразуемое выражение - содержит. Созданы две версии приема, у которых точка привязки выбрана, соответственно, во втором и третьем антецедентах. Уровень срабатывания равен 2. Кроме того, создана третья версия, срабатывающая на уровне 4. У нее условия на неизвестные отброшены, а точка привязки выбрана во втором антецеденте.

$\forall_{Kab}$(горизплосквект$(a, K) \to b($крд$(a, K, 1))^2 + b($крд$(a, K, 2))^2 = b($длина$(a))^2$)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение "длина(a)" имеет тип "существатом".

$\forall_{Kabc}$(прямкоорд(K) & горизплосквект(a, K) & крд$(a, K, 1) = b$ & крд$(a, K, 2) = c \to b^2 + c^2 = ($длина$(a))^2$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "длина(a)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 6.

(f) Вектор, ортогональный вертикальному.

$\forall_{Kab}$(вертикнапр(K, a) & $a \perp b \to$ крд$(b, K, 3) = 0$)

$\forall_{Kab}$(вверх(K, a) & $a \perp b \to$ крд$(b, K, 3) = 0$)

$\forall_{Kab}$(вниз(K, a) & $a \perp b \to$ крд$(b, K, 3) = 0$)

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Точка отрезка, параллельного оси абсцисс.

$\forall_{ABCKp}(A \in$ отрезок(BC) & прямкоорд(K) & $l(AB) = p$ & вправо(вектор$(BC), K)$ & одномерный(вектор$(BC), K) \to$ крд$(A, K, 1) =$ крд$(B, K, 1) + p$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "крд$(A, K, 1)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражение p не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

12. Геометрические тела.

   (a) Координаты центра цилиндра.

   $\forall_{ABCDEFK}$(цилиндр(A) & основание(E,A) & $E=$ Круг(BCD) & $E=$ нижнееоснование(A,K) & центр$(F,A)\rightarrow$ крд$(F,K,3)=$ крд$(B,K,3)+$ высота$(A)/2$ & крд$(F,K,1)=$ крд$(B,K,1)$ & крд$(F,K,2)=$ крд$(B,K,2)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Центр куба.

   $\forall_{ABCDEFMNK}$(куб(A) & прямкоорд(K) & грань(фигура$(CDEF),A)$ & одномерный(вектор$(CD),K)$ & ребро(отрезок$(MN),A)$ & вертикнапр(вектор$(DM),K)$ & центр$(B,A)\rightarrow$
   крд$(B,K,1)=($крд$(C,K,1)+$крд$(D,K,1))/2$ &
   крд$(B,K,2)=($крд$(D,K,2)+$крд$(E,K,2))/2$ &
   крд$(B,K,3)=($крд$(D,K,3)+$крд$(M,K,3))/2$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента, а также пятый и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Вершины C,D,E,F идентифицируются с точностью до изменения порядка на противоположный и циклических перестановок. Уровень срабатывания равен 3.

   (c) Координаты вершин куба.

   $\forall_{ABCDEFMNK}$(куб(A) & прямкоорд(K) & грань(фигура$(CDEF),A)$ & вправо(вектор$(CD),K)$ & ребро(отрезок$(MN),A)$ & вверх(вектор(EN), $K)$ & вверх(вектор$(DM),K)\rightarrow$ крд$(D,K,1)=$ крд$(E,K,1)$ &
   крд$(D,K,1)=$ крд$(C,K,1)+l(CD)$ & крд$(D,K,3)=$ крд$(E,K,3)$ &
   крд$(M,K,3)=$ крд$(D,K,3)+l(CD)$ & крд$(M,K,3)=$ крд$(N,K,3)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

   (d) Верхний и нижний уровни тела.

   $\forall_{ABCK}$(куб(A) & ребро(отрезок$(BC),A)$ & прямкоорд(K) & вверх(вектор$(BC),K)\rightarrow$ верхнийуровень$(A,K)=$ крд$(C,K,3)$)

   $\forall_{ABCK}$(куб(A) & ребро(отрезок$(BC),A)$ & прямкоорд(K) & вверх(вектор$(BC),K)\rightarrow$ нижнийуровень$(A,K)=$ крд$(B,K,3)$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDKP}$(цилиндр(A) & основание(P,A) & $P=$ Круг(BCD) & вертплоск(вектор$(BC),K)$ & вертплоск(вектор$(BD),K)$ & прямкоорд$(K)\rightarrow$ верхнийуровень$(A,K)=$ крд$(B,K,3)+l(BC)$)

$\forall_{ABCDKP}$(цилиндр(A) & основание(P, A) & $P =$ Круг(BCD) & вертплоск(вектор$(BC), K)$ & вертплоск(вектор$(BD), K)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow$ нижнийуровень$(A, K) =$ крд$(B, K, 3) - l(BC))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подвыражению условия задачи на преобразование. Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками. Указатель "возмравно(3)" разрешает альтернативную обработку третьего антецедента, как если бы он был выделен указателем "идентификатор". Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{EK}$(цилиндричтело$(E, K) \rightarrow$ Высотаповерхн(нижнееоснование(E, K), $K) =$ нижнийуровень$(E, K))$

$\forall_{EK}$(цилиндричтело$(E, K) \rightarrow$ Высотаповерхн(верхнееоснование(E, K), $K) =$ верхнийуровень$(E, K))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "смравно" разрешает идентификацию подтерма "верхнееоснование(E, K)" косвенным образом, через равенство в посылках. В посылках задачи должно встречаться либо выражение "нижнийуровень(E, K)", либо выражение "верхнийуровень(E, K)". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCK}$(параллелепипед(A) & прямоугольный(A) & грань(фигура$(PQRS)$, $A)$ & прямкоорд(K) & вверх(вектор$(PQ), K) \rightarrow$ верхнийуровень$(A, K) =$ крд$(Q, K, 3))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKht}(B =$ верхняячасть$(A, h, K, t) \rightarrow$ нижнийуровень(место$(B, t), K) = h)$

$\forall_{ABKht}(B =$ нижняячасть$(A, h, K, t) \rightarrow$ верхнийуровень(место$(B, t), K) = h)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражений "нижнийуровень(место(B, t),K)" либо, соответственно, "верхнийуровень(место($B, t)$,K)" в посылке задачи на исследование. Заметим, что посредством "место(B, t)" обозначена часть пространства, занимаемая материальным телом B в момент t. Выражение "верхняячасть(A, h, K, t)" обозначает часть материального тела A, расположенную в момент t не ниже вертикального уровня h в системе координат K. Антецедент идентифицируется с посылкой. Аналогично - для "нижняячасть". Выражение h не имеет невырожденных числовых атомов. Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию подвыражения "место(B, t)" через равенство в посылках. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKht}(B =$ верхняячасть$(A, h, K, t) \rightarrow$ верхнийуровень(место$(B, t), K) =$ верхнийуровень(место$(A, t), K))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "верхнийуровень(

место(B,t),$K)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение "верхнийуровень(место(A,t),$K)$" уже встречается в задаче. Указатели "смравно" разрешают косвенную идентификацию подтермов "место(...)" через равенство в посылках. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{KPabcde}(a \cdot \text{верхнийуровень}(P,K) + b \cdot \text{нижнийуровень}(P,K) = c\ \&$
$ae - bd = 0\ \&\ \neg(a = 0) \to d \cdot \text{верхнийуровень}(P,K) +$
$e \cdot \text{нижнийуровень}(P,K) = cd/a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

(e) Прямоугольник в плоскости, параллельной плоскости OXZ.

$\forall_{ABCDK}(\text{прямоугольник}(ABCD)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{вверх}(\text{вектор}(AB), K)$
$\&\ \text{вправо}(\text{вектор}(AD), K) \to \text{коорд}(\text{фигура}(ABCD), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}$
$\&\ \text{крд}(A,K,1) \leq x\ \&\ x \leq \text{крд}(A,K,1) + l(AD)\ \&\ y = \text{крд}(A,K,2)\ \&$
$z - \text{число}\ \&\ \text{крд}(A,K,3) \leq z\ \&\ z \leq \text{крд}(A,K,3) + l(AB)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "вариант" разрешает заголовок "квадрат" первого антецедента. Допускается циклическая перестановка вершин прямоугольника. Задача имеет посылку "поверхнземли(K)" либо посылку вида "$K = (M,N,P,Q)$", что позволяет усмотреть трехмерную ситуацию. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Прямоугольник в плоскости, параллельной плоскости OYZ.

$\forall_{ABCDK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{крд}(A,K,1) = \text{крд}(B,K,1)\ \&$
$\text{крд}(C,K,1) = \text{крд}(B,K,1)\ \&\ \text{крд}(D,K,1) = \text{крд}(B,K,1)\ \&$
$\text{крд}(A,K,3) = \text{крд}(D,K,3)\ \&\ \text{крд}(B,K,3) = \text{крд}(C,K,3)\ \&$
$\text{крд}(A,K,2) = \text{крд}(B,K,2)\ \&\ \text{крд}(C,K,2) = \text{крд}(D,K,2)\ \&$
$0 \leq \text{крд}(B,K,3) - \text{крд}(A,K,3)\ \&\ 0 \leq \text{крд}(C,K,2) - \text{крд}(B,K,2) \to$
$\text{коорд}(\text{фигура}(ABCD), K) = \text{set}_{xyz}(x = \text{крд}(A,K,1)\ \&\ y - \text{число}\ \&$
$\text{крд}(A,K,2) \leq y\ \&\ y \leq \text{крд}(A,K,2) + l(AD)\ \&\ z - \text{число}\ \&$
$\text{крд}(A,K,3) \leq z\ \&\ z \leq \text{крд}(A,K,3) + l(AB)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, антецеденты со второго по восьмой выделены указателем "идентификатор". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Задача имеет посылку "поверхнземли(K)" либо посылку вида "$K = (M,N,P,Q)$". Уровень срабатывания равен 3.

(g) Круг в плоскости, параллельной OXZ либо OYZ.

$\forall_{ABCDK}(P = \text{Круг}(ABC)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{вертплосквект}(\text{вектор}(AB),$
$K)\ \&\ \text{вертплосквект}(\text{вектор}(AC), K) \to \text{коорд}(P,K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&$
$z - \text{число}\ \&\ (x - \text{крд}(A,K,1))^2 + (z - \text{крд}(A,K,3))^2 \leq l(AB)^2\ \&$
$y = \text{крд}(A,K,2)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDK}$(прямкоорд(K) & Вертплоск(плоскость$(MNP), K)$ & $l(MN) = r \rightarrow$ коорд(Круг$(MNP), K) = \mathrm{set}_{xyz}(x =$ крд$(M, K, 1)$ & y − число & крд$(M, K, 2) - r \leq y$ & $y \leq$ крд$(M, K, 2) + r$ & z − число & крд$(M, K, 3) - \sqrt{r^2 - (\text{крд}(M, K, 2) - y)^2} \leq z$ & $z \leq$ крд$(M, K, 3) + \sqrt{r^2 - (\text{крд}(M, K, 2) - y)^2}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию выражения "Круг(MNP)" через равенство в посылках. Уровень срабатывания равен 3.

(h) Высота тела.

$\forall_{AK}$(высотатела$(A, K) =$ верхнийуровень$(A, K) -$ нижнийуровень$(A, K))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование. Должна существовать посылка, заголовком которой служит один из символов "нижнееоснование", "Давлстат", "нижнячасть", "верхняячасть", "погружчасть". Уровень срабатывания равен 1.

(i) Выражение верхнего либо нижнего уровня из линейного уравнения.

$\forall_{AKabc}(\neg(a = 0) \rightarrow a \cdot$ верхнийуровень$(A, K) + b = c \leftrightarrow$ верхнийуровень$(A, K) = (c - b)/a)$

$\forall_{AKabc}(\neg(a = 0) \rightarrow a \cdot$ нижнийуровень$(A, K) + b = c \leftrightarrow$ нижнийуровень$(A, K) = (c - b)/a)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит неизвестных. Выражение c не имеет своим заголовком символы "верхнийуровень", нижнийуровень", "крд". Выражения b, c не содержат символа "объем". Левая часть заменяющего равенства не входит ни в b, ни в c. Уровень срабатывания равен 2.

(j) Выражение верхнего уровня через нижний из уравнения.

$\forall_{ABKabc}(\neg(b = 0) \rightarrow a/(b\cdot$(верхнийуровень$(A, K)-$нижнийуровень$(B, K))) = c \leftrightarrow$ верхнийуровень$(A, K) =$ нижнийуровень$(B, K) + a/(bc))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не имеют невырожденных числовых атомов, заголовок которых отличен от символов "радиус" и "высота". Уровень срабатывания равен 4.

(k) Ориентация равенства.

$\forall_{AKb}(b =$ верхнийуровень$(A, K) \leftrightarrow$ верхнийуровень$(A, K) = b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Выражение b не содержит символа "верхнийуровень". Преобразованная посылка сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{AKb}(b =$ нижнийуровень$(A, K) \leftrightarrow$ нижнийуровень$(A, K) = b)$

Аналогично предыдущему.

(l) Объем цилиндрического тела.

$\forall_{AK}$(цилиндричтело$(A, K) \rightarrow$ объем$(A) =$ (верхнийуровень$(A, K) -$ нижнийуровень$(A, K))S$(нижнееоснование$(A, K)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование. Выражения "верхнийуровень(A, K)" и "нижнийуровень(A, K)" уже встречаются в посылках. Уровень срабатывания равен 3.

(m) Объем полушара.

$\forall_{ABKa}$(шар(A) & прямкоорд(K) & центр(B, A) & крд$(B, K, 3) = a \to$ объем(set$_x(x \in A$ & крд$(x, K, 3) \leq a)) = 2\pi($радиус$(A))^3/3)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, последний - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

(n) Координаты левой и правой граней куба.

$\forall_{ACDEFKa}$(куб(A) & грань(фигура$(CDEF), A)$ & вперед(вектор$(CF), K)$ & вверх(вектор$(CD), K)$ & $l(CF) = a$ & прямкоорд$(K) \to$ коорд(фигура$(CDEF), K) =$ set$_{xyz}(x =$ крд$(C, K, 1)$ & $y -$ число & крд$(C, K, 2) \leq y$ & $y \leq$ крд$(C, K, 2) + a$ & $z -$ число & крд$(C, K, 3) \leq z$ & $z \leq$ крд$(C, K, 3) + a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Два первых и два последних антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Допускаются циклические перестановки вершин грани. Уровень срабатывания равен 3.

(o) Усмотрение вертикального расположения оснований цилиндра.

$\forall_{ABCDEFGK}$(цилиндр(A) & прямкоорд(K) & основание(Круг$(BCD), A)$ & основание(Круг$(EFG), A)$ & вправо(вектор$(BE), K) \to$ Вертплоск(плоскость$(BCD), K)$ & Вертплоск(плоскость$(EFG), K))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний - обрабатывается проверочным оператором. Указатели "смравно" допускают косвенную идентификацию выражений "Круг$(\ldots)$" через равенства в посылках. Уровень срабатывания равен 2.

(p) Верхнее либо нижнее основание тела - его основание.

$\forall_{abc}$(нижнееоснование$(a, b) = c \to$ основание$(c, a))$

$\forall_{abc}$(верхнееоснование$(a, b) = c \to$ основание$(c, a))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

(q) Выражение высоты верхнего основания из линейного уравнения.

$\forall_{AKabc}(\neg(a = 0) \to a \cdot$Высотаповерхн(верхнееоснование$(A, K), K) + b = c \leftrightarrow$ Высотаповерхн(верхнееоснование$(A, K), K) = (c - b)/a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит неизвестных. Выражение c не имеет заголовка "Высотаповерхн". Левая часть заменяющего утверждения не входит в выражения b, c. Уровень срабатывания равен 2.

(r) Пересечение куба с полуплоскостью.

$\forall_{BDHKMNPQRSabdpq}$(куб$(D)$ & грань(фигура$(MNPQ), D)$ & вверх(вектор$(MN), K)$ & вперед(вектор$(MQ), K)$ & крд$(M, K, 1) = p$ &

$\text{крд}(M,K,2) = q \ \& \ B \cap \text{фигура}(MNPQ) = \text{фигура}(MRSQ) \ \&$
$\text{верхнийслой}(B,K) = \text{точки}(\text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \&$
$ax + bz - d = 0), K) \cap D \rightarrow \text{коорд}(R,K) = (p, q, (d - ap)/b) \ \& \ \text{коорд}(S,K) =$
$(p, q + l(MN), (d - ap)/b) \ \& \ 0 \leq b(d - ap) \ \& \ (d - ap)/b \leq l(MN))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и последние два идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Пятый, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Допускаются циклические перестановки вершин рассматриваемых четырехугольников и изменение их порядка на обратный. Уровень срабатывания равен 3.

(s) Куб, ориентированный вдоль оси OZ, является цилиндрическим телом.

$\forall_{KPQRSab}(\text{куб}(a) \ \& \ \text{грань}(b,a) \ \& \ b = \text{фигура}(PQRS) \ \&$
$\text{вверх}(\text{вектор}(PQ), K) \rightarrow \text{цилиндричтело}(a, K))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Указатель "возмравно" разрешает альтернативную обработку третьего антецедента в режиме указателя "идентификатор". Допускаются циклические перестановки вершин грани и изменение их порядка на противоположный. Уровень срабатывания приема равен 1.

13. Алгебраические преобразования соотношений с координатами.

(a) Приведение подобных членов.

Приемы этого пункта имеют заголовок "второйтерм".

$\forall_{Kabimkpq}((m \cdot \text{крд}(a,K,i) + b)/k + p \cdot \text{крд}(a,K,i)/q =$
$((mq + pk)\text{крд}(a,K,i) + bq)/(kq))$

Выражения k, m, p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Kabcdei}(a(b + c \cdot \text{крд}(d,K,i)) + e \cdot \text{крд}(d,K,i) = ab + (ac + e)\text{крд}(d,K,i))$

Выражения a, c, e не содержат символа "крд". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabcimkpq}((a \cdot \text{крд}(m,K,i) + p)/b + (c \cdot \text{крд}(m,K,i) + q)/d =$
$((ad + bc)\text{крд}(m,K,i) + pd + qb)/(bd))$

Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kabcdim}(a \cdot \text{крд}(m,K,i)/b + c \cdot \text{крд}(m,K,i)/d = (a/b + c/d)\text{крд}(m,K,i))$

Выражения a, b, c, d не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Выражение координаты из линейного уравнения.

Все приемы этого пункта имеют заголовок "второйтерм" и применяются в задачах на исследование.

$\forall_{Kabci}(\neg(a = 0) \rightarrow a \cdot \text{крд}(c,K,i) + b = d \leftrightarrow \text{крд}(c,K,i) = (d - b)/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение b не содержит неизвестных. Выражения a, d не имеют невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии приема.

Первая срабатывает на уровне 3. В ней требуется лишь, чтобы выражение b не содержало символа "крд", выражение d не содержало неизвестных, а выражение a не имело невырожденных числовых атомов. Вторая версия срабатывает на уровне 5. В ней требуется, чтобы выражения b, d не содержали символа "крд", а выражение a - не имело невырожденных числовых атомов.

$\forall_{Kabip}(\text{крд}(a, K, i) - \text{крд}(b, K, i) = p \leftrightarrow \text{крд}(a, K, i) = \text{крд}(b, K, i) + p)$

Выражение p не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKabci}(\neg(a = 0) \to a \cdot \text{крд}(A, K, i) + b = c \cdot \text{крд}(B, K, i) + d \leftrightarrow$
$\text{крд}(A, K, i) = (c \cdot \text{крд}(B, K, i) + d - b)/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Kacdi}(\neg(a = 0) \to a \cdot \text{крд}(c, K, i) = d \leftrightarrow \text{крд}(c, K, i) = d/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, d не содержат символа "крд". Выражение d не имеет невырожденных числовых атомов, кроме, быть может, атомов с заголовком "масса". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABKcdi}((\neg(d = 0) \ \vee \ \neg(c = 0)) \to (\text{крд}(A, K, i) - \text{крд}(B, K, i))c = d \leftrightarrow$
$\text{крд}(A, K, i) = \text{крд}(B, K, i) + d/c)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Существует еще одна посылка, содержащая выражения "крд(A, K, i)" и "крд(B, K, i)". Выражение c не имеет невырожденных числовых атомов. Выражение d не содержит символа "крд". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKabci}(\neg(a = 0) \to a \cdot \text{крд}(A, K, i) = b \cdot \text{крд}(B, K, i) = c \leftrightarrow$
$\text{крд}(A, K, i) = (c - b \cdot \text{крд}(B, K, i))/a)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Каждое из выражений a, b, c либо не содержит неизвестных, либо имеет тип "внешнеизв". Уровень срабатывания равен 8.

(c) Линейная комбинация уравнений для получения соотношения пропорциональности.

$\forall_{Kabcdei}(a \cdot \text{крд}(b, K, i) + c = 0 \to d \cdot \text{крд}(b, K, i) + c = 0 \leftrightarrow$
$a \cdot \text{крд}(b, K, i) = -d\text{крд}(e, K, i))$

Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с другой посылкой. Выражения a, d не содержат невырожденных числовых атомов, а выражение c - содержит. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Линейная комбинация уравнений для исключения выражений с координатами.

$\forall_{Kabcdipqr}(\neg(b = 0) \ \& \ a + b(\text{крд}(d, K, i))^2 = c \to p + q(\text{крд}(d, K, i))^2 = r \leftrightarrow$
$pb + qc - aq - br = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование. Второй антецедент идентифицируется с другой посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов, не входящих в преобразуемое уравнение. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{Kabcdefmnpq}(pn - qm = 0 \ \& \ p \cdot \text{крд}(a, K, i) + q \cdot \text{крд}(b, K, i) + c = d \ \&$
$\neg(q = 0) \to m \cdot \text{крд}(a, K, i) + n \cdot \text{крд}(b, K, i) + e = f \leftrightarrow cn - eq - dn + fq = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент идентифицируется с другой посылкой. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Заменяющее уравнение не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 8.

(e) Ориентация равенства.

$\forall_{Kabi}(a = \text{крд}(b, K, i) \leftrightarrow \text{крд}(b, K, i) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "исключ". Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение "крд(b, K, i)" содержит несущественные неизвестные, а выражение a - не содержит. Преобразованное условие помечается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

14. Проверочный оператор "усмвниз".

Приемы этого и нижеследующих проверочных операторов, связанных с конкретными направлениями вдоль осей координат, в основном, относятся к элементарной физике.

(a) Скорость при броске.

$\forall_{KTapqr}(\text{бросок}(a, T) \ \& \ \text{поверхнземли}(K) \ \& \ T = [p, q] \ \& \ r \in T \ \&$
$\text{вниз}(\text{Скорость}(a, K, p)) \to \text{вниз}(\text{Скорость}(a, K, r), K))$

$\forall_{KTapqr}(\text{бросок}(a, T) \ \& \ \text{поверхнземли}(K) \ \& \ T = [p, q] \ \& \ r \in T \ \&$
$\text{Скорость}(a, K, p) = \text{вектор0} \to \text{вниз}(\text{Скорость}(a, K, r), K))$

Утверждение "бросок(a, T)" означает, что тело a на протяжении промежутка T движется под действием только силы тяжести. Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Учет однонаправленности.

$\forall_{Kab}(\text{однонаправлены}(a, b) \ \& \ \text{вниз}(b, K) \to \text{вниз}(a, K))$

$\forall_{Kab}(\text{однонаправлены}(-a, b) \ \& \ \text{вверх}(b, K) \to \text{вниз}(a, K))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Минус - вектор.

$\forall_{Ka}(\text{вверх}(a, K) \to \text{вниз}(-a, K))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABK}(\text{вверх}(\text{вектор}(AB), K) \to \text{вниз}(\text{вектор}(BA), K))$

Антецедент идентифифируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

(d) Направление силы тяжести.

$\forall_{Kat}$(поверхнземли$(K) \to$ вниз(сила$(a,K,t),K)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

(e) Нормальная реакция для двух точек.

$\forall_{Kabt}$(лежитна(a,b,t) & мточка(b) & поверхнземли$(K) \to$ вниз(нормреакция$(b,a,t),K)$)

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabt}$(лежитна(a,b,T) & $t \in T$ & мточка(b) & поверхнземли$(K) \to$ вниз(нормреакция$(b,a,t),K)$)

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Центр тяжести стержня.

$\forall_{BCDabcdt}$(стержень(a) & концы$(a) = \{b,c\}$ & центртяжести(d,a) & Место$(b,t) = B$ & Место$(c,t) = D$ & вниз(вектор$(BC),K) \to$ вниз(вектор$(BD),K)$)

Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Выделение момента во временном промежутке.

$\forall_{KTabt}$(вниз(сила$(a,b,T),K)$ & $t \in T \to$ вниз(сила$(a,b,t),K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(h) Сумма векторов.

$\forall_{Kab}$(вниз(a,K) & вниз$(b,K) \to$ вниз$(a+b,K)$)

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "дистрибразвертка" обеспечивает одновременную обработку любого числа слагаемых. Уровень срабатывания равен 2.

15. Проверочный оператор "усмвправо".

(a) Учет однонаправленности.

$\forall_{Kab}$(однонаправлены(a,b) & вправо$(b,K) \to$ вправо(a,K))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором.

(b) Минус - вектор.

$\forall_{Ka}$(влево$(a,K) \to$ вправо$(-a,K)$)

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABK}$(влево(вектор$(AB),K) \to$ вправо(вектор$(BA),K)$)

Антецедент идентифифируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

(c) Направление силы тяги.

$\forall_{Kabt}$(тянет(a,b,t) & вправо(Скорость$(b,K,t),K)$ & неподв(K,t) $\rightarrow$ вправо(сила$(b,a,t),K)$)

Утверждение "тянет(a,b,X)" означает, что в течение промежутка времени X либо в момент X вектор силового воздействия объекта a на объект b направлен от b к a, причем тело b движется в направлении этого вектора. Далее буквой T обозначаются временные промежутки, буквой t - моменты времени.

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabt}$(тянет(a,b,T) & вправо(Скорость$(b,K,t),K)$ & неподв(K,t) & $t \in T \rightarrow$ вправо(сила$(b,a,t),K)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kab}$(тянет(a,b,T) & движвправо(b,K,T) & неподв(K,T) $\rightarrow$ вправо(сила$(b,a,T),K)$)

Утверждение "движвправо(b,K,T)" означает, что материальная точка b на временном промежутке T движется вправо в системе координат K. Величина скорости движения может изменяться произвольным образом, оставаясь положительной.

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Скорость при движении вправо.

$\forall_{KTat}$(движвправо(a,K,T) & $t \in T \rightarrow$ вправо(Скорость$(a,K,t),K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Использование посылки.

$\forall_{ABCK}$(вправо(вектор$(AB),K)$ & вправо(вектор$(BC),K)$ $\rightarrow$ вправо(вектор$(AC),K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Точка отрезка.

$\forall_{ABCK}$($A \in$ отрезок(BC) & вправо(вектор$(BC),K)$ $\rightarrow$ вправо(вектор$(BA),K)$)

$\forall_{ABCK}$($A \in$ отрезок(BC) & вправо(вектор$(BC),K)$ $\rightarrow$ вправо(вектор$(AC),K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

16. Проверочный оператор "усмвлево".

(a) Учет однонаправленности. Аналогично оператору "усмвправо".

(b) Минус - вектор. Аналогично оператору "усмвправо".

(c) Направление силы тяги.

$\forall_{Kabt}$(тормозит(a, b, t) & вправо(Скорость$(b, K, t), K)$ & неподв$(K, t) \rightarrow$ влево(сила$(b, a, t), K)$)

Утверждение "тормозит(a, b, X)" означает, что на протяжении периода времени X либо в момент X сила воздействия объекта a на объект b направлена противоположно скорости объекта b.

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabt}$(тормозит(a, b, T) & вправо(Скорость$(b, K, t), K)$ & неподв(K, t) & $t \in T \rightarrow$ влево(сила$(b, a, t), K)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Сила, действующая со стороны упругой связи.

$\forall_{KTabct}$(упругсвязь(a, b, c, T) & $t \in T$ & $0 \leq$ удлинсвязи(c, t) & вправо(вектор(Место(a, t)Место$(b, t)), K) \rightarrow$ влево(сила$(b, a, t), K)$)

Утверждение "упругсвязь(a, b, c, X)" означает, что материальные точки a и b в течение промежутка X либо в момент X соединены упругим соединением c. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Точка отрезка.

$\forall_{ABCK}(A \in$ отрезок(BC) & вправо(вектор$(BC), K) \rightarrow$ влево(вектор$(CA), K)$)

$\forall_{ABCK}(A \in$ отрезок(BC) & вправо(вектор$(BC), K) \rightarrow$ влево(вектор$(AB), K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

17. Проверочный оператор "усмвверх".

(a) Учет однонаправленности. Аналогично оператору "усмвправо".

(b) Минус - вектор. Аналогично оператору "усмвправо".

(c) Нормальная реакция для двух точек.

$\forall_{Kabt}$(лежитна(a, b, t) & мточка(b) & поверхнземли$(K) \rightarrow$ вверх(нормреакция$(a, b, t), K)$)

Утверждение "лежитна(a, b, X)" означает, что в течение промежутка времени X либо в момент X материальная точка a неподвижно лежит на ориентированной материальной поверхности либо на материальной точке b. Если X - момент времени, то ускорение точки относительно поверхности в этот момент равно 0.

Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{KTabt}$(лежитна(a, b, T) & $t \in T$ & мточка(b) & поверхнземли$(K) \rightarrow$ вверх(нормреакция$(a, b, t), K)$)

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Центр тяжести стержня.

$\forall_{BCDabcdt}$(стержень(a) & концы$(a) = \{b, c\}$ & центртяжести(d, a) & Место$(b, t) = B$ & Место$(c, t) = C$ & Место$(d, t) = D$ & вверх(вектор$(BC), K) \rightarrow$ вверх(вектор$(BD), K)$)

$\forall_{BCDabcdt}$(стержень(a) & концы$(a) = \{b, c\}$ & центртяжести(d, a) & Место$(b, t) = B$ & Место$(c, t) = C$ & Место$(d, t) = D$ & вверх(вектор$(CB), K) \rightarrow$ вверх(вектор$(DB), K)$)

Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками, седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Нормальная реакция при движении по горизонтальной поверхности.

$\forall_{Tab}$(движениепо(a, b, T) & горизповерхн$(b, K, T) \rightarrow$ вверх(нормреакция$(a, b, T), K)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Выделение момента во временном промежутке.

$\forall_{KTabt}$(вверх(сила$(a, b, T), K)$ & $t \in T \rightarrow$ вверх(сила$(a, b, t), K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Сила противодействия.

$\forall_{Kabt}$(вниз(сила$(a, b, t), K) \rightarrow$ вверх(сила$(b, a, t), K)$)

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(h) Учет принадлежности вертикальному отрезку.

$\forall_{ABCK}$(вниз(вектор$(AB), K)$ & $C \in$ отрезок$(AB) \rightarrow$ вверх(вектор$(CA), K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

18. Проверочный оператор "усмвперед".

Кроме предполагаемого по умолчанию приема непосредственного усмотрения, оператор имеет лишь прием "учет однонаправленности", аналогичный рассмотренным выше.

19. Нормализатор общей стандартизации "нормнижнийуровень".

Единственный прием - использование равенства из посылок:

$\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем не допускается перестановка частей равенства. Выражение a имеет заголовок "нижнийуровень" и не входит в выражение b. Уровень срабатывания равен 1.

20. Нормализатор обшей стандартизации "нормверхнийуровень".

Аналогично предыдущему.

21. Нормализатор общей стандартизации "нормвысотаповерхн".

    Аналогично предыдущему.

Сферические и цилиндрические координаты

1. Расстояние от начала координат до точки.

   $\forall_{AKPQRSabc}($сферкоорд$(A,K)=(a,b,c)\ \&\ K=(P,Q,R,S)\rightarrow l(AP)=a)$

   $\forall_{AKPQRSabc}($цилкоорд$(A,K)=(a,b,c)\ \&\ K=(P,Q,R,S)\rightarrow l(AP)=\sqrt{a^2+c^2})$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "$l(AP)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приемов равен 2.

2. Угол между лучами, выходящими из начала координат и проходящими через заданные точки.

   $\forall_{ABKPQRSabcdef}($прямкоорд$(K)\ \&$ сферкоорд$(A,K)=(a,b,c)\ \&$ сферкоорд$(B,K)=(d,e,f)\ \&\ K=(P,Q,R,S)\rightarrow\cos(\angle(APB))=\cos c\cdot\cos f\cdot\cos(b-e)+\sin c\cdot\sin f)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$\angle(APB)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 4.

3. Переход от прямоугольных координат к сферическим.

   $\forall_{AKabcdef}($прямкоорд$(K)\ \&$ коорд$(A,K)=(a,b,c)\ \&$ сферкоорд$(A,K)=(d,e,f)\rightarrow d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \&\ f=\arcsin(c/\sqrt{a^2+b^2+c^2})\ \&\ \cos e=a/\sqrt{a^2+b^2}\ \&\ \sin e=b\sqrt{a^2+b^2})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 3.

4. Переход от сферических координат к прямоугольным.

   $\forall_{AKabc}($прямкоорд$(K)\ \&$ сферкоорд$(A,K)=(a,b,c)\rightarrow$ коорд$(A,K)=(a\cos c\cdot\cos b,a\cos c\cdot\sin b,a\sin c))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(A,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 3.

5. Переход от прямоугольных координат к цилиндрическим.

   $\forall_{AKabcdef}($прямкоорд$(K)\ \&$ коорд$(A,K)=(a,b,c)\ \&$ цилкоорд$(A,K)=(d,e,f)\rightarrow d=\sqrt{a^2+b^2}\ \&\ sine=b/\sqrt{a^2+b^2}\ \&\ \cos e=a\sqrt{a^2+b^2}\ \&\ c=f)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 3.

6. Переход от цилиндрических координат к прямоугольным.

   $\forall_{AKabc}$(прямкоорд(K) & цилкоорд$(A,K) = (a,b,c) \to$ коорд$(A,K) =$
   $(a\cos b, a\sin b, c))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(A,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 3.

7. Ввод координатного набора.

   $\forall_{DKabcd}$(сферкоорд$(D,K) = a \to b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
   $a = (b,c,d)$ & $0 \leq b$ & $0 < \pi + c$ & $0 \leq \pi - c$ & $0 \leq \pi/2 + d$ & $0 \leq \pi/2 - d)$

   $\forall_{DKabcd}$(цилкоорд$(D,K) = a \to b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
   $a = (b,c,d)$ & $0 \leq b$ & $0 < \pi + c$ & $0 \leq \pi - c)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, причем выражение a не имеет заголовка "набор". Отсутствует посылка вида "равно(a набор(...))", а также посылка, определяющая координатный набор точки D в какой-либо другой системе координат. Уровень срабатывания равен 3.

1.3.3 Координаты множества точек

1. Равенство двух множеств, заданных через координаты своих точек.

   $\forall_{ABK}$(точки$(A,K) =$ точки$(B,K) \leftrightarrow A = B)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Явное выражение множества точек через множество координат этих точек.

   $\forall_{ABKm}$(коорд$(A,K) = m \to A =$ точки$(m,K))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание. Антецедент идентифицируется с другим условием, причем точка привязки выбрана в нем. Выражение A содержит несущественную неизвестную y, не входящую в m и K. Задача имеет цель (класс P Q), причем y входит в Q. Напомним, что данная цель указывает на необходимость переформулировки условия принадлежности некоторому классу набора значений переменных списка P, первоначально заданному через параметры списка Q. Заменяемое выражение не является операндом отношения "параллельны" либо "перпендикулярно". Уровень срабатывания равен 3.

3. Ввод комментария "нормкоорд" к уравнению для координат множества точек.

   $\forall_{ABK}$(коорд$(A,K) = \mathrm{set}_x(B(x)) \to \emptyset)$

   Прием имеет заголовок "замечание". Антецедент идентифицируется с посылкой, не имеющей комментария "нормкоорд", и прием вводит такой комментарий. Этот комментарий блокирует попытки явного разрешения описателя "класс" относительно переменных связывающей приставки, ненужные для уравнений кривых и поверхностей, имеющих стандартный вид. Переменная B - функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

4. Ориентация равенства, определяющего множество точек с заданными координатами.

   Все приемы этого пункта имеют заголовок "второйтерм" и применяются к равенству в посылках. После преобразования это равенство снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровни срабатывания равны 0.

   $\forall_{Kab}(b = \text{точки}(a, K) \leftrightarrow \text{точки}(a, K) = b)$

   Перестановка частей преобразуемого равенства при идентификации не допускается. Переменная b идентифицируется с переменной.

   $\forall_{Kabc}(\text{точки}(a, K) = b \rightarrow b = c \leftrightarrow c = b)$

   Прием применяется к посылке задачи на исследование, имеющей цель "точки". Эта цель означает, что требуется получить бескоординатное описание некоторого множества точек. Перестановка частей преобразуемого равенства при идентификации не допускается. Антецедент идентифицируется с другой посылкой. Переменная b идентифицируется с переменной, переменная c - с выражением, отличным от переменной и не содержащим b.

   $\forall_{AKa}(a = \text{коорд}(A, K) \leftrightarrow \text{коорд}(A, K) = a)$

   Выражение a имеет заголовок "класс". Либо отсутствует комментарий "ориентацияравенства", либо в исходной ситуации a расположено слева.

   $\forall_{AKa}(a = \text{полкоорд}(A, K) \leftrightarrow \text{полкоорд}(A, K) = a)$

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{abc}(b = \text{ориенткривой}(a, c) \leftrightarrow \text{ориенткривой}(a, c) = b)$

   Перестановка частей преобразуемого равенства при идентификации не допускается. Переменная b идентифицируется с переменной.

5. Переход от явного задания множества точек через координаты к заданию множества координат этих точек.

   $\forall_{ABK}(A = \text{точки}(B, K) \leftrightarrow \text{коорд}(A, K) = B)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Обычно - при общем анализе свойств кривой либо поверхности, заданной уравнением. Выражение B имеет заголовок "класс". Переменная A идентифицируется с неизвестной (обозначает исследуемую кривую либо поверхность). Уровень срабатывания равен 3.

6. Переход к уже введенному обозначению для множества, заданного через координаты точек.

   $\forall_{ABK}(\text{коорд}(B, K) = A \rightarrow \text{точки}(A, K) = B)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Прием блокируется для условий задачи на описание, имеющих комментарий (выражения B). Такой комментарий указывает на тенденцию к исключению терма B из условий. Уровень срабатывания равен 1.

7. Конечный список точек.

   $\forall_{ABKab}(\text{коорд}(A, K) = a \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow B \in \text{точки}(\{a; b\}, K) \leftrightarrow$
   $B \in \text{точки}(\{; b\}, K))$

Прием имеет заголовок "поройтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{AKa}(A \in \text{точки}(\{a\}, K) \leftrightarrow \text{коорд}(A, K) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{AKan}(\text{коорд}(A, K) = \{; \lambda_i(a(i), i \in \{1, \dots, n\})\} \leftrightarrow$
$A = \{; \lambda_i(\text{тчкоорд}(K, a(i)), i \in \{1, \dots, n\})\})$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "исследовать". Переменная a - функциональная. Описатель "отображение" идентифицируется и выписывается в виде конечных наборов. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABK}(\text{конечное}(A) \rightarrow S(\text{точки}(A \times B, K)) = 0)$

$\forall_{ABK}(\text{конечное}(B) \rightarrow S(\text{точки}(A \times B, K)) = 0)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

8. Подстановка бескоординатного описания множества точек.

   $\forall_{Kabcd}(a = \text{точки}(b, K) \ \& \ a = c \rightarrow a \cap d = c \cap d)$

   $\forall_{Kabcd}(a = \text{точки}(b, K) \ \& \ a = c \rightarrow a \cup d = c \cup d)$

   $\forall_{Kabcd}(a = \text{точки}(b, K) \ \& \ a = c \rightarrow a \setminus d = c \setminus d)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются в задаче на исследование, имеющей цель "точки". Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменная a идентифицируется с переменной, переменная c - с выражением, не являющимся переменной и не содержащим символа "точки". Уровень срабатывания равен 4.

9. Теоретико - множественные операции.

   $\forall_{ABK}(\text{коорд}(A \setminus B, K) = \text{коорд}(A, K) \setminus \text{коорд}(B, K))$

   $\forall_{ABK}(\text{коорд}(A \cup B, K) = \text{коорд}(A, K) \cup \text{коорд}(B, K))$

   $\forall_{ABK}(\text{коорд}(A \cap B, K) = \text{коорд}(A, K) \cap \text{коорд}(B, K))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение не является операндом равенства. Уровень срабатывания равен 2.

10. Точка, принадлежащая пересечению двух множеств, заданных через координаты.

    $\forall_{AKPQa}(\text{set}_x(P(x) \ \& \ Q(x)) = a \rightarrow A \in \text{точки}(\text{set}_x(P(x)), K) \ \&$
    $A \in \text{точки}(\text{set}_x(Q(x)), K) \leftrightarrow A \in \text{точки}(a, K))$

    Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)". Конъюнктивные члены левой части эквивалентности идентифицируются с посылками. Переменные P, Q функциональные. Указатели "смравно" разрешают косвенную идентификацию выражений "точки(...)" через равенства в посылках. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Конъюнкция под описателем "класс" разрешается с помощью задачи на описание относительно неизвестной x. После этого сам описатель упрощается с помощью задачи на преобразование, решаемой до максимального уровня 4. Результат a не содержит кванторов и описателей. Уровень срабатывания равен 3.

11. Отождествление множеств точек с одинаковыми координатами.

    $\forall_{ABKa}$(коорд$(A, K) = a$ & коорд$(B, K) = a \rightarrow A = B)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражение a имеет заголовок "класс". Уровень срабатывания равен 0.

12. Попытка определить координаты одного из операндов пересечения множеств, если другой операнд задан в координатах.

    $\forall_{AFGK}$(коорд$(A, K) = \mathrm{set}_y(G(y)) \rightarrow A \cap$ точки$(\mathrm{set}_x(F(x)), K) =$ точки$(\mathrm{set}_x(F(x)$ & $G(x)), K))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на исследование. Переменные F, G функциональные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкоорд". Уровень срабатывания равен 4.

13. Разбор случаев по условному выражению, задающему координаты множества точек.

    $\forall_{ABCKP}$((точки(A, K) при P, иначе точки$(B, K)) = C \rightarrow P \ \vee \ \neg(P))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, причем выражение P содержит неизвестные. Выведенная дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 4.

1.3.4 Пакетные операторы, связанные с координатами

Нормализатор общей стандартизации "нормкоорд"

Как и всякий нормализатор общей стандартизации, данный нормализатор является корневым, т.е. его приемы применяются непосредственно к преобразуемому терму, а не к его собственным подтермам.

1. Использование равенства из посылок.

    $\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$

    Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "коорд" и не входит в выражение b. Уровень срабатывания равен 1.

2. Начало координат.

    $\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \rightarrow$ коорд$(A, K) = (0, 0))$

    $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \rightarrow$ коорд$(A, K) = (0, 0))$

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

3. Координатные оси.

    $\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \rightarrow$ коорд$(C, K) = (0, 1))$

    $\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \rightarrow$ коорд$(B, K) = (1, 0))$

$\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow \text{коорд}(C,K) = (0,1,0))$

$\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow \text{коорд}(B,K) = (1,0,0))$

$\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow \text{коорд}(D,K) = (0,0,1))$

$\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AC),K) = (0,1))$

$\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB),K) = (1,0))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приемов равен 1.

$\forall_{ABCDKab}(K = (A,B,C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,D)\ \&$
$l(AD) = a\ \&\ l(AB) = b\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow \text{коорд}(D,K) = (a/b,0))$

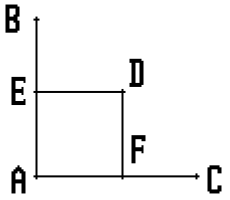
$\forall_{ABCDKab}(K = (A,B,C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{точкалуча}(A,C,D)\ \&$
$l(AD) = a\ \&\ l(AC) = b\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow \text{коорд}(D,K) = (0,a/b))$

$\forall_{ABCDKab}(K = (A,B,C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BD)\ \&$
$l(AD) = a\ \&\ l(AB) = b\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow \text{коорд}(D,K) = (-a/b,0))$

$\forall_{ABCDKab}(K = (A,B,C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A \in \text{отрезок}(CD)\ \&$
$l(AD) = a\ \&\ l(AC) = b\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow \text{коорд}(D,K) = (0,-a/b))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм", четвертый и пятый - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a,b не содержат символа "расстояние". Уровень срабатывания равен 2.

4. Координаты точки, из которой опущены координаты на оси.



$\forall_{ABCDEFK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&$
$E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$l(AE) = a\ \&\ l(AF) = b\ \&\ \text{точкалуча}(A,F,C)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,E) \rightarrow$
$\text{коорд}(D,K) = (a,b))$

$\forall_{ABCDEFK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&$
$E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$l(AE) = a\ \&\ l(AF) = b\ \&\ A \in \text{отрезок}(CF)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,E) \rightarrow$
$\text{коорд}(D,K) = (a,-b))$

$\forall_{ABCDEFK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&$
$E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$l(AE) = a\ \&\ l(AF) = b\ \&\ A \in \text{отрезок}(CF)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BE) \rightarrow$
$\text{коорд}(D,K) = (-a,-b))$

$\forall_{ABCDEFK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&$
$E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$l(AE) = a\ \&\ l(AF) = b\ \&\ \text{точкалуча}(A,F,C)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BE) \rightarrow$
$\text{коорд}(D,K) = (-a,b))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Антецеденты с третьего по шестой, а также два последних выделены указателем "усм". Седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат неизвестных. В список посылок текущей задачи входит указатель "планиметрия". Уровень срабатывания равен 3.

5. Координаты нулевого вектора.

   $\forall_K(\text{коорд}(\text{вектор}0, K) = (0, 0, 0))$

   Имеется посылка вида "$\text{коорд}(x, K) = (a, b, c)$". Уровень срабатывания равен 1.

6. Координаты минус - вектора.

   $\forall_{AKab}(\text{коорд}(A, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(-A, K) = (-a, -b))$

   $\forall_{AKabc}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow \text{коорд}(-A, K) = (-a, -b, -c))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABKab}(\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(BA), K) = (-a, -b))$

   $\forall_{ABCKab}(\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b, c) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(BA), K) = (-a, -b, -c))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

7. Координаты суммы векторов.

   $\forall_{ABKabcd}(\text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(A + B, K) = (a + c, b + d))$

   $\forall_{ABKabcdef}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, e)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d, f) \rightarrow \text{коорд}(A + B, K) = (a + c, b + d, e + f))$

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCKabcdef}(C = A + B\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b, e)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d, f) \rightarrow \text{коорд}(C, K) = (a + c, b + d, e + f))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCK}(\text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(CB), K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a + c, b + d))$

   $\forall_{ABCK}(\text{коорд}(\text{вектор}(CA), K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(CB), K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (c - a, d - b))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCKabv}(v = a \cdot \text{вектор}(AB) + b \cdot \text{вектор}(AC)\ \&\ K = (A, B, C) \rightarrow \text{коорд}(v, K) = (a, b))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

8. Координаты вектора через координаты концов.

   $\forall_{ABKabcd}(\text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (c - a, d - b))$

$\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A,K) = (a,b,c)$ & коорд$(B,K) = (d,e,f) \rightarrow$ коорд(вектор$(AB),K) = (d-a, e-b, f-c)$)

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKabcdp}$(вектор$(AB) = p$ & коорд$(A,K) = (a,b)$ & коорд$(B,K) = (c,d) \rightarrow$ коорд$(p,K) = (c-a, d-b)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A,K) = (a,b,c)$ & крд$(B,K,1) - a = d$ & крд$(B,K,2) - b = e$ & крд$(B,K,3) - c = f \rightarrow$ коорд(вектор$(AB),K) = (d,e,f)$)

$\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(B,K) = (a,b,c)$ & $a -$ крд$(B,K,1) = d$ & $b -$ крд$(B,K,2) = e$ & $c -$ крд$(B,K,3) = f \rightarrow$ коорд(вектор$(AB),K) = (d,e,f)$)

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Хотя бы одно из выражений a,b,c содержит символ "крд". Выражения d,e,f не содержат символа "крд". Уровень срабатывания равен 3.

9. Координаты вектора, пропорционального данному.

   $\forall_{AKabd}$(коорд$(A,K) = (a,b) \rightarrow$ коорд$(dA,K) = (ad,bd)$)

   $\forall_{AKabcd}$(коорд$(A,K) = (a,b,c) \rightarrow$ коорд$(dA,K) = (ad,bd,cd)$)

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

10. Координаты прямой.

    (a) Оси координат.

    $\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \rightarrow$ коорд(прямая$(AC),K) = \mathrm{set}_{xy}(x = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

    $\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB),K) = \mathrm{set}_{xy}(y = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

    $\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow$ коорд(прямая$(AD),K) =$ set_{xyz}(пропорцнаборы$((x,y,z),(0,0,1))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число))

    $\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow$ коорд(прямая$(AC),K) =$ set_{xyz}(пропорцнаборы$((x,y,z),(0,1,0))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число))

    $\forall_{ABCDK}(K = (A,B,C,D) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB),K) =$ set_{xyz}(пропорцнаборы$((x,y,z),(1,0,0))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число))

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приемов равен 2.

    (b) Прямая, проходящая через две точки с известными координатами.

    $\forall_{ABCDKabcd}(C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & коорд$(C,K) = (a,b)$ & коорд$(D,K) = (c,d)$ & разныеточки$(C,D) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB),K) =$ $\mathrm{set}_{xy}((d-b)x + (a-c)y + cb - ad = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

    Первые два антецедента выделены указателем "усм", следующие два - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием применяется только при наличии комментария "класс". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKabcdef}$(коорд$(A,K)=(a,b,c)$ & коорд$(B,K)=(d,e,f)$ & разныеточки$(A,B)\to$ коорд(прямая$(AB),K)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x-a,y-b,z-c),(d-a,e-b,f-c))$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Существует посылка вида "равно(коорд(X,Y) набор(u,v,w))". Выражения a,b,c,d,e,f не содержат неизвестных.Уровень срабатывания равен 3.

(c) Стандартизация уравнения прямой.

$\forall_{ab}(\mathrm{set}_{xy}(y=ax/b$ & $x-$число$)=\mathrm{set}_{xy}(ax-by=0$ & $x-$число & $y-$число$))$

$\forall_{ab}(\mathrm{set}_{yx}(y=ax/b$ & $x-$число$)=\mathrm{set}_{yx}(ax-by=0$ & $x-$число & $y-$число$))$

Уровень срабатывания равен 1.

11. Координатные плоскости.

$\forall_{ABCDK}(K=(A,B,C,D)\to$ коорд(плоскость$(ABC),K)=\mathrm{set}_{xyz}(z=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

$\forall_{ABCDK}(K=(A,B,C,D)\to$ коорд(плоскость$(ABD),K)=\mathrm{set}_{xyz}(y=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

$\forall_{ABCDK}(K=(A,B,C,D)\to$ коорд(плоскость$(ACD),K)=\mathrm{set}_{xyz}(x=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

Уровень срабатывания равен 1.

12. Восстановление условия на тип значения связанной переменной.

$\forall_a(a-$число $\to\mathrm{set}_{xy}(x=a$ & $y-$число$)=\mathrm{set}_x y(x-a=0$ & $x-$число & $y-$число$))$

$\forall_a(a-$число $\to\mathrm{set}_{yx}(x=a$ & $y-$число$)=\mathrm{set}_y x(x-a=0$ & $x-$число & $y-$число$))$

$\forall_{Aa}(a-$ число $\to\mathrm{set}_{xyz}(x=a$ & $A(y,z)$ & $y-$ число & $z-$ число$)=\mathrm{set}_{xyz}(x-a=0$ & $A(y,z)$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$))$

$\forall_{Aa}(a-$ число $\to\mathrm{set}_{xyz}(y=a$ & $A(x,z)$ & $x-$ число & $z-$ число$)=\mathrm{set}_{xyz}(y-a=0$ & $A(x,z)$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$))$

$\forall_{Aa}(a-$ число $\to\mathrm{set}_{xyz}(z=a$ & $A(x,y)$ & $x-$ число & $y-$ число$)=\mathrm{set}_{xyz}(z-a=0$ & $A(x,y)$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная A функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

13. Переход от задания прямой в виде пересечения двух плоскостей к каноническому заданию.

$\forall_{abcde}(\neg(b=0)$ & $\neg(e=0)\to\mathrm{set}_{xyz}(ex+a=0$ & $by+cz+d=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a/e,y+d/b,z),(0,-c,b))$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

$\forall_{abcde}(\neg(b=0)$ & $\neg(e=0)\to\mathrm{set}_{xyz}(ez+a=0$ & $bx+cy+d=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+d/b,y,z+a/e),(-c,b,0))$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

$\forall_{abcde}(\neg(b=0)$ & $\neg(e=0)\to\mathrm{set}_{xyz}(ey+a=0$ & $bx+cz+d=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+d/b,y+a/e,z),(-c,0,b))$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Указатель "подстановка" разрешает вырожденное нулевое значение коэффициента c. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow \mathrm{set}_{xyz}(x = a$ & $y = b$ & $z -$ число$) =$ $\mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x - a, y - b, z), (0, 0, 1))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow \mathrm{set}_{xyz}(y = a$ & $z = b$ & $x -$ число$) =$ $\mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x, y - a, z - b), (1, 0, 0))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow \mathrm{set}_{xyz}(x = a$ & $z = b$ & $y -$ число$) =$ $\mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x - a, y, z - b), (0, 1, 0))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

Антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \rightarrow \mathrm{set}_{xyz}(y + a = 0$ & $bx + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) = \mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x, y + a, z + d/c), (-c, 0, b))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \rightarrow \mathrm{set}_{xyz}(x + a = 0$ & $by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) = \mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x + a, y, z + d/c), (0, -c, b))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \rightarrow \mathrm{set}_{xyz}(z + a = 0$ & $bx + cy + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) = \mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x, y + d/c, z + a), (-c, b, 0))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "подстановка" разрешает вырожденное нулевое значение коэффициента b. Уровень срабатывания равен 1.

14. Определение координат общей точки трех плоскостей.

$\forall_{ABCDEFGHKPQabcdefghpqrs}(P \in$ плоскость(ABC) & $P \in$ плоскость(DEF) & $P \in$ плоскость(GHQ) & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$)$ & коорд(плоскость$(DEF), K) =$ $\mathrm{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число$)$ & коорд(плоскость$(GHQ), K) = \mathrm{set}_{XYZ}(pX + qY + rZ + s = 0$ & $X -$ число & $Y -$ число & $Z -$ число$)$ & $t = \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix})$ & $\neg(t = 0)$ &

$m = \det(\begin{pmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ s & q & r \end{pmatrix})$ & $n = \det(\begin{pmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ p & s & r \end{pmatrix})$ & $k = \det(\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ p & q & s \end{pmatrix}) \rightarrow$ коорд$(P, K) = (-m/t, -n/t, -k/t))$

Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый - идентифицируется с посылкой. Восьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов $a, b, c, e, f,$

g, p, q, r. Выражения $a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r, s$ не содержат неизвестных. Обозначения трех рассматриваемых плоскостей попарно различны. Определители вычисляются нормализатором "нормопределитель". Уровень срабатывания приема равен 3.

15. Определение координат плоскости, проходящей через три точки.

    $\forall_{ABCKPQRabcdefghkmnp}(A \in$ плоскость(PQR) & $B \in$ плоскость(PQR) & $C \in$ плоскость(PQR) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & коорд$(C, K) = (g, h, k)$ & $m = \det(\begin{pmatrix} b & c & 1 \\ e & f & 1 \\ h & k & 1 \end{pmatrix})$ & $n = \det(\begin{pmatrix} c & a & 1 \\ f & d & 1 \\ k & g & 1 \end{pmatrix})$ & $p = \det(\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{pmatrix})$ & $\neg((m, n, p) = (0, 0, 0))$ & $q = \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}) \to$ коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{xyz}(mx + ny + pz - q = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

    Первые три антецедента выделены указателем "усм". Четвертый, пятый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками. Десятый антецедент обрабатывается проверочным оператором; остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Определители вычисляются нормализатором "нормопределитель". Выражения $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

16. Переход к каноническому заданию окружности в трехмерном пространстве.

    $\forall_{abcde}(\mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ & $z + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + ay^2 + az^2 + bx + cy + d - ae^2 = 0$ & $z + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

    $\forall_{abcde}(\mathrm{set}_{xzy}(ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ & $z + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) = \mathrm{set}_{xzy}(ax^2 + ay^2 + az^2 + bx + cy + d - ae^2 = 0$ & $z + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

    $\forall_{abcde}(\mathrm{set}_{zxy}(ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ & $z + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) = \mathrm{set}_{zxy}(ax^2 + ay^2 + az^2 + bx + cy + d - ae^2 = 0$ & $z + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

    Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов b, c. Уровень срабатывания равен 1.

17. Использование нормализатора "нормкрд".

    $\forall_{AKabc}(a =$ крд$(A, K, 1)$ & $b =$ крд$(A, K, 2)$ & $c =$ крд$(A, K, 3) \to$ коорд$(A, K) = (a, b, c))$

    Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализатором "нормкрд". Существует посылка, имеющая подвыражение вида "крд(A, K, i)". Если отсутствует комментарий "крд", то требуется, чтобы выражения a, b, c не содержали неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

18. Сокращение координат на общий положительный множитель.

    $\forall_{abcde}(0 < b \to (ab/c, 0, db/e) = (a/c, 0, d/e))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

19. Координаты точки, заданной своими координатами.

    $\forall_{Kab}$(коорд(тчкоорд$(K, (a, b))$, $K) = (a, b))$

    Уровень срабатывания равен 1.

20. Сила тяжести.

    $\forall_{Kact}$(поверхнземли$(K) \to$ коорд(сила$(a, K, t), K) = (0, 0, -$масса$(a)g))$

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Имеется посылка задачи, содержащая один из символов "масса", "Ускорение", "центртяжести", "плотность", "Скорость". Уровень срабатывания равен 1.

21. Координаты куба.

    $\forall_{HKMNPQabp}$(куб(a) & грань(фигура$(MNPQ), a)$ & ребро(отрезок$(MH), a)$ & вправо(вектор$(MH), K)$ & вверх(вектор$(MN), K)$ & вперед(вектор$(MQ), K)$ & $l(MN) = p$ & прямкоорд$(K) \to$ коорд$(a, K) = \mathrm{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & крд$(M, K, 1) \leq x$ & $x \leq$ крд$(M, K, 1) + p$ & крд$(M, K, 2) \leq y$ & $y \leq$ крд$(M, K, 2) + p$ & крд$(M, K, 3) \leq z$ & $z \leq$ крд$(M, K, 3) + p))$

    Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками. Четвертый, пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор". Допускаются циклические перестановки вершин грани и изменение их порядка на обратный. Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор общей стандартизации "нормкрд"

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "крд" и не входит в выражение b. Уровень срабатывания равен 1.

2. Нулевой вектор.

   $\forall_{Ki}$(крд(вектор0$, K, i) = 0)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Начало координат.

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \to$ крд$(A, K, i) = 0)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

4. Вектор направлен параллельно оси координат.

   $\forall_{Ka}$(прямкоорд(K) & вправо$(a, K) \to$ крд$(a, K, 3) = 0)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" разрешает альтернативные заголовки второго антецедента "назад", "вперед", "влево". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Ka}$(прямкоорд(K) & вправо$(a, K) \rightarrow$ крд$(a, K, 2) = 0)$

Аналогично предыдущему, но альтернативные заголовки суть "вверх", "вниз", "влево", "верхнапр". В последнем случае вектор расположен в плоскости OXZ и имеет неотрицательную z - компоненту.

$\forall_{Ka}$(прямкоорд(K) & вверх$(a, K) \rightarrow$ крд$(a, K, 1) = 0)$

Аналогично предыдущему. Альтернативные заголовки - "назад", "вперед", "вниз".

5. Координаты точки на координатной оси.

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая$(AE) \rightarrow$ крд$(D, K, 2) = 0)$

   $\forall_{ABCDEKabc}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая$(AE) \rightarrow$ крд$(D, K, 1) = 0)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 1.

6. Вектор находится в вертикальной плоскости.

   $\forall_{Ka}$(вертплосквект$(a, K) \rightarrow$ крд$(a, K, 2) = 0)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

7. Заданный координатный набор.

   $\forall_{AKabc}$(коорд$(A, K) = (a, b, c) \rightarrow$ крд$(A, K, 1) = a)$

   $\forall_{AKabc}$(коорд$(A, K) = (a, b, c) \rightarrow$ крд$(A, K, 2) = b)$

   $\forall_{AKabc}$(коорд$(A, K) = (a, b, c) \rightarrow$ крд$(A, K, 3) = c)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

8. Минус - вектор.

   $\forall_{Kai}$(крд$(-a, K, i) = -$крд$(a, K, i))$

   Уровень срабатывания равен 1.

9. Физические векторы.

   (a) Вертикальная составляющая силы трения при движении по горизонтальной поверхности.

   $\forall_{Kabt}$(движениепо(a, b, t) & горизповерхн$(b, K, t) \rightarrow$
   крд(силатрения$(a, b, t), K, 3) = 0)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Сила взаимодействия с гладкой поверхностью.

   $\forall_{Kabt}$(горизповерхн(a, K, t) & гладкое(a) & движениепо$(b, a, t) \rightarrow$
   крд(сила$(b, a, t), K, 1) = 0)$

   $\forall_{Kabt}$(горизповерхн(a, K, t) & гладкое(a) & движениепо$(b, a, t) \rightarrow$
   крд(сила$(b, a, t), K, 2) = 0)$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Горизонтальная составляющая силы притяжения.

$\forall_{Kat}$(поверхнземли(K) $\to$ крд(сила(a, K, t), K, 1) $= 0$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "вариант" допускает рассмотрение также и второй координаты. Уровень срабатывания приема равен 1.

(d) Ускорение при броске.

$\forall_{KTa}$(поверхнземли(K) & бросок(a, T) $\to$
крд(Ускорение(a, K, T), K, 1) $= 0$)

Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" допускает рассмотрение второй координаты. Уровень срабатывания приема равен 3.

(e) Скорость в горизонтальном направлении при движении по вертикали.

$\forall_{KTat}$(вертикдвиж(a, K, T) & $t \in T \to$ крд(Скорость(a, K, t), K, 1) $= 0$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "смравно" допускает косвенную идентификацию выражения "Скорость(...)" через равенство в посылках. Указатель "вариант" разрешает рассмотрение второй координаты. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Связь вертикальной и горизонтальной составляющих скорости при движении по наклонной плоскости.

$\forall_{Kabpt}$(движениепо(a, b, T) & Наклплоск(b, K, p, T) & неподв(b, T) &
$t \in T$ & крд(Скорость(a, K, t), K, 3) $= m$ & $\neg(p = 0)$ & $\neg(\cos p = 0) \to$
крд(Скорость(a, K, t), K, 1) $= m/tgp$)

Здесь утверждение "Наклплоск(b, K, p, T)" означает, что b есть прямоугольная ориентированная материальная поверхность, которая на промежутке T параллельна оси OY системы координат K и составляет с осью абсцисс угол p, принадлежащий промежутку от $-pi/2$ до $\pi/2$.

Первый, второй и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Выражение m не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания приема равен 2.

(g) y - составляющая скорости при движении в плоскости, параллельной плоскости OXZ.

$\forall_{KTat}$(вертплоскдвиж(a, K, T) & $t \in T \to$ крд(Скорость(a, K, t), K, 2) $= 0$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Движение материальной точки по неподвижной горизонтальной поверхности.

Приемы этого пункта срабатывают только при наличии комментария "высотаповерхн".

$\forall_{KTabt}$(движениепо(a, b, T) & горизповерхн(b, K, T) & неподв(b, T) &
$t \in T \to$ крд(Место(a, t), K, 3) = высотаповерхн(b, K, T))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABKTabt}$(движениепо(a, b, T) & горизповерхн(b, K, T) & неподв(b, T) & $t \in T$ & $A =$ Место(a, t) & влево(вектор$(AB), K) \to$ крд$(B, K, 3) =$ высотаповерхн$(b, K, T))$

Два первых и два последних антецедента идентифицируются с посылками, причем указатель "вариант" разрешает альтернативные заголовки последнего антецедента: "вправо", "вперед", "назад", "горизплосквект", "одномерный". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

(i) Направления силы тяги и скорости.

$\forall_{Kabit}$(тянет(a, b, t) & крд(Скорость$(b, K, t), K, i) = 0 \to$ крд(сила$(b, a, t), K, i) = 0)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

(j) Ускорение неподвижного тела.

$\forall_{Kait}$(Неподв$(a, t) \to$ крд(Ускорение$(a, K, t), K, i) = 0)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

Синтезатор "направлвектор"

Синтезатор реализует утверждение "направлвектор(A B K v)", где входные данные суть точки A, B и система координат K. Выходом служат координаты v вектора, однонаправленного с вектором AB.

1. Усмотрение направляющего вектора для точек пересечения одной прямой с двумя другими.

$\forall_{ABCDEFKPQabcdefmpqr}$(коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) = \text{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & коорд(прямая$(EF), K) = \text{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & z – число & w – число) & $P \in$ прямая(AB) & $P \in$ прямая(EF) & $Q \in$ прямая(AB) & $Q \in$ прямая(CD) & разныеточки(P, Q) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(EF)) & $m = \text{sg}((ae - bd)(aq - bp)\text{det}(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ d & e & f \end{pmatrix})) \to$ направлвектор$(P, Q, K, (bm, -am)))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, следующие четыре - выделены указателем "усм". Антецеденты с восьмого по десятый обрабатываются проверочными операторами. Одиннадцатый антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

2. Усмотрение направляющего вектора, если известны координаты точек.

$\forall_{ABKabcd}$(разныеточки(A, B) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \to$ направлвектор$(A, B, K, (c - a, d - b)))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 1. Созданы еще две версии приема. В первой из них, срабатывающей на уровне 2, требуется лишь, чтобы выражения a, b, c, d в совокупности содержали не более одной неизвестной. Во второй, срабатывающей на уровне 3, никаких требований на эти выражения не накладывается.

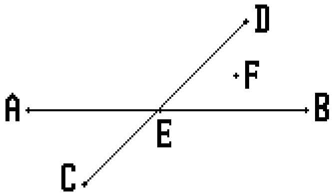
$\forall_{ABCKabcd}$(разныеточки(A, C) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(C, K) = (c, d)$ & $A \in$ отрезок$(BC) \rightarrow$ направлвектор$(A, B, K, (a - c, b - d)))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент выделен указателем "усм". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Аналогично предыдущему приему, создана еще две версии данного приема, срабатывающие на уровнях 2 и 3.

$\forall_{ABKabcdef}$(разныеточки(A, B) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f) \rightarrow$ направлвектор$(A, B, K, (d - a, e - b, f - c)))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

3. Усмотрение направляющего вектора для стороны угла, если известны координаты точки внутри угла и уравнения сторон угла.



$\forall_{ABCDEFabcdefpqr}(E \in$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ Угол(BED) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$)$ & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)$ & коорд$(F, K) = (p, q)$ & $\neg(ae - bd = 0)$ & $\neg(dp + eq + f = 0)$ & $r = \mathrm{sg}((ae - bd)(dp + eq + f))$ & $s = (-br, ar) \rightarrow$ направлвектор$(E, B, K, s))$

Антецеденты с третьего по шестой идентифицируются с посылками. Первый и второй антецеденты выделены указателем "усм", седьмой и восьмой - обрабатываются проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f, p, q не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

Синтезатор "направлпрямой"

Синтезатор реализует утверждение "направлпрямой(A K v)", где входные данные суть прямая A и система координат K. Выходом служат координаты v направляющего вектора прямой A.

1. Известны координаты вектора с концами в точках, определяющих прямую.

$\forall_{ABKabc}$(коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c) \rightarrow$ направлпрямой(прямая$(AB), K, (a, b, c)))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение из уравнения прямой.

   $\forall_{ABKabcdef}$(коорд(прямая(AB), K) $= \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы(($x+a, y+b, z+c$), (d, e, f)) & x−число & y−число & z−число) $\to$ направлпрямой(прямая(AB), K, (d, e, f)))

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

3. Известны координаты двух различных точек прямой.

   $\forall_{ABCDKabcdef}$($C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & разныеточки(C, D) & коорд(C, K) $= (a, b, c)$ & коорд(D, K) $= (d, e, f)$ $\to$ направлпрямой(прямая(AB), K, $(d-a, e-b, f-c)$))

   Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

4. Прямая перпендикулярна плоскости с известным уравнением.

   $\forall_{ABCDEK}$(прямкоорд(K) & прямая(AB) $\perp$ плоскость(CDE) & коорд(плоскость(CDE), K) $= \mathrm{set}_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x − число & y − число & z − число) $\to$ направлпрямой(прямая(AB), K, (a, b, c)))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатели "подстановка" допускают вырожденные нулевые значения коэффициентов a, b, c. Уровень срабатывания равен 1.

5. Усмотрение из посылки.

   $\forall_{ABKa}$(направлпрямой(прямая(AB), K, a) $\to$ направлпрямой(прямая(AB), K, a))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

6. Использование условия параллельности прямых.

   $\forall_{ABCDKa}$(прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) & направлпрямой(прямая(CD), K, a) $\to$ направлпрямой(прямая(AB), K, a))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Обозначения прямых AB и CD различны. Для блокировки зацикливания используется комментарий "параллельны", передаваемый при рекурсивном обращении. Его наличие блокирует срабатывание данного приема. Уровень срабатывания равен 2.

Синтезатор "напрвектор"

Синтезатор реализует утверждение "напрвектор(A K v)", где входные данные суть вектор A и система координат K. Выходом служат координаты v вектора, коллинеарного вектору A.

1. Заданный угол с осью абсцисс вектора, лежащего в вертикальной плоскости.

$\forall_{ABKPQRSa}$(вертплоск(вектор(AB), K) & $K = (P, Q, R, S)$ &
уголмежду(вектор(AB), вектор(PQ)) $= a \to$
напрвектор(вектор(AB), K, $(\cos a, 0, \sin a)$))

Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "смравно" допускает косвенную идентификацию подвыражения "вектор(AB)" через равенство в посылках. Указатель "множество" разрешает идентификацию этого вектора при произвольном порядке точек A, B. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKPQRSab}$(вертплоск(вектор(AB), K) & $K = (P, Q, R, S)$ &
уголмежду(вектор(AB), вектор(PQ)) $= a$ & вектор(AB) $= b \to$
напрвектор($b, K, (\cos a, 0, \sin a)$))

Аналогично предыдущему. С посылками идентифицируются три последних антецедента.

2. Использование условия перпендикулярности.

   $\forall_{Kabpq}$(прямкоорд(K) & $p \perp q$ & напрвектор(p, K, x) & $x = (a, 0, b) \to$
   напрвектор($q, K, (-b, 0, a)$))

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Третий антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор "усмодномерный"

Оператор проверяет истинность утверждения "одномерный(a, K)", означающего, что вектор a направлен параллельно оси абсцисс трехмерной системы координат K.

1. Минус перед вектором.

   $\forall_{Ka}$(одномерный(a, K) $\to$ одномерный($-a, K$))

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Умножение на число.

   $\forall_{Kam}$(одномерный(a, K) $\to$ одномерный(ma, K))

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Однонаправленные векторы.

   $\forall_{Kab}$(однонаправлены(a, b) & одномерный(a, K) $\to$ одномерный(b, K))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

4. Сила трения при движении по оси абсцисс.

   $\forall_{Kabt}$(одномерндвиж(a, K, t) & движениепо(a, b, t) & неподв(b, t) $\to$
   одномерный(силатрения(a, b, t), K))

   Утверждение "одномерндвиж(a, K, t)" означает, что на протяжении промежутка времени t либо в момент t материальная точка a находится на оси абсцисс в системе координат K, а векторы ее скорости и ускорения направлены параллельно этой оси. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{KSTabpq}$(движениепо(a, b, S) & движется(a, K, T) & $T = [p, q]$ & одномерный(Скорость$(a, K, p), K)$ & горизповерхн(b, K, S) & $T \subseteq S$ & неподв(b, T) & Силы$(a, \{b, K\}, T) \to$ одномерный(силатрения$(a, c, T), K)$)

Здесь утверждение "движется(a, K, T)" означает, что в течение промежутка времени T скорость объекта a относительно объекта K не равна нулю, кроме, быть может, крайних точек промежутка. Утверждение "Силы$(a, \{b, K\}, T)$" означает, что в течение промежутка a на материальную точку a действуют только сила реакции со стороны поверхности b и сила тяжести.

Первые три антецедента, а также пятый и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками. Четвертый, шестой и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

5. Направление вправо либо влево.

   $\forall_{Ka}$(вправо$(a, K) \to$ одномерный(a, K))

   $\forall_{Ka}$(влево$(a, K) \to$ одномерный(a, K))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

6. Вектор лежит в горизонтальной плоскости, а y - координата его равна 0.

   $\forall_{Ka}$(крд$(a, K, 2) = 0$ & горизплосквект$(a, K) \to$ одномерный(a, K))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

7. Равенство вторых и третьих координат концов.

   $\forall_{ABK}$(крд$(A, K, 2) =$ крд$(B, K, 2)$ & крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3) \to$ одномерный(вектор$(AB), K)$)

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

8. Направление силы, действующей между двумя материальными точками.

   $\forall_{Kabt}$(одномерный(вектор(Место(a, t)Место$(b, t)), K) \to$ одномерный(сила$(a, b, t), K)$)

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения "Место(a, t)" и "Место(b, t)" уже рассматриваются в задаче. Отсутствуют посылки, указывающие, что одна из точек a, b лежит на другой. Уровень срабатывания приема равен 2.

9. Сложение векторов.

   $\forall_{ABCK}$(вправо(вектор$(AB), K)$ & одномерный(вектор$(BC), K) \to$ одномерный(вектор$(AC), K)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем указатель "вариант" допускает альтернативные заголовки "влево", "одномерный". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. При идентификации консеквента допускается перестановка концов A, C. Уровень срабатывания приема равен 2.

10. Нулевой вектор.

    $\forall_K$(одномерный(вектор0, K))

    Уровень срабатывания равен 1.

11. Точка отрезка.

    $\forall_{ABCK}$($A \in$ отрезок(BC) & одномерный(вектор(BC), K) $\rightarrow$ одномерный(вектор(AB), K))

    $\forall_{ABCK}$($A \in$ отрезок(BC) & одномерный(вектор(BC), K) $\rightarrow$ одномерный(вектор(BA), K))

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{ABCDK}$($A \in$ отрезок(CD) & $B \in$ отрезок(CD) & одномерный(вектор(CD), K) $\rightarrow$ одномерный(вектор(AB), K))

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Проверочный оператор "усмвертикнапр"

Оператор проверяет истинность утверждения "вертикнапр(a, K)", означающего, что вектор a направлен параллельно оси OZ трехмерной системы координат K. В основном, его приемы связаны с элементарной физикой.

1. Сила притяжения.

   $\forall_{Kat}$(поверхнземли(K) $\rightarrow$ вертикнапр(сила(a, K, t), K))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Вектор, направленный вверх либо вниз.

   $\forall_{Ka}$(вверх(a, K) $\rightarrow$ вертикнапр(a, K))

   $\forall_{Ka}$(вниз(a, K) $\rightarrow$ вертикнапр(a, K))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

3. Использование координат вектора.

   $\forall_{Kab}$(коорд(a, K) $= (0, 0, b) \rightarrow$ вертикнапр(a, K))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

4. Нормальная реакция при движении по горизонтальной поверхности.

   $\forall_{Kabt}$(движениепо(a, b, t) & горизповерхн(b, K, t) $\rightarrow$ вертикнапр(нормреакция(a, b, t), K))

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Kabst}($движениепо(a,b,t) & горизповерхн(b,K,t) & $s\subseteq t\rightarrow$ вертикнапр(нормреакция$(a,b,s),K))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Сумма вертикально направленных сил.

   $\forall_{Kabnt}($Силы$(a,\{;b\},t)$ & $l(b)=n$ & $\forall_i(i\in\{1,\dots,n\}\rightarrow$ вертикнапр(сила$(a,b(i),t),K))\rightarrow$ вертикнапр(Сила$(a,t),K))$

   Утверждение "Силы$(a,\{;b\},t)$" означает, что $\{;b\}$ есть множество всех объектов, воздействующих на материальную точку a в момент либо период t. Выражение "сила$(a,b(i),t)$" обозначает вектор силы, с которой объект $b(i)$ воздействует на точку a. Выражение "Сила(a,t)" обозначает векторную сумму всех сил, действующих на точку a.

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Выражение b имеет заголовок "набор". Уровень срабатывания равен 1.

6. Ускорение при вертикально направленных силах.

   $\forall_{Kabnt}($Силы$(a,\{;b\},t)$ & $l(b)=n$ & $\forall_i(i\in\{1,\dots,n\}\rightarrow$ вертикнапр(сила$(a,b(i),t),K))\rightarrow$ вертикнапр(Ускорение$(a,K,t),K))$

   Аналогично предыдущему приему.

7. Нулевой угол между векторами, один из которых направлен вертикально.

   $\forall_{Kab}($уголмежду$(a,b)=0$ & вертикнапр$(a,K)\rightarrow$ вертикнапр$(b,K))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

8. Минус перед вектором.

   $\forall_{Ka}($вертикнапр$(a,K)\rightarrow$ вертикнапр$(-a,K))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Kab}($вертикнапр(a,K) & $b=-a\rightarrow$ вертикнапр$(b,K))$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

9. Коллинеарные векторы.

   $\forall_{Kab}($вертикнапр(a,K) & коллинеарны$(a,b)\rightarrow$ вертикнапр$(b,K))$

   Созданы две версии приема. В первой из них первый антецедент идентифицируется с посылкой, а второй обрабатывается проверочным оператором. Во второй версии первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, а второй - идентифицируется с посылкой. Здесь допускается альтернативный заголовок "однонаправлены". Уровни срабатывания равны 3.

10. Сила, действующая со стороны гладкой горизонтальной поверхности на движущееся по ней тело.

$\forall_{KTabt}$(горизповерхн(b, K, T) & движениепо(a, b, T) & $t \in T$ &
гладкое$(b) \rightarrow$ вертикнапр(сила$(a, b, t), K)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

11. Произведение вектора на число.

$\forall_{Kak}$(вертикнапр$(a, K) \rightarrow$ вертикнапр(ka, K))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Kabk}(\neg(k = 0)$ & $ka = b$ & вертикнапр$(b, K) \rightarrow$ вертикнапр(a, K))

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, два других - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

12. Сумма вертикально направленных векторов.

$\forall_{Kab}$(вертикнапр(a, K) & вертикнапр$(b, K) \rightarrow$ вертикнапр$(a + b, K)$)

Антецеденты обрабатываются тем же проверочным оператором. Указатель "дистрибразвертка" обеспечивает обработку любого числа слагаемых за одно срабатывание. Уровень срабатывания равен 3.

13. Скорость при вертикальном броске.

$\forall_{KTapqt}$(бросок(a, T) & $T = [p, q]$ & $t \in T$ & поверхнземли(K) &
вертикнапр(Скорость$(a, K, p), K) \rightarrow$ вертикнапр(Скорость$(a, K, t), K)$)

Утверждение "бросок(a, T)" означает, что тело a на протяжении промежутка времени T движется под действием только силы тяжести. Первые два антецедента и четвертый антецедент идентифицируются с посылками. Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

14. Нулевой вектор.

$\forall_{K}$(вертикнапр(вектор0$, K)$)

Уровень срабатывания равен 2.

15. Сила при отскоке вертикально падающего тела от горизонтальной неподвижной поверхности.

$\forall_{KTabpq}$(отскок(a, b, T) & $T = [p, q]$ & горизповерхн(b, K, S) & $T \subseteq S$ &
неподв(b, T) & вертикнапр(Скорость$(a, K, p), K)$ & неподв$(K, T) \rightarrow$
вертикнапр(сила$(a, b, T), K)$)

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

16. Сила при абсолютно неупругом ударе в случае вертикально направленной скорости.

$\forall_{KTabpq}$(падение(a, b, T) & $T = [p, q]$ & неподв(b, T) & неподв(K, T) &
вертикнапр(Скорость$(a, K, p), K) \rightarrow$ вертикнапр(сила$(a, b, T), K)$)

Утверждение "падение(a, b, T)" означает, что в течение промежутка времени T материальная точка a столкнулась с ориентированной материальной поверхностью b и осталась на ней. Движение поверхности b при этом не изменилось. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

17. Сила реакции опоры, относительно которой вращается закрепленный во внутренней точке вертикально расположенный стержень.

    $\forall_{BCKTabcdpt}$(стержень(a) & концы$(a) = \{b, c\}$ & $d \in a$ & точкавращения(d, a, p, T) & неподв(d, T) & Место$(b, t) = B$ & Место$(c, t) = C$ & вертикнапр(вектор(BC), K) & Силы$(b, \{d, K\}, t)$ & Силы$(c, \{d, K\}, t)$ & поверхнземли(K) & $t \in T \rightarrow$ вертикнапр(сила$(p, d, t), K$))

    Антецеденты с номерами 5, 8 и 12 обрабатываются проверочными операторами, остальные - идентифицируются с посылками.

18. Направляющий вектор траектории вертикального перемещения.

    $\forall_{KTa}$(вертикдвиж$(a, K, T) \rightarrow$ вертикнапр(напрпути(Путь(a, T)), K))

    Выражение "Путь(a, T)" обозначает ориентированную кривую, по которой материальная точка a перемещается в течение промежутка времени T.

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

19. Вектор, дающий ноль в сумме с вертиканльно направленным вектором.

    $\forall_{ab}(a + b =$ вектор0 & вертикнапр$(b, K) \rightarrow$ вертикнапр(a, K))

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

20. Архимедова сила.

    $\forall_{KTabd}$(поверхнземли(K) & погружено(a, b, T) & неподв(b, T) &
    центртяжести$(d, a) \rightarrow$ вертикнапр(архсила$(d, b, T), K$))

    $\forall_{KTabd}$(поверхнземли(K) & погружено(a, b, T) & неподв$(b, T) \rightarrow$
    вертикнапр(архсила$(a, b, T), K$))

    Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

Проверочный оператор "усмвертплосквект"

Оператор проверяет истинность утверждения "вертплосквект(a, K)", означающего, что вектор a расположен в плоскости OXZ трехмерной системы координат K.

1. Усмотрение вертикально направленного вектора.

   $\forall_{Ka}$(вертикнапр$(a, K) \rightarrow$ вертплосквект(a, K))

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Равенство нулю второй координаты.

   $\forall_{Ka}$(крд$(a, K, 2) = 0 \rightarrow$ вертплосквект(a, K))

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABK}(\text{крд}(A, K, 2) = \text{крд}(B, K, 2) \to \text{вертплосквект}(\text{вектор}(AB), K))$

Антецедент выделен указателем "равно". Уровень срабатывания равен 2.

3. Заданное направление вдоль оси координат.

   $\forall_{Ka}(\text{вправо}(a, K) \to \text{вертплосквект}(a, K))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем указатель "вариант" разрешает альтернативные заголовки "влево", "вверх", "вниз". Уровень срабатывания равен 2.

4. Скорость точки, движущейся в вертикальной плоскости.

   $\forall_{KTat}(\text{вертплоскдвиж}(a, K, T) \ \& \ t \in T \to \text{вертплосквект}(\text{Скорость}(a, K, t), K))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

5. Ускорение точки, движущейся в вертикальной плоскости.

   $\forall_{KTa}(\text{вертплоскдвиж}(a, K, T) \to \text{вертплосквект}(\text{Ускорение}(a, K, T), K))$

   Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "$T = [c, d]$". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{KTab}(\text{вертплоскдвиж}(a, K, T) \ \& \ b = \text{Ускорение}(a, K, T) \to \text{вертплосквект}(b, K))$

   Аналогично предыдущему.

6. Радиус - вектор при вращении в вертикальной плоскости.

   $\forall_{ACDTanpt}(\text{Путь}(a, T) = \text{Дуга}(C, D, n, p) \ \& \ t \in T \ \& \ \text{вперед}(n, K) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ A = \text{Место}(a, t) \to \text{вертплосквект}(\text{вектор}(AC), K))$

   $\forall_{ACDTanpt}(\text{Путь}(a, T) = \text{Дуга}(C, D, n, p) \ \& \ t \in T \ \& \ \text{вперед}(n, K) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ A = \text{Место}(a, t) \to \text{вертплосквект}(\text{вектор}(CA), K))$

   Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - идентифицируются с посылками. Разрешается альтернативный заголовок "назад" третьего антецедента. Уровень срабатывания равен 2.

7. Использование равенства для суммы векторов.

   $\forall_{Kabcv}(\text{вертплосквект}(b, K) \ \& \ \text{вертплосквект}(c, K) \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ av + b = c \to \text{вертплосквект}(v, K))$

   Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

8. Умножение вектора на число.

   $\forall_{Kav}(\text{вертплосквект}(v, K) \to \text{вертплосквект}(av, K))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

9. Сила тяги.

   $\forall_{Kact}$(тянет(c, a, t) & крд(Скорость$(a, K, t), K, 2) = 0$ & Неподв$(K, t) \to$ вертплосквект(сила$(a, c, t), K)$)

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию подвыражения "сила(a, c, t)" через равенство в посылках. Уровень срабатывания равен 2.

10. Движение маятника в вертикальной плоскости.

    $\forall_{KTabcst}$(гибкаясвязь(a, b, c, T) & неподв(b, T) & неподв(K, T) & $t \in T$ & $s \in T$ & Предшеств(s, t) & вертплосквект(Скорость$(a, K, s), K) \to$ вертплосквект(Скорост

    Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка, указывающая, что на объект a воздействует какой-то отличный от K объект на промежутке времени, пересекающемся с промежутком $[s, t]$. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{KTabcst}$(гибкаясвязь(a, b, c, T) & неподв(b, T) & неподв(K, T) & $T = [p, q]$ & $t \in T$ & вертплосквект(Скорость$(a, K, p), K) \to$ вертплосквект(Скорость$(a, K, t), K)$)

    Аналогично предыдущему, но с посылками идентифицируются первый и четвертый антецеденты.

11. Использование соотношения пропорциональности для векторов.

    $\forall_{abpq}(pa = qb$ & $\neg(p = 0)$ & вертплосквект$(b, K) \to$ вертплосквект$(a, K))$

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

12. Нормальная реакция при движении по наклонной плоскости.

    $\forall_{KSTabp}$(движениепо(a, b, T) & неподв(b, T) & Наклплоск(b, K, p, S) & $T \subseteq S \to$ вертплосквект(нормреакция$(a, b, T), K)$)

    Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

13. Использование посылки.

    $\forall_{ABK}$(вертплосквект(вектор$(AB), K) \to$ вертплосквект(вектор$(AB), K)$)

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "множество" разрешает идентификацию вектора AB с перестановкой концов, а указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию этого вектора через равенство в посылках. Уровень срабатывания равен 2.

14. Точка отрезка, лежащего в вертикальной плоскости.

    $\forall_{ABCK}(A \in$ отрезок(BC) & вертплосквект(вектор$(BC), K) \to$ вертплосквект(вектор$(BA), K)$)

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Допускается перестановка концов вектора при его идентификации. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDK}(A \in$ отрезок(BC) & $D \in$ отрезок(BC) & вертплосквект(вектор(BC), $K) \to$ вертплосквект(вектор$(AB), K))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEK}(A \in$ отрезок(BC) & $B \in$ отрезок(CD) & $E \in$ отрезок(CD) & вертплосквект(вектор$(CD), K) \to$ вертплосквект(вектор$(AE), K))$

Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Проверочный оператор "усмгоризплосквект"

Оператор проверяет истинность утверждения "горизплосквект(a, K)", означающего, что вектор a расположен в плоскости OXY трехмерной системы координат K.

1. Вектор направлен вдоль оси абсцисс.

   $\forall_{ab}($одномерный$(a, b) \to$ горизплосквект$(a, b))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Перестановка концов вектора.

   $\forall_{ABK}($горизплосквект(вектор$(AB), K) \to$ горизплосквект(вектор$(BA), K))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

3. Радиус - вектор при движении по дуге окружности с вертикально направленным вектором нормали.

   $\forall_{ACDKTanpt}($Путь$(a, T) =$ Дуга(C, D, n, p) & вертикнапр(n, K) & $A =$ Место(a, t) & $t \in T \to$ горизплосквект(вектор$(CA), K))$

   Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Допускается перестановка концов вектора при его идентификации. Уровень срабатывания приема равен 2.

4. Использование посылки, явно указывающий на вектор горизонтальной плоскости.

   $\forall_{ABCDK}($горизплосквект(вектор$(AB), K)$ & $C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & разныеточки$(A, B) \to$ горизплосквект(вектор$(CD), K))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

5. Точки горизонтальной плоскости.

   $\forall_{BCKabct}($горизповерхн(a, K, t) & $b \in a$ & лежитна(c, a, t) & $B =$ Место(b, t) & $C =$ Место$(c, t) \to$ горизплосквект(вектор$(BC), K))$

   Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ACKabt}($движениепо(a, b, t) & горизповерхн(b, K, T) & неподв(b, T) & $t \in T$ & центркрив(a, C, t) & $A =$ Место$(a, t) \to$ горизплосквект(вектор$(CA), K))$

$\forall_{ACKabt}$(движениепо(a, b, t) & горизповерхн(b, K, T) & неподв(b, T) & $t \in T$ & центркрив(a, C, t) & $A =$ Место$(a, t) \rightarrow$ горизплосквект(вектор$(AC), K$))

Утверждение "движениепо(a, b, t)" означает, что в окрестности момента времени t материальная точка a движется по ориентированной материальной поверхности b; утверждение "центркрив(a, C, t)" - что геометрическая точка C в момент t является центром кривизны траектории, по которой движется материальная точка a.

Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKTabpt}$(движениепо(a, b, T) & горизповерхн(b, K, T) & неподв(b, T) & $A =$ Место(a, t) & $B =$ Место(a, p) & $t \in T$ & $p \in T \rightarrow$ горизплосквект(вектор$(AB), K$))

Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Третий, шестой и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "возмрано", т.е. либо идентифицируются с посылками, либо рассматриваются как выделенные указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCKTabpq}$(движениепо(a, b, T) & горизповерхн(b, K, T) & неподв(b, T) & $p \in T$ & $q \in T$ & $A =$ Место(a, p) & $B =$ Место(a, q) & горизплосквект(вектор$(CA), K) \rightarrow$ горизплосквект(вектор$(CB), K$))

Первые два антецедента, а также шестой и седьмой идентифицируются с посылками. Остальные - обрабатываются проверочными операторами. Выражения p, q различны. Уровень срабатывания равен 3.

6. Скорость при движении по горизонтальной плоскости.

   $\forall_{KTabt}$(движениепо(a, b, T) & горизповерхн(b, K, S) & $t \in T$ & неподв(b, T) & $T \subseteq S \rightarrow$ горизплосквект(Скорость$(a, K, t), K$))

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

7. Относительная скорость.

   $\forall_{Kabt}$(горизплосквект(Скорость$(a, K, t), K)$ & горизплосквект(Скорость(b, K, t), $K) \rightarrow$ горизплосквект(Скорость$(a, b, t), K$))

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения b, K различны. Уровень срабатывания равен 2.

8. Использование равенства в посылках.

   $\forall_{Kab}(a = b$ & горизплосквект$(a, K) \rightarrow$ горизплосквект$(b, K))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

9. Однонаправленные векторы.

   $\forall_{Kab}$(однонаправлены(a, b) & горизплосквект$(a, K) \rightarrow$ горизплосквект$(b, K))$

   $\forall_{Kab}$(однонаправлены$(a, -b)$ & горизплосквект$(a, K) \rightarrow$ горизплосквект$(b, K))$

   $\forall_{Kab}$(уголмежду$(a, b) = 0$ & горизплосквект$(a, K) \rightarrow$ горизплосквект$(b, K))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

10. Равные z - координаты концов вектора.

    $\forall_{ABK}(\text{крд}(A, K, 3) = \text{крд}(B, K, 3) \to \text{горизплосквект}(\text{вектор}(AB), K))$

    Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

11. Нулевая z - координата вектора.

    $\forall_{Ka}(\text{крд}(a, K, 3) = 0 \to \text{горизплосквект}(a, K))$

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

12. Вектор на направлен вперед, назад, вправо либо влево.

    $\forall_{ab}(\text{вперед}(a, b) \to \text{горизплосквект}(a, b))$

    $\forall_{ab}(\text{назад}(a, b) \to \text{горизплосквект}(a, b))$

    $\forall_{ab}(\text{вправо}(a, b) \to \text{горизплосквект}(a, b))$

    $\forall_{ab}(\text{влево}(a, b) \to \text{горизплосквект}(a, b))$

    Уровень срабатывания равен 2.

13. Векторы скоростей соударяющихся тел во вспомогательной системе координат.

    $\forall_{KTabpqv}(\text{соударение}(\{a, b\}, T)\ \&\ T = [p, q]\ \&\ \text{соударкоорд}(K, a, b, T)\ \&$
    $v = \text{Скорость}(a, K, p) \to \text{горизплосквект}(v, K))$

    Утверждение "соударкоорд(K, a, b, T)" означает, что K есть вспомогательная неподвижная система координат, рассматриваемая в связи с соударением тел a, b на временном промежутке T. В начальный момент промежутка ось OX направлена от центра масс тела a к центру масс тела b, а ось OY лежит в плоскости скоростей соударяющихся тел. При этом вектор скорости тела a лежит в верхней части плоскости OXY.

    Антецеденты идентифицируются с посылками, причем указатель "возмравно" разрешает альернативную обработку последнего антецедента с помощью указателя "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

14. Натяжение горизонтальной упругой связи.

    $\forall_{KTabcdpq}(\text{упругсвязь}(a, b, c, T)\ \&\ \text{движениепо}(b, d, T)\ \&\ \text{горизповерхн}(d, K, T)$
    $\&\ \text{неподв}(d, T)\ \&\ \text{неподв}(a, T)\ \&\ T = [p, q]\ \&\ A = \text{Место}(a, p)\ \&\ B = \text{Место}(b, p)$
    $\&\ \text{горизплосквект}(\text{вектор}(AB), K)\ \&\ t \in T \to \text{горизплосквект}(\text{сила}(b, a, t), K))$

    Первые три антецедента и шестой антецедент идентифицируются с посылками. Седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{KTabcd}(\text{упругсвязь}(a, b, c, T)\ \&\ \text{движениепо}(b, d, T)\ \&\ \text{горизповерхн}(d, K, T)$
    $\&\ \text{неподв}(d, T)\ \&\ \text{движениепо}(a, d, T)\ \&\ t \in T \to \text{горизплосквект}(\text{сила}(b, a, t), K))$

    Четвертый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{KTabcd}$(упругсвязь(a, b, c, T) & движениепо(b, d, T) & горизповерхн(d, K, T) & неподв(d, T) & движениепо$(a, d, T) \rightarrow$ горизплосквект(сила$(b, a, T), K)$)

Аналогично предыдущему.

15. Отнесение горизонтального вектора силы к заданному моменту.

    $\forall_{KTabt}$(констсила(a, b, T) & $t \in T$ & горизплосквект(сила$(a, b, T), K) \rightarrow$ горизплосквект(сила$(a, b, t), K)$)

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

16. Концы вектора расположены в плоскости OXY.

    $\forall_{ABK}(A \in$ горизплоск(K) & $B \in$ горизплоск$(K) \rightarrow$ горизплосквект(вектор$(AB), K)$)

    Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

17. Сила, направленная горизонтально в каждый момент временного промежука.

    $\forall_{KTac}(\forall_t(t \in T \rightarrow$ горизплосквект(сила$(a, c, t), K)) \rightarrow$ горизплосквект(сила$(a, c, T), K)$)

    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

18. Минус - вектор.

    $\forall_{Ka}$(горизплосквект$(a, K) \rightarrow$ горизплосквект$(-a, K)$)

    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

19. Сила трения при движении по горизонтальной поверхности.

    $\forall_{Kabt}$(движениепо(a, b, t) & горизповерхн$(b, K, t) \rightarrow$ горизплосквект(силатрения$(a, b, t), K)$)

    Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Проверочный оператор "усмВертплоск"

Оператор проверяет истинность утверждения "Вертплоск(a, K)", означающего, что плоскость a параллельна плоскости OYZ прямоугольной системы координат K. Пока он имеет только простейший прием, идентифицирующий проверяемое утверждение с посылкой.

Проверочный оператор "усмодносвязно"

Оператор проверяет истинность утверждения "односвязно(a)", означающего, что множество a координат точек плоскости либо пространства односвязно.

1. Явное разрешение для одной из координат.

   $\forall_f$(односвязно(set$_{xy}(f(y) < x$ & $x -$ число & $y -$ число)))

   $\forall_f$(односвязно(set$_{xy}(x < f(y)$ & $x -$ число & $y -$ число)))

   Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

2. Прямое произведение промежутков.

   $\forall_{abcdefgh}$(односвязно$([a,b]\times[e,f])$)

   Переменные c,d,g,h, спрятанные при формульной прорисовке, указывают типы концов промежутка. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcdefghijkl}$(односвязно$([a,b]\times[e,f]\times[i,j])$)

   Аналогично предыдущему.

3. Вычитание конечного множества в трехмерном случае.

   $\forall_{abcdefghijklm}$(односвязно$([a,b]\times[e,f]\times[i,j]\setminus m)$)

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

1.4 Приемы, связанные с ориентированными кривыми

Приемы, связанные с символом "путь"

Выражение "путь(a)" обозначает ориентированную кривую, возникающую при последовательном прохождении ориентированных кривых набора a.

1. Суммирование длин фрагментов траектории.

   $\forall_a$(длина(путь(a)) $=\sum_{i=1}^{n}$ длина$(a(i))$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в условиях задач на описание, имеющих цель "исключ". Выражение a имеет заголовок "набор". Указатель "контекст" вводит дополнительную идентификацию константы n как числа операндов данного набора. Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы как обычной. Уровень срабатывания равен 2.

   На той же теореме создана еще одна версия приема, имеющая заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку ее применения при усмотрении в посылке задачи на исследование подвыражения "путь(a)". Уровень срабатывания равен 3. В остальном эта версия аналогична предыдущей.

2. Ввод сокращенного обозначения для пути.

   $\forall_{ab}$(путь$(a)=b$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на исследование подвыражения "путь(a)". Выражение a имеет заголовок "набор". Отсутствует посылка вида "путь$(a)=c$", где c не имеет невырожденных числовых атомов. Выбирается новая переменная b, которая становится вспомогательной неизвестной. Уровень срабатывания равен 2.

3. Нормализатор общей стандартизации "нормпуть".

   Нормализатор имеет единственный прием, устраняющий символ "путь"в случае одноэлементного набора: $\forall_a$(путь(набор(a)) $=a$).

Приемы, связанные с символом "Отрезок"

Выражение "Отрезок(A, B)" обозначает ориентированную кривую, соответствующую прохождению отрезка от точки A до точки B.

Пока для символа "Отрезок" создан единственный прием, выражающий длину отрезка через расстояние между его концами:

$\forall_{AB}(\text{длина}(\text{Отрезок}(A, B)) = l(AB))$

Прием имеет заголовок "второйтерм"; уровень его срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "Дуга"

Выражение "Дуга(A, B, v, c)" обозначает ориентированную кривую в пространстве, соответствующую движению по окружности с центром в точке A, начинающемуся с точки B, на величину ориентированного угла c. Вектор v ортогонален плоскости окружности и задает ориентацию: положительным считается движение против часовой стрелки, если смотреть в направлении этого вектора.

1. Ориентация равенства.

   $\forall_{abcde}(\text{Дуга}(b, c, d, e) = a \leftrightarrow a = \text{Дуга}(b, c, d, e))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование. Перестановка операндов равенства при идентификации не разрешается. Выражение a не имеет своим заголовком символа "Дуга". Преобразованное утверждение снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

2. Конечная точка лежит на окружности.

   $\forall_{ABCup}(C = \text{конецпути}(\text{Дуга}(A, B, u, p)) \rightarrow C \in \text{Окружн}(A, B, u))$

   Выражение "Окружн(A, B, u)" обозначает окружность в трехмерном пространстве, имеющую своим центром точку A, проходящую через точку B и лежащую в плоскости, перпендикулярной вектору u.

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию подвыражения "Дуга$(\ldots)$" через равенство в посылках. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "обратныйпуть"

Выражение "обратныйпуть(a)" обозначает ориентированную кривую, обратную к ориентированной кривой a.

1. Длина обратного пути равна длине пути.

   $\forall_{ab}(a = \text{обратныйпуть}(b) \rightarrow \text{длина}(a) = \text{длина}(b))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 2.

   $\forall_{a}(\text{длина}(\text{обратныйпуть}(a)) = \text{длина}(a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 3.

2. Явное указание фрагментов обратного пути, если путь задан перечислением фрагментов.

   $\forall_{abcd}(a = \text{путь}(c)\ \&\ \text{обратныйпуть}(\text{путь}(c)) = \text{путь}(d) \to b = \text{обратныйпуть}(a) \leftrightarrow b = \text{путь}(d))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" применяется к посылке задачи на исследование. Первый антецедент идентифицируется с другой посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормобратныйпуть". Выражение b имеет заголовок "Путь", т.е. обозначает траекторию движения материальной точки на заданном временном промежутке. Уровень срабатывания равен 3.

3. Отрезок обратного пути.

   $\forall_{ab}(\text{отрезокпути}(a, b) \to \text{отрезокпути}(\text{обратныйпуть}(a), \text{обратныйпуть}(b)))$

   Утверждение "отрезокпути(a, b)" означает, что ориентированная кривая a является частью ориентированной кривой b.

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Выражения "обратныйпуть(a)" и "обратныйпуть(b)" уже встречаются в этой задаче. Уровень срабатывания равен 4.

4. Начало и конец обратного пути.

   $\forall_{abc}(a = \text{обратныйпуть}(b)\ \&\ c = \text{конецпути}(a) \to \text{началопути}(b) = c)$

   $\forall_{abc}(a = \text{обратныйпуть}(b)\ \&\ c = \text{конецпути}(b) \to \text{началопути}(a) = c)$

   $\forall_{abc}(a = \text{обратныйпуть}(b)\ \&\ c = \text{началопути}(b) \to \text{конецпути}(a) = c)$

   $\forall_{abc}(a = \text{обратныйпуть}(b)\ \&\ c = \text{началопути}(a) \to \text{конецпути}(b) = c)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровни срабатывания равны 1 и 3.

5. Нормализатор общей стандартизации "нормобратныйпуть".

   (a) Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка операндов равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "обратныйпуть" и не входит в выражение b. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Путь, обратный к обратному.

   $\forall_{a}(\text{обратныйпуть}(\text{обратныйпуть}(a)) = a)$

   Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ab}(a = \text{обратныйпуть}(b) \to \text{обратныйпуть}(a) = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

   (c) Путь, обратный к пути, заданному перечислением фрагментов.

   $\forall_{ab}(\text{обратныйпуть}(\text{путь}(a, b)) = \text{путь}(\text{обратныйпуть}(b), \text{обратныйпуть}(a)))$

   Прием относится к случаю двухэлементного набора. Уровень срабатывания равен 1. Для общего случая служит следующий прием:

$\forall_{abc}$(обратныйпуть(путь(b)) = путь(c) $\rightarrow$ обратныйпуть(путь(префикс(a, b))) = путь(суффикс(c, обратныйпуть(a))))

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормобратныйпуть". Подвыражение "суффикс(...)" обрабатывается нормализатором "нормнабор". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Путь, обратный к отрезку.

$\forall_{AB}$(обратныйпуть(Отрезок(A, B)) = Отрезок(B, A))

Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "отрезокпути"

Утверждение "отрезокпути(a, b)" означает, что ориентированная кривая a является частью ориентированной кривой b.

1. Начальная часть составного пути входит в отрезок пути.

   $\forall_{abcde}$(c = путь(префикс(a, b)) & отрезокпути(d, c) & $0 \leq$ длина(d) $-$ длина(a) & началопути(d) = началопути(a) & простойпуть(c) $\rightarrow$ d = путь(a, e) & отрезокпути(e, путь(b)) & длина(e) = длина(d) $-$ длина(a) & началопути(e) = началопути(путь(b)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", третий и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Нет посылки вида "d = путь(префикс(a, x))". Уровень срабатывания равен 3.

2. Погружение отрезка пути в начальную часть составного пути.

   $\forall_{abcd}$(c = путь(префикс(a, b)) & длина(d) $-$ длина(a) ≤ 0 & началопути(d) = началопути(a) & простойпуть(c) $\rightarrow$ отрезокпути(d, c) $\leftrightarrow$ отрезокпути(d, a))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Второй и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

3. Проверочный оператор "усмотрезокпути".

   (a) Идентичные кривые.

   $\forall_{a}$(отрезокпути(a, a))

   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Часть траектории движения материальной точки.

   $\forall_{abpqr}$(Путь(a, p) = Путь(b, r) & $q \subseteq r$ $\rightarrow$ отрезокпути(Путь(b, q), Путь(a, p)))

   Первый антецедент выделен указателем "равно", второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатели "смравно" допускают косвенную идентификацию подвыражений "Путь(b, q)" и "Путь(a, p)" через равенства в посылках. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "началопути"

Выражение "началопути(a)" обозначает начальную точку ориентированной кривой a.

1. Составная траектория.

   $\forall_{abc}(b = \text{путь}(\text{префикс}(a, c)) \to \text{началопути}(b) = \text{началопути}(a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

2. Нормализатор общей стандартизации "нормначалопути".

   (a) Составная траектория.
   $\forall_{abc}(b = \text{путь}(\text{префикс}(a, c)) \to \text{началопути}(b) = \text{началопути}(a))$
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 1.

   (b) Использование равенства из посылок.
   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$
   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "началопути" и не входит в выражение b. Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Ориентированный отрезок.
   $\forall_{AB}(\text{началопути}(\text{Отрезок}(A, B)) = A)$
   Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "конецпути"

Выражение "конецпути(a)" обозначает конечную точку ориентированной кривой a. Для данного символа создан лишь нормализатор общей стандартизации "нормконецпути", имеющий следующие приемы:

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "конецпути" и не входит в выражение b. Уровень срабатывания равен 1.

2. Составная траектория.

   $\forall_{abc}(b = \text{путь}(\text{префикс}(a, c)) \to \text{конецпути}(b) = \text{конецпути}(\text{путь}(c)))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Набор c непустой. Уровень срабатывания равен 1.

3. Обратный путь.

   $\forall_{abc}(a = \text{обратныйпуть}(b)\ \&\ \text{началопути}(a) = c \to \text{конецпути}(b) = c)$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторо "нормобратныйпуть". Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "простойпуть"

Утверждение "простойпуть(a)" означает, что a есть ориентированная кривая без самопересечений. Для данного символа создан лишь проверочный оператор "усмпростойпуть", имеющий следующие приемы:

1. Усмотрение из простоты обратного пути.

   $\forall_{ab}(\text{простойпуть}(a) \ \& \ a = \text{обратныйпуть}(b) \to \text{простойпуть}(b))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение из простоты надпути.

   $\forall_{abc}(a = \text{путь}(\text{префикс}(b, c)) \ \& \ \text{простойпуть}(a) \to \text{простойпуть}(b))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "список" разрешает выбирать в качестве b любой элемент набора из первого антецедента. Уровень срабатывания приема равен 2.

   $\forall_{abcd}(\text{путь}(a) = c \ \& \ \text{путь}(b) = d \ \& \ \text{простойпуть}(c) \ \& \ \{; b\} \subseteq \{; a\} \to \text{простойпуть}(d))$

   Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

   Напомним, что в любом проверочном операторе, по умолчанию, присутствует также прием, проверяющий утверждение путем непосредственного обнаружения его в посылках.

Приемы, связанные с символом "общнаправл"

Утверждение "общнаправл(a, b)" означает, что ориентированные кривые a и b составлены из отрезков параллельных прямых. Для данного символа создан лишь проверочный оператор "усмобщнаправл", имеющий (кроме непосредственного обнаружения проверяемого утверждения в посылках) единственный прием:

$\forall_{Kab}(\text{вертикаль}(a, K) \ \& \ \text{вертикаль}(b, K) \to \text{общнаправл}(a, b))$

Антецеденты идентифицируются с посылками, уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "прямлинпуть"

Утверждение "прямлинпуть(a)" означает, что a есть ориентированная кривая, соответствующая прохождению некоторого отрезка от одного его конца к другому. Для данного символа создан лишь проверочный оператор "усмпрямлинпуть", имеющий следующие приемы:

1. Траектория представляет собой отрезок.

   $\forall_{AB}(\text{прямлинпуть}(\text{Отрезок}(A, B)))$

   $\forall_{ABa}(a = \text{Отрезок}(A, B) \to \text{прямлинпуть}(a))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Движение по наклонной плоскости.

   $\forall_{KTabp}$(движениепо(a,b,T) & поднимается(a,K,T) & Наклплоск(b,K,p,T) & вертплоскдвиж(a,K,T) & неподв(b,T) & неподв$(K,T) \to$ прямлинпуть(Путь(a,T)))

   Утверждение "поднимается(a,K,T)" означает, что материальная точка a в течение промежутка времени T движется так, что ее высота в системе координат K постоянно увеличивается. Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3. Движение с постоянной векторной скоростью.

   $\forall_{Ta}$(Равндвиж$(a,T) \to$ прямлинпуть(Путь(a,T)))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

4. Равноускоренное движение, начинающееся с состояния покоя.

   $\forall_{KSTapq}$(Равноускоренное(a,K,T) & Скорость$(a,K,p) =$ вектор0 & $T = [p,q]$ & $S \subseteq T \to$ прямлинпуть(Путь(a,S)))

   Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

5. Постоянная сила тянет за собой материальную точку.

   $\forall_{Tac}$(констсила(a,c,T) & тянет$(c,a,T) \to$ прямлинпуть(Путь(a,T)))

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "напрпути"

Выражение "напрпути(a)" обозначает единичный направляющий вектор ориентированной кривой a, представляющей собой ориентированный отрезок.

1. Скалярное произведение некоторого вектора на направляющий вектор траектории.

   $\forall_{ab}$(однонаправлены$(a,$ напрпути$(b)) \to$ скалумнож$(a,$ напрпути$(b)) =$ длина(a))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Вертикальная траектория.

   $\forall_{KSTabp}$(вверх(Ускорение$(a,K,T),K)$ & Равноускоренное(a,K,T) & $T = [p,q]$ & Скорость$(a,K,p) =$ вектор0 & $S \subseteq T \to$ коорд(напрпути(Путь(a,S))$,K) = (0,0,1)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Путь(a,S))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABKTast}$(вертикдвиж(a,K,T) & Равндвиж(a,T) & $T = [s,t]$ & $A =$ Место(a,s) & $B =$ Место(a,t) & $0 <$ крд$(B,K,3) -$ крд$(A,K,3) \to$ коорд(напрпути(Путь(a,T))$,K) = (0,0,1)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Путь(a, T))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Второй и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Ka}$(вертикаль(a, K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ коорд(напрпути(a), K) $=$
$(0, 0, \mathrm{sg}($крд(конецпути(a), $K, 3) -$ крд(началопути(a), $K, 3))))$

Утверждение "вертикаль(a, K)" означает, что траектория a состоит из отрезков, расположенных на оси OZ в прямоугольной системе координат K.

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(a)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{KTa}$(вверх(Скорость(a, K, T), K) & Равндвиж(a, T) $\rightarrow$
коорд(напрпути(Путь(a, T)), K) $= (0, 0, 1)$)

$\forall_{KTa}$(вниз(Скорость(a, K, T), K) & Равндвиж(a, T) $\rightarrow$
коорд(напрпути(Путь(a, T)), K) $= (0, 0, -1)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Путь(a, T))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

3. Движение по наклонннной плоскости.

   $\forall_{KTabp}$(движениепо(a, b, T) & Наклплоск(b, K, p, T) & вертплоскдвиж(a, K, T)
   & неподв(b, T) & поднимается(a, K, T) & $0 < p \rightarrow$
   коорд(напрпути(Путь(a, T)), K) $= (\cos p, 0, \sin p)$)

   Утверждение "Наклплоск(b, K, p, T)" означает, что b есть прямоугольная ориентированная материальная поверхность, которая на промежутке времени T либо в момент T параллельна оси OY системы координат K и составляет с осью абсцисс угол p, измеряемый от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Путь(a, T))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента, а также пятый антецедент идентифицируются с посылками. Четвертый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение p не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания приема равен 2.

   $\forall_{KTabpst}$(движениепо(a, b, T) & Наклплоск(b, K, p, t) & вертплоскдвиж(a, K, T)
   & неподв(b, T) & $T = [t, s]$ & Скорость(a, K, t) $=$ вектор0 &
   крд(Место(a, s), $K, 3) -$ крд(Место(a, t), $K, 3) < 0$ & Равноускоренное(a, K, T)
   & $0 < p \rightarrow$ коорд(напрпути(Путь(a, T)), K) $= (-\cos p, 0, -\sin p)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Путь(a, T))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый, седьмой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - идентифицируются с посылками. Выражение p не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{KTabpst}$(движениепо(a, b, T) & Наклплоск(b, K, p, t) & вертплоскдвиж(a, K, T) & неподв(b, T) & прямлинпуть(Путь(a, T)) & крд(Место$(a, s), K, 3) -$ крд(Место$(a, t), K, 3) < 0$ & $T = [t, s] \to$ коорд(напрпути(Путь$(a, T)), K) =$ $(-\cos p, 0, -\sin p)$)

Аналогично предыдущему. Проверочными операторами обрабатываются антецеденты с четвертого по шестой. Уровень срабатывания равен 2.

4. Движение по горизонтальной поверхности.

   $\forall_{KTabp}$(движениепо(a, b, T) & горизповерхн(b, K, T) & неподв(b, T) & Равндвиж(a, T) & $0 <$ крд(Скорость$(a, K, T), K, 1)$ & крд(Скорость(a, K, T), $K, 2) = 0 \to$ коорд(напрпути(Путь$(a, T)), K) = (1, 0, 0)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Путь(a, T))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором, шестой - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

5. Длина единичного вектора.

   $\forall_a$(длина(напрпути$(a)) = 1$)

   Уровень срабатывания равен 1.

6. Движение вдоль оси координат.

   $\forall_{KTa}$(движвправо$(a, K, T) \to$ коорд(напрпути(Путь$(a, T)), K) = (1, 0, 0)$)

   $\forall_{KTa}$(движвлево$(a, K, T) \to$ коорд(напрпути(Путь$(a, T)), K) = (-1, 0, 0)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Путь(a, T))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABK}$(вправо(вектор$(AB), K) \to$ коорд(напрпути(Отрезок$(A, B)), K) = (1, 0, 0)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "напрпути(Отрезок$(A$, $B)$)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "орокружность"

Выражение "орокружность(A, B, v)" обозначает ориентированную окружность в пространстве, имеющую своим центром точку A, проходящую через точку B и расположенную в плоскости, ортогональной вектору v. Ориентация - против часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора v.

Для данного символа пока создан единственный прием, определяющий длину окружности:

$\forall_{ABu}$(длина(орокружность$(A, B, u)) = 2\pi l(AB)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применения при усмотрении выражения "длина(орокружность(A, B, u))" в задаче на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "ордуга"

Выражение "ордуга(A, B, C, v)" обозначает ориентированную дугу окружности с центром в точке A, начинающуюся в точке B и кончающуюся в точке C. Вектор v ортогонален плоскости окружности и определяет ориентацию: дуга обходится против часовой стрелки, если смотреть вдоль вектора v.

Для данного символа пока создан единственный прием, определяющий длину дуги:

$\forall_{ABCu}$(длина(ордуга$(A, B, C, u)) = l(AB)\angle(BAC)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применение при усмотрении выражения "длина(ордуга(A, B, C, u))" в задаче на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 3.

1.5 Уравнение прямой на плоскости

Ввод в рассмотрение уравнения прямой на плоскости

$\forall_{ABCDEKMabcd}$(коорд$(M, K) = (a, b)$ & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0)$ & $K = (C, D, E)$ &
$M \in$ прямая$(AB) \to c$ – число & d – число & коорд(прямая$(AB), K) =$
$\text{set}_{xy}(y + cx + d = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение прямой AB через старые параметры (пакетные индикаторы, используемые в аналитической геометрии, будут описаны в конце главы). Прием вводит новые параметры c, d. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKP}(K = (A, B, C) \to \exists_{xy}$(Прямая$(x)$ & $P(x, y)) \leftrightarrow \exists_{abcxy}$(коорд$(x, K) =$
$\text{set}_{uv}(au + bv + c = 0$ & u – число & v – число) & a – число & b – число &
c – число & Прямая(x) & $P(x, y)$)))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условию задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Он выполняет переход от бескоординатного к координатному описанию. Антецедент идентифицируется с посылкой; переменная P функциональная. Переменная y идентифицируется с набором переменных произвольной длины (возможно, нулевой). Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри $P(x, y)$ выражения "коорд(X, K)" либо "точки(X, K)"; таким образом уточняется, что тройка K является системой координат. Задача имеет посылку "планиметрия". Утверждение "$P(x, y)$" не имеет конъюнктивного члена вида "коорд$(x, K) = \ldots$". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{AKabc}$(Прямая$(A) \to a$ – число & b – число & c – число & $\neg(a^2+b^2=0)$ & коорд$(A,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(A,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Из контекста усматривается, что система координат K двумерная: имеется либо посылка "планиметрия", либо посылка "коорд$(X,K) = (p,q)$", либо посылка "коорд$(X,K) = \mathrm{set}_{uv}(\ldots)$", либо посылка "$K = (P,Q,R)$". Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение прямой A через старые параметры. Прием вводит новые параметры a,b,c. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABKabc}(a$ – число & b – число & c – число & коорд(прямая$(AB),K) = \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a^2+b^2=0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB,K))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Из контекста усматривается, что система координат K двумерная. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение прямой AB через старые параметры. Прием вводит новые параметры a,b,c. Уровень срабатывания равен 4.

Угловой коэффициент прямой

$\forall_{AKabc}$(Прямая(A) & коорд$(A,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число) $\to$ $b\cdot$ углкоэффициент$(A,K)+a=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "углкоэффициент(A,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкоорд". Уровень срабатывания равен 3.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$\forall_{ABCDKabcd}(C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & коорд$(C,K) = (a,b)$ & коорд$(D,K) = (c,d)$ & разныеточки$(C,D) \to$ коорд(прямая$(AB),K) = \mathrm{set}_{xy}((d-b)x+(a-c)y+bc-ad=0$ & x – число & y – число))

Созданы три версии приема, причем все они имеют заголовок "вывод". Первая версия срабатывает на уровне 2. Указатель "контрольвывода" инициирует попытку ее применения при усмотрении подвыражения "Диаметр(прямая(AB),X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Вторая версия срабатывает на уровне 4. Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, причем выражения a,b,c,d не содержат неизвестных. Первые два антецедента выделены указателем "усм", последний - обрабатывается проверочным оператором. Пакетный индикатор "существкоорд" усматривает возможность связать координаты прямой AB с неизвестными задачи. Третья версия срабатывает на уровне 9. Она аналогична второй версии, но отброшены ограничения на параметры a,b,c,d и вместо пакетного индикатора "существкоорд" используется индикатор "связкоорд", допускающий более косвенные связи с неизвестными.

$\forall_{ABKabcd}$(коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & разныеточки$(A,B)\to$ коорд(прямая$(AB),K)=\mathrm{set}_{xy}((d-b)x+(a-c)y+bc-ad=0$ & $x-$число & $y-$число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Принадлежность точки прямой, заданной через координаты

$\forall_{ABKPab}$(коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд(прямая$(AB),K)=\mathrm{set}_{xy}(P(x,y))\to P(a,b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Переменная P функциональная. Уравнение прямой не содержит неизвестных. Каждое из выражений a,b либо содержит неизвестную внешней задачи на описание, либо имеет общую переменную с уравнением, содержащим такую неизвестную. Уровень срабатывания равен 1. Созданы еще три версии данного приема. В первой из них, срабатывающей на уровне 2, требуется, чтобы уравнение прямой не содержало неизвестных, а выражения a,b - содержали. При этом должна иметься посылка "биссектриса(...)", содержащая переменную A. Вторая версия тоже срабатывает на уровне 2. В ней требуется, чтобы выражения a,b не содержали неизвестных, а уравнение прямой - содержало. Последняя версия имеет уровни срабатывания 3 и 6. В ней никаких требований на координаты точки A и уравнение прямой не накладывается.

$\forall_{ABCKabcde}(\neg(C\in$ прямая$(AB))$ & коорд$(C,K)=(d,e)$ & коорд(прямая$(AB),K)=\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & $x-$ число & $y-$ число$)\to\neg(ad+be+c=0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1. Указатели "подстановка" допускают вырожденные нулевые значения коэффициентов a,b.

Вектор коэффициентов прямой - ненулевой

Все приемы этого подраздела имеют заголовок "вывод".

$\forall_{AKabcdef}$(Прямая(A) & коорд$(A,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & $x-$ число & $y-$ число) & $a=de$ & $b=df\to\neg(d=0))$

Первый и второй антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "идентификатор". Проверочный оператор не усматривает отличие d от нуля. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{AKac}$(Прямая(A) & коорд$(A,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax+c=0$ & $x-$ число & $y-$ число$)\to\neg(a=0))$

$\forall_{AKac}$(Прямая(A) & коорд$(A,K)=\mathrm{set}_{xy}(ay+c=0$ & $x-$ число & $y-$ число$)\to\neg(a=0))$

$\forall_{ABKac}$(коорд(прямая$(AB),K)=\mathrm{set}_{xy}(ax+c=0$ & $x-$число & $y-$число$)\to\neg(a=0))$

$\forall_{ABKac}$(коорд(прямая$(AB),K)=\mathrm{set}_{xy}(ay+c=0$ & $x-$число & $y-$число$)\to\neg(a=0))$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Проверочный оператор не усматривает, что a не равно 0. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKabcdefpq}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax/p + by/q + c = 0$ & x – число & y – число) & $a = de$ & $b = df \to \neg(d = 0)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, два других - выделены указателем "идентификатор". Проверочный оператор не усматривает, что d не равно 0. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKabc}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) $\to \neg(a^2 + b^2 = 0)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Выражения a, b не константные. Уравнение прямой не содержит неизвестных. Проверочный оператор не усматривает, что сумма квадратов a и b отлична от нуля. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{AKabc}$(Прямая(A) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) $\to \neg(a^2 + b^2 = 0)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, исследование либо преобразование. Проверочный оператор не усматривает, что какой-либо из коэффициентов a, b отличен от нуля. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{AKabcd}$(Прямая(A) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x = a + bt$ & $y = c + dt$ & t – число)) $\to \neg(b^2 + d^2 = 0)$)

Аналогично предыдущему.

Усмотрение противоречия: уравнение прямой выродилось в тождество

$\forall_{ABK}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(x$ – число & y – число) $\to$ ложь)

$\forall_{AK}$(Прямая(A) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(x$ – число & y – число) $\to$ ложь)

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Уровень срабатывания равен 2.

Усмотрение прямой

$\forall_{EKabc}(\neg(a^2+b^2 = 0)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c = 0$ & x–число & y–число) $\to$ Прямая(E))

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "линия". Такая цель означает, что анализируется вид кривой, заданной своим уравнением. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Уточнение коэффициентов уравнения прямой с помощью соотношения пропорциональности, имеющегося в посылках

$\forall_{abcpqr}(ap+bq = 0$ & $\neg((a, b) = (0, 0)) \to \mathrm{set}_{xy}(px+qy+r = 0$ & x–число & y–число) $= \mathrm{set}_{xy}(-bx + ay + c = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b не содержат неизвестных, а выражения p, q - содержат. Прием вводит новую неизвестную c, причем дополнительно к основному преобразованию создает новые посылки "$ar + cq = 0$", "c—число". Уровень срабатывания равен 3.

Стандартизация вида уравнения прямой

1. Попытка упрощения свободного члена.

   $\forall_{abcd}(d = c \to \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) =$
   $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + d = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается с помощью задачи на преобразование. Внутри выражения c встречается сумма, имеющая дробное слагаемое. Результат упрощения d короче этого выражения. Уровень срабатывания приема равен 3.

2. Изменение знака всех слагаемых уравнения.

   $\forall_{abc}(\mathrm{set}_{xy}(-ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) =$
   $\mathrm{set}_{xy}(ax - by - c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

   Прием имее заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

3. Устранение явного выражения одной переменной через другую.

   $\forall_{ab}(\mathrm{set}_{xy}(y = ax/b \ \& \ x - \text{число}) = \mathrm{set}_{xy}(ax - by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

   $\forall_{ab}(\mathrm{set}_{yx}(y = ax/b \ \& \ x - \text{число}) = \mathrm{set}_{yx}(ax - by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Применение их в задачах на преобразование блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

Существование прямой

$\forall_{Kab}(\neg(a = 0) \to \exists_x(\text{Прямая}(x) \ \& \ \text{коорд}(x, K) = \mathrm{set}_{cd}(ac + b = 0 \ \& \ c - \text{число} \ \&$
$d - \text{число})))$

$\forall_{Kab}(\neg(a = 0) \to \exists_x(\text{Прямая}(x) \ \& \ \text{коорд}(x, K) = \mathrm{set}_{cd}(ad + b = 0 \ \& \ c - \text{число} \ \&$
$d - \text{число})))$

$\forall_{Kabc}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \to \exists_x(\text{Прямая}(x) \ \& \ \text{коорд}(x, K) = \ \mathrm{set}_{uv}(au + bv + c = 0 \ \&$
$u - \text{число} \ \& \ v - \text{число})))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Указатель "кванторнаясвертка" допускает их применение к квантору общности, рассматриваемому как отрицание квантора существования. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Kabc}(\exists_{AB}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \&$
$\neg(A = B) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка}) \leftrightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$

Прием имеет заголовок "связка" и позволяют исключить несущественные неизвестные A, B задачи на описание. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{AKabcde}$(коорд$(A,K) = (d,e)$ & d – число & e – число & $\neg(c=0) \to$
$\exists_B$(коорд(прямая(AB), K) = $\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число) &
$\neg(A=B)$ & B – точка) $\leftrightarrow ad+be+c=0$)

Прием имеет заголовок "связка". Уровень срабатывания равен 5.

Ввод вспомогательного обозначения для прямой, заданной своим уравнением

$\forall_{AKabc}$(точки($\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число), K) = A)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применение при усмотрении подвыражения "точки($\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y–число), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствуют как посылка вида "точки($\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число), K) = X", так и посылка вида "коорд(X,K) = $\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число)". Прием вводит новую переменную A. Уровень срабатывания равен 2.

Ввод в рассмотрение координат точки, использованной в обозначении прямой

$\forall_{ABKPab}$(коорд(прямая(AB), K) = $\mathrm{set}_{xy}(P(x,y)) \to a$ – число & b – число &
коорд$(A,K) = (a,b)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. В последнем случае должно существовать вхождение A в некоторую посылку, не имеющее вида "точка(A)", "$\neg(A=X)$" либо "прямая(AB)". В задаче нет явного соотношения для координат точки A в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные a,b. Уровень срабатывания равен 2.

Ввод в рассмотрение координат общей точки двух прямых

$\forall_{ABCDEKPQabcdef}(C \in$ прямая(AB) & $C \in$ прямая(DE) & $P \in$ прямая(AB) &
коорд$(P,K) = (a,b)$ & $Q \in$ прямая(DE) & коорд$(Q,K) = (c,d) \to$
e – число & f – число & коорд$(C,K) = (e,f)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию подвыражения "коорд(прямая(DE),K)" некоторой посылки. Четвертый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "усм". Обозначения прямых AB и DE различны. Указатель "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки C относительно K. Прием вводит новые переменные e,f. Уровень срабатывания равен 2.

Переход к однопараметрическому представлению прямой, параллельной оси координат

$\forall_{KP}(\exists_{abxy}$(Прямая$(x)$ & коорд(x,K) = $\mathrm{set}_{uv}(au+b=0$ & u – число & v – число)
& a – число & b – число & $P(x,y)) \leftrightarrow \exists_{axy}$(Прямая$(x)$ & коорд(x,K) =
$\mathrm{set}_{uv}(u+a=0$ & u – число & v – число) & a – число & $P(x,y)$))

$\forall_{KP}(\exists_{abxy}(\text{Прямая}(x)\ \&\ \text{коорд}(x,K) = \text{set}_{uv}(av+b=0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ P(x,y)) \leftrightarrow \exists_{axy}(\text{Прямая}(x)\ \&\ \text{коорд}(x,K) = \text{set}_{uv}(v+a=0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ P(x,y)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная, y идентифицируется с набором переменных произвольной длины. Уровень срабатывания равен 2.

Параллельность прямых

1. Прямая, параллельная оси координат.

   $\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AC),K) = \text{set}_{xy}(x=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

   $\forall_{ABCK}(K = (A,B,C) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB),K) = \text{set}_{xy}(y=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{AKMNPabc}(\text{Прямая}(A)\ \&\ K = (M,N,P)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \rightarrow A \parallel \text{прямая}(AB) \leftrightarrow b=0)$

   $\forall_{AKMNPabc}(\text{Прямая}(A)\ \&\ K = (M,N,P)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \rightarrow A \parallel \text{прямая}(MN) \leftrightarrow a=0)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подутверждению условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDKabc}(\text{Прямая}(A)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ A \parallel \text{прямая}(BD)\ \&\ K = (B,C,D) \rightarrow b=0)$

   $\forall_{ABCDKabc}(\text{Прямая}(A)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ A \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ K = (B,C,D) \rightarrow a=0)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первый, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть, получающаяся после обработки левой нормализатором "нормкоорд", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDEKabc}(\text{коорд}(\text{прямая}(AE),K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{прямая}(AE) \parallel \text{прямая}(BD)\ \&\ K = (B,C,D) \rightarrow b=0)$

   $\forall_{ABCDEKabc}(\text{коорд}(\text{прямая}(AE),K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{прямая}(AE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ K = (B,C,D) \rightarrow a=0)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Правая часть первого антецедента содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

2. Прямая, параллельная заданному вектору.

   $\forall_{ABKabcpq}(\text{Прямая}(A)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ A \parallel B\ \&\ \text{Вектор}(B)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (p,q) \rightarrow ap+bq=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(A, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй и пятый - выделены указателем "идентификатор". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCKabcpq}$(коорд(прямая(AC)$, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y-$число) & прямая(AC) $\parallel B$ & Вектор(B) & коорд$(B, K) = (p, q) \to ap{+}bq = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

3. Прямая, параллельная заданной прямой.

   $\forall_{ABCDKabcd}$(коорд(прямая(AD)$, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y-$число) & прямая(AD) $\parallel$ прямая(BC) $\to d-$число & коорд(прямая(BC)$, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(BC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможность выразить уравнение прямой BC через старые параметры. Прием вводит новую переменную d. Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии приема, в которых пакетный индикатор не используется, а лишь проверяется отсутствие посылки, явно задающей уравнение прямой BC. В первой из данных версий, срабатывающей на уровне 3, указатель "контрольвывода" относится к подутверждению "осьсимметрии(прямая(BC),K)". Во второй версии, срабатывающей на уровне 5, указатель "контрольвывода" не используется. Здесь первый антецедент идентифицируется с посылкой, а второй - выделен указателем "равно" и идентифицируется с одной либо двумя посылками.

   $\forall_{ABCDKabcdpqr}$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & разныеточки(A, B) & коорд(прямая(CD)$, K) = \mathrm{set}_{xy}(px + qy + r = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) $\to$ прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD) $\leftrightarrow q(d - b) - p(a - c) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи. В случае задач на описание, имеющих цель "исследовать", прием блокируется. Последний антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 2.

   $\forall_{ABCDEKabcdpq}$(коорд(прямая(AD)$, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & прямая(AD) $\parallel$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & коорд$(E, K) = (p, q) \to$ коорд(прямая(BC)$, K) =$
   $\mathrm{set}_{xy}(ax + by - ap - bq = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент выделен указателем "равно", третий - указателем "усм". Выражения a, b, p, q не содержат неизвестных. Отсутствует посылка, явно задающая уравнение прямой BC. Обозначения прямых AD и BC различны. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCKabcdef}$(Прямая(A) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & $A \parallel$ прямая(BC) & коорд(прямая$(BC), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) $\to ae - bd = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(BC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDKabcdef}$(коорд(прямая$(AD), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & прямая$(AD) \parallel$ прямая(BC) & коорд(прямая$(BC), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) $\to ae - bd = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(BC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDKabcdef}$(коорд(прямая$(AD), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) $\to$ прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \leftrightarrow ae - bd = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи. В случае задач на описание, имеющих цель "исследовать", прием блокируется. Первый антецедент выделен укзателем "идентификатор", второй - идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания приема равен 3.

4. Прямая, равноудаленная от двух других прямых.

$\forall_{ABCKabcd}$(расстмежду$(A, C) =$ расстмежду(B, C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(au + bv + d = 0$ & u – число & v – число) $\to$ коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + (c + d)/2 = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(C, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "равно", два других - указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой C. Уровень срабатывания равен 3.

5. Точка, равноудаленная от двух параллельных прямых.

$\forall_{ABCDEabcdpq}(M \in$ прямая(AB) & $N \in$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(MN) & $l(ME) = l(NE)$ & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(au + bv + d = 0$ & u – число

& v – число) & коорд$(E, K) = (p, q)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(MN)) \to 2ap + 2bq + c + d =)$

Прием имеет заголовок "вывод". Пятый, шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первые четыре антецедента выделены указателем "усм", последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

6. Условие различия пересекающихся прямых.

   $\forall_{ABCDEKabcdef}(E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ set$_{uv}(du{+}ev{+}f = 0$ & u–число & v–число) & $\neg$(прямая(AB) = прямая$(CD)) \to \neg(ae - bd = 0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый и второй - выделены указателем "усм". Точка привязки выбрана в пятом антецеденте. Уровень срабатывания равен 1.

7. Расстояние между параллельными прямыми.

   $\forall_{ABCDKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ set$_{uv}(au + bv + d = 0$ & u – число & v – число) $\to$ расстмежду(прямая(AB), прямая$(CD)) =$ $|c - d|/\sqrt{a^2 + b^2})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ set$_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & $ae - bd = 0$ & $\neg(d = 0) \to$ расстмежду(прямая(AB), прямая$(CD)) = |cd - af|/(|d|\sqrt{a^2 + b^2}))$

   $\forall_{ABCDKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ set$_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & $ae - bd = 0$ & $\neg(e = 0) \to$ расстмежду(прямая(AB), прямая$(CD)) = |ce - bf|/(|e|\sqrt{a^2 + b^2}))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" применяются к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Обозначения прямых AB и CD различны. Уровень срабатывания равен 4.

8. Нормализатор общей стандартизации "нормрасстмежду".

   Нормализатор имеет единственный прием, использующий равенство из посылок:

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "расстмежду" и не входит в выражение b.

Перпендикулярность прямых

1. Условие перпендикулярности прямых.

   $\forall_{ABCDKabcdef}(\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \mathbin{\&} x - \text{число} \mathbin{\&} y - \text{число}) \mathbin{\&} \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC) \mathbin{\&} \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{uv}(du + ev + f = 0 \mathbin{\&} u - \text{число} \mathbin{\&} v - \text{число}) \mathbin{\&} \text{прямкоорд}(K) \to ad + be = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(BC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

2. Ввод в рассмотрение уравнения прямой, перпендикулярной данной.

   $\forall_{ABCDKabcd}(\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \mathbin{\&} x - \text{число} \mathbin{\&} y - \text{число}) \mathbin{\&} \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC) \mathbin{\&} \text{прямкоорд}(K) \to d - \text{число} \mathbin{\&} \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}(bx - ay + d = 0 \mathbin{\&} x - \text{число} \mathbin{\&} y - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(BC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "усм". Из контекста усматривается, что система координат K двумерная. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение прямой BC через старые параметры. Прием вводит новый параметр d. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDKMabcd}(\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = M \mathbin{\&} M = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \mathbin{\&} x - \text{число} \mathbin{\&} y - \text{число}) \mathbin{\&} \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC) \mathbin{\&} \text{прямкоорд}(K) \to d - \text{число} \mathbin{\&} \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{uv}(bu - av + d = 0 \mathbin{\&} u - \text{число} \mathbin{\&} v - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкоорд". Третий антецедент выделен указателем "усм". Посылка для уравнения прямой BC пока отсутствует. Прием вводит новый параметр d. Уровень срабатывания равен 5.

3. Перпендикулярность двух прямых, одна из которых задана уравнением, а другая проходит через две точки с известными координатами.

   $\forall_{ABCDEFKabcdpqr}(\text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(CD) \mathbin{\&} A \in \text{прямая}(EF) \mathbin{\&} B \in \text{прямая}(EF) \mathbin{\&} \text{коорд}(A, K) = (a, b) \mathbin{\&} \text{коорд}(B, K) = (c, d) \mathbin{\&} \text{прямкоорд}(K) \mathbin{\&} \text{разныеточки}(A, B) \mathbin{\&} \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{xy}(px + qy + r = 0 \mathbin{\&} x - \text{число} \mathbin{\&} y - \text{число}) \to (a - c)q + (d - b)p = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Шестой и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента выделены указателем "усм", четвертый и пятый - указателем "идентификатор". Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

4. Ввод уравнений сторон квадрата.

   $\forall_{ABCDKabcde}$(прямкоорд(K) & квадрат($ABCD$) $\rightarrow a$ – число & b – число & c – число & d – число & e – число & коорд(прямая(AB), K) = set$_{xy}$($ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая(BC), K) = set$_{xy}$($-bx + ay + d = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая(CD), K) = set$_{xy}$($ax + by + e = 0$ & x – число & y – число) & (коорд(прямая(AD), K) = set$_{xy}$($-bx+ay+d+e-c = 0$ & x–число & y–число) $\vee$ коорд(прямая(AD), K) = set$_{xy}$($-bx + ay + d + c - e = 0$ & x – число & y – число)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. В посылках задачи уже встречаются выражения "коорд(прямая(AB),K)", "коорд(прямая(BC),K)", "коорд(прямая(CD),K)", "коорд(прямая(AD),K)", причем нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнения этих прямых. Точка пересечения диагоналей квадрата в задаче не рассматривается. Уровень срабатывания равен 2.

Параметрическое уравнение прямой

1. Ввод в рассмотрение параметрического уравнения прямой на плоскости.

   $\forall_{ABKMabcd}$(Прямая(A) & $A \parallel B$ & Вектор(B) & коорд(B, K) = (c, d) & $M \in A$ & коорд(M, K) = (a, b) $\rightarrow$ коорд(A, K) = set$_{xy}$($\exists_t$(t – число & $x = ct + a$ & $y = dt + b$)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(A, K)" в посылке задачи на исследование, имеющей цель "вспомпараметр". Такая цель указывает на предпочтительное представление ответа в виде параметрического описания. Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками, четвертый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" пока не определяет уравнение прямой A. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{AKMNabcd}$(Прямая(A) & $M \in A$ & $N \in A$ & коорд(M, K) = (a, b) & коорд(N, K) = (c, d) & ($\neg(c - a = 0)$ $\vee$ $\neg(d - b = 0)$) $\rightarrow$ коорд(A, K) = set$_{xy}$($\exists_t$(t – число & $x = (c - a)t + a$ & $y = (d - b)t + b$)))

   $\forall_{AKMNabcd}$(Прямая(A) & $M \in A$ & $N \in A$ & коорд(M, K) = (a, b) & коорд(N, K) = (c, d) & разныеточки(M, N) $\rightarrow$ коорд(A, K) = set$_{xy}$($\exists_t$(t – число & $x = (c - a)t + a$ & $y = (d - b)t + b$)))

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "коорд(A, K)" в посылке задачи на исследование, имеющей цель "вспомпараметр". Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Нормализатор "нормкоорд" пока не определяет уравнение прямой A. Уровень срабатывания равен 3.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

1. Условие пересечения двух прямых.

$\forall_{ABKabcpqr}$(Прямая(A) & Прямая(B) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{vw}(pv + qw + r = 0$ & v – число & w – число) $\rightarrow$ двепрямые$(A, B,$ пересекаются$) \leftrightarrow \neg(aq - bp = 0))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Последний антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Первые два антецедента обрабатываются проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABKabcpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{vw}(pv + qw + r = 0$ & v – число & w – число) & $\neg(aq - bp = 0) \rightarrow$ двепрямые$(A, B, s) \leftrightarrow s =$ пересекаются)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1, 3 и 5.

2. Условие параллельности прямых.

$\forall_{ABKabcpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{vw}(pv + qw + r = 0$ & v – число & w – число) & $aq - bp = 0$ & $\neg(ar - cp = 0) \rightarrow$ двепрямые$(A, B, s) \leftrightarrow$ $s =$ параллельно)

$\forall_{ABKabcpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{vw}(pv + qw + r = 0$ & v – число & w – число) & $aq - bp = 0$ & $\neg(br - cq = 0) \rightarrow$ двепрямые$(A, B, s) \leftrightarrow$ $s =$ параллельно)

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1, 3 и 5.

3. Условие совпадения прямых.

$\forall_{ABKabcpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(B, K) = \mathrm{set}_{vw}(pv + qw + r = 0$ & v – число & w – число) & $aq - bp = 0$ & $br - cq = 0$ & $ar - cp = 0 \rightarrow$ двепрямые$(A, B, s) \leftrightarrow$ $s =$ равны)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 1, 3 и 5.

Взаимное расположение трех прямых на плоскости

1. Три прямые образуют треугольник.

$\forall_{ABCKabcdefpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & z – число & w – число) &

$\neg(\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0)\ \&\ \neg(ae - bd = 0)\ \&\ \neg(aq - bp = 0)\ \&\ \neg(dq - pe = 0) \to$ трипрямые$(A, B, C, s) \leftrightarrow s = 5)$

Случай $s = 5$ означает, что три прямые образуют треугольник. Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые шесть антецедентов идентифицируются с утверждениями из контекста, остальные - обрабатываются проверочным оператором. Определитель вычисляется нормализатором "нормопределитель". Уровни срабатывания равны 1, 3 и 5.

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x -$ число $\&\ y -$ число$)$ & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u -$ число $\&\ v -$ число$)$ & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0\ \&\ z -$ число $\&\ w -$ число$) \to$ трипрямые$(A, B, C, 5) \leftrightarrow$ $\neg(\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0)\ \&\ \neg(ae - bd = 0)\ \&\ \neg(aq - bp = 0)\ \&\ \neg(dq - pe = 0))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента обрабатываются проверочным оператором, последние три - идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdefpqrst}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&$ $x -$ число $\&\ y -$ число$)$ & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&$ $u -$ число $\&\ v -$ число$)$ & коорд(прямая$(EF), K) = \mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0\ \&$ $z -$ число $\&\ w -$ число$)$ & $P \in$ прямая(AB) & $P \in$ прямая(CD) & $Q \in$ прямая(CD) & $Q \in$ прямая(EF) & $R \in$ прямая(AB) & $R \in$ прямая(EF) & разныепрямые(прямая(AB), прямая$(CD))$ & разныеточки(P, Q) & разныеточки(P, R) & $\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}) = st \to s = 0 \leftrightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Антецеденты с четвертого по девятый выделены указателем "усм". Следующие три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение s представляет собой сумму, имеющую не менее шести слагаемых и включающую все параметры уравнений прямых AB, CD и EF. Лишь при таких, сравнительно редких, ситуациях предпринимается попытка вычисления определителя. Уровень срабатывания равен 5.

2. Три прямые не параллельны и имеют единственную общую точку.

$\forall_{ABCKabcdefpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x -$ число $\&\ y -$ число$)$ & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u -$ число $\&\ v -$ число$)$ & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0\ \&\ z -$ число $\&\ w -$ число$)\ \&\ \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0\ \&$ $(\neg(ae - bd = 0)\ \vee\ \neg(aq - bp = 0)\ \vee\ \neg(dq - pe = 0)) \to$ трипрямые$(A, B, C, s) \leftrightarrow s = 4)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые шесть антецедентов идентифицируются с утверждениями из контекста, седьмой - выделен указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1, 3 и 5.

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & $z -$ число & $w -$ число) $\to$ трипрямые$(A, B, C, 4) \leftrightarrow$ $\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0$ & $(\neg(ae - bd = 0) \vee \neg(aq - bp = 0) \vee \neg(dq - pe = 0)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, последние три - идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 3.

3. Две прямые параллельны, а третья пересекает их.

$\forall_{ABCKabcdefpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & $z -$ число & $w -$ число) & $ae - bd = 0$ & $\neg(aq - bp = 0) \to$ трипрямые$(A, B, C, s) \leftrightarrow s = 3)$

$\forall_{ABCKabcdefpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & $z -$ число & $w -$ число) & $aq - bp = 0$ & $\neg(ae - bd = 0) \to$ трипрямые$(A, B, C, s) \leftrightarrow s = 2)$

$\forall_{ABCKabcdefpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & $z -$ число & $w -$ число) & $dq - pe = 0$ & $\neg(ae - bd = 0) \to$ трипрямые$(A, B, C, s) \leftrightarrow s = 1)$

Число s равно номеру прямой, не параллельной двум другим. Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первые шесть антецедентов идентифицируются с утверждениями из контекста. Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор", восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1,3 и 5.

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & $z -$ число & $w -$ число) $\to$ трипрямые$(A, B, C, 3) \leftrightarrow$ $ae - bd = 0$ & $\neg(aq - bp = 0))$

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(B, K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд$(C, K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(pz + qw + r = 0$ & $z -$ число & $w -$ число) $\to$ трипрямые$(A, B, C, 2) \leftrightarrow$ $aq - bp = 0$ & $\neg(ae - bd = 0))$

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A,K) =$ set$_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число) & коорд$(B,K) =$ set$_{uv}(du+ev+f=0$ & u – число & v – число) & коорд$(C,K) =$ set$_{zw}(pz+qw+r=0$ & z – число & w – число) $\to$ трипрямые$(A,B,C,1) \leftrightarrow dq-pe=0$ & $\neg(ae-bd=0))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, следующие три - идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 3.

4. Три прямые параллельны.

$\forall_{ABCKabcdefpqrs}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A,K) =$ set$_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число) & коорд$(B,K) =$ set$_{uv}(du+ev+f=0$ & u – число & v – число) & коорд$(C,K) =$ set$_{zw}(pz+qw+r=0$ & z – число & w – число) & $ae-bd=0$ & $aq-bp=0 \to$ трипрямые$(A,B,C,s) \leftrightarrow s=0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые шесть антецедентов идентифицируются с утверждениями из контекста, два последних - выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 1, 3 и 5.

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(Прямая(A) & Прямая(B) & Прямая(C) & коорд$(A,K) =$ set$_{xy}(ax+by+c=0$ & x – число & y – число) & коорд$(B,K) =$ set$_{uv}(du+ev+f=0$ & u – число & v – число) & коорд$(C,K) =$ set$_{zw}(pz+qw+r=0$ & z – число & w – число) $\to$ трипрямые$(A,B,C,0) \leftrightarrow ae-bd=0$ & $aq-bp=0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, последние три - идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 3.

Взаимное расположение двух точек относительно прямой

1. Точки по одну сторону от прямой.

$\forall_{ABCDKabcdpqr}$(коорд(прямая$(CD),K) =$ set$_{xy}(px+qy+r=0$ & x – число & y – число) & коорд$(A,K) = (a,b)$ & коорд$(B,K) = (c,d)$ & A – точка & B – точка & $0 \leq (ap+bq+r)(cp+dq+r) \to$ однасторона$(A,B,$прямая$(CD)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "классточки(A,X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Данное подвыражение обозначает элемент конечного набора X, содержащий точку A. Если таких элементов несколько, берется любой из них. Если такого элемента нет, то берется пустое множество. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "$B \in Y$". Первый, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Шестой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения a,b,c,d не содержат неизвестных. Выводимое утверждение не усматривается из контекста с помощью проверочного оператора. Уровни срабатывания равны 2 и 4. Создана еще одна версия приема, имеющая те же уровни срабатывания. В ней указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "классточки$(A,$областифигуры$(X))$". Здесь "областифигуры(X)" обозначает множество областей, на которые плоскость разбивается прямыми, проходящими через стороны многоугольника X. Указатель "контекст" отсутствует, зато требуется, чтобы точка B встречалась в выражении X. Не усматривается принадлежность точки B прямой CD.

$\forall_{ABCDKabcdefghp}(\text{коорд}(A,K)=(a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(c,d)\ \&\ \text{коорд}(C,K)=(e,f)\ \&\ \text{коорд}(D,K)=(g,h)\ \&\ p=da-bc\ \&\ \text{однасторона}(C,D,\text{прямая}(AB))\to 0\le((b-d)e+(c-a)f+p)((b-d)g+(c-a)h+p))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

2. Точки по разные стороны от прямой.

   $\forall_{ABCDKabcdpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{xy}(px+qy+r=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(a,b)\ \ \&\ \text{коорд}(B,K)=(c,d)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ (ap+bq+r)(cp+dq+r)\le 0\to\text{разныестороны}(A,B,\text{прямая}(CD)))$

   На этой теореме созданы два приема, совершенно аналогичные двум первым приемам предыдущего пункта.

   $\forall_{ABCDKabcdefghp}(\text{коорд}(A,K)=(a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(c,d)\ \&\ \text{коорд}(C,K)=(e,f)\ \&\ \text{коорд}(D,K)=(g,h)\ \&\ p=da-bc\ \&\ \text{разныестороны}(C,D,\text{прямая}(AB))\to((b-d)e+(c-a)f+p)((b-d)g+(c-a)h+p)\le 0)$

   Аналогично последнему приему предыдущего пункта.

3. Точка в полосе.

   $\forall_{ABCDKMabcdpq}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uv}(au+bv+d=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(M,K)=(p,q)\ \&\ (ap+bq+c)(ap+bq+d)\le 0\to M\in\text{полоса}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "классточки(M,X)" в задаче на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "полоса(прямая(AB)прямая(CD))". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

4. Точка вне полосы.

   $\forall_{ABCDEKMabcdpqrs}(E\in\text{прямая}(CD)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uv}(au+bv+d=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(M,K)=(p,q)\ \&\ 0\le(ap+bq+c)(ap+bq+d)\ \&\ r=|ap+bq+c|\ \&\ s=|ap+bq+d|\ \&\ 0\le s-r\to M\in\text{обрполуплоскость}(\text{прямая}(AB),E))$

   Выражение "обрполуплоскость(прямая(AB),E)" обозначает полуплоскость, ограниченную прямой AB и не содержащую точки E.

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "классточки(M,X)" в задаче на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "обрполуплоскость(прямая(AB),E)". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "усм". Четвертый, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор", пятый и восьмой - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

5. Усмотрение принадлежности точки пересечения двух прямых отрезку.

   $\forall_{ABCDEKabcdpqr}(E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{xy}(px + qy + r = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d)\ \&\ (ap + bq + r)(cp + dq + r) \leq 0\ \&\ \neg(ap + bq - cp - dq = 0) \rightarrow E \in \text{отрезок}(AB))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "классточки(M, X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "отрезок(AB)". Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", шестой и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, d, p, q не содержат неизвестных. Уровни срабатывания равны 2 и 4.

6. Усмотрение принадлежности точки пересечения двух прямых лучу.

   $\forall_{ABCDEKabcdpqrs}(E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{xy}(px + qy + r = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d)\ \&\ 0 \leq (ap + bq + c)(cp + dq + r)\ \&\ \neg(ap + bq - cp - dq = 0)\ \&\ s = |ap + bq + r|\ \&\ t = |cp + dq + r|\ \&\ 0 \leq t - s \rightarrow E \in \text{обратныйлуч}(AB))$

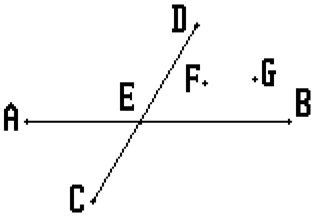
   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "классточки(E, X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "обратныйлуч(AB)". Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Четвертый, пятый, восьмой и девятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Шестой, седьмой и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, d, p, q не содержат неизвестных. Уровни срабатывания равны 2 и 4.

7. Ввод в рассмотрение уравнения прямой, проходящей через две точки с известными координатами, если на ней лежит точка, для которой рассматривается вопрос о принадлежности ее одному из множеств заданного списка.

   $\forall_{ABCDEKabcd}(E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (c, d)\ \&\ \text{разныеточки}(C, D) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}((d - b)x + (a - c)y + bc - ad = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "классточки(E, X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм". Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 3.

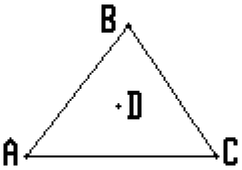
8. Две точки расположены внутри угла, образованного двумя прямыми.



$\forall_{ABCDEFGKabcdepq}(E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ F \in \text{Угол}(BED)\ \&$
$G \in \text{Угол}(BED)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&$
$x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \to 0 \le (ad + be + c)(ap + bq + c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Третий, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента выделены указателем "усм", шестой и седьмой - указателем "идентификатор". Обозначения точек F, G не совпадают. Уровень срабатывания равен 3.

9. Точка внутри треугольника.



$\forall_{ABCDKabcdepq}(\text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&$
$y - \text{число})\ \&\ D \in \text{фигура}(ABC)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (d, e)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \to$
$0 \le (ad + be + c)(ap + bq + c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "идентификатор". Вершины треугольника идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания равен 4.

Ввод в рассмотрение уравнения прямой, проходящей через точку пересечения двух других прямых

$\forall_{ABCDEFKPabcdef}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&$
$y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&$
$v - \text{число})\ \&\ P \in \text{прямая}(AB)\ \&\ P \in \text{прямая}(CD)\ \&\ P \in \text{прямая}(EF)\ \&$
$\text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD))\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(EF),$
$\text{прямая}(CD)) \to p - \text{число}\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(EF), K) =$
$\text{set}_{xy}((a + dp)x + (b + ep)y + c + fp = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(EF),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, следующие три - выделены указателем "усм". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных, причем хотя бы одно из них неконстантное. Из контекста усматривается планиметрическая ситуация. Обозначения прямых AB, CD и EF попарно различны. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой EF. Прием вводит новый параметр p. Уровень срабатывания приема равен 2.

$$\begin{gathered}\forall_{ABCDEFKPabcdef}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\\ v - \text{число})\ \&\ P \in \text{прямая}(AB)\ \&\ P \in \text{прямая}(CD)\ \&\ P \in \text{прямая}(EF)\ \&\\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)) \to p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\\ \text{коорд}(\text{прямая}(EF), K) = \mathrm{set}_{xy}((pa + dq)x + (pb + eq)y + pc + fq = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\\ y - \text{число})\ \&\ \neg((p, q) = (0, 0)))\end{gathered}$$

Отличие от предыдущего приема состоит лишь в том, что последний антецедент отброшен и введен дополнительный новый параметр q. Уровень срабатывания прежний.

Уравнение биссектрисы угла

1. Ввод в рассмотрение уравнения для биссектрисы угла.

   $$\begin{gathered}\forall_{ABCDKabcdefklmnpqrst}(\text{биссектриса}(BACD)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =\\ \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AC),\\ K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ \text{направлвектор}(A, B, K, p)\\ \&\ \text{направлвектор}(A, C, K, q)\ \&\ p = (mb, l)\ \&\ q = (ne, t)\ \&\ m = kr\ \&\ n = ks\ \&\\ \text{прямкоорд}(K) \to \text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) =\\ \mathrm{set}_{xy}((a \cdot \mathrm{sg}(r)/\sqrt{a^2 + b^2} + d \cdot \mathrm{sg}(s)/\sqrt{d^2 + e^2})x +\\ (b \cdot \mathrm{sg}(r)/\sqrt{a^2 + b^2} + e \cdot \mathrm{sg}(s)/\sqrt{d^2 + e^2})y +\\ c \cdot \mathrm{sg}(r)/\sqrt{a^2 + b^2} + f \cdot \mathrm{sg}(s)/\sqrt{d^2 + e^2} = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))\end{gathered}$$

   Утверждение "направлвектор(A, B, K, p)" означает, что p есть координаты в системе координат K некоторого вектора, однонаправленного с вектором AB.

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AD, K))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками. Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются пакетным синтезатором "направлвектор". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Из контекста усматривается планиметрическая ситуация. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AD. Уровень срабатывания равен 1.

   $$\begin{gathered}\forall_{ABCDKabcdefklmnpqrst}(\text{биссектриса}(BACD)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =\\ \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) =\\ \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ \text{направлвектор}(A, B, K, p)\ \&\\ \text{направлвектор}(A, C, K, q)\ \&\ p = (m, n)\ \&\ q = (k, l)\ \&\ rt = \mathrm{sg}(an - bm)\ \&\\ st = \mathrm{sg}(dl - ek)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to \text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) =\end{gathered}$$

$\mathrm{set}_{xy}((ar/\sqrt{a^2+b^2}+ds/\sqrt{d^2+e^2})x+(br/\sqrt{a^2+b^2}+es/\sqrt{d^2+e^2})y+$
$cr/\sqrt{a^2+b^2}+fs/\sqrt{d^2+e^2}=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f, r, s не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AD. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDKabcdefs}(\text{биссектриса}(BACD)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) =$
$\mathrm{set}_{uv}(du+ev+f=0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ s = \mathrm{sg}(ad+be)\ \&$
$0 < \pi/2 - \angle(BAC)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to \text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) =$
$\mathrm{set}_{xy}((a/\sqrt{a^2+b^2}+ds/\sqrt{d^2+e^2})x+(b/\sqrt{a^2+b^2}+es/\sqrt{d^2+e^2})y+$
$c/\sqrt{a^2+b^2}+fs/\sqrt{d^2+e^2}=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AD. Уровень срабатывания равен 3.

2. Соотношение для коэффициентов уравнения биссектрисы.

   $\forall_{ABCDKabcdmnpqr}(\text{биссектриса}(BACD)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \mathrm{set}_{xy}(px+qy+r=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&$
   $\text{направлвектор}(A, B, K, m)\ \&\ \text{направлвектор}(A, C, K, n)\ \&\ m = (a, b)\ \&$
   $n = (c, d) \to (ad+bc)(q^2-p^2)+2pq(ac-bd)=0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент и два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Уровень срабатывания равен 3.

3. Усмотрение противоречия: точки на сторонах угла лежат по одну сторону от биссектрисы.

   $\forall_{ABCDKabcdpqr}(\text{биссектриса}(ACBD)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) =$
   $\mathrm{set}_{xy}(px+qy+r=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&$
   $\text{коорд}(B, K) = (c, d)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{разныеточки}(A, C)\ \&$
   $\text{разныеточки}(B, C)\ \&\ 0 \leq (ap+bq+r)(cp+dq+r) \to \text{ложь})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, c, d, p, q, r не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

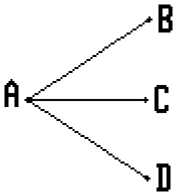
4. Уравнения для биссектрис углов между двумя прямыми.

   $\forall_{ABCDEFKabcdefpq}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&$

коорд(прямая(CD), K) $= \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) &
биссектриса($BEDF$) & $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $q = \sqrt{d^2 + e^2} \rightarrow$
коорд(прямая(EF), K) $= \mathrm{set}_{xy}((aq - dp)x + (bq - ep)y + cq - fp = 0$ &
x – число & y – число) $\vee$
коорд(прямая(EF), K) $= \mathrm{set}_{xy}((aq + dp)x + (bq + ep)y + cq + fp = 0$ &
x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент, а также антецеденты с четвертого по шестой идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", седьмой и восьмой - указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой EF. Уровень срабатывания равен 4.

5. Ввод в рассмотрение уравнения другой стороны угла, если известны уравнение биссектрисы и первой стороны.



$\forall_{ABCDKabcdefp}$(биссектриса($BADC$) & прямкоорд(K) & коорд(прямая(AC),
K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая(AB),
K) $= \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) $\rightarrow p$ – число &
коорд(прямая(AD), K) $= \mathrm{set}_{xy}((a^2d + 2abe - b^2d)x + (b^2e + 2abd - a^2e)y +$
$p = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражения a, b, d, e не содержат неизвестных. Обозначения прямых AB и AD различны. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AD. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 5. В ней только первые два антецедента идентифицируются с посылками, а последние два - выделены указателем "идентификатор". В остальном версии совпадают.

$\forall_{ABCDKabcdefp}(\angle(BAC) = \angle(CAD)$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD))
& прямкоорд(K) & коорд(прямая(AC), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ &
x – число & y – число) & коорд(прямая(AB), K) $= \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ &
u – число & v – число) $\rightarrow p$ – число & коорд(прямая(AD), K) $=$
$\mathrm{set}_{xy}((a^2d + 2abe - b^2d)x + (b^2e + 2abd - a^2e)y + p = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Последние три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, d, e не содержат неизвестных. Углы BAC и CAD уже рассматриваются в задаче. Обозначения прямых AB и AD различны. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AD. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

Угол между двумя прямыми

1. Тангенс угла между прямыми.

   $\forall_{ABCDEFGKabcdef}$(прямкоорд(K) & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & $F \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(CD) & актив$(\angle(FEG))$ & $\neg(\mathrm{tg}(\angle(FEG)) = 0) \to \mathrm{tg}(\angle(FEG))(ad + be) + ae - bd = 0 \ \vee$ $\mathrm{tg}(\angle(FEG))(ad + be) + bd - ae = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый, четвертый, пятый и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй, третий, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "усм". Девятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается перпендикулярность прямых AB и CD. Уровень срабатывания равен 4.

2. Косинус острого угла между прямыми.

   $\forall_{ABCDKabcdefm}$(прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) $\to$ (cos(уголмежду(прямая(AB), прямая(CD)))$)^2(a^2 + b^2)(d^2 + e^2) - (ad + be)^2 = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 6.

   $\forall_{ABCDK}$(прямкоорд$(K) \to$ актив(коорд(прямая$(AB), K$)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка, содержащая подвыражение "коорд(прямая(AB), K)". Уровень срабатывания равен 7.

3. Угол между прямыми, объединение которых задается одним уравнением.

   $\forall_{ABCDEKab}$(прямкоорд(K) & $E =$ прямая$(AB) \cup$ прямая(CD) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 = 0$ & x – число & y – число) $\to$ cos(уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))) $= |(a + b)/(a - b)|$ & $\neg(a - b = 0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровни срабатывания приема равны 3 и 6.

   $\forall_{ABCDEGHKabcd}$(прямкоорд(K) & $E =$ прямая$(AB) \cup$ прямая(CD) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(GH), K) = \mathrm{set}_{uv}(cu + dv = 0$ & u – число & v – число) $\to$ cos(Уголмежду(прямая(AB), прямая(CD), прямая(GH))) $=$ $(a + b)/(a - b)\mathrm{sg}(c^2|b| - d^2|a|)$ & $\neg(a - b = 0))$

Выражение "Уголмежду(прямая(AB), прямая(CD), прямая(GH))" обозначает величину того угла между прямыми AB и CD, в котором лежит прямая GH.

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "Уголмежду(прямая(AB), прямая(CD), прямая(GH))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 6.

4. Усмотрение перпендикулярных прямых.

   $\forall_{ABCDKabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ ad + be = 0 \rightarrow \text{уголмежду}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)) = \pi/2)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 6.

5. Ввод в рассмотрение уравнения прямой, проходящей под заданным углом к другой прямой.

   $\forall_{ABCDKabcp}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{tg}(\angle(BAC)) = p\ \&\ \text{актив}(\angle(BAC))\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \rightarrow d - \text{число}\ \&\ (\text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{xy}((pb + a)x + (b - pa)y + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \vee\ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{xy}((a - pb)x + (b + pa)y + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "усм". Выражения a, b, p не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AC. Прием вводит новый параметр d. Уровень срабатывания равен 5.

6. Ввод в рассмотрение уравнения второй боковой стороны равнобедренного треугольника, если даны уравнения основания и первой боковой стороны.

   $\forall_{ABCKabcdefp}(l(AB) = l(BC)\ \&\ \text{разныепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(BC))\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ \text{разныеточки}(A, B) \rightarrow p - \text{число}\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}((ad^2 + 2bde - ae^2)x + (be^2 + 2ade - bd^2)y + p = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты с третьего по пятый идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b, d, e не содержат неизвестных. Не усматривается перпендикулярность прямых AB и BC. Обозначения прямых AB и BC различны. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой BC. Прием вводит новый параметр p. Уровень срабатывания равен 2.

Расстояние от точки до прямой

1. Расстояние от точки до прямой.

   $\forall_{ABCKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(C, K) = (d, e) \to$ (расстдопрямой$(C,$ прямая$(AB))^2(a^2 + b^2) = (ad + be + c)^2$))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстдопрямой(C, прямая(AB))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDKabcde}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(A, K) = (d, e)$ & прямкоорд(K) & актив$(l(AB)) \to$ $l(AB)^2 = (ad + be + c)^2/(a^2 + b^2)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Первый, второй и шестой антецеденты выделены указателем "усм". Выражения a, b, c, d, e не содержат неизвестных; выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

2. Расстояния от двух точек до прямой.

   $\forall_{ABCDKabcmnpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & прямкоорд(K) & расстдопрямой$(C,$ прямая$(AB)) = m$ & расстдопрямой$(D,$ прямая$(AB)) = n$ & коорд$(C, K) = (p, q)$ & коорд$(D, K) = (r, s) \to a(pn - rm) + b(qn - sm) + c(n - m) = 0 \;\vee$ $a(pn + rm) + b(qn + sm) + c(n + m) = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

3. Точка, равноудаленная от двух перпендикулярных прямых.

   $\forall_{ABCDEKabcdefmn}$(прямкоорд(K) & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & $a^2 + b^2 - d^2 - e^2 = 0$ & расстдопрямой$(E,$ прямая$(AB)) =$ расстдопрямой$(E,$ прямая$(CD))$ & коорд$(E, K) = (m, n) \to am + bn + c - dm - en - f = 0 \;\vee$ $am + bn + c + dm + en + f = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый, третий, четвертый и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой антецедент выделен указателем "равно", второй - указателем "усм". Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Уравнения прямых AB и CD содержат неизвестные. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 2.

4. Точка пересечения диагоналей квадрата.

$\forall_{ABCDEKab}$(квадрат($ABCD$) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) &
коорд(прямая(AB), K) $= a$ & коорд(прямая(BC), K) $= b \rightarrow$
расстдопрямой(E, прямая(AB)) $=$ расстдопрямой(E, прямая(BC)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый, четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Точка привязки выбрана в четвертом антецеденте. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм". Существует посылка, определяющая координаты точки E. Уровень срабатывания равен 2.

5. Касательная к окружности.

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) – касательная к окружность(CD) $\rightarrow$
расстдопрямой(C, прямая(AB)) $= l(CD)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Эта задача имеет посылку, определяющую уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 3.

6. Две касательных к одной окружности.

$\forall_{ABCDKPQabcdefpq}$(прямкоорд($K$) & прямая($AB$)–касательная к окружность(PQ) & прямая(CD) – касательная к окружность(PQ) & коорд(прямая(AB), K) $=$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая(CD), K) $=$ $\mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & коорд(P, K) $= (r, s)$ &
$\neg(ae - bd = 0)$ & $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $q = \sqrt{d^2 + e^2} \rightarrow$
$(aq - dp)r + (bq - ep)s + cq - fp = 0 \ \vee\ (aq + dp)r + (bq + ep)s + cq + fp = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой, восьмой и девятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 4.

7. Вписанная окружность.

$\forall_{ABCDPQ}$(квадрат($ABCD$) & окружность(PQ)вписана в фигура($ABCD$) $\rightarrow$
$P \in$ прямая(AC) & $P \in$ прямая(BD) & прямая(AC) $\perp$ прямая(BD))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Вершины квадрата идентифицируются с точностью до циклических перестановок. Указатель "вариант" распространяет прием также на ромбы и параллелограммы. Существует посылка, содержащая подвыражение вида "коорд(прямая(AB),K)". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура($ABCD$) $\rightarrow$
расстдопрямой(P, прямая(AB)) $= l(PQ)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Допускаются циклические перестановки вершин четырехугольника. Существует посылка, содержащая подвыражение вида "коорд(прямая(AB),K)". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$
расстдопрямой(P, прямая(AB)) $= l(PQ)$)

$\forall_{ABCPQ}$(окружность(PQ)вписана в фигура$(ABC) \to P \in$ фигура(ABC))

Аналогично предыдущему.

8. Нормализатор общей стандартизации "нормрасстдопрямой".

   Нормализатор имеет единственный прием, использующий равенство из посылок: $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "расстдопрямой" и не входит в выражение b.

Определение коэффициентов пропорциональности для прямой в пучке прямых из линейного соотношения для этих коэффициентов

$\forall_{abcd}(\neg((a,b) = (0,0))\ \&\ ac + bd = 0\ \&\ d = -a)$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Задача имеет комментарий (направл c d), означающий, что переменные c, d были введены с точностью до произвольного ненулевого общего множителя. После срабатывания приема данная степень свободы пропадает, и комментарий (направл c d) исключается. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 3.

Условие непринадлежности трех точек одной прямой

$$\forall_{ABCKabcdef}(\text{коорд}(A,K) = (a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (c,d)\ \&\ \text{коорд}(C,K) = (e,f)\ \&$$
$$\neg(C \in \text{прямая}(AB)) \to \neg(\det(\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}) = 0))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый и третий - выделены указателем "идентификатор". Выводимое утверждение неконстантное. Уровень срабатывания равен 3.

Мощности различных множеств, связанных с прямыми

1. Мощность прямой.

   $\forall_{AB}(\text{card}(\text{прямая}(AB)) = \text{континуум})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

2. Мощность семейства прямых.

   $\forall_{Aafg}(\neg(a = 0) \to \text{card}(\text{set}_x(\exists_y(x = \text{set}_{uv}(f(y)u + g(y)v + a = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&$ $v - \text{число})\ \&\ A(y)))) = \text{card}(\text{set}_x(\exists_y(x = (f(y), g(y))\ \&\ A(y)))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

3. Мощность пересечения прямой с другим множеством.

   $\forall_{Aabc}(\text{card}(\text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ A(x,y)\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})) =$ $(\text{card}(\text{set}_x(A(x, -(c + ax)/b)\ \&\ x - \text{число}))$ при $\neg(b = 0)$, иначе (card(set$_y$($A(-c/a, y)$ & y – число)) при $\neg(a = 0)$, иначе (0 при $\neg(c = 0)$, иначе card(set$_{xy}$($A(x, y)$ & x – число & y – число))))))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

Ввод уравнения касательной к кривой общего вида

$\forall_{ABCEKabfpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xy}$($f(x, y) = 0$ & x – число & y – число) & $a = df(p, q)/dp$ & $b = df(p, q)/dq$ & a – число & b – число & прямая(BC)–касательная к E & $A \in E$ & $A \in$ прямая(BC) & коорд(A, K) $= (p, q) \rightarrow$ коорд(прямая(BC), K) $=$ set$_{xy}$($a(x - p) + b(y - q) = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента, а также седьмой и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Девятый антецедент выделен указателем "усм". Третий, четвертый и десятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Производные вычисляются с помощью вспомогательных задач на преобразование. Пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Их истинность означает существование производных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой BC. Уровень срабатывания равен 6.

Нормализатор общей стандартизации "нормуглкоэффициент"

Нормализатор имеет единственный прием, использующий равенство из посылок: $\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "углкоэффициент" и не входит в выражение b.

Синтезатор "точканапрямой"

Синтезатор реализует утверждение "точканапрямой(a, b)", означающее, что a есть тройка коэффициентов уравнения прямой на плоскости в некотором базисе; b - пара координат в этом же базисе некоторой точки данной прямой. Входные данные - a, выходные - b. Синтезатор имеет всего два приема:

$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \rightarrow$ точканапрямой$((a, b, c), (-c/a, 0)))$

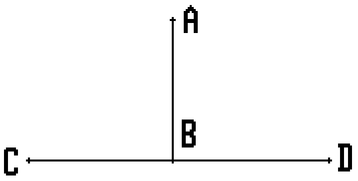
$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \rightarrow$ точканапрямой$((a, b, c), (0, -c/b)))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

Синтезатор "расстдопрямой"

Синтезатор реализует утверждение "расстдопрямой(a, b) $= c$". Входные данные - a, b. Выходное выражение c не содержит неизвестных. Синтезатор имеет два приема:

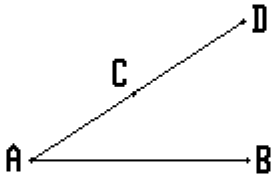
1. Из точки опущен перпендикуляр на прямую.



$\forall_{ABCD}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & $l(AB) = a \rightarrow$ расстдопрямой$(A,$ прямая$(CD)) = a)$

Первые два антецедента выделены указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Выражение a не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

2. Использование соотношения пропорциональности.



$\forall_{ABCDabc}(C \in$ прямая(AD) & $al(AC) = bl(AD)$ & расстдопрямой$(C,$ прямая$(AB)) = c \rightarrow$ расстдопрямой$(D,$ прямая$(AB)) = ac/b)$

Первый антецедент выделен указателем "усм", второй и третий - обрабатываются пакетными синтезаторами. Выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

1.6 Уравнение прямой в пространстве

Каноническое уравнение прямой в пространстве, имеющее вид "$(x - x_0)/a = (y - y_0)/b = (z - z_0)/c$", будем записывать с помощью утверждения "пропорцнаборы$((x - x_0, y - y_0, z - z_0), (a, b, c))$".

Ввод уравнения прямой, проходящей через заданную точку

$\forall_{ABCKabcpqr}$(коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & $A \in$ прямая$(BC) \rightarrow p$ – число & q – число & r – число & коорд(прямая$(BC), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x-a, y-b, z-c), (p, q, r))$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(BC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм". Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение прямой BC через уже введенные параметры. Прием вводит новые параметры p, q, r. Уровень срабатывания равен 6. Создана еще одна версия приема, не использующая указателя "контрольвывода". Антецеденты ее обрабатываются так же, как в первой версии. Требуется наличие посылки, выражающей включение прямой BC в гиперболоид, параболоид либо эллипсоид. Уровень срабатывания прежний.

Ввод уравнения прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

$\forall_{ABCKabcdef}(A \in$ прямая(BC) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & направлпрямой(прямая(BC), $K, (d, e, f)) \rightarrow$ коорд(прямая$(BC), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x - a, y - b, z - c),$ $(d, e, f))$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой BC. Уровень срабатывания равен 3.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

$\forall_{ABCDKabcdef}(C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (a, b, c)\ \&$
$\text{коорд}(D, K) = (d, e, f)\ \&\ \text{разныеточки}(C, D) \to \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x-a, y-b, z-c), (d-a, e-b, f-c))\ \&\ x - \text{число}\ \&$
$y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента выделены указателем "усм", следующие два - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, не использующая указателя "контрольвывода". У нее третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый и второй - выделены указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Существует посылка, в которой обозначение прямой AB расположено непосредственно под символом "коорд" либо "содержится". Кроме того, в задаче должны рассматриваться координаты какой-либо прямой либо плоскости. Если прямая AB - координатная ось, то прием блокируется. Уровень срабатывания прежний.

Принадлежность точки прямой, заданной своим уравнением

$\forall_{ABKPabc}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}P(x, y, z) \to$
$P(a, b, c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Переменная P функциональная. Уровни срабатывания равны 3 и 6.

Условие на направляющий вектор прямой

$\forall_{ABKabcd}(\neg(a = 0) \to \text{направлпрямой}(\text{прямая}(AB), K, (ab, ac, ad)) \leftrightarrow$
$\text{направлпрямой}(\text{прямая}(AB), K, (b, c, d)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABKabcdef}(\text{направлпрямой}(\text{прямая}(AB), K, m)\ \&\ m = (a, b, c)\ \&$
$\text{направлпрямой}(\text{прямая}(AB), K, (d, e, f)) \to ae - bd = 0\ \&\ bf - ce = 0\ \&\ af - cd = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Выводимая конъюнкция неконстантная. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKabcdefp}$(коорд(прямая(AB)$,K)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a,y+b,z+c),$ $(d,e,f))$ & x – число & y – число & z – число) & направлпрямой(прямая(AB), $K,p)\to p=(d,e,f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Переменная p идентифицируется с переменной, не встречающаяся в других посылках, кроме, быть может, посылок вида "$p=X$", где X - переменная, не встречающаяся в других посылках. Уровень срабатывания равен 7.

Усмотрение отличия от нуля общего множителя координат направляющего вектора прямой

$\forall_{ABKabcdef}$(коорд(прямая(AB)$,K)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a,y+b,z+c),$ $(0,de,df))$ & x – число & y – число & z – число) $\to\neg(d=0))$

$\forall_{ABKabcdefgpqr}$(коорд(прямая(AB)$,K)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a,y+b,\ z+c),$ $(de/p,df/q,dg/r))$ & x – число & y – число & z – число) $\to\neg(d=0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 2.

Переход от параметрического уравнения прямой к каноническому

$\forall_{abcd}(\mathrm{set}_{xyz}(x=a+by$ & $z=c+dy$ & y – число$)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x-a,y,$ $z-c),(b,1,d))$ & x – число & y – число & z – число))

$\forall_{abcd}(\mathrm{set}_{xyz}(x=a+bz$ & $y=c+dz$ & z – число$)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x-a,y-c,$ $z),(b,d,1))$ & x – число & y – число & z – число))

$\forall_{abcd}(\mathrm{set}_{xyz}(y=a+bx$ & $z=c+dx$ & x – число$)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x,y-a,$ $z-c),(1,b,d))$ & x – число & y – число & z – число))

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "заменавхождений" обеспечивает одновременную замену всех вхождений данного подвыражения в задаче. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdef}(\mathrm{set}_{xyz}(\exists_t(x=a+bt$ & $y=c+dt$ & $z=e+ft$ & t – число$))=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x-a,y-c,z-e),(b,d,f))$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки. Задача не должна иметь ни одной из целей "известны", "учетрезультата", "вспомпараметр", указывающих на предпочтительность параметрического задания. Заменяемое вхождение является одной из частей равенства, имеющего в противоположной части выражение "коорд(прямая(...)...)". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcde}(\mathrm{set}_{xyz}(\exists_t(x=a+bt$ & $y=c+dt$ & t – число) & $z=e)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x-a,y-c,z-e),(b,d,0))$ & x – число & y – число & z – число))

$\forall_{abcde}(\mathrm{set}_{xyz}(\exists_t(x=a+bt$ & $z=c+dt$ & t – число) & $y=e)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x-a,y-c,z-e),(b,0,d))$ & x – число & y – число & z – число))

$\forall_{abcde}(\mathrm{set}_{xyz}(\exists_t(y=a+bt$ & $z=c+dt$ & t – число) & $x=e)=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x-e,y-a,z-c),(0,b,d))$ & x – число & y – число & z – число))

Аналогично предыдущему.

Ввод в рассмотрение координат точки, лежащей на прямой

$\forall_{ABCKabcdefp}(C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}(\ (x+a, y+b, z+c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}) \to p - \text{число}\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (-a+pd, -b+pe, -c+pf))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", второй - указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Точка C используется в задаче для обозначения некоторой прямой, отличной от AB. Заметим, что совпадение точки C с какой-либо из точек A, B допускается. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координатный набор точки C. Прием вводит новый параметр p. Уровень срабатывания приема равен 3. Создана еще одна версия приема. В ней указатель "контрольвывода" не используется. Однако, введен указатель "контекст", определяющий дополнительную идентификацию подвыражения посылки, имеющего вид "коорд(прямая(CX),K)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Не усматривается принадлежность точки X прямой AB. Уровень срабатывания прежний.

Ввод уравнения для ортогональной проекции прямой на плоскость

$\forall_{ABCDEFGKabcdefgmnkpqr}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{прямая}(FG) = \text{проекция}(\text{прямая}(AB), \text{плоскость}(CDE))\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+e, y+f, z+g), (p, q, r))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{uvw}(au+bv+cw+d=0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ m = a^2+b^2+c^2\ \&\ n = -ae-bf-cg+d\ \&\ k = ap+bq+cr \to \text{коорд}(\text{прямая}(FG), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+e+an/m, v+f+bn/m, w+g+cn/m), (p-ak/m, q-bk/m, r-ck/m))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд(прямая(AB),K)= класс(...)". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой FG. Уровень срабатывания равен 2.

Определение уравнения прямой на плоскости по уравнению ее в пространстве

$\forall_{ABCDKMNPQabcdefghijklmnpqrst}(Q = (M, N, P)\ \&\ \text{коорд}(M, K) = (a, b, c)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(MN), K) = (d, e, f)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(MP), K) = (g, h, k)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+p, y+q, z+r), (m, n, s))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ (m = du+gv\ \&\ n = eu+hv\ \&\ s = fu+kv\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}) = (u = i\ \&\ v = j)\ \&\ (-p = a+du+gv\ \&\ -q = b+eu+hv\ \&\ -r = c+fu+kv\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}) = (u = l\ \&\ v = t) \to \text{коорд}(\text{прямая}(AB), Q) = \text{set}_{uv}(-ju+iv+jl-it=0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),Q)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB относительно системы Q. Уровень срабатывания равен 4.

Параллельность прямых

1. Ввод уравнения прямой, параллельной оси координат.

   $\forall_{ABCDKPQab}(K = (A, B, C, D)$ & прямая$(PQ) \parallel$ прямая$(AB) \to a$ – число & b – число & коорд(прямая$(PQ), K) = \mathrm{set}_{xyz}(y + a = 0$ & $z + b = 0$ & x – число & y – число & z – число))

   $\forall_{ABCDKPQab}(K = (A, B, C, D)$ & прямая$(PQ) \parallel$ прямая$(AC) \to a$ – число & b – число & коорд(прямая$(PQ), K) = \mathrm{set}_{xyz}(x + a = 0$ & $z + b = 0$ & x – число & y – число & z – число))

   $\forall_{ABCDKPQab}(K = (A, B, C, D)$ & прямая$(PQ) \parallel$ прямая$(AD) \to a$ – число & b – число & коорд(прямая$(PQ), K) = \mathrm{set}_{xyz}(x + a = 0$ & $y + b = 0$ & x – число & y – число & z – число))

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку срабатывания при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(PQ),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможность выразить уравнение прямой PQ через старые параметры. Прием вводит новые параметры a, b. Уровень срабатывания равен 2.

2. Ввод уравнения прямой, параллельной данной прямой.

   $\forall_{ABCDKabcdefpqr}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))$ & x – число & y – число & z – число) $\to p$ – число & q – число & r – число & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u + p, v + q, w + r), (d, e, f))$ & u – число & v – число & w – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(CD),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм". Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", определяет уравнение прямой AB при помощи нормализатора "нормкоорд". Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможность выразить уравнение прямой CD через старые параметры. Прием вводит новые переменные p, q, r. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема, в которой указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "коорд(прямая(AB),K)". В остальном версии одинаковы.

   $\forall_{ABCDEKabcdef}$(прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & $E \in$ прямая(AB) & коорд(вектор$(CD), K) = (a, b, c)$ & коорд$(E, K) = (d, e, f) \to$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x - d, y - e, z - f), (a, b, c))$ & x – число & y – число & z – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый и второй - выделены указателем "усм". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 4.

3. Условие параллельности двух прямых.

   $\forall_{ABCDKabcdefghkpqr}$(прямая($AB$) $\|$ прямая(CD) & коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{xyz}(пропорцнаборы(($x+a, y+b, z+c$), (d, e, f)) & x – число & y – число & z – число) & коорд(прямая(CD), K) $=$ set_{uvw}(пропорцнаборы(($u+g, v+h, w+k$), (p, q, r)) & u – число & v – число & w – число) $\rightarrow$ $dq - pe = 0$ & $er - qf = 0$ & $dr - pf = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент выделен указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

4. Условие параллельности прямой и плоскости.

   $\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}$(прямая($AB$) $\|$ прямая(CD) & коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{xyz}(пропорцнаборы(($x+a, y+b, z+c$), (d, e, f)) & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(CDE), K) $=$ set_{uvw}($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) $\rightarrow$ $pd + qe + rf = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "усм", второй - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

Перпендикулярность прямых

1. Ввод уравнения прямой, перпендикулярной плоскости.

   $\forall_{ABCDEKabcdpqr}$(прямкоорд(K) & прямая(AB) $\perp$ плоскость(CDE) & коорд(плоскость(CDE), K) $=$ set_{xyz}($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $F \in$ прямая(AB) & коорд(F, K) $= (p, q, r)$ $\rightarrow$ коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{uvw}(пропорцнаборы(($u-p, v-q, w-r$), (a, b, c)) & u – число & v – число & w – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и четвертый - выделены указателем "усм", третий и пятый - указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 3. В ней указатель "контрольвывода" не используется. Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, второй и четвертый - выделены указателем "усм", третий - указателем "идентификатор".

   $\forall_{ABCDEKabcdpqr}$(прямкоорд(K) & прямая(AB) $\perp$ плоскость(CDE) & коорд(плоскость(CDE), K) $=$ set_{xyz}($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y–число & z–число) $\rightarrow$ p–число & q–число & r–число & коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{uvw}(пропорцнаборы(($u+p, v+q, w+r$), (a, b, c)) & u – число & v – число & w – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение прямой AB через старые параметры. Прием вводит новые переменные p, q, r. Уровень срабатывания равен 3.

2. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

   $\forall_{ABCDKabcdefmnpqr}$(прямкоорд$(K)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & коорд$(C, K) = (d, e, f)$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xyz}$(пропорцнаборы($(x+a, y+b, z+c), (p, q, r))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $m = p(a+d) + q(b+e) + r(c+f)$ & $n = p^2 + q^2 + r^2$ & $D \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ коорд(прямая$(CD), K) =$ set$_{xyz}$(пропорцнаборы($(x-d, y-e, z-f)$, $(mp-(a+d)n, mq-(b+e)n, mr-(c+f)n))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(CD),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй и седьмой - выделены указателем "усм". Антецеденты с четвертого по шестой выделены указателем "идентификатор". Выражения $a, b, c, d, e, f, p, q, r$ не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой CD. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. В ней указатель "контрольвывода" не используется. Антецеденты обрабатываются так же, как в первой версии, причем точка привязки выбрана во втором из них. В остальном версии одинаковы.

3. Условие перпендикулярности двух прямых.

   $\forall_{ABCDKabcdefghkpqr}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xyz}$(пропорцнаборы($(x+a, y+b, z+c), (d, e, f))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ set$_{uvw}$(пропорцнаборы($(u+g, v+h$, $w+k), (p, q, r))$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & прямкоорд$(K) \rightarrow$ $dp + eq + fr = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "усм". Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд(прямая(AB),K) $=$ класс$(\ldots)$". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDEFGKPQRabcdefghmpqrst}$(прямая$(AB) \perp$ прямая(PQ) & прямкоорд(K) & прямая$(AB) \subseteq$ плоскость(FGH) & коорд(плоскость$(CDE), K) =$ set$_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(FGH), K) =$ set$_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & коорд(прямая$(PQ), K) =$ set$_{XYZ}$(пропорцнаборы($(X+p, Y+q, Z+r), (s, t, m))$ & $X -$ число & $Y -$ число & $Z -$ число) $\rightarrow$ $(bg - cf)s + (ce - ag)t + (af - be)m = 0$)

   Здесь прямая AB определяется по пересечению плоскостей CDE и FGH, а прямая PQ задана каноническим образом.

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(PQ),K)"

в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Второй, пятый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками. Первый антецедент выделен указателем "усм", седьмой - указателем "идентификатор". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 5.

Прямая в пересечении двух плоскостей

1. Ввод уравнения прямой, являющейся пересечением двух плоскостей.

   $\forall_{ABCDEFKMNabcdefghpqr}($прямая$(MN) \subseteq$ плоскость(ABC) & прямая$(MN) \subseteq$ плоскость(DEF) & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $(ax+by+cz+d = 0$ & $ex+fy+gz+h = 0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число$) = (x = p$ & $y = q$ & $z = r)$ & $m = bg - cf$ & $n = ce - ag$ & $k = af - be$ & $\neg((m, n, k) = (0, 0, 0)) \rightarrow$ коорд(прямая$(MN), K) = \mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x - p, y - q, z - r), (m, n, k))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, антецеденты с четвертого по восьмой выделены указателем "идентификатор", девятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Левая часть пятого антецедента разрешается относительно x, y, z с помощью задачи на описание. Выражения a, b, c, d, e, f, g, h не содержат неизвестных. Обозначения плоскостей ABC и DEF различны. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой MN. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. Указатель "контрольвывода" инициирует попытку ее применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(MN),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты обрабатываются так же, как в первой версии, за исключением третьего антецедента, выделенного указателем "идентификатор". В остальном версии одинаковы.

   $\forall_{ABCDEFKMNabcdefghpqr}($прямая$(MN) =$ плоскость$(ABC) \cap$ плоскость(DEF) & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $(ax+by+cz+d = 0$ & $ex+fy+gz+h = 0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число$) = (x = p$ & $y = q$ & $z = r)$ & $m = bg - cf$ & $n = ce - ag$ & $k = af - be$ & $\neg((m, n, k) = (0, 0, 0)) \rightarrow$ коорд(прямая$(MN), K) = \mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x - p, y - q, z - r), (m, n, k))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой MN. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ABCDEFKMNabcdefghpqr}($прямая$(MN) \subseteq$ плоскость(ABC) & прямая$(MN) \subseteq$ плоскость(DEF) & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $m = bg - cf$ & $n = ce - ag$ & $k = af - be$ & $(k = 0$ & $m = 0$ & $n = 0$ & $(\neg(a = 0) \vee \neg(b = 0) \vee \neg(c = 0))) =$ ложь $\rightarrow p -$ число &

$q-$ число & $r-$ число & коорд(прямая(MN), K) $=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x+p, y+q, z+r),(m, n, k)$) & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Левая часть последнего антецедента упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой MN. Уровень срабатывания равен 6.

2. Представление прямой в виде пересечения двух плоскостей.

$\forall_{ABCDEKMNPabcdefghikmnpqr}$(коорд(прямая($BC$), K) $=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x+a, y+b, z+c),(d, e, f)$) & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & коорд(прямая(DE), K) $=\mathrm{set}_{uvw}$(пропорцнаборы($(u+m, v+n, w+k),(g, h, i)$) & $u-$ число & $v-$ число & $w-$ число) & $M\in$ прямая(BC) & $M\in$ прямая(AP) & $N\in$ прямая(DE) & $N\in$ прямая(AP) & коорд(A, K) $=(p, q, r)$ &
$$\neg(\det(\begin{pmatrix} p+a & q+b & c+r \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix})=0)\rightarrow$$ прямая(AP) $=$ плоскость(ABC) $\cap$ плоскость(ADE))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AP),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента и седьмой антецедент идентифицируются с посылками. Антецеденты с третьего по шестой выделены указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Определитель вычисляется нормализатором "нормопределитель". В задачах на исследование, имеющих цель "исследовать" (например, при исследовании поверхности, заданной своим уравнением), прием блокируется. Уровень срабатывания равен 6.

3. Переход от задания прямой в виде пересечения двух плоскостей к каноническому заданию.

$\forall_{abcdefghpqr}$(($ax+by+cz+d=0$ & $ex+fy+gz+h=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) $=(x=p$ & $y=q$ & $z=r)\rightarrow\mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & $ex+fy+gz+h=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) $=$ set_{xyz}(пропорцнаборы($(x-p, y-q, z-r),(bg-cf, ce-ag, af-be)$) & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть разрешается относительно x, y, z с помощью задачи на описание. Указатель "заменавхождений" определяет одновременную замену рассматриваемого уравнения прямой по всей задаче. Либо каждое из уравнений $ax+by+cz+d=0$, $ex+fy+gz+h=0$ имеет не менее двух переменных списка x, y, z, либо одно из них содержит все три переменные, либо задача имеет цель "пропорцнаборы", указывающую на необходимость перехода к каноническому заданию прямых. Уровень срабатывания равен 1.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Для характеризации взаимного расположения двух прямых A и B в пространстве, как и на плоскости, используется утверждение "двепрямые(A, B, n)". Здесь логический символ n - "равно", либо "параллельно", либо "пересекаются", либо "скрещивающиеся". Все приемы этого подраздела имеют заголовок "второйтерм".

1. Две прямые являются скрещивающимися.

   $\forall_{ABCDKabcdefghknpqr}$(коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a,$ $y+b, z+c), (d, e, f))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & коорд(прямая(CD), $K) = \text{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u+g, v+h, w+k), (p, q, r))$ & u − число & v − число & w − число) & $(\neg(dq-ep=0) \ \vee \ \neg(dr-fp=0) \ \vee$
   $$\neg(er-fq=0))\ \&\ \neg(\det(\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \\ g-a & h-b & k-c \end{pmatrix}) = 0) \rightarrow$$
   двепрямые(прямая(AB), прямая$(CD), n) \leftrightarrow n =$ скрещивающиеся)

   Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

   $\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}$(коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & $ex+fy+gz+h=0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & коорд(прямая(CD), $K) = \text{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u+m, v+n, w+k), (p, q, r))$ & u − число & $v-$число & $w-$число) & $(\neg(q(bg-cf)-p(ce-ag)=0) \vee \neg(r(bg-cf)-p(af-be)=0) \ \vee \ \neg(r(ce-ag)-q(af-be)=0))$ & $\neg((ap+bq+cr)(em+fn+gk-h)-(pe+fq+gr)(am+bn+ck-d)=0) \rightarrow$ двепрямые(прямая(AB), прямая$(CD), l) \leftrightarrow$ $l =$ скрещивающиеся)

   $\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}$(коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & $ex+fy+gz+h=0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & коорд(прямая(CD), $K) = \text{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u+m, v+n, w+k), (p, q, r))$ & u − число & $v-$число & $w-$число) & $(\neg(q(bg-cf)-p(ce-ag)=0) \vee \neg(r(bg-cf)-p(af-be)=0) \ \vee \ \neg(r(ce-ag)-q(af-be)=0))$ & $\neg((ap+bq+cr)(em+fn+gk-h)-(pe+fq+gr)(am+bn+ck-d)=0) \rightarrow$ двепрямые(прямая(CD), прямая$(AB), l) \leftrightarrow$ $l =$ скрещивающиеся)

   Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

   $\forall_{ABCDKabcdefghknpqr}$(коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a,$ $y+b, z+c), (d, e, f))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & коорд(прямая(CD), $K) = \text{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u+g, v+h, w+k), (p, q, r))$ & u − число & v − число & w − число) $\rightarrow$ двепрямые(прямая(AB), прямая(CD), скрещивающиеся) $\leftrightarrow \neg$(пропорцнаборы$((d, e, f), (p, q, r)))$ &
   $$\neg(\det(\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \\ g-a & h-b & k-c \end{pmatrix}) = 0))$$

   Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ ex+fy+gz+h=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+m,v+n,w+k),(p,q,r))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\to\text{двепрямые}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD),\text{скрещивающиеся})\leftrightarrow\neg(\text{пропорцнаборы}((bg-cf,ce-ag,af-be),(p,q,r)))\ \&\ \neg((ap+bq+cr)(em+fn+gk-h)-(pe+fq+gr)(am+bn+ck-d)=0))$$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

2. Две прямые пересекаются.

$$\forall_{ABCDKabcdefghknpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+g,v+h,w+k),(p,q,r))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ (\neg(dq-ep=0)\ \vee\ \neg(dr-fp=0)\ \vee\ \neg(er-fq=0))\ \&\ \det(\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \\ g-a & h-b & k-c \end{pmatrix})=0\to\text{двепрямые}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD),n)\leftrightarrow n=\text{пересекаются})$$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд(X, K) $= Y$". Первый, второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

$$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ ex+fy+gz+h=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+m,v+n,w+k),(p,q,r))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ (\neg(q(bg-cf)-p(ce-ag)=0)\vee\neg(r(bg-cf)-p(af-be)=0)\ \vee\ \neg(r(ce-ag)-q(af-be)=0))\ \&\ (ap+bq+cr)(em+fn+gk-h)-(pe+fq+gr)(am+bn+ck-d)=0\to\text{двепрямые}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD),l)\leftrightarrow l=\text{пересекаются})$$

$$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ ex+fy+gz+h=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+m,v+n,w+k),(p,q,r))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ (\neg(q(bg-cf)-p(ce-ag)=0)\vee\neg(r(bg-cf)-p(af-be)=0)\ \vee\ \neg(r(ce-ag)-q(af-be)=0))\ \&\ (ap+bq+cr)(em+fn+gk-h)-(pe+fq+gr)(am+bn+ck-d)=0\to\text{двепрямые}(\text{прямая}(CD),\text{прямая}(AB),l)\leftrightarrow l=\text{пересекаются})$$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

$$\forall_{ABCDKabcdefghkpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+g,v+h,w+k),(p,q,r))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\to\text{двепрямые}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD),\text{пересекаются})\leftrightarrow\neg(\text{пропорцнаборы}((d,e,f),(p,q,r)))\ \&\ \det(\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \\ g-a & h-b & k-c \end{pmatrix})=0)$$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "$\text{коорд}(X, K) = Y$". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + m, v + n, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \to \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), \text{пересекаются}) \leftrightarrow \neg(\text{пропорцнаборы}((bg - cf, ce - ag, af - be), (p, q, r)))\ \&\ (ap + bq + cr)(em + fn + gk - h) - (pe + fq + gr)(am + bn + ck - d) = 0)$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

3. Две прямые параллельны.

$\forall_{ABCDKabcdefghknpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + g, v + h, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ dq - ep = 0\ \&\ dr - fp = 0\ \&\ er - fq = 0\ \&\ (\neg((g - a)e - (h - b)d = 0)\ \vee\ \neg((g - a)f - (k - c)d = 0)\ \vee\ \neg((h - b)f - (k - c)e = 0)) \to\ \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), n) \leftrightarrow n = \text{параллельно})$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "$\text{коорд}(X, K) = Y$". Первые пять антецедентов выделены указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + m, v + n, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ q(bg - cf) - p(ce - ag) = 0\ \&\ r(bg - cf) - p(af - be) = 0\ \&\ r(ce - ag) - q(af - be) = 0\ \&\ \neg((ap + bq + cr)(em + fn + gk - h) - (pe + fq + gr)(am + bn + ck - d) = 0) \to \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), l) \leftrightarrow l = \text{параллельно})$

$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + m, v + n, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ q(bg - cf) - p(ce - ag) = 0\ \&\ r(bg - cf) - p(af - be) = 0\ \&\ r(ce - ag) - q(af - be) = 0\ \&\ \neg((ap + bq + cr)(em + fn + gk - h) - (pe + fq + gr)(am + bn + ck - d) = 0) \to \text{двепрямые}(\text{прямая}(CD), \text{прямая}(AB), l) \leftrightarrow l = \text{параллельно})$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Антецеденты со второго по пятый выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

$\forall_{ABCDKabcdefghkpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + g, v + h, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \to \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), \text{параллельно}) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (p, q, r))\ \&\ \neg(\text{пропорцнаборы}((g - a, h - b, k - c), (d, e, f))))$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \mathrm{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + m, v + n, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \rightarrow \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), \text{параллельно}) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((bg - cf, ce - ag, af - be), (p, q, r))\ \&\ \neg((ap + bq + cr)(em + fn + gk - h) - (pe + fq + gr)(am + bn + ck - d) = 0))$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

4. Две прямые совпадают.

$\forall_{ABCDKabcdefghknpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \mathrm{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + g, v + h, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ dq - ep = 0\ \&\ dr - fp = 0\ \&\ er - fq = 0\ \&\ (g - a)e - (h - b)d = 0\ \&\ (g - a)f - (k - c)d = 0\ \&\ (h - b)f - (k - c)e = 0 \rightarrow \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), n) \leftrightarrow n = \text{равны})$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 1 и 4.

$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \mathrm{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + m, v + n, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ q(bg - cf) - p(ce - ag) = 0\ \&\ r(bg - cf) - p(af - be) = 0\ \&\ r(ce - ag) - q(af - be) = 0\ \&\ (ap + bq + cr)(em + fn + gk - h) - (pe + fq + gr)(am + bn + ck - d) = 0 \rightarrow \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), l) \leftrightarrow l = \text{равны})$

$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \mathrm{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + m, v + n, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ q(bg - cf) - p(ce - ag) = 0\ \&\ r(bg - cf) - p(af - be) = 0\ \&\ r(ce - ag) - q(af - be) = 0\ \&\ (ap + bq + cr)(em + fn + gk - h) - (pe + fq + gr)(am + bn + ck - d) = 0 \rightarrow \text{двепрямые}(\text{прямая}(CD), \text{прямая}(AB), l) \leftrightarrow l = \text{равны})$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 1 и 4.

$\forall_{ABCDKabcdefghkpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \mathrm{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + g, v + h, w + k), (p, q, r))\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \rightarrow \text{двепрямые}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD), \text{равны}) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (p, q, r))\ \&\ \text{пропорцнаборы}((g - a, h - b, k - c), (d, e, f)))$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$$\forall_{ABCDKabcdefghkmnpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ ex+fy+gz+h=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K)=\text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+m,v+n,w+k),(p,q,r))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\rightarrow\text{двепрямые}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD),\text{равны})\leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((bg-cf,ce-ag,af-be),(p,q,r))\ \&\ (ap+bq+cr)(em+fn+gk-h)-(pe+fq+gr)(am+bn+ck-d)=0)$$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

Угол между двумя прямыми

$$\forall_{ABCDKabcdefghmpqr}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+a, y+b,z+c),(d,e,f))\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K)=\text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+g,v+h,w+k),(p,q,r))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\rightarrow (d^2+e^2+f^2)(p^2+q^2+r^2)(\cos(\text{уголмежду}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD))))^2- (dp+eq+fr)^2=0)$$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подтерма "уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Выражение для этого угла не содержит неизвестных. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "идентификатор". Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. Ее отличие от первой версии состоит в том, что выражение для угла может содержать неизвестные.

$$\forall_{ABCDKadefpqr}(\text{направлпрямой}(\text{прямая}(AB),K,a)\ \&\ a=(d,e,f)\ \&\ \text{направлпрямой}(\text{прямая}(CD),K,(p,q,r))\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\rightarrow (d^2+e^2+f^2)(p^2+q^2+r^2)(\cos(\text{уголмежду}(\text{прямая}(AB),\text{прямая}(CD))))^2- (dp+eq+fr)^2=0)$$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подтерма "уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

Уравнение биссектрисы угла

1. Соотношение для направляющего вектора биссектрисы угла.

$$\forall_{ABCDKPQRabcdefghijkmnpqrt}(\text{биссектриса}(BACD)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AC),K)= \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u+i,v+j,w+k),(g,h,t))\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AD),K)=\text{set}_{XYZ}(\text{пропорцнаборы}((X+P,Y+Q, Z+R),(p,q,r))\ \&\ X-\text{число}\ \&\ Y-\text{число}\ \&\ Z-\text{число})\ \&\ m=\sqrt{d^2+e^2+f^2}\ \&\ n=\sqrt{g^2+h^2+t^2}\rightarrow\text{пропорцнаборы}((dn+gm,en+hm,fn+mt),(p,q,r))\ \vee\ \text{пропорцнаборы}((dn-gm,en-hm,fn-mt),(p,q,r)))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровни срабатывания равны 2 и 4.

2. Ввод уравнения для биссектрисы угла.

$\forall_{ABCDKabcdefpqr}($биссектриса$(BACD)$ & коорд$(A,K)=(a,b,c)$ & направлвектор(A,B,K,u) & направлвектор(A,C,K,v) & $u=(d,e,f)$ & $v=(p,q,r)$ & прямкоорд(K) & $m=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & $n=\sqrt{p^2+q^2+r^2}\rightarrow$ коорд(прямая$(AD),K)=\text{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x-a,y-b,z-c)$, $(d/m+p/n,e/m+q/n,f/m+r/n))$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AD),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, третий и четвертый - обрабатываются пакетными синтезаторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AD. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEFKabcdefghijkmnpqrst}($прямкоорд$(K)$ & коорд(прямая$(AB),K)=\text{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & коорд(прямая$(CD),K)=\text{set}_{uvw}($пропорцнаборы$((u+g,v+h,w+t),(p,q,r))$ & $u-$ число & $v-$ число & $w-$ число) & биссектриса$(BEDF)$ & $E\in$ прямая(AB) & $E\in$ прямая(CD) & $0<\angle(BED)-\pi/2$ & $s=\text{sg}(dp+eq+fr)$ & $m=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & $n=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ & коорд$(E,K)=(i,j,k)\rightarrow$ коорд(прямая$(EF),K)=\text{set}_{XYZ}($пропорцнаборы$((X-i,Y-j,Z-k),(pm-dsn,qm-esn,rm-fsn))$ & $X-$ число & $Y-$ число & $Z-$ число))

$\forall_{ABCDEFKabcdefghijkmnpqrst}($прямкоорд$(K)$ & коорд(прямая$(AB),K)=\text{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & коорд(прямая$(CD),K)=\text{set}_{uvw}($пропорцнаборы$((u+g,v+h,w+t),(p,q,r))$ & $u-$ число & $v-$ число & $w-$ число) & биссектриса$(BEDF)$ & $E\in$ прямая(AB) & $E\in$ прямая(CD) & $0<\pi/2-\angle(BED)$ & $s=\text{sg}(dp+eq+fr)$ & $m=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & $n=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ & коорд$(E,K)=(i,j,k)\rightarrow$ коорд(прямая$(EF),K)=\text{set}_{XYZ}($пропорцнаборы$((X-i,Y-j,Z-k),(pm+dsn,qm+esn,rm+fsn))$ & $X-$ число & $Y-$ число & $Z-$ число))

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(EF),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками., пятый и шестой - выделены указателем "усм". Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой EF. Уровень срабатывания равен 4.

3. Усмотрение противоречия: биссектриса угла с совпадающими сторонами.

$\forall_{ABCDKabcdefghkpqr}($прямкоорд$(K)$ & биссектриса$(BACD)$ & коорд(прямая(AB), $K)=\text{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))$ & $x-$ число &

y – число & z – число) & коорд(прямая$(AC), K)$ = коорд(прямая$(AB), K)$ & коорд(прямая$(AD), K) = \mathrm{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u+g, v+h, w+k), (p, q, r))$ & u – число & v – число & w – число) & $\neg(pd+qe+rf=0)$ & $(\neg(pe-qd=0)\ \vee\ \neg(qf-er=0)\ \vee\ \neg(pf-dr=0)) \rightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Третий, четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", шестой и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "развязка" блокирует преобразование теоремы при компиляции. Выражения d, e, f, p, q, r не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

Расстояние между двумя прямыми

$\forall_{ABCDKabcdefkmnpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a, y+b, z+c), (p, q, r))$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(прямая(CD), $K) = \mathrm{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u+d, v+e, w+f), (m, n, k))$ & u – число & v – число & w – число) & прямкоорд(K) & $s = (qk-rn)^2 + (rm-pk)2 + (pn-qm)^2 \rightarrow$

$$s(\text{расстмежду}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))^2 - \det(\begin{pmatrix} a-d & b-e & c-f \\ m & n & k \\ p & q & r \end{pmatrix})^2 = 0)$$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражение s не тождественно нулевое. Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDKabcdefkmnp}$(коорд(прямкоорд$(K)$ & прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x+a, y+b, z+c), (d, e, f))$ & x–число & y–число & z–число) & коорд(прямая(CD), $K) = \mathrm{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u+g, v+h, w+k), (m, n, p))$ & u – число & v – число & w – число) & $dn-em=0$ & $ep-nf=0$ & $dp-mf=0 \rightarrow$ $(d^2+e^2+f^2)$(расстмежду(прямая(AB), прямая(CD))$)^2 - (e(c-k)-f(b-h))^2 - (f(a-g)-d(c-k))^2 - (d(b-h)-e(a-g))^2 = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5.

Расстояние от точки до прямой

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (p, q, r)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a, y+b, z+c), (d, e, f))$ & x–число & y–число & z–число) $\rightarrow$ $(d^2+e^2+f^2)$(расстдопрямой(A, прямая(BC))$)^2 - (e(c+r)-f(b+q))^2 - (f(a+p)-d(c+r))^2 - (d(b+q)-e(a+p))^2 = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстдопрямой(A, прямая(BC))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

Ввод в рассмотрение уравнения прямой в одной системе координат, если задано ее уравнение в другой

$\forall_{ABK}(\text{прямкоорд}(K) \to \text{актив}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Нормализатор "нормкоорд" позволяет определить уравнение прямой CD, причем описатель "класс" в этом уравнении имеет связывающую приставку длины 3. Существует посылка вида "коорд(прямая(AB)$, X) = \text{set}_{uv}(\ldots)$", однако посылка, содержащая выражение "коорд(прямая(AB),K)", отсутствует. Уровень срабатывания равен 3.

Отбрасывание дублирующего уравнения

$\forall_{AKabcdefm}(\text{коорд}(A, K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&$
$x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}) \to \text{коорд}(A, K) = m)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "эквивалентно" определяет замену равенства - подутверждения посылки задачи на исследование, имеющей цель "исследовать" - на логическую константу "истина". Антецедент идентифицируется с посылкой, правая часть которой не содержит неизвестных. Выражение m имеет заголовок "класс" и не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 0.

Усмотрение противоречия: уравнения различных прямых совпадают

$\forall_{ABCDKabcdefghipqr}(\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&$
$z{-}\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u{+}g, v{+}h, w{+}i), (p, q, r))$
$\&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ \text{ранг}\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix} = 1\ \&$
$\text{ранг}\begin{pmatrix} g-a & h-b & i-c \\ p & q & r \end{pmatrix} = 1 \to \text{ложь})$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд(прямая(AB)$, K) = \text{set}(\ldots)$". Уровень срабатывания равен 2.

1.7 Уравнение плоскости в пространстве

Ввод в рассмотрение уравнения плоскости в пространстве

$\forall_{ABCKabcd}(a{-}\text{число}\ \&\ b{-}\text{число}\ \&\ c{-}\text{число}\ \&\ d{-}\text{число}\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(ABC), K) =$
$\text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(плоскость(ABC),K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение этой плокости через старые параметры. Отсутствует посылка вида "биссектрплоск(X, прямая(PQ), Y, R)", для которой усматривалась бы принадлежность точек P, Q, R плоскости ABC. Прием вводит новые параметры a, b, c, d. Уровень срабатывания равен 4.

Ввод уравнения плоскости, проходящей через три точки

$\forall_{ABCKPQRabcdefghkmnp}(A \in$ плоскость(PQR) & $B \in$ плоскость(PQR) &
$C \in$ плоскость(PQR) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ &
коорд$(C, K) = (g, h, k)$ & $m = \det(\begin{pmatrix} b & c & 1 \\ e & f & 1 \\ h & k & 1 \end{pmatrix})$ & $n = \det(\begin{pmatrix} c & a & 1 \\ f & d & 1 \\ k & g & 1 \end{pmatrix})$
& $p = \det(\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ d & e & 1 \\ g & h & 1 \end{pmatrix})$ & $\neg((m, n, p) = (0, 0, 0))$ & $q = \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}) \rightarrow$
коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{xyz}(mx + ny + pz - q = 0$ & x – число & y – число
& z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Четвертый, пятый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первые три - выделены указателем "усм". Десятый антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражения $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ не содержат неизвестных. Определители вычисляются нормализатором "нормопределитель". В задаче рассматривается точка X плоскости PQR, отличная от точек A, B, C, для которой нормализатор "нормкоорд" определяет координатный набор, причем этот набор содержит неизвестные. Задача не имеет посылки "планиметрия". Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение плоскости PQR. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 8. В ней отброшены требование на координаты точек A, B, C, а также условие на координаты точки X. В остальном версии одинаковы.

Ввод уравнения плоскости, проходящей через точку и прямую

$\forall_{ABCDEFKabcdefpqr}($коорд$(A, K) = (p, q, r)$ & коорд(прямая$(BC), K) =$
$\mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))$ & x – число & y – число
& z – число) & $A \in$ плоскость(DEF) & $B \in$ плоскость(DEF) &
$m = (b + q)f - (c + r)e$ & $n = (c + r)d - (a + p)f$ & $k = (a + p)e - (b + q)d$ &
$((\neg(m = 0) \ \vee \ \neg(n = 0)) \ \vee \ \neg(k = 0))$ & $C \in$ плоскость$(DEF) \rightarrow$
коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{xyz}(mx + ny + kz - mp - nq - kr = 0$ & x – число
& y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй, пятый, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Третий, четвертый и девятый антецедены выделены указателем "усм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд(прямая$(BC), K) = X$".

Нормализатор "нормкоорд" пока не в состоянии определить уравнение плоскости DEF. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEFKabcdefpqr}$(коорд$(A, K) = (p, q, r)$ & коорд(прямая$(BC), K) =$ set_{xyz}(пропорцнаборы$((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))$ & x – число & y – число & z – число) & $A \in$ плоскость(DEF) & прямая$(BC) \subseteq$ плоскость(DEF) & $m = (b + q)f - (c + r)e$ & $n = (c + r)d - (a + p)f$ & $k = (a + p)e - (b + q)d$ & $((\neg(m = 0)\ \vee\ \neg(n = 0))\ \vee\ \neg(k = 0))$ & $C \in$ плоскость$(DEF) \rightarrow$ коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{xyz}(mx + ny + kz - mp - nq - kr = 0$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент выделен указателем "усм", восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Второй, пятый, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". В остальном прием совпадает с предыдущим.

Принадлежность точки плоскости, заданной своим уравнением

$\forall_{ABCDKPabc}(D \in$ плоскость(ABC) & коорд$(D, K) = (a, b, c)$ & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(P(x, y, z)) \rightarrow P(a, b, c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "усм", второй - указателем "идентификатор". Переменная P функциональная. Уровни срабатывания равны 3 и 6.

Вектор коэффициентов уравнения плоскости - ненулевой

$\forall_{ABCKabcdefgmpqr}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax/p + by/q + cz/r + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $a = me$ & $b = mf$ & $c = mg \rightarrow \neg(m = 0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Проверочный оператор не усматривает отличие m от нуля. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCKabdefmpq}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax/p + by/q + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $a = me$ & $b = mf \rightarrow \neg(m = 0))$

Аналогично предыдущему. Указатели "элемент(x23)" "элемент(x24)" определяют произвольный выбор переменных x, y среди трех переменных связывающей приставки, вне зависимости от их фактического порядка.

$\forall_{ABCKadp}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax/p + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) $\rightarrow \neg(a = 0))$

Аналогично предыдущему, но используется единственный указатель "элемент(x23)".

$\forall_{ABCKabcd}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) $\rightarrow \neg(a = 0$ & $b = 0$ & $c = 0$ & $e))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Указатель "единица" допускает отсутствие дополнительного условия e. Уровень срабатывания равен 1.

Ввод в рассмотрение координат точки, использованной в обозначении плоскости

$\forall_{ABCKPabc}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(P(x,y,z)) \to a$ – число & b – число & c – число & коорд$(A,K) = (a,b,c)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Точка A имеет вхождение в посылку, заголовок которой отличен от символов "точка", "актив", "треугольник", "биссектрплоск", причем это вхождение не расположено внутри обозначения какой-либо плоскости либо отрицания равенства "$\neg(A = X)$". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Прием вводит новые параметры a, b, c. Уровень срабатывания равен 3.

Переход от параметрического уравнения плоскости к общему уравнению

$\forall_{ABCabcdefpqr}(A = er - qf$ & $B = qc - br$ & $C = bf - ce$ & $\neg((A,B,C) = (0,0,0)) \to$ $\mathrm{set}_{xyz}(\exists_{uv}(u-$число & $v-$число & $x = a+bu+cv$ & $y = d+eu+fv$ & $z = p+qu+rv)) =$ $\mathrm{set}_{xyz}(Ax + By + Cz - Aa - Bd - Cp = 0$ x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Если задача имеет одну из целей "известны", "учетрезультата", "вспомпараметр", указывающих нецелесообразность отказа от параметрического уравнения, то преобразование не выполняется. Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Изменение знака всех слагаемых уравнения плоскости

Стандартизация уравнения плоскости предполагает переход к неотрицательному первому ненулевому коэффициенту:

$\forall_{abcd}(\mathrm{set}_{xyz}(-ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) =
$\mathrm{set}_{xyz}(ax - by - cz - d = 0$ & x – число & y – число & z – число))

$\forall_{abc}(\mathrm{set}_{xyz}(-ay + bz + c = 0$ & x – число & y – число & z – число) =
$\mathrm{set}_{xyz}(ay - bz - c = 0$ & x – число & y – число & z – число))

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и срабатывают на уровне 2.

Определение координат точки пересечения прямой и плоскости

$\forall_{ABCDEFKabcdefpqrs}$(коорд(плоскость$(CDE), K) = \mathrm{set}_{xyz}(px + qy + rz + s = 0$
& x – число & y – число & z – число) & коорд(прямая$(AB), K) =$
set_{uvw}(пропорцнаборы$((u + a, v + b, w + c), (d, e, f))$ & u – число &
v – число & w – число) & $F \in$ плоскость(CDE) & $F \in$ прямая(AB) &
$m = pd + qe + rf$ & $\neg(m = 0)$ & $t = (pa + qb + rc - s)/m \to$
коорд$(F, K) = (dt - a, et - b, ft - c)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Второй, пятый и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий и четвертый - указателем "усм". Шестой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Правые части первых двух антецедентов не содержат неизвестных. Не усматривается принадлежность точек A, B плоскости CDE. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки F. Уровень срабатывания равен 3.

Включение прямой в плоскость

$\forall_{ABCDEKabcpqrs}(\text{прямая}(AB) \subseteq \text{плоскость}(PQR)\ \&\ \text{направлпрямой}(\text{прямая}(AB), K, (a, b, c))\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(PQR), K) = \text{set}_{xyz}(px + qy + rz + s = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}) \rightarrow ap + bq + cr = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}(\text{прямая}(AB) \subseteq \text{плоскость}(CDE)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \rightarrow pd + qe + rf = 0\ \&\ -pa - qb - rc + s = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 3 и 7.

Параллельность плоскостей

1. Параллельность координатным плоскостям.

   $\forall_{ABCDKPQRabcd}(\text{коорд}(\text{плоскость}(PQR), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{плоскость}(PQR) \parallel \text{плоскость}(ABC)\ \&\ K = (A, B, C, D) \rightarrow a = 0\ \&\ b = 0)$

   $\forall_{ABCDKPQRabcd}(\text{коорд}(\text{плоскость}(PQR), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{плоскость}(PQR) \parallel \text{плоскость}(ABD)\ \&\ K = (A, B, C, D) \rightarrow a = 0\ \&\ c = 0)$

   $\forall_{ABCDKPQRabcd}(\text{коорд}(\text{плоскость}(PQR), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{плоскость}(PQR) \parallel \text{плоскость}(ACD)\ \&\ K = (A, B, C, D) \rightarrow b = 0\ \&\ c = 0)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "усм". Уравнение плоскости содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

2. Условие параллельности двух плоскостей.

   $\forall_{ABCDEFKabcdefgh}(\text{плоскость}(ABC) \parallel \text{плоскость}(DEF)\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF), K) = \text{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \rightarrow af - be = 0\ \&\ bg - cf = 0\ \&\ ag - ce = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 4.

3. Расстояние между параллельными плоскостями.

   $\forall_{ABCDEFKabcdefgh}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF), K) = \text{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ \text{коэффпропорц}((a, b, c), (e, f, g), k) \rightarrow \text{расстмежду}(\text{плоскость}(ABC), \text{плоскость}(DEF)) = |dk - h|/\sqrt{e^2 + f^2 + g^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстмежду(плоскость(ABC), плоскость(DEF))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 3.

4. Условие принадлежности точки полосе между параллельными плоскостями.

   $\forall_{ABCDEFGKabcdefghkpqr}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ $\mathrm{set}_{uvw}(eu+fv+gw+h=0$ & u – число & v – число & w – число) &
   коэффпропорц($(e,f,g),(a,b,c),k$) & коорд(G,K) $=(p,q,r)\to$
   $G\in$ Полоса(плоскость(ABC), плоскость(DEF)) $\leftrightarrow$
   $(ap+bq+cr+d)(ap+bq+cr+h)\leq 0$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента, а также последний антецедент идентифицируются с утверждениями из контекста. Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 2.

5. Ввод уравнения плоскости, параллельной двум неколлинеарным векторам либо двум неколлинеарным прямым.

   $\forall_{ABKPQRabcdefmnpq}$(Вектор($A$) & Вектор($B$) & коорд($A,K$) $=(a,b,c)$ &
   коорд(B,K) $=(d,e,f)$ & $A\parallel$ плоскость(PQR) & $B\parallel$ плоскость(PQR) &
   $m=bf-ce$ & $n=cd-af$ & $p=ae-bd$ & $\neg((m,n,p)=(0,0,0))\to$
   q – число & коорд(плоскость(PQR), K) $=\mathrm{set}_{xyz}(mx+ny+pz+q=0$ &
   x – число & y – число & z – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(плоскость(PQR), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты с третьего по шестой идентифицируются с посылками. Седьмой, восьмой и девятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Первый, второй и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение плоскости PQR через старые параметры. Прием вводит новый параметр q. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDKPQRabcdefghkmnpqrst}$(коорд(прямая($AB$), K) $=\mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы(
   $(x+g,y+h,z+k),(a,b,c)$) & x – число & y – число & z – число) &
   коорд(прямая(CD), K) $=\mathrm{set}_{uvw}$(пропорцнаборы($(u+s,v+r,w+t),(d,e,f)$))
   & u – число & v – число & w – число) & прямая(AB) $\parallel$ плоскость(PQR) &
   прямая(CD) $\parallel$ плоскость(PQR) & $m=bf-ce$ & $n=cd-af$ &
   $p=ae-bd$ & $\neg((m,n,p)=(0,0,0))\to q$ – число & коорд(плоскость(PQR),
   K) $=\mathrm{set}_{XYZ}(mX+nY+pZ+q=0$ & X – число & Y – число & Z – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(плоскость(PQR), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "усм". Первый и второй антецеденты, а также антецеденты с пятого по седьмой выделены указателем "идентификатор". Восьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Обозначения прямых AB и CD различны. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение плоскости PQR через старые параметры. Прием вводит новый параметр q. Уровень срабатывания равен 2.

6. Ввод в рассмотрение уравнения плоскости, параллельной данной плоскости.

   $\forall_{ABCDEFKabcde}$(плоскость(ABC) $\|$ плоскость(DEF) & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x − число & y − число & z − число) $\rightarrow$ e − число & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + e = 0$ & x − число & y − число & z − число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "усм". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости DEF. Прием вводит новый параметр e. Уровень срабатывания равен 2.

Перпендикулярность плоскостей

1. Плоскость перпендикулярна координатной плоскости, и точка на ней равноудалена от двух точек этой координатной плоскости.

   $\forall_{ABCKPQRSabcdefpqrs}$(прямкоорд($K$) & $K = (P, Q, R, S)$ & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + c = 0$ & x − число & y − число & z − число) & $D \in$ плоскость(ABC) & коорд(D, K) $= (d, e, f)$ & $l(DE) = l(DF)$ & коорд(E, K) $= (p, q, 0)$ & коорд(F, K) $= (r, s, 0)$ $\rightarrow 2d - p - r = 0$ & $2e - q - s = 0$)

   $\forall_{ABCKPQRSabcdefpqrs}$(прямкоорд($K$) & $K = (P, Q, R, S)$ & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ set$_{xzy}$($ax + by + c = 0$ & x − число & y − число & z − число) & $D \in$ плоскость(ABC) & коорд(D, K) $= (d, f, e)$ & $l(DE) = l(DF)$ & коорд(E, K) $= (p, 0, q)$ & коорд(F, K) $= (r, 0, s)$ $\rightarrow 2d - p - r = 0$ & $2e - q - s = 0$)

   $\forall_{ABCKPQRSabcdefpqrs}$(прямкоорд($K$) & $K = (P, Q, R, S)$ & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ set$_{zxy}$($ax + by + c = 0$ & x − число & y − число & z − число) & $D \in$ плоскость(ABC) & коорд(D, K) $= (f, d, e)$ & $l(DE) = l(DF)$ & коорд(E, K) $= (0, p, q)$ & коорд(F, K) $= (0, r, s)$ $\rightarrow 2d - p - r = 0$ & $2e - q - s = 0$)

   Приемы имеют заголовок "вывод". Четвертый и шестой антецеденты выделены указателем "усм", остальные - идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 3.

2. Условие перпендикулярности двух плоскостей.

   $\forall_{ABCDEFKabcdefgh}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($eu + fv + gw + h = 0$ & u − число & v − число & w − число) & прямкоорд(K) & плоскость(ABC) $\perp$ плоскость(DEF) $\rightarrow ae + bf + cg = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй - выделен указателем "идентификатор". Четвертый антецедент выделен указателем "усм". Уровни срабатывания равны 3 и 5.

3. Ввод уравнения плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости.

$\forall_{ABCDEFGHKabcdefpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xyz}$(пропорцнаборы$((x + a,$ $y + b, z + c), (d, e, f))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(CDE), K) =$ set$_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & прямая$(AB) \subseteq$ плоскость(FGH) & плоскость$(FGH) \perp$ плоскость(CDE) & прямкоорд(K) & ранг(det($\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$)) $= 2 \rightarrow$ коорд(плоскость$(FGH), K) =$ set$_{xyz}((x + a)(er - qf) + (y + b)(pf - dr) + (z + c)(dq - ep) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(плоскость(FGH), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Первый, второй и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор", четвертый - указателем "усм". Выражения $a, b, c, d, e, f, p, q, r$ не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости FGH. Уровень срабатывания равен 3.

4. Ввод уравнения плоскости, перпендикулярной прямой.

$\forall_{ABCDEKabcpqrs}$(прямкоорд(K) & прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xyz}$(пропорцнаборы$((x + a, y + b, z + c), (p, q, r))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) $\rightarrow s-$число & коорд(плоскость$(CDE), K) =$ set$_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(плоскость(CDE), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "усм", третий - указателем "идентификатор". Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение плоскости CDE через старые параметры. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKabcdefghs}$(прямкоорд$(K)$ & прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $ex + fy + gz + h = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) $\rightarrow s -$ число & коорд(плоскость$(CDE), K) =$ set$_{uvw}((bg - cf)u + (ce - ad)v + (af - be)w + s = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

Аналогично предыдущему, но третий антецедент идентифицируется с посылкой.

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Все приемы этого подраздела имеют заголовок "второйтерм".

1. Условие совпадения двух плоскостей.

$\forall_{ABCDEFKabcdepqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) =$ set$_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) =$ set$_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $aq - bp = 0$ & $ar - cp = 0$ & $br - cq = 0$ & $as - pd = 0$ & $bs - qd = 0$ & $cs - dr = 0 \rightarrow$ двеплоскости(плоскость(ABC), плоскость$(DEF), e) \leftrightarrow e =$ равны)

$\forall_{ABCDEFKabcdepqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ &
x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$
set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число)
& $aq-bp=0$ & $ar-cp=0$ & $br-cq=0$ & $as-pd=0$ & $bs-qd=0$ &
$cs-dr=0 \rightarrow$ двеплоскости(плоскость(DEF), плоскость(ABC), e) $\leftrightarrow e =$ равны)

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFKabcdpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ &
x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$
set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) $\rightarrow$
двеплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), равны) $\leftrightarrow$
$aq-bp=0$ & $ar-cp=0$ & $br-cq=0$ & $as-pd=0$ & $bs-qd=0$ & $cs-dr=0$)

$\forall_{ABCDEFKabcdpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ &
x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$
set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) $\rightarrow$
двеплоскости(плоскость(DEF), плоскость(ABC), равны) $\leftrightarrow$
$aq-bp=0$ & $ar-cp=0$ & $br-cq=0$ & $as-pd=0$ & $bs-qd=0$ & $cs-dr=0$)

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

2. Условие параллельности плоскостей.

$\forall_{ABCDEFKabcdepqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ &
x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$
set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число)
& $aq-bp=0$ & $ar-cp=0$ & $br-cq=0$ & ($\neg(as-pd=0) \vee$
$\neg(bs-qd=0) \vee \neg(cs-dr=0)) \rightarrow$ двеплоскости(плоскость(ABC),
плоскость(DEF), e) $\leftrightarrow e =$ параллельно)

$\forall_{ABCDEFKabcdepqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ &
x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$
set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число)
& $aq-bp=0$ & $ar-cp=0$ & $br-cq=0$ & ($\neg(as-pd=0) \vee$
$\neg(bs-qd=0) \vee \neg(cs-dr=0)) \rightarrow$ двеплоскости(плоскость(DEF),
плоскость(ABC), e) $\leftrightarrow e =$ параллельно)

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFKabcdpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ &
x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$
set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) $\rightarrow$
двеплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), параллельно) $\leftrightarrow$
$aq-bp=0$ & $ar-cp=0$ & $br-cq=0$ & ($\neg(as-pd=0) \vee$
$\neg(bs-qd=0) \vee \neg(cs-dr=0)))$

$\forall_{ABCDEFKabcdpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ &
x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$
set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) $\rightarrow$
двеплоскости(плоскость(DEF), плоскость(ABC), параллельно) $\leftrightarrow$

$aq-bp=0\ \&\ ar-cp=0\ \&\ br-cq=0\ \&\ (\neg(as-pd=0)\ \vee\ \neg(bs-qd=0)\ \vee\ \neg(cs-dr=0)))$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

3. Условие пересечения плоскостей.

   $\forall_{ABCDEFKabcdepqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ (\neg(aq-bp=0)\ \&\ \neg(ar-cp=0)\ \&\ \neg(br-cq=0))\rightarrow \text{двеплоскости}(\text{плоскость}(ABC),\text{плоскость}(DEF),e)\leftrightarrow e=\text{пересекаются})$

   $\forall_{ABCDEFKabcdepqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ (\neg(aq-bp=0)\ \&\ \neg(ar-cp=0)\ \&\ \neg(br-cq=0))\rightarrow \text{двеплоскости}(\text{плоскость}(DEF),\text{плоскость}(ABC),e)\leftrightarrow e=\text{пересекаются})$

   Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDEFKabcdpqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\rightarrow \text{двеплоскости}(\text{плоскость}(ABC),\text{плоскость}(DEF),\text{пересекаются})\leftrightarrow (\neg(aq-bp=0)\ \&\ \neg(ar-cp=0)\ \&\ \neg(br-cq=0)))$

   $\forall_{ABCDEFKabcdpqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\rightarrow \text{двеплоскости}(\text{плоскость}(DEF),\text{плоскость}(ABC),\text{пересекаются})\leftrightarrow (\neg(aq-bp=0)\ \&\ \neg(ar-cp=0)\ \&\ \neg(br-cq=0)))$

   Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Все приемы этого подраздела имеют заголовок "второйтерм".

1. Условие включения прямой в плоскость.

   $\forall_{ABCDEKabcdefnpqrs}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ \ -ap-qb-cr+s=0\ \&\ pd+qe+rf=0\rightarrow \text{прямаяиплоскость}(\text{прямая}(AB),\text{плоскость}(CDE),n)\leftrightarrow n=\text{включение})$

   Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд(X,K) $=Y$". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x+a,y+b,z+c),(d,e,f))\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&$

$\text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \to \text{прямаяиплоскость}(\text{прямая}(AB), \text{плоскость}(CDE), \text{включение}) \leftrightarrow -ap - qb - cr + s = 0\ \&\ pd + qe + rf = 0)$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

$$\forall_{ABCDEKabcdefghnpqrs}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0\ \&\ \det(\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ p & q & s \end{pmatrix}) = 0\ \&\ \det(\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ p & r & s \end{pmatrix}) = 0\ \&\ \det(\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ q & r & s \end{pmatrix}) = 0 \to \text{прямаяиплоскость}(\text{прямая}(AB), \text{плоскость}(CDE), n) \leftrightarrow n = \text{включение})$$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$$\forall_{ABCDEKabcdefghnpqrs}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&\ ex + fy + gz + h = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \to \text{прямаяиплоскость}(\text{прямая}(AB), \text{плоскость}(CDE), \text{включение}) \leftrightarrow \det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0\ \&\ \det(\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ p & q & s \end{pmatrix}) = 0\ \&\ \det(\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ p & r & s \end{pmatrix}) = 0\ \&\ \det(\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ q & r & s \end{pmatrix}) = 0)$$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

2. Условие параллельности прямой и плоскости.

$\forall_{ABCDEKabcdefnpqrs}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число})\ \&\ \neg(-ap - qb - cr + s = 0)\ \&\ pd + qe + rf = 0 \to \text{прямаяиплоскость}(\text{прямая}(AB), \text{плоскость}(CDE), n) \leftrightarrow n = \text{параллельно})$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Первый, второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}) \to \text{прямаяиплоскость}(\text{прямая}(AB), \text{плоскость}(CDE), \text{параллельно}) \leftrightarrow \neg(-ap - qb - cr + s = 0)\ \&\ pd + qe + rf = 0)$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),$

$K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u -$ число $\&\ v -$ число $\&\ w -$ число$) \to$ непересек(прямая(AB), плоскость$(CDE)) \leftrightarrow \neg(-ap - qb - cr + s = 0)\ \&$ $pd + qe + rf = 0)$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCDEKabcdefghnpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&$ $ex{+}fy{+}gz{+}h = 0\ \&\ x-$число $\&\ y-$число $\&\ z-$число$)\ \&$ коорд(плоскость(CDE), $K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u -$ число $\&\ v -$ число $\&\ w -$ число$)\ \&$

$$\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0\ \&\ (\neg(\det(\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ p & q & s \end{pmatrix}) = 0)\ \vee$$

$$\neg(\det(\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ p & r & s \end{pmatrix}) = 0)\ \vee\ \neg(\det(\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ q & r & s \end{pmatrix}) = 0)) \to$$

прямаяиплоскость(прямая(AB), плоскость$(CDE), n) \leftrightarrow n =$ параллельно$)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEKabcdefghnpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0\ \&$ $ex{+}fy{+}gz{+}h = 0\ \&\ x-$число $\&\ y-$число $\&\ z-$число$)\ \&$ коорд(плоскость(CDE), $K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u -$ число $\&\ v -$ число $\&\ w -$ число$) \to$ прямаяиплоскость(прямая(AB), плоскость(CDE), параллельно$) \leftrightarrow$

$$\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 0\ \&\ (\neg(\det(\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ p & q & s \end{pmatrix}) = 0)\ \vee$$

$$\neg(\det(\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ p & r & s \end{pmatrix}) = 0)\ \vee\ \neg(\det(\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ q & r & s \end{pmatrix}) = 0)))$$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

3. Условие пересечения прямой и плоскости.

   $\forall_{ABCDEKabcdefnpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x + a,$ $y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x -$ число $\&\ y -$ число $\&\ z -$ число$)\ \&$ коорд(плоскость$(CDE), K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ u -$ число $\&\ v -$ число $\&\ w -$ число$)\ \&\ \neg(pd + qe + rf = 0) \to$ прямаяиплоскость(прямая(AB), плоскость$(CDE), n) \leftrightarrow n =$ пересекаются$)$

   Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "коорд$(X, K) = Y$". Первый и второй антецеденты выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x + a, y + b,$ $z + c), (d, e, f))\ \&\ x -$ число $\&\ y -$ число $\&\ z -$ число$)\ \&$ коорд(плоскость(CDE), $K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0\ \&\ \ u -$ число $\&\ v -$ число $\&\ w -$ число$) \to$ прямаяиплоскость(прямая(AB), плоскость(CDE), пересекаются$) \leftrightarrow$ $\neg(pd + qe + rf = 0))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKabcdefghnpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $ex+fy+gz+h = 0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & коорд(плоскость(CDE), $K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & $u-$ число & $v-$ число & $w-$ число) & $\neg(p(bg - cf) + q(ce - ag) + r(af - be) = 0) \rightarrow$ прямаяиплоскость(прямая(AB), плоскость$(CDE), n) \leftrightarrow n =$ пересекаются)

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEKabcdefghnpqrs}$(коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $ex+fy+gz+h = 0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & коорд(плоскость(CDE), $K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & $u-$ число & $v-$ число & $w-$ число) $\rightarrow$ прямаяиплоскость(прямая(AB), плоскость(CDE), пересекаются) $\leftrightarrow$ $\neg(p(bg - cf) + q(ce - ag) + r(af - be) = 0))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

Взаимное расположение трех плоскостей в пространстве

Для характеризации взаимного расположения трех плоскостей a, b, c используется утверждение "триплоскости(a, b, c, d)". Если d - логический символ "общаяточка", то плоскости имеют единственную общую точку. Если d - символ "общаяпрямая", то плоскости попарно различны и имеют единственную общую прямую. Если d - символ "параллелпрямые", то плоскости попарно пересекаются и линия пересечения каждых двух плоскостей параллельна третьей плоскости. Если d - терм "параллелплоскости(m, n, k)", то две плоскости параллельны при $m =$ "параллельно" либо равны при $m =$ "равны", а третья их пересекает при $n =$ "пересекаются" либо параллельна при $n =$ "параллельно". При этом k - номер третьей плоскости; $k = 1, 2, 3$. Случай $m = n =$ "параллельно" не допускается. Если d - символ "параллельно", то плоскости попарно параллельны. Если d - символ "равны", то плоскости равны.

Все приемы этого подраздела имеют заголовок "второйтерм".

1. Условие наличия единственной общей точки.

   $\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & $u-$ число & $v-$ число & $w-$ число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{XYZ}(mX + nY + kZ + h = 0$ & $X-$ число & $Y-$ число & $Z-$ число) & $\neg(\det(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}) = 0) \rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость$(PQR), e) \leftrightarrow$ $e =$ общаяточка)

   Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй и третий - выделены указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & $u-$ число & $v-$ число & $w-$ число) &

$$\text{коорд}(\text{плоскость}(PQR),K)=\text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h=0\ \&\ \ X-\text{число}\ \&\ Y-\text{число}\ \&\ Z-\text{число})\rightarrow\text{триплоскости}(\text{плоскость}(ABC),\text{плоскость}(DEF),\text{плоскость}(PQR),\text{общаяточка})\leftrightarrow\neg(\det(\begin{pmatrix} a & b & c\\ p & q & r\\ m & n & k\end{pmatrix})=0))$$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

2. Три различные плоскости имеют общую прямую.

$$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ \ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(PQR),K)=\text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h=0\ \&\ \ X-\text{число}\ \&\ Y-\text{число}\ \&\ Z-\text{число})\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ p & q & r\\ m & n & k\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ p & q & r & s\\ m & n & k & h\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ p & q & r\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} p & q & r\\ m & n & k\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ m & n & k\end{pmatrix})=2\rightarrow\text{триплоскости}(\text{плоскость}(ABC),\text{плоскость}(DEF),\text{плоскость}(PQR),e)\leftrightarrow e=\text{общаяпрямая})$$

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Для вычисления рангов матриц используется нормализатор "нормранг". Уровень срабатывания равен 1.

$$\forall_{ABCDEFKPQRabcdhkmnpqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ \ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(PQR),K)=\text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h=0\ \&\ \ X-\text{число}\ \&\ Y-\text{число}\ \&\ Z-\text{число})\rightarrow\text{триплоскости}(\text{плоскость}(ABC),\text{плоскость}(DEF),\text{плоскость}(PQR),\text{общаяпрямая})\leftrightarrow\text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ p & q & r\\ m & n & k\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ p & q & r & s\\ m & n & k & h\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ p & q & r\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} p & q & r\\ m & n & k\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ m & n & k\end{pmatrix})=2)$$

Аналогично предыдущему, но нормализаторы "нормранг" не используются, а уровень срабатывания равен 3.

3. Три различные плоскости образуют призму.

$$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ \ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(PQR),K)=\text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h=0\ \&\ \ X-\text{число}\ \&\ Y-\text{число}\ \&\ Z-\text{число})\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ p & q & r\\ m & n & k\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ p & q & r & s\\ m & n & k & h\end{pmatrix})=3\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ p & q & r\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} p & q & r\\ m & n & k\end{pmatrix})=2\ \&\ \text{ранг}(\begin{pmatrix} a & b & c\\ m & n & k\end{pmatrix})=$$

2 → триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) ↔ e = параллелпрямые)

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdhkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) = set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) = set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) & коорд(плоскость(PQR), K) = set$_{XYZ}$($mX+nY+kZ+h=0$ & X − число & Y − число & Z − число) → триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелпрямые) ↔ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 2 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) = 3 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}$) = 2 & ранг($\begin{pmatrix} p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 2 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 2)

Приемы аналогичны приемам предыдущего пункта; единственное отличие состоит в том, что ранг расширенной матрицы равен 3.

4. Две плоскости параллельны, а третья их пересекает.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) = set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) = set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) & коорд(плоскость(PQR), K) = set$_{XYZ}$($mX+nY+kZ+h=0$ & X − число & Y − число & Z − число) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 2 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) = 3 & ранг($\begin{pmatrix} p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 1 → триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) ↔ e = параллелплоскости(параллельно, пересекаются, 1))

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) = set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) = set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) & коорд(плоскость(PQR), K) = set$_{XYZ}$($mX+nY+kZ+h=0$ & X − число & Y − число & Z − число) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 2 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) = 3 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 1 → триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) ↔ e = параллелплоскости(параллельно, пересекаются, 2))

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) = set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & коорд(плоскость(DEF), K) = set$_{uvw}$($pu+qv+rw+s=0$ & u − число & v − число & w − число) & коорд(плоскость(PQR), K) = set$_{XYZ}$($mX+nY+kZ+h=0$ & X − число & Y − число & Z − число) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) = 2 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) = 3 & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}$) = 1 → триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость$(PQR), e) \leftrightarrow e =$ параллелплоскости(параллельно, пересекаются, 3))

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0\ \&\ \ x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0\ \&\ \ u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0\ \&\ \ X -$ число & $Y -$ число & $Z -$ число) $\to$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(параллельно, пересекаются, 1)) $\leftrightarrow$ ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}\right) = 2$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}\right) = 3$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}\right) = 1)$

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0\ \&\ \ x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0\ \&\ \ u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0\ \&\ \ X -$ число & $Y -$ число & $Z -$ число) $\to$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(параллельно, пересекаются, 2)) $\leftrightarrow$ ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}\right) = 2$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}\right) = 3$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & k \end{pmatrix}\right) = 1)$

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0\ \&\ \ x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0\ \&\ \ u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0\ \&\ \ X -$ число & $Y -$ число & $Z -$ число) $\to$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(параллельно, пересекаются, 3)) $\leftrightarrow$ ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}\right) = 2$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}\right) = 3$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}\right) = 1)$

Аналогично предыдущему.

5. Три плоскости попарно параллельны.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0\ \&\ \ x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0\ \&\ \ u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \text{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0\ \&\ \ X -$ число & $Y -$ число & $Z -$ число) & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}\right) = 1$ &

ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2 \rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) $\leftrightarrow$ $e =$ параллельно)

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{XYZ}$($mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллельно) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 1$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$)

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

6. Две плоскости совпадают, а третья их пересекает.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{XYZ}$($mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1 \rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) $\leftrightarrow$ $e =$ параллелплоскости(равны, пересекаются, 1))

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{XYZ}$($mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1 \rightarrow$

триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) $\leftrightarrow$ $e =$ параллелплоскости(равны, пересекаются, 2))

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $= \mathrm{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$) $= 1 \rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) $\leftrightarrow$ $e =$ параллелплоскости(равны, пересекаются, 3))

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $= \mathrm{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(равны, пересекаются, 1)) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1$)

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $= \mathrm{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(равны, пересекаются, 2)) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1$)

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $= \mathrm{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{XYZ}(mX+nY+kZ+h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(равны, пересекаются, 3)) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ &

ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{pmatrix}) = 1)$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

7. Две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d =$ 0 & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость$(DEF), K) =$ $\mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{XYZ}(mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}) = 1$ & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}) = 2$ & ранг$(\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}) = 1 \rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость$(PQR), e) \leftrightarrow$ $e =$ параллелплоскости(равны, параллельно, 1))

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d =$ 0 & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость$(DEF), K) =$ $\mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{XYZ}(mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}) = 1$ & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}) = 2$ & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & k & h \end{pmatrix}) = 1 \rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость$(PQR), e) \leftrightarrow$ $e =$ параллелплоскости(равны, параллельно, 2))

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d =$ 0 & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость$(DEF), K) =$ $\mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{XYZ}(mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}) = 1$ & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}) = 2$ & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{pmatrix}) = 1 \rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость$(PQR), e) \leftrightarrow$ $e =$ параллелплоскости(равны, параллельно, 3))

Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d =$ 0 & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость$(DEF), K) =$ $\mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{XYZ}(mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число &

Y – число & Z – число) $\to$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(равны, параллельно, 1)) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 1$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1$)

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{XYZ}$($mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\to$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(равны, параллельно, 2)) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 1$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1$)

$\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{XYZ}$($mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\to$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), параллелплоскости(равны, параллельно, 3)) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ m & n & k \end{pmatrix}$) $= 1$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 2$ & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$) $= 1$)

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

8. Три плоскости равны.

   $\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{XYZ}$($mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1 \to$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), e) $\leftrightarrow$ $e =$ равны)

   Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCDEFKPQRabcdehkmnpqrs}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{XYZ}$($mX + nY + kZ + h = 0$ & X – число &

Y – число & Z – число) $\rightarrow$ триплоскости(плоскость(ABC), плоскость(DEF), плоскость(PQR), равны) $\leftrightarrow$ ранг($\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \\ m & n & k & h \end{pmatrix}$) $= 1$)

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

Взаимное расположение двух точек относительно плоскости

1. Точки по одну сторону от плоскости.

   $\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}$(коорд(плоскость($CDE$), K) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}(px + qy + rz + s = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(A, K) $= (a, b, c)$ & коорд(B, K) $= (d, e, f)$ & A – точка & B – точка & $0 \leq (ap + bq + cr)(dp + eq + fr + s) \rightarrow$ однасторона(A, B, плоскость(CDE)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "классточки(A X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Такое подвыражение обозначает некоторый элемент конечного набора множеств X, содержащий точку A (при отсутствии такового - пустое множество). Первый антецедент, а также четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "полупространство(плоскость(CDE),B)" либо "обрполупространство(плоскость(CDE),B)". Проверочные операторы не позволяют установить взаимное расположение точек A, B относительно плоскости CDE. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, в которой указатель "контекст" связан с подвыражением "двугрУгол(X, Y, B, Z)", содержащим плоскость CDE. В остальном версии одинаковы.

   $\forall_{ABCDEFGHKabcdefghpqr}$(коорд(плоскость($CDE$), K) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(FGH), K) $=$ $\mathrm{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & u – число & v – число & w – число) & коорд(A, K) $= (p, q, r)$ & коэффпропорц($(e, f, g), (a, b, c), k$) & $B \in$ плоскость(FGH) & A – точка & $0 \leq (ap + bq + cr)(d - kh) \rightarrow$ однасторона(A, B, плоскость(CDE)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "классточки(A X)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента, а также шестой антецедент идентифицируются с посылками. Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, пятый - выделен указателем "усм". Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "полупространство(плоскость(CDE),B)" либо "обрполупространство(плоскость(CDE),B)". Проверочные операторы не позволяют установить взаимное расположение точек A, B относительно плоскости CDE. Уровень срабатывания равен 2.

2. Точки по разные стороны от плоскости.

$\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}(\text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),K)=\text{set}_{xyz}(px+qy+rz+s=0\ \&$
$x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&$
$\text{коорд}(B,K)=(d,e,f)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
$(ap+bq+cr)(dp+eq+fr+s)\leq 0\rightarrow\text{разныестороны}(A,B,\text{плоскость}(CDE)))$

Созданы две версии приема, аналогично предыдущему пункту.

$\forall_{ABCDEFGHKabcdefghpqr}(\text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),K)\ =\ \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d\ =$
$0\ \&\ \ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(FGH),K)\ =$
$\text{set}_{uvw}(eu+fv+gw+h=0\ \&\ \ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&$
$\text{коорд}(A,K)=(p,q,r)\ \&\ \text{коэффпропорц}((e,f,g),(a,b,c),k)\ \&$
$B\in\text{плоскость}(FGH)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ (ap+bq+cr)(d-kh)\leq 0\rightarrow$
$\text{разныестороны}(A,B,\text{плоскость}(CDE)))$

Аналогично предыдущему пункту.

3. Условие принадлежности точки пересечения плоскости с прямой отрезку.

   $\forall_{ABCDEDFKabcdefpqrs}(\text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(d,e,f)\ \&$
   $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),K)=$
   $\text{set}_{xyz}(px+qy+rz+s=0\ \&\ \ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&$
   $F\in\text{прямая}(AB)\ \&\ F\in\text{плоскость}(CDE)\rightarrow F\in\text{отрезок}(AB)\leftrightarrow$
   $(pa+qb+rc+s)(pd+qe+rf+s)\leq 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента и пятый антецедент идентифицируются с утверждениями из контекста. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, шестой и седьмой - выделены указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

4. Условие принадлежности точки пересечения плоскости с прямой лучу.

   $\forall_{ABCDEDFKabcdefpqrs}(\text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(d,e,f)\ \&$
   $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),K)=$
   $\text{set}_{xyz}(px+qy+rz+s=0\ \&\ \ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&$
   $F\in\text{прямая}(AB)\ \&\ F\in\text{плоскость}(CDE)\rightarrow F\in\text{обратныйлуч}(AB)\leftrightarrow$
   $0\leq(pa+qb+rc+s)(pd+qe+rf+s)\ \&\ |pa+qb+rc+s|<|pd+qe+rf+s|)$

   Аналогично предыдущему.

5. Отношение, в котором точка пересечения с плоскостью делит отрезок.

   $\forall_{ABCDEDFKabcdefmpqrs}(\text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(d,e,f)\ \&$
   $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),K)=$
   $\text{set}_{xyz}(px+qy+rz+s=0\ \&\ \ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&$
   $F\in\text{прямая}(AB)\ \&\ F\in\text{плоскость}(CDE)\ \&\ \text{вектор}(AF)=m\cdot\text{вектор}(FB)\ \&$
   $n=pd+qe+rf+s\ \&\ \neg(n=0)\rightarrow m=-(pa+qb+rc+s)/n)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов, а также восьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "усм", девятый - указателем "идентификатор". Десятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

Пучок плоскостей

1. Ввод уравнения плоскости, проходящей через прямую, по которой пересекаются две другие плоскости.

$\forall_{ABCDEFGHKPQRabcdefghpq}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($eu+fv+gw+h=0$ & u – число & v – число & w – число) & прямая(GH) $\subseteq$ плоскость(ABC) & прямая(GH) $\subseteq$ плоскость(DEF) & прямая(GH) $\subseteq$ плоскость(PQR) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$) $= 2 \to p$ – число & q – число & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{xyz}$($(pa+qe)x+(pb+qf)y+(pc+qg)z+pd+qh=0$ & x – число & y – число & z – число) & $\neg((p,q)=(0,0))$))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(плоскость(PQR), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент, а также антецеденты с третьего по пятый идентифицируются с посылками. Второй и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, e, f, g, h не содержат неизвестных. Обозначения трех плоскостей различны. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости PQR. Уровни срабатывания равны 2 и 3.

2. Ввод уравнения для плоскости, принадлежащей пучку плоскостей.

$\forall_{ABCDEFGHKPQRabcdefghpq}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($eu+fv+gw+h=0$ & u – число & v – число & w – число) & плоскость(PQR) $\in$ пучокплоскостей(плоскость(ABC), плоскость(DEF)) & ранг($\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$) $= 2 \to p$ – число & q – число & коорд(плоскость(PQR), K) $=$ set$_{xyz}$($(pa+qe)x+(pb+qf)y+(pc+qg)z+pd+qh=0$ & x – число & y – число & z – число) & $\neg((p,q)=(0,0))$))

Аналогично предыдущему, но с посылками идентифицируются первый и третий антецеденты, а указателем "идентификатор" выделены второй и четвертый. В остальном приемы совпадают.

Угол между двумя плоскостями

1. Косинус угла между плоскостями.

$\forall_{ABCDEFKabcdefgh}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($eu+fv+gw+h=0$ & u – число & v – число & w – число) & прямкоорд(K) $\to$ (cos(уголмежду(плоскость(ABC), плоскость(DEF))))$^2 \cdot (a^2+b^2+c^2)(e^2+f^2+g^2)-(ae+bf+cg)^2=0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(плоскость(ABC), плоскость(DEF))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 6.

2. Косинус двугранного угла.

$\forall_{ABCDEFGKabcdefghipqr}$(коорд(плоскость($ABC$), K) $=$ set$_{xyz}$($ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DEF), K) $=$ set$_{uvw}$($eu+fv+gw+h=0$ & u – число & v – число & w – число) & прямкоорд(K)

& коорд$(G, K) = (p, q, r)$ & $m = ap + bq + cr + d$ & $n = ep + fq + gr + h$ & $\neg(m = 0)$ & $\neg(n = 0)$ & $(i = 0 \ \vee \ i = 3) \rightarrow \cos($двугругол(плоскость$(ABC)$, плоскость$(DEF), G, i))(a^2 + b^2 + c^2)(e^2 + f^2 + g^2) = -sgm \cdot$ sg$n \cdot (ae + bf + cg))$

$\forall_{ABCDEFGKabcdefghipqr}($коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(DEF), K) = \mathrm{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & $u-$число & $v-$число & $w-$число) & прямкоорд(K) & коорд$(G, K) = (p, q, r)$ & $m = ap + bq + cr + d$ & $n = ep + fq + gr + h$ & $\neg(m = 0)$ & $\neg(n = 0)$ & $(i = 1 \ \vee \ i = 2) \rightarrow \cos($двугругол(плоскость$(ABC)$, плоскость$(DEF), G, i))(a^2 + b^2 + c^2)(e^2 + f^2 + g^2) =$ sg$m \cdot$ sg$n \cdot (ae + bf + cg))$

Выражение "двугругол(M, N, P, k)" обозначает величину двугранного угла, определяемого плоскостями M, N, точкой P вне этих плоскостей и указателем k. Если $k = 0$, то точка находится внутри двугранного угла; если $k = 1$, то точка находится внутри угла, смежного с данным относительно плоскости M. Если $k = 2$, то точка находится внутри угла, смежного с данным относительно плоскости N. Если $k = 3$, то точка находится внутри угла, вертикального к данному.

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "двугругол(плоскость(ABC), плоскость(DEF), G, i)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй, пятый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

3. Биссекторная плоскость двугранного угла.

   (a) Ввод уравнения для биссекторной плоскости.

   $\forall_{ABCDEFKSabcdefghkmnpq}($биссектрплоск$(C$, прямая$(AB), D, E)$ & прямкоорд(K) & коорд(плоскость$(ABD), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{uvw}(eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $q = \sqrt{e^2 + f^2 + g^2}$ & коорд$(F, K) = (m, n, k)$ & $F \in$ двугранУгол$(C$, прямая$(AB), D)$ & $S = \mathrm{sg}((em + fn + gk + h)(am + bn + ck + d)) \rightarrow$ коорд(плоскость$(ABE), K) = \mathrm{set}_{xyz}((a/p - Se/q)x + (b/p - Sf/q)y + (c/p - Sg/q)z + (d/p - Sh/q) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

   Утверждение "биссектрплоск(P, Q, R, M)" означает, что точка M лежит на биссекторной плоскости угла между плоскостями, проходящими через прямую Q и (соответственно) через точки P, R. Выражение "двугранУгол$(P, Q$, $R)$" обозначает двугранный угол, вершиной которого служит прямая Q, причем первая полуплоскость определяется точкой P вне прямой Q, а вторая - точкой R вне этой прямой.

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента, а также восьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости ABE. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEKSabcdefghkmnpq}$(биссектрплоск($C$, прямая($AB$), D, E) & прямкоорд(K) & коорд(плоскость(ABD), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ set$_{uvw}$($eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) &
$p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $q = \sqrt{e^2 + f^2 + g^2}$ &
$0 < \pi/2 -$ двугранугол(C, прямая(AB), D) & $S = \mathrm{sg}(ae + bf + cg)$ $\to$ коорд(плоскость(ABE), K) $=$ set$_{xyz}$($(a/p + Se/q)x + (b/p + Sf/q)y + (c/p + Sg/q)z + (d/p + Sh/q) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

Выражение "двугранугол(P, Q, R)" обозначает величину двугранного угла, вершиной которого служит прямая Q, причем первая полуплоскость определяется точкой P вне прямой Q, а вторая - точкой R вне этой прямой.

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости ABE. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEKSabcdefghkmnpqrst}$(биссектрплоск($C$, прямая($AB$), D, E) & прямкоорд(K) & коорд(плоскость(ABD), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ set$_{uvw}$($eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) &
$p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $q = \sqrt{e^2 + f^2 + g^2}$ & коорд(C, K) $= (m, n, k)$ & коорд(D, K) $= (r, s, t)$ & $S = \mathrm{sg}((er + fs + gt + h)(am + bn + ck + d))$ $\to$ коорд(плоскость(ABE), K) $=$ set$_{xyz}$($(a/p - Se/q)x + (b/p - Sf/q)y + (c/p - Sg/q)z + (d/p - Sh/q) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости ABE. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Ввод уравнения для плоскости, являющейся противоположной стороной двугранного угла, если известны уравнения биссектрисы угла и другой стороны.

$\forall_{ABCDEKabcdefgh}$(биссектрплоск(C, прямая(AB), E, D) & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ set$_{xyz}$($ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость(ABD), K) $=$ set$_{uvw}$($eu + fv + gw + h = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & прямкоорд(K) $\to$ коорд(плоскость(ABE), K) $=$ set$_{xyz}$($(ae^2 + 2(bf + cg)e - a(f^2 + g^2))x + (bf^2 + 2(ae + cg) - b(e^2 + g^2))y + (cg^2 + 2(ae + bf)g - c(e^2 + f^2))z + 2(ae + bf + cg)h - d(f^2 + g^2 + e^2) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(плоскость(ABE), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости ABE. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Ввод уравнений для биссекторных плоскостей между двумя заданными плоскостями.

$\forall_{ABCDEKSabcdefghpq}$(прямкоорд$(K)$ & коорд(плоскость$(ABC), K) =$ $\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость$(ABD), K) = \text{set}_{uvw}(eu+fv+gw+h=0$ & u – число & v – число & w – число) & биссектрплоск(C, прямая$(AB), D, E)$ & $p = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $q = \sqrt{e^2+f^2+g^2}$ $\rightarrow$ коорд(плоскость$(ABE), K) =$ $\text{set}_{xyz}((aq-pe)x+(bq-pf)y+(cq-gp)z+dq-ph=0$ & x – число & y – число & z – число) $\vee$ коорд(плоскость$(ABE), K) = \text{set}_{xyz}((aq+pe)x+$ $(bq+pf)y+(cq+gp)z+dq+ph=0$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости ABE. Уровень срабатывания равен 4.

Угол между прямой и плоскостью

$\forall_{ABCDEKabcdefgpqr}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(прямая$(DE), K) =$ set_{uvw}(пропорцнаборы$((u+e, v+f, w+g), (p,q,r))$ & u – число & v – число & w–число)прямкоорд$(K) \rightarrow (a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)(\sin($уголмежду(плоскость$(ABC)$, прямая$(DE))))^2 - (ap+bq+cr)^2 = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(плоскость(ABC), прямая(DE))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение для угла между плоскостью ABC и прямой DE не содержит неизвестных, а выводимое соотношение - содержит. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEKabcdefgpqr}$(коорд(плоскость$(ABC), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(прямая$(DE), K) =$ set_{uvw}(пропорцнаборы$((u+e, v+f, w+g), (p,q,r))$ & u – число & v – число & w – число)прямкоорд$(K) \rightarrow \sin($уголмежду(плоскость(ABC), прямая$(DE))) =$ $|ap+bq+cr|/(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}))$

Аналогично предыдущему, но предположение относительно выражения для рассматриваемого угла отбрасывается. Уровень срабатывания равен 6.

Расстояние от точки до плоскости

1. Расстояние от точки до плоскости.

   $\forall_{ABCDEKabcdefg}$(прямая$(AB) \perp$ плоскость(CDE) & $B \in$ плоскость(CDE) & коорд(плоскость$(CDE), K) = \text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд$(A, K) = (e, f, g)$ & прямкоорд(K) & актив$(l(AB)) \rightarrow l(AB)^2 = (ae+bf+cg+d)^2/(a^2+b^2+c^2))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты с третьего по пятый идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "усм". Выражения a, b, c, d, e, f, g не содержат неизвестных. Выражение для расстояния AB имеет тип "неизв". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDKabcdefg}$(прямкоорд(K) & коорд(плоскость$(BCD), K)$ = set$_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд$(A, K) = (e, f, g) \to$ расстдоплоскости$(A,$ плоскость$(BCD))$ = $|ae + bf + cg + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстдоплоскости$(A$, плоскость$(BCD))$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

2. Плоскость, равноудаленная от двух точек.

   $\forall_{ABCDEF}$(разныеточки(C, D) & расстдоплоскости$(C,$ плоскость$(ABE))$ = расстдоплоскости$(D,$ плоскость$(ABE)) \to$ прямая$(CD) \parallel$ плоскость(ABE) $\vee$ F – точка & $F \in$ отрезок(CD) & $l(CF) = l(DF)$ & $F \in$ плоскость$(ABE))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент выделен указателем "равно"; он идентифицируется с одной либо двумя посылками задачи на доказательство или на исследование. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием вводит новую переменную F. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Для блокировки повторов используется комментарий "расстдоплоскости"к текущей посылке. Уровень срабатывания равен 3.

3. Нормализатор общей стандартизации "нормрасстдоплоскости".

   Нормализатор имеет единственный прием, использующий равенство из посылок: $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$. Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства не допускается. Выражение a имеет заголовок "расстдоплоскости"и не входит в выражение b.

Усмотрение противоречия: уравнение плоскости выродилось в тождество

$\forall_{ABCK}$(коорд(плоскость$(ABC), K)$ = set$_{xyz}(x$ – число & y – число & z – число) $\leftrightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Разбор случаев по отличию от нуля коэффициента

$\forall_{ABCKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(плоскость$(ABC), K)$ = set$_{xyz}(ax + by + cz + d =$ 0 & x – число & y – число & z – число) $\to \neg(b = 0)$ $\vee\, b = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Имеются посылки вида "плоскость$(ABC) \cap X = Y$" и "коорд(X, Q) = set$(\ldots)$". При этом отсутствует посылка вида "коорд(Y, S) = set$(\ldots)$". Не усматривается отличие от нуля какого-либо из коэффициентов a, b, c. Уровень срабатывания равен 7.

Синтезатор "плоскбазис" определения ортонормированного базиса на плоскости

Синтезатор реализует утверждение "плоскбазис(a, b, c, d)". Входная переменная a имеет своим значением набор коэффициентов уравнения плоскости P в некоторой прямоугольной системе координат. Остальные переменные - выходные. Переменной b присваивается координатный набор, определяющий некоторую точку плоскости P (начало координат); переменным c и d - координатные наборы, определяющие вектора ортонормированного базиса на данной плоскости.

1. Плоскость, параллельная координатной.

   $\forall_{abc}(c = -b/a \to \text{плоскбазис}((a, 0, 0, b), (c, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)))$

   $\forall_{abc}(c = -b/a \to \text{плоскбазис}((0, a, 0, b), (0, c, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)))$

   $\forall_{abc}(c = -b/a \to \text{плоскбазис}((0, 0, a, b), (0, 0, c), (1, 0, 0), (0, 1, 0)))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

2. Плоскость, проходящая через координатную ось.

   $\forall_{abc}(c = \sqrt{a^2 + b^2} \to \text{плоскбазис}((0, a, b, 0), (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, -b/c, a/c)))$

   $\forall_{abc}(c = \sqrt{a^2 + b^2} \to \text{плоскбазис}((a, 0, b, 0), (0, 0, 0), (0, 1, 0), (-b/c, 0, a/c)))$

   $\forall_{abc}(c = \sqrt{a^2 + b^2} \to \text{плоскбазис}((a, b, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 1), (-b/c, a/c, 0)))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

3. Общий случай.

   $\forall_{abcdmnpqrxy}(m = c^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \ \& \ p = bc^2x - ad^2y \ \& \ q = -abcx - bc^2y - cd^2y \ \& \ r = a^2dx + c^2dx + abdy \ \& \ n = p^2 + q^2 + r^2 \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(d = 0) \to$ плоскбазис$((ax + by, cx, dy, 0), (0, 0, 0), (cd/sqrtm, -ad/sqrtm, -bc/sqrtm), (p/sqrtn, q/sqrtn, r/sqrtn)))$

   Первые пять антецедентов выделены укзателем "идентификатор", следующие два - обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 2.

   $\forall_{abcdmn}(m = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ \& \ n = \sqrt{b^2 + c^2} \ \& \ \neg(c = 0) \to \text{плоскбазис}((a, b, c, d), (0, 0, -d/c), (0, c/n, -b/n), (-n/m, ab/(mn), ac/(mn))))$

   $\forall_{abcdmn}(m = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ \& \ n = \sqrt{b^2 + c^2} \ \& \ \neg(b = 0) \to \text{плоскбазис}((a, b, c, d), (0, -d/b, 0), (0, c/n, -b/n), (-n/m, ab/(mn), ac/(mn))))$

   Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

Синтезатор "Плоскбазис" определения двух ортогональных единичных векторов, перпендикулярных заданному вектору

Синтезатор реализует утверждение "Плоскбазис(a, b, c)". Входная переменная a имеет своим значением координатный набор вектора нормали к плоскости P в некотором ортонормированном базисе. Остальные переменные - выходные. Им присваиваются координаты в том же базисе двух единичных ортогональных друг другу векторов, лежащих в плоскости P.

1. Плоскость, параллельная координатной.

   $\forall_a$(Плоскбазис$((a,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$)

   $\forall_a$(Плоскбазис$((0,a,0),(1,0,0),(0,0,1))$)

   $\forall_a$(Плоскбазис$((0,0,a),(1,0,0),(0,1,0))$)

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Общий случай.

   $\forall_{abcmn}(m = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \&\ n = \sqrt{b^2+c^2}\ \&\ \neg(n=0) \rightarrow$ Плоскбазис$((a,b,c),$ $(0,c/n,-b/n),(-n/m,ab/(mn),ac/(mn))))$

   Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

1.8 Линии второго порядка

Окружность

1. Ввод уравнения окружности с заданным центром.

   $\forall_{AKabc}$(прямкоорд(K) & коорд$(A,K) = (a,b) \rightarrow c$ – число & коорд(окружность$(AB),K) = \mathrm{set}_{xy}(x^2-2ax+y^2-2by+c=0$ & x – число & y – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(окружность(AB), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение окружности AB через старые параметры. Прием вводит новый параметр c. Уровень срабатывания равен 3.

2. Ввод уравнения окружности, имеющей заданный центр и касающейся заданной прямой.

   $\forall_{ABCDKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд$(A,K) = (a,b)$ & прямая(CD) – касательная к окружность(AB) & коорд(прямая$(CD),K) = \mathrm{set}_{xy}(cx+dy+e=0$ & x – число & y – число) $\rightarrow$ коорд(окружность$(AB),K) = \mathrm{set}_{uv}(u^2+v^2-2au-2bv+a^2+b^2-(ac+bd+e)^2/(c^2+d^2)=0$ & u – число & v – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(окружность(AB), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение окружности AB. Уровень срабатывания равен 2.

3. Ввод уравнения окружности, имеющей заданный радиус.

   $\forall_{ABKabc}$(прямкоорд(K) & $l(AB) = c \rightarrow a$ – число & b – число & коорд(окружность$(AB),K) = \mathrm{set}_{xy}(x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-c^2=0)$ & x – число & y – число)

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(окружность(AB),

K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение c не содержит неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение окружности AB. Прием вводит новые параметры a, b. Уровень срабатывания равен 4.

4. Выражение координат центра окружности через коэффициенты ее уравнения.

   $\forall_{ABKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд(окружность(AB), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & x – число & y – число) & коорд(A, K) $= (e, f) \to$
   $b+2ae=0$ & $c+2af=0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(окружность(AB), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & x – число & y – число) $\to$ коорд(A, K) $= (-b/(2a), -c/(2a))$ &
   $\neg(a=0)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 3.

5. Выражение радиуса окружности через коэффициенты уравнения.

   $\forall_{ABKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(окружность(AB), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & x – число & y – число) $\to b^2+c^2-4a(d+al(AB)^2)=0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных, а выражение для расстояния AB - содержит. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(Окружность(ABC), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & x – число & y – число) $\to b^2+c^2-4a(d+al(AB)^2)=0$)

   Аналогично предыдущему, но условия на неизвестные отброшены, а уровень срабатывания равен 4.

6. Равенство коэффициентов перед квадратами.

   $\forall_{ABKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд(окружность(AB), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ & x – число & y – число) $\to a-b=0$)

   $\forall_{ABCKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд(Окружность(ABC), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ & x – число & y – число) $\to a-b=0$)

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уравнение окружности содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 1.

7. Равенство нулю коэффициента при смешанном произведении.

   $\forall_{ABCKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд(Окружность(ABC), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+cd+ey+f=0$ & x – число & y – число) $\to c=0$)

   Аналогично предыдущему.

8. Ненулевой коэффциент при квадратах.

   $\forall_{ABKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд(окружность$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + dy^2 + bx + cy + e = 0$ & x – число & y – число$) \to \neg(a = 0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование. Указатель "элемент(x23)" определяет идентификацию связывающей приставки xy с возможной перестановкой переменных. Не усматривается, что a не равно 0. Уровень срабатывания равен 2.

9. Ввод уравнения окружности, проходящей через три заданные точки.

   $\forall_{ABCDEKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & коорд$(C, K) = (e, f)$ & $p = \det\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix}$ & $\neg(p = 0)$ & $A \in$ окружность(DE) & $B \in$ окружность(DE) & $C \in$ окружность(DE) & $q = \det\begin{pmatrix} a^2+b^2 & b & 1 \\ c^2+d^2 & d & 1 \\ e^2+f^2 & f & 1 \end{pmatrix}$ & $r = \det\begin{pmatrix} a^2+b^2 & a & 1 \\ c^2+d^2 & c & 1 \\ e^2+f^2 & e & 1 \end{pmatrix}$ & $s = \det\begin{pmatrix} a^2+b^2 & a & b \\ c^2+d^2 & c & d \\ e^2+f^2 & e & f \end{pmatrix} \to$ коорд(окружность$(DE), K) = \mathrm{set}_{xy}(px^2 + py^2 - qx + ry - s = 0$ & x – число & y – число$))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(окружность(DE), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент, а также антецеденты с номерами от шестого до девятого идентифицируются с посылками. Шестой антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Определители вычисляются нормализатором "нормопределитель". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение окружности DE. Уровень срабатывания равен 5.

10. Координаты центра окружности, проходящей через две заданные точки.

    $\forall_{ABCDKabcdpq}(A \in$ окружность(CD) & $B \in$ окружность(CD) & прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \to p$ – число & q – число & коорд$(C, K) = (p, q)$ & $2(c - a)p + 2(d - b)q + a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(окружность(CD), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм", последние два - указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. На окружности не выделено никаких точек, отличных от A, B, для которых нормализатор "нормкоорд" мог бы определить их координаты, выраженные только через известные параметры. Отсутствует посылка, задающая уравнение окружности CD. Прием вводит новые параметры p, q. Уровень срабатывания равен 4.

11. Ввод уравнения окружности, касающейся заданной прямой в заданной точке.

$\forall_{ABCDEKabcdepq}$(прямая(BC) $-$ касательная к окружность(DE) &
$A \in$ прямая(BC) & $A \in$ окружность(DE) & коорд(A, K) $= (a, b)$ &
прямкоорд(K) & коорд(прямая(BC), K) $= \mathrm{set}_{xy}(cx + dy + e = 0$ & $x -$ число
& $y -$ число) $\rightarrow p -$ число & $q -$ число & $-dp + cq + ad - bc = 0$ &
коорд(окружность(DE), K) $= \mathrm{set}_{uv}(u^2 + v^2 - 2pu - 2qv + 2ap - a^2 +$
$2bq - b^2 = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд(D, K) $= (p, q)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(окружность(DE), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и пятый антецедент идентифицируются с посылками. Второй и третий антецеденты выделены указателем "усм", четвертый и шестой - указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение окружности DE. Уровень срабатывания приема равен 4.

12. Взаимное расположение окружности и прямой.

    (a) Окружность и прямая не пересекаются.

    $\forall_{ABCDKabcdpqr}$(прямкоорд(K) & коорд(прямая(AB), K) $=$
    $\mathrm{set}_{xy}(px{+}qy{+}r = 0$ & $x-$число & $y-$число) & коорд(окружность(CD), K) $=$
    $\mathrm{set}_{uv}(au^2 + av^2 + bu + cv + d = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) $\rightarrow$
    непересек(прямая(AB), окружность(CD)) $\leftrightarrow$
    $0 < (pb + qc - 2ar)^2 - (b^2 + c^2 - 4ad)(p^2 + q^2)$)

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи. Исключение составляют задачи на описание, имеющие цель "исследовать". Первый и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

    (b) Прямая касается окружности.

    $\forall_{ABCDKabcdpqr}$(прямкоорд(K) & коорд(прямая(AB), K) $=$
    $\mathrm{set}_{xy}(px{+}qy{+}r = 0$ & $x-$число & $y-$число) & коорд(окружность(CD), K) $=$
    $\mathrm{set}_{uv}(au^2 + av^2 + bu + cv + d = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) $\rightarrow$
    прямая(AB) $-$ касательная к окружность(CD) $\leftrightarrow$
    $(pb + qc - 2ar)^2 - (b^2 + c^2 - 4ad)(p^2 + q^2) = 0$)

    Аналогично предыдущему.

13. Касательная к окружности, проходящая через заданную точку.

$\forall_{ABCDKabcdmnpqrs}$(прямкоорд($K$) & коорд($A, K$) $= (p, q)$ &
коорд(окружность(CD), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ &
$x -$ число & $y -$ число) & прямая(AB) $-$ касательная к окружность(CD)
& $n = b^2 + c^2 - 4ad$ & $m = \sqrt{n(4a^2p^2 + 4abp + 4a^2q^2 + 4acq + 4ad)}$ &
$r = c^2 - 4ad - b^2 - 4abp$ & $s = -(2ap + b)(2aq + c) \rightarrow$
коорд(прямая(AB), K) $= \mathrm{set}_{uv}((v - q)r - (u - p)(s + m) = 0$ & $u -$ число
& $v -$ число) $\vee$ коорд(прямая(AB), K) $= \mathrm{set}_{uv}((v - q)r -$
$(u - p)(s - m) = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(AB), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент, а также третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b, c, d, p, q не содержат неизвестных. Результат раскрывания скобок в выражении "$ap^2 + aq^2 + bp + cq + d$" не тождественно нулевой. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания приема равен 3.

14. Уравнение прямой, соединяющей точки касания с окружностью касательных, проходящих через заданную точку.

    $\forall_{ABCDEKabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(A, K) $= (p, q)$ & коорд(окружность(BC), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ & x – число & y – число) & прямая(AE) – касательная к окружность(BC) & прямая(AD) – касательная к окружность(BC) & $E \in$ окружность(BC) & $D \in$ окружность(BC) & разныеточки(D, E) $\to$ коорд(прямая(DE), K) $= \mathrm{set}_{uv}(u(b + 2ap) + v(c + 2aq) + cq + bp + 2d = 0$ & u – число & v – число))

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(прямая(DE), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент, а также антецеденты с третьего по пятый идентифицируются с посылками. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", шестой и седьмой - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой DE. Уровень срабатывания равен 2.

15. Начало канонической системы координат является центром окружности.

    $\forall_{ABCKa}$(каноничкоорд(K, a) & окружн(a) & $K = (A, B, C) \to$ центр(A, a))

    Утверждение "окружн(a)" означает, что a есть окружность; утверждение "каноничкоорд(K, a)" - что K есть каноническая система координат для окружности a.

    Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

16. Ввод координат центра окружности, расположенной в трехмерном пространстве.

    $\forall_{ABCKabc}$(прямкоорд(K) $\to a$ – число & b – число & c – число & коорд(A, K) $=$ (a, b, c))

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "Окружность(A, B, C)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче рассматривается касательная к данной окружности. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Прием вводит новые параметры a, b, c. Уровень срабатывания равен 2.

17. Усмотрение противоречия: уравнение окружности выродилось в тождество.

    $\forall_{ABCK}$(коорд(Окружность(ABC), K) $= \mathrm{set}_{xy}(x$ – число & y – число) $\to$ ложь)

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Уровень срабатывания приема равен 2.

Общее уравнение кривой второго порядка

1. Ввод общего уравнения кривой второго порядка.

   $\forall_{EKabcdef}$(линвторпорядка(E) & прямкоорд$(K) \to a$ – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x – число & y – число))

   $\forall_{EKabcdef}$(эллипс(E) & прямкоорд$(K) \to a$ – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x – число & y – число) & $b^2-4ac<0)$

   $\forall_{EKabcdef}$(гипербола(E) & прямкоорд$(K) \to a$ – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x – число & y – число) & $0<b^2-4ac$ & $\neg(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0))$

   $\forall_{EKabcdef}$(парабола(E) & прямкоорд$(K) \to a$ – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x – число & y – число) & $b^2-4ac=0$ & $\neg(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности выразить уравнение кривой E через старые параметры. Вводятся новые параметры a,b,c,d,e,f. Уровень срабатывания равен 6.

2. Элемент кривой второго порядка - точка.

   $\forall_{AB}$(линвторпорядка(B) & $A \in B \to A$ – точка)

   $\forall_{AB}$(эллипс(B) & $A \in B \to A$ – точка)

   $\forall_{AB}$(гипербола(B) & $A \in B \to A$ – точка)

   $\forall_{AB}$(парабола(B) & $A \in B \to A$ – точка)

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

3. Вершина кривой принадлежит кривой.

   $\forall_{AE}$(вершина(A,E) & линвторпорядка$(E) \to A \in E)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" разрешает рассмотрение альтернативных заголовков второго антецедента: "эллипс", "гипербола", "парабола". Уровень срабатывания равен 1.

4. Невырожденность уравнения кривой второго порядка.

   $\forall_{KPabc}(a=bc$ & линвторпорядка(P) & коорд$(P,K) = \mathrm{set}_{xy}(a=0$ & x – число & y – число) & прямкоорд$(K) \to \neg(b=0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "факторизация". Указатель "перечень" определяет идентификацию

b с произведением всех сомножителей, не содержащих переменных x, y. Указатель "вариант" разрешает замену символа "линвторпорядка" на любой из символов "эллипс", "гипербола", "парабола". Проверочный оператор не усматривает, что значение b ненулевое. Уровень срабатывания равен 1.

5. Изменение знака слагаемых левой части для стандартизации уравнения кривой второго порядка.

   $\forall_{af}(\mathrm{set}_{xy}(-ax^2+f(x,y)=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})=\mathrm{set}_{xy}(ax^2-f(x,y)=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная, т.е. $f(x,y)$ идентифицируется с произвольным выражением. Это выражение не должно иметь слагаемых, делящихся на x^2. Уровень срабатывания равен 1.

6. Отождествление двух кривых по их включению.

   $\forall_{EFKabcdefmnpqrs}(E\subseteq F\ \&\ \text{гипербола}(E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(F,K)=\mathrm{set}_{uv}(mu^2+nv^2+puv+qu+rv+s=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число})\rightarrow$
   $an-bm=0\ \&\ bp-cn=0\ \&\ ap-cm=0\ \&\ dm-aq=0\ \&\ br-ne=0\ \&$
   $as-fm=0\ \&\ bs-nf=0\ \&\ es-fr=0\ \&\ ar-me=0\ \&\ cq-dp=0\ \&$
   $cr-ep=0\ \&\ bq-dn=0\ \&\ cs-fp=0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "вариант" разрешает замену символа "гипербола" на любой из символов "парабола", "эллипс". Уровень срабатывания равен 2.

7. Поворот системы координат для перехода к главным осям кривой второго порядка.

   $\forall_{ABCEKQabcdefmpq}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ m=a-b+\sqrt{(a-b)^2+c^2}\ \&$
   $p=m/\sqrt{m^2+c^2}\ \&\ q=c/\sqrt{m^2+c^2}\rightarrow A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
   $(A,B,C)=Q\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(0,0)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(p,q)\ \&$
   $\text{коорд}(C,K)=(-q,p)\ \&\ \text{прямкоорд}(Q)\ \&\ \text{коорд}(E,Q)=$
   $\mathrm{set}_{uv}((m^2a+m^2c+bc^2)u^2+(m^2b-mc^2+ac^2)v^2+(md+ce)\sqrt{m^2+c^2}u+$
   $(em-cd)\sqrt{m^2+c^2}v+fm^2+fc^2=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние три - выделены указателем "идентификатор". Коэффиент c ненулевой, остальные коэффициенты могут быть тождественно нулевыми. Отсутствует посылка, задающая в некоторой системе координат уравнение кривой E без смешанного произведения. Либо задача имеет тип "доказать", либо имеет цель "линия"(т.е. анализируется тип кривой), либо в посылках упоминаются фокус, или директриса, или фокальный параметр, или фокальная хорда, или эксцентриситет кривой E. Если результирующее уравнение чрезмерно длинное (более 380 символов), то вывод блокируется. Прием вводит новые переменные A, B, C, Q. Уровень срабатывания равен 5.

8. Усмотрение типа кривой.

(a) Усмотрение вырожденных случаев (точка либо пустое множество)

$\forall_{AEKabcdefp}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & $p = b^2 - 4ac$ & $p < 0$ & $4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0 \rightarrow A$ – точка & $\{A\} = E$ & коорд$(A,K) = ((2cd - be)/p, (2ae - bd)/p))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Такая цель означает, что исследуются общие свойства линии, заданной своим уравнением. Третий и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "$E = \{X\}$". Прием вводит новую переменную A. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{EKabcdefp}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & $p = b^2 - 4ac$ & $p < 0$ & $0 < a(4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2) \rightarrow E = \emptyset)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида "$E = \emptyset$". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{EKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & $b^2 - 4ac = 0$ & $\neg(a = 0)$ & $cd^2 - ae^2 = 0$ & $d^2 - 4af < 0 \rightarrow E = \emptyset)$

Аналогично предыдущему, но указателем "идентификатор" выделены третий и пятый антецеденты, а проверочными операторами обрабатываются четвертый и шестой.

$\forall_{EKabc}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \text{set}_{xy}(ay^2 + by + c = 0$ & x – число & y – число) & $b^2 - 4ac < 0 \rightarrow E = \emptyset)$

Аналогично предыдущему. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Случай, когда уравнение содержит лишь переменную x, учтен в предыдущему приеме, где указатели "подстановка" разрешают зануление коэффициентов b, c, d, e.

(b) Усмотрение одной прямой.

$\forall_{ABEKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & $b^2 - 4ac = 0$ & $2cd - be = 0$ & $e^2 - 4cf = 0$ & $\neg(c = 0) \rightarrow A$ – точка & B – точка & прямая$(AB) = E$ & коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{uv}(bu + 2cv + e = 0$ & u – число & v – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Антецеденты с третьего по пятый выделены указателем "идентификатор", последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "$E =$ прямая(XY)". Прием вводит новые переменные A, B. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABEKabc}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + bx + c = 0$ & x – число & y – число) & $b^2 - 4ac = 0$ & $\neg(a = 0) \rightarrow A$ – точка

& $B -$ точка & прямая$(AB) = E$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(2au + b = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Аналогично предыдущему, но указателем "идентификатор" выделен только третий антецедент.

(c) Усмотрение пары параллельных прямых.

$\forall_{ABCDEKabcdefp}$(прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $b^2 - 4ac = 0$ & $2cd - be = 0$ & $p = e^2 - 4cf$ & $0 < p$ & $\neg(c = 0) \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & прямая$(AB) \cup$ прямая$(CD) = E$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(bu + 2cv + e + \sqrt{p} = 0$ & $u -$число & $v -$число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(bu + 2cv + e - \sqrt{p} = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Антецеденты с третьего по пятый выделены указателем "идентификатор", два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида "$E =$ прямая$(XY) \cup$ прямая(ZV)". Прием вводит новые переменные A, B, C, D. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $d = b^2 - 4ac$ & $0 < d$ & $\neg(a = 0) \rightarrow$ $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & прямая$(AB) \cup$ прямая$(CD) = E$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(2au + b + \sqrt{d} = 0$ & $u -$число & $v -$число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(2au + b - \sqrt{d} = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Аналогично предыдущему, но указателем "идентификатор" выделен только третий антецедент.

(d) Усмотрение двух пересекающихся прямых.

$\forall_{ABCDEFKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $ac < 0$ & $b^2c + d^2a - 4ace = 0 \rightarrow$ $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $F -$ точка & прямая$(AB) \cup$ прямая$(CD) = E$ & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(2\sqrt{|a|}u + 2\sqrt{|c|}v + b\mathrm{sg}(a)/\sqrt{|a|} + d\mathrm{sg}(c)/\sqrt{|c|} = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(2\sqrt{|a|}u - 2\sqrt{|c|}v + b\mathrm{sg}(a)/\sqrt{|a|} - d\mathrm{sg}(c)/\sqrt{|c|} = 0$ & $u -$ число) & коорд$(F, K) = (-b/(2a), -d/(2c)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X, E)", а также посылка вида "$E =$ прямая$(XY) \cup$прямая(ZV)". Прием вводит новые переменные A, B, C, D, F. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKMabcdefp}$(прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $p = b^2 - 4ac$ & $0 < p$ & $4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0 \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & прямая$(AB) \cup$ прямая$(CD) = E$ & $M -$ точка & $M \in$ прямая(AB) & $M \in$ прямая(CD) & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}((b + \sqrt{p})u + 2cv + e + (be - 2cd)/\sqrt{p} = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}((b - \sqrt{p})u + 2cv + e + (2cd - be)/\sqrt{p} = 0$ &

u – число & v – число) & коорд$(M,K) = ((2cd-be)/\sqrt{p}, (2ae-bd)/\sqrt{p}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Третий и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "$E =$ прямая$(XY) \cup$ прямая(ZV)". Прием вводит новые переменные A, B, C, D, M. Уровень срабатывания равен 4.

(e) Усмотрение эллипса.

$\forall_{EKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+dx+$
$ey+f=0$ & x – число & y – число) & $b^2-4ac<0$ &
$(a+c)(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2)<0 \to$ эллипс$(E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Проверяется отсутствие явного указания на тип кривой E (эллипс, гипербола, парабола, объединение двух прямых). Указатели "подстановка" допускают обращение в тождественный ноль любого из коэффициентов, однако дополнительно проверяется, что остается либо член второй степени, либо смешанное произведение. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Усмотрение гиперболы.

$\forall_{EKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+dx$
$+ey+f=0$ & x – число & y – число) & $0<b^2-4ac$ &
$\neg(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0) \to$ гипербола$(E))$

Аналогично предыдущему.

(g) Усмотрение параболы.

$\forall_{EKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+dx+$
$ey+f=0$ & x – число & y – число) & $b^2-4ac=0$ &
$\neg(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0) \to$ парабола$(E))$

Аналогично предыдущему, но третий антецедент выделен указателем "идентификатор".

(h) Разбор случаев для усмотрения эллипса, гиперболы либо параболы.

$\forall_{EKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+$
$dy+e=0$ & x–число & y–число) & $\neg(a=0)$ & $\neg(c=0) \to 0<ac \vee ac<0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Знак произведения ac проверочными операторами не усматривается. Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X,E)". Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{EKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+$
$dy+e=0$ & x – число & y – число) $\to a=0 \ \vee \ \neg(a=0))$

$\forall_{EKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+$
$dy+e=0$ & x – число & y – число) $\to c=0 \ \vee \ \neg(c=0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". В первом случае не усматривается, что a не равно 0, втором - что c не равно 0. Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X, E)". Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{EKabcdefp}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ p=b^2-4ac \rightarrow 0<p \vee p=0 \vee p<0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия", последний - выделен указателем "идентификатор". Проверяется отсутствие явного указания на тип кривой E (эллипс, гипербола, парабола, равенство с E в одной из частей). Проверочные операторы не усматривают знак выражения p, причем это выражение - не тождественный ноль. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

(i) Условие на коэффициенты уравнения, при котором получается пара прямых.

$\forall_{ABCDEKabcde}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2+by^2+cx+dy+e=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ E=\text{прямая}(AB)\cup\text{прямая}(CD) \rightarrow ab<0\ \&\ e=c^2/(4a)+d^2/(4b)\ \vee\ a=0\ \vee\ b=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Проверочный оператор не усматривает, что ab меньше нуля. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKabc}(E=\text{прямая}(AB)\cup\text{прямая}(CD)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xy}(ax^2+b=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ ab<0\ \&\ c=\sqrt{b/a}\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow$
$\text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xy}(x-c=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}($
$\text{set}_{xy}(x+c=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \vee\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{xy}(x+c=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{xy}(x-c=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый, второй и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". В посылках не приведены уравнения прямых AB и CD. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 7.

(j) Регистрация в списке условий внешней задачи на описание результатов исследования кривой второго порядка.

Все приемы этого пункта имеют заголовок "замещениеусловий" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "исследовать". Они выполняют добавление к списку условий внешней задачи на описание группу посылок текущей задачи на исследование. Таким образом, завершается анализ кривой и происходит отбор утверждений для ее характеризации в ответе задачи на описание. Теорема приема имеет вид "замещениеусловий(A)", где A - вид посылки, образующей ядро указанной группы посылок. К ней добавляются утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. Уровень срабатывания приводимых ниже приемов равен 7.

i. замещениеусловий(эллипс(a)).

Либо a - неизвестная внешней задачи на описание, либо имеется посылка вида "$c = d$", где c - неизвестная внешней задачи, а выражение d содерждит переменную a.

ii. замещениеусловий(гипербола(a)).

iii. замещениеусловий(парабола(a)).

iv. замещениеусловия(окружн(a)).

v. замещениеусловий(центр(b a)).

Все эти приемы аналогичны первому.

vi. замещениеусловий(каноничкоорд(a b)).

Либо b - неизвестная внешней задачи на описание, либо имеется посылка вида "$c = b \cup d$", где c - неизвестная внешней задачи.

vii. замещениеусловий(равно(коорд(a b)c)).

Имеется посылка вида "каноничкоорд(b a)". Либо a - неизвестная внешней задачи на описание, либо имеется посылка вида "$d = a \cup e$", где d - неизвестная внешней задачи. Отсутствует посылка вида "$a = \{X\}$". Созданы еще несколько версий данного приема:

A. Выражения b, c не содержат неизвестных, причем имеется посылка вида $K = (A, B, C)$, где a есть одна из переменных A, B, C. Существует посылка "каноничкоорд(K, X)", и либо X является неизвестной внешней задачи на описание, либо имеется посылка вида "$Y = X \cup P$", где Y - неизвестная внешней задачи.

B. Выражения b, c не содержат неизвестных. Имеется посылка вида "$X = a \cup Y$", где X - неизвестная внешней задачи на описание. Отсутствуют посылки вида "равно(коорд(a K)p)", "каноничкоорд(K a)", где K не равно b, а p не содержит неизвестных.

C. Выражения b, c не содержат неизвестных. Имеется посылка вида "$A = B \cup C$", где A - неизвестная внешней задачи на описание, причем в список посылок входят утверждения "$a \in B$" и "$a \in C$".

D. Выражения b, c не содержат неизвестных. Имеется посылка вида "$X = A$, где a - подвыражение выражения A, а X - неизвестная внешней задачи на описание. Отсутствуют посылки вида "равно(коорд(a K)p)", "каноничкоорд(K a)", где K не равно b, а p не содержит неизвестных.

E. Выражения b, c не содержат неизвестных. Переменная a - неизвестная внешней задачи на описание. Выражение c содержит символ "пропорцнаборы".

F. Выражение b не содержит неизвестных. Задача имеет посылки "центр(a, e)" и "$P = Q$", где e является подвыражением выражения Q, а P - неизвестная внешней задачи на описание.

viii. замещениеусловий(равно(a набор(b c d))).

Имеется посылка вида "каноничкоорд(a X)". Либо X является неизвестной внешней задачи на описание, либо имеется посылка вида "$Y = X \cup P$", где Y - неизвестная внешней задачи.

ix. замещениеусловий(равно(большаяось(a)b)).

Выражение b не содержит неизвестных. Либо a - неизвестная внешней задачи на описание, либо имеется посылка вида "$c = d$", где c - неизвестная внешней задачи, а выражение d содерждит переменную a.

x. замещениеусловий(равно(малаяось(a)b)).

xi. замещениеусловий(равно(действполуось(a)b)).

xii. замещениеусловий(равно(мнимаяполуось(a)b)).

xiii. замещениеусловий(равно(фокхорда(a)b)).

xiv. замещениеусловий(равно(радиус(a)b)).
Приемы аналогичны предыдущему случаю.

xv. замещениеусловий(равно(a объединение(b c))).
Переменная a - неизвестная внешней задачи на описание.

xvi. замещениеусловий(равно(a прямая(b c))).

xvii. замещениеусловий(равно(a перечень(набор(b)))).

xviii. замещениеусловий(равно(a пусто)).

xix. замещениеусловий(равно(a луч(b c))).

xx. замещениеусловий(Прямая(a)).
Приемы аналогичны предыдущему случаю.

9. Оси симметрии кривой второго порядка.

   (a) Ввод уравнения кривой, у которой ось симметрии совпадает с осью координат.

   $\forall_{ABCDEFKabcd}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & линвторпорядка(F) & осьсимметрии(прямая(DE), F) & $A \in$ прямая(DE) & $B \in$ прямая(DE) $\rightarrow$ a – число & b – число & c – число & d – число & коорд(F, K) = $\text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cx + d = 0$ & x – число & y – число))

   $\forall_{ABCDEFKabcd}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & линвторпорядка(F) & осьсимметрии(прямая(DE), F) & $A \in$ прямая(DE) & $C \in$ прямая(DE) $\rightarrow$ a – число & b – число & c – число & d – число & коорд(F, K) = $\text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cy + d = 0$ & x – число & y – число))

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый и шестой - выделены указателем "усм". В посылках отсутствует уравнение кривой F относительно какой-либо системы координат. Прием вводит новые параметры a, b, c, d. Уровень срабатывания равен 5.

   $\forall_{ABEKabcd}$(прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & осьсимметрии(прямая(AB), E) & коорд(прямая(AB), K) = $\text{set}_{xy}(y = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow$ a – число & b – число & c – число & d – число & коорд(E, K) = $\text{set}_{uv}(au^2 + bv^2 + cu + d = 0$ & u – число & v – число))

   $\forall_{ABEKabcd}$(прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & осьсимметрии(прямая(AB), E) & коорд(прямая(AB), K) = $\text{set}_{xy}(x = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow$ a – число & b – число & c – число & d – число & коорд(E, K) = $\text{set}_{uv}(au^2 + bv^2 + cv + d = 0$ & u – число & v – число))

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". В посылках отсутствует уравнение кривой E относительно какой-либо системы координат. Прием вводит новые параметры a, b, c, d. Уровень срабатывания равен 5.

(b) Ввод уравнения кривой, у которой обе оси симметрии совпадают с осями координат.

$\forall_{ABCDEFGKPabc}$(прямкоорд(K) & линвторпорядка(P) & осьсимметрии(прямая(FG), P) & осьсимметрии(прямая(DE), P) & $K = (A, B, C)$ & $A \in$ прямая(DE) & $B \in$ прямая(DE) & $A \in$ прямая(FG) & $C \in$ прямая(FG) $\rightarrow$ a – число & b – число & c – число & коорд(P, K) = $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + c = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние четыре - выделены указателем "усм". В посылках отсутствует уравнение кривой P относительно какой-либо системы координат. Прием вводит новые параметры a, b, c. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Ограничения на коэффициенты кривой, у которой ось координат является осью симметрии.

$\forall_{ABCDEFKabcdef}$(прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & осьсимметрии(прямая(DF), E) & коорд(E, K) = $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & линвторпорядка(E) & $A \in$ прямая(DF) & $B \in$ прямая(DF) $\rightarrow$ $b = 0$ & $e = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "усм". Указатель "вариант" допускает рассмотрение вместо символа "линвторпорядка" символов "эллипс", "гипербола", "парабола". Выводимые равенства содержат неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Уравнение оси симметрии.

$\forall_{ABCDEKabcd}$(прямкоорд(K) & осьсимметрии(прямая(BC), E) & $A \in$ прямая(BC) & коорд(A, K) = $(e, 0)$ & коорд(E, K) = $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & $\neg(e = 0)$ $\rightarrow$ коорд(прямая(BC), K) = $\mathrm{set}_{uv}(v = 0$ & u – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент выделен указателем "усм", четвертый - указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой BC. Уровни срабатывания равны 2 и 4.

10. Касательная к кривой

(a) Параметрическое описание условия касания.

$\forall_{AEKabcdefpq}$(прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & коорд(E, K) = $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow$ A – касательная к $E \leftrightarrow \exists_{gh}(g$ – число & h – число & коорд(A, K) = $\mathrm{set}_{uv}((2ag + ch + d)u + (2bh + cg + e)v + dg + eh + 2f = 0$ & u – число & v – число) & $ag^2 + bh^2 + cgh + dg + eh + f = 0$))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, не имеющей цели "известно". Первый и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение A содержит неизвестные. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой A. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Ввод уравнения касательной к кривой второго порядка в заданной точке этой кривой.

$\forall_{AEKMNabcdefpq}$(прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & прямая(MN) – касательная к E & $A \in E$ & $A \in$ прямая(MN) & коорд(E, K) = $\text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & коорд(A, K) = $(p, q) \to$ коорд(прямая(MN), K) = $\text{set}_{xy}((2ap + cq + d)x + (2bq + cp + e)y + dp + eq + 2f = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент, а также третий, четвертый и шестой, идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, пятый - выделен указателем "усм", седьмой - указателем "идентификатор". В посылках отсутствует уравнение прямой MN относительно какой-либо системы координат. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Условие на касательную к кривой второго порядка в заданной точке этой кривой.

$\forall_{AEKMNabcdefmnkpq}$(прямкоорд($K$) & линвторпорядка($E$) & прямая($MN$) – касательная к E & $A \in E$ & $A \in$ прямая(MN) & коорд(E, K) = $\text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & коорд(A, K) = (p, q) & коорд(прямая(MN), K) = $\text{set}_{uv}(mu + nv + k = 0$ & u – число & v – число) $\to (2ap + cq + d)n - (2bq + cp + e)m = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента, а также шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый антецедент выделен указателем "усм", седьмой и восьмой антецеденты - указателем "идентификатор". Указатель "вариант" разрешает замену символа "линвторпорядка" на символы "эллипс", "гипербола", "парабола". Уровни срабатывания равны 2 и 4.

(d) Ввод в рассмотрение точки касания.

$\forall_{ABCEKab}$(прямая(AB) – касательная к E & линвторпорядка(E) & прямкоорд(K) $\to a$ – число & b – число & $C \in$ прямая(AB) & $C \in E$ & коорд(C, K) = (a, b))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем допускается замена символа "линвторпорядка" на символы "эллипс", "гипербола", "парабола". Общая точка прямой MN и кривой E пока не введена. Имеется уравнение кривой E. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Касательная к плоской кривой в трехмерном пространстве лежит в плоскости этой кривой.

$\forall_{ABCEPQ}(E \subseteq$ плоскость(ABC) & линвторпорядка(E) & прямая(PQ) – касательная к $E \to$ прямая(PQ) $\subseteq$ плоскость(ABC))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем допускается замена символа "линвторпорядка" на символы "эллипс", "гипербола", "парабола". Проверочный оператор не усматривает включение прямой PQ в плоскость ABC. Уровень срабатывания равен 1.

11. Фокусы и директрисы.

    (a) Координаты фокусов кривой второго порядка.

    $\forall_{ABEKabcdempq}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & фокус(B,E) & $\neg(a=0)$ & $\neg(c=0)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $m = 4ace-cb^2-ad^2$ & $p=-b/(2a)$ & $q=-d/(2c)$ & разныеточки$(A,B) \rightarrow 0 < m(c-a)$ & коорд$(A,K) = (p, q+\sqrt{(c-a)m}/(2ac))$ & коорд$(B,K) = (p, q-\sqrt{(c-a)m}/(2ac))$ $\vee$ $0 \leq m(a-c)$ & коорд$(A,K) = (p+\sqrt{(a-c)m}/(2ac), q)$ & коорд$(B,K) = (p-\sqrt{(a-c)m}/(2ac), q))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты с седьмого по девятый выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Переменные A, B входят в список посылок симметричным образом. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точек A, B. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{AEKabcdempq}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & $\neg(c=0)$ & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a=0)$ & $m=4ace-cb^2-ad^2$ & $p=-b/(2a)$ & $q=-d/(2c) \rightarrow$ $0 < m(c-a)$ & (коорд$(A,K) = (p, q+\sqrt{(c-a)m}/(2ac))$ $\vee$ коорд$(A,K) = (p, q-\sqrt{(c-a)m}/(2ac)))$ $\vee$ $0 \leq m(a-c)$ & (коорд$(A,K) = (p+\sqrt{(a-c)m}/(2ac), q)$ $\vee$ коорд$(A,K) = (p-\sqrt{(a-c)m}/(2ac), q)))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и четвертый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты с шестого по восьмой выделены указателем "идентификатор". Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

    $\forall_{AEKabcd}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax+by^2+cy+d=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a=0)$ & $\neg(b=0) \rightarrow$ коорд$(A,K) = (-c/(2b), (c^2-4bd-a^2)/(4ab)))$

    $\forall_{AEKabcd}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{yx}(ax+by^2+cy+d=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a=0)$ & $\neg(b=0) \rightarrow$ коорд$(A,K) = ((c^2-4bd-a^2)/(4ab), -c/(2b)))$

    Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{AEKabcd}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax+by^2+cy+d=0$ & x – число & y – число) & коорд$(A,K) = (p,q) \rightarrow 4abp+4bd+a^2=c^2$ & $2bq+c=0)$

    $\forall_{AEKabcd}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{yx}(ax+by^2+cy+d=0$ & x – число & y – число) & коорд$(A,K) = (p,q) \rightarrow 4abq+4bd+a^2=c^2$ & $2bp+c=0)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{AEKabcdempqr}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & $\neg(a=0)$ & $\neg(c=0)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $p=-b/(2a)$ & $q=-d/(2c)$ & коорд$(A,K)=(p,r)$ & $m=4ace-cb^2-ad^2 \rightarrow 4a^2c^2(r-q)^2-(c-a)m=0)$

$\forall_{AEKabcdempqr}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & $\neg(a=0)$ & $\neg(c=0)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $p=-b/(2a)$ & $q=-d/(2c)$ & коорд$(A,K)=(r,q)$ & $m=4ace-cb^2-ad^2 \rightarrow 4a^2c^2(r-p)^2-(c-a)m=0)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Антецеденты с шестого по девятый выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

(b) Расстояние между фокусами.

$\forall_{ABEKabcde}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & фокус(B,E) & разныеточки(A,B) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a=0)$ & $\neg(c=0) \rightarrow$ $l(AB)=\sqrt{|(c-a)(4ace-b^2c-d^2a)|/(ac)})$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента, а также пятый антецедент идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Уравнение директрисы для заданного фокуса.

$\forall_{ACDEKabcders}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & директриса(прямая(CD), $A,E)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a=0)$ & $\neg(c=0)$ & коорд$(A,K)=(r,s)$ & $2ar+b=0$ & $\neg(2cs+d=0) \rightarrow$ коорд(прямая$(CD),K)$ = $\mathrm{set}_{uv}(2(2cs+d)acv+2ascd-b^2c+4ace=0$ & u – число & v – число))

$\forall_{ACDEKabcders}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & директриса(прямая(CD), $A,E)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a=0)$ & $\neg(c=0)$ & коорд$(A,K)=(r,s)$ & $2cs+d=0$ & $\neg(2ar+b=0) \rightarrow$ коорд(прямая$(CD),K)$ = $\mathrm{set}_{uv}(2(2ar+b)acu+2arbc-d^2a+4ace=0$ & u – число & v – число))

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый, шестой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, седьмой и восьмой - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой CD. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCEKabcd}$(прямкоорд(K) & фокус(A,E) & коорд(E,K) = $\mathrm{set}_{xy}(ax+by^2+cy+d=0$ & x – число & y – число) & $\neg(a=0)$ & $\neg(b=0)$ & директриса(прямая$(BC),A,E) \rightarrow$ коорд(прямая$(BC),K)$ = $\mathrm{set}_{uv}(4abu-a^2-c^2+4bd=0$ & u – число & v – число))

$\forall_{ABCEKabcd}$(прямкоорд(K) & фокус(A, E) & коорд(E, K) $=$ $\mathrm{set}_{yx}(ax + by^2 + cy + d = 0$ & x – число & y – число) & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0)$ & директриса(прямая(BC)$, A, E$) $\rightarrow$ коорд(прямая(BC)$, K$) $=$ $\mathrm{set}_{uv}(4abu - a^2 - c^2 + 4bd = 0$ & u – число & v – число))

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента и шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой BC. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Координаты фокуса для заданной директрисы.

$\forall_{ABCEKabcdemn}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & директриса(прямая(BC)$, A, E$) & фокус(A, E) & коорд(прямая(BC)$, K$) $= \mathrm{set}_{uv}(mu + n = 0$ & u – число & v – число) & $\neg(a = 0)$ & $\neg(c = 0) \rightarrow$ коорд(A, K) $=$ $((4cem - d^2m - 2bcn)/(2c(2an - mb)), -d/(2c)))$

$\forall_{ABCEKabcdemn}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{yx}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & директриса(прямая(BC)$, A, E$) & фокус(A, E) & коорд(прямая(BC)$, K$) $= \mathrm{set}_{uv}(mu + n = 0$ & u – число & v – число) & $\neg(a = 0)$ & $\neg(c = 0) \rightarrow$ коорд(A, K) $=$ $(-d/(2c), (4cem - d^2m - 2bcn)/(2c(2an - mb))))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "идентификатор". Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Ввод в рассмотрение уравнения директрисы.

$\forall_{ABCDK}$(директриса(прямая(AB)$, C, D$) $\rightarrow$ актив(коорд(прямая(AB)$, K$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(D), K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Выражение "коорд(прямая(AB)$, K$)" не встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 6.

(f) Уравнение кривой второго порядка с заданными фокусом и директрисой.

$\forall_{ABCEFGHKQabcemnpq}$(прямкоорд($K$) & фокус($A, E$) & директриса(прямая($BC$)$, A, E$) & коорд($A, K$) $= (p, q)$ & коорд(прямая(BC)$, K$) $= \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & $m = ap + bq + c$ & $n = \sqrt{a^2 + b^2}$ & эксцентриситет(E) $= e \rightarrow$ F – точка & G – точка & H – точка & $(F, G, H) = Q$ & коорд(F, K) $= (p - aem/((1 + e)n), q - bem/((1 + e)n))$ & коорд(G, K) $=$ $(p - a(me + e + 1)/((1 + e)n), q - b(me + e + 1)/((1 + e)n))$ & коорд(H, K) $=$ $(p - (aem + be + b)/((1 + e)n), q - (bem - ae - a)/((1 + e)n))$ & прямкоорд(Q) & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{uv}(nv^2 + 2emu + (1 - e^2)nu^2 = 0$ & u – число & v – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и восьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты с четвертого по седьмой выделены указателем "идентификатор". В задаче отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E относительно какой-либо системы координат. Прием вводит новые переменные F, G, H, Q. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCEGHKQabcdmnpq}$(прямкоорд$(K)$ & фокус(A, E) & директриса(прямая$(BC), A, E)$ & коорд$(A, K) = (p, q)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $n = ap + bq + c \to G -$ точка & $H -$ точка & $(A, G, H) = Q$ & коорд$(G, K) = (p + a/m, q + b/m)$ & коорд$(H, K) = (p - b/m, q + a/m)$ & прямкоорд(Q) & $d -$ число & $(\neg(d = 0)$ & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uv}(dm^2u^2 + 2m(d-1)nu + m^2v^2 + (d-1)n^2 = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) $\vee$ коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uv}(m^2v^2 - 2mnu - n^2 = 0$ & $u -$ число & $v -$ число)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка "фокус$(X, E$", задающая заведомо другой фокус X кривой E. Отсутствует посылка, выражающая эксцентриситет этой кривой через известные параметры. Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные G, H, Q, d, Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEGHKQabcdmnpq}$(прямкоорд$(K)$ & фокус(A, E) & директриса(прямая$(BC), A, E)$ & коорд$(A, K) = (p, q)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $m = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $n = ap + bq + c$ & фокус(D, E) & разныеточки$(A, D) \to G -$ точка & $H -$ точка & $(A, G, H) = Q$ & коорд$(G, K) = (p + a/m, q + b/m)$ & коорд$(H, K) = (p - b/m, q + a/m)$ & прямкоорд(Q) & $d -$ число & $\neg(d = 0)$ & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uv}(dm^2u^2 + 2m(d-1)nu + m^2v^2 + (d-1)n^2 = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и восьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты с четвертого по седьмой выделены указателем "идентификатор", девятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка, выражающая эксцентриситет этой кривой через известные параметры. Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные G, H, Q, d, Уровень срабатывания равен 4.

(g) Прямая, проходящая через центр перпендикулярно директрисе, является осью симметрии кривой.

$\forall_{ABCDEFKabcde}$(прямкоорд(K) & центр(A, E) & директриса(прямая(BC), $F, E)$ & коорд$(A, K) = (d, e)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) $\to D -$ точка & осьсимметрии(прямая$(AD), E)$ & коорд(прямая$(AD), K) = \mathrm{set}_{uv}(-bu + av + bd - ae = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, два последних - выделены указателем "идентификатор". В задаче отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в каком-либо базисе. Отсутствует посылка вида "осьсимметрии(X, E)". Прием вводит новую переменную D. Уровень срабатывания равен 4.

(h) Соотношение для коэффициентов уравнений кривой и директрисы.

$\forall_{ABCEKabcdefg}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & директриса(прямая$(AB), C, E)$ & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(uf + g = 0$ & u – число & v – число) & $m = b^2c + d^2a - 4ace$ & $\neg(a = 0)$ & $\neg(c = 0) \to (c-a)(bf - 2ag)^2 - mf^2 = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", шестой и седьмой - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

(i) Прямая, проходящая через вершину и фокус, является осью симметрии кривой.

$\forall_{ABE}$(вершина(A,E) & фокус$(B,E) \to$ осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & актив(коорд(прямая$(AB), K)$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(E,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Прямая AB в задаче пока не упоминается. Уровень срабатывания равен 2.

(j) Если один из фокусов принадлежит оси симметрии кривой, то и другой фокус принадлежит этой оси.

$\forall_{ABCDE}$(фокус(A,E) & фокус(B,E) & осьсимметрии(прямая$(CD), E)$ & $A \in$ прямая$(CD) \to B \in$ прямая(CD))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "усм". Указатель "вариант" допускает замену символа "осьсимметрии" на "действось". Не усматривается принадлежность точки B прямой CD. Уровень срабатывания равен 2.

(k) Уравнение директрисы, для которой известна точка пересечения с осью симметрии кривой.

$\forall_{ABCDEKPQabcpq}$(прямкоорд(K) & директриса(прямая$(PQ), D, E)$ & $C \in$ прямая(PQ) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & $C \in$ прямая(AB) & коорд$(C,K) = (p,q)$ & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) $\to$ коорд(прямая$(PQ), K) = \mathrm{set}_{uv}(-bu + av + bp - aq = 0$ & u – число & v – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий и пятый антецеденты выделены указателем "усм", шестой и седьмой - указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты прямой PQ. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Если кривая имеет два различных фокуса, то ее уравнение в главных направлениях имеет ненулевые коэффициенты при вторых степенях.

$\forall_{ABEKabcde}$(фокус(A,E) & фокус(B,E) & прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & разныеточки$(A,B) \to \neg(a = 0)$ & $\neg(c = 0)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Хотя бы для одного из коэффициентов a, c не усматривается, что он ненулевой. Уровень срабатывания равен 2.

(m) Связь между координатами двух фокусов.

$\forall_{ABEKabcdepqrs}$(фокус(A, E) & фокус(B, E) & разныеточки(A, B) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(A, K) = (p, q)$ & коорд$(B, K) = (r, s) \rightarrow a(p + r) + b = 0$ & $c(q + s) + d = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента, а также четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, шестой и седьмой - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

(n) Кривая имеет не более двух фокусов.

$\forall_{ABCDE}$(фокус(A, E) & фокус(B, E) & разныеточки(A, B) & директриса$(C, D, E) \rightarrow D = A \ \vee \ D = B)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем выражения A, B, D попарно различны. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

(o) Фокус принадлежит одной из осей симметрии.

$\forall_{AEKabcdepq}$(фокус(A, E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(A, K) = (p, q) \rightarrow 2ap + b = 0 \ \vee \ 2cq + d = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

(p) Ввод в рассмотрение координат фокуса в главных направлениях кривой.

$\forall_{AEKQabcdepq}$(фокус(A, E) & прямкоорд(K) & прямкоорд(Q) & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & коорд$(A, K) = (p, q) \rightarrow$ актив(коорд(A, Q)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка задачи, определяющая в системе координат K уравнение кривой E, не имеющее члена со смешанным произведением. Выражение "коорд(A, Q)" не встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 3.

(q) Связь фокального параметра и фокальной хорды.

$\forall_E$(фокпараметр(E) = фокхорда$(E)/2$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подвыражению посылки задачи на доказательство либо на исследование и имеет уровень срабатывания 4.

12. Центр и диаметры кривой второго порядка.

    (a) Центр кривой второго порядка.

    $\forall_{AEKabcdefp}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x − число & y − число) & $p = 4ac-b^2$ & центр$(A,E) \to$ коорд$(A,K) = ((be-2cd)/p, (bd-2ae)/p)$ & $\neg(p=0))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровни срабатывания равны 1,2 и 4.

    $\forall_{AEKabcdefmn}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x−число & y−число) & центр(A,E) & коорд$(A,K) = (m,n) \to 2am+bn+d=0$ & $2cn+bm+e=0$ & $\neg(4ac-b^2=0))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 1, 2 и 4.

    (b) Ввод в рассмотрение центра кривой, если выделена середина некоторой хорды.

    $\forall_{ABCDE}$(гипербола(E) & $A \in E$ & $B \in E$ & $C \in$ прямая(AB) & $l(AC) = l(BC)$ & разныеточки$(A,B) \to D$ − точка & центр$(D,E))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый и пятый - выделены указателем "усм". Шестой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "вариант" допускает замену символа "гипербола" на "эллипс". Отсутствует посылка вида "центр(X,E)". Уровень срабатывания равен 2.

    (c) Диаметр гиперболы либо эллипса проходит через центр.

    $\forall_{ABCE}$(гипербола(E) & Диаметр(прямая$(AB),E)$ & центр$(C,E) \to$ $C \in$ прямая$(AB))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "вариант" разрешает замену символа "гипербола" на "эллипс". Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ABCE}$(гипербола(E) & Диаметр(прямая$(AB),E) \to C$ − точка & центр(C,E) & $C \in$ прямая$(AB))$

    Идентификация такая же, как в предыдущем приеме. Отсутствует посылка вида "центр(X,E)". Прием вводит новую переменную C. Уровень срабатывания равен 1.

    (d) Ввод уравнения для сопряженного направления.

    $\forall_{ABCDEKabcdefmnkpqr}$(прямкоорд$(K)$ & коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x − число & y − число) & сопряжнаправления(прямая(AB), прямая$(CD),E)$ & коорд(прямая$(AB),K) = \mathrm{set}_{uv}(pu+qv+r=0$ & u − число & v − число) & $m = bp-2aq$ & $n = 2cp-bq$ & $\neg(b^2-4ac=0) \to k$ − число & коорд(прямая$(CD),K) = \mathrm{set}_{XY}(mX+nY+k=0$ & X−число & Y−число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие три - выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. В задаче отсутствует посылка, определяющая уравнение прямой CD относительно какой-либо системы координат. Прием вводит новый параметр k. Уровень срабатывания приема равен 2.

(e) Соотношение для сопряженных направлений.

$\forall_{ABCDEKabcdefmnkpqr}$(прямкоорд$(K)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & $x-$число & $y-$число) & сопряжнаправления(прямая(AB), прямая$(CD), E)$ & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(pu+qv+r=0$ & $u-$ число & $v-$ число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ $\mathrm{set}_{zw}(mz+nw+k=0$ & $z-$число & $w-$число) $\rightarrow 2aqn+2cmp-bmq-bnp=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 2 и 5.

(f) Усмотрение сопряженных направлений.

$\forall_{ABCDEFGPQ}$(Диаметр(прямая$(AB), E)$ & центр(D,E) & $C \in$ прямая(AB) & $C \in$ прямая(PQ) & $F \in$ прямая(PQ) & $G \in$ прямая(PQ) & $F \in E$ & $G \in E$ & $l(CP) = l(CQ)$ & $\neg(D \in$ прямая$(PQ)) \rightarrow$ сопряжнаправления(прямая(AB), прямая$(PQ), E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента, а также седбмой и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(центр(A,E) & $C \in E$ & $D \in E$ & $B \in$ прямая(CD) & $l(BC) = l(BD)$ & разныеточки(A,B) & разныеточки$(C,D) \rightarrow$ сопряжнаправления(прямая(AB), прямая$(CD), E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Если кривая второго порядка вписана в параллелограмм, то направления его сторон - сопряженные относительно кривой.

$\forall_{ABCDE}$(параллелограмм$(ABCD)$ & E вписана в фигура$(ABCD)$ & эллипс$(E) \rightarrow$ сопряжнаправления(прямая(AB), прямая$(BC), E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Вершины параллелограмма рассматриваются с точностью до циклических перестановок. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEF}$(параллелограмм$(ABCD)$ & E вписана в фигура$(ABCD)$ & эллипс$(E) \rightarrow F -$ точка & центр(F,E) & $F \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая$(BD))$

Аналогично предыдущему. Отсутствует посылка вида "центр(X, E)". Прием вводит новую переменную F.

(h) Условие на коэффициенты уравнения диаметра параболы.

$\forall_{ABCDEKabcdefpqr}$(парабола$(E)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & Диаметр(прямая$(CD), E)$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(pu + qv + r = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD) \to bp - 2aq = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "идентификатор", шестой - указателем "усм". Уровни срабатывания равны 2 и 5.

$\forall_{ABEKcdefpqr}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & Диаметр(прямая$(AB), E)$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(pu + qv + r = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) $\to p = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания приема равны 2 и 5.

(i) Диаметр параболы параллелен ее оси.

$\forall_{ABCDE}$(парабола(E) & Диаметр(прямая$(AB), E)$ & осьсимметрии(прямая$(CD), E) \to$ прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

(j) Уравнение диаметра параболы.

$\forall_{ABEKabcdefp}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & Диаметр(прямая$(AB), E)$ & $\neg(a = 0) \to p -$ число & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(2au + bv + p = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка, определяющая уравнение прямой AB относительно какой-либо системы координат. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABEKcdefp}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & Диаметр(прямая$(AB), E) \to p -$ число & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\mathrm{set}_{uv}(v + p = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка, определяющая уравнение прямой AB относительно какой-либо системы координат. Уровень срабатывания равен 2.

(k) Касательная к концевой точке диаметра.

$\forall_{ABCDEFPQ}$(эллипс(E) & Диаметр(прямая$(AB), E)$ & сопряжнаправления(прямая(AB), прямая$(CD), E)$ & прямая$(PQ) -$

касательная к E & $F \in$ прямая(PQ) & $F \in$ прямая(AB) &
$F \in E \to$ прямая$(PQ) \parallel$ прямая$(CD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента, а также седьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый и шестой антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "вариант" допускает замену символа "эллипс" на символы "гипербола", "парабола". Уровень срабатывания приема равен 2.

13. Кривая, описанная около многоугольника либо вписанная в многоугольник.

$\forall_{Enx}(E$описана около фигура$(x) \to \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to x(i) \in E))$

$\forall_{Enx}(E$вписана в фигура$(x) \to \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to$ прямая$(x(i)x(i(\mathrm{mod}\, n)+1))-$касательная к $E))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Заголовком выражения x является символ "набор". Указатель "контекст" доопределяет идентификацию переменной n с числом операндов этого набора. Переменная E идентифицируется с переменной. Указатель "развертка" определяет выписывание результирующей кванторной импликации в виде конъюнкции. Уровень срабатывания равен 1.

14. Активизация рассмотрения в общей системе координат двух кривых второго порядка.

$\forall_{EFKa}($прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & линвторпорядка$(F) \to$
актив(коорд$(F, K)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "коорд(E, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "вариант" разрешает замену заголовка третьего антецедента на любой из символов "эллипс", "гипербола", "парабола". Выражение "коорд(F, X)" в посылках не встречается. Уровень срабатывания равен 8.

15. Уравнение кривой второго порядка в полярных координатах.

$\forall_{EK}($фоксистема$(K, E) \to$ полкоорд$(E, K) =$
$\mathrm{set}_{xy}(y =$ форкхорда$(E)/(2 - 2$эксцентриситет$(E) \cos x)$ & $x -$ число &
$-\pi < x$ & $x \leq \pi))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "полкоорд(E, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение кривой E относительно полярной системы координат K. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{AEKQabcep}($фоксистема(Q, E) & полкоорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{xy}(y = a/(b + c \cos x)$ &
$A(x)$ & $-\pi < x$ & $x \leq \pi$ & $x -$ число$)$ & каноничкоорд(K, E) & $e = -c/b$ &
$p = a/b$ & $\neg(b = 0) \to e - 1 = 0$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{uv}(v^2 = 2pu$ & $u -$ число &

v – число) $\vee$ $\neg(e-1=0)$ & коорд$(E,K)=$
$\mathrm{set}_{uv}((1-e^2)^2u^2+(1-e^2)v^2-p^2=0$ & u – число & v – число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Переменная A функциональная. Выражение $A(x)$ должно идентифицироваться либо с константой "истина", либо с утверждением "$\neg(b+c\cos x=0)$". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение кривой E в системе координат K. Уровень срабатывания равен 3.

16. Отождествление плоскостей, содержащих плоскую кривую в трехмерном пространстве.

    $\forall_{ABCDEFG}($парабола(G) & $G\subseteq$ плоскость(ABC) & $G\subseteq$ плоскость$(DEF)\to$ плоскость$(ABC)=$ плоскость$(DEF))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" допускает изменение символа "парабола" на символы "эллипс", "гипербола". Уровни срабатывания равны 2 и 5.

17. Проверочный оператор "усмлинвторпорядка".

    Оператор проверяет истинность утверждения "линвторпорядка(A)".

    (a) Непосредственное усмотрение.
    $\forall_A($эллипс$(A)\to$ линвторпорядка$(A))$
    $\forall_A($гипербола$(A)\to$ линвторпорядка$(A))$
    $\forall_A($парабола$(A)\to$ линвторпорядка$(A))$
    $\forall_{AB}($линвторпорядка(окружность$(AB)))$
    Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Усмотрение из уравнения.
    $\forall_{EKabcdef}($прямкоорд(K) & коорд$(E,K)=$
    $\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & x – число & y – число$)$
    & $\neg(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2=0)\to$ линвторпорядка$(E))$
    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

18. Нормализатор общей стандартизации "нормфокпараметр".

    Нормализатор имеет единственный прием, усматривающий величину фокального параметра из равенства, находящегося в посылках: $\forall_{ab}(a=b\to a=b)$. Перестановка частей равенства при идентификации не разрешается. Выражение a имеет заголовок "фокпараметр" и не входит в выражение b.

Эллипс

1. Ввод уравнения эллипса по двум известным вершинам его, лежащим на одной оси.

   $\forall_{ABEKabcdp}($эллипс(E) & прямкоорд(K) & вершина(A,E) & вершина(B,E) & осьсимметрии(прямая$(AB),E)$ & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$

& разныеточки$(A, B) \to p$ – число & $0 < p$ & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(((c-a)(2x-a-c)+(d-b)(2y-b-d))^2 +$ $p((c-a)(2y-b-d)-(d-b)(2x-a-c))^2 -$ $((c-a)^2+(d-b)^2)^2 = 0$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор", восьмой - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение кривой E. Прием вводит новый параметр p. Уровень срабатывания равен 3.

2. Ввод уравнения эллипса, оси которого параллельны осям координат.

   $\forall_{ABCEKPQabcd}$(эллипс(E) & прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & прямая$(PQ) \parallel$ прямая(AB) & осьсимметрии(прямая$(PQ), E) \to$ a – число & b – число & c – число & d – число & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(a(x-c)^2 + b(y-d)^2 - ab = 0$ & x – число & y – число) & $0 < a$ & $0 < b$)

   $\forall_{ABCEKPQabcd}$(эллипс(E) & прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & прямая$(PQ) \parallel$ прямая(AC) & осьсимметрии(прямая$(PQ), E) \to$ a – число & b – число & c – число & d – число & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(a(x-c)^2 + b(y-d)^2 - ab = 0$ & x – число & y – число) & $0 < a$ & $0 < b$)

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "усм". Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые параметры a, b, c, d. Уровень срабатывания равен 4.

3. Ввод уравнения эллипса по уравнениям его осей.

   $\forall_{ABCDEFGHKQabcdefmnpq}$(прямкоорд$(K)$ & эллипс(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & осьсимметрии(прямая$(CD), E)$ & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & $ad + be = 0 \to F$ – точка & G – точка & H – точка & $(F, G, H) = Q$ & m – число & n – число & $am + bn + c = 0$ & $dm + en + f = 0$ & коорд$(F, K) = (m, n)$ & коорд$(G, K) = (m - b, n + a)$ & коорд$(H, K) = (m - e, n + d)$ & p – число & q – число & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{XY}(pX^2 + qY^2 - pq = 0$ & X – число & Y – число) & $0 < p$ & $0 < q$ & $G \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(CD))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные F, G, H, Q, m, n, p, q. Уровень срабатывания равен 3.

4. Ввод уравнения эллипса с заданными фокусами.

   $\forall_{ABEFGHKQabcdmpqr}$(прямкоорд$(K)$ & эллипс(E) & фокус(A, E) & фокус(B, E) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & $p = (a + c)/2$ &

$q=(b+d)/2\ \&\ r=(c-a)^2+(d-b)^2\ \&\ \neg(r=0)\to F$ – точка & G – точка
& H – точка & $(F,G,H)=Q$ & коорд$(F,K)=(p,q)$ &
коорд$(G,K)=(p+(c-a)/\sqrt{r},q+(d-b)/\sqrt{r})$ &
коорд$(H,K)=(p-(d-b)/\sqrt{r},q+(c-a)/\sqrt{r})$ & прямкоорд(Q) & m – число
& $0<m$ & коорд$(E,Q)=\mathrm{set}_{xy}(4mx^2+(4m+r)y^2-m(4m+r)=0$ &
x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие пять - выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные F,G,H,Q,m. Уровень срабатывания равен 3.

5. Условие на коэффициенты уравнения, задающего эллипс с заданной длиной полуоси.

   $\forall_{ABCDEFKabcdpq}$(прямкоорд(K) & эллипс(E) & полуось(прямая$(AB),F)=d$ & осьсимметрии(прямая$(AB),F)$ & $Q=(C,D,E)$ & коорд$(F,Q)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+c=0$ & x – число & y – число) & коорд(вектор$(CE),K)=(p,q)$ &
   $D\in$ прямая$(AB)\to c(p^2+q^2)+ad^2=0)$

   $\forall_{ABCDEFKabcdpq}$(прямкоорд(K) & эллипс(E) & полуось(прямая$(AB),F)=d$ & осьсимметрии(прямая$(AB),F)$ & $Q=(C,D,E)$ & коорд$(F,Q)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+c=0$ & x – число & y – число) & коорд(вектор$(CD),K)=(p,q)$ &
   $E\in$ прямая$(AB)\to c(p^2+q^2)+bd^2=0)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, седьмой - выделен указателем "идентификатор". Восьмой антецедент выделен указателем "усм". Уровни срабатывания равны 3 и 5.

6. Свободный член уравнения эллипса либо гиперболы в главных осях - ненулевой.

   $\forall_{EKabcdem}$(эллипс(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $m=b^2c+d^2a-4ace\to\neg(m=0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство, исследование либо преобразование, причем указатель "вариант" разрешает замену символа "эллипс" на символ "гипербола". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Не усматривается, что m отлично от нуля. Уровень срабатывания равен 2.

7. Определение канонической системы координат и канонического уравнения эллипса.

   $\forall_{ABCEKQabcdempq}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+$
   $dy+e=0$ & x – число & y – число) & $0<ac$ & $m=b^2c+d^2a-4ace$
   & $0\le m(c-a)$ & $p=-b/(2a)$ & $q=-d/(2c)$ & $0<mc\to A$ – точка
   & B–точка & C–точка & $(A,B,C)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E)
   & коорд$(A,K)=(p,q)$ & коорд$(B,K)=(p+1,q)$ & коорд$(C,K)=$
   $(p,q+1)$ & коорд$(E,Q)=\mathrm{set}_{uv}(4a^2cu^2/m+4ac^2v^2/m=1$ & u – число
   & v – число) & большаяось$(E)=2\sqrt{m/(4a^2c)}$ & малаяось$(E)=2\sqrt{m/(4c^2a)})$

   $\forall_{ABCEKQabcdempq}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+$
   $dy+e=0$ & x – число & y – число) & $0<ac$ & $m=b^2c+d^2a-4ace$

$\&\ m(c-a) \leq 0\ \&\ p = -b/(2a)\ \&\ q = -d/(2c)\ \&\ 0 < mc \rightarrow A -$ точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ (A,B,C) = Q\ \&$ прямкоорд(Q) $\&$ каноничкоорд(Q,E) $\&$ коорд$(A,K) = (p,q)$ $\&$ коорд$(C,K) = (p+1,q)$ $\&$ коорд$(B,K) = (p,q+1)$ $\&$ коорд$(E,Q) = \mathrm{set}_{uv}(4a^2cu^2/m + 4ac^2v^2/m = 1\ \&\ u -$ число $\&\ v -$ число$)$ $\&$ малаяось$(E) = 2\sqrt{m/(4a^2c)}$ $\&$ большаяось$(E) = 2\sqrt{m/(4c^2a)})$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "точки" либо цель "линия". В первом случае требуется получить бескоординатное описание множества точек, во втором - провести общее исследование свойств линии, заданной своим уравнением. Антецеденты с номерами четыре, шесть и семь выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X,E)". Хотя бы один из коэффициентов b,d ненулевой. Прием вводит новые переменные A,B,C,Q. Уровни срабатывания равны 3 и 6.

$\forall_{EKace}($прямкоорд(K) $\&$ коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + e = 0\ \&\ x -$ число $\&\ y -$ число$)$ $\&\ 0 < ac\ \&\ 0 \leq e(a-c)\ \&\ ce < 0 \rightarrow$ каноничкоорд$(K,E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "точки" либо "линия". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X,K)". Уровни срабатывания равны 3 и 6.

8. Ввод канонической системы координат и канонического уравнения эллипса.

$\forall_{ABCDEFGHKab}($эллипс(E) $\&\ a =$ полуось(прямая$(AB), E)$ $\&$ $b =$ полуось(прямая$(CD), E) \rightarrow F -$ точка $\&\ G -$ точка $\&\ H -$ точка $\&$ $(F,G,H) = K$ $\&$ прямкоорд(K) $\&\ F \in$ прямая(AB) $\&\ F \in$ прямая(CD) $\&$ $G \in$ прямая(AB) $\&\ H \in$ прямая(CD) $\&$ коорд$(E,K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\ \&\ x -$ число $\&\ y -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. В задаче пока не рассматривается какая-либо прямоугольная система координат. Прием вводит новые переменные F,G,H,K. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABEKab}($эллипс(E) $\&$ фокус(A,E) $\&$ фокус(B,E) $\&$ разныеточки$(A,B) \rightarrow$ прямкоорд(K) $\&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ 0 < a\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 < a - b\ \&$ коорд$(A,K) = (\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ $\&$ коорд$(B,K) = (-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ $\&$ коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\ \&\ x -$ число $\&\ y -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - обрабатывается проверочным оператором. В задаче пока не рассматривается какая-либо прямоугольная система координат. Прием вводит новые переменные a,b,K. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{EKab}($эллипс(E) $\&$ большаяось$(E) = a$ $\&$ малаяось$(E) = b \rightarrow$ прямкоорд(K) $\&\ 0 < a\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 < a - b\ \&$ коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(4x^2/a^2 + 4y^2/b^2 = 1$ $\&\ x -$ число $\&\ y -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. В задаче пока не рассматривается какая-либо прямоугольная система координат. Прием вводит новую переменную K. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{EKab}$(эллипс(E) $\rightarrow$ прямкоорд(K) & a – число & b – число & $0 < a$ & $0 < b$ & $0 < a-b$ & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2+y^2/b^2 = 1$ & $x-$число & $y-$число))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. В задаче пока не рассматривается какая-либо прямоугольная система координат. Прием вводит новые переменные K, a, b. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABCDEFKab}$(эллипс(E) & осьсимметрии(прямая(AD), E) $\rightarrow$ прямкоорд(K) & $K = (F, B, C)$ & B – точка & C – точка & F – точка & $B \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(AD) & a – число & b – число & $0 < a$ & $0 < b$ & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 = ab$ & x – число & y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цели "известно" и "новпарам". Последняя цель разрешает ввод дополнительных параметров, причем ответ будет иметь вид квантора существования по таким параметрам. В посылках отсутствует равенство, задающее уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные a, b, B, C, F, K. Уровень срабатывания равен 7.

9. Длины большой и малой осей.

$\forall_{EKabcdem}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & эллипс(E) & $m = b^2c + d^2a \rightarrow$ большаяось(E) $= \max(\sqrt{m/(a^2c)}, \sqrt{m/(ac^2)})$ & $0 < ma$ & $0 < ac$)

$\forall_{EKabcdem}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & эллипс(E) & $m = b^2c + d^2a \rightarrow$ малаяось(E) $= \min(\sqrt{m/(a^2c)}, \sqrt{m/(ac^2)})$ & $0 < ma$ & $0 < ac$)

Приемы имеют заголовок "вывод". Указатели "контрольвывода" инициируют попытку применения приема при усмотрении подвыражения "большаяось(E)" либо, соответственно, "малаяось(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Выводимое утверждение содержит неизвестные. Уровни срабатывания каждого приема равны 2 и 4.

10. Эксцентриситет эллипса.

$\forall_{EKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & $0 < ac \rightarrow$ эксцентриситет(E) $=$ ($\sqrt{(c-a)/c}$ при $0 < c(c-a)$, иначе $\sqrt{(a-c)/a}$))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "эксцентриситет(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - обрабатывается проверочным оператором. Выводимое утверждение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

11. Длина фокальной хорды эллипса.

$\forall_{EKabcdem}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$
& x – число & y – число) & $0 < ac$ & $m = b^2c + d^2a - 4ace \to$
$0 < m(c-a)$ & фокхорда(E) $= \sqrt{m/c^3} \vee m(c-a) \leq 0$ & фокхорда(E) $= \sqrt{m/a^3}$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "фокхорда(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Выводимое утверждение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

12. Вершина эллипса принадлежит эллипсу.

$\forall_{AB}$(эллипс(B) & вершина(A, B) $\to a \in B$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

13. Вершина эллипса, принадлежащая фокальной оси.

$\forall_{ABCEKabcdempq}$(прямкоорд(K) & эллипс(E) & вершина(A, E) & фокус(B, E)
& фокус(C, E) & $A \in$ прямая(BC) & разныеточки(B, C) &
коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число)
& $p = -b/(2a)$ & $q = -d/(2c)$ & $m = b^2c + d^2a - 4ace \to 0 < m(c - a)$ &
(коорд(A, K) $= (p - \sqrt{m/(4a^2c)}, q)$ $\vee$ коорд(A, K) $= (p + \sqrt{m/(4a^2c)}, q)$) $\vee$
$m(c - a) \leq 0$ & (коорд(A, K) $= (p, q - \sqrt{m/(4a^2c)})$ $\vee$ коорд(A, K) $=$
$(p, q + \sqrt{m/(4a^2c)})$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов и восьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой антецедент выделен указателем "усм", седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Последние три антецедента выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 5.

14. Точки эллипса, равноудаленные от его вершины, лежащей на фокальной оси.

$\forall_{ABCEFGKabcdemnpqrs}$(прямкоорд($K$) & эллипс($E$) & вершина($A, E$) &
$l(AB) = l(AC)$ & $B \in E$ & $C \in E$ & разныеточки(B, C) &
коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) &
коорд(A, K) $= (m, n)$ & коорд(B, K) $= (p, q)$ & коорд(C, K) $= (r, s)$ &
$2cn + d = 0$ & фокус(F, E) & фокус(G, E) & $A \in$ прямая(FG) $\to$
$p = r$ & $a(q + s) + b = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты с номерами 1,2,3,5,6,8,13,14 идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором, последний - выделен указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

15. Квадрат либо прямоугольник, вписанный в эллипс.

$\forall_{ABCDEFKabcdemnpqrst}$(эллипс($E$) & квадрат($ABCD$) & $A \in E$ & $B \in E$ &
$C \in E$ & $D \in E$ & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$

$\&\ x -$ число $\&\ y -$ число$)\ \&$ коорд$(A, K) = (m, n)\ \&$ коорд$(B, K) = (p, q)$
$\&\ F \in$ отрезок$(AB)\ \&$ коорд$(F, K) = (r, 0)\ \&$ коорд$(C, K) = (s, t)$
$\&$ прямкоорд$(K) \rightarrow m = r\ \&\ p = r\ \&\ n = -q - d/c\ \&\ q = t)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты с номерами 1,2,7,13 идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты с третьего по шестой обрабатываются проверочными операторами, десятый антецедент выделен указателем "усм". Восьмой, девятый, одиннадцатый и двенадцатый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

16. Параллелограмм, вписанный в эллипс.

$\forall_{ABCDEP}($эллипс$(E)\ \&$ параллелограмм$(ABCD)\ \&\ A \in E\ \&\ B \in E$
$\&\ C \in E\ \&\ D \in E \rightarrow P -$ точка $\&$ центр$(P, E)\ \&\ P \in$ отрезок(AC)
$\&\ P \in$ отрезок$(BD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. В задаче не рассматриваются ни общая точка прямых AC и BD, ни центр кривой E. Прием вводит новую переменную P. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEP}($эллипс$(E)\ \&$ параллелограмм$(ABCD)\ \&\ A \in E\ \&\ B \in E$
$\&\ C \in E\ \&\ D \in E\ \&$ центр$(P, E) \rightarrow P \in$ отрезок$(AC)\ \&\ P \in$ отрезок$(BD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. В задаче не рассматривается общая точка прямых AC и BD. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEP}($эллипс$(E)\ \&$ параллелограмм$(ABCD)\ \&\ A \in E\ \&\ B \in E$
$\&\ C \in E\ \&\ D \in E\ \&\ P \in$ отрезок$(AC)\ \&\ P \in$ отрезок$(BD) \rightarrow$ центр$(P, E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "усм". В задаче не рассматривается центр кривой E. Уровень срабатывания равен 2.

17. Разбор случаев для ориентации фокальной оси.

$\forall_{EKabcdem}($прямкоорд$(K)\ \&$ коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$
$\&\ x -$ число $\&\ y -$ число$)\ \&\ 0 < ac\ \&\ m = b^2c + d^2a - 4ace\ \&\ \neg(m = 0) \rightarrow$
$0 < m(c - a)\ \vee\ m(c - a) \leq 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Не усматривается ни одно из неравенств выводимой дизъюнкции. В задаче не рассматривается каноническая система координат кривой E. Отсутствует посылка, определяющая уравнение этой кривой в трехмерной системе координат. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

18. Разбор случаев для эллипса, точки и мнимого эллипса.

$\forall_{EKabcdem}($прямкоорд$(K)\ \&$ коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$
$\&\ x -$ число $\&\ y -$ число$)\ \&\ 0 < ac\ \&\ m = b^2c + d^2a - 4ace \rightarrow$
$0 < m(c + a)\ \vee\ m(c + a) < 0\ \vee\ m = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Не усматривается ни одно из неравенств выводимой дизъюнкции. Выражение m не тождественно нулевое. В задаче не рассматривается каноническая система координат кривой E. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 4.

19. Окружность является эллипсом.

    $\forall_{ABC}(\text{эллипс}(\text{Окружность}(ABC)))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применение при усмотрении подвыражения "Окружность(ABC)" в левой части равенства, задающего уравнение этой окружности. Текущая задача - на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

20. Усмотрение окружности.

    $\forall_{ab}(\text{эллипс}(a)\ \&\ \text{большаяось}(a) = b\ \&\ \text{малаяось}(a) = b \leftrightarrow \text{окружн}(a)\ \&\ \text{радиус}(a) = b/2)$

    Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)". Он выполняет эквивалентную замену группы посылок. Уровень срабатывания равен 2.

Гипербола

1. Ввод уравнения гиперболы по заданной действительной оси.

   $\forall_{ABEKabc}(\text{гипербола}(E)\ \&\ \text{действось}(\text{прямая}(AB), E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(y = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \rightarrow a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < b\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{uv}(bu^2 - 2bcu - av^2 + bc^2 - ab = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение кривой E, причем отсутствует посылка, задающая это уравнение в какой-либо другой системе координат. Прием вводит новые символы a, b, c. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDEKab}(\text{гипербола}(E)\ \&\ \text{осьсимметрии}(\text{прямая}(AB), E)\ \&\ \text{осьсимметрии}(\text{прямая}(CD), E)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(y = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uv}(u = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < ab\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{XY}(aX^2 - bY^2 - ab = 0\ \&\ X - \text{число}\ \&\ Y - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение кривой E, причем отсутствует посылка, задающая это уравнение в какой-либо другой системе координат. Прием вводит новые символы a, b. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABEFGHKQabcpq}$(гипербола(E) & действось(прямая$(AB), E)$ & прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K)$ $=$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by = 0$ & x – число & y – число$)$ $\rightarrow$ F – точка & G – точка & H – точка & $(F, G, H) = Q$ & p – число & q – число & d – число & e – число & $0 < p$ & $0 < q$ & коорд$(F, K) = (d, e)$ & коорд$(G, K) = (d - b, e + a)$ & коорд$(H, K) = (d + a, e + b)$ & коорд$(E, Q) =$ $\mathrm{set}_{uv}(pu^2 - qv^2 - pq = 0$ & u – число & v – число$)$ & $ad + be + c = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E относительно какой-либо системы координат. Прием вводит новые переменные F, G, H, Q, d, e, p, q. Уровень срабатывания равен 4.

2. Ввод уравнения гиперболы по заданной мнимой оси.

$\forall_{ABEFGHKQabcpq}$(гипербола(E) & мнимаяось(прямая$(AB), E)$ & прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K)$ $=$ $\mathrm{set}_{xy}(ax + by = 0$ & x – число & y – число$)$ $\rightarrow$ F – точка & G – точка & H – точка & $(F, H, G) = Q$ & p – число & q – число & d – число & e – число & $0 < p$ & $0 < q$ & коорд$(F, K) = (d, e)$ & коорд$(G, K) = (d - b, e + a)$ & коорд$(H, K) = (d + a, e + b)$ & коорд$(E, Q) =$ $\mathrm{set}_{uv}(pu^2 - qv^2 - pq = 0$ & u – число & v – число$)$ & $ad + be + c = 0)$

Аналогично последнему приему предыдущего пункта.

3. Ввод уравнения гиперболы с заданными фокусами.

$\forall_{ABEFGHKQabcdmpqr}$(прямкоорд$(K)$ & гипербола(E) & фокус(A, E) & фокус(B, E) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & $p = (a + c)/2$ & $q = (b + d)/2$ & $r = (c - a)^2 + (d - b)^2$ & $\neg(r = 0) \rightarrow F$ – точка & G – точка & H – точка & $(F, G, H) = Q$ & коорд$(F, K) = (p, q)$ & коорд$(G, K) = (p + (c - a)/\sqrt{r}, q + (d - b)/\sqrt{r})$ & коорд$(H, K) =$ $(p - (d - b)/\sqrt{r}, q + (c - a)/\sqrt{r})$ & прямкоорд(Q) & m – число & $0 < m$ & $0 < r - 4m$ & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{xy}(4mx^2 - (r - 4m)y^2 - m(r - 4m) = 0$ & x – число & y – число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие пять - выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные F, G, H, Q, m. Уровень срабатывания равен 3.

4. Ввод уравнения гиперболы по заданным асимптотам.

$\forall_{ABCDEKabcdp}$(прямкоорд(K) & гипербола(E) & асимптота(прямая$(AB), E)$ & асимптота(прямая$(CD), E)$ & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by = 0$ & x – число & y – число$)$ & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{vw}(cv + dw = 0$ & v – число & w – число$)$ & $ad + bc = 0$ & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow$ p – число & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{XY}(a^2X^2 - b^2Y^2 - p = 0$ & X – число & Y – число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие три - выделены указателем "идентификатор". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможность определить уравнение кривой E в системе координат K. Прием вводит новый параметр p. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFGHKQabcdefmpqr}$(прямкоорд($K$) & гипербола($E$) & асимптота(прямая($AB$), E) & асимптота(прямая(CD), E) & коорд(прямая(AB), K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая(CD), K) $= \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & u – число & v – число) & $p = ae - bd$ & $\neg(p = 0)$ & $q = (bf - ce)/p$ & $r = (cd - af)/p \rightarrow F$ – точка & G – точка & H – точка & $(F, G, H) = Q$ & коорд(F, K) $= (q, r)$ & коорд(G, K) $= (q - b, r + a)$ & коорд(H, K) $= (q - e, r + d)$ & m – число & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{XY}(XY = m$ & X – число & Y – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Восьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные F, G, H, Q, m. Уровень срабатывания равен 4.

5. Соотношение для коэффициентов уравнения гиперболы, имеющей заданную действительную либо мнимую полуось.

$\forall_{EKabcdem}$(гипербола(E) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & прямкоорд(K) & $m = bc^2 + ad^2 - 4abe$ & $0 \leq a \rightarrow$
$0 \leq m$ & $m + 4a^2b$(мнимаяполуось(E))$^2 = 0$ $\vee$
$m \leq 0$ & $m + 4ab^2$(мнимаяполуось(E))$^2 = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "мнимаяполуось(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый - выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Выводимое утверждение содержит неизвестные. Оно помечается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{EKabcdem}$(гипербола(E) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & прямкоорд(K) & $m = bc^2 + ad^2 - 4abe$ & $0 \leq a \rightarrow$
$m \leq 0$ & $m - 4a^2b$(действполуось(E))$^2 = 0$ $\vee$
$0 \leq m$ & $m - 4ab^2$(действполуось(E))$^2 = 0$)

Аналогично предыдущему.

6. Условие на коэффициенты уравнения, задающего равностороннюю гиперболу.

$\forall_{ABCEKQabcdemnpq}$(равнгипербола($E$) & прямкоорд($K$) & $Q = (A, B, C)$ & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & коорд(вектор(AB), K) $= (m, n)$ & коорд(вектор(AC), K) $= (p, q)$ & $mp + nq = 0 \rightarrow a(p^2 + q^2) + b(m^2 + n^2) = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, следующие три - выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания приема равны 3 и 5.

$\forall_{EKabcdef}$(равнгипербола(E) & прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow a + b = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уравнение содержит неизвестные. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

7. Определение канонической системы координат и канонического уравнения гиперболы.

   $\forall_{ABCEKQabcdempq}$(прямкоорд(K) & коорд(E,K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+$
   $dy+e=0$ & x – число & y – число) & $ac<0$ & $m=b^2c+d^2a-4ace$ &
   $0<mc$ & $p=-b/(2a)$ & $q=-d/(2c)\rightarrow A$ – точка & B – точка
   & C – точка & $(A,B,C)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) &
   коорд(A,K) $=(p,q)$ & коорд(B,K) $=(p+1,q)$ & коорд(C,K) $=(p,q+1)$
   & коорд(E,Q) $=\mathrm{set}_{uv}(4a^2cu^2/m+4ac^2v^2/m=1$ & u – число & v – число)
   & действполуось(E) $=\sqrt{m/(4a^2c)}$ & мнимаяполуось(E) $=\sqrt{-m/(4c^2a)}$)

   $\forall_{ABCEKQabcdempq}$(прямкоорд(K) & коорд(E,K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+$
   $dy+e=0$ & x – число & y – число) & $ac<0$ & $m=b^2c+d^2a-4ace$ &
   $mc<0$ & $p=-b/(2a)$ & $q=-d/(2c)\rightarrow A$ – точка & B – точка
   & C – точка & $(A,B,C)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) &
   коорд(A,K) $=(p,q)$ & коорд(B,K) $=(p+1,q)$ & коорд(C,K) $=(p,q+1)$
   & коорд(E,Q) $=\mathrm{set}_{uv}(4a^2cu^2/m+4ac^2v^2/m=1$ & u – число & v – число)
   & мнимаяполуось(E) $=\sqrt{-m/(4a^2c)}$ & действполуось(E) $=\sqrt{m/(4c^2a)}$)

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "точки" либо "линия". Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X,E)". Прием вводит новые переменные A,B,C,Q. Уровень срабатывания равен 3.

8. Ввод канонической системы координат и канонического уравнения гиперболы.

   $\forall_{ABEKab}$(гипербола(E) & фокус(A,E) & фокус(B,E) & разныеточки(A,B) $\rightarrow$ прямкоорд(K) & a – число & b – число & $0<a$ & $0<b$ & коорд(A,K) $=(\sqrt{a^2+b^2},0)$ & коорд(B,K) $=(-\sqrt{a^2+b^2},0)$ & коорд(E,K) $=\mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2-y^2/b^2=1$ & x – число & y – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "прямкоорд(X)". Прием вводит новые переменные a,b,K. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{EKab}$(равнгипербола(E) $\rightarrow$ прямкоорд(K) & a–число & $0<a$ & коорд(E,K) $=\mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2-y^2/a^2=1$ & x – число & y – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "прямкоорд(X)". Прием вводит новые переменные a,K. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{EKab}$(гипербола(E)прямкоорд(K) & a – число & b – число & $0<a$ &
   $0<b$ & коорд(E,K) $=\mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2-y^2/b^2=1$ & x – число & y – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "прямкоорд(X)". Прием вводит новые переменные a, b, K. Уровень срабатывания равен 4.

9. Ввод уравнений действительной и мнимой осей гиперболы.

   $\forall_{ABEKabcde}(\text{действось}(\text{прямая}(AB), E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e = 0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ m = b^2c+d^2a-4ace \to 0 < mc\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{uv}(2cv+d = 0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}) \vee mc < 0\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{uv}(2au+b = 0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}))$

   $\forall_{ABEKabcde}(\text{мнимаяось}(\text{прямая}(AB), E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e = 0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ m = b^2c+d^2a-4ace \to mc < 0\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{uv}(2cv+d = 0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}) \vee 0 < mc\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{uv}(2au+b = 0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний - выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Неравенства в выводимой дизъюнкции обрабатываются нормализатором "нормменьше", который в простых случаях заменяет его на логическую константу "истина" либо "ложь". Вся дизъюнкция обрабатывается нормализатором "нормлог". Если в результате дизъюнкция исчезает, то разрешается уровень срабатывания 3, иначе - уровень срабатывания равен 5.

10. Действительная и мнимая оси суть оси симметрии.

    $\forall_{AB}(\text{действось}(A, B) \to \text{осьсимметрии}(A, B))$

    $\forall_{AB}(\text{мнимаяось}(A, B) \to \text{осьсимметрии}(A, B))$

    Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

11. Прямая, проходящая через фокус либо центр и перпендикулярная к директрисе, является действительной осью гиперболы.

    $\forall_{ABCDEFKabcde}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{гипербола}(K)\ \&\ \text{фокус}(A, E)\ \&\ \text{директриса}(\text{прямая}(BC), F, E)\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (d, e)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \to D - \text{точка}\ \&\ \text{действось}(\text{прямая}(AD), E)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \text{set}_{uv}(-bu + av + bd - ae = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, два последних - выделены указателем "идентификатор". Указатель "вариант" разрешает замену символа "фокус" на символ "центр". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение кривой E. Отсутствуют посылки вида "действось(X, E)", "мнимаяось(X, E)". Прием вводит новую переменную D. Уровни срабатывания равны 1 и 4.

12. Ввод уравнения асимптоты гиперболы.

    $\forall_{ABCEKabcdem}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{асимптота}(\text{прямая}(AB), E)\ \&\ \text{асимптота}(\text{прямая}(AC), E)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{гипербола}(E)\ \&\ m = \sqrt{-c/a}\ \&$

разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC)) $\to$ коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{uv}($2acu + 2acmv + ad + mbc = 0$ & u – число & v – число) & коорд(прямая(AC), K) $=$ set_{uv}($2acu - 2acmv + ad - mbc = 0$ & u – число & v – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, шестой - выделен указателем "идентификатор", седьмой - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствуют посылки, определяющие уравнения прямых AB и AC относительно какой-либо системы координат. Точки B, C входят в задачу симметричным образом. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKabcdem}$(прямкоорд(K) & асимптота(прямая(AB), E) & асимптота(прямая(CD), E) & коорд(E, K) $=$ set_{xy}($ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & гипербола(E) & $m = \sqrt{-c/a}$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) $\to$ коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{uv}($2acu + 2acmv + ad + mbc = 0$ & u – число & v – число) & коорд(прямая(CD), K) $=$ set_{uv}($2acu - 2acmv + ad - mbc = 0$ & u – число & v – число) $\vee$ коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{uv}($2acu - 2acmv + ad - mbc = 0$ & u – число & v – число) & коорд(прямая(CD), K) $=$ set_{uv}($2acu + 2acmv + ad + mbc = 0$ & u – число & v – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Аналогично предыдущему, но симметричное вхождение в задачу прямых AB, CD не усматривается. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABEKabcdem}$(прямкоорд(K) & асимптота(прямая(AB), E) & коорд(E, K) $=$ set_{xy}($ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & x – число & y – число) & гипербола(E) & $m = \sqrt{-c/a}$ $\to$ коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{uv}($2acu + 2acmv + ad + mbc = 0$ & u – число & v – число) $\vee$ коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{uv}($2acu - 2acmv + ad - mbc = 0$ & u – число & v – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 5.

13. Ввод уравнения второй асимптоты для равносторонней гиперболы.

    $\forall_{ABCDEKabcd}$(прямкоорд(K) & равнгипербола(E) & асимптота(прямая(AB), E) & коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{xy}($ax + by + c = 0$ & x – число & y – число) $\to$ C – точка & D – точка & асимптота(прямая(CD), E) & d – число & коорд(прямая(CD), K) $=$ set_{uv}($-bu + av + d = 0$ & u – число & v – число))

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "асимптота(X, E)", где X - прямая, отличная от прямой AB. Прием вводит новые переменные C, D, d. Уровень срабатывания равен 3.

14. Ввод в рассмотрение второй асимптоты, если известны одна асимптота и ось симметрии.

    $\forall_{ABCDEFGHI}$(гипербола(E) & асимптота(прямая(AB), E) & осьсимметрии(прямая(CD), E) $\to$ F – точка & G – точка & H – точка

& I – точка & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(AB) & $I \in$ прямая(CD) & асимптота(прямая$(FG), E)$ & биссектриса$(HFGI)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "асимптота(X, E)", где X - прямая, отличная от прямой AB. Прием вводит новые переменные F, G, H, I. Уровень срабатывания равен 4.

15. Ввод в рассмотрение уравнения асимптоты гиперболы.

$\forall_{ABEK}$(асимптота(прямая$(AB), E) \to$ актив(коорд(прямая$(AB), K$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(E, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение "коорд(прямая(AB),X)" в посылках не встречается. Уровень срабатывания равен 6.

16. Соотношения для коэффициентов уравнения асимптоты гиперболы.

$\forall_{ABEKabcdefpqr}$(гипербола(E) & асимптота(прямая$(AB), E)$ & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(pu + qv + r = 0$ & u – число & v – число) $\to$ $aq^2 - bpq + cp^2 = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABEKabcdefpqr}$(гипербола(E) & асимптота(прямая$(AB), E)$ & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(pu + qv + r = 0$ & u – число & v – число) & $\neg(q = 0) \to 2rcp - bqr - epq + dq^2 = 0)$

$\forall_{ABEKabcdefpqr}$(гипербола(E) & асимптота(прямая$(AB), E)$ & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(pu + qv + r = 0$ & u – число & v – число) & $\neg(p = 0) \to 2raq - bpr - dpq + ep^2 = 0)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

17. Угол между асимптотами.

$\forall_{ABCDEKabcdepq}$(прямкоорд(K) & гипербола(K) & асимптота(прямая$(AB), E)$ & асимптота(прямая$(AC), E)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 +$ $dy + e = 0$ & x – число & y – число) & $D \in$ Угол(BAC) & коорд$(D, K) = (p, q)$ & $2cq + d = 0$ & актив$(\angle(BAC)) \to$ $(a + c)\,\mathrm{tg}\,\angle(BAC) - 2\mathrm{sg}c \cdot \sqrt{-ac} = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, седьмой и восьмой - выделены указателем "идентификатор". Последний антецедент выделен указателем "усм". Уровень срабатывания равен 3.

18. Эксцентриситет гиперболы.

    $\forall_{EKabcde}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $ac<0 \to$ эксцентриситет$(E) =$ $(\sqrt{(c-a)/c}$ при $0<c(b^2c+d^2a-4ace)$, иначе $\sqrt{(a-c)/a}))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "эксцентриситет(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

19. Длина фокальной хорды гиперболы.

    $\forall_{EKabcdem}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $ac<0$ & $m=b^2c+d^2a-4ace \to$ $0<cm$ & фокхорда$(E)=\sqrt{m/c^3}$ $\vee$ $cm<0$ & фокхорда$(E)=\sqrt{m/a^3})$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "фокхорда(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{EKabcdem}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & гипербола(E) & $m=b^2c+d^2a-4ace \to$ $0<cm$ & фокхорда$(E)=\sqrt{m/c^3}$ $\vee$ $cm<0$ & фокхорда$(E)=\sqrt{m/a^3})$

    Аналогично предыдущему, но третий антецедент идентифицируется с посылкой.

20. Усмотрение вершины гиперболы.

    $\forall_{AEKabcdemn}$(прямкоорд(K) & гипербола(E) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & x – число & y – число) & $A\in E$ & коорд$(A,K)=(m,n)$ & $(2am+b=0$ $\vee$ $2cn+d=0) \to$ вершина$(A,E))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания приема равен 2.

21. Вершина гиперболы принадлежит гиперболе.

    $\forall_{AB}$(гипербола(B) & вершина$(A,B) \to A\in B)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 1.

22. Вершина гиперболы принадлежит ее оси симметрии.

    $\forall_{ABCE}$(гипербола(E) & вершина(A,E) & осьсимметрии(прямая$(BC),E) \to$ $A\in$ прямая$(BC))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 2.

23. Координаты вершины гиперболы, заданной уравнением в асимптотах.

$\forall_{ABCDEKabmn}$(гипербола(E) & $K=(A,B,C)$ & коорд$(E,K)=$ set$_{xy}(xy+a=0$ & $x-$ число & $y-$ число) & вершина(D,E) & $m=l(AB)$ & $n=l(AC)\to b-$ число & коорд$(D,K)=(b,-b\text{sg}a\cdot m/n))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Прием вводит новый параметр b. Уровень срабатывания равен 3.

24. Точки ветви гиперболы, равноудаленные от ее вершины.

$\forall_{ABCEKabcdemnpqrs}$(прямкоорд$(K)$ & гипербола(E) & вершина(A,E) & $l(AB)=l(AC)$ & $B\in$ ветвькривой(A,E) & $C\in$ ветвькривой(A,E) & разныеточки(B,C) & коорд$(E,K)=$ set$_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & $x-$ число & $y-$ число) & коорд$(A,K)=(m,n)$ & коорд$(B,K)=(p,q)$ & коорд$(C,K)=(r,s)$ & $2cn+d=0\to p=r$ & $a(q+s)+b=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента, а также пятый, шестой и восьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

25. Если точка принадлежит ветви кривой, то она принадлежит кривой.

$\forall_{ABC}(A\in$ ветвькривой$(B,C)\to A\in C)$

Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 1.

26. Равносторонняя гипербола является гиперболой.

$\forall_a$(равнгипербола$(a)\to$ гипербола(a))

Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 1.

27. Разбор случаев для ориентации гиперболы.

$\forall_{EKabcdem}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K)=$ set$_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & $x-$ число & $y-$ число) & $ac<0$ & $m=b^2c+d^2a-4ace\to$ $0<mc\ \vee\ mc<0\ \vee\ m=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Проверочные операторы не позволяют усмотреть ни один из дизъюнктивных членов выводимого утверждения. Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X,E)". Дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

28. Разбор случаев для гиперболы либо пары прямых.

$\forall_{EKabcdefp}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K)=$ set$_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ & $x-$ число & $y-$ число) & $0<b^2-4ac$ & $p=4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2\to p=0\ \vee\ \neg(p=0))$

Прием имеет заголовок "вывод". Идентификация такая же, как в предыдущем приеме. В уравнение кривой E входит хотя бы один член второй степени. Отсутствует посылка, явно указывающая, что E - эллипс, гипербола либо парабола.

Не усматривается истинность какого-либо дизъюнктивного члена выводимого утверждения. Это утверждение снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

29. Нормализаторы общей стандартизации "нормдействполуось", "нормнимаяполуось". Каждый из этих нормализаторов имеет единственный прием, использующий равенство из посылок, явно задающее выражение для соответствующей полуоси.

Парабола

1. Ввод уравнения параболы по уравнениям ее оси.

   $\forall_{ABEFGHKQabcmnp}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & осьсимметрии(прямая(AB), $E)$ & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & $x -$ число & $y -$ число$) \to$ $F -$ точка & $G -$ точка & $H -$ точка & $(F,G,H) = Q$ & $m -$ число & $n -$ число & коорд$(F,K) = (m,n)$ & коорд$(G,K) = (m-b, n+a)$ & коорд$(H,K) = (m+a, n+b)$ & $p -$ число & коорд$(E,Q) =$ $\mathrm{set}_{uv}(v^2 + pu = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)$ & $am + bn + c = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, определяющая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные F, G, H, Q, m, n, p. Уровень срабатывания равен 5.

2. Ввод уравнения параболы, для которой известны координаты вершины и уравнение оси симметрии.

   $\forall_{ABCDEFKQabcmnp}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & вершина(A,E) & осьсимметрии(прямая$(BC), E)$ & коорд$(A,K) = (m,n)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & $x -$ число & $y -$ число$) \to$ $D -$ точка & $F -$ точка & $(A,D,F) = Q$ & коорд$(D,K) = (m-b, n+a)$ & коорд$(F,K) = (m+a, n+b)$ & $p -$ число & коорд$(E,Q) =$ $\mathrm{set}_{uv}(v^2 - pu = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)$ & $\neg(p = 0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, определяющая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные D, F, Q, p. Уровень срабатывания равен 4.

3. Ввод уравнения параболы по координатам фокуса и направлению оси.

   $\forall_{ABEGHKQabmpqr}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & фокус(A,E) & коорд$(A,K) = (a,b)$ & направлпараболы(E,B) & коорд$(B,K) = (p,q)$ & $r = p^2 + q^2 \to G -$ точка & $H -$ точка & $(A,G,H) = Q$ & коорд$(G,K) = (a + p/\sqrt{r}, b + q/\sqrt{r})$ & коорд$(H,K) = (a - q/\sqrt{r}, b + p/\sqrt{r})$ & прямкоорд(Q) & $m -$ число & $0 < m$ & коорд$(E,Q) =$ $\mathrm{set}_{xy}(y^2 - 2mx - m^2 = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, определяющая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные G, H, Q, m. Уровень срабатывания равен 3.

4. Ввод уравнения параболы, для которой известны фокальный параметр, координаты вершины и направление оси.

   $\forall_{ABEKabcp}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & вершина(A, E) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & фокпараметр$(E) = p$ & направлпараболы(E, B) & коорд$(B, K) = (c, 0)$ & $\neg(c = 0) \to$ коорд$(E, K) =$ set$_{xy}((y - b)^2 - 2p\text{sg}(c) \cdot (x - a) = 0$ & x – число & y – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение кривой E. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABEFGHKQabcdmp}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & вершина(A, E) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & фокпараметр$(E) = p$ & направлпараболы(E, B) & коорд$(B, K) = (c, d)$ & $m = \sqrt{c^2 + d^2}$ & $\neg(m = 0) \to F$ – точка & G – точка & H – точка & $(F, G, H) = Q$ & коорд$(F, K) = (a, b)$ & коорд$(G, K) = (a + c/m, b + d/m)$ & коорд$(H, K) = (a - d/m, b + c/m)$ & коорд$(E, Q) =$ set$_{xy}(y^2 - 2px = 0$ & x – число & y – число))

   Первые три антецедента и шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, определяющая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные F, G, H, Q. Уровень срабатывания равен 3.

5. Соотношение для коэффициентов параболы.

   $\forall_{EKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(E, K) =$ set$_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) & парабола$(E) \to b^2 - 4ac = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выводимое соотношение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 4.

6. Коэффициенты уравнения параболы при второй степени одной переменной и первой степени другой отличны от нуля (для уравнения в главных направлениях).

   $\forall_{EKabcd}$(парабола(E) & коорд$(E, K) =$ set$_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) $\to \neg(a = 0)$ & $\neg(c = 0)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Хотя бы одно из выводимых утверждений не усматривается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

7. Определение канонической системы координат и канонического уравнения параболы.

$\forall_{ABCEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xy}$($ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & $ac < 0$ & $p = (b^2 - 4ad)/(4ac)$ & $q = -b/(2a) \to$ A – точка & B – точка & C – точка & $(A, B, C) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (p, q)$ & коорд(B, K) $= (p + 1, q)$ & коорд(C, K) $= (p, q + 1)$ & коорд(E, Q) $=$ set$_{uv}$($v^2 + cu/a = 0$ & u – число & v – число) & фокпараметр(E) $= -c/(2a)$)

$\forall_{ABCEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{yx}$($ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & $ac < 0$ & $p = (b^2 - 4ad)/(4ac)$ & $q = -b/(2a) \to$ A – точка & B – точка & C – точка & $(A, B, C) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (q, p)$ & коорд(B, K) $= (q, p + 1)$ & коорд(C, K) $= (q + 1, p)$ & коорд(E, Q) $=$ set$_{vu}$($v^2 + cu/a = 0$ & u – число & v – число) & фокпараметр(E) $= -c/(2a)$)

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "точки" либо цель "линия". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X, E)". Прием вводит новые переменные A, B, C, Q. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xy}$($ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & $0 < ac$ & $p = (b^2 - 4ad)/(4ac)$ & $q = -b/(2a) \to$ A – точка & B – точка & C – точка & $(A, B, C) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (p, q)$ & коорд(B, K) $= (p - 1, q)$ & коорд(C, K) $= (p, q + 1)$ & коорд(E, Q) $=$ set$_{uv}$($v^2 - cu/a = 0$ & u – число & v – число) & фокпараметр(E) $= c/(2a)$)

$\forall_{ABCEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{yx}$($ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & $0 < ac$ & $p = (b^2 - 4ad)/(4ac)$ & $q = -b/(2a) \to$ A – точка & B – точка & C – точка & $(A, B, C) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (q, p)$ & коорд(B, K) $= (q, p - 1)$ & коорд(C, K) $= (q + 1, p)$ & коорд(E, Q) $=$ set$_{vu}$($v^2 - cu/a = 0$ & u – число & v – число) & фокпараметр(E) $= c/(2a)$)

Аналогично предыдущему.

8. Ввод канонической системы координат и канонического уравнения параболы.

   $\forall_{AEKp}$(парабола(E) & фокус(A, E) $\to$ прямкоорд(K) & p – число & $0 < p$ & коорд(E, K) $=$ set$_{xy}$($y^2 - 2px = 0$ & x – число & y – число) & коорд(A, K) $= (p/2, 0)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "прямкоорд(X)". Прием вводит новые переменные K, p. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{EKp}$(парабола(E) $\to$ прямкоорд(K) & p – число & $0 < p$ & коорд(E, K) $=$ set$_{xy}$($y^2 - 2px = 0$ & x – число & y – число))

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

9. Направление оси параболы.

$\forall_{BEKabcd}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & направлпараболы$(E, B) \to$ коорд$(B, K) = (-\mathrm{sg}(ac), 0))$

$\forall_{BEKabcd}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{yx}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & направлпараболы$(E, B) \to$ коорд$(B, K) = (0, -\mathrm{sg}(ac)))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты вектора B. Уровни срабатывания равны 2 и 5.

$\forall_{AEKabcdefm}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & направлпараболы(E, A) & коорд$(A, K) = (0, m)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) $\to b = 0$ & $c = 0)$

$\forall_{AEKabcdefm}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & направлпараболы(E, A) & коорд$(A, K) = (m, 0)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) $\to b = 0$ & $a = 0)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{BEKabcd}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & направлпараболы(E, B) & коорд$(B, K) = (p, q) \to p = -\mathrm{sg}(ac)$ & $q = 0)$

$\forall_{BEKabcd}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{yx}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & направлпараболы(E, B) & коорд$(B, K) = (p, q) \to p = 0$ & $q = -\mathrm{sg}(ac))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 4.

10. Уравнение оси симметрии параболы.

$\forall_{ABEKabcd}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) $\to$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(2av + b = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

$\forall_{ABEKabcd}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{yx}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) $\to$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{vu}(2av + b = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABEKabcdpqr}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(pu + qv + r = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) $\to$ $p = 0$ & $bq - 2ar = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

11. Ввод в рассмотрение координат направляющего вектора оси параболы.

    $\forall_{ABCEK}$(парабола(E) & направлпараболы(E, вектор(AB)) & коорд(E, K) $= C$ & прямкоорд(K) $\rightarrow$ актив(коорд(вектор(AB), K)))

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражение C имеет заголовок "класс". Уровень срабатывания равен 3.

12. Эксцентриситет параболы.

    $\forall_E$(парабола(E) $\rightarrow$ эксцентриситет(E) $= 1$)

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

13. Длина фокальной хорды параболы и ее фокальный параметр.

    $\forall_{EKabcd}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow$ фокхорда(E) $= |c/a|$)

    $\forall_{EKabcd}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{yx}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow$ фокхорда(E) $= |c/a|$)

    Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "фокхорда(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровни срабатывания равены 3 и 5.

    $\forall_{EKabcd}$(парабола(E) & прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow$ фокпараметр(E) $= |c/(2a)|$)

    Аналогично предыдущему, но указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "фокпараметр(E)".

14. Координаты вершины параболы.

    $\forall_{AEKabcd}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & вершина(A, E) $\rightarrow$ коорд(A, K) $= ((b^2 - 4ad)/(4ac), -b/(2a))$)

    $\forall_{AEKabcd}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{yx}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & вершина(A, E) $\rightarrow$ коорд(A, K) $= (-b/(2a), (b^2 - 4ad)/(4ac))$)

    Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 2.

15. Вершина параболы принадлежит параболе.

    $\forall_{AB}$(парабола(B) & вершина(A, B) $\rightarrow A \in B$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Уровень срабатывания равен 1.

16. Вершина параболы принадлежит ее оси симметрии.

    $\forall_{ABCE}$(парабола(E) & вершина(A, E) & осьсимметрии(прямая(BC), E) $\to$ $A \in$ прямая(BC))

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

17. Точки параболы, равноудаленные от ее вершины.

    $\forall_{ABCEKabcdmnpqrs}$(прямкоорд($K$) & парабола($E$) & вершина($A, E$) & $B \in E$ & $C \in E$ & $l(AB) = l(AC)$ & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0$ & x – число & y – число) & коорд(B, K) $= (m, n)$ & коорд(C, K) $= (p, q)$ & коорд(A, K) $= (r, s) \to m = p$ & $n + q = 2s$)

    Прием имеет заголовок "вывод". Все его антецеденты, кроме шестого, идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

18. Расстояние от параболы до прямой.

    $\forall_{ABCDEK}$(парабола(E) & непересек(прямая(AB), E) $\to C$ – точка & D – точка & прямая(CD) – касательная к E & прямая(CD) $\parallel$ прямая(AB) & расстмежду(прямая(AB), E) = расстмежду(прямая(AB), прямая(CD)))

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "расстмежду(прямая(AB),E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается параллельность прямой AB уже рассматриваемой в задаче касательной к параболе E. Прием вводит новые переменные C, D. Уровень срабатывания равен 2.

19. Ввод двумерной системы координат при рассмотрении параболы в трехмерном пространстве.

    $\forall_{ABCEGHKMNQabcdefkmnpqrt}$(прямкоорд($K$) & вершина($A, E$) & парабола($E$) & коорд($A, K$) $= (a, b, c)$ & направлпараболы(E, вектор(GH)) & коорд(вектор(GH), K) $= (d, e, f)$ & прямая(BC) – касательная к E & $A \in$ прямая(BC) & направлпрямой(прямая(BC), K, t) & $t = (p, q, r)$ & $m = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $n = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \to M$ – точка & N – точка & $(A, M, N) = Q$ & прямкоорд(Q) & коорд(M, K) $= (a + d/m, b + e/m, c + f/m)$ & коорд(N, K) $= (a + p/n, b + q/n, c + r/n)$ & k – число & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{xy}(x - ky^2 = 0$ & x – число & y – число) & $0 < k$ & коорд(вектор(GH), Q) $= (m, 0)$ & направлпрямой(прямая(BC), $Q, (0, n)$) & $E \subseteq$ плоскость(AMN) & актив(коорд(плоскость(AMN), K)))

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента, а также седьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Восьмой антецедент выделен указателем "усм", девятый - обрабатывается пакетным синтезатором "направлпрямой", описанным ранее в разделе "системы координат". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, задающая уравнение кривой E в какой-либо системе координат. Прием вводит новые переменные M, N, Q. Уровень срабатывания равен 3.

1.9 Поверхности второго порядка

Сфера

1. Условие на уравнение сферы.

   $\forall_{EKabcdefghpq}$(сфера(E) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+pz+q=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & прямкоорд$(K) \to a=b$ & $b=c$ & $d=0$ & $e=0$ & $f=0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уравнение сферы содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение сферы.

   $\forall_{EKabcde}(\neg(a=0)$ & $0 < b^2+c^2+d^2-4ae$ & прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) $\to$ сфера$(E))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

3. Центр сферы.

   $\forall_{DEKabcde}(\neg(a=0)$ & прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & центр$(D,E) \to$ коорд$(D,K) = (-b/(2a), -c/(2a), -d/(2a)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Три последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, первый - обрабатывается проверочным оператором. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки D. Уровень срабатывания равен 2.

4. Радиус сферы.

   $\forall_{EKabcdep}(\neg(a=0)$ & $p = b^2+c^2+d^2-4ae$ & $0 < p$ & прямкоорд(K) &
   коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0$ & $x-$ число &
   $y-$ число & $z-$ число) $\to$ радиус$(E) = \sqrt{p}/(2|a|))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "радиус(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Два последних антецедента идентифицируются с посылками, первый и третий - обрабатывается проверочными операторами. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{EKabcdep}(\neg(a=0)$ & $p = b^2+c^2+d^2-4ae$ & сфера(E) & прямкоорд(K) &
   коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0$ & $x-$ число &
   $y-$ число & $z-$ число) $\to$ радиус$(E) = \sqrt{p}/(2|a|)$ & $0 < p)$

   Аналогично предыдущему, но третий антецедент идентифицируется с посылкой.

5. Центр окружности, получающейся при пересечении сферы с плоскостью.

   $\forall_{AEKabcdemnpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0\ \&\ px+qy+rz+s=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{центр}(A,E)\ \&\ n=p^2+q^2+r^2\ \&\ \neg(a=0)\ \&\ m=(bp+cq+dr-2as)/n\to\text{коорд}(A,K)=((mp-b)/(2a),(mq-c)/(2a),(mr-d)/(2a)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 3.

6. Радиус окружности, получающейся при пересечении сферы с плоскостью.

   $\forall_{AEKabcdekmnpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0\ \&\ px+qy+rz+s=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{центр}(A,E)\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(m,n)\to\text{радиус}(E)=\sqrt{b^2+c^2+d^2-4ae-(2am+b)^2-(2an+c)^2-(2ak+d)^2}/(2|a|))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

7. Ввод в рассмотрение точки касания сферы с плоскостью, для которой известен направляющий вектор нормали.

   $\forall_{ABCEKPQRabcdefgpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{плоскость}(ABC)-\text{касательная к }E\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{плоскость}(ABC)\parallel\text{плоскость}(PQR)\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(PQR),K)=\text{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\to M-\text{точка}\ \&\ M\in E\ \&\ M\in\text{плоскость}(ABC)\ \&\ f-\text{число}\ \&\ \text{коорд}(M,K)=(-b/(2a)+pf,-c/(2a)+qf,-d/(2a)+rf))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "усм", пятый - указателем "идентификатор". В задаче не рассматривается общая точка сферы E и плоскости ABC. Уровень срабатывания равен 2.

8. Ввод уравнения сферы, проходящей через заданную окружность.

   $\forall_{ABCEKabcdemnkpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{сфера}(E)\ \&\ \text{Окружность}(ABC)\subseteq E\ \&\ \text{коорд}(\text{Окружность}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+az^2+bx+cy+dz+e=0\ \&\ px+qy+rz+s=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ n=p^2+q^2+r^2\ \&\ m=(bp+cq+dr-2as)/n\to k-\text{число}\ \&\ \neg(n=0)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{uvw}((2au-mp+b-pk)^2+(2av-mq+c-qk)^2+(2aw-mr+d-rk)^2-b^2-c^2-d^2+4ae+m^2n-k^2n=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние три - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение сферы E. Прием вводит новый параметр k. Левая часть выводимого уравнения обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 3.

Общее уравнение поверхности второго порядка

1. Ввод в рассмотрение общего уравнения поверхности второго порядка.

   $\forall_{EKabcdefghpq}$(поввторпорядка(E) & прямкоорд(K) $\to$ a – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & g – число & h – число & p – число & q – число & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+pz+q=0$ & x – число & y – число & z – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(E,K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" разрешает замену символа "поввторпорядка" на любой из символов "эллипсоид", "параболоид", "гиперболоид", "Конус". Пакетный индикатор "опредкоорд" не усматривает возможности определить уравнение поверхности E. Прием вводит новые параметры a,b,c,d,e,f,g,h,p,q. Уровень срабатывания равен 8.

2. Ввод в рассмотрение уравнения поверхности, для которой известны центр и три оси симметрии.

   $\forall_{ABCDEFGHKMNPQRSTUabcdefghijkmnst}$(поввторпорядка($E$) & прямкоорд($K$) & центр$(H,E)$ & осьсимметрии(прямая$(AB),E)$ & осьсимметрии(прямая(CD), $E)$ & осьсимметрии(прямая$(TU),E)$ & направлпрямой(прямая$(AB),K,t)$ & $t=(a,b,c)$ & направлпрямой(прямая$(CD),K,i)$ & $i=(d,e,f)$ & направлпрямой(прямая$(TU),K,j)$ & $j=(g,h,s)$ & $ad+be+cf=0$ & $ag+bh+cs=0$ & $dg+eh+fs=0$ & $m=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $n=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & $k=\sqrt{g^2+h^2+s^2}$ $\to$ F – точка & G – точка & M – точка & $(H,F,G,M)=N$ & прямкоорд(N) & коорд(вектор$(HF),K)=(a/m,b/m,c/m)$ & коорд(вектор$(HG),K)=(d/n,e/n,f/n)$ & коорд(вектор$(HM),K)=$ $(g/k,h/k,s/k)$ & P – число & Q – число & R – число & S – число & коорд$(E,N)=\mathrm{set}_{xyz}(Px^2+Qy^2+Rz^2+S=0$ & x–число & y–число & z–число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой, девятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Прием вводит новые переменные F,G,M,N,P,Q,R,S. Уровень срабатывания равен 3.

3. Невырожденность уравнения поверхности второго порядка.

   $\forall_{KPabc}(a=bc$ & поввторпорядка(P) & коорд$(P,K)=\mathrm{set}_{xyz}(a=0$ & x – число & y – число & z – число) & прямкоорд(K) $\to \neg(b=0))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, исследование либо преобразование. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "вариант" разрешает альтернативные заголовки второго антецедента: "параболоид", "Конус", "Цилиндр", "гиперболоид". "эллипсоид". Указатель "обобщподст" разрешает зависимость выражения a от переменных x,y,z. Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором ускоренного разложения на множители "факторизация". Не усматривается, что множитель b ненулевой. Уровень срабатывания равен 1.

4. Изменение знака слагаемых левой части для стандартизации уравнения поверхности.

   $\forall_{af}(\mathrm{set}_{xyz}(-ax^2+f(x,y,z)=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2-f(x,y,z)=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}))$

   Прием имеет заголовок "втоpойтерм". Переменная f функциональная. Выражение $f(x,y,z)$ не имеет слагаемого, представимого в виде kx^2, где множитель k может зависеть от x,y,z. Уровень срабатывания равен 1.

5. Поворот относительно одной из координатных осей для устранения смешанных произведений.

   $\forall_{ABCDEKQabcdefghm}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+ex+fy+gz+h=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ m=a-b+\sqrt{(a-b)^2+d^2}\ \&\ p=m/\sqrt{m^2+d^2}\ \&\ q=d/\sqrt{m^2+d^2}\to A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ (A,B,C,D)=Q\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(0,0,0)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(p,q,0)\ \&\ \text{коорд}(C,K)=(-q,p,0)\ \&\ \text{коорд}(D,K)=(0,0,1)\ \&\ \text{прямкоорд}(Q)\ \&\ \text{коорд}(E,Q)=\mathrm{set}_{uvw}((am^2+bd^2+md^2)u^2+(ad^2+bm^2-md^2)v^2+c(m^2+d^2)w^2+(em+fd)\sqrt{m^2+d^2}u+(fm-ed)\sqrt{m^2+d^2}v+g(m^2+d^2)w+hm^2+hd^2=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число}))$

   $\forall_{ABCDEKQabcdefghm}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\mathrm{set}_{xzy}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+ex+fy+gz+h=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ m=a-b+\sqrt{(a-b)^2+d^2}\ \&\ p=m/\sqrt{m^2+d^2}\ \&\ q=d/\sqrt{m^2+d^2}\to A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ (A,B,C,D)=Q\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(0,0,0)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(p,0,q)\ \&\ \text{коорд}(C,K)=(-q,0,p)\ \&\ \text{коорд}(D,K)=(0,1,0)\ \&\ \text{прямкоорд}(Q)\ \&\ \text{коорд}(E,Q)=\mathrm{set}_{uvw}((am^2+bd^2+md^2)u^2+(ad^2+bm^2-md^2)v^2+c(m^2+d^2)w^2+(em+fd)\sqrt{m^2+d^2}u+(fm-ed)\sqrt{m^2+d^2}v+g(m^2+d^2)w+hm^2+hd^2=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число}))$

   $\forall_{ABCDEKQabcdefghm}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\mathrm{set}_{zyx}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+ex+fy+gz+h=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ m=a-b+\sqrt{(a-b)^2+d^2}\ \&\ p=m/\sqrt{m^2+d^2}\ \&\ q=d/\sqrt{m^2+d^2}\to A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ (A,B,C,D)=Q\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(0,0,0)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(0,q,p)\ \&\ \text{коорд}(C,K)=(0,p,-q)\ \&\ \text{коорд}(D,K)=(1,0,0)\ \&\ \text{прямкоорд}(Q)\ \&\ \text{коорд}(E,Q)=\mathrm{set}_{uvw}((am^2+bd^2+md^2)u^2+(ad^2+bm^2-md^2)v^2+c(m^2+d^2)w^2+(em+fd)\sqrt{m^2+d^2}u+(fm-ed)\sqrt{m^2+d^2}v+g(m^2+d^2)w+hm^2+hd^2=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число}))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", следующие три - выделены указателем "идентификатор". Напомним, что цель "эллипсоид" указывает на исследование поверхности второго порядка, заданной своим уравнением. Прием вводит новые переменные A,B,C,D,Q. Уровень срабатывания равен 3.

6. Поворот относительно одной из координатных осей в случае цилиндрической поверхности.

   $\forall_{ABCDEKQabcde}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\mathrm{set}_{xyz}(ax^2+bx+cy+dz+e=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ p=c/\sqrt{c^2+d^2}$
   $\&\ q=d/\sqrt{c^2+d^2}\to A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&$
   $(A,B,C,D)=Q\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(0,0,0)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(1,0,0)\ \&$

коорд$(C, K) = (0, p, q)$ & коорд$(D, K) = (0, -q, p)$ & прямкоорд(Q) & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uvw}(au^2 + bu + \sqrt{c^2 + d^2}v + e = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

$\forall_{ABCDEKQabcde}($прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{zyx}(ax^2 + bx + cy + dz + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $p = c/\sqrt{c^2 + d^2}$ & $q = d/\sqrt{c^2 + d^2} \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $(A, B, C, D) = Q$ & коорд$(A, K) = (0, 0, 0)$ & коорд$(B, K) = (0, 0, 1)$ & коорд$(C, K) = (q, p, 0)$ & коорд$(D, K) = (p, -q, 0)$ & прямкоорд(Q) & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uvw}(au^2 + bu + \sqrt{c^2 + d^2}v + e = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

$\forall_{ABCDEKQabcde}($прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{zxy}(ax^2 + bx + cy + dz + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $p = c/\sqrt{c^2 + d^2}$ & $q = d/\sqrt{c^2 + d^2} \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $(A, B, C, D) = Q$ & коорд$(A, K) = (0, 0, 0)$ & коорд$(B, K) = (0, 1, 0)$ & коорд$(C, K) = (q, 0, p)$ & коорд$(D, K) = (p, 0, -q)$ & прямкоорд(Q) & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uvw}(au^2 + bu + \sqrt{c^2 + d^2}v + e = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", следующие два - выделены указателем "идентификатор". Прием вводит новые переменные A, B, C, D, Q. Для блокировки повторных срабатывания используется специальный комментарий. Уровень срабатывания равен 3.

7. Ввод системы координат, задающей направления главных осей поверхности.

$\forall_{EHKPQRSabcdefghikmnpqr}($прямкоорд$(K)$ & собствектпов$(E, p, K, (a, b, c))$ & собствектпов$(E, m, K, (d, e, f))$ & собствектпов$(E, q, K, (g, h, i))$ & $\neg(p - q = 0)$ & $\neg(p - m = 0)$ & $\neg(q - m = 0)$ & $n = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $r = \sqrt{g^2 + h^2 + i^2}$ & $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \rightarrow P -$ точка & $Q -$ точка & $R -$ точка & $S -$ точка & $(P, Q, R, S) = H$ & прямкоорд(H) & собствкоорд(H, E) & коорд$(P, K) = (0, 0, 0)$ & коорд(вектор$(PQ), K) = (a/k, b/k, c/k)$ & коорд(вектор$(PR), K) = (d/n, e/n, f/n)$ & коорд(вектор$(PS), K) = (g/r, h/r, i/r)$ & актив(коорд(E, H))))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", следующие три - обрабатываются проверочными операторами, последние три - выделены указателем "идентификатор". Посылки "собствектпов(E, X, K, Y)", означающие, что Y есть координаты в системе K собственного вектора поверхности второго порядка E, отвечающего собственному значению X, создаются приемами следующего пункта. Отсутствует посыка вида "собствкоорд(Z, E)". Прием вводит новые переменные P, Q, R, S, H. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCEHPQRSabcdefghikmnpqr}($прямкоорд$(K)$ & собствектпов$(E, p, K, (a, b, c))$ & собствектпов$(E, p, K, (d, e, f))$ & собствектпов$(E, q, K, (g, h, i))$ & $\neg(p - q = 0)$ & $m = ad + be + cf$ & $n = d^2 + e^2 + f^2$ & $r = \sqrt{g^2 + h^2 + i^2}$ & $A = (an - md)/n$ & $B = (bn - me)/n$ & $C = (cn - mf)/n$ & $k = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \rightarrow P -$ точка & $Q -$ точка & $R -$ точка & $S -$ точка & $(P, Q, R, S) = H$ & прямкоорд(H) & собствкоорд(H, E) & коорд$(P, K) = (0, 0, 0)$ & коорд(вектор$(PQ), K) = (A/k, B/k, C/k)$ & коорд(вектор$(PR), K) = (d/\sqrt{n}, e/\sqrt{n}, f/\sqrt{n})$ & коорд(вектор$(PS), K) = (g/r, h/r, i/r)$ & актив(коорд(E, H))))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", пятый - обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посыка вида "собствкоорд(Z, E)". Прием вводит новые переменные P, Q, R, S, H. Уровень срабатывания равен 3.

8. Определение собственных векторов поверхности.

   $\forall_{AEKPabcdefghpq}$(прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + pz + q = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & (собствзначение(A, u, v) & собствектор$(A, u, w)) = P \rightarrow$
   $\forall_{uvw}(P \rightarrow$ собствектпов$(E, u, K, w)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", третий - выделен указателем "идентификатор". Хотя бы два из коэффициентов d, e, f отличны от нуля. Перед обработкой последнего антецедента вводятся новые переменные A, u, v, w. Затем левая часть этого антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на описание, которой передается дополнительная посылка:

   $$A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}.$$

   Неизвестными задачи служат u, v, w. Ответом становится явное описание P множества собственных значений и собственных векторов матрицы A. Приемы, обеспечивающие решение таких задач, приводятся в главе, посвященной линейной алгебре. Уровень срабатывания данного приема равен 3. Чтобы использовать выведенную кванторную импликацию, созданы следующие дополнительные приемы:

   $\forall_{abcd}(\forall_x(x \in$ линкомбинации$(\{a\}) \rightarrow$ собствектпов$(b, c, d, x)) \leftrightarrow$
   собствектпов$(b, c, d, a))$

   $\forall_{abcde}(\forall_x(x \in$ линкомбинации$(\{a, d\}) \rightarrow$ собствектпов$(b, c, e, x)) \leftrightarrow$
   собствектпов(b, c, e, a) & собствектпов$(b, c, e, d))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к посылкам задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Уровень их срабатывания равен 0.

9. Определение канонической системы координат и канонического уравнения путем параллельного переноса начала координат.

   (a) Три квадрата в уравнении поверхности.

   $\forall_{ABCDEKQabcdefgmpqr}$(прямкоорд$(K)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) &
   $m = bcd^2 + ace^2 + abf^2 - 4abcg$ & $\neg(a = 0)$ & $p = -d/(2a)$ & $q = -e/(2b)$
   & $r = -f/(2c)$ & $\neg(b = 0)$ & $\neg(c = 0) \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка &
   $C -$ точка & $D -$ точка & $(A, B, C, D) = Q$ & прямкоорд(Q) &
   каноничкоорд(Q, E) & коорд$(A, K) = (p, q, r)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (1, 0, 0)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (0, 1, 0)$ & коорд(вектор$(AD), K) =$
   $(0, 0, 1)$ & коорд$(E, Q) = \mathrm{set}_{uvw}(4a^2bcu^2 + 4ab^2cv^2 + 4abc^2w^2 = m$ &
   $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Четвертый, восьмой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X, E)". Прием вводит новые переменные A, B, C, D, Q. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Два квадрата в уравнении поверхности.

$\forall_{ABCDEKQabcdfmpq}$(прямкоорд($K$) & коорд($E, K$) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cx + dy + ez + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $m = bc^2 + ad^2 - 4abf$ & $\neg(m = 0)$ & $p = -c/(2a)$ & $q = -d/(2b)$ & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $(A, B, C, D) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (p, q, 0)$ & коорд(вектор(AB)$, K$) $= (1, 0, 0)$ & коорд(вектор(AC)$, K$) $= (0, 1, 0)$ & коорд(вектор(AD)$, K$) $= (0, 0, 1)$ & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{uvw}(4a^2bu^2/m + 4ab^2v^2/m = 1$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

$\forall_{ABCDEKQabcdefgm}$(прямкоорд($K$) & коорд($E, K$) $= \mathrm{set}_{xzy}(ax^2 + by^2 + cx + dy + ez + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $m = bc^2 + ad^2 - 4abf$ & $\neg(m = 0)$ & $p = -c/(2a)$ & $q = -d/(2b)$ & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $(A, B, D, C) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (p, 0, q)$ & коорд(вектор(AB)$, K$) $= (1, 0, 0)$ & коорд(вектор(AC)$, K$) $= (0, 1, 0)$ & коорд(вектор(AD)$, K$) $= (0, 0, 1)$ & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{uvw}(4a^2bu^2/m + 4ab^2v^2/m = 1$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

$\forall_{ABCDEKQabcdefgm}$(прямкоорд($K$) & коорд($E, K$) $= \mathrm{set}_{zyx}(ax^2 + by^2 + cx + dy + ez + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $m = bc^2 + ad^2 - 4abf$ & $\neg(m = 0)$ & $p = -c/(2a)$ & $q = -d/(2b)$ & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $(A, D, C, B) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (0, q, p)$ & коорд(вектор(AB)$, K$) $= (1, 0, 0)$ & коорд(вектор(AC)$, K$) $= (0, 1, 0)$ & коорд(вектор(AD)$, K$) $= (0, 0, 1)$ & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{uvw}(4a^2bu^2/m + 4ab^2v^2/m = 1$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Четвертый, седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочнымии операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X, E)". Прием вводит новые переменные A, B, C, D, Q. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKQabcdfmpqr}$(прямкоорд($K$) & коорд($E, K$) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cx + dy + ez + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $m = bc^2 + ad^2 - 4abf$ & $\neg(e = 0)$ & $p = -c/(2a)$ & $q = -d/(2b)$ & $r = m/(4abe)$ & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0) \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $(A, B, C, D) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q, E) & коорд(A, K) $= (p, q, r)$ & коорд(вектор(AB)$, K$) $= (1, 0, 0)$ & коорд(вектор(AC)$, K$) $= (0, 1, 0)$ & коорд(вектор(AD)$, K$) $= (0, 0, 1)$ & коорд(E, Q) $= \mathrm{set}_{uvw}(au^2 + bv^2 + ew = 0$ & $u-$число & $v-$число & $w-$число))

$\forall_{ABCDEKQabcdfmpqr}$(прямкоорд($K$) & коорд($E,K$) $=$ set$_{xzy}$($ax^2+by^2+cx+dy+ez+f=0$ & x − число & y − число & z − число) & $m=bc^2+ad^2-4abf$ & ¬($e=0$) & $p=-c/(2a)$ & $q=-d/(2b)$ & $r=m/(4abe)$ & ¬($a=0$) & ¬($b=0$) → A − точка & B − точка & C − точка & D − точка & $(A,B,D,C)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд(A,K) $=(p,r,q)$ & коорд(вектор(AB)$,K$) $=(1,0,0)$ & коорд(вектор(AC)$,K$) $=(0,1,0)$ & коорд(вектор(AD)$,K$) $=(0,0,1)$ & коорд(E,Q) $=$ set$_{uvw}$($au^2+bv^2+ew=0$ & u−число & v−число & w−число))

$\forall_{ABCDEKQabcdfmpqr}$(прямкоорд($K$) & коорд($E,K$) $=$ set$_{zyx}$($ax^2+by^2+cx+dy+ez+f=0$ & x − число & y − число & z − число) & $m=bc^2+ad^2-4abf$ & ¬($e=0$) & $p=-c/(2a)$ & $q=-d/(2b)$ & $r=m/(4abe)$ & ¬($a=0$) & ¬($b=0$) → A − точка & B − точка & C − точка & D − точка & $(A,D,C,B)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд(A,K) $=(r,q,p)$ & коорд(вектор(AB)$,K$) $=(1,0,0)$ & коорд(вектор(AC)$,K$) $=(0,1,0)$ & коорд(вектор(AD)$,K$) $=(0,0,1)$ & коорд(E,Q) $=$ set$_{uvw}$($au^2+bv^2+ew=0$ & u−число & v−число & w−число))

Аналогично предыдущему, но проверочными операторами обрабатываются четвертый, восьмой и девятый антецеденты.

(c) Один квадрат в уравнении поверхности.

$\forall_{ABCDEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E,K) $=$ set$_{xyz}$($ax^2+bx+cy+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & ¬($a=0$) & ¬($c=0$) & $p=-b/(2a)$ & $q=(b^2-4ad)/(4ac)$ → A − точка & B − точка & C − точка & D − точка & $(A,B,C,D)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд(A,K) $=(p,q,0)$ & коорд(вектор(AB)$,K$) $=(1,0,0)$ & коорд(вектор(AC)$,K$) $=(0,1,0)$ & коорд(вектор(AD)$,K$) $=(0,0,1)$ & коорд(E,Q) $=$ set$_{uvw}$($au^2+cv=0$ & u − число & v − число & w − число))

$\forall_{ABCDEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E,K) $=$ set$_{xzy}$($ax^2+bx+cy+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & ¬($a=0$) & ¬($c=0$) & $p=-b/(2a)$ & $q=(b^2-4ad)/(4ac)$ → A − точка & B − точка & C − точка & D − точка & $(A,B,C,D)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд(A,K) $=(p,0,q)$ & коорд(вектор(AB)$,K$) $=(1,0,0)$ & коорд(вектор(AC)$,K$) $=(0,0,1)$ & коорд(вектор(AD)$,K$) $=(0,1,0)$ & коорд(E,Q) $=$ set$_{uvw}$($au^2+cv=0$ & u − число & v − число & w − число))

$\forall_{ABCDEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E,K) $=$ set$_{yxz}$($ax^2+bx+cy+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & ¬($a=0$) & ¬($c=0$) & $p=-b/(2a)$ & $q=(b^2-4ad)/(4ac)$ → A − точка & B − точка & C − точка & D − точка & $(A,B,C,D)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд(A,K) $=(q,p,0)$ & коорд(вектор(AB)$,K$) $=(0,1,0)$ & коорд(вектор(AC)$,K$) $=(1,0,0)$ & коорд(вектор(AD)$,K$) $=(0,0,1)$ & коорд(E,Q) $=$ set$_{uvw}$($au^2+cv=0$ & u − число & v − число & w − число))

$\forall_{ABCDEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E,K) $=$ set$_{yzx}$($ax^2+bx+cy+d=0$ & x − число & y − число & z − число) & ¬($a=0$) & ¬($c=0$) & $p=-b/(2a)$ & $q=(b^2-4ad)/(4ac)$ → A − точка & B − точка & C − точка & D − точка & $(A,B,C,D)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд(A,K) $=(q,0,p)$ & коорд(вектор(AB)$,K$) $=$

$(0,0,1)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (1,0,0)$ & коорд(вектор$(AD), K) =$ $(0,1,0)$ & коорд$(E,Q) = \mathrm{set}_{uvw}(au^2 + cv = 0$ & u – число & v – число & w – число))

$\forall_{ABCDEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{zxy}(ax^2 + bx +$ $cy + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $\neg(a = 0)$ & $\neg(c = 0)$ & $p = -b/(2a)$ & $q = (b^2 - 4ad)/(4ac) \rightarrow A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $(A,B,C,D) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд$(A,K) = (0,p,q)$ & коорд(вектор$(AB), K) =$ $(0,1,0)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (0,0,1)$ & коорд(вектор$(AD), K) =$ $(1,0,0)$ & коорд$(E,Q) = \mathrm{set}_{uvw}(au^2 + cv = 0$ & u – число & v – число & w – число))

$\forall_{ABCDEKQabcdpq}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{zyx}(ax^2 + bx +$ $cy + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $\neg(a = 0)$ & $\neg(c = 0)$ & $p = -b/(2a)$ & $q = (b^2 - 4ad)/(4ac) \rightarrow A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $(A,B,C,D) = Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд$(A,K) = (0,q,p)$ & коорд(вектор$(AB), K) =$ $(0,0,1)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (0,1,0)$ & коорд(вектор$(AD), K) =$ $(1,0,0)$ & коорд$(E,Q) = \mathrm{set}_{uvw}(au^2 + cv = 0$ & u – число & v – число & w – число))

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочнымии операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X, E)". Прием вводит новые переменные A, B, C, D, Q. Уровень срабатывания равен 3.

10. Усмотрение типа поверхности второго порядка.

   (a) Усмотрение эллипсоида.

   $\forall_{EKabcdefgm}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dx +$ $ey + fz + g = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $m = bcd^2 + ace^2 +$ $abf^2 - 4abcg$ & $0 < ab$ & $0 < ac$ & $0 < m \rightarrow$ эллипсоид(E))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "идентификатор". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка, явно указывающая тип поверхности E. Коэффициенты a, b, c не должны совпадать, так как усмотрение сферы обеспечивается другим приемом. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Усмотрение гиперболоида.

   $\forall_{EKabcdefgm}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey +$ $fz + g = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $m = bcd^2 + ace^2 + abf^2 -$ $4abcg$ & $0 < ab$ & $bc < 0$ & $m < 0 \rightarrow$ гиперболоид(E) & однополостный(E))

   $\forall_{EKabcdefgm}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey +$ $fz + g = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $m = bcd^2 + ace^2 + abf^2 -$ $4abcg$ & $0 < ab$ & $bc < 0$ & $0 < m \rightarrow$ гиперболоид(E) & двуполостный(E))

   Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - выделен указателем "идентификатор". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка, явно указывающая тип поверхности E. Уровень срабатывания равен 3.

$$\forall_{DEKabcdefpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ D = 4abc+def-af^2-be^2-cd^2\ \&\ \neg(D=0)\ \&\ g = 4ab+4bc+4ac-d^2-e^2-f^2\ \&\ (D(a+b+c) \le 0\ \vee\ g \le 0)\ \&\ 0 < \det\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix} \to \text{гиперболоид}(E)\ \&\ \text{однополостный}(E))$$

$$\forall_{DEKabcdefpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ D = 4abc+def-af^2-be^2-cd^2\ \&\ \neg(D=0)\ \&\ g = 4ab+4bc+4ac-d^2-e^2-f^2\ \&\ (D(a+b+c) \le 0\ \vee\ g \le 0)\ \&\ \det\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix} < 0 \to \text{гиперболоид}(E)\ \&\ \text{двуполостный}(E))$$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий и пятый - выделены указателем "идентификатор". Четвертый, шестой и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка, явно указывающая тип поверхности E. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Усмотрение параболоида.

$$\forall_{EKacdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+cx+dy+ez+f=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ \neg(a=0) \to \text{параболоид}(E)\ \&\ \text{круглый}(E))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка, явно указывающая тип поверхности E. Уровень срабатывания равен 2.

$$\forall_{EKabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cx+dy+ez+f=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ 0 < ab \to \text{параболоид}(E)\ \&\ \text{эллиптический}(E))$$

Аналогично предыдущему, но дополнительно проверяется, что коэффициенты a, b не совпадают.

$$\forall_{EKabcdef}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cx+dy+ez+f=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ ab < 0 \to \text{параболоид}(E)\ \&\ \text{гиперболический}(E))$$

Аналогично предыдущему.

(d) Усмотрение цилиндрической поверхности.

i. Круглый цилиндр.

$$\forall_{EKabcde}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ e = b^2+c^2-4ad$$

$\&\ \neg(a=0)\ \&\ 0<e \to \text{Цилиндр}(E)\ \&\ \text{круглый}(E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка, явно указывающая тип поверхности E. Уровень срабатывания равен 2.

ii. Эллиптический цилиндр.

$\forall_{EKabcdem}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cx+dy+e=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ m=bc^2+ad^2-4abe\ \&\ 0<ab\ \&\ 0<am \to \text{Цилиндр}(E)\ \&\ \text{эллиптический}(E))$

Аналогично предыдущему.

iii. Гиперболический цилиндр.

$\forall_{EKabcdem}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cx+dy+e=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ m=bc^2+ad^2-4abe\ \&\ ab<0\ \&\ \neg(m=0) \to \text{Цилиндр}(E)\ \&\ \text{гиперболический}(E))$

Аналогично предыдущему.

iv. Параболический цилиндр.

$\forall_{EKabcd}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+bx+cy+d=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \neg(a=0)\ \&\ \neg(c=0) \to \text{Цилиндр}(E)\ \&\ \text{параболический}(E))$

Аналогично предыдущему.

v. Усмотрение канонической системы координат цилиндра.

$\forall_{EKab}(\text{Цилиндр}(E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+by=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}) \to \text{каноничкоорд}(K,E))$

$\forall_{EKab}(\text{Цилиндр}(E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+by^2+c=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}) \to \text{каноничкоорд}(K,E))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X,E)". Уровень срабатывания равен 2.

(e) Усмотрение конической поверхности.

$\forall_{EKacdefg}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ ac<0\ \&\ cd^2+ce^2+af^2-4acg=0 \to \text{Конус}(E)\ \&\ \text{круглый}(E))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, последний - выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, явно указывающая тип поверхности E. Указатель "элемент(z)" разрешает идентификацию переменной z без учета порядка переменных связывающей приставки. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{EKabcdefg}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ 0<ab\ \&\ ac<0\ \&\ bcd^2+ace^2+abf^2-4abcg=0 \to \text{Конус}(E))$

Аналогично предыдущему, но проверочными операторами обрабатываются третий и четвертый антецеденты.

(f) Усмотрение двух плоскостей.

$\forall_{ABEKfgh}(f(x,y,z) = gh$ & коорд$(E,K) = \text{set}_{xyz}(f(x,y,z) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) \to A -\text{set}$ & $B -\text{set}$ & $A \cup B = E$ & коорд$(A,K) = \text{set}_{xyz}(g = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$)$ & коорд$(B,K) = \text{set}_{xyz}(h = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором разложения на множители "видумножение". Переменная f функциональная. Отсутствует посылка вида "каноничкоорд(X,E)". Каждое из выражений g,h содержит хотя бы одну из переменных x,y,z. В уравнении поверхности встречается член с квадратом переменной. Уровень срабатывания равен 4.

(g) Усмотрение плоскости.

$\forall_{Aabcd}(\neg(a^2 + b^2 + c^2 = 0)$ & коорд$(A,K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) \to$ Плоскость$(A))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид", первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2. Возможность срабатывания данного приема подготавливается предыдущим приемом, обеспечивавшим разложение левой части уравнения поверхности на множители,

(h) Регистрация в списке условий внешней задачи на описание результатов исследования поверхности второго порядка.

Этот пункт аналогичен соответствующему пункту для кривых. Все приемы имеют заголовок "замещениеусловий" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "исследовать". Они выполняют добавление к списку условий внешней задачи на описание группу посылок текущей задачи на исследование. Теорема приема имеет вид "замещениеусловий(A)", где A - вид посылки, образующей ядро указанной группы посылок. К ней добавляются утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. Уровень срабатывания приемов равен 7.

i. замещениеусловий(эллипсоид(a)).
   Переменная a - неизвестная внешней задачи на описание.
ii. замещениеусловий(сфера(a)).
iii. замещениеусловий(гиперболоид(a)).
iv. замещениеусловий(параболоид(a)).
v. замещениеусловий(Цилиндр(a)).
vi. замещениеусловий(Конус(a)).
vii. замещениеусловий(Плоскость(a)).
   Либо a - неизвестная внешней задачи на описание, либо имеется посылка вида "$x = a \cup b$", где x - неизвестная внешней задачи.
viii. замещениеусловий(круглый(a)).
ix. замещениеусловий(однополостный(a)).
x. замещениеусловий(двуполостный(a)).
xi. замещениеусловий(эллиптический(a)).

xii. замещениеусловий(гиперболический(a)).

xiii. замещениеусловий(параболический(a)).

xiv. замещениеусловий(равно(K набор($ABCD$))).
Существует посылка вида "каноничкоорд(K, X)", причем либо X - неизвестная внешней задачи на описание, либо имеется также посылка $Y = X \cup Z$, где Y - неизвестная внешней задачи.

xv. замещениеусловий(равно(коорд(A, K)b)).
Выражения b, K не содержат неизвестных. A - начало канонической системы координат исследуемой поверхности.

xvi. замещениеусловий(равно(коорд(вектор(AB),K)c)).
Выражения c, K не содержат неизвестных. A - начало канонической системы координат исследуемой поверхности, B - один из концов ее базисных векторов.

11. Переформулировка условия на тип поверхности через коэффициенты уравнения.

 (a) Эллипсоид.

$$\forall_{EKabcdefpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}) \rightarrow \text{эллипсоид}(E) \leftrightarrow 0 < (4abc+def-af^2-be^2-cd^2)(a+b+c)\ \&\ \det\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix} < 0\ \&\ 0 < 4ab+4bc+4ac-d^2-e^2-f^2)$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи, за исключением задач на описание, имеющих цель "исследовать". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

 (b) Гиперболоид.

$$\forall_{DEKabcdefpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ D = 4abc+def-af^2-be^2-cd^2\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}) \rightarrow \text{гиперболоид}(E)\ \&\ \text{двуполостный}(E) \leftrightarrow \neg(D=0)\ \&\ (D(a+b+c) \leq 0\ \vee\ 4ab+4bc+4ac-d^2-f^2-e^2 \leq 0)\ \&\ \det\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix} < 0)$$

$$\forall_{DEKabcdefpqrs}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ D = 4abc+def-af^2-be^2-cd^2\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}) \rightarrow \text{гиперболоид}(E)\ \&\ \text{однополостный}(E) \leftrightarrow \neg(D=0)\ \&\ (D(a+b+c) \leq 0\ \vee\ 4ab+4bc+4ac-d^2-f^2-e^2 \leq 0)\ \&\ 0 < \det\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix})$$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи, за исключением задач на описание, имеющих цель "исследовать". Первый и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Параболоид.

$\forall_{EKabcdefpqrs}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0$ & x – число & y – число & z – число$) \rightarrow$ параболоид(E) & эллиптический$(E) \leftrightarrow$

$$4abc+def-af^2-be^2-cd^2=0 \ \&\ \det\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix} < 0)$$

$\forall_{EKabcdefpqrs}$(прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0$ & x – число & y – число & z – число$) \rightarrow$ параболоид(E) & гиперболический$(E) \leftrightarrow$

$$4abc+def-af^2-be^2-cd^2=0 \ \&\ 0<\det\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix})$$

Аналогично случаю эллипсоида.

12. Ввод в рассмотрение координат вершины.

$\forall_{AEKabc}$(прямкоорд(K) & вершина(A,E) & гиперболоид$(E) \rightarrow a$ – число & b – число & c – число & коорд$(A,K)=(a,b,c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "вариант" разрешает замену символа "гиперболоид" на символы "эллипсоид", "параболоид". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Прием вводит новые параметры a,b,c. Уровень срабатывания равен 3.

13. Центр поверхности второго порядка.

(a) Единственность центра.

$\forall_{ABE}$(центр(A,E) & центр(B,E) & эллипсоид$(E) \rightarrow A=B)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" разрешает замену символа "эллипсоид" на "гиперболоид". Уровень срабатывания равен 0.

(b) Соотношение для координат центра поверхности.

$\forall_{AEKabcdefpqrsijk}$(прямкоорд$(K)$ & коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0$ & x – число & y – число &
z – число) & центр$(A,E) \rightarrow i$ – число & j – число & k – число &
коорд$(A,K)=(i,j,k)$ & $2ai+dj+ek+p=0$ &
$di+2bj+fk+q=0$ & $ei+fj+2ck+r=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Прием вводит новые параметры i,j,k. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{AEKabcdefpqrsijk}$(прямкоорд$(K)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0$ & x – число & y – число & z – число) & центр(A,E) & коорд$(A,K)=(i,j,k) \to$ $2ai+dj+ek+p=0$ & $di+2bj+fk+q=0$ & $ei+fj+2ck+r=0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

14. Оси и плоскости симметрии поверхности второго порядка.

    (a) Ось вращения.

    $\forall_{AE}$(Конус(E) & круглый(E) & осьвращения$(A,E) \to$ оськонуса$(A,E))$

    $\forall_{AE}$(цилиндр(E) & круглый(E) & осьвращения$(A,E) \to$ осьцилиндра$(A,E))$

    Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 0.

    (b) Перпендикуляр к оси симметрии эллипсоида либо гиперболоида, проведенный в плоскости симметрии через центр, является осью симметрии.

    $\forall_{ABCDEFPQRabcdefgpqr}$(прямкоорд$(K)$ & плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC),E)$ & гиперболоид(E) & осьсимметрии(прямая$(PQ),E)$ & центр(D,E) & коорд$(D,K)=(p,q,r)$ & направлпрямой(прямая$(PQ),K,t)$ & $t=(a,b,c)$ & $ad+be+cf=0$ & коорд(плоскость$(ABC),K)=\mathrm{set}_{xyz}(dx+ey+fz+g=0$ & x – число & y – число & z – число$) \to F$ – точка & осьсимметрии(прямая$(DF),E)$ & коорд(прямая$(DF),K)=\mathrm{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u-p,v-q,w-r),(bf-ce,cd-af,ae-bd))$ & u – число & v – число & w – число))

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем указатель "вариант" разрешает замену символа "гиперболоид" на "эллипсоид". Седьмой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - выделены указателем "идентификатор". В задаче пока не рассматривается ось симметрии поверхности E, отличная от PQ. Прием вводит новую переменную F. Уровень срабатывания равен 2.

    (c) Две плоскости симметрии пересекаются по оси симметрии.

    $\forall_{ABCEMNPQRabcdpqrs}$(эллипсоид$(E)$ & прямкоорд(K) & плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC),E)$ & плоскостьсимметрии(плоскость$(PQR),E)$ & прямая$(MN) \subseteq$ плоскость(ABC) & коорд(плоскость$(ABC),K)=\mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость$(PQR),K)=\mathrm{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0$ & u – число & v – число & w – число) & $ap+bq+cr=0 \to$ осьсимметрии(прямая$(MN),E))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем указатель "вариант" разрешает замену символа "эллипсоид" на символы "гиперболоид", "параболоид", "поввторпорядка". Три последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCEMNPQRabcdpqrs}$(эллипсоид($E$) & прямкоорд($K$) & плоскостьсимметрии(плоскость(ABC), E) & плоскостьсимметрии(плоскость(PQR), E) & коорд(плоскость(ABC), K) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) & $ap + bq + cr = 0 \rightarrow$ M – точка & N – точка & прямая(MN) $\subseteq$ плоскость(ABC) & прямая(MN) $\subseteq$ плоскость(PQR) & осьсимметрии(прямая(MN), E))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем указатель "вариант" разрешает замену символа "эллипсоид" на символы "гиперболоид", "параболоид", "поввторпорядка". Три последних антецедента выделены указателем "идентификатор". В задаче не рассматривается общая прямая плоскостей ABC и PQR. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Центр поверхности лежит на пересечении осей симметрии.

$\forall_{ABCDEFGHabcdefijkmnpqrt}$(поввторпорядка($E$) & прямкоорд($K$) & осьсимметрии(прямая($AB$), E) & осьсимметрии(прямая(CD), E) & осьсимметрии(прямая(FG), E) & направлпрямой(прямая(AB), K, t) & $t = (a, b, c)$ & направлпрямой(прямая(CD), K, i) & $i = (d, e, f)$ & направлпрямой(прямая(FG), K, j) & $j = (p, q, r)$ & $ad + be + cf = 0$ & $ap + bq + cr = 0$ & $dp + eq + fr = 0 \rightarrow H$ – точка & центр(H, E) & m – число & n – число & k – число & коорд(H, K) $= (m, n, k)$ & $H \in$ прямая(AB) & $H \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(FG))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем указатель "вариант" разрешает замену символа "поввторпорядка" на символы "гиперболоид", "эллипсоид". Шестой, восьмой и десятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "центр(X, E)". Прием вводит новые переменные H, M, N, K. Уровень срабатывания равен 3.

15. Диаметральная плоскость.

(a) Ввод уравнения диаметральной плоскости и прямой сопряженного направления.

$\forall_{EFKMabcdefijkpqrs}$(прямкоорд($K$) & коорд($E, K$) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + px + qy + rz + s = 0$ & x – число & y – число & z – число) & диаметрплоскость(F, E) & сопряжнаправления(F, M, E) $\rightarrow$ i – число & j – число & k – число & коорд(M, K) $=$ set_{xyz}(пропорцнаборы($(x, y, z), (i, j, k)$) & x – число & y – число & z – число) & коорд(F, K) $= \mathrm{set}_{uvw}((2ai + dj + ek)u + (di + 2bj + fk)v + (ei + fj + 2ck)w + pi + qj + rk = 0$ & u – число & v – число & w – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить ни уравнение плоскости F, ни уравнение прямой M. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Ввод в рассмотрение прямой сопряженного направления.

$\forall_{ABCDEPQ}$(диаметрплоскость(плоскость(ABC), E) $\to$ P – точка & Q – точка & сопряжнаправления(плоскость(ABC), прямая(PQ), E))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "сопряжнаправления(плоскость(ABC), X, E)". Прием вводит новые переменные P, Q. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Соотношение для направляющего вектора прямой, которой сопряжена данная диаметральная плоскость.

$\forall_{ABCDEFKMabcdefijkpqrs}$(прямкоорд($K$) & коорд($E, K$) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + px + qy + rz + s = 0$ & x – число & y – число & z – число) & диаметрплоскость(F, E) & коорд(F, K) $= \mathrm{set}_{uvw}(Au + Bv + Cw + D = 0$ & u – число & v – число & w – число) & сопряжнаправления(F, M, E) $\to$ i – число & j – число & k – число & коорд(M, K) $= \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x, y, z), (i, j, k)$) & x – число & y – число & z – число) & пропорцнаборы($(A, B, C, D), (2ai + dj + ek, di + 2bj + fk, ei + fj + 2ck, pi + qj + rk)$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Отсутствует посылка, задающая уравнение прямой M. Кроме посылки, идентифицированной с пятым антецедентом, а также посылки "актив(M)", упоминание о прямой M может встречаться только в посылке вида "направлпрямой(M, K, X)". Прием вводит новые переменные i, j, k. Уровень срабатывания равен 3.

16. Касательная плоскость.

(a) Ввод уравнения касательной плоскости к поверхности в заданной ее точки.

$\forall_{ABCEKabcgr}$(прямкоорд(K) & плоскость(ABC) – касательная к E & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + pz + q = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $D \in E$ & $D \in$ плоскость(ABC) & коорд(D, K) $= (m, n, k)$ $\to$ коорд(плоскость(ABC), K) $= \mathrm{set}_{xyz}((2am + dn + ek + g)x + (dm + 2bn + fk + h)y + (em + fn + 2ck + p)z + gm + hn + pk + 2q = 0$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый антецедент выделен указателем "усм", шестой - указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости ABC. В уравнение поверхности E входит хотя бы один нелинейный член. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Ввод в рассмотрение точки касания.

$\forall_{ABCDEKabc}$(плоскость(ABC) – касательная к E & прямкоорд(K) $\to$ a – число & b – число & c – число & $D \in$ плоскость(ABC) & $D \in E$ & коорд(D, K) $= (a, b, c)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. В задаче не рассматривается общая точка плоскости ABC и поверхности E.

Имеется посылка, задающая уравнение поверхности E. Прием вводит новые переменные a, b, c, D. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Ввод в рассмотрение координат точки касания.

$\forall_{ABCDEKabc}$(плоскость(ABC) – касательная к E & прямкоорд(K) & $D \in$ плоскость(ABC) & $D \in E \rightarrow a$ – число & b – число & c – число & коорд$(D, K) = (a, b, c)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки D. Имеется посылка, задающая уравнение поверхности E. Прием вводит новые переменные a, b, c. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Условие на касательную плоскость.

$\forall_{ABCEKabcgr}$(прямкоорд(K) & плоскость(ABC) – касательная к E & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + pz + q = 0$ & x – число & y – число & z – число) & $D \in E$ & $D \in$ плоскость(ABC) & коорд$(D, K) = (m, n, k)$ & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{XYZ}(PX+QY+RZ+S = 0$ & X – число & Y – число & Z – число) & $F = 2am + dn + ek + g$ & $G = dm + 2bn + fk + h$ & $H = em + fn + 2ck + p \rightarrow GP - FQ = 0$ & $HP - FR = 0$ & $HQ - GR = 0$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "усм". Последние пять антецедентов выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

(e) Плоскость, пересекащая поверхность второго порядка по двум прямолинейным образующим, является касательной.

$\forall_{ABCDEFGH}$(параболоид(E) & $E \cap$ плоскость(ABC) = прямая$(DH) \cup$ прямая$(FG) \rightarrow$ плоскость(ABC) – касательная к E)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Имеется посылка, определяющая уравнение поверхности E. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFGHI}$(гиперболоид(E) & $E \cap$ плоскость(ABC) = прямая$(DH) \cup$ прямая(FG) & $I \in$ прямая(DH) & $I \in$ прямая$(FG) \rightarrow$ плоскость(ABC) – касательная к E)

Аналогично предыдущему, но добавлены два последних антецеденты, выделенных указателем "усм".

$\forall_{ABCDEFGP}$(гиперболоид(E) & прямая$(DH) \subseteq E$ & прямая$(FG) \subseteq E$ & $P \in$ прямая(DH) & $P \in$ прямая$(FG) \rightarrow A$ – точка & B – точка & прямая$(DH) \subseteq$ плоскость(ABP) & прямая$(FG) \subseteq$ плоскость(ABP) & плоскость(ABP) – касательная к E)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "усм". Имеется посылка, определяющая уравнение поверхности E. В задаче не рассматривается плоскость, содержащая прямые DH и FG. Прием вводит новые переменные A, B. Уровень срабатывания равен 3.

17. Секущая плоскость.

    (a) Ввод двумерной прямоугольной системы координат для плоской кривой в трехмерном пространстве.

    $\forall_{ABCDEKabcdfghkmnpqrs}$(прямкоорд($K$) & коорд($E, K$) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $f(x, y, z)$ & x – число & y – число & z – число) & плоскбазис($(a, b, c, d), t, e, j$) & $t = (p, q, r)$ & $e = (m, n, k)$ & $j = (g, h, s) \to$ A – точка & B – точка & C – точка & $(A, B, C) = D$ & прямкоорд(D) & коорд(A, K) $= (p, q, r)$ & коорд(вектор(AB), K) $= (m, n, k)$ & коорд(вектор(AC), K) $= (g, h, s)$ & коорд(E, D) $= \mathrm{set}_{uv}(f(p + mu + gv, q + nu + hv, r + ku + sv)$ & u – число & v – число))

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия"; третий - обрабатывается пакетным синтезатором "плоскбазис". Входным данным здесь служит набор (a, b, c, d) коэффициентов уравнения плоскости, выходными данными - координаты начала координат и базисных векторов двумерной прямоугольной системы координат на данной плоскости. Последние три антецедента выделены указателем "идентификатор". Переменная f функциональная. Отсутствует посылка, определяющая уравнение множества точек E в двумерной системе координат. Прием вводит новые переменные A, B, C, D. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, применяемая в произвольных задачах на доказательство либо на исследование. Либо уравнение для множества точек E содержит неизвестные, либо указано, что оно включается в другое множество, уравнение которого содержит неизвестные. Выражение $f(x, y, z)$ должно содержать либо квадрат одной из переменных x, y, z, либо произведение двух таких переменных. Уровень срабатывания данной версии равен 5.

    $\forall_{ABCDEFKPQRabcdefghjkmnpqrs}$(прямкоорд($K$) & плоскость($PQR$) $\cap E = F$ & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xyz}(f(x, y, z)$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{uvw}(au + bv + cw + d = 0$ & u – число & v – число & w – число) & плоскбазис($(a, b, c, d), t, e, j$) & $t = (p, q, r)$ & $e = (m, n, k)$ & $j = (g, h, s) \to A$ – точка & B – точка & C – точка & $(A, B, C) = D$ & прямкоорд(D) & коорд(A, K) $= (p, q, r)$ & коорд(вектор(AB), K) $= (m, n, k)$ & коорд(вектор(AC), K) $= (g, h, s)$ & коорд(F, D) $= \mathrm{set}_{XY}(f(p + mX + gY, q + nX + hY, r + kX + sY)$ & X – число & Y – число))

    Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия"; пятый - обрабатывается пакетным синтезатором "плоскбазис". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". В задаче рассматривается центр либо фокус кривой F, причем отсутствует посылка, задающая уравнение данной кривой в двумерной системе координат. Выражение $f(x, y, z)$ содержит либо квадрат одной из переменных x, y, z, либо произведение двух таких переменных. Прием вводит новые переменные A, B, C, D. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, в которой условие на центр либо фокус отброшено, но требуется, чтобы хотя бы одно из уравнений для поверхности E либо плоскости PQR содержало неизвестные. В этой версии дополнительно выводятся условия на о.д.з выражений e, j. Уровень срабатывания данной версии тоже равен 5.

(b) Ввод уравнения плоского сечения поверхности, если на плоскости уже выбрана система координат.

$$\forall_{ABCEFGKMPQabcdefghi}(E \subseteq F \ \&\ Q = (A,B,C) \ \&\ \text{коорд}(E,Q) = M \ \&\ \text{коорд}(A,K) = (a,b,c) \ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB),K) = (d,e,f) \ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AC),K) = (g,h,i) \ \&\ \text{коорд}(F,K) = \text{set}_{xyz}(P(x,y,z) \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \rightarrow E \subseteq G \ \&\ F \cap \text{плоскость}(ABC) = G \ \&\ \text{коорд}(G,Q) = \text{set}_{uv}(P(a+du+gv, b+eu+hv, c+fu+iv) \ \&\ u - \text{число} \ \&\ v - \text{число}))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента, а также седьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражение M имеет заголовок "класс". Либо оно, либо уравнение поверхности F содержит неизвестные. Отсутствуют посылки вида "$E \subseteq X, X = F \cap Y, \text{коорд}(X,Q) = \text{set}(\ldots)$". Выражение F не имеет заголовка "плоскость". Прием вводит новую переменную G. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Центр кривой, получаемой при пересечении поверхности с плоскостью.

$$\forall_{ABCDEFKMabcdefijkpqrs}(\text{прямкоорд}(K) \ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + px + qy + rz + s = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \&\ F = \text{плоскость}(PQR) \cap E \ \&\ \text{центр}(D,F) \ \&\ \text{коорд}(D,K) = (m,n,k) \rightarrow A - \text{число} \ \&\ B - \text{число} \ \&\ C - \text{число} \ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(PQR),K) = \text{set}_{xyz}(Ax + By + Cz - Am - Bn - Ck = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \&\ \text{пропорцнаборы}((A,B,C), (2am + dn + ek + p, dm + 2bn + fk + q, em + fn + 2ck + r)))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, пятый - выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение плоскости PQR. Прием вводит новые переменные A, B, C. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Попытка найти две плоскости, в которых расположено пересечение двух поверхностей второго порядка.

$$\forall_{EFGKabcdefghijkmnp}(\text{прямкоорд}(K) \ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xyz}(f(x,y,z) = 0 \ \&\ g(x,y,z) = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \&\ f(x,y,z) = mh + i \ \&\ g(x,y,z) = nh + j \ \&\ \neg(m = 0) \ \&\ q = mj - ni \ \&\ q = au^2 + buv + cv^2 + du + ev + k \ \&\ p = b^2 - 4ac \ \&\ 0 < p \ \&\ 4ack + bde - ae^2 - cd^2 - kb^2 = 0 \rightarrow E = F \cup G \ \&\ \text{коорд}(F,K) = \text{set}_{xyz}(f(x,y,z) = 0 \ \&\ (b + \sqrt{p})u + 2cv + (be - 2cd)/\sqrt{p} + e = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \&\ \text{коорд}(G,K) = \text{set}_{xyz}(f(x,y,z) = 0 \ \&\ (b - \sqrt{p})u + 2cv + (2cd - be)/\sqrt{p} + e = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия"; пятый и девятый - обрабатывается проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию пары переменных u, v среди переменных x, y, z из условия вхождения их в выражение q. Отсутствует посылка, представляющая E в виде объединения двух множеств, и само выражение E не имеет заголовка "объединение". Каждое из выражений $f(x,y,z), g(x,y,z)$ имеет вхождение квадрата переменной связывающей приставки xyz, либо вхождение смешанного произведения. Выражения a, b, c, d, e, k, m, n не содержат переменных x, y, z, а выражение h - содержит. Прием вводит новые переменные F, G. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{EFGKabfghijmnq}$(прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ &
$g(x, y, z) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $f(x, y, z) =$
$mh + i$ & $g(x, y, z) = nh + j$ & $\neg(m = 0)$ & $q = mj - ni$ &
$(q = 0) = (u = a \ \vee \ u = b) \to E = F \cup G$ & коорд$(F, K) =$
$\mathrm{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ & $u = a$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) &
коорд$(G, K) = \mathrm{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ & $u = b$ & $x -$ число & $y -$ число
& $z -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "линия"; пятый - обрабатывается проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию переменной u среди переменных x, y, z из условия вхождения в выражение q. Левая часть седьмого антецедента разрешается относительно u с помощью вспомогательной задачи на описание. Отсутствует посылка, представляющая E в виде объединения двух множеств, и само выражение E не имеет заголовка "объединение". Переменные x, y, z, отличные от u, не входят в q. Каждое из выражений $f(x, y, z), g(x, y, z)$ имеет вхождение квадрата переменной связывающей приставки xyz, либо вхождение смешанного произведения. Выражения m, n не содержат переменных x, y, z, а выражение h - содержит. Прием вводит новые переменные F, G. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Определение уравнения прямолинейной образующей по уравнениям ее плоскости и поверхности.

$\forall_{ABEKPQRabcdfgh}$(прямая$(AB) \cup$ прямая$(CD) = E \cap$ плоскость(PQR) &
коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{uvw}(au + bv + cw + d = 0$ & $u -$ число &
$v -$ число & $w -$ число) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ &
$x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $\neg(a = 0)$ & $f(-(d + by + cz)/a, y, z) =$
$gh/m \to$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ &
$g = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(прямая$(CD), K) =$
$\mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $h = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) $\vee$
коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $h = 0$ & $x -$ число &
$y -$ число & $z -$ число) & коорд(прямая$(CD), K) =$
$\mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $g = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, второй и пятый - выделены указателем "идентификатор". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная f функциональная. Каждое из выражений g, h содержит хотя бы одну из переменных y, z. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить ни уравнение прямой AB, ни уравнение прямой CD. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABEKPQRabcdfgh}$(прямая$(AB) \subseteq E$ & прямая$(AB) \subseteq$ плоскость(PQR) &
коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{uvw}(au + bv + cw + d = 0$ & $u -$ число &
$v -$ число & $w -$ число) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ &
$x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $\neg(a = 0)$ & $f(-(d + by + cz)/a, y, z) =$

$gh/m \to \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0 \ \&\ g = 0 \ \&$
$x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \vee\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0 \ \&\ h = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}))$

$\forall_{ABEKPQRabcdfgh}(\text{прямая}(AB) \subseteq E \ \&\ \text{прямая}(AB) \subseteq \text{плоскость}(PQR) \ \&$
$\text{коорд}(\text{плоскость}(PQR), K) = \text{set}_{uvw}(au + bv + cw + d = 0 \ \&\ u - \text{число} \ \&$
$v - \text{число} \ \&\ w - \text{число}) \ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0 \ \&$
$x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \&\ \neg(a = 0) \ \&\ f(x, -(d + ax + cz)/b, z) =$
$gh/m \to \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0 \ \&\ g = 0 \ \&$
$x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \vee\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0 \ \&\ h = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}))$

$\forall_{ABEKPQRabcdfgh}(\text{прямая}(AB) \subseteq E \ \&\ \text{прямая}(AB) \subseteq \text{плоскость}(PQR) \ \&$
$\text{коорд}(\text{плоскость}(PQR), K) = \text{set}_{uvw}(au + bv + cw + d = 0 \ \&\ u - \text{число} \ \&$
$v - \text{число} \ \&\ w - \text{число}) \ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0 \ \&$
$x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \&\ \neg(a = 0) \ \&\ f(x, y, -(d + ax + by)/c, y, z) =$
$gh/m \to \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0 \ \&\ g = 0 \ \&$
$x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \vee\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0 \ \&\ h = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые два антецедента и четвертый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий и шестой - выделены указателем "идентификатор". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная f функциональная. Каждое из выражений g, h содержит хотя бы одну из переменных y, z. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания равен 5.

(f) Подстановка в уравнение поверхности координат точки прямой, включающейся в эту поверхность.

$\forall_{ABEKabcdefg}(A \subseteq E \ \&\ \text{параболоид}(E) \ \&\ \text{коорд}(E, K) =$
$\text{set}_{xyz}(g(x, y, z) = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \ \&$
$\text{коорд}(A, K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + a, v + b, w + c), (d, e, f))$
$\&\ u - \text{число} \ \&\ v - \text{число} \ \&\ w - \text{число}) \to g(-a, -b, -c) \ \&$
$g(-a + d, -b + e, -c + f) \ \&\ g(-a - d, -b - e, -c - f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Переменная g функциональная. Указатель "вариант" разрешает замену символа "параболоид" на "гиперболоид". Уровень срабатывания равен 4.

18. Усмотрение противоречия: левая часть уравнения разложена на два множителя.

$\forall_{EKfg}(\text{прямкоорд}(K) \ \&\ \text{параболоид}(E) \ \&\ \text{коорд}(E, K) =$
$\text{set}_{xyz}(f(x)g(y, z) = 0 \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ z - \text{число}) \to \text{ложь})$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Переменные f, g функциональные. Указатель "элемент" определяет идентификацию переменной x с произвольным элементом связывающей приставки. Указатель "вариант" разрешает замену символа "параболоид" на любой из символов "эллипсоид", "гиперболоид", "Конус". Уровень срабатывания равен 0.

Цилиндр

1. Ввод уравнения круглого цилиндра.

   $\forall_{ABEKabcdefr}$(Цилиндр(E) & осьцилиндра(прямая(AB), E) & прямкоорд(K) & коорд(прямая(AB), K) $=$ set_{xyz}(пропорцнаборы($(x+a, y+b, z+c), (d, e, f)$) & x – число & y – число & z – число) & круглый(E) $\to$ r – число & $0 < r$ & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{uvw}((d^2+e62+f^2)r-(e(c+w)-f(b+v))^2-(f(a+u)-d(c+w))^2-(d(b+v)-e(a+u))^2 = 0$ & u – число & v – число & w – число) & радиус(E) $= \sqrt{r}$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Прием вводит новый параметр r. Уровни срабатывания равны 3 и 5.

2. Ввод уравнения цилиндра по уравнению его направляющей и направляющему вектору образующей.

   $\forall_{ABEFKabcdfpqr}$(Цилиндр(E) & прямкоорд(K) & образующая(прямая(AB), E) & направляющая(F, E) & коорд(F, K) $= \mathrm{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ &
   $ax + by + cz + d = 0$ & x – число & y – число & z – число) &
   направлпрямой(прямая(AB), K, t) & $m = ap + bq + cr$ & $t = (p, q, r) \to$
   $\neg(m = 0)$ & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{uvw}(f(u - p(au + bv + cw + d)/m,$
   $v - q(au + bv + cw + d)/m, w - r(au + bv + cw + d)/m) = 0$ &
   u – число & v – число & w – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, шестой - обрабатывается пакетным синтезатором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная f функциональная. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Уровни срабатывания равны 3 и 7.

3. Образующая параллельна оси цилиндра.

   $\forall_{ABCDE}$(Цилиндр(E) & образующая(прямая(AB), E) &
   осьцилиндра(прямая(CD), E) $\to$ прямая(AB) $\parallel$ прямая(CD))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 2.

4. Ввод в рассмотрение уравнения направляющей цилиндра.

   $\forall_{AEK}$(направляющая(A, E) & Цилиндр(E) $\to$ актив(коорд(A, K)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "коорд(E, K)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражение "коорд(A, K)" в задаче не рассматривается. Уровень срабатывания равен 1.

5. Цилиндр, описанный около сферы.

(a) Радиус цилиндра, описанного около сферы.

$\forall_{EF}$(Цилиндр(E) & сфера(F) & E описана около $F \to$ радиус(E) $=$ радиус(F))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Ось цилиндра, описанного около сферы, проходит через центр сферы.

$\forall_{ABCEF}$(Цилиндр(E) & сфера(F) & E описана около $F \to A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & центр(A, F) & $A \in$ прямая(BC) & осьцилиндра(прямая(BC)$, E$))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "осьцилиндра(X, E)". Прием вводит новые переменные A, B, C. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Цилиндр, описанный около сферы - круглый.

$\forall_{EF}$(Цилиндр(E) & E описана около F & сфера(F) $\to$ круглый(E))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

Конус

1. Круглый конус.

(a) Ввод уравнения круглого конуса по его вершине и направляениям оси и образующей.

$\forall_{ABCDEFKabcdefghmnp}$(Конус($E$) & прямкоорд($K$) & оськонуса(прямая($BC$), E) & вершина(A, E) & образующая(прямая(DF)$, E$) & коорд(A, K) $=$ (d, e, f) & направлпрямой(прямая(BC)$, K, g$) & направлпрямой(прямая(DF)$, K, h$) & $g = (a, b, c)$ & $h = (m, n, p)$ & круглый(E) $\to$ коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xyz}(((x-d)a+(y-e)b+(z-f)c)^2\cdot(m^2+n^2+p^2)-(am+bn+cp)^2((x-d)^2+(y-e)^2+(z-f)^2)=0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Уровни срабатывания равны 2 и 6.

(b) Ввод уравнения конуса по вершине и направлению оси.

$\forall_{ABCDEKabcdefgp}$(Конус(E) & прямкоорд(K) & оськонуса(прямая(BC)$, E$) & вершина(A, E) & коорд(A, K) $= (d, e, f)$ & направлпрямой(прямая(BC), K, g) & $g = (a, b, c)$ & круглый(E) $\to p -$ число & $0 < p$ & $p < 1$ & $D -$ точка & образующая(прямая(AD)$, E$) & коорд(E, K) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}(((x-d)a+(y-e)b+(z-f)c)^2-p^2((x-d)^2+(y-e)^2+(z-f)^2)\cdot(a^2+b^2+c^2)=0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & cos(уголмежду(прямая(AD), прямая(BC))) $= p$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Прием вводит новые переменные p, D. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Углы между образующими конуса и его осью равны.

$\forall_{ABCDEPQ}$(Конус(E) & оськонуса(прямая(AB), E) &
образующая(прямая(CD), E) & образующая(прямая(PQ), E) &
круглый(E) $\rightarrow$ уголмежду(прямая(AB), прямая(CD)) $=$
уголмежду(прямая(AB), прямая(PQ)))

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "уголмежду(прямая(AB), прямая(CD))" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Обозначения прямых CD и PQ различны. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Плоскость, перпендикулярная касающейся конуса плоскости и содержащая образующую конуса, содержит ось конуса.

$\forall_{ABCEFGMNP}$(Конус(E) & плоскость(ABC) – касательная к E &
прямая(FG) $\subseteq E$ & $F \in$ плоскость(ABC) & $G \in$ плоскость(ABC) &
круглый(E) $\rightarrow P$ – точка & плоскость(FGP) $\perp$ плоскость(ABC) &
M – точка & N – точка & оськонуса(прямая(MN), E) &
прямая(MN) $\subseteq$ плоскость(FGP) & актив(коорд(плоскость(FGP), K)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "прямкоорд(K)". Отсутствует посылка вида "оськонуса(X, E)". Прием вводит новые переменные M, N, P. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCEFGMNP}$(Конус(E) & плоскость(ABC) – касательная к E &
прямая(FG) $\subseteq E$ & $F \in$ плоскость(ABC) & $G \in$ плоскость(ABC) &
оськонуса(прямая(MN), E) & круглый(E) $\rightarrow P$ – точка &
плоскость(FGP) $\perp$ плоскость(ABC) & прямая(MN) $\subseteq$ плоскость(FGP)
& актив(коорд(плоскость(FGP), K)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и два последних идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "усм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "прямкоорд(K)". В задаче не рассматривается плоскость, перпендикулярная плоскости ABC и проходящая через точки F, G. Прием вводит новую переменную P. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Определение оси симметрии конуса по двум различным образующим, лежащим в одной плоскости с осью симметрии.

$\forall_{ABCDEFGHKPQRabcdefghkmnpqrs}$(Конус($E$) & прямкоорд($K$) &
образующая(прямая(BC), E) & образующая(прямая(DF), E) &
вершина(A, E) & коорд(A, K) $= (a, b, c)$ & оськонуса(прямая(GH), E) &
прямая(GH) $\subseteq$ плоскость(PQR) & коорд(плоскость(PQR), K) $=$

$\text{set}_{xyz}(px+qy+rz+s=0$ & x – число & y – число & z – число) & направлпрямой(прямая$(BC), K, t)$ & $t=(d,e,f)$ & направлпрямой(прямая$(DF), K, j)$ & $j=(m,n,k)$ & ранг$(\begin{pmatrix} d & e & f \\ m & n & k \end{pmatrix}) = 2$ & $pd+qe+rf=0$ & $pm+qn+rk=0$ & $g=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & $h=\sqrt{m^2+n^2+k^2}$ & круглый$(E) \to$ коорд(прямая$(GH), K) = \text{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u-a, v-b, w-c)$, $(d/g+m/h, e/g+n/h, f/g+k/h))$ & u – число & v – число & w – число) $\vee$ коорд(прямая$(GH), K) = \text{set}_{uvw}$(пропорцнаборы$((u-a, v-b, w-c)$, $(d/g-m/h, e/g-n/h, f/g-k/h))$ & u – число & v – число & w – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов, а также седьмой, восьмой и последний антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Десятый и двенадцатый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой GH. Уровень срабатывания приема равен 5.

(f) Ось симметрии конуса принадлежит плоскости, перпендикулярной к общей плоскости двух различных образующих и делящей пополам угол между этими образующими.

$\forall_{ABCDEKPQRSabcdefghjmnst}$(прямкоорд$(K)$ & Конус(E) & образующая(прямая$(AB), E)$ & образующая(прямая$(CD), E)$ & вершина(P, E) & коорд$(P, K) = (g, h, s)$ & направлпрямой(прямая(AB), $K, t)$ & $t=(a,b,c)$ & направлпрямой(прямая$(CD), K, j)$ & $j=(d,e,f)$ & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}) = 2$ & $m=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $n=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & круглый$(E) \to Q$–точка & R–точка & S–точка & оськонуса(прямая(PS), $E)$ & прямая$(PS) \subseteq$ плоскость(PQR) & (коорд(плоскость$(PQR), K) = \text{set}_{xyz}((a/m-d/n)(x-g)+(b/m-e/n)(y-h)+(c/m-f/n)(z-s)=0$ & x – число & y – число & z – число) $\vee$ коорд(плоскость$(PQR), K) = \text{set}_{xyz}((a/m+d/n)(x-g)+(b/m+e/n)(y-h)+(c/m+f/n)(z-s)=0$ & x – число & y – число & z – число)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов, а также последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой и девятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "оськонуса(X, E)". Прием вводит новые переменные P, Q, R. Выводимая дизъюнкция снабжается кооментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEKMNPQRabcdefghjmnst}$(прямкоорд$(K)$ & Конус(E) & образующая(прямая$(AB), E)$ & образующая(прямая$(CD), E)$ & вершина(P, E) & коорд$(P, K) = (g, h, s)$ & направлпрямой(прямая(AB), $K, t)$ & $t=(a,b,c)$ & направлпрямой(прямая$(CD), K, j)$ & $j=(d,e,f)$ & ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}) = 2$ & $m=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $n=\sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & оськонуса(прямая$(MN), E)$ & круглый$(E) \to Q$ – точка & R – точка & прямая$(MN) \subseteq$ плоскость(PQR) & (коорд(плоскость$(PQR), K) =$ $\text{set}_{xyz}((a/m-d/n)(x-g)+(b/m-e/n)(y-h)+(c/m-f/n)(z-s)=$

0 & x – число & y – число & z – число) $\vee$ коорд(плоскость(PQR), K) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}((a/m+d/n)(x-g)+(b/m+e/n)(y-h)+(c/m+f/n)(z-s) = 0$ & x – число & y – число & z – число)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов, а также два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой и девятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Прием вводит новые переменные Q, R. Уровень срабатывания равен 5.

(g) Ось симметрии конуса принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла, образованного двумя различными касательными плоскостями к конусу.

$\forall_{ABCDEFGKMNPQRabcdmnpqrs}$(прямкоорд($K$) & Конус($E$) & плоскость($ABC$) – касательная к E & плоскость(DFG) – касательная к E & коорд(плоскость(ABC), K) $= \mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DFG), K) $=$ $\mathrm{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0$ & u – число & v – число & w – число) & $m=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $n=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}\right)=2$ & круглый(E) $\rightarrow$ M – точка & N – точка & P – точка & Q – точка & R – точка & оськонуса(прямая(MN), E) & прямая(MN) $\subseteq$ плоскость(PQR) & (коорд(плоскость(PQR), K) $=$ $\mathrm{set}_{XYZ}((a/m-p/n)X+(b/m-q/n)Y+(c/m-r/n)Z+d/m-s/n=0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\vee$ коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{XYZ}((a/m+p/n)X+(b/m+q/n)Y+(c/m+r/n)Z+d/m-s/n=0$ & X – число & Y – число)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента, а также последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "оськонуса(X, E)". Прием вводит новые переменные M, N, P, Q, R. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEFGKMNPQRabcdmnpqrs}$(прямкоорд($K$) & Конус($E$) & $n=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ & плоскость(ABC) – касательная к E & плоскость(DFG) – касательная к E & коорд(плоскость(ABC), K) $=$ $\mathrm{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость(DFG), K) $= \mathrm{set}_{uvw}(pu+qv+rw+s=0$ & u – число & v – число & w – число) & $m=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}\right)=2$ & оськонуса(прямая(MN), E) & круглый(E) $\rightarrow$ P – точка & Q – точка & R – точка & прямая(MN) $\subseteq$ плоскость(PQR) & (коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{XYZ}((a/m-p/n)X+(b/m-q/n)Y+(c/m-r/n)Z+d/m-s/n=0$ & X – число & Y – число & Z – число) $\vee$ коорд(плоскость(PQR), K) $= \mathrm{set}_{XYZ}((a/m+p/n)X+(b/m+q/n)Y+(c/m+r/n)Z+d/m-s/n=0$ & X – число & Y – число)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента, а также четвертый, пятый и два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Прием вводит новые переменные P, Q, R. Уровень срабатывания равен 5.

(h) Проекция оси конуса на касательную плоскость является образующей конуса.

$\forall_{ABCDEFPQ}$(оськонуса(прямая(AB), E) & Конус(E) & плоскость(CDF) – касательная к E & круглый(E) $\rightarrow$ P – точка & Q – точка & образующая(прямая(PQ), E) & прямая(PQ) = проекция(прямая(AB), плоскость(CDF)))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет идентификацию посылки "прямкоорд(K)". Нормализатор "нормкоорд" находит уравнения прямой AB и плоскости CDF относительно системы координат K. Прием вводит новые переменные P, Q. Для блокировки повторных выводов используется комментарий "образующая". Уровень срабатывания равен 7.

(i) Конус, описанный около сферы.

$\forall_{ABCEF}$(Конус(E) & сфера(F) & E описана около F & вершина(A, E) $\rightarrow$ B – точка & C – точка & центр(B, F) & оськонуса(прямая(AB), E) & образующая(прямая(AC), E) & sin(уголмежду(прямая(AC), прямая(AB)))$l(AB)$ = радиус(F) & актив(коорд(прямая(AC), K)) & актив(коорд(прямая(AB), K)) & круглый(E))

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Указатель "контекст" определяет идентификацию посылки "прямкоорд(K)". Отсутствует посылка вида "оськонуса(X, E)". Прием вводит новые переменные B, C. Уровень срабатывания равен 3.

2. Ввод уравнения конуса по заданным координатам вершины и уравнению направляющей.

$\forall_{AEFKMNPQRabcdefghjkmnt}$(Конус($E$) & прямкоорд($K$) & вершина($A, E$) & направляющая($F, E$) & коорд($A, K$) = (a, b, c) & коорд(F, K) = $\mathrm{set}_{xyz}(dx^2+ey^2+fz^2+mxy+nxz+kyz+gx+hy+tz+j=0$ & $px+qy+rz+s=0$ & x – число & y – число & z – число) & $M=(x-a)p+(y-b)q+(z-c)r$ & $N=s+ap+bq+cr$ & $P=aM-N(x-a)$ & $Q=bM-N(y-b)$ & $R=cM-N(z-c)$ $\rightarrow$ коорд(E, K) = $\mathrm{set}_{xyz}(dP^2+eQ^2+fR^2+mPQ+nPR+kQR+gPM+hQM+tRM+jM^2=0$ & x – число & y – число & z – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Сумма в левой части выводимого уравнения конуса обрабатывается нормализатором раскрывания скобок. Хотя бы один из коэффициентов d, e, f, k, m, n ненулевой; хотя бы один из коэффициентов p, q, r ненулевой. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Уровень срабатывания равен 4.

3. Условие на коэффициенты уравнения конуса.

$\forall_{EKabcdefpqrs}$(прямкоорд(K) & Конус(E) & коорд(F, K) = $\mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+px+qy+rz+s=0$ & x – число & y – число & z – число) $\rightarrow$

$$\det(\begin{pmatrix} 2a & d & e & p \\ d & 2b & f & q \\ e & f & 2c & r \\ p & q & r & 2s \end{pmatrix}) = 0)$$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уравнение конуса содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 6.

4. Ввод образующей конуса, получающейся при пересечении с заданной плоскостью.

   $\forall_{ABCEKPQRabcfkmnpqrs}$(Конус$(E)$ & вершина(A, E) & образующая(прямая(BC), $E)$ & прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(E, K) =$ $\text{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ & x – число & y – число & z – число) & прямая$(BC) \subseteq$ плоскость(PQR) & коорд(плоскость$(PQR), K) =$ $\text{set}_{uvw}(pu + qv + rw + s = 0$ & u – число & v – число & w – число) $\to$ m – число & n – число & k – число & $f(a + m, b + n, c + k) = 0$ & $pm + qn + rk = 0$ & коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{XYZ}$(пропорцнаборы($(X - a,$ $Y - b, Z - c), (m, n, k))$ & X – число & Y – число & Z – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента, а также шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой BC. Прием вводит новые переменные m, n, k. Уровень срабатывания равен 3.

5. Прямая, лежащая на конусе, является его образующей.

   $\forall_{ABE}$(прямая$(AB) \subseteq E$ & Конус$(E) \to$ образующая(прямая$(AB), E)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 2.

6. Точка на образующей принадлежит конусу.

   $\forall_{ABCEKabcfkmn}$(Конус(E) & образующая(прямая$(AB), E)$ & вершина(C, E) & коорд$(C, K) = (a, b, c)$ & направлпрямой(прямая$(AB), K, t)$ & $t = (m, n, k)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xyz}(f(x, y, z) = 0$ & x – число & y – число & z – число) $\to$ $f(a + m, b + n, c + k)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента, а также седьмой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, четвертый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 4 и 7.

7. Вершина конуса принадлежит его образующей.

   $\forall_{ABCE}$(Конус(E) & образующая(прямая$(BC), E)$ & вершина$(A, E) \to$ $A \in$ прямая(BC))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 1.

8. Определение координат вершины конуса, заданного уравнением.

   $\forall_{AEKabcdefg}$(вершина(A,E) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & Конус(E) & прямкоорд$(K) \rightarrow$ коорд$(A,K) = (-d/(2a), -e/(2b), -f/(2c)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{AEKabcdefg}$(Конус(E) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число) & прямкоорд$(K) \rightarrow$ $A-$ точка & вершина(A,E) & коорд$(A,K) = (-d/(2a), -e/(2b), -f/(2c)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "вершина(X,E)". Прием вводит новую переменную A. Уровень срабатывания равен 3.

9. Вершина конуса принадлежит его оси.

   $\forall_{ABCE}$(Конус(E) & оськонуса(прямая$(BC), E)$ & вершина$(A,E) \rightarrow$ $A \in$ прямая$(BC))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 1.

10. Ввод в рассмотрение вершины конуса как общей точки двух образующих.

    $\forall_{ABCDEFpqr}$(Конус(E) & образующая(прямая$(AB), E)$ & образующая(прямая$(CD), E)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow F-$ точка & вершина(F,E) & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $p-$ число & $q-$ число & $r-$ число & коорд$(F,K) = (p,q,r))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "вершина(X,E)". Прием вводит новые переменные p, q, F. Уровень срабатывания равен 3.

11. Ввод в рассмотрение вершины конуса как общей точки его образующей и оси.

    $\forall_{ABCDEFpqr}$(Конус(E) & образующая(прямая$(AB), E)$ & оськонуса(прямая$(CD), E)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow F-$ точка & вершина(F,E) & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $p-$ число & $q-$ число & $r-$ число & коорд$(F,K) = (p,q,r))$

    Аналогично предыдущему.

12. Определение направления оси конуса, если известны две образующих и направление оси симметрии, перпендикулярной этим образующим.

    $\forall_{ABCDEKMNPQabcdefmnpqr}$(Конус$(E)$ & прямкоорд(K) & образующая(прямая$(AB), E)$ & образующая(прямая$(CD), E)$ & осьсимметрии(прямая$(MN), E)$ & направлпрямой(прямая$(AB), K, t)$ & $t = (a,b,c)$ & направлпрямой(прямая$(CD), K, k)$ & $k = (d,e,f)$ & направлпрямой(прямая$(MN), K, j)$ & $j = (p,q,r)$ & ранг$\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\right) = 2$ &

$ap + bq + cr = 0$ & $dp + eq + fr = 0$ & $m = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $n = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \rightarrow$ P – точка & Q – точка & оськонуса(прямая(PQ), E) & (направлпрямой(прямая(PQ), K, $(a/m - d/n, b/m - e/n, c/m - f/n)$) $\vee$ направлпрямой(прямая(PQ), K, $(a/m + d/n, b/m + e/n, c/m + f/n)$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой, восьмой и десятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "оськонуса(X, E)". Прием вводит новые переменные P, Q. Уровень срабатывания приема равен 4.

13. Ввод вспомогательной прямоугольной системы координат и уравнения в этой системе координат направляющей конуса, если известны ось конуса и перпендикулярная ей ось симметрии.

$\forall_{ABCDEFGKPQRSabcdefijmnkpqr}$(Конус($E$) & оськонуса(прямая($AB$), E) & осьсимметрии(прямая(CD), E) & прямкоорд(K) & вершина(G, E) & направлпрямой(прямая(AB), K, t) & $t = (a, b, c)$ & направлпрямой(прямая(CD), K, s) & $s = (d, e, f)$ & $p = bf - ce$ & $q = cd - af$ & $r = ae - bd$ & $m = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $n = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $k = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \rightarrow$ P – точка & R – точка & S – точка & коорд(вектор(GP), K) $= (d/m, e/m, f/m)$ & коорд(вектор(GR), K) $=$ $(p/k, q/k, r/k)$ & коорд(вектор(GS), K) $= (a/n, b/n, c/n)$ & $(G, P, R, S) = Q$ & прямкоорд(Q) & направляющая(F, E) & i – число & j – число & $0 < i$ & $0 < j$ & коорд(F, Q) $= \text{set}_{xyz}(z = 1$ & $ix^2 + jy^2 = 1$ & x – число & y – число & z – число) & актив(коорд(F, K)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой и восьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки вида "направляющая(X, E)". Прием вводит новые переменные P, Q, R, S, F, i, j. Уровень срабатывания приема равен 5.

14. Усмотрение противоречия: уравнение конуса не содержит одной из переменных.

$\forall_{EKf}$(Конус(E) & прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \text{set}_{xyz}(f(x, y) = 0$ & x – число & y – число & z – число) $\rightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Переменная f функциональная. Указатель "элемент" разрешает идентификацию переменной z с произвольным элементом сваязывающей приставки. Уровень срабатывания приема равен 1.

Эллипсоид

1. Ввод уравнения эллипсоида с заданными координатами центра и осью симметрии.

$\forall_{ABCEKPQRSabcdefgmnpqrt}$(эллипсоид($E$) & прямкоорд($K$) & осьсимметрии(прямая($AB$), E) & центр(C, E) & коорд(C, K) $= (a, b, c)$ & направлпрямой(прямая(AB), K, t) & Плоскбазис(t, m, n) & $t = (d, e, f)$ &

$g = \sqrt{d^2+e^2+f^2} \rightarrow P$ – точка & Q – точка & S – точка & $(C,P,Q,S) = R$ & прямкоорд(R) & коорд(вектор$(CP),K) = m$ & коорд(вектор$(CQ),K) = n$ & коорд(вектор$(CS),K) = (d/g, e/g, f/g)$ & p – число & q – число & r – число & $0 < p$ & $0 < q$ & $0 < r$ & коорд$(E,R) = \mathrm{set}_{xyz}(x^2/p^2{+}y^2/q^2{+}z^2/r^2 = 1$ & x–число & y–число & z–число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Синтезатор "Плоскбазис(t,m,n)" получает в качестве входного данного координаты t направляющего вектора нормали к плоскости и выдает координаты m,n двух единичных ортогональных друг другу векторов, лежащих в этой плоскости. Задача не имеет посылки, определяющей уравнение поверхности E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные P,Q,R,S,p,q,r. Уровень срабатывания равен 4.

2. Ввод уравнения эллипсоида по направлениям двух осей симметрии и координатам центра.

   $\forall_{ABCEGHKMNabcdefghjkmnt}$(эллипсоид$(E)$ & прямкоорд(K) & осьсимметрии(прямая$(AB),E)$ & центр(C,E) & осьсимметрии(прямая$(DI),E)$ & направлпрямой(прямая$(AB),K,t)$ & $t = (a,b,c)$ & направлпрямой(прямая$(DI),K,j)$ & $j = (d,e,f)$ & $g = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ & $h = \sqrt{d^2+e^2+f^2}$ & $ad+be+cf = 0 \rightarrow M$ – точка & N – точка & G– точка & коорд(вектор$(CM),K) = (a/g, b/g, c/g)$ & коорд(вектор$(CN),K) = (d/h, e/h, f/h)$ & коорд(вектор$(CG),K) = ((bf-ce)/(gh), (cd-af)/(gh), (ae-bd)/(gh))$ & $(C,M,N,G) = H$ & прямкоорд(H) & m – число & n – число & k – число & $0 < m$ & $0 < k$ & $0 < n$ & коорд$(E,H) = \mathrm{set}_{uvw}(u^2/m^2 + v^2/k^2 + w^2/n^2 = 1$ & u – число & v – число & w – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой и восьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки, определяющей уравнение поверхности E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные M,N,G,H,k,m,n. Уровень срабатывания равен 3.

3. Ввод уравнения эллипсоида вращения с заданной осью вращения.

   $\forall_{ABCEKabcdefmnpq}$(эллипсоид$(E)$ & круглый(E) & прямкоорд(K) & осьвращения(прямая$(AB),E)$ & направлпрямой(прямая$(AB),K,q)$ & $q = (d,e,f)$ & $p = d^2+e^2+f^2 \rightarrow m$ – число & n – число & $0 < m$ & $0 < n$ & a – число & b – число & c – число & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{uvw}(n^2((e(w-c)-f(v-b))^2 + (f(u-a)-d(w-c))^2 + (d(v-b)-e(u-a))^2) + m^2(d(u-a)+e(v-b)+f(w-c))^2 - m^2n^2p^2 = 0$ & u – число & v – число & w – число) & C – точка & центр(C,E) & коорд$(C,K) = (a,b,c)$ & высота$(E) = 2n$ & радиус$(E) = m)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, шестой и седьмой - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Прием вводит новые переменные a, b, c, m, n, C. Уровень срабатывания равен 3.

4. Определение центра по двум противоположным вершинам.

   $\forall_{ABCDEKPabcdef}$(вершина(A, E) & вершина(B, E) & эллипсоид(E) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & осьсимметрии(прямая(CD), $E)$ & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & разныеточки$(A, B) \rightarrow$ центр(P, E) & коорд$(P, K) = ((a+d)/2, (b+e)/2, (c+f)/2))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента и шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор", седьмой и восьмой - указателем "усм". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "цетр(X, E)". Прием вводит новую переменную P. Уровень срабатывания равен 1.

5. Вершина эллипсоида принадлежит эллипсоиду.

   $\forall_{AE}$(вершина(A, E) & эллипсоид$(E) \rightarrow A \in E)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

6. Центр эллипсоида принадлежит его оси симметрии.

   $\forall_{ABCEK}$(прямкоорд(K) & эллипсоид(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E) \rightarrow$ C – точка & центр(C, E) & $C \in$ прямая(AB) & a – число & b – число & c – число & коорд$(C, K) = (a, b, c))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "цетр(X, E)". Прием вводит новые переменные C, a, b, c. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABCE}$(эллипсоид(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & центр$(C, E) \rightarrow C \in$ прямая$(AB))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 1.

7. Отождествление осей симметрии.

   $\forall_{ABCDEGHKMNabcdefijpqr}$(эллипсоид$(E)$ & прямкоорд(K) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & осьсимметрии(прямая$(CD), E)$ & осьсимметрии(прямая$(GH), E)$ & осьсимметрии(прямая$(MN), E)$ & разныепрямые(прямая(MN), прямая(AB)) & разныепрямые(прямая(MN), прямая(CD)) & направлпрямой(прямая$(AB), K, t)$ & $t = (a, b, c)$ & направлпрямой(прямая$(CD), K, j)$ & $j = (d, e, f)$ & направлпрямой(прямая$(GH), K, i)$ & $i = (p, q, r)$ & $ap + bq + cr = 0$ & $dp + eq + fr = 0$ & $ad + be + cf = 0 \rightarrow$ прямая(GH) = прямая$(MN))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Девятый, одиннадцатый и тринадцатый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

8. Разбор случаев для свободного члена.

   $\forall_{EKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xyz}$($ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ &
   x – число & y – число & z – число) & $0 < a$ & $0 < b$ & $0 < c \rightarrow$
   $d < 0 \ \vee \ d = 0 \ \vee \ 0 < d$ & $E = \emptyset$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Такая цель означает, что требуется исследовать поверхность, заданную своим уравнением. Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида "эллипсоид(E)" либо "сфера(E)". Проверочные операторы не усматривают истинность неравенства $0 < d$ либо $d < 0$. Выражение d не тождественно нулевое. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

9. Усмотрение точки.

   $\forall_{EKabc}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xyz}$($ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ & x – число
   & y – число & z – число) & $0 < a$ & $0 < b$ & $0 < c \rightarrow A$ – точка &
   $\{A\} = E$ & коорд(A, K) $= (0, 0, 0)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "эллипсоид". Три последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида $E = \{X\}$. Уровень срабатывания равен 5.

Гиперболоид

1. Ввод уравнения гиперболоида по заданным центру и двум осям симметрии.

   $\forall_{ABCDEFKMPQRSabcdefghkmn}$(гиперболоид($E$) & прямкоорд($K$) &
   двуполостный(E) & центр(A, E) & осьсимметрии(прямая(PQ)$, E$) &
   осьсимметрии(прямая(RS)$, E$) & $M \in E$ & $M \in$ прямая(PQ) &
   направлпрямой(прямая(PQ)$, K, t$) & $t = (d, e, f)$ &
   направлпрямой(прямая(RS)$, K, j$) & $j = (a, b, c)$ & $ad + be + cf = 0$
   & $g = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \rightarrow B$ – точка & C – точка
   & D – точка & коорд(вектор(AB)$, K$) $= (a/h, b/h, c/h)$ &
   коорд(вектор(AC)$, K$) $= ((bf - ce)/(gh), (cd - af)/(gh), (ae - bd)/(gh))$
   & коорд(вектор(AD)$, K$) $= (d/g, e/g, f/g)$ & $(A, B, C, D) = F$ &
   прямкоорд(F) & m – число & n – число & k – число & $0 < m$ & $0 < n$
   & $0 < k$ & коорд(E, F) $=$ set$_{uvw}$($u^2/m^2 + v^2/n^2 - w^2/k^2 + 1 = 0$ & u – число
   & v – число & w – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые семь антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Восьмой антецедент выделен указателем "усм". Девятый и одиннадцатый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки, определяющей уравнение поверхности E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные B, C, D, F, m, n, k. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFKPQRSabcdefghkmnpqr}$(гиперболоид($E$) & прямкоорд($K$) &
однополостный(E) & центр(A, E) & осьсимметрии(прямая(PQ), E) &
осьсимметрии(прямая(RS), E) & непересек(E, прямая(PQ)) &
направлпрямой(прямая(PQ), K, t) & $t = (d, e, f)$ &
направлпрямой(прямая(RS), K, j) & $j = (a, b, c)$ & $ad + be + cf = 0$
& $g = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \rightarrow B$ – точка & C – точка
& D – точка & коорд(вектор(AB), K) $= (a/h, b/h, c/h)$ &
коорд(вектор(AC), K) $= ((bf - ce)/(gh), (cd - af)/(gh), (ae - bd)/(gh))$
& коорд(вектор(AD), K) $= (d/g, e/g, f/g)$ & $(A, B, C, D) = F$ &
прямкоорд(F) & m – число & n – число & k – число & $0 < m$ & $0 < n$
& $0 < k$ & коорд(E, F) $= \mathrm{set}_{uvw}(u^2/m^2 + v^2/n^2 - w^2/k^2 - 1 = 0$ & u – число
& v – число & w – число))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Седьмой антецедент обрабатывается проверочным оператором. Восьмой и десятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки, определяющей уравнение поверхности E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные B, C, D, F, m, n, k. Уровень срабатывания равен 3.

2. Ввод главной оси симметрии однополостного гиперболоида по двум пересекающимся прямолинейным образующим.

$\forall_{ABCDEKabcdefghkmnpqr}$(гиперболоид($E$) & однополостный($E$) &
прямая(AB) $\subseteq E$ & прямая(CD) $\subseteq E$ & прямкоорд(K) &
коорд(прямая(AB), K) $= \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы($(x + a, y + b, z + c), (d, e, f)$)
& x – число & y – число & z – число) & коорд(прямая(CD), K) =
set_{uvw}(пропорцнаборы($(u + g, v + h, w + k), (p, q, r)$) & u – число & v – число
& w – число) & ранг($\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}$) $= 2$ & det($\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \\ g - a & h - b & k - c \end{pmatrix}$) $= 0$
& $m = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $n = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \rightarrow P$ – точка & Q – точка &
осьсимметрии(прямая(PQ), E) & непересек(прямая(PQ), E) &
(направлпрямой(прямая(PQ), $K, (d/m + p/n, e/m + q/n, f/m + r/n)$) $\vee$
направлпрямой(прямая(PQ), $K, (d/m - p/n, e/m - q/n, f/m - r/n)$)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, остальные - выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки, задающей уравнение поверхности E через известные параметры. Отсутствует посылка вида "осьсимметрии(X, E)", для которой усматривается непересечение прямой X с поверхностью E. Прием вводит новые переменные P, Q. Уровень срабатывания равен 2.

3. Вершина двуполостного гиперболоида принадлежит гиперболоиду.

$\forall_{AE}$(вершина(A, E) & гиперболоид(E) $\rightarrow A \in E$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

4. Прямая, соединяющая вершины двуполостного гиперболоида, является его сoью симметрии.

$\forall_{ABE}$(вершина(A, E) & вершина(B, E) & гиперболоид(E) & разныеточки$(A, B) \rightarrow$ осьсимметрии(прямая$(AB), E)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Центр двуполостного гиперболоида является серединой отрезка, соединяющего его вершины.

   $\forall_{ABCEKabcdef}$(вершина(A, E) & вершина(B, E) & гиперболоид(E) & разныеточки(A, B) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f) \rightarrow$ $C -$ точка & центр(C, E) & коорд$(C, K) = ((a + d)/2, (b + e)/2, (c + f)/2)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и шестой антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором, пятый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

6. Центр гиперболоида принадлежит его оси симметрии.

   $\forall_{ABCE}$(гиперболоид(E) & центр(C, E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E) \rightarrow$ $C \in$ прямая(AB))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 1.

   $\forall_{ABCEKabc}$(гиперболоид(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow C -$ точка & центр(C, E) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & коорд$(C, K) = (a, b, c)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "центр(X, E)". Прием вводит новые переменные C, a, b, c. Уровень срабатывания равен 2.

Параболоид

1. Условие на коэффициенты уравнения параболоида.

   $\forall_{EKabcdefpqrs}$(прямкоорд(K) & параболоид(E) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + px + qy + rz + s = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$) \rightarrow$ $4abc + def - af^2 - be^2 - cd^2 = 0$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уравнение параболоида содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 6.

2. Эллиптический параболоид.

   (a) Ввод уравнения эллиптического параболоида по оси, вершине и оси симметрии плоского сечения, перпендикулярного оси параболоида.

   $\forall_{ABCEFGHKMNPQRabcdefghjmnpqrst}$(параболоид$(E)$ & эллиптический(E) & прямкоорд(K) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & вершина(C, E) & плоскость$(PQR) \cap E = F$ & эллипс(F) & осьсимметрии(прямая$(DI), F)$

$\&$ направлпрямой(прямая$(AB), K, t) \ \& \ t = (a, b, c) \ \&$ коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{xyz}(px + qy + rz + s = 0$ $\& \ x -$ число $\& \ y -$ число $\& \ z -$ число$) \ \&$ ранг$(\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix}) = 1 \ \&$ направлпрямой(прямая$(DI), K, j) \ \& \ j = (d, e, f) \ \& \ g = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $\& \ h = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \rightarrow M -$ точка $\& \ N -$ точка $\& \ G -$ точка $\&$ коорд(вектор$(CM), K) = (a/g, b/g, c/g) \ \&$ коорд(вектор$(CN), K) = (d/h, e/h, f/h) \ \&$ коорд(вектор$(CG), K) = ((bf - ce)/(gh), (cd - af)/(gh), (ae - bd)/(gh)) \ \& \ (C, N, G, M) = H \ \&$ прямкоорд$(H) \ \& \ m -$ число $\& \ n -$ число $\& \ 0 < mn \ \&$ коорд$(E, H) = \mathrm{set}_{uvw}(u^2/m + v^2/n = 2w$ $\& \ u -$ число $\& \ v -$ число $\& \ w -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые восемь антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Девятый и тринадцатый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки, определяющей уравнение поверхности E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные M, N, G, H, m, n. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Ввод уравнения эллиптического параболоида по вершине и двум плоскостям симметрии.

$\forall_{ABDEGHKMNPQRabcdefghmnpqrst}($параболоид$(E) \ \&$ прямкоорд$(K) \ \&$ вершина$(D, E) \ \&$ эллиптический$(E) \ \&$ коорд$(D, K) = (r, s, t)$ $\&$ плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC), E) \ \&$ плоскостьсимметрии(плоскость$(PQR), E) \ \&$ коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax + by + cz + p = 0 \ \& \ x -$ число $\& \ y -$ число $\& \ z -$ число$) \ \&$ коорд(плоскость$(PQR), K) = \mathrm{set}_{uvw}(du + ev + fw + q = 0 \ \& \ u -$ число $\& \ v -$ число $\& \ w -$ число$) \ \& \ g = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ \& \ h = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \ \&$ $ad + be + cf = 0 \rightarrow M -$ точка $\& \ N -$ точка $\& \ G -$ точка $\&$ коорд(вектор$(DM), K) = (a/g, b/g, c/g) \ \&$ коорд(вектор$(DN), K) = (d/h, e/h, f/h) \ \&$ коорд(вектор$(DG), K) = ((bf - ce)/(gh), (cd - af)/(gh), (ae - bd)/(gh)) \ \& \ (D, N, M, G) = H \ \&$ прямкоорд$(H) \ \& \ m -$ число $\& \ n -$ число $\& \ 0 < mn \ \&$ коорд$(E, H) = \mathrm{set}_{XYZ}(X^2/m + Y^2/n = 2Z \ \&$ $X -$ число $\& \ Y -$ число $\& \ Z -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента, а также шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки, определяющей уравнение поверхности E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные M, N, G, H, m, n. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Плоскости симметрии эллиптического параболида пересекаются по его оси.

$\forall_{ABCEKMNPQR}($параболоид$(E) \ \&$ эллиптический$(E) \ \&$ плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC), E) \ \&$ плоскостьсимметрии(плоскость$(PQR), E) \ \&$ прямкоорд$(K) \rightarrow M -$ точка $\& \ N -$ точка $\&$ прямая$(MN) \subseteq$ плоскость$(ABC) \ \&$ прямая$(MN) \subseteq$ плоскость$(PQR) \ \&$ осьсимметрии(прямая$(MN), E) \ \&$ актив(коорд(прямая$(MN), K)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Задача не имеет посылки вида "осьсимметрии(X, E)". Прием вводит новые переменные M, N. Уровень срабатывания равен 2.

3. Гиперболический параболоид.

   (a) Ввод уравнения гиперболического параболоида по двум плоскостям симметрии и седловой точке.

   $\forall_{ABDEGHKMNPQRabcdefghmnpqrst}$(параболоид$(E)$ & прямкоорд(K) & вершина(D, E) &гиперболический(E) & коорд$(D, K) = (r, s, t)$ & плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC), E)$ & плоскостьсимметрии(плоскость$(PQR), E)$ & коорд(плоскость$(ABC), K) =$ set$_{xyz}(ax + by + cz + p = 0$ & x – число & y – число & z – число) & коорд(плоскость$(PQR), K) =$ set$_{uvw}(du + ev + fw + q = 0$ & u – число & v – число & w – число) & $g = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ & $h = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $ad + be + cf = 0 \rightarrow M$ – точка & N – точка & G – точка & коорд(вектор$(DM), K) = (a/g, b/g, c/g)$ & коорд(вектор$(DN), K) = (d/h, e/h, f/h)$ & коорд(вектор$(DG), K) = ((bf - ce)/(gh), (cd - af)/(gh), (ae - bd)/(gh))$ & $(D, N, M, G) = H$ & прямкоорд(H) & m – число & n – число & $mn < 0$ & коорд$(E, H) =$ set$_{XYZ}(X^2/m + Y^2/n = 2Z$ & X – число & Y – число & Z – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента, а также шестой и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки, определяющей уравнение поверхности E в каком-либо базисе. Прием вводит новые переменные M, N, G, H, m, n. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Определение плоскостей симметрии по двум прямолинейным образующим, проходящим через седловую точку.

   $\forall_{ABCDEFGHKPQRabdefghkmnpqr}$(параболоид$(E)$ & гиперболический(E) & прямая$(AB) \subseteq E$ & прямая$(CD) \subseteq E$ & прямкоорд(K) & направлпрямой(прямая$(AB), K, a)$ & $a = (d, e, f)$ & направлпрямой(прямая$(CD), K, b)$ & $b = (p, q, r)$ & вершина(F, E) & $F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & ранг$\left(\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}\right) = 2$ & $m = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$ & $n = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \rightarrow G$ – точка & H – точка & P – точка & Q – точка & g – число & h – число & плоскостьсимметрии(плоскость$(FGH), E)$ & плоскостьсимметрии(плоскость$(FPQ), E)$ & коорд(плоскость$(FGH), K) =$ set$_{xyz}((d/m + p/n)x + (e/m + q/n)y + (f/m + r/n)z + g = 0$ & x – число & y – число & z – число)коорд(плоскость$(FPQ), K) =$ set$_{xyz}((d/m - p/n)x + (e/m - q/n)y + (f/m - r/n)z + h = 0$ & x – число & y – число & z – число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов и десятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Шестой и восьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, одиннадцатый и двенадцатый - выделены указателем "усм". Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Задача не имеет посылки вида "плоскостьсимметрии(X, E)". Прием вводит новые переменные G, H, P, Q, g, h. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Седловая точка гиперболического параболоида принадлежит его плоскости симметрии.

$\forall_{ABCED}$(плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC), E)$ & параболоид(E) & гиперболический(E) & вершина$(D, E) \rightarrow D \in$ плоскость$(ABC))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCEDabc}$(плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC), E)$ & параболоид(E) & гиперболический(E) & прямкоорд$(K) \rightarrow D -$ точка & вершина(D, E) & $D \in$ плоскость(ABC) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & коорд$(D, K) = (a, b, c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "вершина(X, E)". Прием вводит новые переменные D, a, b, c. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Если плоскость перпендикулярна двум плоскостям симметрии гиперболического параболоида и пересекается с ним по паре точек, то она проходит через седловую точку.

$\forall_{ABCDEFGHKMNPQRSTabcdfghipqrs}$(параболоид$(E)$ & гиперболический(E) & вершина(D, E) & плоскостьсимметрии(плоскость$(ABC), E)$ & плоскостьсимметрии(плоскость$(FGH), E)$ & $E \cap$ плоскость$(PQR) =$ прямая$(MN) \cup$ прямая(ST) & коорд(плоскость$(ABC), K) =$ $\text{set}_{xyz}(ax + by + cz + d = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(плоскость$(FGH), K) = \text{set}_{uvw}(fu + gv + hw + i = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $af + bg + ch = 0$ & коорд(плоскость$(PQR), K) =$ $\text{set}_{XYZ}(pX + qY + rZ + s = 0$ & $X -$ число & $Y -$ число & $Z -$ число) & $ap+bq+cr = 0$ & $fp+gq+rh = 0$ & прямкоорд$(K) \rightarrow D \in$ плоскость$(PQR))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые шесть антецедентов и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

(e) Если две прямолинейные образующие пересекаются и перпендикулярны оси симметрии, то они проходят через седловую точку.

$\forall_{ABCDEFKPQabcdefghijkmnpqrst}$(параболоид$(E)$ & гиперболический(E) & прямая$(AB) \subseteq E$ & прямая$(CD) \subseteq E$ & прямкоорд(K) & коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x+a, y+b, z+c), (d, e, f))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(прямая$(CD), K) =$ set_{uvw}(пропорцнаборы$((u+g, v+h, k+w), (p, q, r))$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & ранг$\left(\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix}\right) = 2$ &

$$\det\left(\begin{pmatrix} d & e & f \\ p & q & r \\ g-a & h-b & k-c \end{pmatrix}\right) = 0$$ & осьсимметрии(прямая$(PQ), E)$ & направлпрямой(прямая$(PQ), K, j)$ & $j = (i, s, t)$ & вершина(F, E) & $id+se+tf = 0$ & $ip+sq+tr = 0 \rightarrow F \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая$(CD))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов и десятый антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Одиннадцатый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

4. Параболид вращения.

   (a) Ввод уравнения параболоида вращения с заданным направлением оси.

   $\forall_{ABCEKabcdefm}$(параболоид(E) & круглый(E) & прямкоорд(K) & направлпараболоида($E, K, (d, e, f)$) & $p = d^2 + e^2 + f^2 \to m -$ число & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $0 < m$ & коорд(E, K) = set$_{uvw}((e(w-c) - f(v-b))^2 + (f(u-a) - d(w-c))^2 + (d(v-b) - e(u-a))^2 - m\sqrt{p}(d(u-a) + e(v-b) + f(w-c)) = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $C -$ точка & вершина(C, E) & коорд(C, K) $= (a, b, c)$ & фокхорда(E) $= m$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Прием вводит новые переменные a, b, c, m, C. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Ввод уравнения параболоида вращения с заданной осью симметрии.

   $\forall_{ABCEKabcdefmn}$(параболоид(E) & круглый(E) & прямкоорд(K) & осьсимметрии(прямая(AB), E) & коорд(прямая(AB), K) = set$_{xyz}$(пропорцнаборы($(x+a, y+b, z+c), (d, e, f)$) & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $p = d^2 + e^2 + f^2 \to m -$ число & $n -$ число & $\neg(m = 0)$ & коорд(E, K) = set$_{uvw}((e(c+w) - f(b+v))^2 + (f(a+u) - d(c+w))^2 + (d(b+v) - e(a+u))^2 - m\sqrt{p}(d(u+a) + e(v+b) + f(w+c) + n) = 0$ & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число) & $C -$ точка & вершина(C, E) & коорд(C, K) $= (-a - nd/p, -b - ne/p, -c - nf/p)$ & фокхорда(E) $= |m|$ & направлпараболоида($E, K, (md, me, mf)$))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Пятый и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение поверхности E. Прием вводит новые переменные m, n, C. Уровень срабатывания приема равен 3.

   (c) Ось симметрии параболоида вращения, в сечении которого плоскостью получается заданная окружность.

   $\forall_{ABCDEFKMNabcpqrs}$(параболоид($E$) & круглый($E$) & прямкоорд($K$) & Окружность($ABC$) $\subseteq E$ & Окружность(ABC) $\subseteq$ плоскость(DFG) & коорд(A, K) $= (a, b, c)$ & коорд(плоскость(DFG), K) = set$_{xyz}(px + qy + rz + s = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) $\to M -$ точка & $N -$ точка & осьсимметрии(прямая(MN), E) & коорд(прямая(MN), K) = set$_{uvw}$(пропорцнаборы($(u-a, v-b, w-c), (p, q, r)$) & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "идентификатор". Отсутствует посылка вида "осьсимметрии(X, E)". Прием вводит новые переменные M, N. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Фокальная хорда параболоида вращения.

$\forall_{EKabcde}$(прямкоорд(K) & параболоид & коорд$(K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + bx + ay^2 + cy + dz + e = 0$ & $x -$число & $y -$число & $z -$число$) \to$ фокхорда$(E) = |d/a|)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "фокхорда(E)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Радиус окружности, получающейся при пересечении параболоида вращения с плоскостью, перпендикулярной его оси.

$\forall_{ABCDEKMNPabcdef}$(параболоид$(E)$ & прямкоорд(K) & Окружность$(MNP) = E \cap$ плоскость(ABC) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + bx + ay^2 + cy + dz + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$)$ & коорд(плоскость$(ABC), K) = \mathrm{set}_{uvw}(w + f = 0$ & $u -$число & $v -$число & $w -$число$) \to 4adf - 4ae + b^2 + c^2 - 4a^2(l(MN))^2 = 0)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последний - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEKMNPabcdef}$(параболоид$(E)$ & прямкоорд(K) & Окружность$(MNP) = E \cap$ плоскость(ABC) & вершина(D, E) & коорд$(M, K) = (a, b, c)$ & коорд$(D, K) = (d, e, f) \to$ $l(MN)^2 -$ фокхорда$(E)\sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2} = 0$ & направлпараболоида$(E, K, (a - d, b - e, c - f)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, последние два - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

5. Направление оси параболоида.

$\forall_{EKabcdef}$(направлпараболоида$(E, K, (a, b, c))$ & направлпараболоида$(E, K, (d, e, f)) \to 0 < ad + be + cf)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 1.

6. Ввод уравнения оси параболоида по координатам вершины и направлению оси.

$\forall_{ABCEKabcdef}$(параболоид(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & вершина(C, E) & направлпрямой(прямая$(AB), K, t)$ & $t = (d, e, f)$ & коорд$(C, K) = (a, b, c)$ & прямкоорд$(K) \to$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x - a, y - b, z - c), (d, e, f))$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число$))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, пятый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить уравнение прямой AB. Уровень срабатывания приема равен 2.

7. Единственность вершины параболоида.

   $\forall_{ABE}$(вершина(A, E) & вершина(B, E) & параболоид$(E) \to A = B)$.

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" разрешает замену символа "параболоид" на "парабола". Уровень срабатывания равен 0.

8. Координаты вершины параболоида.

   $\forall_{AEKabcdef}$(параболоид(E) & прямкоорд(K) & вершина(A, E) & коорд$(E, K) =$ $\mathrm{set}_{xyz}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + ez + f = 0$ & x – число & y – число & z – число$) \to$ коорд$(A, K) = (-b/(2a), -d/(2c), (b^2c + d^2a - 4acf)/(4ace)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 2.

9. Вершина параболоида принадлежит параболоиду.

   $\forall_{AE}$(вершина(A, E) & параболоид$(E) \to A \in E)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

10. Вершина параболоида лежит на его оси.

    $\forall_{ABCE}$(параболоид(E) & осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & вершина$(C, E) \to$ $C \in$ прямая$(AB))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Нормализатор "нормкоорд" не в состоянии определить координаты точки A. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ABCDEabc}$(осьсимметрии(прямая$(AB), E)$ & параболоид(E) & прямкоорд$(K) \to$ D – точка & вершина(D, E) & $D \in$ прямая(AB) & a – число & b – число & c – число & коорд$(D, K) = (a, b, c))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Отсутствует посылка вида "вершина(X, E)". Прием вводит новые переменные a, b, c, D. Уровень срабатывания равен 1.

1.10 Пакетные индикаторы, применяемые в приемах по аналитической геометрии

Пакетные индикаторы были введены для приемов по элементарной геометрии. Они представляли собой проверочные операторы, определяющие рекурсивным образом возможность цепочки шагов, предположительно приводящих к требуемому результату. Применение таких операторов в фильтрах приемов существенным образом увеличивает целесообразность действий решателя. Для аналитической геометрии пока созданы всего три небольших пакетных индикатора, приводимых ниже.

Пакетный индикатор "опредкоорд"

Пакетный индикатор "опредкоорд(x1 x2 x3 x4)" усматривает возможность вычислить в текущем контексте координаты объекта либо множества объектов x1. Здесь x2 - набор посылок, x3 - набор комментариев, x4 - выходная переменная, которой присваивается список использованных посылок. Консеквент теоремы приема индикатора имеет вид "опредкоорд(x1)"; аналогичный вид имеют антецеденты, реализующие рекурсивные обращения. Приемы индикатора были сформированы на малом числе задач, и его предполагается существенным образом пополнить.

1. Равенство из посылок, обозначающее координату.

   $\forall_{AKa}(a = \text{коорд}(A, K)\ \&\ \text{опредкоорд}(\text{коорд}(A, K)) \to \text{опредкоорд}(a))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

2. Координаты определены посылкой.

   $\forall_{AKMP}(\text{коорд}(A, K) = \text{set}_x(P(x)) \to \text{опредкоорд}(\text{коорд}(A, M)))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменная P функциональная. Указатель "кортежпеременных" допускает связывающую приставку x произвольной длины. Уровень срабатывания равен 1.

3. Биссектриса двух прямых с определимыми координатами.

   $\forall_{ABCD}(\text{биссектриса}(BADC)\ \&\ \text{опредкоорд}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K))\ \&$
   $\text{опредкоорд}(\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K)) \to \text{опредкоорд}(\text{коорд}(\text{прямая}(AC), K)))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, два других - реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 2.

4. Касательная к кривой, заданной своим уравнением.

   $\forall_{ABCDKP}(\text{прямая}(AB) - \text{касательная к } C\ \&\ \text{коорд}(C, K) = \text{set}_{xy}(P(x, y))\ \&$
   $D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D \in C\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \to$
   $\text{опредкоорд}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K)))$

   Все антецеденты, кроме третьего, выделенного указателем "усм", идентифицируются с посылками. Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

5. Пересечение двух поверхностей.

   $\forall_{ABCKMPQ}(\text{коорд}(A, K) = \text{set}_x(P(x))\ \&\ \text{коорд}(B, K) = \text{set}_y(Q(y))\ \&\ C = A \cap B \to$
   $\text{определимо}(\text{коорд}(C, M)))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменные P, Q функциональные. Указатели "кортежпеременных" допускают связывающие приставки x, y произвольной длины. Уровень срабатывания равен 2.

Пакетный индикатор "существкоорд"

Пакетный индикатор "существкоорд(x1 x2 x3 x4)" усматривает возможность связать координаты x1 некоторого множества объектов с неизвестными задачи. Как и выше, x2 - набор посылок, x3 - набор комментариев, x4 - выходная переменная, которой присваивается список использованных посылок. Консеквент теоремы приема индикатора имеет вид "существкоорд(x1)"; аналогичный вид имеют антецеденты, реализующие рекурсивные обращения. Уровни срабатывания приводимых ниже приемов равны 1.

1. Пересечение по неизвестной точке с прямой, уравнение которой известно.

   $\forall_{ABCDKPa}$(актив(прямая(CD)) & $P \in$ прямая(CD) & $P \in$ прямая(AB) &
   коорд(прямая(CD)$, K) = a \rightarrow$ существкоорд(коорд(прямая(AB)$, K$)))

   Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые три - выделены указателем "усм". Выражение a не содержит неизвестных, а координаты точки P - содержат.

2. Прямая перпендикулярна прямой, уравнение которой содержит неизвестные параметры.

   $\forall_{ABCDKa}$(актив(прямая(CD)) & прямая(CD) $\perp$ прямая(AB) &
   коорд(прямая(CD)$, K) = a \rightarrow$ существкоорд(коорд(прямая(AB)$, K$)))

   Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Выражение a содержит неизвестные. В нем не встречается символ "коорд".

3. Равенство координаты неизвестной.

   $\forall_{AKa}$(коорд$(A, K) = a \rightarrow$ существкоорд(коорд(A, K)))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменная a - неизвестная.

4. Неизвестная.

   существкоорд(a)

   Переменная a является неизвестной.

Пакетный индикатор "связкоорд"

Пакетный индикатор "связкоорд(x1 x2 x3 x4)" представляет собой версию предыдущего индикатора "существкоорд", ориентированную на ослабленные связи с неизвестными. Уровни срабатывания приемов равны 1.

1. Известный угол между данной прямой и прямой, проходящей через точку с неизвестными координатами.

   $\forall_{ABCDEKabcd}$($C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & актив($\angle(DCE)$) &
   коорд$(C, K) = (c, d)$ & коорд$(E, K) = (a, b) \rightarrow$
   связкоорд(коорд(прямая(AB)$, K$)))

   Два последних антецедента идентифицируются с посылками, первые три - выделены указателем "усм". Выражения c, d не содержат неизвестных, причем хотя бы одно из выражений a, b имеет тип "неизв". В посылках имеется равенство, одна из частей которого не содержит неизвестных, а другая - содержит выражение "угол(DCE)".

2. Известный угол между данной прямой, содержащей точку с неизвестными координатами, и прямой, уравнение которой можно определить по паре точек.

   $\forall_{ABCDEFKabcdmn}(C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)\ \&$ $\text{актив}(\angle(DCE))\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (c, d)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = (a, b)\ \&$ $\text{коорд}(F, K) = (m, n) \rightarrow \text{связкоорд}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K)))$

   Последние три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указетелем "усм". Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Хотя бы одно из выражений m, n имеет тип "неизв". В посылках имеется равенство, одна из частей которого не содержит неизвестных, а другая - содержит выражение "угол(DCE)".

3. Прямая перпендикулярна прямой, содержащей точку с неизвестными координатами.

   $\forall_{ABCDE}(\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&$ $\text{коорд}(E, K) = (a, b) \rightarrow \text{связкоорд}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K)))$

   Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - выделены указателем "усм". Хотя бы одно из выражений a, b имеет тип "неизв". Уравнение прямой CD не выведено либо содержит неизвестные.

Глава 2

Приемы по линейной алгебре

Стандартные упражнения по линейной алгебре, имеющиеся в задачниках, значительно проще алгоритмизируются, чем упражнения по аналитической геометрии, не говоря уже о задачах по элементарной геометрии. Поэтому приемы решателя здесь, как правило, воспроизводят хорошо известные вычислительные процедуры, декомпозируя их "на теоремы".

Во многих случаях такие приемы сгруппированы в специализированные пакеты - как для логических структур данных (нормализаторы, синтезаторы, проверочные операторы), так и для технических ЛОСовских структур данных. Фактически, последние мало чем отличаются от традиционных программ. В этом отношении предметная область оказалась полезной для развития техники программирования на ГЕНОЛОГе обычных вычислений. Впрочем, этому вопросу будет посвящена отдельная глава, а здесь мы ограничимся рассмотрением логических структур данных.

Среди вычислительных задач несколько особняком стоит группа задач, связанных с нахождением определителей n - го порядка, где ситуация приобретает эвристический характер. Еще более интересны теоретические задачи по линейной алгебре, однако их проработка находится на самом начальном этапе.

2.1 Логические символы, используемые решателем в линейной алгебре

2.1.1 Понятия, связанные с перестановками

Утверждение "перестановка(p, A)" означает, что p есть взаимно-однозначное отображение начального отрезка натурального ряда на конечное множество A.

Выражение "числоинверсий(p)" обозначает число инверсий в перестановке p, имеющей числовую область значений. Утверждение "четнперестановка(p)" означает, что число инверсий в перестановке p четное. Выражение "четность(p)" обозначает четность перестановки p - 0 в случае четного числа инверсий и 1 в случае нечетного.

Выражение "транспозиция(i, j, n)" обозначает перестановку множества $\{1, \ldots, n\}$, меняющую местами элементы i и j. При $i = j$ - тождественная перестановка.

Выражение "транспозиции(n)" обозначает множество всех транспозиций, определенных на множестве $\{1, \ldots, n\}$.

Выражение "циклперест(a)" обозначает функцию, определенную на множестве элементов разнозначного набора a и переставляющую их "по циклу" в соответствии с размещением в наборе (последний элемент набора переходит в первый).

Утверждение "разложциклы(a, b)" означает, что a есть конечное множество отображений, определенных на непересекающихся одноэлементных множествах и задающих в объединении взаимно-однозначное отображение конечного множества в себя, а b - конечное множество независимых циклических подстановок, задающее то же самое отображение.

Утверждение "цепьзначений(a, b, c, d)" означает, что b есть конечное множество функций с одноэлементными попарно непересекающимися областями определения; c - набор, начинающийся с объекта a и такой, что каждый последующий его элемент получен из предыдущего применением некоторой функции множества b; d - подмножество функций списка b, не использованных при построении c. При определении набора c каждая функция множества b применяется не более чем однократно.

2.1.2 Понятия, связанные с матрицами

Утверждение "матрица(a)" означает, что a есть прямоугольная матрица (функция двух переменных, определенная на прямом произведении начальных отрезков натурального ряда). Утверждение "матр(a, b, m, n)" означает, что a есть матрица с элементами из множества b, имеющая m строк и n столбцов. Выражение "Матрица(a, m, n)" обозначает матрицу, имеющую m строк и n столбцов, порожденную набором a. Строки матрицы формируются как последовательные отрезки набора a.

Выражение "строки(a)" обозначает матрицу, строки которой образуют набор a. Выражение "столбцы(a)" обозначает матрицу, столбцы которой образуюи набор a. При общей стандартизации выражений автоматически реализуется переход от задания по столбцам к заданию по строкам.

Утверждение "столбец(a, m, b)" означает, что a есть матрица размерами в m строк и в 1 столбец, элементы которой принадлежат множеству b. Утверждение "строка(a, m, b)" означает, что a есть матрица размерами в 1 строку и в m столбцов, элементы которой принадлежат множеству b.

Утверждение "квадрматр(a)" означает, что a есть квадратная матрица.

Выражение "единичнматр(n)" обозначает единичную числовую матрицу размера $n \times n$. Выражение "диагматр(a)" обозначает диагональную квадратную числовую матрицу, элементы главной диагонали которой определяются набором a. Утверждение "Диагматр(a)" означает, что a есть квадратная диагональная матрица.

Утверждение "симметричматр(a)" означает, что a есть симметрическая квадратная матрица. Утверждение "кососимметрич(a)" означает, что a есть кососимметрическая квадратная матрица.

Выражение "транспонир(a)" обозначает результат транспонирования матрицы a. Выражение "транспстрок(a, m, n)" обозначает результат перестановки в матрице a строк с номерами m и n.

Выражение "умножматр(a, b)" обозначает произведение двух вещественных матриц a, b. Выражение "Умножматр(a, b, K)" обозначает произведение двух матриц a, b над кольцом K. Выражение "степеньматр(a, n)" обозначает результат возведения квадратной вещественной матрицы в целочисленную степень n.

Выражение "определитель(a)" обозначает определитель квадратной матрицы a.

Выражение "ранг(a)" обозначает ранг матрицы либо квадратичной формы a.

Утверждение "собствектор(a, b, c)" означает, что c есть собственный вектор матрицы, либо поверхности второго порядка, либо квадратичной формы a, отвечающий собственному значению b. Утверждение "Собствектор(a, b, K, c)" означает, что c есть собственный вектор матрицы a над кольцом K, отвечающий собственному значению b. Утверждение "собствзначение(a, b, m)" означает, что b есть собственное значение матрицы, либо поверхности второго порядка, либо квадратичной формы a, имеющее кратность m. Выражение "собствзначения(a)" обозначает множество вещественных собственных значений квадратной вещественной матрицы a. Утверждение "собствекторы(a, b, c)" означает, что c есть множество векторов, образующих базис собственного подпространства матрицы либо квадратичной формы a, соответствующего собственному значению b. Утверждение "собствбазис(a, b, c)" означает, что c есть матрица, строки которой образуют собственный базис для матрицы a, причем b - набор собственных значений, соответствующих строкам матрицы c.

Утверждение "характмн(a, b)" означает, что b есть характеристический многочлен квадратной матрицы a. Выражение "следматрицы(a)" обозначает след квадратной матрицы a.

Выражение "линкомбинации(a)" обозначает множество линейных комбинаций с вещественными коэффициентами матриц, образующих множество a. Выражение "Линкомбинации(a)" обозначает множество линейных комбинаций с комплексными коэффициентами матриц, образующих множество a. Выражение "Линкомб(a, K)" обозначает множество линейных комбинаций матриц, образующих множество a, у которых коэффициенты берутся из кольца K.

Утверждение "канматр(a)" означает, что a есть многочленная квадратная матрица, имеющая канонический вид. Утверждение "каноничматрица(a, x, b)" означает, что c есть каноническая матрица для многочленной матрицы, получающейся, если элементы матрицы a рассматривать как многочлены от переменной x. Используется как элемент интерфейса при постановке задачи на приведение многочленной матрицы к каноническому виду. Утверждение "канпредставл(a, b, c, d)" означает, что квадратная многочленная матрица a представима в виде "$b^{-1}cd^{-1}$", где b, c, d - квадратные многочленные матрицы, причем матрица c имеет канонический вид. Утверждение "жордформа(a, b, c)" означает, что b есть жорданова нормальная форма квадратной матрицы a, причем c - матрица, трансформирующая a в b (т.е. произведение матрицы, обратной к c, a и c, равно b).

Выражение "преобрстолбцов(a, K)" обозначает линейное преобразование столбцов, осуществляемое прямоугольной матрицей a над кольцом K.

Выражение "экспматр(a)" означает экспоненту от квадратной матрицы a.

Выражение "прямаясумма(a)" обозначает прямую сумму набора матриц a.

2.1.3 Понятия, связанные с квадратичными формами

Квадратичную форму над вещественным полем будем задавать с помощью описателя "отображение". Таким образом, квадратичная форма здесь фактически отождествляется с функцией. При необходимости легко перейти к рассмотрению квадратичных форм, как формальных многочленов, продублировав соответствующие приемы.
Выражение "матрицаформы(a)" обозначает матрицу квадратичной формы a.

Утверждение "каноничвид(a, b, c)" означает, что c есть результат приведения квадратичной формы a над полем вещественных чисел к каноническому виду; b - линейное отображение, выполняющее переход к каноническому виду. a, b, c рассматриваются как функции; произведение (суперпозиция) a и b равно c. Утверждение "Каноничвид(a, K)" означает, что a есть квадратичная функция от переменных, принимающих значения в кольце K, значение которой определяется суммой умноженных на коэффициенты квадратов переменных.

Утверждение "нормвид(a, b, c)" означает, что c есть результат приведения квадратичной формы a над полем вещественных чисел к нормальному виду (коэффициенты при квадратах равны ± 1); b - линейное отображение, выполняющее переход к нормальному виду. Суперпозиция a и b равна c.

Утверждение "ортканоничвид(a, b, c)" означает, что c есть результат приведения квадратичной формы a над полем вещественных чисел к каноническому виду; b - ортогональное преобразование, выполняющее переход к каноническому виду. Суперпозиция a и b равна c.

Выражение "положитиндекс(a)" обозначает положительный индекс инерции квадратичной формы a. Выражение "отрицатиндекс(a)" обозначает отрицательный индекс инерции квадратичной формы a. Выражение "сигнатура(a)" обозначает сигнатуру квадратичной формы a. Утверждение "положитопред(a)" означает, что a есть положительно определенная квадратичная форма. Утверждение "отрицатопред(a)" означает, что a есть отрицательно определенная квадратичная форма.

2.1.4 Понятия, связанные с линейными пространствами

Утверждение "линпространство(a, P)" означает, что a есть линейное пространство над полем P.

Утверждение "нульвект(a, b)" означает, что a есть нулевой вектор линейного пространства b.

Утверждение "линподпрост(a, b)" означает, что множество a является линейным подпространством линейного пространства b.

Выражение "линкомб(a, b)" обозначает множество линейных комбинаций векторов линейного пространства b, принадлежащих множеству a.

Утверждение "независимы(a, b)" означает, что a есть семейство линейно независимых векторов линейного пространства b.

Утверждение "базис(a, b)" означает, что набор b представляет собой базис линейного пространства a. Утверждение "Базис(a, b, c)" означает, что набор a является базисом линейного подпространства b линейного пространства c. Выражение "размерность(a)" обозначает размерность линейного пространства a. Выражение "Размерность(a, b)" обозначает размерность линейного подпространства a линейного пространства b.

Выражение "линкоорд(a, b, c)" обозначает координаты вектора a линейного пространства c относительно набора векторов b.

Выражение "матрперехода(a, b, c)" обозначает матрицу перехода от базиса b линейного пространства a к базису c. Координаты базисных векторов нового базиса относительно старого базиса расположены по столбцам.

Утверждение "ортогонализация(a, b)" означает, что b есть ортонормированная система векторов евклидова пространства над вещественным полем, подпространство которой совпадает с подпространством системы векторов a.

Утверждение "Линпреобр(a, K)" означает, что a есть линейное преобразование в пространстве наборов элементов кольца K.

Выражение "Ядро(a)" обозначает ядро линейного преобразования, образ которого состоит из числовых наборов. Допускаются случаи полей вещественных и комплексных чисел, а также колец вычетов. В каждом случае берется прообраз набора нулей.

Выражение "геомвект" обозначает линейное пространство, образованное всеми векторами трехмерного пространства.

Выражение "вектпрост(P, n)" обозначает линейное пространство над полем P, образованное наборами элементов этого поля, имеющими длину n.

Выражение "матрпрост(P, m, n)" обозначает линейное пространство над полем P, образованное матрицами элементов этого поля, имеющими m строк и n столбцов.

Выражение "многочлпрост(P, n)" обозначает линейное пространство многочленов степени n над полем P.

Выражение "линпростфунк(a, P)" обозначает линейное пространство функций, определенных на множестве a и принимающих значения в поле P. Сложение и умножение - поточечные.

2.2 Приемы, связанные с перестановками

Определение числа инверсий для перестановки, заданной в явном виде

$\forall_{amn}(m = \text{числоинверсий}(a) \to \text{числоинверсий}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})) = m)$

Прием имеет заголовок "воройтерм". Переменная a функциональная. Указатель "развертка" определяет идентификацию терма "отображение" с термами вида "набор(...)". Эти термы не должны содержать переменных. Антецедент выделен указателем "программа". Его правая часть обрабатывается пакетом продукций "числоинверсий", который, собственно, и находит число инверсий. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcn}(\text{упорядтаблица}(a, b)\ \&\ b = \lambda_i(i \to c(i), i \in \{1, \ldots, n\}) \to$
$\text{числоинверсий}(\text{таблица}(\{; a\})) = \text{числоинверсий}(\lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\})))$

Прием имеет заголовок "воройтерм". Выражение "$i \to c(i)$" обозначает функцию, определенную в единственной точке i и принимающую в ней значение $c(i)$. Указатели "развертка" определяют идентификацию терма "отображение" и формирование такого терма в виде выражений "набор(...)". Переменная c функциональная. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "упорядтаблица". Он применяется к набору функций f_i, определенных каждая в единственной точке p_i. Результатом служит набор этих же функций, переупорядоченный по неубывнию значений p_i. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

Число инверсий для перестановки в общем случае

$\forall_{an}(\text{числоинверсий}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \dots, n\})) = \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in \{1, \dots, n\}\ \&$
$j \in \{i+1, \dots, n\}\ \&\ a(j) < a(i))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная a функциональная. Указатели "развертка" не используются. На этапе редактирования ответа задачи прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{an}(l(a) = n \to \text{числоинверсий}(a) = \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in \{1, \dots, n\}\ \&\ j \in \{i+1, \dots, n\}\ \&$
$a(j) < a(i))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормдлинанабора". Указатели "развертка" не используются. На этапе редактирования ответа задачи прием блокируется. Если преобразуемое выражение расположено в условии задачи на преобразование, то либо это же условие содержит выражение вида "$a(x)$, либо преобразуемое выражение расположено внутри конечных суммы или произведения. Если преобразуемое выражение расположено не в условии задачи на преобразование, то его переменные не связаны внешними кванторами либо описателями. Уровень срабатывания равен 2.

Число инверсий для конкатенации двух наборов

$\forall_{abmn}(l(a) = m\ \&\ l(b) = n \to \text{числоинверсий}(a; b) = \text{числоинверсий}(a) +$
$\text{числоинверсий}(b) + \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in \{1, \dots, m\}\ \&\ j \in \{1, \dots, n\}\ \&\ b(j) < a(i))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

Определение четности перестановки путем явного вычисления числа инверсий

$\forall_{an}(n = \text{числоинверсий}(a) \to \text{четность}(a) = (0 \text{ при } n - \text{even}, \text{ иначе } 1))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение содержит символ "таблица". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Результат n не содержит символа "числоинверсий". Уровень срабатывания равен 2.

Четность произведения перестановок

$\forall_{Afgn}(\text{перестановка}(f, A)\ \&\ A = \{1, \dots, n\}\ \&\ \text{перестановка}(\text{произведение}(g),$
$\{1, \dots, n\}) \to \text{четность}(\text{произведение}(\text{префикс}(f, g))) =$
$(\text{четность}(f) + \text{четность}(\text{произведение}(g)))(\text{mod } 2))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "смперестановка", усматривающим перестановку и определяющим ее множество значений A. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Четность обратной перестановки

$\forall_{Afn}$(перестановка(f, A) & $A = \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ четность(обрфункция(f)) = четность(f))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

Транспозиции

1. Транспозиция, сохраняющая последний элемент.

   $\forall_{fgmn}(n - m = 1 \rightarrow f \in$ транспозиции(n) & $f(n) = n$ & сужение$(f, \{1, \ldots, m\}) = g \leftrightarrow g \in$ транспозиции(m) & $f =$ таблица$(\{g, n \rightarrow n\}))$

   Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Он реализует замену группы условий задачи на описание. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная f идентифицируется с неизвестной, переменные g и n - с выражениями, не содержащими неизвестных. Уровень срабатывания приема равен 2.

2. Попытка подбора транспозиции.

   $\forall_{fmnp}(f =$ транспозиция$(n, p, m) \rightarrow f(n) = p$ & $f \in$ транспозиции$(m))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквенты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Прием предпринимает попытку заменить их на первый антецедент. Переменная f идентифицируется с неизвестной; выражения n, p различны. Уровень срабатывания равен 4.

3. Значение транспозиции.

   $\forall_{ijk}$(транспозиция$(i, j, k)(i) = j)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Переход к параметрическому описанию для элемента множества транспозиций.

   $\forall_{nx}(n -$ натуральное $\rightarrow x \in$ транспозиции$(n) \leftrightarrow \exists_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}$ & $\neg(i = j)$ & $x =$ транспозиция$(i, j, n)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение x содержит неизвестные, а n - не содержит. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 4. Создана еще одна версия приема, применяемая к собственному подутверждению условия задачи на описание. В ней выражение x содержит неизвестные и отлично от переменной, а выражение n - не содержит неизвестных. Уровень срабатывания прежний.

5. Выражение через символ "таблица".

   $\forall_{ijn}$(транспозиция$(i, j, n) =$ таблица$(\{i \rightarrow j, j \rightarrow i,$ тождфунк$(\{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\})\}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемый терм задачи содержит символ "таблица". При редактировании ответа прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, применяемая во всех случаях к содержащему неизвестные подвыражению условия задачи на описание. Уровень срабатывания тоже равен 5.

Разложение перестановки в произведение независимых циклов с помощью синтезатора "разложциклы"

$\forall_{ab}(\text{разложциклы}(a, b) \rightarrow \text{таблица}(a) = \text{таблица}(b))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "циклперест". Выражение a содержит символ "См заголовок обозначения функции, определенной в единственной точке и принимающей в ней заданное значение. Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "разложциклы", который будет описан ниже. Уровень срабатывания равен 2.

Возведение перестановки в степень с помощью разложения на независимые циклы

$\forall_{abcmn}(\text{разложциклы}(a, b)\ \&\ b = \{;\lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\})\} \rightarrow (\text{таблица}(a))^m =$ $\text{таблица}(\{;\lambda_i((c(i))^m, i \in \{1, \ldots, n\})\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Переменная c функциональная. Указатели "развертка" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" как конечных наборов. Уровень срабатывания равен 3.

Возведение в степень циклической перестановки

$\forall_{amn}(l(a) = n \rightarrow (\text{циклперест}(a))^m = \text{таблица}(\{;\lambda_i(a(i) \rightarrow a((i + m - 1)(\text{mod}\ n) + 1),$ $i \in \{1, \ldots, n\})\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение a имеет заголовок "набор". Указатель "развертка" определяет формирование терма "отображение" в виде набора. Уровень срабатывания равен 1.

Переход от параметрического описания с варьируемой перестановкой к параметрическому описанию с варьируемым натуральным параметром

$\forall_{Pin}(n - \text{натуральное}\ \&\ i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \exists_{xy}(P(x(i))\ \&\ \text{перестановка}(x, \{1, \ldots, n\})) \leftrightarrow$ $\exists_{xy}(x \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ P(x)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри преобразуемого утверждения подвыражения "$x(i)$". Переменная P функциональная. Указатель "новаргумент" проверяет, что переменная x встречается внутри $P(\ldots)$ только в виде $x(i)$. Антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Переменная y идентифицируется с набором переменных, имеющим произвольную длину (возможно, нулевую). Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{Pin}(n - \text{натуральное}\ \&\ i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \exists_{xy}(P(\text{обрфункция}(x)(i))\ \&$ $\text{перестановка}(x, \{1, \ldots, n\})) \leftrightarrow \exists_{xy}(x \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ P(x)))$

Аналогично предыдущему, но указатель "контекст" относится к подвыражению "обрфункция$(x)(i)$".

Существование перестановки, удовлетворяющей специальным условиям

$\forall_n(n$ – натуральное $\to \exists_f($перестановка$(f,\{1,\dots,n\})$ & четность$(f)=0))$

$\forall_n(n$ – натуральное $\to \exists_f($перестановка$(f,\{1,\dots,n\})$ & четность$(f)=1) \leftrightarrow 2\le n)$

Приемы имеют заголовок "связка". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{Fmnp}(\exists_x($перестановка$(x,\{1,\dots,n\})$ & $\neg(x(m)=F(x(p))))\leftrightarrow\neg(m=p)$ &
$\exists_{ij}(i\in\ \{1,\dots,n\}$ & $j\in\{1,\dots,n\}$ & $\neg(i=j)$ & $\neg(i=F(j)))\ \vee$
$m=p$ & $\exists_i(\neg(i=F(i))$ & $i\in\{1,\dots,n\}))$

Прием имеет заголовок "связка". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри $F(x(p))$ подвыражения "$x(p)$". Уровень срабатывания приема равен 1.

$\forall_{abijn}(n-$натуральное & $i\in\{1,\dots,n\}$ & $j\in\{1,\dots,n\}$ & перестановка$(a,\{1,\dots,n\})\to$
$\exists_c($перестановка$(c,\{1,\dots,n\})$ & $c(i)=j$ & $b=$ произведение$(a,c))\leftrightarrow$
перестановка$(b,\{1,\dots,n\})$ & $b(i)=a(j))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abijn}(n-$натуральное & $i\in\{1,\dots,n\}$ & $j\in\{1,\dots,n\}$ & перестановка$(a,\{1,\dots,n\})\to$
$\exists_c($перестановка$(c,\{1,\dots,n\})$ & $c(i)=j$ & $b=$ произведение$(c,a))\leftrightarrow$
перестановка$(b,\{1,\dots,n\})$ & $b($обрфункция$(a)(i))=j)$

Аналогично предыдущему.

Кванторная свертка условия убывания перестановки

$\forall_{fmnk}(k=n-m+1$ & перестановка$(f,\{m,\dots,n\})\to\forall_{ij}(i\in\{1,\dots,k\}$ &
$j\in\{i+1,\dots,k\}\to 0<f(i)-f(j))\leftrightarrow f=\lambda_i(n-i+1,i\in\{1,\dots,k\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - выделен указателем "идентификатор". Указатель "кванторнаясвертка" допускает применение приема к квантору существования путем его преобразования в квантор общности. Уровень срабатывания равен 1.

Определение максимума либо минимума по множеству перестановок: варьирование перестановки с помощью транспозиции

$\forall_{ABgnyz}(\mathrm{card}B=n$ & $\mathrm{Max}(g,\mathrm{set}_x($перестановка$(x,B)),y,z)$ & $g=\lambda_f(A(f),$
перестановка$(f,B))\to y\subseteq\mathrm{set}_p($перестановка$(p,B)$ & $\forall_{ij}(i\in\{1,\dots,n\}$ & $j\in\{1,\dots,n\}$
& $i<j\to 0\le A(p)-A(\lambda_k((p(i)$ при $k=j,$ иначе $(p(j)$ при$(k=i,$ иначе $p(k))),$
$k\in\{1,\dots,n\}))))))$

$\forall_{ABgnyz}(\mathrm{card}B=n$ & $\mathrm{Min}(g,\mathrm{set}_x($перестановка$(x,B)),y,z)$ & $g=\lambda_f(A(f),$
перестановка$(f,B))\to y\subseteq\mathrm{set}_p($перестановка$(p,B)$ & $\forall_{ij}(i\in\{1,\dots,n\}$ & $j\in\{1,\dots,n\}$
& $i<j\to 0\le A(\lambda_k((p(i)$ при $k=j,$ иначе $(p(j)$ при$(k=i,$ иначе $p(k))),$
$k\in\{1,\dots,n\})))-A(p))))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Переменная A функциональная. Выражение y не содержит неизвестных, а выражение n - содержит. Уровень срабатывания равен 3.

Определение неизвестной перестановки по найденным ее разрядам

$\forall_{fn}$(перестановка$(f, \{1, \ldots, n\})$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to f(i) = t(i)) \leftrightarrow$
взаимнооднозначно(f) & $f =$ таблица$(\{; \lambda_i(i \to t(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}))$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и применяется к условиям задачи на описание. Указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности с группой равенств и формирование терма "отображение(...)" в виде набора. Переменная t функциональная. Переменная f идентифицируется с неизвестной, выражения n и t не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

Синтезатор усмотрения перестановки "смперестановка"

Синтезатор реализует утверждение "перестановка(f, A)", получая на вход обозначающее функцию выражение f и определяя множество A значений данной функции. Одновременно проверяется, что f является перестановкой.

1. Усмотрение из посылок.

   $\forall_{ab}$(перестановка$(a, b) \to$ перестановка$(a, b))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Обратная функция.

   $\forall_{abn}$(перестановка(a, b) & $b = \{1, \ldots, n\} \to$ перестановка(обрфункция$(a), b))$

   Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

3. Суперпозиция.

   $\forall_{fghn}(\mathrm{Dom}(g) = \{1, \ldots, n\}$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to g(i) = f(h(i)))$ &
   перестановка(f, a) & $a = \{1, \ldots, n\}$ & перестановка$(\lambda_i(h(i), i \in \{1, \ldots, n\}), b)$
   & $b = \{1, \ldots, n\} \to$ перестановка$(g, \{1, \ldots, n\}))$

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Третий и пятый антецеденты реализуют рекурсивные обращения, четвертый и шестой - выделены указателем "идентификатор". Переменная h функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

4. Тождественная функция.

   $\forall_n(n -$ натуральное $\to$ перестановка$(\lambda_i(i, i \in \{1, \ldots, n\}), \{1, \ldots, n\}))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Противоположный порядок.

   $\forall_n(n -$ натуральное $\to$ перестановка$(\lambda_i(n + 1 - i, i \in \{1, \ldots, n\}), \{1, \ldots, n\}))$

   Аналогично предыдущему.

6. Конечная таблица.

   $\forall_{abcn}(a = \{; \lambda_i(b(i) \to c(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}$ & взаимнооднозначно(таблица$(a))$
   & $\{; \lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\})\} \subseteq \{; \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\})\} \to$
   перестановка(таблица$(a), \{; \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", два других - обрабатываются проверочными операторами. Переменные b, c функциональные. Указатели "развертка" определяют идентификацию и запись термов "отображение" в виде наборов. Уровень срабатывания равен 1.

Синтезатор разложения перестановки в независимые циклы "разложциклы"

Синтезатор реализует утверждение "разложциклы(a, b)". Значением входной переменной a служит выражение для конечного множества отображений, определенных на непересекающихся одноэлементных множествах и задающих взаимно-однозначное отображение конечного множества на себя. Выходной переменной b присваивается выражение для конечного множества независимых циклических перестановок, задающих то же самое отображение.

1. Шаг разложения.

   $\forall_{abcdef}(\text{разложциклы}(e, f)\ \&\ \text{цепьзначений}(b, \{;c\}, d, e) \to$
   $\text{разложциклы}(\{a \to b; c\}, \{\text{циклперест}(\text{префикс}(a, d))\} \cup f))$

   Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается пакетным синтезатором "цепьзначений", описываемым ниже. Уровень срабатывания равен 1.

2. Завершение разложения.

   разложциклы$(\emptyset, \emptyset)$

   Уровень срабатывания равен 2.

Синтезатор нахождения результата последовательных применений отображения "цепьзначений"

Синтезатор реализует утверждение "цепьзначений(a, b, c, d)". Значением входной переменной b является выражение для конечного множества функций B с одноэлементными попарно непересекающимися областями определения, значением входной переменной a - выражение для некоторого объекта A. Значением выходной переменной c служит выражение для набора, начинающегося с A и такого, что каждый последующий его элемент получен из предыдущего применением некоторой функции множества B. Если возникает элемент, уже имеющийся в наборе, то он не добавляется, и набор обрывается. Выходной переменной d присваивается выражение для подмножества функций множества B, не использованных при построении c.

1. Шаг рекурсии.

   $\forall_{abcde}(\text{цепьзначений}(b, \{;c\}, d, e) \to \text{цепьзначений}(a, \{a \to b; c\}, \text{префикс}(a, d), e))$

   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Указател "список" определяет выбор элемента "$a \to b$" на произвольной позиции соответствующего набора. Уровень срабатывания равен 1.

2. Завершение цепочки.

   $\forall_{ab}(\text{цепьзначений}(a, b, \text{пустоеслово}, b))$

   Прием срабатывает на уровне 2, когда возможности срабатывания предыдущего приема исчерпаны.

Нормализатор общей стандартизации "нормциклперест"

Нормализатор имеет единственный прием, обеспечивающий перенесение в начало списка наименьшего элемента:

$\forall_{anij}(\text{точкамин}(a,i,j)\ \&\ \neg(i=1) \rightarrow \text{циклперест}(\lambda_k(a(k), k \in \{1,\dots,n\})) =$
$\text{циклперест}(\lambda_k((a(k+i-1)\ \text{при}\ k \leq n-i+1,\ \text{иначе}\ a(k-n+i-1)), k \in \{1,\dots,n\})))$

Антецеденты выделены указателем "программа". Указатели "развертка" определяют идентификацию и запись термов "отображение(...)" в виде наборов. При этом исходный набор состоит из десятичных чисел и имеет длину более единицы. Указатель "нормвариант" обеспечивает программное вычисление значения условного выражения в заменяющем терме.

Синтезатор перечисления перестановок на заданном конечном множестве "смперестановки"

Синтезатор реализует утверждение "перестановка(a,b)". Значением входной переменной b служит выражение для конечного множества, заданного перечислением элементов. Выходная переменная a перечисляет выражения для наборов - всевозможных перестановок данного множества.

1. Одноэлементное множество.

   $\forall_a(\text{перестановка}((a), \{a\}))$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Шаг рекурсии.

   $\forall_{abf}(\text{перестановка}(f, \{;b\}) \rightarrow \text{перестановка}(\text{префикс}(a,f), \{a;b\}))$

   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Указатель "список" определяет выбор элемента a на проивзольной позиции набора. В случае пустого остаточного списка b прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

2.3 Приемы, связанные с матрицами

Ниже приводятся приемы, используемые при сканировании задачи либо в пакетных операторах логического уровня. Для быстрых вычислений созданы также пакеты продукций, работающих с матрицами, представленными как наборы наборов чисел. Обращение к ним обеспечивается специальными приемами сканирования задачи. Все эти "нелогические" вычисления будут рассмотрены в отдельной главе данной книги. Как и логические вычисления, они реализованы на ГЕНОЛОГе.

Усмотрение матрицы

Прием усматривает истинность утверждений вида "матрица(A)", анализируя заголовок выражения A. Его теорема имеет вид "родобъекта(матрица)". Прием использует справочник "тип" для определения списка типов значения выражения A, и если в этот список попадает символ "матрица", то заменяет утверждение "матрица(A)" на логическую константу "истина". Уровень срабатывания равен 0.

Существование матрицы с заданными размерами

$\forall_{Amn}(m$ – натуральное & n – натуральное $\to \exists_x($матр$(x, A, m, n)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

Усмотрение матрицы заданных размеров над заданным множеством

$\forall_{ABmnk}($матр$(A, \mathbb{R}, m, k)$ & матр$(B, \mathbb{R}, m, k) \to$ матр$(A + B, \mathbb{R}, m, k))$

Знаком $+$ обозначен символ "плюсфунк". Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABmnk}($матр$(A, \mathbb{R}, m, k)$ & матр$(B, \mathbb{R}, m, k) \to$ матр$(A \cdot B, \mathbb{R}, m, k))$

Аналогично предыдущему, но точкой обозначен символ "умножматр".

$\forall_{Aamn}($матр$(a, A, m, n) \to$ матр$(a, A, m, n))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Mamnpq}(\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\} \to a(i, j) \in M)$ & $n = p$ & $m = q \to$ матр$(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\}), M, p, q))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "матрица" задает идентификацию терма "отображение(...)" с выражением, непосредственно определяющим прямоугольную матрицу через ее строки либо столбцы. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два других - заданы указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Aan}(l(a) = n$ & $\mathrm{Val}(a) \subseteq A \to$ матр(диагматр$(a), A, n, n))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afmn}($матр$(f, a, m, n) \leftrightarrow f$ – функция & $\mathrm{Dom}(f) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

Переход от задания матрицы столбцами к заданию ее строками

$\forall_{amn}(l(a(1)) = m \to$ столбцы$(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})) =$ строки$(\lambda_j(a(i)(j), j \in \{1, \ldots, n\}), j \in \{1, \ldots, m\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная a функциональная. Указатель "развертка" определяет идентификацию и запись всех встречающихся в теореме приема термов "отображение" через наборы. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 0.

Подстановка явного выражения для матрицы согласно равенству из посылок

$\forall_{ABC}(B = C \to AB = AC)$

$\forall_{ABC}(B = C \to BA = CA)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение C имеет заголовок "строки", а выражение B не имеет такого заголовка. Уровень срабатывания равен 1.

Равенство матриц

$\forall_{abmn}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m\}) = \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m\}) \leftrightarrow \forall_{ij}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m\} \to a(i,j) = b(i,j)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки. Точкой привязки приема служит символ "равно". Указатель "развертка" определяет выписывание квантора общности в заменяемой части как конъюнкции равенств соответствующих элементов матриц. Уровень срабатывания равен 0.

Внесение минуса под матрицу

$\forall_{amn}(-(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m\}) = \lambda_{ij}(-a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m\}))$

Посредством знака - в левой части обозначен символ "минусфунк". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Преобразуемое выражение является операндом одной из операций "плюсфунк", "экспматр". Уровень срабатывания равен 1.

Умножение матрицы на коэффициент

$\forall_{abmn}(b\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m\}) = \lambda_{ij}(ba(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,m\}))$

Посредством знака "умножение" в левой части обозначен символ "числкоэфф". Преобразуемое выражение является операндом одной из операций "плюсфунк", "минусфунк", "умножматр", "степеньматр". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_a(1 \cdot a = a)$

Посредством знака "умножение" обозначен символ "числкоэфф". Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Сложение матриц

$\forall_{abmn}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) + \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,m\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) = \lambda_{ij}(a(i,j) + b(i,j), i \in \{1,\dots,m\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Уровень срабатывания равен 1. Созданы две версии приема, для вещественного и комплексного случаев. В обоих случаях сложение матриц обеспечивается операцией "плюсфунк". В комплексном случае для сложения элементов матриц, вместо операции "плюс", используется операция "Плюс". Различаются два случая по наличию мнимой единицы в заменяемом терме.

Умножение матриц

$$\forall_{abmnk}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,k\}) = \lambda_{ij}(\textstyle\sum_{p=1}^{n} a(i,p)b(p,j), i \in \{1,\dots,m\} \ \& \ j \in \{1,\dots,k\}))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы в заменяющей части как обычной суммы. Созданы две версии приема - для вещественного и комплексного случаев. Во втором случае заменяющая часть использует комплекснозначные операции "Плюс" и "Умножение". Для случая, когда матрицы заданы непосредственно описателями "отображение", создана еще и третья версия. В ней указатели "матрица" и "развертка" отсутствуют, а переменные a, b выделены как функциональные. Уровни срабатывания всех версий равны 3.

Степень матрицы

1. Степень единица.

   $\forall_A(A^1 = A)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Понижение степени.

   $\forall_{ABn}(0 \leq n - 2 \ \& \ B = A^{n-1} \rightarrow A^n = AB)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная n идентифицируется с натуральной константой, меньшей 50. Матрица A задана перечислением строк либо столбцов. Если она неконстантная, то n не превосходит 3. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором возведения матрицы в степень "нормстепеньматр". Заменяющее выражение обрабатывается нормализатором умножения матриц "нормумножматр". Уровень срабатывания равен 3.

3. Степень треугольной матрицы второго порядка.

   $$\forall_{abn}(0 < n \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix})$$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

4. Степень матрицы поворота в плоскости.

$$\forall_{an}(0 < n \to \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(an) & -\sin(an) \\ \sin(an) & \cos(an) \end{pmatrix})$$

$$\forall_{an}(0 < n \to \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(an) & \sin(an) \\ -\sin(an) & \cos(an) \end{pmatrix})$$

Приемы имеют заголовок "воройтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Степень кососимметрической матрицы второго порядка.

$$\forall_{abn}(0 < a \mathbin{\&} 0 < n \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n =$$
$$(a^2+b^2)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n \operatorname{arctg}(b/a)) & \sin(n \operatorname{arctg}(b/a)) \\ -\sin(n \operatorname{arctg}(b/a)) & \cos(n \operatorname{arctg}(b/a)) \end{pmatrix})$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "отрицание" разрешает перестановку знаков "минус" между двумя вхождениями переменной b при идентификации. Уровень срабатывания равен 3.

6. Вычисление обратной матрицы с помощью оператора "уравнматр".

$$\forall_{Banx}((\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\})x = \lambda_{ij}((1 \text{ при } i = j, \text{ иначе } 0),$$
$$i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\})) = (x = B) \to (\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&}$$
$$j \in \{1,\ldots,n\}))^{-1} = B)$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Антецедент выделен указателем "идентификатор", причем x идентифицируется с новой переменной. Левая часть антецедента обрабатывается нормализатором решения матричных уравнений "уравнматр", которому сообщается, что неизвестной служит x. Уровень срабатывания равен 3. Для комплексного случая создана отдельная версия приема, в которой используется комплекснозначный нормализатор "Уравнматр". Случаи различаются по наличию мнимой единицы в заменяемом терме.

7. Вычисление обратной матрицы фиксированного размера через алгебраические дополнения ее элементов.

$$\forall_{adn}(d = \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\})) \to$$
$$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}))^{-1} =$$
$$((1/d)\lambda_{ij}((-1)^{i+j}\det(\lambda_{pq}(((a(p,q) \text{ при } q < i, \text{ иначе } a(p,q+1)) \text{ при } p < j,$$
$$\text{иначе } (a(p+1,q) \text{ при } q < i, \text{ иначе } a(p+1,q+1))), p \in \{1,\ldots,n-1\} \mathbin{\&}$$
$$q \in \{1,\ldots,n{-}1\})), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}) \text{ при } \neg(d = 0), \text{ иначе неопред}))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Условия выражений "вариант" обрабатываются программынм образом, так что матрицы выписываются без символов "вариант". Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Рассматриваемая матрица не константная.

Определители вычисляются вспомогательными задачами на преобразование, причем проверяется, что d не содержит символа "определитель". Уровень срабатывания равен 3.

8. Матрица, обратная к экспоненте.

   $\forall_A((\exp A)^{-1} = \exp(-A))$

   Имеются в виду операции "степеньматр" и "экпматр". Заголовок приема - "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Транспонирование матрицы

$\forall_{amn}(l(a(1)) = m \to \text{транспонир}(\text{строки}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\}))) =$
$\text{строки}(\lambda_j(\lambda_i(a(i)(j), i \in \{1, \ldots, n\}), j \in \{1, \ldots, m\})))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "развертка" определяют идентификацию и запись термов "отображение(...)" в виде наборов. Переменная a функциональная. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 0.

След матрицы

$\forall_{an}(\text{следматрицы}(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\})) = \sum_{i=1}^{n} a(i, i))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "матрица" задает идентификацию терма "отображение(...)" с выражением, непосредственно определяющим прямоугольную матрицу через ее строки либо столбцы. При этом указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию такой матрицы, через равенство в посылках. Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы как обычной. Уровень срабатывания равен 1.

Диагональные матрицы

1. Сумма диагональных матриц.

   $\forall_{abn}(l(a) = n \ \& \ l(b) = n \to \text{диагматр}(a) + \text{диагматр}(b) =$
   $\text{диагматр}(\lambda_i(a(i) + b(i), i \in \{1, \ldots, n\})))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

2. Произведение диагональных матриц.

   $\forall_{abn}(l(a) = n \ \& \ l(b) = n \to \text{диагматр}(a) \cdot \text{диагматр}(b) =$
   $\text{диагматр}(\lambda_i(a(i)b(i), i \in \{1, \ldots, n\})))$

   Аналогично предыдущему.

3. Матрица, обратная к диагональной.

   $\forall_{an}(l(a) = n \ \& \ \neg(a(i) = 0) \to (\text{диагматр}(a))^{-1} =$
   $\text{диагматр}(\lambda_i(1/a(i), i \in \{1, \ldots, n\})))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. При этом в качестве i берется новая переменная, и к списку посылок оператора присоединяется утверждение "$i \in \{1, \ldots, n\}$". Уровень срабатывания равен 2.

4. Определитель диагональной матрицы.

   $\forall_{an}(l(a) = n \to \det(\text{диагматр}(a)) = \prod_{i=1}^{n} a(i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

5. Переход к параметрическому заданию.

   $\forall_{Aan}(\text{матр}(a, A, n, n) \to \text{Диагматр}(a) \leftrightarrow \exists_b(b - \text{слово}\ \&\ l(b) = n\ \&$
   $\text{Val}(b) \subseteq A\ \&\ a = \text{диагматр}(b)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, либо на исследование, либо задачи на описсание, не имеющей цели "прямойответ". Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, применяемая к условию задачи на описание. Выражение a содержит неизвестные, а выражения A, n - не содержат. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания этой версии равен 2.

6. Усмотрение диагональной матрицы.

   $\forall_a(\text{Диагматр}(\text{диагматр}(a)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

7. Равенство диагональных матриц.

   $\forall_{ab}(\text{диагматр}(a) = \text{диагматр}(b) \leftrightarrow a = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Симметрические и кососимметрические матрицы

1. Вывод определения.

   $\forall_{an}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}\ \&$
   $\text{симметричматр}(a) \to \forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\} \to a(i, j) = a(j, i)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, на исследование либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5.

   $\forall_{an}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}\ \&\ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
   $\text{кососимметричматр}(a) \to \forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\} \to a(i, j) = -a(j, i)))$

   Аналогично предыдущему, но проверочным оператором обрабатываются первый и третий антецеденты.

2. Расшифровка по определению.

   $\forall_{an}(\text{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \text{симметричматр}(a) \leftrightarrow$
   $\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\} \to a(i, j) = a(j, i)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровни срабатывания равны 6 и 7 (первый - для корневого случая, второй - для случая отрицания).

$\forall_{an}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}\ \&\ \mathrm{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \to \text{кососимметричматр}(a) \leftrightarrow \forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\} \to a(i, j) = -a(j, i)))$

Аналогично предыдущему; второй антецедент обрабатывается проверочным оператором.

3. Симметричность единичной матрицы.

   $\forall_n(\text{симметричматр}(\text{единичнматр}(n)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Развертка условия симметричности явно заданной матрицы.

   $\forall_{an}(\text{симметричматр}(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\})) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{2, \ldots, n\} \to \forall_j(j \in \{1, \ldots, i-1\} \to a(i, j) = a(j, i))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "матрица" задает идентификацию терма "отображение(...)" с выражением, непосредственно определяющим прямоугольную матрицу через ее строки либо столбцы. Указатели "развертка" определяют выписывание кванторов общности в виде конъюнкций. Уровень срабатывания равен 1.

Предел матрицы

$\forall_{abcmn}(\lim_{x \to b \backslash c} \lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, m\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}) = \lambda_{ij}(\lim_{x \to b \backslash c} a(i, j), i \in \{1, \ldots, m\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcfmn}(\lim_{x \to b \backslash c} f(x)\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, m\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}) = \lim_{x \to b \backslash c} f(x)\lambda_{ij}(\lim_{x \to b \backslash c} a(i, j), i \in \{1, \ldots, m\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}))$

Аналогично предыдущему. Переменная f функциональная.

Определители

1. Определители малых порядков.

   (a) Непосредственное вычисление.

   $\forall_a(\det(a) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Посредством a прорисован терм "строки(набор(набор(a)))", задающий матрицу порядка 1×1. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcd}(\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

(b) $\forall_{abcdefpqr}(\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix} = aer + dqc + pbf - pec - dbr - afq)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выполнено хотя бы одно из условий:

i. Решается задача на преобразование, не имеющая надзадачи (введенная непосредственно из задачника), либо имеющая цель "определитель".

ii. Матрица имеет не более трех нечисловых элементов.

iii. Матрица имеет не более 3 параметров.

Если в заменяющей сумме имеются дробные слагаемые, то она обрабатывается нормализатором "видумножение". Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, применяемая в задачах на исследование. Если преобразуется условие отличия определителя матрицы от нуля, то уровень срабатывания равен 4, иначе он равен 8. Заменяющая сумма обрабатывается нормализатором "видумножение". Введен средний ограничитель трудоемкости.

$\forall_{abcdef}(\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ce - bf & af - cd & bd - ae \end{pmatrix} = -((bf - ce)^2 + (af - cd)^2 + (bd - ae)^2))$

$\forall_{abcdef}(\det \begin{pmatrix} -ce + bf & -af + cd & -bd + ae \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix} = -((bf - ce)^2 + (af - cd)^2 + (bd - ae)^2))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 3. Нормализатор "видумножение" не используется.

(c) Вынесение за знак определителя общего множителя элементов строки.

$\forall_{abcdefghip}(\det \begin{pmatrix} ap & bp & cp \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = p \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "сдвиг" разрешает одновременную циклическую перестановку строк обоих определителей. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Отбрасывание слагаемых, пропорциональных другой строке.

$\forall_{abcdefmpqr}(\det \begin{pmatrix} a + md & b + me & c + mf \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Разрешаются одновременные одинаковые перестановки строк определителей. Уровень срабатывания приема равен 1.

(e) Перестановка двух строк.

$\forall_{abcdefpqr}(\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix})$

$\forall_{abcdefpqr}(\det \begin{pmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} p & q & r \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix})$

Приемы имеют заголовок "второйтерм", Перестановки строк выполняются для лексикографической стандартизации определителей, если непосредственное их вычисление нецелесообразно. Уровень срабатывания равен 3.

2. Равные строки.

   $\forall_{ab}(\det(\text{строки}(a, a; b) = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "список" определяет идентификацию пары строк в наборе без учета порядка элементов набора. Уровень срабатывания равен 0.

3. Переход от задания определителя константного порядка через описатель "отображение" к заданию его через набор строк.

   $$\begin{gathered}\forall_{An}(\det(\lambda_{ij}(A(i, j), i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\})) = \\ \det(\text{строки}(\lambda_k(\lambda_l(A(k, l), l \in \{1, \dots, n\}), k \in \{1, \dots, n\}))))\end{gathered}$$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Переменная A функциональная, переменная n идентифицируется с натуральной константой. Указатели "развертка" определяют запись термов "отображение" в заменяющей части в виде наборов. Уровень срабатывания равен 2.

4. Вычисление определителя путем разложения по строке.

   $$\begin{gathered}\forall_{amn}(m \in \{1, \dots, n\} \to \det(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\})) = \\ \textstyle\sum_{k=1}^{n}(a(m, k)(-1)^{m+k} \det(\lambda_{ij}(((a(i, j) \text{ при } j < k, \text{ иначе } a(i, j+1)) \text{ при } i < m, \\ \text{иначе } (a(i+1, j) \text{ при } j < k, \text{ иначе } a(i+1, j+1))), i \in \{1, \dots, n-1\} \ \& \\ j \in \{1, \dots, n-1\}))))\end{gathered}$$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Переменная n идентифицируется с натуральной константой, большей 3. Антецедент выделен указателем "программа"; он перечисляет номера строк, относительно которых будет предпринята попытка разложения. Указатели "матрица" определяют идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Указатель "развертка" определяет запись конечной суммы в виде обычной. Либо задача не имеет цели "определитель", причем преобразуемый определитель неконстантный, либо выбранная m-я строка имеет наибольшее количество нулей. Кроме того, если задача не имеет цели "определитель" и имеет надзадачу, то никакая строка, кроме m-й, не должна иметь неконстантные элементы. Уровень срабатывания равен 4.

5. Отбрасывание слагаемых строки, пропорциональных другой строке.

   $$\begin{gathered}\forall_{abckmn}(k \in \{1, \dots, n\} \ \& \ m \in \{1, \dots, n\} \ \& \ \neg(m = k) \ \& \\ \forall_p(p \in \{1, \dots, n\} \to a(k, p) = b(p) + ca(m, p)) \to \det(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \dots, n\} \ \& \\ j \in \{1, \dots, n\})) = \det(\lambda_{ij}((a(i, j) \text{ при } \neg(i = k), \text{ иначе } b(j)), i \in \{1, \dots, n\} \ \& \\ j \in \{1, \dots, n\})))\end{gathered}$$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Первые три антецедента выделены указателем "программа", четвертый -

указателем "идентификатор". Указатель "контекст" определяет идентификацию коэффициента c, представляя выражение "$a(k,1)$" в виде "$X + ca(m,1)$". Переменная b функциональная. Условное выражение в заменяющем терме исключается путем программной проверки условия. Уровень срабатывания равен 3.

6. Отбрасывание слагаемых столбца, пропорциональных другому столбцу.

   $\forall_{abckmn}(k \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ m \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(m = k)\ \&$
   $\forall_p(p \in \{1,\ldots,n\} \to a(p,k) = b(p) + ca(p,m)) \to \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&$
   $j \in \{1,\ldots,n\})) = \det(\lambda_{ij}((a(i,j)$ при $\neg(j = k),$ иначе $b(i)), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&$
   $j \in \{1,\ldots,n\})))$

   Аналогично предыдущему, но указатель "контекст"представляет выражение "$a(1,k)$" в виде "$X + ca(1,m)$".

7. Определитель произведения квадратных матриц.

   $\forall_{ab}($квадрматр$(a)\ \&$ квадрматр$(b) \to \det(ab) = \det(a)\det(b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Определители в заменяющем терме обрабатываются нормализатором "нормопределитель". Уровень срабатывания равен 1.

8. Определитель обратной матрицы.

   $\forall_a($квадрматр$(a)\ \&\ \neg(\det(a) = 0) \to \det(a^{-1}) = 1/(\det(a)))$

   Аналогично предыдущему.

9. Существование матрицы с заданным определителем.

   $\forall_{an}(a -$ число $\&\ n -$ натуральное $\to \exists_x($матр$(x, \mathbb{R}, n, n)\ \&\ \det(x) = a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, имеющая заголовок "связка". Ее уровень срабатывания равен 3.

10. Определители матриц, размер которых зависит от параметров.

    В этом подразделе собраны приемы вычисления определителей n-го порядка. Задачи на вычисление таких определителей решаются отчасти с помощью стандартных шаблонов определителей, отчасти - за счет вывода в посылках рекуррентных соотношений, сводящих определитель к определителям меньших порядков. Обучение лишь начато, и приводимый далее материал имеет, главным образом, иллюстративный характер. Для описания вида определителей приходится использовать громоздкие термы со вложенными условными выражениями. Возможно, целесообразно исследовать альтернативный подход, в котором "геометрическое строение" определителя описывалось бы не выражением, а группой утверждений.

    (a) Непосредственно вычисляемые определители.

      i. Треугольная матрица.
      $\forall_{an}(a(i,j) = 0 \to \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})) = \prod_{i=1}^{n} a(i,i))$
      Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на преобразование. Либо заменяемый терм находится в условии задачи, либо

- в посылке, не имеющей комментария (определитель Замена). Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормэлемент", которому передаются дополнительные посылки "$i \in \{1,\dots,n\}$", "$j \in \{1,\dots,n\}$", "$j < i$". Переменная a функциональная. Максимальный уровень текущей задачи не менее 5. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, в которо вместо посылки "$j < i$" рассматривается посылка "$i < j$".

$\forall_{an}(a(i,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} a(i, n+1-i))$

Это - случай треугольных матриц относительно побочной диагонали. Он аналогичен предыдущему, но нормализатору передаются посылки "$i \in \{1,\dots,n\}$", "$j \in \{1,\dots,n-i\}$". Во второй версии приема берутся посылки "$i \in \{1,\dots,n\}$", "$j \in \{n-i+2,\dots,n\}$".

ii. Матрица, приводящаяся к треугольному виду путем рассмотрения линейных комбинаций с крайней строкой либо крайним столбцом.
$\forall_{akmnp}(a(1,1) = kp \ \& \ a(i,1) = km \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ pa(i,j) - ma(1,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})) =$
$k \prod_{i=2}^{n}(pa(i,i) - ma(1,i))/(p^{n-2}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на преобразование. Либо заменяемый терм находится в условии задачи, либо - в посылке, не имеющей комментария (определитель Замена). Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Переменная a функциональная. Выражения $a(\dots)$ в антецедентах обрабатываются нормализаторами "нормэлемент" и "норм". При обработке выражения $a(i,1)$ используется дополнительная посылка "$i \in \{2,\dots,n\}$", при обработке выражения $a(i,j)$ - посылки "$i \in \{2,\dots,n\}$"и "$j \in \{1,\dots,i-1\}$", при обработке выражения $a(1,j)$ - посылка "$j \in \{1,\dots,n-1\}$". Левая часть четвертого антецедента обрабатывается нормализаторами "нормварианты" и "норм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{akmnp}(a(1,1) = kp \ \& \ a(1,j) = km \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ pa(i,j) - ma(i,1) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})) =$
$k \prod_{i=2}^{n}(pa(i,i) - ma(1,i))/(p^{n-2}))$

Аналогично предыдущему, но наборы дополнительных посылок при обработке выражений $a(1,j)$, $a(i,j)$ и $a(i,1)$ суть, соответственно,
"$j \in \{2,\dots,n\}$"; "$i \in \{1,\dots,n-1\}$", "$j \in \{i+1,\dots,n\}$", и
"$i \in \{1,\dots,n-1\}$".

$\forall_{akmnp}(a(n,n) = kp \ \& \ a(i,n) = km \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ pa(i,j) - ma(n,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})) =$
$k \prod_{i=1}^{n-1}(pa(i,i) - ma(n,i))/(p^{n-2}))$

Аналогично предыдущему. Наборы дополнительных посылок суть:
"$i \in \{1,\dots,n-1\}$"; "$i \in \{1,\dots,n-1\}$", "$j \in \{i+1,\dots,n\}$", и
"$j \in \{2,\dots,n\}$".

$\forall_{akmnp}(a(1,n) = kp \ \& \ a(i,n) = km \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ pa(i,j) - ma(1,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})) =$

$(-1)^{n(n-1)/2}k\prod_{i=2}^{n}(pa(i,n+1-i)-ma(1,n+1-i))/(p^{n-2}))$

Аналогично предыдущему. Наборы дополнительных посылок суть: "$i\{2,\dots,n\}$"; "$i\in\{2,\dots,n\}$", "$j\in\{n-i+2,\dots,n\}$", и "$j\in\{1,\dots,n-1\}$".

iii. Матрица, приводящаяся к треугольному виду путем рассмотрения линейных комбинаций соседних строк либо столбцов.
$\forall_{an}(\neg(a(i,n)=0)\ \&\ a(i,j)a(i+1,n)-a(i,n)a(i+1,j)=0\rightarrow$
$\det(\lambda_{ij}(a(i,j),i\in\{1,\dots,n\}\ \&\ j\in\{1,\dots,n\}))=(-1)^{n(n-1)/2}a(1,n)\times$
$\prod_{i=1}^{n-1}(a(i+1,n-i)a(i,n)-a(i,n-i)a(i+1,n))/\prod_{i=1}^{n-1}a(i,n))$

Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется в задачах на преобразование. Либо заменяемый терм находится в условии задачи, либо - в посылке, не имеющей комментария (определитель Замена). Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Переменная a функциональная. Выражения $a(\dots)$ обрабатываются нормализаторами "нормэлемент" и "норм". В случае выражений $a(i,n)$, $a(i+1,n)$, $a(i+1,n-i)$ и $a(i,n-i)$ вводится дополнительная посылка "$i\in\{1,\dots,n-1\}$"; в случае выражений $a(i,j)$ и $a(i+1,j)$ - посылки "$i\in\{1,\dots,n-1\}$" и "$j\in\{n-1-i,\dots,n-1\}$". При проверке первого антецедента тоже вводится дополнительная посылка "$i\in\{1,\dots,n-1\}$". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{akmnp}(a(i+1,1)=kp\ \&\ a(i,1)=km\ \&\ \neg(m=0)\ \&$
$a(i+1,j)m-a(i,j)p=0\rightarrow$
$\det(\lambda_{ij}(a(i,j),i\in\{1,\dots,n\}\ \&\ j\in\{1,\dots,n\}))=$
$a(1,1)\prod_{i=1}^{n-1}(a(i+1,i+1)m-a(i,i+1)p)/\prod_{i=1}^{n-1}m)$

Контекст срабатывания прежний. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Проверочному оператору, а также нормализаторам, обрабатывающим выражения $a(i+1,1)$, $a(i,1)$, $a(i+1,i+1)$, $a(i,i+1)$, передается дополнительная посылка "$i\{1,\dots,n-1\}$". При обработке выражений $a(i+1,j)$ и $a(i,j)$ используются дополнительные посылки "$i\{1,\dots,n-1\}$"и "$j\in\{1,\dots,n-1\}$". Заметим, что выражения m,p, вообще говоря, зависят от i. Уровень срабатывания равен 3.

iv. Матрица, приводящаяся к виду, у которого ненулевые элементы встречаются только на главной диагонали и на крайних строке и столбце.
$\forall_{abcn}(a(i,j)-a(1,j)=0\ \&\ a(i,n+1-i)-a(1,n+1-i)=b(i)\ \&$
$a(i,n)-a(1,n)=c(i)\rightarrow$
$\det(\lambda_{ij}(a(i,j),i\in\{1,\dots,n\}\ \&\ j\in\{1,\dots,n\}))=$
$(-1)^{n(n-1)/2}(a(1,n)\prod_{i=2}^{n}b(i)-$
$\sum_{i=1}^{n-1}(a(1,i)c(n+1-i)\prod_{j,j\in\{2,\dots,n\}\setminus\{n+1-i\}}b(j))))$

Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется в условии задачи на преобразование. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная a функциональная. При обработке нормализаторами выражения $a(1,j)$ используется дополнительная посылка "$j\in\{1,\dots,n-1\}$"; при обработке выражений $a(i,n+1-i)$, $a(1,n_1-i)$ и $a(i,n)$ - посылка "$i\in\{2,\dots,n\}$"; при обработке выражения $a(i,j)$ - обе эти посылки. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcn}(a(i,j) - a(1,j) = 0 \;\&\; a(i,i) - a(1,i) = b(i) \;\&\; a(i,1) - a(1,1) = c(i) \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \;\&\; j \in \{1,\ldots,n\})) = a(1,1)\prod_{i=2}^{n} b(i) - \sum_{i=2}^{n}(a(1,i)c(i)\prod_{j,j\in\{2,\ldots,n\}\setminus\{i\}} b(j)))$

Аналогично предыдущему. При обработке выражения $a(1,j)$ используется дополнительная посылка "$j \in \{2,\ldots,n\}$"; при обработке выражений $a(i,i)$, $a(1,i)$ и $a(i,1)$ - посылка "$i \in \{2,\ldots,n\}$"; при обработке выражения $a(i,j)$ - посылки "$i\{2,\ldots,n\}$", "$j \in \{2,\ldots,n\}$" и "$\neg(j = i)$". Уровень срабатывания равен 3.

v. Матрица, у которой ненулевые элементы встречаются только на главной диагонали, на примыкающей к ней диагонали и на крайнем столбце либо крайней строке.
$\forall_{an}(a(i,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \;\&\; j \in \{1,\ldots,n\})) = \sum_{i=0}^{n-1}((-1)^{i}a(n,n-i)\prod_{j=1}^{n-i-1} a(j,j)\prod_{j=1}^{i} a(n-j,n-j+1)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в условии задачи на преобразование. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная a функциональная. При обработке нормализаторами выражения $a(n,n-i)$ используется дополнительная посылка "$i \in \{1,\ldots,n-1\}$"; при обработке выражения $a(j,j)$ - посылка "$j \in \{1,\ldots,n\}$"; при обработке выражения $a(n-j,n-j+1)$ - посылка "$j \in \{1,\ldots,n-1\}$", и при обработке выражения $a(i,j)$ - посылки "$i \in \{1,\ldots,n-1\}$", "$j \in \{1,\ldots,n\}$", "$\neg(j = i)$", "$\neg(j = i+1)$". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{an}(a(i,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \;\&\; j \in \{1,\ldots,n\})) = \sum_{i=1}^{n}((-1)^{i+1}a(1,i)\prod_{j=2}^{i} a(j,j-1)\prod_{j=i+1}^{n} a(j,j)))$

Аналогично предыдущему. При обработке нормализаторами выражения $a(1,i)$ используется дополнительная посылка "$i \in \{1,\ldots,n\}$"; при обработке выражения $a(j,j-1)$ - посылки "$j \in \{1,\ldots,i\}$" и "$i \in \{1,\ldots,n\}$"; при обработке выражения $a(j,j)$ - посылки "$j \in \{i+1,\ldots,n\}$" и "$i \in \{1,\ldots,n\}$", и при обработке выражения $a(i,j)$ - посылки "$i \in \{2,\ldots,n\}$", "$j \in \{1,\ldots,n\}$", "$\neg(j = i)$", "$\neg(j = i-1)$".

$\forall_{an}(a(i,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \;\&\; j \in \{1,\ldots,n\})) = \sum_{i=1}^{n}((-1)^{i+1}a(i,1)\prod_{j=1}^{i-1} a(j,j+1)\prod_{j=i+1}^{n} a(j,j)))$

Аналогично предыдущему. При обработке нормализаторами выражения $a(i,1)$ используется дополнительная посылка "$i \in \{1,\ldots,n\}$"; при обработке выражения $a(j,j+1)$ - посылки "$j \in \{1,\ldots,i-1\}$" и "$i \in \{1,\ldots,n\}$"; при обработке выражения $a(j,j)$ - посылки "$j \in \{i+1,\ldots,n\}$" и "$i \in \{1,\ldots,n\}$", и при обработке выражения $a(i,j)$ - посылки "$i \in \{1,\ldots,n\}$", "$j \in \{2,\ldots,n\}$", "$\neg(j = i)$", "$\neg(j = i+1)$".

vi. Матрица, приводящаяся к треугольному виду путем прибавления к каждой строке всех предыдущих строк.
$\forall_{an}(a(1,2) + a(2,2) + a(3,2) = 0 \;\&\; \sum_{k=1}^{i} a(k,j) = 0 \rightarrow \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \;\&\; j \in \{1,\ldots,n\})) = \prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} a(k,i))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в условии задачи на преобразование. Антецеденты выделены указателем "идентификатор", причем первый из них играет роль ускоряющего фильтра. Переменная a функциональная. Конечная сумма в последнем антецеденте упрощается с помощью вспомогательной задачи, которой передаются дополнительные посылки "$i \in \{2,\dots,n\}$", "$j \in \{1,\dots,i-1\}$". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{an}(a(1,2)+a(2,2)+a(3,2)=0\ \&\ \sum_{l=1}^{i} a(l,j)=0 \to$
$\det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})) =$
$\det(\lambda_{ij}((\sum_{k=1}^{i} a(k,1)$ при $j=1$, иначе $(\sum_{k=1}^{i} a(k,j)$ при $0 \le j-i$, иначе $0))$,
$i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})))$

Идентификация такая же, как в предыдущем приеме, но конечная сумма в последнем антецеденте обрабатывается с дополнительными посылками "$i \in \{2,\dots,n\}$" и "$j \in \{2,\dots,i-1\}$". Выражение $a(k,1)$ обрабатывается нормализаторами "нормэлемент" и "норм" при дополнительной посылке "$k \in \{1,\dots,n\}$", выражение $a(k,j)$ - при дополнительных посылках "$i \in \{1,\dots,n\}$", "$j \in \{1,\dots,i\}$" и "$k \in \{1,\dots,i\}$". Уровень срабатывания равен 3.

vii. Матрица, у которой все элементы под главной диагональю одинаковы и все элементы над этой диагональю одинаковы.
$\forall_{abcn}(a(2,1)=a(3,1)\ \&\ a(i,j)=b\ \&\ a(i,j)=c \to$
$\det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})) =$
$1/(c-b)\cdot(c\prod_{i=1}^{n}(a(i,i)-b) - b\prod_{i=1}^{n}(a(i,i)-c)))$
Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в условии задачи на преобразование. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная a функциональная. Нормализаторам, обрабатывающим левую и правую части первого антецедента, передается дополнительная посылка "$3 \le n$". Правые части второго и третьего антецедентов обрабатываются нормализаторами "нормэлемент" и "норм", причем в первом случае используются дополнительные посылки "$i \in \{2,\dots,n\}$" и "$j \in \{1,\dots,i-1\}$", во втором - посылки "$i \in \{1,\dots,n-1\}$" и "$j \in \{i+1,\dots,n\}$". Результаты обработки b, c различны и не содержат переменных i, j. Уровень срабатывания приема равен 3.

(b) Ввод обозначения для определителя порядка $an+b$, где a, b - целочисленные константы.

Вводимое приемом обозначение предназначается для последующего вывода рекуррентных соотношений.

$\forall_{ABab}(\forall_n(n$ – натуральное $\to \det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1,\dots,an+b\}\ \&$
$j \in \{1,\dots,an+b\})) = B(n)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в задаче на преобразование подвыражения "$\det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1,\dots,an+b\}\ \&\ j \in \{1,\dots,an+b\}))$". Либо это выражение расположено в условии задачи, либо - в посылке, не имеющей комментария "(определитель Замена)". Переменная A функциональная. Переменная n идентифицируется с переменной; a и b - с целочисленными константами. Прием вводит новую переменную B, регистрируя ее в качестве вспомогательного параметра. Напомним, что такие переменные не должны входить в ответ задачи. Выводимая кванторная импликация снабжается комментариями "ориентацияравенства" (блокировка попыток изменения порядка операндов равенства) и "(определитель

Замена)" (блокировка попыток вычисления определителя в левой части равенства). В дополнение к основному действию приема выводится равенство "$B(0) = 1$". Вводится комментарий "(определитель обозначение B)" к задаче, указывающий, что переменная B введена для обозначения определителя. Уровень срабатывания равен 4.

(c) Разложение определителя по крайней строке.

$\forall_{ABCabm}(\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1,\ldots,an+b\}\ \&$ $j \in \{1,\ldots,an+b\})) = B(n))\ \&\ \mathrm{set}_i(i \in \{1,\ldots,an+b\}\ \&$ $\neg(A(1,i) = 0)) = \{;C\}\ \&\ l(C) = m \rightarrow \forall_n(n - \text{натуральное}\ \&\ 2 \leq n \rightarrow$ $B(n) = \sum_{k+1}^{m}(A(1,C(k))(-1)^{C(k)+1}\det(\lambda_{ij}((A(i+1,j)\ \text{при}\ j < C(k),\ \text{иначе}$ $A(i+1,j+1)), i \in \{1,\ldots,an+b-1\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,an+b-1\})))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на преобразование, два других - обрабатываются указателем "идентификатор". Переменная a идентифицируется с натуральной константой, переменная b - с целочисленной. Переменная A функциональная. Второй и третий антецеденты устанавливают число m ненулевых элементов первой строки определителя; проверяется, что выражение m - натуральная константа. Для обработки описателя "класс" во втором антецеденте применяется специально созданный для этого нормализатор "нормненули". Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы как обычной. Выводимое соотношение будет преобразовано в рекуррентное, если последующим приемам удастся выразить его определители через ранее введенные вспомогательные переменные. Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 7. В ней нормализатору "нормненули" передается дополнительное утверждение о стремлении n к бесконечности.

$\forall_{ABCabm}(\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1,\ldots,an+b\}\ \&$ $j \in \{1,\ldots,an+b\})) = B(n))\ \&\ \mathrm{set}_i(i \in \{1,\ldots,an+b\}\ \&\ \neg(A(an+b,i) =$ $0)) = \{;C\}\ \&\ l(C) = m \rightarrow \forall_n(n - \text{натуральное}\ \&\ 2 \leq n \rightarrow B(n) =$ $\sum_{k+1}^{m}(A(an+b,C(k))(-1)^{C(k)+an+b}\det(\lambda_{ij}((A(i,j)\ \text{при}\ j < C(k),\ \text{иначе}$ $A(i,j+1)), i \in \{1,\ldots,an+b-1\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,an+b-1\})))))$

Аналогично предыдущему, но рассматривается не первая, а последняя строка.

(d) Усмотрение определителя, для которого имеется вспомогательное обозначение.

$\forall_{ABabcmpq}(\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \det(\lambda_{ij}(A(i,j,n), i \in \{1,\ldots,an+b\}\ \&$ $j \in \{1,\ldots,an+b\})) = p(n))\ \&\ b - c = aq\ \&\ A(k,l,m-q) = B(k,l,m) \rightarrow$ $\det(\lambda_{kl}(B(k,l,m), k \in \{1,\ldots,am+c\}\ \&\ l \in \{1,\ldots,am+c\})) = p(m-q))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на преобразование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем переменные a, b, c идентифицируются с целочисленными константами, а m - с переменной. Второй антецедент выделен указателем "программа", третий - указателем "идентификатор". Переменные p, A, B функциональные. Обе части третьего антецедента обрабатываются нормализатором "норм", которому передаются дополнительные посылки "$k \in \{1,\ldots,am+c\}$" и "$l \in \{1,\ldots,am+c\}$". Уровень срабатывания равен 1. Если после применения данного приема в посылках возникает рекуррентное соотношение для определителя, то оно разрешается с помощью стандартных приемов разрешения рекуррентных соотношений, описанных в других разделах.

(e) Приведение подобных членов с вспомогательным обозначением.
$\forall_{abft}(af(t) + bf(t) = (a + b)f(t))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи напреобразование, имеющей комментарий "(определитель обозначение f)". Переменная f не входит в выражения a, b. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Подстановка найденного соотношения для вспомогательного обозначения.
$\forall_{Afgt}(A(t) \ \& \ \forall_n(A(n) \to f(n) = g(n)) \to f(t) = g(t))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "легковидеть". Переменные A, g функциональные. Задача имеет комментарий "(определитель обозначение f)". Выражение $g(n)$ не содержит символа "определитель". Предполагается, что кванторное равенство в посылках возникло после разрешения рекуррентного соотношения. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Получение определителя, у которого некоторая строка либо некоторый столбец имеют единственный ненулевой элемент.

   i. Крайние строка либо столбец с единственным ненулевым элементом.

   $\forall_{Amn}(\mathrm{set}_i(i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(A(1, i) = 0)) = \{m\} \to$
   $\det(\lambda_{ij}(A(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\})) =$
   $A(1, m)(-1)^{m+1} \det(\lambda_{ij}((A(i + 1, j)$ при $j < m,$ иначе $A(i + 1, j + 1)),$
   $i \in \{1, \ldots, n - 1\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n - 1\})))$

   $\forall_{Amn}(\mathrm{set}_i(i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(A(n, i) = 0)) = \{m\} \to$
   $\det(\lambda_{ij}(A(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\})) =$
   $A(n, m)(-1)^{n+m} \det(\lambda_{ij}((A(i, j)$ при $j < m,$ иначе $A(i, j + 1)),$
   $i \in \{1, \ldots, n - 1\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n - 1\})))$

   $\forall_{Amn}(\mathrm{set}_i(i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(A(i, 1) = 0)) = \{m\} \to$
   $\det(\lambda_{ij}(A(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\})) =$
   $A(m, 1)(-1)^{m+1} \det(\lambda_{ij}((A(i, j + 1)$ при $i < m,$ иначе $A(i + 1, j + 1)),$
   $i \in \{1, \ldots, n - 1\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n - 1\})))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение $A(\ldots)$ в его левой части обрабатывается нормализатором "нормэлемент", которому передается дополнительная посылка "$i \in \{1, \ldots, n\}$", причем сама левая часть обрабатывается нормализатором "нормненули". Уровень срабатывания равен 3.

   ii. Прибавление всех столбцов к первому столбцу для получения столбца с единственным ненулевым элементом.
   $\forall_{amn}(\mathrm{set}_i(i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(\sum_{j=1}^{n} a(i, j) = 0)) = \{m\} \to$
   $\det(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ J \in \{1, \ldots, n\})) =$
   $\sum_{j=1}^{n} a(m, j)(-1)^{m+1} \det(\lambda_{ij}((a(i, j + 1)$ при $i < m,$ иначе
   $a(i + 1, j + 1)), i \in \{1, \ldots, n - 1\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n - 1\})))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная a функциональная. Конечная сумма в левой части антецедента упрощается с помощью задачи на преобразование. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 6.

(h) Попытка перехода к определителю с почти константными строками.

$\forall_{abklmnpqr}(a(i,j) - a(i-1,j) = (p(j) \text{ при } kj + m = l, \text{ иначе } q)\ \&$
$r = (l-m)/k\ \&\ \det(\lambda_{ij}((a(1,j) \text{ при } i = 1, \text{ иначе } (p(r) \text{ при } j = r, \text{иначе } q)),$
$i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})) = b\ \&\ \neg(k = 0) \to$
$\det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})) = b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор", последний - обрабатывается проверочным оператором. Внутри выражения, определяющего общий член матрицы, встречается подвыражение вида "$di + e$", где d, e не содержат i. Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализаторами "норм" и "нормварианты". Определитель в левой части третьего антецедента вычисляется с помощью задачи на преобразование, решаемой до уровня 7. Уровень срабатывания равен 6.

(i) Нормализатор упрощения слагаемых разложения определителя по строке либо столбцу "нормслагаемое".

Нормализатор связан с описанным выше приемом разложения определителя по строке. Он обрабатывает выражение под суммой в заменяющем терме данного приема и ориентирован на исключение и стандартизацию условных подвыражений. Такая стандартизация необходима для последующего усмотрения определителя, допускающего выражение через ранее введенное вспомогательное обозначение. Нормализатор некорневой, т.е. его приемы применяются к произвольным подтермам преобразуемого терма. Все приемы срабатывают на уровне 1.

i. Умножение на условное выражение.

$\forall_{abcd}((a \text{ при } b, \text{ иначе } c)d = (ad \text{ при } b, \text{ иначе } cd))$

ii. Подстановка значения, определенного равенством под условным выражением.

$\forall_{abcipq}(\neg(a = 0) \to (p(i) \text{ при } ai + b = c, \text{ иначе } q(i)) =$
$(p((c-b)/a) \text{ при } i = (c-b)/a, \text{ иначе } q(i)))$

Выражение a константное, i - переменная. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные p, q функциональные.

iii. Усмотрение истинности либо ложности неравенства под вариантом.

$\forall_{abcd}(0 \leq a - b \to (c \text{ при } a < b, \text{ иначе } d) = d)$

$\forall_{abcd}(0 < b - a \to (c \text{ при } a < b, \text{ иначе } d) = c)$

Выражения a, b ненулевые. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Этому оператору передается список посылок, пополненный контекстом текущего вхождения. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости.

iv. Группировка ненулевых членов равенства в одной части.

$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a - b = 0)$

Выражения a, b ненулевые.

(j) Нормализатор выбора элемента матрицы "нормэлемент". Нормализатор предназначен для исключения условных выражений в терме, задающем общий вид элемента матрицы. Ему обычно передаются дополнительные посылки, уточняющие область, в которой расположен элемент. Нормализатор некорневой. Уровень срабатывания всех приемов нормализатора равен 1.

   i. Усмотрение истинности либо ложности неравенства в условном выражении.

   $\forall_{abcd}(0 \leq a - b \to (c \text{ при } a < b, \text{ иначе } d) = d)$

   $\forall_{abcd}(0 < b - a \to (c \text{ при } a < b, \text{ иначе } d) = c)$

   $\forall_{abcd}(0 < a - b \to (c \text{ при } a \leq b, \text{ иначе } d) = d)$

   $\forall_{abcd}(0 \leq b - a \to (c \text{ при } a \leq b, \text{ иначе } d) = c)$

   Выражения a, b ненулевые. Антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому передается список посылок, пополненный контекстом текущего вхождения. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости.

   ii. Усмотрение истинности либо ложности равенства под вариантом.

   $\forall_{abc}((a \text{ при } b = b, \text{ иначе } c) = a)$

   $\forall_{abc}((a \text{ при } \neg(b = b), \text{ иначе } c) = c)$

   $\forall_{abcd}((a \text{ при } b = b \,\&\, c, \text{ иначе } d) = (a \text{ при } c, \text{ иначе } d))$

   Перечисленные приемы срабатывают без каких-либо ограничений.

   $\forall_{abcde}(0 < a - b \to (c \text{ при } a = b \,\&\, e, \text{ иначе } d) = d)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

   $\forall_{abcde}(\neg(a = b) \to (c \text{ при } a = b \,\&\, e, \text{ иначе } d) = d)$

   $\forall_{abcde}(\neg(a - b = 0) \to (c \text{ при } a = b \,\&\, e, \text{ иначе } d) = d)$

   $\forall_{abcde}(\neg(b - a = 0) \to (c \text{ при } a = b \,\&\, e, \text{ иначе } d) = d)$

   Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста.

   iii. Логическая константа в условном выражении.

   $\forall_{abc}((a \text{ при ложь } \&\, c, \text{ иначе } b) = b)$

   $\forall_{ab}((a \text{ при истина}, \text{ иначе } b) = a)$

   iv. Одинаковые альтернативные выражения.

   $\forall_{ab}((a \text{ при } b, \text{иначе } a) = a)$

(k) Нормализатор отбора ненулевых элементов строки либо столбца "нормненули". Нормализатор обрабатывает выражение "класс(...)", задающее множество индексов ненулевых элементов матрицы, расположенных в некоторой ее области. Фактически отбрасываются лишь заведомо нулевые элементы, и в качестве результата выдается список остальных элементов. В приемах пока востребован лишь случай одноэлементного списка. Нормализатор корневой - его приемы применяются лишь к самому преобразуемому терму, а не к его подтермам.

i. Отбор ненулевых вариантов.

$\forall_{ABCDq}(\mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (B \ \vee \ C \mathbin{\&} \neg((0 \text{ при } D, \text{ иначе } q) = 0))) =$
$\mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (B \ \vee \ C \mathbin{\&} \neg D \mathbin{\&} \neg(q = 0))))$

$\forall_{ABCDp}(\mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (B \ \vee \ C \mathbin{\&} \neg((p \text{ при } D, \text{ иначе } 0) = 0))) =$
$\mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (B \ \vee \ C \mathbin{\&} D)))$

Указатель "обобщподст" разрешает вхождение переменной x в выражения A, B, C, D, p, q. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDpq}(\mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (B \ \vee \ C \mathbin{\&} \neg((p \text{ при } D, \text{ иначе } q) = 0))) =$
$\mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (B \ \vee \ C \mathbin{\&} D \ \vee \ C \mathbin{\&} \neg D \mathbin{\&} \neg(q = 0))))$

Уровень срабатывания равен 2.

ii. Явное разрешение равенства относительно параметра класса.

$\forall_{ABCabc}(\neg(a = 0) \to \mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} ax + b = c \ \vee \ C)) =$
$\mathrm{set}_x(A \mathbin{\&} (x = (c - b)/a \ \vee \ C)))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная x не входит в выражения a, b, c. Либо a отлично от 1, либо b отлично от нуля. Уровень срабатывания равен 1.

iii. Выделение одноэлементного множества.

$\forall_{ABa}(a \in A \to \mathrm{set}_x(x \in A \mathbin{\&} (x = a \ \vee \ B)) = \{a\} \cup \mathrm{set}_x(x \in A \mathbin{\&} B))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная x не входит в выражение a. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABac}(a \in A \mathbin{\&} \neg(a + c = 0) \to \mathrm{set}_x(x \in A \mathbin{\&} \neg(x + c = 0) \mathbin{\&}$
$(x = a \ \vee \ B)) = \{a\} \cup \mathrm{set}_x(x \in A \mathbin{\&} \neg(x + c = 0) \mathbin{\&} B))$

$\forall_{ABac}(a \in A \mathbin{\&} \neg(a - c = 0) \to \mathrm{set}_x(x \in A \mathbin{\&} \neg(x = c) \mathbin{\&}$
$(x = a \ \vee \ B)) = \{a\} \cup \mathrm{set}_x(x \in A \mathbin{\&} \neg(x = c) \mathbin{\&} B))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменная x не входит в выражения a, c. Уровень срабатывания равен 1.

iv. Пустое множество.

$\mathrm{set}_x(\text{ложь}) = \emptyset)$

$\forall_{Pa}(\mathrm{set}_x(\neg(x - a = 0) \mathbin{\&} x = a \mathbin{\&} P(x)) = \emptyset)$

Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Aamn}(0 < m - a \to \mathrm{set}_x(x = a \mathbin{\&} x \in \{m, \dots, n\} \mathbin{\&} A(x)) = \emptyset)$

$\forall_{Aamn}(0 < a - n \to \mathrm{set}_x(x = a \mathbin{\&} x \in \{m, \dots, n\} \mathbin{\&} A(x)) = \emptyset)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором, Переменная A функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

(l) Нормализатор "нормварианты" термов с условными выражениями, возникающих при вычислении определителей. Нормализатор не корневой.

i. Переход к равенству в условном выражении.

$\forall_{imnpq}(i \in \{m, \dots, n\} \to (p \,\text{при}\, m < i, \text{ иначе}\, q) = (q \,\text{при}\, i = m, \text{ иначе}\, p))$

Уровень срабатывания равен 1.

ii. Явное разрешение относительно переменной равенства в условном выражении.

$\forall_{abcdei}(\neg(c = 0) \to (a$ при $ci + d = e,$ иначе $b) =$
$(a$ при $i = (e - d)/c,$ иначе $b))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная i идентифицируется с переменной, не входящей в выражения c, d, e. Выражение e не является переменной. Либо c отлично от 1, либо d отлично от нуля. Уровень срабатывания равен 1.

iii. Исключение условного выражения с одинаковыми альтернативами.

$\forall_{ab}((a$ при $b,$ иначе $a) = a)$

Уровень срабатывания равен 1.

iv. Условное выражение - сомножитель слагаемого.

$\forall_{abcdpq}(a + (b$ при $p < q,$ иначе $c)d = (a + bd$ при $p < q,$ иначе $a + cd))$

$\forall_{abcdpq}(a + (b$ при $p \leq q,$ иначе $c)d = (a + bd$ при $p \leq q,$ иначе $a + cd))$

Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdipq}(a(i) + (b(i)$ при $i = p,$ иначе $c)d(i) = (a(p) + b(p)d(p)$ при
$i = p,$ иначе $a(i)) + cd(i))$

Переменные a, b, d функциональные. Переменная i идентифицируется с переменной, не входящей в выражение p. Указатель "модификатор" блокирует ввод дополнительного слагаемого при компиляции. Уровень срабатывания равен 2.

v. Логическая константа под условным выражением.

$\forall_{abc}((a$ при истина, иначе $c) = a)$

$\forall_{abc}((a$ при ложь, иначе $c) = c)$

Уровень срабатывания равен 1.

vi. Исключение условного выражения, если его условие либо отрицание условия имеются в посылках.

$\forall_{Aab}((a$ при $A,$ иначе $b) = a)$

Утверждение A встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Aab}((a$ при $A,$ иначе $b) = b)$

Отрицание утверждения A, обработанное нормализатором "нормлог", встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 1.

vii. Равенство с совпадающими частями.

$\forall_a(a = a \leftrightarrow$ истина)

Уровень срабатывания равен 1.

viii. Логические константы.

$\forall_a(a \ \vee$ ложь $\leftrightarrow a)$

$\forall_a(a \ \&$ ложь $\leftrightarrow$ ложь)

$\forall_a(a \ \vee$ истина $\leftrightarrow$ истина)

$\forall_a(a \ \& \ \text{истина} \leftrightarrow a)$

$\neg\text{истина} = \text{ложь}$

$\neg\text{ложь} = \text{истина}$

ix. Усмотрение ложного равенства.

   $\forall_{ab}(\neg(a - b = 0) \rightarrow \neg(a = b))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

x. Усмотрение истинности неравенства под условным выражением.

   $\forall_{abcd}(c \leq d \ \& \ 0 \leq b - d + c - a \rightarrow a \leq b)$

   Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

xi. Переход от неравенств во вложенных условных выражениях к равенству.

   $\forall_{abcdefp}(b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ e - d - c + b - 1 = 0 \rightarrow (a \text{ при } b \leq c, \text{ иначе } (p \text{ при } d \leq e, \text{ иначе } f)) = (a \text{ при } b \leq c, \text{ иначе } (p \text{ при } d = e, \text{ иначе } f)))$

   Первые четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами, пятый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

xii. Вложенные условные выражения с одинаковыми элементами.

   $\forall_{abpq}((a \text{ при } p, \text{ иначе } (b \text{ при } q, \text{ иначе } a)) = (b \text{ при } q, \text{ иначе } a))$

   Уровень срабатывания равен 3.

11. Простейшие свойства отношения "пропорцнаборы".

   Напомним, что утверждение "пропорцнаборы(a, b)" означает линейную зависимость числовых наборов a и b, длины которых равны. Так как эти утверждения используются пока лишь в задачах по аналитической геометрии, далее рассмотрен случай наборов длины 3.

   (a) Отбрасывание слагаемых, образующих набор, пропорциональный второму набору.

   $\forall_{abckmnp}(\text{пропорцнаборы}((a + mn, b + mk, c + mp), (n, k, p)) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (n, k, p)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Отбрасывание ненулевого общего множителя.

   $\forall_{abcdefmpqr}(\neg(m = 0) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (dm/p, em/q, fm/r)) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d/p, e/q, f/r)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение m отлично от единицы. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdefmpqr}$(пропорцнаборы$((a,b,c),(p/(dm),q/(em),r/(fm)))\leftrightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(p/d,q/e,r/f)))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abcdef}$(пропорцнаборы$((a,b,c),(-d,-e,-f))\leftrightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(d,e,f)))$

$\forall_{abcd}(\neg(d=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(0,0,d))\leftrightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(0,0,1)))$

$\forall_{abcd}(\neg(d=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(0,d,0))\leftrightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(0,1,0)))$

$\forall_{abcd}(\neg(d=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(d,0,0))\leftrightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(1,0,0)))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Набор с единственным ненулевым элементом.

$\forall_{abcd}(\neg(d=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(0,0,d))\leftrightarrow a=0\ \&\ b=0)$

$\forall_{abcd}(\neg(d=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(0,d,0))\leftrightarrow a=0\ \&\ c=0)$

$\forall_{abcd}(\neg(d=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(d,0,0))\leftrightarrow b=0\ \&\ c=0)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Набор с двумя ненулевыми элементами.

$\forall_{abcde}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(e=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(0,d,e))\leftrightarrow$ $be-cd=0\ \&\ a=0)$

$\forall_{abcde}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(e=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(d,0,e))\leftrightarrow$ $ae-cd=0\ \&\ b=0)$

$\forall_{abcde}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(e=0)\rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(d,e,0))\leftrightarrow$ $ae-bd=0\ \&\ c=0)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Переход к системе соотношений пропорциональности.

$\forall_{abcdef}$(пропорцнаборы$((a,b,c),(d,e,f))\leftrightarrow ae-bd=0\ \&\ bf-ce=0\ \&$ $af-cd=0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения d,e,f константные. Заменяемый подтерм - корневой либо расположен под корневым отрицанием. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, в которой условие константности отброшено. Ее уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcdpqrs}$(пропорцнаборы$((a,b,c,d),(p,q,r,s))\leftrightarrow aq-bp=0\ \&\ ar-cp=0\ \&$ $as-dp=0\ \&\ br-cq=0\ \&\ bs-dq=0\ \&\ cs-dr=0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Устранение знаменателя.

$\forall_{abcdpqr}(\neg(b=0) \to$ пропорцнаборы$((p,q,r),(a/b,c,d)) \leftrightarrow$ пропорцнаборы$((p,q,r),(a,bc,bd)))$

$\forall_{abcdpqr}(\neg(b=0) \to$ пропорцнаборы$((p,q,r),(c,a/b,d)) \leftrightarrow$ пропорцнаборы$((p,q,r),(bc,a,bd)))$

$\forall_{abcdpqr}(\neg(b=0) \to$ пропорцнаборы$((p,q,r),(c,d,a/b)) \leftrightarrow$ пропорцнаборы$((p,q,r),(bc,bd,a)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Уравнения с матрицами

1. Решение простейших матричных уравнений с помощью оператора "уравнматр".

   Для решения матричных уравнений вида $ax = b$ либо $xa = b$ создан нормализатор "уравнматр", который будет описан ниже. Здесь приведем приемы, обращающиеся к данному нормализатору:

   $\forall_{abcx}((ax=b)=(x=c) \to ax=b \leftrightarrow x=c)$

   $\forall_{abcx}((xa=b)=(x=c) \to xa=b \leftrightarrow x=c)$

   Умножение обозначает операцию "умножматр". Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание. Каждое из выражений a,b имеет заголовок "строки" либо "столбцы" и не содержит неизвестных. Выражение x содержит неизвестные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "уравнматр". Уровень срабатывания равен 3.

2. Умножение на обратную матрицу при решении матричных уравнений.

   $\forall_{abx}($квадрматр(a) & $\neg(\det(a)=0) \to ax=b \leftrightarrow x=a^{-1}b)$

   $\forall_{abx}($квадрматр(a) & $\neg(\det(a)=0) \to xa=b \leftrightarrow x=b^{-1}a)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение x содержит неизвестные, а выражения a,b - не содержат. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCX}(C=A^{-1} \to AX=B \leftrightarrow X=CB)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Выражение X содержит неизвестные, а выражения A,B - не содержат. Каждое из выражений A,C имеет заголовок "строки" либо "столбцы". Уровень срабатывания равен 3.

3. Уравнение с известной матрицей и неизвестными элементами.

   $\forall_{abmn}(a=\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}$ & $j \in \{1,\ldots,m\}) \leftrightarrow$
   $\forall_{ij}(i \in \{1,\ldots,n\}$ & $j \in \{1,\ldots,m\} \to a(i,j)=b(i,j)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяетя к условию задачи на описание. Выражение a не содержит неизвестных, а правая часть равенства - содержит. Переменная b функциональная. Указатель "матрица" определяет идентификацию терма "отображение(...)" с выражением, непосредственно определяющим прямоугольную матрицу через ее строки либо столбцы. Указатель "развертка" определяет выписывание квантора общности из заменяемой части в виде конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

Использование параметрических описаний при подборе примера

1. Попытка рассмотрения матрицы второго порядка.

$$\forall_{an}(0 \leq n-2\ \&\ \exists_{pqrs}(a = \text{прямаясумма}(\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \text{единичнматр}(n-2))\ \&$$
$$p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ s - \text{число}) \rightarrow \text{матр}(a, \mathbb{R}, n, n))$$

Прием имеет заголовок "подборзначений" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример" либо не имеющей цели "полный". Переменная a идентифицируется с неизвестной. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "подборзначений". Возникающее во вспомогательной задаче параметрическое описание, определяемое этим антецедентом, снабжается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

2. Попытка рассмотрения диагональной матрицы.

$$\forall_{an}(\exists_b(b - \text{слово}\ \&\ l(b) = n\ \&\ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a = \text{диагматр}(b) \rightarrow \text{матр}(a, \mathbb{R}, n, n)))$$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Контекст срабатывания - такой же, как в предыдущем приеме. Антецедент выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 4.

Прямая сумма матриц

1. Произведение двух прямых сумм.

$$\forall_{abc}(\text{квадрматр}(c) \rightarrow \text{прямаясумма}(a, c)\text{прямаясумма}(b, c) = \text{прямаясумма}(ab, c))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Симметричность прямой суммы.

$$\forall_{an}(\text{симметричматр}(\text{прямаясумма}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\}))) \leftrightarrow$$
$$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \text{симметричматр}(a(i))))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная a функциональная. Указатели "развертка" определяют идентификацию терма "отображение" с набором и выписывание квантора общности в виде конъюнкции. Уровень срабатывания равен 0.

Ранг матрицы

1. Сведение к рангу меньшей матрицы путем прибавления к строкам векторов, пропорциональных заданной строке.

$\forall_{akmn}(k \in \{1,\ldots,n\}$ & $\neg(a(1,k)=0) \to$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})) =$ ранг$(\lambda_{ij}((a(i+1,j)a(1,k) - a(1,j)a(i+1,k)$ при $j < k$, иначе $a(i+1,j+1)a(1,k) - a(1,j+1)a(i+1,k)), i \in \{1,\ldots,m-1\}$ & $j \in \{1,\ldots,n-1\})) + 1)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Первый антецедент выделен указателем "программа". Он перечисляет номера k элементов первой строки. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные m, n идентифицируются с натуральными константами, большими единицы. Заменяющий терм обрабатывается нормализатором "нормранг", а затем - вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

2. Отбрасывание нулевой строки.

   $\forall_{akmn}(k \in \{1,\ldots,m\} \to$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})) =$ ранг$(\lambda_{ij}((a(i,j)$ при $i < k$, иначе $a(i+1,j)), i \in \{1,\ldots,m-1\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Антецедент выделен указателем "программа". Проверяется, что каждый элемент строки с номером k равен 0. Переменные m, n идентифицируются с натуральными константами, причем m больше единицы. Уровень срабатывания равен 1.

3. Матрица состоит из единственной строки.

   $\forall_{akmn}(k \in \{1,\ldots,n\}$ & $\neg(a(1,k)=0)$ & $m = 1 \to$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})) = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "матрица" задает идентификацию терма "отображение(...)" с выражением, непосредственно определяющим прямоугольную матрицу через ее строки либо столбцы. Первый антецедент выделен указателем "программа", второй - обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Переменные m, n идентифицируются с натуральными константами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{amn}(m = 1 \to$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "матрица" задает идентификацию терма "отображение(...)" с выражением, непосредственно определяющим прямоугольную матрицу через ее строки либо столбцы. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Проверяется, что первая строка тождественно нулевая. Переменные m, n идентифицируются с натуральными константами. Уровень срабатывания равен 1.

Собственные значения и собственные векторы

1. Вычисление собственных значений матрицы с помощью оператора "собствзначения".

$\forall_{Aabc}$(собствзначения$(A, a, b) = ((a, b) \in c) \rightarrow$ собствзначение$(A, a, b) \leftrightarrow$
$(a, b) \in c)$

Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение A имеет заголовок "строки" либо столбцы и не содержит неизвестных. Хотя бы одно из выражений a, b содержит неизвестные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "собствзначения", который будет описан ниже. Результатом работы нормализатора служит утверждение вида "$(a, b) \in c$", где c - выражение для множества пар "собственное значение - его кратность".

2. Определение собственных векторов вещественной матрицы, соответствующих вещественному собственному значению.

   $\forall_{Nabmnx}(N = \lambda_{ij}(0, i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, 1\})\ \&\ (\lambda_{ij}((a(i, j) - b$
   при $i = j,$ иначе $a(i, j)), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\})x = N) =$
   $(x \in$ линкомбинации$(m))\ \&\ b$ – число $\rightarrow$ собствектор$(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&$
   $j \in \{1, \ldots, n\}), b, x) \leftrightarrow x \in$ линкомбинации$(m))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к условию задачи на описание. Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "нормвариант" определяет исключение условного выражения во втором антецеденте путем непосредственной проверки его условия. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Выражение x содержит неизвестные, а выражение b - не содержит. Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором решения матричных уравнений "уравнматр" (описывается ниже). Уровень срабатывания равен 3.

3. Определение собственных векторов вещественной матрицы, соответствующих комплексному собственному значению.

   Аналогично предыдущему, но в теореме приема символы "плюс", "минус", "линкомбинации" заменены на комплексные аналоги "Плюс", "Минус", "Линкомбинации". Вместо нормализатора "уравнматр" используется нормализатор "Уравнматр". Последний антецедент отброшен.

4. Определение собственных векторов, соответствующих заданному собственному значени, в случае матрицы над полем вычетов по простому модулю.

   $\forall_{Nabmnpx}(N = \lambda_{ij}(0, i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, 1\})\ \&$
   (Умножматр$(\lambda_{ij}(((a(i, j) - b)(\mathrm{mod}\ p)$ при $i = j,$ иначе $a(i, j)), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&$
   $j \in \{1, \ldots, n\}), x, \mathrm{mod}(p)) = N) = (x \in$ Линкомб$(m, \mathrm{mod}(p))) \rightarrow$
   Собствектор$(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}), b, \mathrm{mod}(p), x) \leftrightarrow$
   $x \in$ Линкомб$(m, \mathrm{mod}(p)))$

   Аналогично предыдущему приему.

Нахождение канонической матрицы для заданной многочленной матрицы

$\forall_{Abcdnxy}(A = bcd \rightarrow$ каноничматрица$(A, x, y) \leftrightarrow y = c)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормканматр" приведения многочленной матрицы к канонической матрице, который описывается ниже. Результат имеет вид произведения трех матриц, из которых средняя является канонической, а две крайние - обеспечивают переход к ней от исходной матрицы. Переменная x идентифицируется с переменной, выражение y содержит неизвестные. Матрица A определяется выражением с заголовком "строки" либо "столбцы", не содержащим неизвестных. Ее элементы (выражения) рассматриваются как многочлены от x. Уровень срабатывания равен 1.

Приведение многочлена к стандартному виду

$\forall_{abcdn}((a+b)^n c = d \rightarrow (a+b)^n c = d)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание, расположенному внутри утверждения "каноничматрица(A, x, y)", причем выражения для элементов матрицы A содержат только переменную x. Антецедент выделен указателем "идентификатор" и обеспечивает раскрывание скобок, необходимое для получения многочлена стандартного вида. Уровень срабатывания равен 1.

Нахождение жордановой нормальной формы

$\forall_{Mabcdemnpqrsvxyz}(\lambda_{ij}((a(i,i)-x \text{ при } i=j, \text{ иначе } a(i,j)), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}) = b^{-1}cd^{-1} \mathbin{\&} \text{элемделители}(c,e) \mathbin{\&} \text{жордматрица}(e,M) \mathbin{\&} M = \lambda_{ij}(m(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}) \mathbin{\&} \lambda_{ij}((m(i,i)-x \text{ при } i=j, \text{ иначе } m(i,j)), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}) = pqr \mathbin{\&} \text{матрмногочлен}(dr,s) \mathbin{\&} s = v(x) \mathbin{\&} y = M \mathbin{\&} z = v(M) \rightarrow \text{жордформа}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), y, z))$

Прием имеет заголовок "подборзначений" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменные y, z идентифицируются с неизвестными. Указатели "матрица" определяют идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Первый, четвертый, пятый и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Второй, третий и шестой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Наконец, два последних антецедента выделены указателем "подборзначений". Переменные y, z не должны входить в прочие невырожденные условия задачи. В качестве x выбирается какая-то новая переменная. Последовательность действий такова. Сначала первый антецедент формирует на основе исходной матрицы вспомогательную многочленную матрицу, и нормализатор "нормканматр" преобразует ее к виду канонической матрицы c. Второй антецедент определяет набор e элементарных делителей для матрицы c. Третий антецедент строит жорданову матрицу M по набору e элементарных делителей. Четвертый антецедент идентифицирует элементы $m(i, j)$ матрицы M. Пятый антецедент строит вторую вспомогательную многочленную матрицу по элементам $m(i, j)$ и преобразует ее к канонической матрице q. Здесь снова используется нормализатор "нормканматр", причем указывается, что переменная x комплекснозначная. Шестой многочлен переходит от многочленной матрицы dr к многочлену от матрицы s. Седьмой антецедент определяет шаблон $v(x)$, необходимый для подстановки в многочлен x матрицы M

вместо переменной x. Наконец, два последних антецедента заменяют исходное условие "жордформа(...)" в той вспомогательной задаче, к которой прием сводит текущую задачу. Все использованные здесь вспомогательные пакеты описываются ниже. Уровень срабатывания равен 4.

Нормализатор общей стандартизации "нормумножматр"

Нормализатор имеет прием, устраняющий вложенные произведения матриц, а также четыре приема для непосредственного умножения матриц. Теорема последних приемов прорисовывается в следующем виде:

$\forall_{abmnk}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}) \cdot \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&$
$j \in \{1,\ldots,k\}) = \lambda_{ij}(\sum_{p=1}^{n} a(i,p)b(p,j), i \in \{1,\ldots,m\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,k\}))$

Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы в виде обычной. Два из четырех приемов ориентированы на вещественные матрицы и два - на комплексные. Соответственно, в теореме берутся комплекснозначные сумма и произведение. Кроме того, используется указатель "комплексное". В каждой паре приемов, основанных на одной и той же теореме, учитывается наличие комментария "матрмногочлен". Если такой комментарий есть, то применяется прием, обрабатывающий сумму нормализаторами раскрывания скобок и приведения многочленов к стандартному виду. Иначе - сумма обрабатывается нормализатором "нормплюс".

Нормализатор общей стандартизации "нормстепеньматр"

Нормализатор возводит квадратную матрицу в константную натуральную степень. Он имеет всего два приема. Первый из этих приемов возводит матрицу в единичную степень, второй - понижает степень:

$\forall_{ABn}(0 \leq n - 2\ \&\ B = A^{n-1} \to A^n = AB)$

Здесь второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", реализует рекурсивное обращение, первый - обрабатывается проверочным оператором. Заменяющий терм обрабатывается нормализатором "нормумножматр". Константа n должны быть меньше 50. Заметим, что для возведения в натуральную степень числовых матриц используется не нормализатор, а пакет продукций "степеньматрицы", в котором реализована обычная процедура многократного квадрирования.

Нормализатор общей стандартизации "нормтранспстрок"

Нормализатор выполняет перестановку двух заданных строк в матрице, заданной перечислением строк либо столбцов. Результат перечисляется по строкам. Единственный прием имеет следующий вид:

$\forall_{amnpq}(p \leq m\ \&\ q \leq m \to \text{транспстрок}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}),$
$p, q) = \lambda_{ij}((a(p,j) \text{ при } i = q, \text{ иначе } (a(q,j) \text{ при } i = p, \text{иначе } a(i,j))), i \in \{1,\ldots,m\}$
$\&\ j \in \{1,\ldots,n\}))$

Переставляются строки с номерами p, q. Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Переменные m, n, p, q идентифицируются с натуральными константами. Антецеденты выделены указателем "программа".

Нормализатор решения простейших матричных уравнений в вещественных числах "уравнматр"

Нормализатор преобразует матричные уравнения вида "$Ax = B$" либо "$xA = B$" к виду "$\exists_y(y \in$ линкомбинации$(\{;C\})\ \&\ x = c + y)$", где C - набор векторов, образующих базис пространства решений однородного уравнения, c - частное решение неоднородного. В случае единственного решения результат имеет вид "$x = c$", в случае однородного уравнения - вид "$x \in$ линкомбинации$(\dots)$". Приводимые ниже приемы при работе с термами "отображение" используют указатели "матрица".

1. Вычитание кратных заданного столбца.

   $$\begin{aligned}&\forall_{abkmnrx}(r \in \{1,\dots,\min(m,n)\}\ \&\ \neg(a(r,r)=0) \to x\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\\ &j \in \{1,\dots,n\}) = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\dots,k\}\ \&\ q \in \{1,\dots,n\}) \leftrightarrow\\ &x\lambda_{ij}(((a(i,j)a(r,r) - a(i,r)a(r,j))/a(r,r) \text{ при } \neg(j=r),\ \text{иначе } a(i,j)),\\ &i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\}) = \lambda_{pq}(((b(p,q)a(r,r) - a(r,q)b(p,q))/a(r,r) \text{ при}\\ &\neg(q=r),\ \text{иначе } b(p,q)), p \in \{1,\dots,k\}\ \&\ q \in \{1,\dots,n\}))\end{aligned}$$

   Выражение x содержит неизвестные. Все элементы матриц a, b константные. Первый антецедент, перечисляющий номера r диагональных элементов, выделен указателем "программа". Второй антецедент, проверяющий, что выделенный диагональный элемент ненулевой, обрабатывается проверочным оператором. В строках, предшествующих строке с номером r, отсутствуют ненулевые недиагональные элементы. В r-й строке имеется ненулевой недиагональный элемент. Уровень срабатывания равен 2.

2. Вычитание кратных заданной строки.

   $$\begin{aligned}&\forall_{abkmnrx}(r \in \{1,\dots,\min(m,n)\}\ \&\ \neg(a(r,r)=0) \to \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\\ &j \in \{1,\dots,n\})x = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\dots,m\}\ \&\ q \in \{1,\dots,k\}) \leftrightarrow\\ &\lambda_{ij}(((0 \text{ при } j=r,\ \text{иначе } (a(i,j)a(r,r) - a(i,r)a(r,j))/a(r,r)) \text{ при } \neg(i=r),\\ &\text{иначе } a(i,j)), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})x =\\ &\lambda_{pq}(((b(p,q)a(r,r) - a(p,r)b(r,q))/a(r,r) \text{ при } \neg(p=r),\ \text{иначе } b(p,q)),\\ &p \in \{1,\dots,m\}\ \&\ q \in \{1,\dots,k\}))\end{aligned}$$

   Аналогично предыдущему.

3. Перестановка двух столбцов.

   $$\begin{aligned}&\forall_{abkmnrs}(r \in \{1,\dots,n\}\ \&\ a(r,r) = 0\ \&\ s \in \{r+1,\dots,n\}\ \&\ \neg(a(r,s) = 0) \to\\ &x\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\}) = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\dots,k\}\ \&\\ &q \in \{1,\dots,n\}) \leftrightarrow x\lambda_{ij}((a(i,r) \text{ при } j=s,\ \text{иначе } (a(i,s) \text{ при } j=r,\ \text{иначе } a(i,j))),\\ &i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\}) = \lambda_{pq}((b(p,r) \text{ при } q=s,\ \text{иначе}\\ &(b(p,s) \text{ при } q=r,\ \text{иначе } b(p,q))), p \in \{1,\dots,k\}\ \&\ q \in \{1,\dots,n\}))\end{aligned}$$

   Первый и третий антецеденты выделены указателем "программа", второй - указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Выражение x содержит неизвестные; все элементы матриц a, b константные. Прием находит номер r строки матрицы a, у которой на диагонали стоит нулевой элемент, причем правее его в s -м столбце имеется ненулевой элемент, и переставляет столбцы с номерами r, s. Предварительно проверяется, что предыдущие строки матрицы a не имеют ненулевых недиагональных элементов. Уровень срабатывания равен 1.

4. Перестановка двух строк.

$$\begin{gathered}\forall_{abkmnrs}(r \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ a(r,r) = 0 \ \&\ s \in \{r+1,\ldots,m\} \ \&\ \neg(a(s,r) = 0) \to \\ \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})x = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ \\ q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow \lambda_{ij}((a(r,j) \text{ при } i = s, \text{ иначе } (a(s,j) \text{ при } i = r, \text{ иначе } a(i,j))), \\ i \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})x = \lambda_{pq}((b(r,q) \text{ при } p = s, \text{ иначе } \\ (b(s,q) \text{ при } p = r, \text{ иначе } b(p,q))), p \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ q \in \{1,\ldots,k\}))\end{gathered}$$

Аналогично предыдущему, но проверяется, что предыдущие столбцы матрицы a не имеют ненулевых элементов.

5. Перестановка двух столбцов в случае, когда неизвестный множитель расположен справа.

$$\begin{gathered}\forall_{abckmnrs}(r \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ a(r,r) = 0 \ \&\ s \in \{r+1,\ldots,n\} \ \&\ \neg(a(r,s) = 0) \ \&\ \\ (\lambda_{ij}((a(i,r) \text{ при } j = s, \text{ иначе } (a(i,s) \text{ при } j = r, \text{ иначе } a(i,j))), i \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ \\ j \in \{1,\ldots,n\})x = b) = (x \in \text{линкомбинации}(\{; c\})) \ \&\ k = l(c) \to \\ \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})x = b \leftrightarrow \\ x \in \text{линкомбинации}(\{; \lambda_p(\text{транспстрок}(c(p), r, s), p \in \{1,\ldots,k\})\}))\end{gathered}$$

Рассмотрен лишь случай однородного уравнения, когда ответом служит линейное подпространство матриц. Указатель "развертка" определяет выписывание последнего терма "отображение" в виде набора. Первый, третий и шестой антецеденты выделены указателем "программа". Второй и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", причем левая часть пятого антецедента обрабатывается нормализатором "уравнматр". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

6. Усмотрение диагональной матрицы в случае уравнения с квадратными матрицами.

$$\begin{gathered}\forall_{abmnx}(\forall_{ij}(i \in \{1,\ldots,n\} \ \&\ j \in \{1,\ldots,n\} \ \&\ \neg(i = j) \to a(i,j) = 0) \ \&\ \\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to \neg(a(i,i) = 0)) \to x\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \&\ \\ j \in \{1,\ldots,n\}) = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ q \in \{1,\ldots,n\}) \leftrightarrow \\ x = \lambda_{pq}(b(p,q)/a(q,q), p \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ q \in \{1,\ldots,n\}))\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\forall_{abmnx}(\forall_{ij}(i \in \{1,\ldots,n\} \ \&\ j \in \{1,\ldots,n\} \ \&\ \neg(i = j) \to a(i,j) = 0) \ \&\ \\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to \neg(a(i,i) = 0)) \to x\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \&\ \\ j \in \{1,\ldots,n\}) = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ q \in \{1,\ldots,n\}) \leftrightarrow \\ x = \lambda_{pq}(b(p,q)/a(q,q), p \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ q \in \{1,\ldots,n\}))\end{gathered}$$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он проверяет, что квадратная матрица a имеет диагональный вид. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Матрицы a, b константные; выражение x содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 1.

7. Вынесение наружу общего делителя всех знаменателей элементов матрицы.

$$\begin{gathered}\forall_{amnpx}(x = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}) \leftrightarrow \\ x = (1/p)\lambda_{ij}(pa(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}))\end{gathered}$$

Прием обеспечивает редактирование уже найденного ответа. Указатель "контекст" определяет идентификацию p с наибольшим общим делителем численных множителей знаменателей элементов матрицы a. Проверяется, что p не равно 1. Уровень срабатывания равен 3.

8. Отбрасывание нулевой строки в обеих частях уравнения.

   $\forall_{abkmnr}(r \in \{1,\ldots,m\}$ & $\forall_s(s \in \{1,\ldots,n\} \to a(r,s) = 0)$ & $\forall_s(s \in \{1,\ldots,k\} \to b(r,s) = 0) \to \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})x = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots m\}$ & $q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow \lambda_{ij}((a(i,j)$ при $i < r,$ иначе $a(i+1,j)), i \in \{1,\ldots,m-1\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})x = \lambda_{pq}((b(p,q)$ при $p < r,$ иначе $b(p+1,q)), p \in \{1,\ldots,m-1\}$ & $q \in \{1,\ldots,k\}))$

   Первый антецедент выделен указателем "программа", второй и третий - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

9. Усмотрение множества решений.

   $\forall_{abkmnx}(m < n$ & $\forall_{ij}(i \in \{1,\ldots,m\}$ & $j \in \{1,\ldots,m\}$ & $\neg(i = j) \to a(i,j) = 0)$ & $\forall_i(i \in \{1,\ldots,m\} \to \neg(a(i,i) = 0)) \to \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})x = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots,m\}$ & $q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow \exists_y(y \in$ линкомбинации$(\mathrm{set}_z(\exists_{ij}(i \in \{1,\ldots,n-m\}$ & $j \in \{1,\ldots,k\}$ & $z = \lambda_{pq}(((-a(p,m+i)/a(p,p)$ при $p \leq m,$ иначе $(1$ при $p = m+i,$ иначе $0))$ при $q = j,$ иначе $0), p \in \{1,\ldots,n\}$ & $q \in \{1,\ldots,k\}))))$ & $x = y + \lambda_{pq}((b(p,q)/a(p,p)$ при $p \leq m,$ иначе $0), p \in \{1,\ldots,n\}$ & $q \in \{1,\ldots,k\})))$

   Указатель "или" определяет развертку внутреннего квантора существования заменяющей части в дизъюнкцию. Первый антецедент выделен указателем "программа", второй - указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

10. Случай однородного уравнения.

    В случае однородного уравнения частное решение оказывается тождественно нулевым, и внешний квантор существования в предыдущем приеме можно отбросить:

    $\forall_{Ax}(\exists_y(y \in A$ & $x = y) \leftrightarrow x \in A)$

    Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор решения простейших матричных уравнений в комплексных числах "Уравнматр"

Приемы нормализатора аналогичны случаю вещественных чисел. Вместо вещественнозначных операций используются их комплекснозначные аналоги.

Нормализатор решения простейших матричных уравнений над вычетами по простому модулю "уравнматрмод"

Рассматривается лишь случай, когда неизвестный множитель расположен справа. Выражение "Умножматр(A, B, s)" обозначает произведение матриц A, B над кольцом вычетов по модулю s. Приемы аналогичны приемам двух предыдущих пакетов. Поэтому далее приводим лишь теоремы этих приемов.

1. Вычитание кратных заданной строки.

   $\forall_{abkmnrstx}(r \in \{1,\ldots,\min(m,n)\} \mathbin{\&} \neg(a(r,r) = 0) \mathbin{\&} (ta(r,r))(\mod s) = 1 \to$ $\text{Умножматр}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, \mod (s)) =$ $\lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow$ $\text{Умножматр}(\lambda_{ij}(((0 \text{ при } j = r, \text{ иначе } (a(i,j) - ta(i,r)a(r,j))(\mod s)) \text{ при}$ $\neg(i = r), \text{ иначе } a(i,j)), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, \mod (s)) =$ $\lambda_{pq}(((b(p,q) - ta(p,r)b(r,q))(\mod s) \text{ при } \neg(p = r), \text{ иначе } b(p,q)),$ $p \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}))$

2. Перестановка двух столбцов.

   $\forall_{abckmnrstx}(r \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} a(r,r) = 0 \mathbin{\&} s \in \{r+1,\ldots,n\} \mathbin{\&}$ $\neg(a(r,s) = 0) \mathbin{\&} (\text{Умножматр}(\lambda_{ij}((a(i,r) \text{ при } j = s, \text{ иначе}$ $(a(i,s) \text{ при } j = r, \text{ иначе } a(i,j))), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, t) = b) =$ $(x \in \text{Линкомб}(\{;c\}, t)) \mathbin{\&} k = l(c) \to \text{Умножматр}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&}$ $j \in \{1,\ldots,n\}), x, t) = b \leftrightarrow x \in \text{Линкомб}(\{; \lambda_p(\text{транспстрок}(c(p), r, s),$ $p \in \{1,\ldots,k\})\}, t))$

3. Перестановка двух строк.

   $\forall_{abkmnrstx}(r \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} a(r,r) = 0 \mathbin{\&} s \in \{r+1,\ldots,m\} \mathbin{\&} \neg(a(s,r) = 0) \to$ $\text{Умножматр}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, t) = \lambda_{pq}(b(p,q),$ $p \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow \text{Умножматр}(\lambda_{ij}((a(r,j) \text{ при } i = s,$ $\text{иначе } (a(s,j) \text{ при } i = r, \text{ иначе } a(i,j))), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, t) =$ $\lambda_{pq}((b(r,q) \text{ при } p = s, \text{ иначе } (b(s,q) \text{ при } p = r, \text{ иначе } b(p,q))), p \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&}$ $q \in \{1,\ldots,k\}))$

4. Нулевые матрицы в левой и правой частях.

   $\forall_{abkmnrx}(\forall_{ij}(i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\} \to a(i,j) = 0) \mathbin{\&} \forall_{pq}(p \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&}$ $q \in \{1,\ldots,k\} \to b(p,q) = 0) \to \text{Умножматр}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&}$ $j \in \{1,\ldots,n\}), x, \mod (r)) = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow$ $x \in \text{Линкомб}(\text{set}_z(\exists_{ij}(i \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,k\} \mathbin{\&} z = \lambda_{pq}((1 \text{ при } p = i \mathbin{\&}$ $q = j, \text{ иначе } 0), p \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}))), \mod (r)))$

5. Отбрасывание нулевой строки в обеих частях уравнения.

   $\forall_{abckmnrx}(r \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} \forall_s(s \in \{1,\ldots,n\} \to a(r,s) = 0) \mathbin{\&} \forall_s(s \in \{1,\ldots,k\} \to$ $b(r,s) = 0) \to \text{Умножматр}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, c) =$ $\lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots m\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow \text{Умножматр}(\lambda_{ij}((a(i,j) \text{при } i < r,$ $\text{иначе } a(i+1,j)), i \in \{1,\ldots,m-1\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, c) = \lambda_{pq}((b(p,q)$ $\text{при } p < r, \text{ иначе } b(p+1,q)), p \in \{1,\ldots,m-1\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}))$

6. Усмотрение множества решений.

   $\forall_{abkmnstx}(m < n \mathbin{\&} \forall_{ij}(i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} \neg(i = j) \to$ $a(i,j) = 0) \mathbin{\&} \forall_i(i \in \{1,\ldots,m\} \to \neg(a(i,i) = 0)) \mathbin{\&}$ $t = \lambda_i(\text{частнмод}(1, a(i,i), s), i \in \{1,\ldots,m\}) \to$ $\text{Умножматр}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,n\}), x, \mod (s)) =$ $\lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\ldots,m\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}) \leftrightarrow$ $\exists_y(y \in \text{Линкомб}(\text{set}_z(\exists_{ij}(i \in \{1,\ldots,n-m\} \mathbin{\&} j \in \{1,\ldots,k\} \mathbin{\&}$ $z = \lambda_{pq}(((-t(p)a(p,m+i))(\mod s) \text{ при } p \le m, \text{ иначе } (1 \text{ при } p = m+i, \text{ иначе } 0)$ $\text{при } q = j, \text{иначе } 0), p \in \{1,\ldots,n\} \mathbin{\&} q \in \{1,\ldots,k\}))), \mod (s)) \mathbin{\&}$

$x =$ плюсфункмод$(y, \lambda_{pq}(((t(p)b(p,q))(\mod s)$ при $p \leq m,$ иначе $0),$
$p \in \{1, \dots, n\}$ & $q \in \{1, \dots, k\}), s)))$

7. Случай однородного уравнения.

   $\forall_{Ay}(\exists_x(x \in A \ \& \ y = x) \leftrightarrow y \in A)$

Нормализатор вычисления ранга матрицы "нормранг"

В приемах нормализатора используются указатели "матрица", задающие идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Кроме того, из соображений ускорения вычислений блокируется обработка нормализатором неконстантных матриц. Для нахождения ранга последних служат приемы сканирования задачи.

1. Матрица состоит из единственной строки либо из единственного столбца.

   $\forall_{amn}(m = 1 \rightarrow$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \dots, m\}$ & $j \in \{1, \dots, n\})) = 0)$

   Специальный фильтр проверяет, что все элементы матрицы нулевые. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{akmn}(k \in \{1, \dots, n\}$ & $\neg(a(1,k) = 0)$ & $m = 1 \rightarrow$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \dots, m\}$
   & $j \in \{1, \dots, n\})) = 1)$

   Первый антецедент выделен указателем "программа". Он перечисляет номера k элементов единственной строки матрицы. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{akmn}(k \in \{1, \dots, m\}$ & $\neg(a(k,1) = 0)$ & $n = 1 \rightarrow$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \dots, m\}$
   & $j \in \{1, \dots, n\})) = 1)$

   Аналогично предыдущему.

2. Отбрасывание нулевой строки.

   $\forall_{akmn}(k \in \{1, \dots, m\} \rightarrow$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \dots, m\}$ & $j \in \{1, \dots, n\})) =$ ранг$(\lambda_{ij}((a(i,j)$ при $i < k,$ иначе $a(i+1,j)), i \in \{1, \dots, m-1\}$ & $j \in \{1, \dots, n\})))$

   Антецедент выделен указателем "программа". Специальный фильтр проверяет, что все элементы k-й строки нулевые. Кроме того, прояется, что число строк больше единицы. Уровень срабатывания равен 1.

3. Сведение к рангу меньшей матрицы путем прибавления к строкам векторов, пропорциональных заданной строке.

   $\forall_{akmn}(k \in \{1, \dots, n\}$ & $\neg(a(1,k) = 0) \rightarrow$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \dots, m\}$ &
   $j \in \{1, \dots, n\})) =$ ранг$(\lambda_{ij}((a(i+1,j)a(1,k) - a(1,j)a(i+1,k)$ при $j < k,$
   иначе $a(i+1,j+1)a(1,k) - a(1,j+1)a(i+1,k)), i \in \{1, \dots, m-1\}$ &
   $j \in \{1, \dots, n-1\})) + 1)$

   Первый антецедент выделен указателем "программа", второй - обрабатывается проверочным оператором. Параметры m, n больше единицы. Уровень срабатывания равен 2.

4. Усмотрение из посылок.

   $\forall_{ab}(\text{ранг}(a) = b \to \text{ранг}(a) = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение b не содержит символа "ранг". Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор вычисления собственных значений матрицы "собствзначения"

Нормализатор имеет единственный прием, который определяет характеристический многочлен с помощью вспомогательной задачи на преобразование, а затем находит множество пар "корень многочлена - его кратность".

$\forall_{aden}(d = \det(\lambda_{ij}((a(i,i) - w \text{ при } i = j, \text{ иначе } a(i,j)), i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\}))$
$\&\; \text{наборкорней}(d, e) \to \text{собствзначение}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\}),$
$x, y) \leftrightarrow (x, y) \in e)$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. В качестве w выбирается новая переменная. Левая часть обрабатывается сначала нормализатором "видУмножение" разложения на комплексные множители, а затем - нормализатором "Корни", преобразующим эти множители к виду степеней двучленов $w+b$. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, определяющим по произведению степеней двучленов $w+b$ набор пар "корень - кратность". Перечисленные комплекснозначные пакеты будут описаны в разделе, посвященном комплексному анализу.

Нормализатор общей стандартизации "нормопределитель"

1. Определители малых порядков.

   $\forall_{abcd}(\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc)$

   Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcdefpqr}(\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{pmatrix} = aer + dqc + pbf - pec - dbr - afq)$

   Либо все элементы определителя - десятичные числа, либо имеется комментарий "нормопределитель". Уровень срабатывания равен 2 в первом случае и 3 во втором.

2. Одинаковые строки.

   $\forall_{ab}(\det(\text{строки}(a, a; b)) = 0)$

   Указатель "список" определяет усмотрение совпадающих элементов на произвольных позициях набора строк. Уровень срабатывания равен 1.

3. Переход от задания определителя константного порядка через описатель "отображение" к заданию его через набор строк.

   $\forall_{An}(\det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\})) = \det(\text{строки}(\lambda_k(\lambda_l(A(k,l),$
   $l \in \{1, \ldots, n\}), k \in \{1, \ldots, n\}))))$

   Переменная A функциональная. Указатели "развертка" определяют выписывание термов "отображение" из заменяющей части в виде наборов. Переменная

n идентифицируется с натуральной константой. Уровень срабатывания приема равен 1.

Нормализатор общей стандартизации "нормчислкоэфф"

Нормализатор имеет единственный прием, связанный с умножением матрицы на единицу.

Нормализатор приведения многочленной матрицы к каноническому виду "нормканматр"

Переменная x, относительно которой рассматриваются многочлены, передается нормализатору через комментарий (переменная x). Если при обращении к нормализатору не введен комментарий "минус", то в процессе преобразований матрица приводится к виду "умножматр(степеньматр(A, минус(1)), B, степеньматр(C, минус(1)))", где B - каноническая матрица; A, C - невырожденные квадратные матрицы. При наличии комментария "минус" она приводится к виду "умножматр(A, B, C)", где B - каноническая матрица; A, C - невырожденные квадратные матрицы. Приведенный выше прием преобразования матрицы к жордановой нормальной форме использует сначала обращение первого типа, а затем, при отыскании трансформирующей матрицы, - второго. В приводимых далее приемах используются указатели "матрица".

1. Ввод исходных правого и левого множителя.

   $\forall_{an}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}) = (\lambda_{ij}((1 \text{ при } i=j, \text{ иначе } 0),$ $i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$ $(\lambda_{ij}((1 \text{ при } i=j, \text{ иначе } 0), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}))^{-1})$

   Комментарий "минус" отсутствует. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{an}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}) = \lambda_{ij}((1 \text{ при } i=j, \text{ иначе } 0),$ $i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}) \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$ $\lambda_{ij}((1 \text{ при } i=j, \text{ иначе } 0), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}))$

   Комментарий "минус" имеется. Уровень срабатывания тот же.

2. Исходная нормализация многочленов.

   $\forall_{bcdn}(b\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\})c = b\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&$ $j \in \{1,\dots,n\})c)$

   Указатель "контекст" определяет идентификацию комментария (переменная x). Существует элемент матрицы d, допускающий невырожденное раскрывание скобок относительно суммы с переменной x. Тогда каждый элемент этой матрицы обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс" и нормализатором "Нормммногочлен", выполняющим группировку по степеням переменной x. Уровень срабатывания равен 1.

3. Перестановка столбцов для понижения степени.

   $\forall_{abdkmn}(k \in \{1,\dots,n\} \,\&\, m \in \{1,\dots,n\} \,\&\, \neg(m=k) \to a\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ $\&\, j \in \{1,\dots,n\})(\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} =$ $a\lambda_{ij}((d(i,m) \text{ при } j=k, \text{ иначе } (d(i,k) \text{ при } j=m, \text{ иначе } d(i,j))), i \in \{1,\dots,n\}$ $\&\, j \in \{1,\dots,n\})(\lambda_{ij}((b(i,m) \text{ при } j=k, \text{ иначе } (b(i,k) \text{ при } j=m, \text{иначе } b(i,j))),$ $i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\}))^{-1})$

Указатель "контекст" определяет идентификацию комментария (переменная x). Антецеденты выделены указателем "программа". Степень многочлена $d(k,k)$ строго больше степени многочлена $d(k,m)$. Оба многочлена ненулевые. В первых $k-1$ столбцах все элементы под главной диагональю нулевые; в первых $k-1$ строках все элементы справа от главной диагонали нулевые. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abdkmn}(k \in \{1,\dots,n\}$ & $m \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(m=k) \to a\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}) = a\lambda_{ij}((d(i,m)$ при $j=k,$ иначе $(d(i,k)$ при $j=m,$ иначе $d(i,j))), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \lambda_{ij}((b(m,j)$ при $i=k,$ иначе $(b(k,j)$ при $i=m,$ иначе $b(i,j))),\ i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}))$

Аналогично предыдущему, но для вида преобразуемого терма, соответствующего комментарию "минус".

4. Перестановка строк для понижения степени.

   $\forall_{abdkmn}(k \in \{1,\dots,n\}$ & $m \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(m=k) \to (\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}))^{-1}\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})a = (\lambda_{ij}((b(m,j)$ при $i=k,$ иначе $(b(k,j)$ при $i=m,$ иначе $b(i,j))), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} \cdot \lambda_{ij}((d(m,j)$ при $i=k,$ иначе $(d(k,j)$ при $i=m,$ иначе $d(i,j))), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})a)$

   Аналогично перестановке столбцов, но степень многочлена $d(k,k)$ строго больше степени многочлена $d(m,k)$.

   $\forall_{abdkmn}(k \in \{1,\dots,n\}$ & $m \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(m=k) \to \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})a = \lambda_{ij}((b(i,m)$ при $j=k,$ иначе $(b(i,k)$ при $j=m,$ иначе $b(i,j))), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \lambda_{ij}((d(m,j)$ при $i=k,$ иначе $(d(k,j)$ при $i=m,$ иначе $d(i,j))), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})a)$

   Прием соответствует случаю комментария "минус".

5. Вычитание кратного строки.

   $\forall_{abdekmnpqr}(k \in \{1,\dots,n\}$ & $m \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(m=k)$ & частноемногочленов$(\lambda_x(d(m,k), x -$ число$), \lambda_x(d(k,k), x -$ число$), p, q)$ & $q = \lambda_x(e(x), x -$ число$)$ & $p = \lambda_x(r(x), x -$ число$) \to (\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} \cdot \lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})a = (\lambda_{ij}((b(m,j) - r(x)b(k,j)$ при $i=m,$ иначе $b(i,j)), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\}))^{-1}\lambda_{ij}(((e(x)$ при $j=k,$ иначе $d(m,j) - r(x)d(k,j))$ при $i=m,$ иначе $d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})a)$

   Указатель "контекст" определяет идентификацию комментария (переменная x). Первые три антецедента выделены указателем "программа". Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором деления с остатком многочленов, рассматриваемых как функции, заданные описателем "отображение". Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Многочлены $d(k,k)$ и $d(m,k)$ ненулевые. В первых $k-1$ столбцах все элементы под главной диагональю нулевые; в первых $k-1$ строках все элементы справа от главной диагонали нулевые. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abdekmnpqr}(k \in \{1,\dots,n\}$ & $m \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(m=k)$ & частноемногочленов$(\lambda_x(d(m,k), x -$ число$), \lambda_x(d(k,k), x -$ число$), p, q)$ & $q = \lambda_x(e(x), x -$ число$)$

$\& \; p = \lambda_x(r(x), x - \text{число}) \to \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$
$\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})a = \lambda_{ij}((b(i,k) + r(x)b(i,m) \text{ при}$
$j = k, \text{ иначе } b(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(((e(x) \text{ при}$
$j = k, \text{ иначе } d(m,j) - r(x)d(k,j)) \text{ при } i = m, \text{ иначе } d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\}$
$\& \; j \in \{1,\dots,n\})a)$

$\forall_{abdekmnpqr}(k \in \{1,\dots,n\} \;\&\; m \in \{1,\dots,n\} \;\&\; \neg(m = k) \;\&$ частноеМногочленов$(\lambda_x(d(m,k), x - \text{комплексное}), \lambda_x(d(k,k), x - \text{комплексное}), p, q) \;\&$
$q = \lambda_x(e(x), x - \text{комплексное}) \;\&\; p = \lambda_x(r(x), x - \text{комплексное}) \to$
$\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\}$
$\& \; j \in \{1,\dots,n\})a = \lambda_{ij}((b(i,k) + r(x)b(i,m) \text{ при } j = k, \text{ иначе}$
$b(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(((e(x) \text{ при } j = k, \text{ иначе}$
$d(m,j) - r(x)d(k,j)) \text{ при } i = m, \text{ иначе } d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})a)$

Аналогично предыдущему. В первом приеме преобразуемое выражение не содержит мнимой единицы, и арифметические операции вещественнозначные. Во втором приеме это выражение содержит мнимую единицу, и арифметические операции комплекснозначные.

6. Вычитание кратного столбца.

$\forall_{abdekmnpqr}(k \in \{1,\dots,n\} \;\&\; m \in \{1,\dots,n\} \;\&\; \neg(m = k) \;\&$ частноемногочленов$(\lambda_x(d(k,m), x - \text{число}), \lambda_x(d(k,k), x - \text{число}), p, q) \;\&\; q = \lambda_x(e(x), x - \text{число})$
$\& \; p = \lambda_x(r(x), x - \text{число}) \to a\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$
$(\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} = a\lambda_{ij}(((e(x) \text{ при } i = k, \text{ иначе}$
$d(i,m) - r(x)d(i,k)) \text{ при } j = m, \text{ иначе } d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$
$(\lambda_{ij}((b(i,m) - r(x)b(i,k) \text{ при } j = m, \text{ иначе } b(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&$
$j \in \{1,\dots,n\}))^{-1})$

$\forall_{abdekmnpqr}(k \in \{1,\dots,n\} \;\&\; m \in \{1,\dots,n\} \;\&\; \neg(m = k) \;\&$ частноемногочленов$(\lambda_x(d(k,m), x - \text{число}), \lambda_x(d(k,k), x - \text{число}), p, q) \;\&\; q = \lambda_x(e(x), x - \text{число})$
$\& \; p = \lambda_x(r(x), x - \text{число}) \to a\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$
$\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) = a\lambda_{ij}(((e(x) \text{ при } i = k, \text{ иначе}$
$d(i,m) - r(x)d(i,k)) \text{ при } j = m, \text{ иначе } d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$
$\lambda_{ij}((b(k,j) + r(x)b(m,j) \text{ при } i = k, \text{ иначе } b(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&$
$j \in \{1,\dots,n\}))$

$\forall_{abdekmnpqr}(k \in \{1,\dots,n\} \;\&\; m \in \{1,\dots,n\} \;\&\; \neg(m = k) \;\&$ частноеМногочленов$(\lambda_x(d(k,m), x - \text{комплексное}), \lambda_x(d(k,k), x - \text{комплексное}), p, q) \;\&$
$q = \lambda_x(e(x), x - \text{комплексное}) \;\&\; p = \lambda_x(r(x), x - \text{комплексное}) \to$
$a\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&$
$j \in \{1,\dots,n\}) = a\lambda_{ij}(((e(x) \text{ при } i = k, \text{ иначе } d(i,m) - r(x)d(i,k)) \text{ при}$
$j = m, \text{ иначе } d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}((b(k,j) + r(x)b(m,j) \text{ при}$
$i = k, \text{ иначе } b(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}))$

Аналогично вычитанию кратного строки.

7. Перестановка строк и столбцов для получения на главной диагонали ненулевого элемента.

$\forall_{bcdknpq}(k \in \{1,\dots,n\} \;\&\; p \in \{k+1,\dots,n\} \;\&\; q \in \{k+1,\dots,n\} \;\&$
$d(k,k) = 0 \to (\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} \cdot$
$\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; j \in \{1,\dots,n\})(\lambda_{ij}(c(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \;\&$
$j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} = (\lambda_{ij}((b(p,j) \text{ при } i = k, \text{ иначе } (b(k,j) \text{ при } i = p, \text{ иначе } b(i,j))),$

$$\begin{array}{l}
i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}))^{-1}\lambda_{ij}(((d(k,k) \text{ при } j = q, \text{иначе } (d(k,q) \text{ при} \\
j = k, \text{иначе } d(k,j))) \text{ при } i = p, \text{ иначе } ((d(p,k) \text{ при } j = q, \text{ иначе } (d(p,q) \text{ при} \\
j = k, \text{ иначе } d(p,j))) \text{ при } i = k, \text{ иначе } (d(i,k) \text{ при } j = q, \text{ иначе } (d(i,q) \text{ при} \\
j = k, \text{ иначе } d(i,j)))))), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \\
(\lambda_{ij}((c(i,q) \text{ при } j = k, \text{ иначе } (c(i,k) \text{ при } j = q, \text{ иначе } c(i,j))), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \\
j \in \{1,\dots,n\}))^{-1})
\end{array}$$

Указатель "контекст" определяет идентификацию комментария (переменная x). Первые три антецедента выделены указателем "программа", четвертый выделен указателем "идентификатор". Многочлен $d(p,q)$ ненулевой, причем имеющий наименьшую степень среди всех таких многочленов в подматрице $\{k+1,\dots,n\} \times \{k+1,\dots,n\}$. В первых $k-1$ столбцах все элементы под главной диагональю нулевые; в первых $k-1$ строках все элементы справа от главной диагонали нулевые. Уровень срабатывания равен 3.

$$\begin{array}{l}
\forall_{bcdknpq}(k \in \{1,\dots,n\} \ \& \ p \in \{k+1,\dots,n\} \ \& \ q \in \{k+1,\dots,n\} \ \& \\
d(k,k) = 0 \to \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \\
\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(c(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \\
j \in \{1,\dots,n\}) = \lambda_{ij}((b(i,p) \text{ при } j = k, \text{ иначе } (b(i,k) \text{ при } j = p, \text{ иначе } b(i,j))), \\
i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(((d(k,k) \text{ при } j = q, \text{иначе } (d(k,q) \text{ при} \\
j = k, \text{иначе } d(k,j))) \text{ при } i = p, \text{ иначе } ((d(p,k) \text{ при } j = q, \text{ иначе } (d(p,q) \text{ при} \\
j = k, \text{ иначе } d(p,j))) \text{ при } i = k, \text{ иначе } (d(i,k) \text{ при } j = q, \text{ иначе } (d(i,q) \text{ при} \\
j = k, \text{ иначе } d(i,j)))))), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \\
\lambda_{ij}((c(q,j) \text{ при } i = k, \text{ иначе } (c(k,j) \text{ при } i = p, \text{ иначе } c(i,j))), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \\
j \in \{1,\dots,n\}))^{-1})
\end{array}$$

Аналогично предыдущему.

8. Деление с остатком для двух последовательных элементов главной диагонали - случай ненулевого остатка.

$$\begin{array}{l}
\forall_{bcdknpqrs}(k \in \{1,\dots,n-1\} \ \& \ \text{частноемногочленов}(\lambda_x(d(k+1,k+1), x - \text{число}), \\
\lambda_x(d(k,k), x - \text{число}), p, q) \ \& \ p = \lambda_x(r(x), x - \text{число}) \ \& \ q = \lambda_x(s(x), x - \text{число}) \to \\
(\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}))^{-1}\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \\
j \in \{1,\dots,n\})(\lambda_{ij}(c(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} = \\
(\lambda_{ij}((b(k,j)+b(k+1,j) \text{ при } i = k, \text{ иначе } b(i,j))i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} \cdot \\
\lambda_{ij}((s(x) \text{ при } i = k \ \& \ j = k+1, \text{ иначе } d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \\
(\lambda_{ij}((c(i,k+1) - r(x)c(i,k) \text{ при } j = k+1, \text{ иначе } c(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \\
j \in \{1,\dots,n\}))^{-1})
\end{array}$$

Указатель "контекст" определяет идентификацию комментария (переменная x). Первый антецедент выделен указателем "программа", второй обрабатывается пакетным синтезатором. Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Матрица d диагональная. Многочлен $d(k+1,k+1)$ не делится на многочлен $d(k,k)$. Уровень срабатывания равен 3.

$$\begin{array}{l}
\forall_{bcdknpqrs}(k \in \{1,\dots,n-1\} \ \& \ \text{частноемногочленов}(\lambda_x(d(k+1,k+1), x - \text{число}), \\
\lambda_x(d(k,k), x - \text{число}), p, q) \ \& \ p = \lambda_x(r(x), x - \text{число}) \ \& \ q = \lambda_x(s(x), x - \text{число}) \to \\
\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \\
j \in \{1,\dots,n\})\lambda_{ij}(c(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) = \\
\lambda_{ij}((b(i,k+1)-b(i,k) \text{ при } j = k+1, \text{ иначе } b(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \\
\lambda_{ij}((s(x) \text{ при } i = k \ \& \ j = k+1, \text{ иначе } d(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot \\
\lambda_{ij}((c(k,j)+r(x)c(k+1,j) \text{ при } i = k, \text{ иначе } c(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\}))
\end{array}$$

$\forall_{bcdknpqrs}(k \in \{1, \ldots, n-1\}$ & частноеМногочленов$(\lambda_x(d(k+1, k+1), x-$комплексное$), \lambda_x(d(k,k), x-$ комплексное$), p, q)$ & $p = \lambda_x(r(x), x-$ комплексное$)$ & $q = \lambda_x(s(x), x-$ комплексное$) \to \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}) \cdot \lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})\lambda_{ij}(c(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}) = \lambda_{ij}((b(i, k+1) - b(i,k)$ при $j = k+1,$ иначе $b(i,j)),$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})\lambda_{ij}((s(x)$ при $i = k$ & $j = k+1,$ иначе $d(i,j)),$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})\lambda_{ij}((c(k,j)+r(x)c(k+1,j)$ при $i = k,$ иначе $c(i,j)),$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}))$

Аналогично предыдущему. Первый прием относится к вещественным матрицам, второй - к комплексным.

9. Деление с остатком для двух последовательных элементов главной диагонали - случай нулевого остатка.

   $\forall_{bcdknpqr}(k \in \{1, \ldots, n-1\}$ & частноемногочленов$(\lambda_x(d(k+1, k+1), x-$ число$),$ $\lambda_x(d(k,k), x-$ число$), p, q)$ & $p = \lambda_x(r(x), x-$ число$)$ & $q = \lambda_x(0, x-$ число$) \to$ $b\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c = b\lambda_{ij}((d(k,k)r(x)$ при $i = k+1$ & $j = k+1,$ иначе $d(i,j)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c)$

   $\forall_{bcdknpqr}(k \in \{1, \ldots, n-1\}$ & частноеМногочленов$(\lambda_x(d(k+1, k+1), x-$комплексное$), \lambda_x(d(k,k), x-$ комплексное$), p, q)$ & $p = \lambda_x(r(x), x-$ комплексное$)$ & $q = \lambda_x(0, x-$ комплексное$) \to b\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c =$ $b\lambda_{ij}((d(k,k)r(x)$ при $i = k+1$ & $j = k+1,$ иначе $d(i,j)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c)$

   Аналогично случаю ненулевого остатка.

10. Деление многочлена, расположенного на главной диагонали, на его старший коэффициент.

    $\forall_{abcdekmn}(k \in \{1, \ldots, n\}$ & $d(k,k) = ax^m + e$ & $\neg(a = 0) \to$ $(\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}))^{-1}\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c = (\lambda_{ij}((b(k,j)/a$ при $i = k,$ иначе $b(i,j)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}))^{-1}\lambda_{ij}(((d(k,k)/a$ при $j = k,$ иначе $0)$ при $i = k,$ иначе $d(i,j)),$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c)$

    Первый антецедент выделен указателем "программа", второй - указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "старшийчлен" определяет идентификацию правой части второго антецедента путем выделения старшего члена. Многочлен $d(k,k)$ ненулевой. Матрица d диагональная. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abcdekmn}(k \in \{1, \ldots, n\}$ & $d(k,k) = ax^m + e$ & $\neg(a = 0) \to$ $\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})\lambda_{ij}(d(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c = \lambda_{ij}((ab(i,k)$ при $j = k,$ иначе $b(i,j)), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})\lambda_{ij}(((d(k,k)/a$ при $j = k,$ иначе $0)$ при $i = k,$ иначе $d(i,j)),$ $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})c)$

    Аналогично предыдущему. Созданы две версии приема - одна для вещественных матриц, другая для комплексных.

Проверочный оператор "усмматрица"

По умолчанию, все проверочные операторы имеют прием непосредственного усмотрения истинности (наличие проверяемого утверждения в посылках) и прием, извлекающий результат из буфера, куда он был занесен при предыдущих обращениях.

1. Усмотрение функции, определенной на прямом произведении начальных отрезков натурального ряда.

   $\forall_{amn}(m$ – натуральное & n – натуральное $\to \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}$ & $j \in \{1,\ldots,m\})$ – матрица)

   Переменная a функциональная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатели "матрица" и "развертка" не используются. Уровень срабатывания равен 1.

2. Посылка, определяющая размеры матрицы.

   $\forall_{Aamn}$(матр$(a, A, m, n) \to a$ – матрица)

   Уровень срабатывания равен 1.

Проверочный оператор "усмматр"

Оператор проверяет истинность утверждения "матр(a, A, m, n)", означающего, что a есть матрица с элементами из множества A, имеющая m строк и n столбцов. Уровни срабатывания приемов равны 1.

1. Сумма матриц.

   $\forall_{ABkmn}$(матр$(A, \mathbb{R}, m, k)$ & матр$(B, \mathbb{R}, m, k) \to$ матр$(A + B, \mathbb{R}, m, k))$

   Антецеденты реализуют рекурсивные обращения, причем указатель "дистрибразвертка" обеспечивает обработку суммы с произвольным числом слагаемых. Знаком "+" обозначен символ "плюсфунк".

2. Произведение матриц.

   $\forall_{ABkmn}$(матр$(A, \mathbb{R}, m, k)$ & матр$(B, \mathbb{R}, m, k) \to$ матр$(AB, \mathbb{R}, m, k))$

   Аналогично предыдущему, но для символа "умножматр".

3. Степень матрицы.

   $\forall_{Amn}$(матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \to$ матр$(A^m, \mathbb{R}, n, n))$

   Аналогично предыдущему. Используется символ "степеньматр".

4. Диагональная матрица.

   $\forall_{Aan}(l(a) = n$ & $\mathrm{Val}(a) \subseteq A \to$ матр(диагматр$(a), A, n, n))$

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором.

Проверочный оператор "усмквадрматр"

1. Единичная матрица.

   $\forall_n$(квадрматр(единичнматр(n)))

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение размеров матрицы из контекста.

   $\forall_{abn}(\text{матр}(a,b,n,n) \to \text{квадрматр}(a))$

   Уровень срабатывания равен 2.

3. Степень квадратной матрицы.

   $\forall_{an}(\text{квадрматр}(a) \to \text{квадрматр}(a^n))$

   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

4. Произведение двух квадратных матриц.

   $\forall_{ab}(\text{квадрматр}(a) \ \& \ \text{квадрматр}(b) \to \text{квадрматр}(ab))$

   Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания приема равен 2.

Синтезатор "типматрицы"

Синтезатор реализует утверждение "матр(A,x,y,z)". Входное данное - матрица A. Выходным переменным x,y,z присваиваются, соответственно, множество, к которому относятся элементы матрицы A, число строк и число столбцов данной матрицы. Уровни срабатывания приемов синтезатора равны 1.

1. Прямоугольная вещественная матрица.

   $\forall_{amn}(\forall_{ij}(i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,m\} \to a(i,j) - \text{число}) \to$
   $\text{матр}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,m\}), \mathbb{R}, n, m))$

   Идентификация элементов матрицы происходит с использованием указателя "матрица". Переменная a функциональная. Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

2. Явное указание типа и размеров матрицы в посылках.

   $\forall_{abmn}(\text{матр}(a,b,m,n) \to \text{матр}(a,b,m,n))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой.

Синтезатор "элемделители"

Синтезатор реализует утверждение "элемделители(a,b)". Входным данным служит многочленная матрица a, приведенная к канонической форме. Переменная x, относительно которой рассматриваются многочлены, передается синтезатору через комментарий (переменная x). Выходной переменной b присваивается набор элементарных делителей матрицы a.

Синтезатор имеет единственный прием:

$\forall_{ab}(\text{элемделители}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,n\}), b))$

При идентификации матрицы используется указатель "матрица". Указатели "контекст" определяют переменную x, относительно которой рассматриваются многочлены, а также терм b вида "набор$(c_1 \ldots c_k)$", где c_i - всевозможные множители вида "$(x+r)^s$" результатов обработки неконстантных диагональных элементов матрицы a нормализаторами "видУмножение" и "Корни". Эти нормализаторы будут описаны в разделе, посвященном комплексному анализу. Первый из них является комплекснозначным аналогом нормализатора разложения на множители "видумножение", второй - преобразует полученное выражение к виду произведения степеней двучленов $x + r$ и отбрасывает константный коэффициент.

Синтезатор перехода от многочленной матрицы к многочлену от матрицы "матрмногочлен"

Синтезатор реализует утверждение "матрмногочлен(a, b)". Входным данным служит многочленная матрица a, причем переменная, от которой берутся многочлены, задается передаваемым синтезатору комментарием (переменная x). Выходной переменной b присваивается многочлен с матричными коэффициентами от скалярной переменной x, возникающий при "группировке" многочленов матрицы a. Уровень срабатывания приемов синтезатора равен 1.

1. Константная матрица.

   $\forall_a$(матрмногочлен(a, a))

   Указатель "контекст" идентифицирует комментарий (переменная x). Проверяется, что выражение a не содержит x.

2. Выделение матричного одночлена.

   $\forall_{abcknpx}(\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\} \to a(i, j) = b(i, j)x^k + c(i, j))\ \&$
   матрмногочлен$(\lambda_{ij}(c(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}), p) \to$
   матрмногочлен$(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}), p + \lambda_{ij}(b(i, j),$
   $i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\})x^k))$

   Указатели "контекст" определяют идентификацию комментария (переменная x) и слагаемого элемента матрицы a, представляющего собой одночлен степени k относительно переменной x. Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "отображение(...)" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". При этом указатель "коэффициент" определяет идентификацию $b(i, j)$ с суммой всех коэффициентов при x^k. Здесь допускаются случаи дробных коэффициентов и отсутствия членов k -й степени. Второй антецедент, выделенный указателем "значения", реализует рекурсивное обращение. Созданы две версии приема - для вещественного и комплексного случаев.

Синтезатор построения жордановой матрицы по набору элементарных делителей многочленной матрицы "жордматрица"

Синтезатор реализует утверждение "жордматрица(a, b)". Входным данным служит набор a элементарных делителей многочленной матрицы. Выходной переменной b присваивается жорданова матрица, построенная по набору a. Уровни срабатывания приемов синтезатора равны 1.

1. Жорданова клетка.

   $\forall_{anx}$(жордматрица$(((x+a)^n), \lambda_{ij}((-a$ при $i = j,$ иначе $(1$ при $j = i+1,$ иначе $0)),$
   $i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\})))$

Указатель "контекст" идентифицирует комментарий (переменная x). Переменная x не входит в выражение a. При формировании результата используется указатель "матрица".

2. Разбиение набора элементарных делителей на два поднабора.

$$\forall_{ABabkmnpqr}(l(p) = n \mathbin{\&} m = [n/2] \mathbin{\&} 1 < n \mathbin{\&} \text{жордматрица}(\lambda_i(p(i), i \in \{1, \ldots, m\}), A) \mathbin{\&} A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \ldots, k\} \mathbin{\&} j \in \{1, \ldots, k\}) \mathbin{\&} \text{жордматрица}(\lambda_i(p(m+i), i \in \{1, \ldots, n-m\}), B) \mathbin{\&} B = \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1, \ldots, r\} \mathbin{\&} j \in \{1, \ldots, r\}) \to \text{жордматрица}(p, \lambda_{ij}(((a(i,j) \text{ при } j \leq k, \text{иначе } 0) \text{ при } i \leq k, \text{ иначе } (0 \text{ при } j \leq k, \text{ иначе } b(i-k, j-k))), i \in \{1, \ldots, k+r\} \mathbin{\&} j \in \{1, \ldots, k+r\})))$$

Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "$\lambda_{ij}(\ldots)$" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Первый, пятый и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Второй и третий антецеденты выделены указателем "программа". Четвертый и шестой антецеденты реализуют рекурсивные обращения. При этом указатели "развертка" определяют выписывание термов "$\lambda_i(\ldots)$" в виде наборов.

Синтезатор определения коэффициента пропорциональности "коэффпропорц"

Синтезатор реализует утверждение "коэффпропорц(a, b, c)". Входные данные суть выражения a, b, задающие числовые наборы одинаковой длины. Выходной переменной c присваивается выражение, на которое надо домножить первый набор, чтобы получить второй.

Синтезатор имеет всего два приема, позволяющие сравнивать трехмерные векторы:

$$\forall_{abcdef}(\neg(a = 0) \mathbin{\&} bd - ae = 0 \mathbin{\&} cd - af = 0 \to \text{коэффпропорц}((a, b, c), (d, e, f), d/a))$$

$$\forall_{abcdef}(\neg(a = 0) \mathbin{\&} bd - ae = 0 \mathbin{\&} cd - af = 0 \to \text{коэффпропорц}((b, a, c), (e, d, f), d/a))$$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два других - выделены указателем "идентификатор".

2.4 Приемы, связанные с квадратичными формами

Как уже отмечалось выше, квадратичная форма над полем вещественных либо комплексных чисел будет задаваться с помощью описателя "отображение" и фактически отождествляться с функцией. Работа с формальными многочленами несколько усложнила бы запись приемов.

Обращение к синтезатору "квадрканоничвид" для приведения квадратичной формы к каноническому виду

$$\forall_{AGHfghpqry}(f = \lambda_x(p(x), A(x)) \mathbin{\&} \text{квадрканоничвид}(x, p(x), y, q, r) \mathbin{\&} G = \text{числотобр}(x, y, r) \mathbin{\&} H = \text{числфунк}(y, q) \mathbin{\&} g = G \mathbin{\&} h = H \to \text{каноничвид}(f, g, h))$$

Утверждение "каноничвид(f, g, h)" означает, что h есть результат приведения квадратичной формы f над полем вещественных чисел к каноническому виду; g - линейное отображение, выполняющее переход к каноническому виду, т.е. $f(g(x)) = h(x)$.

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". При этом переменные g, h идентифицируются с неизвестными. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он определяет выражение $p(x)$, задающее значения квадратичной формы.

Второй антецедент обрабатывается синтезатором "квадрканоничвид". Входными данными здесь служат набор переменных x и выражение $p(x)$. Синтезатор определяет выражение q для значений результата приведения квадратичной формы к каноническому виду, список y переменных, относительно которых берется этот результат, и список r равенств, выражающих переменные x через переменные y. Списки x, y представлены как термы "набор(...)". Описание приемов синтезатора будет приведено ниже.

Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "программа". Они обращаются к программным выражениям "числотобр" и "числфунк", реализованным на ЛОСе. Процедура "числотобр" получает термы "набор(...)" для списков переменных x, y, а также конъюнкцию r равенств, выражающих переменные x через переменные y. Она выдает терм, определяющий соответствующее отображение вещественных переменных y в переменные x. Процедура "числфунк" получает терм "набор(...)" для списка переменных y, а также выражение q. Она выдает терм, определяющий функцию вещественных переменных y, значения которой определяются по q.

Пятый и шестой антецеденты выделены указателем "подборзначений". Они передают вспомогательной задаче равенства для найденных значений G, H неизвестных g, h.

Переменные p, A функциональные. Указатель "кортежпеременных" разрешает связывающую приставку x произвольной длины. Неизвестные g, h не встречаются в остальных условиях задачи, за исключением термов длины 2 и отрицаний равенства этих неизвестных каким-либо выражениям, отличным от G, H. Уровень срабатывания равен 2.

Обращение к синтезатору "квадрнормвид" для приведения квадратичной формы к нормальному виду

$\forall_{AGHfghpqry}(f = \lambda_x(p(x), A(x))$ & квадрнормвид$(x, p(x), y, q, r)$ &
$G =$ числотобр(x, y, r) & $H =$ числфунк(y, q) & $g = G$ & $h = H \rightarrow$ нормвид$(f, g, h))$

Утверждение "нормвид(f, g, h)" означает, что h есть результат приведения квадратичной формы f над полем вещественных чисел к нормальному виду; g - линейное отображение, выполняющее переход к нормальному виду, т.е. $f(g(x)) = h(x)$.

Прием аналогичен приему приведения к каноническому виду.

Линейное преобразование, переводящее одну квадратичную форму в другую

$\forall_{ABFGHXcdfgmpqrsvxyz}(f = \lambda_x(p(x), A(x))$ & $g = \lambda_y(q(y), B(y))$ &
квадрканоничвид$(x, p(x), z, c, d)$ & квадрканоничвид$(y, q(y), v, r, s)$ &
эквформы(z, v, c, r, m) & $F =$ числотобр(x, z, d) & $G =$ числотобр(y, v, s)
& $H =$ числотобр(z, v, m) & $X =$ произведение$(F, H,$ обрфункция$(G)) \rightarrow$
произведение$(f, X) = g$ & Линпреобр$(X,$ веществполе$))$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквенты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная X при этом идентифицируется с неизвестной. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Третий, четвертый и пятый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Синтезатор "эквформы(z, v, c, r, m)" по заданным выражениям c, r приведенных к нормальному виду эквивалентных квадратичных форм относительно переменных списков z, v над полем вещественных чисел определяет конъюнкцию m равенств, выражающих переменные z через переменные v при преобразовании c в r. Приемы этого синтезатора будут описаны ниже. Шестой, седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "программа". Наконец, девятый антецедент выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 2.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду для установления ее положительной либо отрицательной определенности

$\forall_{AGpqry}$(квадрканоничвид$(x, p(x), y, q, r)$ & $G =$ числфунк$(y, q) \rightarrow$
положитопред$(\lambda_x(p(x), A(x))) \leftrightarrow$ положитопред$(G))$

$\forall_{AGpqry}$(квадрканоничвид$(x, p(x), y, q, r)$ & $G =$ числфунк$(y, q) \rightarrow$
отрицатопред$(\lambda_x(p(x), A(x))) \leftrightarrow$ отрицатопред$(G))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Они применяются к подутверждению условия задачи на описание. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "программа". Указатель "кортежпеременных" определяет идентификацию переменной x со связывающей приставкой произвольной длины. Переменные p, A функциональные. Рассматриваемая квадратичная форма не имеет канонического вида. Уровень срабатывания равен 2.

Условие положительной либо отрицательной определенности квадратичной формы, имеющей канонический вид

$\forall_{Aan}(l(x) = n \rightarrow$ положитопред$(\lambda_x(\sum_{i=1}^{n}(a(i)(x(i))^2), A(x))) \leftrightarrow$
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow 0 < a(i)))$

$\forall_{Aan}(l(x) = n \rightarrow$ отрицатопред$(\lambda_x(\sum_{i=1}^{n}(a(i)(x(i))^2), A(x))) \leftrightarrow$
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow a(i) < 0))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Указатели "развертка" определяют идентификацию конечной суммы с обычной суммой и выписывание квантора общности в виде конъюнкции. При идентификации коэффициентов $a(i)$ используется указатель "коэфф", обеспечивающим учет нулевых значений. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменные a, b, A функциональные. Используется указатель "кортежпеременных". Уровень срабатывания равен 1.

Приведение квадратичной формы к главным осям

В приемах данного подраздела используется утверждение "ортканоничвид(a, b, c)", означающее, что c есть результат приведения квадратичной формы a над полем вещественных чисел к каноническому виду; b - ортогональное преобразование, выполняющее переход к каноническому виду. a, b, c рассматриваются как функции, причем $a(b(x)) = c(x)$.

1. Общая стандартизация квадратичной формы.

   $\forall_{fgxy}(g = f \to$ ортканоничвид$(f, x, y) \leftrightarrow$ ортканоничвид$(g, x, y))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение g имеет заголовок "отображение". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабытвается нормализатором "нормквадрформа", который будет описан ниже. Уровень срабатывания равен 0.

2. Ввод обозначения для квадратичной формы.

   $\forall_{fgxy}($ортканоничвид$(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b) \leftrightarrow$ ортканоничвид$(g, a, b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение $\lambda_x(u(x), v(x))$ не содержит неизвестных. Прием выбирает новую переменную g и вводит дополнительную посылку "$\lambda_x(u(x), v(x)) = g$". Эта посылка сопровождается комментарием "ориентацияравенства", блокирующим перестановку частей равенства, а также комментарием "определениепараметра". Переменная g регистрируется в цели (обозначение $\ldots$). Переменные u, v функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

3. Определение матрицы квадратичной формы.

   $\forall_{fgh}(f = h \ \&$ матрицаформы$(h) = g \to$ матрицаформы$(f) = g)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подутверждения "ортканоничвид(f, x, y)" в условии задачи на описание. Переменные x, y суть неизвестные; f идентифицировано с переменной. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем заголовком выражения h служит символ "отображение". Второй антецедент выделен указателем "программа". Он обращается к реализованной на ЛОСе процедуре "матрицаформы", определяющей по терму "отображение(...)", задающему квадратичную форму, терм "строки(...)", задающий матрицу этой формы. Выводимое утверждение сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 1.

4. Определение собственных значений.

   $\forall_{Acfnuvxy}($матрицаформы$(f) = A \ \&$ собствзначение$(A, u, v) = ((u, v) \in \{; c\}) \ \&$ $l(c) = n \to \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to$ собствзначение$(f, c(i)(1), c(i)(2))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условии задачи на описание подутверждения "ортканоничвид(f, x, y)", где переменные x, y суть неизвестные. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение A имеет заголовок "строки". Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". При этом выбираются новые переменные u, v. Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "собствзначения". Заголовком выражения c служит символ "набор". Указатель "развертка" определяет выписывание квантора общности как конъюнкции. Уровень срабатывания приема равен 1.

5. Определение собственных векторов.

   $\forall_{Nabmnx}($собствзначение$(f, b, k) \ \&$ матрицаформы$(f) = \lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ $\& \ j \in \{1, \ldots, n\}) \ \& \ N = \lambda_{ij}(0, i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\}) \ \&$

$(\lambda_{ij}((a(i,i)-b \text{ при } i=j,\ \text{иначе } a(i,j)), i \in \{1,\dots,n\} \ \&\ j \in \{1,\dots,n\})x = N) =$
$(x \in \text{линкомбинации}(m)) \ \&\ m = \{;p\} \ \&\ l(p) = k \rightarrow$
$\text{собствекторы}(f, b, \{; \lambda_i(\lambda_j(p(i)(j,1), j \in \{1,\dots,n\}), i \in \{1,\dots,k\})\}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условии задачи на описание подутверждения "ортканоничвид(f, y, z)", где переменные y, z суть неизвестные. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "идентификатор". Левая часть четвертого антецедента обрабатывается нормализатором "уравнматр" с неизвестной x, в качестве которой выбирается новая переменная. Указатели "матрица" задают идентификацию и формирование термов "$\lambda_{ij}(\dots)$" с выражениями, непосредственно определяющими прямоугольные матрицы через их строки либо столбцы. Указатель "развертка" определяет выписывание термов "отображение" из выводимого утверждения в виде наборов. Уровень срабатывания равен 2.

6. Ортогонализация собственных векторов.

   $\forall_{abcf}(\text{собствекторы}(f, a, b) \ \&\ \text{ортогонализация}(b, c) \rightarrow \text{ортогонализация}(b, c))$

   Как замечалось выше, утверждение "ортогонализация(b, c)" означает, что c есть ортонормированная система векторов евклидова пространства над вещественным полем, подпространство которой совпадает с подпространством системы векторов b.

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условии задачи на описание подутверждения "ортканоничвид(f, y, z)", где переменные y, z суть неизвестные. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором "ортогонализация", который будет описан в разделе, посвященном линейным пространствам. Задача не имеет посылки вида "ортогонализация(b, X)". Уровень срабатывания равен 2.

7. Составление собственного ортонормированного базиса.

   $\forall_{Aabcdefgmnx}(\forall_i(i \in \{1,\dots,m\} \rightarrow \text{собствекторы}(f, a(i), b(i))) \ \&\ f = \lambda_x(g(x), A(x))$
   $\&\ \sum_{i=1}^{m} \text{card}(b(i)) = l(x) \ \&\ \forall_i(i \in \{1,\dots,m\} \rightarrow \text{ортогонализация}(b(i), \{; c(i)\}))$
   $\&\ d = \text{строки}(\text{Конкатенация}(c)) \ \&\ e = \text{Конкатенация}(\lambda_i(\lambda_j(a(i),$
   $j \in \{1,\dots,\text{card}(b(i))\}), i \in \{1,\dots,m\})) \rightarrow \text{собствбазис}(f, e, d))$

   Утверждение "собствбазис(f, e, d)" означает, что d есть матрица, строки которой образуют собственный базис для матрицы f, причем e - набор собственных значений, соответствующих строкам матрицы d.

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условии задачи на описание подутверждения "ортканоничвид(f, y, z)". Первый, второй и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, причем указатели "развертка" определяют идентификацию кванторов общности с группой посылок. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". В них используются нормализаторы общей стандартизации и нормализатор вычисления "норммощность". Указатели "развертка" определяют выписывание конечной суммы как обычной, а термов "отображение" как конечных наборов. Переменные a, b, c, g, A функциональные. Уровень срабатывания равен 3.

8. Заключительное определение квадратичной формы и ортогонального преобразования.

   $\forall_{Aabfghnp}(f = \lambda_x(p(x), A(x))$ & $l(x) = n$ & собствбазис$(f, \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\}),$
   $\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}))$ & $g = \lambda_x(\lambda_i(\sum_{j=1}^{n}(a(j,i)x(j)),$
   $i \in \{1, \ldots, n\}), A(x))$ & $h = \lambda_x(\sum_{i=1}^{n}(b(i)(x(i))^2), A(x)) \rightarrow$ ортканоничвид$(f, g, h))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменные g, h суть неизвестные. Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "подборзначений"; они определяют, соответственно, искомые ортогональное линейное преобразование g и квадратичную форму h. Указатели "развертка" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" по начальному отрезку натуральных чисел как наборов и выписывание конечных сумм как обычных. При идентификации третьего антецедента используется также указатель "матрица". Проверяется отсутствие прочих существенных ограничений на неизвестные g, h. Переменные a, b, p, A функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

Одновременное приведение положительно определенной формы к нормальному виду и другой формы к каноническому виду

$\forall_{ABFGUVcdefgnpqrsuv}(l(x) = n$ & квадрнормвид$(x, p(x), y, r, s)$ & $F =$ числфунк(y, r)
& $G =$ числотобр(x, y, s) & $F = \lambda_z(\sum_{i=1}^{n}(z(i))^2, B(z))$ & $h =$ произведение(q, G)
& ортканоничвид$(h, u, v) = (u = U$ & $v = V)$ & $c =$ произведение(G, U) & $d = F$
& $e = V$ & $f = \lambda_x(p(x), A(x))$ & $g = q \rightarrow$ нормвид(f, c, d) & каноничвид(g, c, e) &
$\{f, g\} = \{\lambda_x(p(x), A(x)), q\})$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквенты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменные c, d, e, f, g суть неизвестные. Отсутствуют прочие существенные ограничения на эти неизвестные. Первый антецедент, а также антецеденты с пятого по седьмой выделены указателем "идентификатор". Правая часть шестого антецедента упрощается задачей на преобразование, левая часть седьмого - разрешается относительно неизвестных u, v с помощью задачи на описание. В качестве u, v выбираются новые переменные. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, третий и четвертый - выделены указателем "программа". Последние пять антецедентов выделены указателем "подборзначений"; они замещают исходные условия во вспомогательной задаче. Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы в виде обычной суммы. Длины связывающих приставок x, z равны. Переменные p, A, B функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

Синтезатор "квадрканоничвид" приведения квадратичной формы к каноническому виду

Синтезатор реализует утверждение "квадрканоничвид(a, b, c, d, e)". Входные данные суть набор переменных a и выражение b, определяющее квадратичную форму относительно этих переменных. Синтезатор определяет выражение d, являющееся результатом приведения формы b к каноническому виду и зависящее от новых переменных c, причем значением выходной переменной e становится список равенств, выражающих исходные переменные через новые.

1. Имеется слагаемое с квадратом переменной.

   $\forall_{abpxz}(p = az^2/b \to \text{квадрканоничвид}(x, p, x, p, \text{истина}))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная z входит в список x. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcdfpqrxyz}(x = f(z) \ \& \ p = az^2/d + bz + c \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ \text{квадрканоничвид}(f(v), c - db^2/(4a), y, q, r) \to \text{квадрканоничвид}(x, p, y, dv^2/a + q, r \ \& \ z = dv/a - db/(2a)))$

   Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Переменная z идентифицируется с переменной списка x. При выборе z предпочтение отдается случаям, когда $d = 1$ и $a = \pm 1$. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - реализует рекурсивное обращение. Здесь v - новая переменная. При идентификации b используется указатель "коэффициент", обеспечивающий учет дробных коэффициентов и необходимую группировку. Таким образом, гарантируется невхождение переменной z в остаточную сумму c. Уровень срабатывания равен 2.

2. Преобразование произведения в разность квадратов.

   $\forall_{abdfmpqrxyzuv}(p = azv/d + b(z, v) \ \& \ x = f(z, v) \ \& \ \neg(a = 0) \ \&$
   $\text{квадрканоничвид}(f(u, w), au^2/d - aw^2/d + b(u + w, u - w), y, q, r) \to$
   $\text{квадрканоничвид}(x, p, y, q, r \ \& \ z = u + w \ \& \ v = u - w))$

   Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Переменные z, v идентифицируются с переменными списка x. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - реализует рекурсивное обращение. В качестве u, v берутся новые переменные. Уровень срабатывания приема равен 3.

3. Константа ноль.

   $\forall_{abpxz}(\text{квадрканоничвид}(x, 0, x, 0, \text{истина}))$

   Уровень срабатывания равен 1.

Синтезатор "квадрнормвид" приведения квадратичной формы к нормальному виду

Синтезатор реализует утверждение "квадрнормвид(a, b, c, d, e)". Входные данные суть набор переменных a и выражение b, определяющее квадратичную форму относительно этих переменных. Синтезатор определяет выражение d, являющееся результатом приведения формы b к нормальному виду и зависящее от новых переменных c, причем значением выходной переменной e становится список равенств, выражающих исходные переменные через новые. Его приемы аналогичны приемам предыдущего синтезатора.

1. Имеется слагаемое с квадратом переменной.

   $\forall_{apxz}(p = az^2 \to \text{квадрнормвид}(x, p, x, p, \text{истина}))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная z входит в список x. Коэффициент a равен ± 1. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abfnpvx}(x = f(z) \ \& \ p = az^2/b \ \& \ n = \mathrm{sg}(ab) \to \text{квадрнормвид}(x, p, f(v), nv^2, z = \sqrt{|b|}v/\sqrt{|a|}))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная f функциональная; v - новая переменная. Переменная z входит в список x. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdfnpqrxyz}(x = f(z)\ \&\ p = az^2/d + bz + c\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ n = \mathrm{sg}(ad)\ \&$ квадрнормвид$(f(v), c - db^2/(4a), y, q, r) \to$ квадрнормвид$(x, p, y, nv^2 + q,$ $r\ \&\ z = n\sqrt{|d|}v/\sqrt{|a|} - db/(2a)))$

Первые два антецедента и четвертый антецедент выделены указателем "идентификатор". Переменная z идентифицируется с переменной списка x. При выборе z предпочтение отдается случаям, когда $d = 1$ и $a = \pm 1$. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, пятый - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

2. Преобразование произведения в разность квадратов.

   $\forall_{abdfmpqrxyzuv}(p = azv/d + b(z, v)\ \&\ x = f(z, v)\ \&\ \neg(a = 0)\ \&$ квадрнормвид$(f(u, w), au^2/d - aw^2/d + b(u + w, u - w), y, q, r) \to$ квадрнормвид$(x, p, y, q, r\ \&\ z = u + w\ \&\ v = u - w))$

   Прием совершенно аналогичен соответствующему приему предыдущего синтезатора. Уровень срабатывания равен 3.

3. Константа ноль.

   $\forall_x($квадрнормвид$(x, 0, x, 0,$ истина$))$

   Уровень срабатывания равен 1.

Синтезатор "эквформы" усмотрения эквивалентности двух квадратичных форм, приведенных к каноническому виду

Синтезатор реализует утверждение "эквформы(a, b, c, d, e)". Входные данны суть наборы переменных a и b, а также выражения c и d для значений приведенных к нормальному виду квадратичных форм относительно переменных этих наборов. Эти формы эквивалентны, и синтезатор определяет конъюнкцию e равенств, выражающих переменные a через переменные b при преобразовании первой формы во вторую. Списки переменных a, b представлены в виде термов "набор$(\ldots)$". Уровень срабатывания приемов синтезатора равен 1.

1. Сопоставление двух членов одного знака.

   $\forall_{abcdmpqrsuvxy}(p = ax^2/c{+}r\ \&\ q = by^2/d{+}s\ \&\ 0 < abcd\ \&$ эквформы$(u, v, r, s, m) \to$ эквформы$(u, v, p, q, m\ \&\ x = \sqrt{bc/(ad)}y))$

   Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Переменные x, y входят, соответственно, в списки u и v. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - реализует рекурсивное обращение.

2. Нулевые формы.

   $\forall_{uv}($эквформы$(u, v, 0, 0,$ истина$))$

Нормализатор "нормквадрформа" общей стандартизации квадратичной формы

1. Раскрывание скобок.

   $\forall_{Aabcde}(\lambda_x((a(x)+b(x))c(x)/d+e(x), A(x)) = \lambda_x((a(x)c(x)+b(x)c(x))/d+e(x), A(x)))$

   Выражение $a(x)$ содержит хотя бы одну из переменных связывающей приставки x. Переменные a, b, c, e, A функциональные. Числитель дроби в заменяющем выражении обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Уровень срабатывания равен 1.

2. Переход к сумме дробей.

   $\forall_{Aabcd}(\lambda_x((a(x) + b(x))/c + d(x), A(x)) = \lambda_x(a(x)/c + b(x)/c + d(x), A(x)))$

   Переменные a, b, d, A функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

3. Группировка.

   $\forall_{Aabcdep}(\lambda_x(ab(x)/c + db(x)/e + p(x), A(x)) = \lambda_x((ae + cd)b(x)/(ce) + p(x), A(x)))$

   Переменные b, p, A функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

4. Внесение минуса под знак суммы.

   $\forall_{Aabc}(\lambda_x(-(a(x) + b(x)) + c(x), A(x)) = \lambda_x(-a(x) - b(x) + c(x), A(x)))$

   Выражение $a(x)$ содержит переменную списка x. Переменные a, b, c, A функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

2.5 Приемы, связанные с линейными пространствами

Приемы, связанные с символом "линпространство"

Напомним, что утверждение "линпространство(L, F)" истинно, если L есть линейное пространство над полем F. Чтобы избежать громоздких обозначений, при работе с линейными пространствами операции сложения векторов и умножения вектора на число, а также операции поля F обозначаются вспомогательными переменными. Такой же принцип будет использован в общей алгебре. Альтернативой могло бы стать использование какого-то общего обозначения "общплюс(x, y, A)" для суммы в алгебраической системе A. Однако, такая трехместная операция уже не обладала бы свойствами ассоциативности и коммутативности, и перенесение на нее стандартных приемов элементарной алгебры оказалось бы невозможным. Использование вспомогательной переменной, связываемой с A утверждениями текущего контекста, все-таки, более удобно.

1. Ввод обозначения для операции сложения векторов.

   $\forall_{FLf}$(линпространство$(L.F) \to$ слож(f, L))

   Утверждение "слож(f, L)" означает, что двуместная операция f является операцией сложения в алгебраической системе L. Символ "слож" будет введен в разделе, посвященном приемам по общей алгебре.

   Прием имеет заголовок "вывод". Он применяется в задачах на доказательство, причем выражение F неконстантное. Синтезатор "усмслож" не в состоянии определить явное задание операции сложения в L через описатель "отображение". Отсутствует посылка вида "слож(X, L)". Прием выбирает новую переменную f. Уровень срабатывания равен 1.

2. Ввод обозначения для операции умножения вектора на число.

   $\forall_{FLf}$(линпространство$(L, F) \rightarrow$ умнож(f, L))

   Аналогично предыдущему. Утверждение "умнож(f, L)" означает, что двуместная операция f является операцией умножения в алгебраической системе L. Для случая линейных пространств первый сомножитель берется из поля, второй - из носителя пространства.

3. Ввод обозначения для операции умножения в поле.

   $\forall_{FLf}$(линпространство$(L, F) \rightarrow$ умнож(f, F))

   Аналогично предыдущему. Точно так же устроен прием, обозначающий операцию сложения в поле.

4. Использование дистрибутивности для стандартизации линейной комбинации векторов.

   $\forall_{FLabfgn}$(линпространство(L, F) & умнож(f, L) & слож(g, L) & $a \in$ носитель(F) & $b(i) \in$ носитель$(L) \rightarrow f(a, g(\lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\}))) = g(\lambda_i(f(a, b(i)),$
   $i \in \{1, \ldots, n\})))$

   При определении выражения "значение(g, x)" было введено соглашение, что двуместная ассоциативная операция g предполагается доопределенной на множестве наборов произвольной длины, не меньшей 2.

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная b функциональная. Первый антецедент обрабатывается синтезатором "усмполе", определяющим поле F пространства L. Второй и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. В последнем случае вводится дополнительная посылка "$i \in \{1, \ldots, n\}$". Уровень срабатывания равен 1.

5. Ассоциативность умножения.

   $\forall_{FLabcfg}$(линпространство(L, F) & умнож(f, L) & $a \in$ носитель(F) &
   $b \in$ носитель(F) & $c \in$ носитель(L) & умнож$(g, F) \rightarrow f(a, f(b, c)) = f(g(a, b), c)$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и шестой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

6. Разбиение суммы конкатенации двух наборов векторов на две подсуммы.

   $\forall_{FLabf}$(линпространство(L, F) & слож$(f, L) \rightarrow f(a; b) = f(f(a), f(b))$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, b имеют заголовки "отображение". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

7. Примеры линейных пространств.

   (a) Пространство вещественных наборов заданной длины.

i. Сложение.
$\forall_{abfn}$(слож$(f,$ вектпрост(веществполе$, n)) \to f(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \dots, n\}),$
$\lambda_i(b(i), i \in \{1, \dots, n\})) = \lambda_i(a(i) + b(i), i \in \{1, \dots, n\}))$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменные a, b функциональные. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, в которой указатели "развертка" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" как конечных наборов.

ii. Умножение на число.
$\forall_{abfn}$(умнож$(f,$ вектпрост(веществполе$, n)) \to$
$f(a, \lambda_i(b(i), i \in \{1, \dots, n\})) = \lambda_i(ab(i), i \in \{1, \dots, n\}))$
Аналогично предыдущему.

iii. Усмотрение линейного пространства.
$\forall_n$(линпространство(вектпрост(веществполе$, n),$ веществполе))
Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применение при усмотрении в задаче выражения "вектпрост(веществполе, n)". Уровень срабатывания равен 1.

(b) Пространство вещественных матриц.

i. Сложение.
$\forall_{abfmn}$(слож$(f,$ матрпрост(веществполе$, m, n)) \to$
$f(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\}),$
$\lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\})) =$
$\lambda_{ij}(a(i,j) + b(i,j), i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\}))$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменные a, b функциональные. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, в которой указатели "матрица" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" как матриц, заданных перечислением строк либо столбцов.

ii. Умножение на число.
$\forall_{abfmn}$(умнож$(f,$ матрпрост(веществполе$, m, n)) \to$
$f(a, \lambda_{ij}(b(i,j), i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\})) =$
$\lambda_{ij}(ab(i,j), i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\}))$
Аналогично предыдущему.

(c) Пространство многочленов с вещественными коэффициентами.

i. Сложение
$\forall_{abcfn}$(слож$(f,$ многочлпрост$(a, n)) \to f(b, c) = b + c)$
Здесь знаком "+" обозначен символ "плюсмн". Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

ii. Умножение на число.
$\forall_{abcfn}$(умнож$(f,$ многочлпрост$(a, n)) \to f(b, c) = bc)$
Здесь имеется в виду выражение "домножмн(b, c)". В остальном аналогично предыдущему.

8. Синтезатор "усмполе".

Синтезатор используется для определения поля, над которым рассматривается заданное линейное пространство. Он реализует утверждение "линпространство(A, F)" где A - входная переменная, F - выходная.

  (a) Конечномерное векторное пространство.
  $\forall_{An}$(линпространство(вектпрост$(A, n), A)$)
  Уровень срабатывания равен 1.

  (b) Пространство геометрических векторов.
  линпространство(геомвект, веществполе)
  Уровень срабатывания равен 1.

  (c) Пространство матриц.
  $\forall_{Amn}$(линпространство(матрпрост$(A, m, n), A)$)
  Уровень срабатывания равен 1.

  (d) Усмотрение из посылки.
  $\forall_{ab}$(линпространство$(a, b) \rightarrow$ линпространство(a, b))
  Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

9. Синтезатор "усмлинпростфунк" усмотрения области определения функций, образующих линейное пространство.

   Синтезатор реализует утверждение "$a =$ линпростфунк(b, c)". Здесь a - входная переменная, значением которой служит линейное пространство функций, определенных на множестве b и принимающих значения в поле c. Переменная c тоже входная; переменная b - выходная. Пока синтезатор имеет единственный прием:

   $\forall_n$(вектпрост(веществполе, n) = линпростфунк($\{1, \ldots, n\}$, веществполе))

Приемы, связанные с символом "базис"

Утверждение "базис(a, b)" означает, что набор векторов b является базисом линейного пространства a.

1. Определение координат вектора в новом базисе.

   $\forall_{ABabcdnx}$(линпространство(A, веществполе) & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$
   линкоорд$(a(i), B, A) = b(i))$ & линкоорд$(x, B, A) = c$ &
   ($y \cdot$ строки$(b) =$ строки$(c)) = (y =$ строки$(d)) \rightarrow$
   линкоорд$(x, \lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\}), A) = d)$

   Выражение "линкоорд(X, Y, Z)" обозначает координаты вектора X линейного пространства Z относительно набора векторов Y.

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста. Указатели "развертка" определяют идентификацию второго антецедента с конъюнкцией равенств и идентификацию описателя "отображение" с набором. Переменные a, b функциональные, причем выражения $b(i)$ константные. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". В его левой части точкой обозначена операция "умножматр"; y - новая переменная. Левая часть разрешается относительно y вспомогательной задачей на описание. Уровень срабатывания равен 2.

2. Усмотрение базиса.

   $\forall_{ABabcdnx}$(линпространство$(A,$ вещественное поле$)$ —

   $\forall_{ABabcdnx}(\text{линпространство}(A, \text{веществполе})\ \&\ \text{базис}(A, B)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{линкоорд}(a(i), B, A) = b(i))\ \&\ l(b(1)) = n\ \&\ \text{ранг}(\text{строки}(b)) = n \to \text{базис}(A, \lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи. Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста. Указатели "развертка" определяют идентификацию второго антецедента с конъюнкцией равенств и идентификацию описателя "отображение" с набором. Переменные a, b функциональные, причем выражения $b(i)$ константные. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть последнего из них обрабатывается нормализатором "нормранг". Уровень срабатывания равен 2.

3. Базис - набор векторов.

   $\forall_{abc}(\text{Базис}(a, b, c) \to a - \text{слово}\ \&\ \{; a\} \subseteq b)$

   Утверждение "Базис(a, b, c)" означает, что набор векторов a является базисом линейного подпространства b линейного пространства c. Заметим, что линейное подпространство определяется как подмножество носителя линейного пространства, замкнутое относительно его операций, и само линейным пространством не является.

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

4. Декомпозиция поиска базиса в пространстве наборов.

   $\forall_{Pmnpqv}(\text{Базис}(v, \text{set}_x(P(x)), \text{вектпрост}(\text{веществполе}, m - 1)) = (v = q)\ \&\ p = \lambda_z(\text{Вставка}(q(z), n, t(q(z))), z \in \text{Dom}(q)) \to \text{Базис}(p, \text{set}_x(\exists_y(x = \text{Вставка}(y, n, t(y))\ \&\ P(y))), \text{вектпрост}(\text{веществполе}, m)))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Он находит базис в подпространстве векторов, полученных из удовлетворяющих заданному условию P векторов y вставкой на n - ю позицию линейной комбинации $t(y)$ разрядов этих векторов. Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример", причем p - неизвестная. Переменные t, P функциональные. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на описание с неизвестной v, и таким образом определяется базис q в подпространстве векторов y. Второй антецедент выделен указателем "подборзначений". Он замещает текущее условие во вспомогательной задаче, связывая найденный базис q с искомым базисом p. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{Pbmnpqv}(\text{Базис}(v, \text{set}_x(P(x)), \text{вектпрост}(\text{веществполе}, n - m)) = (v = q)\ \&\ p = \lambda_z(\text{наложение}(\lambda_i(0, i \in \{1, \ldots, m\}), q(z), b), z \in \text{Dom}(q)) \to \text{Базис}(p, \text{set}_x(\exists_y(x = \text{наложение}(\lambda_i(0, i \in \{1, \ldots, m\}), y, b)\ \&\ P(y))), \text{вектпрост}(\text{веществполе}, n)))$

   Выражение "наложение(X, Y, Z)" обозначает набор, полученный из наборов X и Y таким выписыванием их элементов, при котором происходит некоторое чередование извлечения из X и Y (порядок просмотра наборов - слева направо), причем в результате элементы набора X оказываются размещены на позициях, номера которых образуют набор Z. Нумерация позиций начинается с 1.

Прием аналогичен предыдущему, но вместо вставки на единственную позицию вектора y линейной комбинации его разрядов предпринимается вставка нулей на заданное множество позиций вектора y. Уровень срабатывания равен 3.

5. Базис n - мерного евклидова пространства.

   $\forall_n(n$ – натуральное & $x = \lambda_i(\lambda_j((1$ при $j = i,$ иначе $0), j \in \{1,\ldots,n\}),$ $i \in \{1,\ldots,n\}) \to$ Базис$(x, \mathrm{set}_y($кортеж$(y, n, \mathbb{R}))$, вектпрост(вещественполе, $n)))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x является неизвестной. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 3.

6. Базис пространства матриц.

   $\forall_{mn}(m$ – натуральное & n – натуральное & $x = \lambda_i(\lambda_{jk}((1$ при $(j-1)n + k = i,$ иначе $0), j \in \{1,\ldots,m\}$ & $k \in \{1,\ldots,n\}), i \in \{1,\ldots,mn\}) \to$ базис(матрпрост(вещественполе, $m, n), x))$

   Аналогично предыдущему, но указателем "подборзначений" выделен третий антецедент.

7. Ввод обозначений для нуля и единицы поля.

   $\forall_{FLa}($линпространство$(L, F) \to$ Ноль$(a, F))$

   $\forall_{FLa}($линпространство$(L, F) \to$ Единица$(a, F))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в задаче утверждения "Базис(d, e, L)". Отсутствуют посылки вида "Ноль(X, L)" и "Единица(X, L)" соответственно. В случае задачи на описание проверяется отсутствие несущественных неизвестных. Прием выбирает новую переменную a. Уровень срабатывания приема равен 2.

Приемы, связанные с символом "матрперехода"

Выражение "матрперехода(a, b, c)" обозначает матрицу перехода от базиса b линейного пространства a к базису c. Координаты базисных векторов нового базиса относительно старого базиса расположены по столбцам.

Пока в этом разделе имеется единственный прием, определяющий матрицу перехода к новому базису, если известны координаты обоих базисов в третьем базисе:

$\forall_{ABCabcdnx}($линпространство$(A,$ вещественполе$)$ & базис(A, B) & $\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to$ линкоорд$(a(i), B, A) = b(i))$ & $\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to$ линкоорд$(c(i), B, A) = d(i))$ & (строки$(d) = x \cdot$ строки$(b)) = (x = C) \to$ матрперехода$(A, \lambda_i(a(i), i \in \{1,\ldots,n\}),$ $\lambda_i(c(i), i \in \{1,\ldots,n\})) =$ транспонир$(C))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые четыре антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, причем указатели "развертка" определяют идентификацию каждого квантора общности с группой утверждений, а термов "отображение" - с наборами. Переменные a, b, c, d функциональные. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается с помощью вспомогательной задачи на описание относительно неизвестной x. Здесь точкой обозначена операция "умножматр", причем x - новая переменная. Наборы b, d константные. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "линподпрост"

Утверждение "линподпрост(a, b)" означает, что множество векторов a является линейным подпространством линейного пространства b. Заметим, что a само не является линейным пространством, хотя и определяет некоторое линейное пространство с носителем a и операциями, являющимися сужениями операций пространства b.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABLfg}$(линпространство(L, B) & слож(f, L) & умнож$(g, L) \rightarrow$
   линподпрост$(A, L) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A$ & $y \in A \rightarrow f(x, y) \in A)$ &
   $\forall_{xy}(x \in$ носитель(B) & $y \in A \rightarrow g(x, y) \in A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство, являющемуся корневым либо расположенным под корневым отрицанием. Антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами. Если подутверждение корневое, то уровень срабатывания равен 2, иначе он равен 3.

2. Линейное подпространство - множество векторов.

   $\forall_{AL}$(линподпрост$(A, L) \rightarrow A -$ set & $A \subseteq$ носитель$(L))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "линкомб"

Выражение "линкомб(a, b)" обозначает множество линейных комбинаций векторов линейного пространства b, принадлежащих множеству a. Единственный прием, относящийся к этому понятию, выполняет расшифровку по определению:

$\forall_{ABFLgx}$(линпространство(L, F) & носитель$(F) = B$ & слож(f, L) & умнож$(g, L) \rightarrow$
$x \in$ линкомб$(A, L) \leftrightarrow \exists_{cny}(n -$ натуральное & кортеж(y, n, A) & кортеж(c, n, B) &
$x = f(\lambda_i(g(c(i), y(i)), i \in \{1, \ldots, n\}))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый, третий и четвертый антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с размерностью

Выражение "размерность(a)" обозначает размерность линейного пространства a. Выражение "Размерность(a, b)" обозначает размерность линейного подпространства a линейного пространства b.

1. Ввод базиса при рассмотрении размерности линейного подпространства.

   $\forall_{ALa}$(Базис(a, A, L) & Размерность$(A, L) = l(a))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует его применение при усмотрении в задаче выражения "Размерность(A, L)". Отсутствует посылка вида "Базис(X, A, L)". Прием вводит новую переменную a. Уровень срабатывания равен 2.

2. Линейная зависимость системы векторов, длина которой превосходит размерность пространства.

   $\forall_{FLa}$(актив($l(a)$) & линпространство(L,F) & $\{;a\} \subseteq$ носитель(L) & $0 < l(a) -$ размерность(L) $\rightarrow \neg$(независимы(a,L)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "нульвект"

Утверждение "нульвект(a,b)" означает, что a есть нулевой вектор линейного пространства b. Непосредственно с данным понятием пока связан единственный прием, выполняющий ориентацию равенства:

$\forall_{Labf}$(нульвект(a,L) $\rightarrow a = f(b) \leftrightarrow f(b) = a$)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылкам. Антецедент идентифицируется с посылкой. Перестановка частей равенства при идентификации блокируется. Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "независимы"

Утверждение "независимы(a,b)" означает, что a есть семейство (т.е. функция, отображающая некоторое множество индексов на элементы семейства) линейно независимых векторов линейного пространства b.

(a) Расшифровка линейной зависимости.

   $\forall_{BFLabcfgn}$($\neg$(независимы(a,L)) & линпространство(L,F) & $l(a) = n$ & $\{;a\} \subseteq$ носитель(L) & носитель(F) $= B$ & слож(f,L) & умнож(g,L) & Ноль(b,F) & нульвект(c,L) $\rightarrow \exists_x$(кортеж(x,n,B) & $c = f(\lambda_i(g(x(i),a(i)),$ $i \in \{1,\ldots,n\}))$ & $\neg$($x =$ констнабор(b,n)))))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента и четыре последних идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в первом антецеденте. Третий и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

(b) Ввод обозначения для нуля поля.

   $\forall_{FLa}$(линпространство(L,F) $\rightarrow$ Ноль(a,F))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче подутверждения "независимы(X,L)". Проверяется отсутствие посылки вида "Ноль(Y,L)". Прием выбирает новую переменную a. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Линейная комбинация независимых векторов с ненулевыми коэффициентами не равна нулевому вектору.

   $\forall_{AFLabfgnpq}$(линпространство(L,F) & нульвект(a,L) & слож(f,L) & умнож(g,L) & $A =$ носитель(F) & кортеж(p,n,A) & Ноль(b,F) &

$\neg(p =$ констнабор$(b, n))$ & независимы(q, L) & $h = \lambda_i(g(p(i), q(i)),$
$i \in \{1, \ldots, n\}) \to \neg(f(h) = a))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке подвыражения "$f(h)$". Первые четыре антецедента, а также антецеденты с шестого по восьмой идентифицируются с посылками. Пятый и десятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", девятый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Проверочный оператор "усмнезависимы".

Оператор имеет единственный прием, усматривающий подмножество базиса:

$\forall_{ALpq}($Базис(p, A, L) & $q \subseteq p \to$ независимы$(q, L))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором.

(e) Обращение к синтезатору "ортогонализация".

$\forall_{acx}($ортогонализация$(\{; a\}, c)$ & $x = c \to$ ортогонализация$(\{; a\}, x))$

Утверждение "ортогонализация(X, Y)" означает, что Y есть ортонормированная система векторов евклидова пространства над вещественным полем, подпространство которой совпадает с подпространством системы векторов X.

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Отсутствуют прочие условия, накладывающие существенные ограничения на x. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "ортогонализция", описываемым ниже. Второй антецедент выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 2.

(f) Синтезатор "ортогонализация" ортогонализации системы линейно независимых векторов евклидова пространства над вещественным полем.

Синтезатор реализует утверждение "ортогонализация(a, b)". Входная переменная - a, выходная - b.

i. Одноэлементная система.
$\forall_{abcn}(l(a) = n$ & $b = \sum_{i=1}^{n}(a(i))^2$ & $\neg(b = 0)$ & $c = \sqrt{b} \to$
ортогонализация$(\{a\}, \{\lambda_i(a(i)/c, i \in \{1, \ldots, n\})\}))$
Выражение a имеет заголовок "набор". Первый, второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" определяют выписывание конечной суммы как обычной и терма "отображение" - в виде набора. Уровень срабатывания равен 1.

ii. Шаг ортогонализации.
$\forall_{abcdemnp}($ортогонализация$(\{; b\}, q)$ & $q = \{; c\}$ & $l(c) = m$ &
$l(a) = n$ & $d = a - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c(i)(j)a(j))c(i)$ & $e = \sum_{j=1}^{n}(d(j))^2$ &
$\neg(e = 0)$ & $p = \sqrt{e} \to$
ортогонализация$(\{a; b\}, \{\lambda_i(d(i)/p, i \in \{1, \ldots, n\}); c\}))$
Выражение a имеет заголовок "набор". Первый антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору, седьмой - обрабатывается

проверочным оператором. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатели "развертка" определяют выписывание конечных сумм как обычных, а терма "отображение" - в виде набора. Уровень срабатывания равен 2.

Глава 3

Приемы по общей алгебре

Проработка задач по общей алгебре в решателе пока имеет лишь предварительный характер. Рассматривались основные свойства бинарных операций и простейшие задачи по теории групп.

3.1 Логические символы, используемые решателем в общей алгебре

3.1.1 Общие понятия, связанные с алгебраическими системами и бинарными операциями

Выражение "алгсист$(A, f_1, \dots, f_n)$" обозначает алгебраическую систему, образованную множеством A с набором функций $f_1, \dots, f_n$. Каждая из этих функций определена либо на надмножестве множества A, либо на произведении нескольких множеств, хотя бы одно из которых является надмножеством множества A. Относительно множеств значений функций никаких предположений не делается. Множество A называется носителем алгебраической системы.

Выражение "носитель(a)" обозначает носитель алгебраической системы a.

Утверждение "бинарноперация(f, A)" означает, что f есть бинарная операция на множестве A, т.е. функция из $A \times A$ в A.

Если f - бинарная операция на некотором множестве A и $M = (A_1, \dots, A_n)$ - набор подмножеств множества A, то выражение "Значение(f, M)" обозначает множество результатов применения операции f к наборам $(a_1, \dots, a_n)$ элементов множеств $A_1, \dots, A_n$. Если операция f ассоциативна, то n - любое натуральное, не меньшее 2; иначе n равно 2.

Утверждение "ассоциативно(f)" означает, что f есть функция, определенная на квадрате некоторого множества и определяющая на нем ассоциативную операцию.

Утверждение "коммутативно(f)" означает, что f есть функция, определенная на квадрате некоторого множества и определяющая на нем коммутативную операцию.

Утверждение "левобратимо(f)" означает, что f есть функция, определенная на квадрате некоторого множества и обладающая свойством левой обратимости: для любых a, b из A существует x из A, такое, что $f(x, a) = b$. Аналогично, утверждение "правобратимо(f)" означает, что f обладает свойством правой обратимости. Утверждение "обратимо(f)" означает, что f обладает как левой, так и правой обратимостью.

Утверждение "левсократимо(f)" означает, что f есть функция, определенная на квадрате некоторого множества и обладающая свойством левой сократимости: для любых a, b, x из A соотношение $f(x, a) = f(x, b)$ влечет $a = b$. Аналогично, утверждение "правсократимо(f)" означает, что f обладает свойством правой сократимости. Утверждение "сократимо(f)" означает, что f обладает как левой, так и правой сократимостью.

Утверждения "левединица(a, f)" и "праведединица(a, f)" означают, что a есть, соответственно, левая и правая единицы двуместной операции f.

Утверждение "Единица(a, b)" означает, что a есть единичный элемент (одновременно левый и правый) двуместной операции b, либо единичный элемент кольца b. Выражение "единица(f)" обозначает единицу (одновременно левую и правую) двуместной операции f.

Утверждение "Ноль(a, b)" означает, что a есть нулевой элемент кольца b.

Утверждение "обратимслева(a, b, f)" означает, что f есть двуместная операция, определенная на некотором множестве A, и для элементов a, b этого множества существует элемент x, удовлетворяющий соотношению $f(x, a) = b$. Аналогичным образом вводится утверждение "обратимсправа(a, b, f)". Утверждение "обратим(a, f)" означает, что a есть двусторонне обратимый относительно двусторонней единицы элемент множества, на котором определена двуместная операция f.

Выражение "обрэлемент(a, f)" обозначает элемент, обратный к элементу a для двуместной операции f.

Утверждение "идемпотент(a, f)" означает, что a есть обладающий свойством идемпотентности элемент множества, на котором определена двуместная операция f.

Утверждение "слож(a, b)" означает, что двуместная операция a является операцией сложения в алгебраической системе b.

Утверждение "умнож(a, b)" означает, что двуместная операция a является операцией умножения в алгебраической системе b. Если b - линейное пространство, то первый сомножитель берется из поля, второй - из носителя пространства.

Утверждение "идеал(a, b)" означает, что a есть идеал алгебраической системы b (т.е. левый либо правый идеал). Аналогичным образом вводятся утверждения "левыйидеал(a, b)" и "правыйидеал(a, b)". Для двустороннего идеала введено утверждение "двусторидеал(a, b)".

Утверждение "замкнуто(a, f)" означает, что множество a замкнуто относительно двуместной операции f, в область действия которой оно включается.

Выражение "Замыкание(a, b)" обозначает множество всех элементов, которые можно получить из элементов множества a применением к ним конечное число раз операций множества b.

Выражение "алгстепень(a, f, n)" обозначает результат n - кратного применения к элементу a ассоциативной двуместной операции f. Если эта операция обладает двусторонней единицей, то допустим случай $n = 0$; если операция двусторонне обратима, то допустимы любые целочисленные значения n.

Утверждение "гомоморфизм(f, a, b)" означает, что отображение f является гомоморфизмом алгебраической системы a в алгебраическую систему b. Аналогичным образом вводится утверждение "изоморфизм(f, a, b)". Утверждение "автоморфизм(f, a)" означает, что f есть автоморфизм алгебраической системы a. Утверждение "изоморфны(a, b)" означает, что алгебраические системы a и b изоморфны.

3.1.2 Общие понятия, связанные с группоидами

Утверждение "группоид(a)" означает, что a есть множество с определенной на нем двуместной функцией, принимающей значения в том же множестве.

Выражение "операция(a)" обозначает операцию группоида a.

Утверждение "полугруппа(a)" означает, что a есть группоид с ассоциативной операцией.

Утверждение "порождэлемент(a, b, c)" означает, что a есть порождающий элемент подгруппоида b группоида c. Если операция группоида обратимая, разрешается использовать отрицательные степени элемента.

3.1.3 Понятия, связанные с группами

Утверждение "группа(a)" означает, что a есть группа - группоид с ассоциативной обратимой операцией.

Утверждение "подгруппа(a, b)" означает, что a есть подмножество носителя группы b, замкнутое относительно групповой операции и операции обращения элемента.

Выражение "Подгруппа(a, b)" обозначает подгруппу группы b, определяемую подгрупповым множеством a ее носителя.

Выражение "индексподгруппы(a, b)" обозначает индекс подгруппы a группы b.

Утверждение "абелева(a)" означает, что a есть коммутативная группа.

Выражение "коммутатор(a, b, c)" обозначает коммутатор элементов a, b группы c.

Выражение "коммутант(a)" обозначает коммутант группы a.

Выражение "центргруппы(a)" обозначает центр группы a.

Утверждение "левсмежнкласс(a, b, c)" означает, что a есть левый смежный класс группы b по подгруппе c. Аналогичным образом вводится утверждение "правсмежнкласс(a, b, c)". Утверждение "смежныйкласс(a, b, c)" означает, что a есть смежный класс абелевой группы b по подгруппе c.

Утверждение "нормподгруппа(a, b)" означает, что a есть нормальная подгруппа группы b.

Выражение "порядокэлемента(a, b)" обозначает порядок элемента a группы b.

Утверждение "периодичгруппа(a)" означает, что a есть периодическая группа. Выражение "периодгруппы(a)" обозначает период группы a (конечный либо символ "плюсбеск").

Выражение "циклподгруппа(a, b)" обозначает циклическую подгруппу группы b, порожденную элементом a. Утверждение "циклгруппа(a, b)" означает, что a есть циклическая группа с образующим элементом b.

Выражение "циклпоказатель(a, b, c)" обозначает показатель элемента a циклической группы b относительно образующего элемента c.

Выражение "перестановки(n)" обозначает группу перестановок степени n. Выражение "Перестановки(A)" обозначает группу взаимно-однозначных отображений множества A на себя.

Выражение "четнперестановки(n)" обозначает группу четных перестановок степени n.

Выражение "целыеслож" обозначает группу целых чисел по сложению. Выражения "вещслож" и "комплслож" обозначают группы, соответственно, вещественных и комплексных чисел по сложению. Выражения "вещумнож" и "комплумнож" обозначают группы ненулевых вещественных и комплексных чисел чисел по умножению.

Выражение "матрумнож(a, n)" обозначает группу невырожденных квадратных матриц порядка n над полем a.

3.2 Простейшие приемы, связанные с алгебраическими системами и бинарными операциями

Приемы, связанные с символом "носитель"

1. Ориентация равенства.

   $\forall_{ab}(a = \text{носитель}(b) \leftrightarrow \text{носитель}(b) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Переменная a идентифицируется с переменной. Перестановка частей равенства при идентификации не разрешается. Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

2. Вещественное поле.

   $\text{носитель}(\text{веществполе}) = \mathbb{R}$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3. Нормализатор общей стандартизации "нормноситель".

   Обычно носитель алгебраической системы находится именно этим нормализатором. Перечислим его приемы:

   (a) Использование равенства из посылок.

   Созданы два приема с теоремой $\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$. В каждом из них антецедент идентифицируется с посылкой; a есть выражение, заголовком которого служит символ "носитель", причем a не является подвыражением выражения b. В первом приеме, срабатывающем на уровне 1, не допускается пересиановка частей равенства при его идентификации. Во втором приеме, срабатывающем на уровне 2, это ограничение отбрасывается. При этом выражение b не имеет своим заголовком символ "объединениевсех" либо "пересечениевсех".

   Все оставшиеся приемы нормализатора имеют уровень срабатывания 1.

(b) Группа перестановок.
$\forall_n(\text{носитель}(\text{перестановки}(n)) = \text{set}_x(\text{перестановка}(x, \{1, \ldots, n\})))$
$\forall_a(\text{носитель}(\text{Перестановки}(a)) = \text{set}_x(\text{Перестановка}(x, a)))$

(c) Группа целых чисел по сложению.
$\text{носитель}(\text{целыеслож}) = \mathbb{Z}$

(d) Группа вещественных чисел по сложению.
$\text{носитель}(\text{вещслож}) = \mathbb{R}$

(e) Группа вещественных чисел по умножению.
$\text{носитель}(\text{вещумнож}) = \mathbb{R}\ \{0\}$

(f) Группа комплексных чисел по сложению.
$\text{носитель}(\text{комплслож}) = \mathbb{C}$

(g) Группа комплексных чисел по умножению.
$\text{носитель}(\text{комплумнож}) = \mathbb{C}\{0\}$

(h) Группа невырожденных матриц.
$\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \text{носитель}(\text{матрумнож}(\text{веществполе}, n)) = \text{set}_x(\text{матр}(x, \mathbb{R}, n, n)\ \&\ \neg(\det(x) = 0)))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

(i) Линейное пространство наборов заданной длины.
$\forall_{AFn}(A = \text{носитель}(F)\ \&\ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{носитель}(\text{вектпрост}(F, n)) = \text{set}_x(\text{кортеж}(x, A, n)))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормноситель". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором.

(j) Линейное пространство прямоугольных матриц.
$\forall_{AFn}(A = \text{носитель}(F)\ \&\ m - \text{натуральное}\ \&\ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{носитель}(\text{матрпрост}(F, M, n)) = \text{set}_x(\text{матр}(x, A, m, n)))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", два других - обрабатываются проверочными операторами.

(k) Линейное пространство многочленов заданной степени.
$\forall_{Fn}(n - \text{натуральное} \rightarrow \text{носитель}(\text{многочлпрост}(F, n)) = \text{set}_x(\text{Многочлен}(x)\ \&\ \text{кольцомн}(x) = F\ \&\ \deg(x) \leq n))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

(l) Прямое произведение метрических пространств.
$\forall_{AB}(\text{носитель}(\text{прямпроизвметр}(A, B)) = \text{носитель}(A) \times \text{носитель}(B))$

(m) Вещественное поле.
$\text{носитель}(\text{веществполе}) = \mathbb{R}$

Приемы, связанные с символом "слож"

Непосредственно с данным символом пока связан только синтезатор "усмслож". Он реализует утверждение "слож(a, b)", причем входным данным служит алгебраическая система b, а выходным - ее операция сложения a. Синтезатор был введен при рассмотрении линейных пространств и имеет всего три приема:

1. Векторное пространство.

   $\forall_{An}($слож$(\lambda_{xy}(x+y,$ кортеж$(x,n,\mathbb{R})$ & кортеж$(y,n,\mathbb{R}))$, вектпрост(веществполе, $n)))$

   Знаком "+" обозначен символ "плюсфунк".

   $\forall_{An}($слож$(\lambda_{xy}(x+y,$ Вектор(x) & Вектор$(y))$, геомвект$))$

   Знаком "+" обозначен символ "плюсвект".

   Уровень срабатывания приемов равен 1.

2. Извлечение результата из посылки.

   $\forall_{af}($слож$(f,a)\rightarrow$ слож$(f,a))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "умнож"

Как и в предыдущем случае, с символом пока связан только синтезатор "усмумнож". Он реализует утверждение "умнож(a,b)", причем входным данным служит алгебраическая система b, а выходным - ее операция умножение a. Приемы синтезатора аналогичны приемам синтезатора "усмслож".

Приемы, связанные с символом "ассоциативно"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}($бинарноперация$(f,A)\rightarrow$ ассоциативно$(f)\leftrightarrow\forall_{xyz}(x\in A$ & $y\in A$ & $z\in A\rightarrow f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство, расположенному под корневым отрицанием либо совпадающим с условием. Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Если подутверждение расположено под отрицанием, то уровень срабатывания равен 5, иначе он равен 4. На той же теореме создан еще один прием, применяемый к подутверждению условия задачи на описание, не имеющей неизвестных. Такие задачи обычно используются для установления истинности либо ложности утверждения. Уровень срабатывания данного приема равен 5.

2. Проверка ассоциативности.

   $\forall_{Aafg}(f=\lambda_{xy}(g(x,y),A(x,y))$ & ассоциативно$(f)=a\rightarrow($ассоциативно$(f)\leftrightarrow a))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "операция". Такие задачи используются для исследования свойств заданной операции, обозначаемой с помощью неизвестной. Переменная f идентифицируется с неизвестной. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается задачей на описание, имеющей цель "проверка" и не имеющей неизвестных. Проверяется, что результатом a служит логическая константа "истина" либо "ложь". Выводимая эквивалентность обрабатывается нормализатором "нормлог". Уровень срабатывания равен 1.

3. Отбор утверждениeй для ответа внешней задачи на описание.

   Прием "замещениеусловий(ассоциативно(a))" усматривает в задаче на исследование, имеющей цель "операция", посылку "ассоциативно(a)", где a - неизвестная, и передает ее в список условий внешней задачи на описание, которая, собственно, и требовала определение свойств операции a. Уровень срабатывания равен 7.

4. Проверочный оператор "усмассоциативно".

   На уровне 1 срабатывает общий прием, усматривающий посылку, явно указывающую на ассоциативность. Остальные приемы срабатывают на уровне 2:

   (a) Использование справочника "ассоциативно".
   $\forall_{Af}(\text{ассоциативно}(\lambda_{xy}(f(x,y), A(x)\ \&\ A(y))))$
   Указатель "символ" определяет идентификацию f с логическим символом. Фильтр "равно(справка(ассоциативно f)1)" проверяет, что этот символ обладает в о.д.з. свойством ассоциативности. Переменная A функциональная.

   (b) Операция суперпозиции (произведение) функций.
   $\forall_{A}(\text{ассоциативно}(\lambda_{xy}(\text{произведение}(x,y), A(x)\ \&\ A(y))))$
   Переменная A функциональная.

   (c) Операция группы.
   $\forall_{Af}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \to \text{ассоциативно}(f))$
   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором.
   $\forall_{Af}(\text{группа}(A) \to \text{ассоциативно}(\text{операция}(A)))$
   Антецедент идентифицируется с посылкой.

Приемы, связанные с символом "коммутативно"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}(\text{бинарноперация}(f, A) \to \text{коммутативно}(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A\,\&\,y \in A \to f(x,y) = f(y,x)))$

   Созданы два приема, аналогичных случаю расшифровки ассоциативности: один для условия задачи на доказательство, другой - для условия задачи на описание, не имеющей неизвестных.

2. Проверка коммутативности.

   $\forall_{Aafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y))\ \&\ \text{коммутативно}(f) = a \to (\text{коммутативно}(f) \leftrightarrow a))$

   Аналогично приему проверки ассоциативности.

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   Прием "замещениеусловий(коммутативно(a))" аналогичен соответствующему приему для ассоциативности.

4. Усмотрение перестановочности с помощью кванторной импликации из посылок.

   $\forall_{Pafghpq}(\forall_x(P(x) \to f(g(x), h(x)) = f(h(x), g(x))) \;\&\; P(a) \;\&\; (p, q) = (g(a), h(a)) \to f(p, q) = f(q, p))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "эквивалентно" определяет, что действие приема состоит не в тождественном преобразовании, а в замене равенства на константу "истина". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменные g, h, P функциональные. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Он усматривает, что p, q можно представить в виде $g(a), h(a)$ для подходящего выражения a. Второй антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

5. Проверочный оператор "усмкоммутативно".

   (a) Использование справочника "коммутативно".

   $\forall_{fpq}(f = \lambda_{xy}(p(x, y), q(x) \;\&\; q(y)) \to \text{коммутативно}(f))$

   $\forall_{pq}(\text{коммутативно}(\lambda_{xy}(p(x, y), q(x) \;\&\; q(y))))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "символ" определяет идентификацию p с логическим символом. Фильтр "равно(справка(коммутативно p)1)" проверяет, что этот символ обладает в о.д.з. свойством коммутативности. Переменная q функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Одноместная операция от коммутативной операции.

   $\forall_{fgpq}(g = \lambda_{xy}(f(p(x, y)), q(x) \;\&\; q(y)) \;\&\; \text{коммутативно}(\lambda_{xy}(p(x, y), q(x) \;\&\; q(y))) \to \text{коммутативно}(g))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Переменные p, q функциональные, f - логический символ. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{fpq}(\text{коммутативно}(\lambda_{xy}(p(x, y), q(x) \;\&\; q(y))) \to \text{коммутативно}(\lambda_{xy}(f(p(x, y)), q(x) \;\&\; q(y))))$

   Аналогично предыдущему.

   (c) Умножение диагональных матриц.

   $\forall_{Afn}(f = \lambda_{xy}(xy, \text{матр}(x, \mathbb{R}, n, n) \;\&\; \text{матр}(y, \mathbb{R}, n, n) \;\&\; \text{Диагматр}(x) \;\&\; \text{Диагматр}(y) \;\&\; A(x, y)) \to \text{коммутативно}(f))$

   Переменная A функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

   (d) Терм, выраженный через коммутативные операции.

   $\forall_{fpq}(f = \lambda_{xy}(p(x, y), q(x) \;\&\; q(y)) \to \text{коммутативно}(f))$

   Переменные p, q функциональные. Фильтр "подобныетермы" проверяет, что термы $p(x, y)$ и $p(y, x)$ получаются друг из друга перестановкой операндов коммутативных операций. Уровень срабатывания равен 2.

   (e) Операция абелевой группы.

   $\forall_{Gf}(f = \text{операция}(G) \;\&\; \text{абелева}(G) \;\&\; \text{группа}(G) \to \text{коммутативно}(f))$

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "левобратимо"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}$(бинарноперация$(f, A) \to$ левобратимо$(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A \ \&\ y \in A \to \exists_z(z \in A \ \&\ f(z, x) = y)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство, расположенному под корневым отрицанием либо совпадающим с условием. Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Если подутверждение расположено под отрицанием, то уровень срабатывания равен 5, иначе он равен 4. На той же теореме создан еще один прием, применяемый к подутверждению условия задачи на описание, не имеющей неизвестных. Его уровень срабатывания равен 4.

2. Проверка левой обратимости.

   $\forall_{Aafg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))\ \&$ левобратимо$(f) = a \to$ левобратимо$(f) \leftrightarrow a)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "операция". Переменная f идентифицируется с неизвестной. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается задачей на описание, имеющей цель "проверка" и не имеющей неизвестных. Проверяется, что результатом a служит логическая константа "истина" либо "ложь". Выводимая эквивалентность обрабатывается нормализатором "нормлог". Уровень срабатывания равен 2.

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   Прием "замещениеусловий(левобратимо(a))" аналогичен соответствующему приему для ассоциативности.

Приемы, связанные с символом "правобратимо"

Приемы аналогичны приемам предыдущего пункта.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}$(бинарноперация$(f, A) \to$ правобратимо$(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A \ \&\ y \in A \to \exists_z(z \in A \ \&\ f(x, z) = y)))$

2. Проверка правой обратимости.

   $\forall_{Aafg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))\ \&$ правобратимо$(f) = a \to$ правобратимо$(f) \leftrightarrow a)$

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(правобратимо(a))

Приемы, связанные с символом "обратимо"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_f$(обратимо$(f) \leftrightarrow$ правобратимо$(f)\ \&$ левобратимо$(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "проверка". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_f$(коммутативно(f) $\rightarrow$ обратимо(f) $\leftrightarrow$ правобратимо(f))

Прием имеет заголовок "воройтерм". Он применяется в задаче на доказательство либо в задаче иного типа, не имеющей цели "операция". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

2. Проверка обратимости коммутативной операции.

   $\forall_{Aafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y))$ & левобратимо(f) $= a$ & коммутативно(f) $\rightarrow$ обратимо(f) $\leftrightarrow a$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "операция". Переменная f идентифицируется с неизвестной. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается задачей на описание, имеющей цель "проверка" и не имеющей неизвестных. Проверяется, что результатом a служит логическая константа "истина" либо "ложь". Выводимая эквивалентность обрабатывается нормализатором "нормлог". Уровень срабатывания равен 2.

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   Прием "замещениеусловий(обратимо(a))" аналогичен соответствующему приему для ассоциативности.

4. Усмотрение обратимости в некоммутативном случае.

   $\forall_f$(левобратимо(f) & правобратимо(f) $\leftrightarrow$ обратимо(f))

   Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)" и применяется к паре посылок задачи на исследование, имеющей цель "операция". Уровень срабатывания равен 3.

5. Проверочный оператор "усмобратимо".

   Помимо приема, осуществляющего непосредственное усмотрение из посылок, оператор имеет единственный прием, связанный с операцией группы:

   $\forall_{Af}$(группа(A) & $f =$ операция(A) $\rightarrow$ обратимо(f))

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором.

Приемы, связанные с сивмолом "левсократимо"

Приемы аналогичны приемам символа "левобратимо", поэтому приводим лишь их теоремы.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}$(бинарнооперация(f, A) $\rightarrow$ левсократимо(f) $\leftrightarrow \forall_{xyz}(x \in A$ & $y \in A$ & $z \in A$ & $f(z,x) = f(z,y) \rightarrow x = y))$

2. Проверка левой сократимости.

   $\forall_{Aafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y))$ & левсократимо(f) $= a \rightarrow$ левсократимо(f) $\leftrightarrow a$)

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(левсократимо(a))

Приемы, связанные с сивмолом "правсократимо"

Аналогично предыдущему.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}$(бинарнооперация$(f, A) \to$ правсократимо$(f) \leftrightarrow \forall_{xyz}(x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ z \in A \ \& \ f(x,z) = f(y,z) \to x = y))$

2. Проверка правой обратимости.

   $\forall_{Aafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y)) \ \&$ правсократимо$(f) = a \to$ правсократимо$(f) \leftrightarrow a)$

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(правсократимо(a))

Приемы, связанные с символом "сократимо"

Приемы аналогичны приемам символа "обратимо", поэтому приводим только их теоремы.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_f$(сократимо$(f) \leftrightarrow$ правсократимо$(f) \ \&$ левсократимо$(f))$

2. Проверка сократимости коммутативной операции.

   $\forall_{Aafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y)) \ \&$ левсократимо$(f) = a \ \&$ коммутативно$(f) \to$ сократимо$(f) \leftrightarrow a)$

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(сократимо(a))

4. Усмотрение сократимости в некоммутативном случае.

   $\forall_f$(левсократимо$(f) \ \&$ правсократимо$(f) \leftrightarrow$ сократимо$(f))$

Приемы, связанные с символом "левединица"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}$(бинарнооперация$(f, A) \to$ левединица$(a, f) \leftrightarrow a \in A \ \& \ \forall_x(x \in A \to f(a,x) = x))$

   Как и выше, созданы два приема - для задач на доказательство и задач на описание, не имеющих неизвестных.

2. Вывод определения.

   $\forall_{Aaf}$(бинарнооперация$(f, A) \ \&$ левединица$(a, f) \to a \in A \ \& \ \forall_x(x \in A \to f(a,x) = x))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, либо на исследование, либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 4.

3. Поиск левых единиц.

   $\forall_{ABPQafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y))\ \&\ \text{бинарноперация}(f,B)\ \&$
   $(a \in B\ \&\ g(a,x) = x) = P(a,x)\ \&\ \forall_x(x \in B \to P(a,x)) = Q(a) \to$
   $\forall_a(Q(a) \leftrightarrow \text{левединица}(a,f)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "операция". Переменная f - неизвестная. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, третий и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Переменные g, A, P, Q функциональные. Левая часть третьего антецедента разрешается с помощью задачи на описание относительно новой переменной a. В качестве дополнительной посылки используется утверждение "$x \in B$". Левая часть четвертого антецедента упрощается с помощью задачи на преобразование. Проверяется, что утверждение $Q(a)$ не содержит квантора общности. Перед попыткой применения приема проверяется отсутствие посылки "коммутативно(f)". Выводимое утверждение упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

4. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   $\text{замещениеусловий}(\text{левединица}(b,a))$

5. Левая единица для операции над множествами.

   $\forall_{ABafgx}(\text{левединица}(a,f)\ \&\ \text{бинарноперация}(f,A)\ \&$
   $g = \lambda_{yz}(f[y,z], B(y)\ \&\ B(z))\ \&\ y \subseteq A\ \&\ z \subseteq A\ \&\ x = \{a\} \to \text{левединица}(x,g))$

   Посредством $f[y,z]$ обозначен терм "Значение(f набор(y,z))", т.е. результат применения операции f к паре подмножеств y, z носителя этой операции.

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "подборзначений". Отсутствуют прочие существенные ограничения на неизвестную x. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "правединица"

Приемы аналогичны приемам предыдущего пункта, поэтому приводим лишь их теоремы:

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Aaf}(\text{бинарноперация}(f,A) \to \text{правединица}(a,f) \leftrightarrow a \in A\ \&\ \forall_x(x \in A \to f(x,a) = x))$

2. Вывод определения.

   $\forall_{Aaf}(\text{бинарноперация}(f,A)\ \&\ \text{правединица}(a,f) \to a \in A\ \&\ \forall_x(x \in A \to f(x,a) = x))$

3. Поиск правых единиц.

   $\forall_{ABPQafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y))\ \&\ \text{бинарноперация}(f,B)\ \&$
   $(a \in B\ \&\ g(x,a) = x) = P(a,x)\ \&\ \forall_x(x \in B \to P(a,x)) = Q(a) \to$
   $\forall_a(Q(a) \leftrightarrow \text{правединица}(a,f)))$

4. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(праведининица(b, a))

5. Правая единица для операции над множествами.

   $\forall_{ABafgx}$(праведининица(a, f) & бинарнооперация(f, A) &
   $g = \lambda_{yz}(f[y, z], B(y)$ & $B(z))$ & $y \subseteq A$ & $z \subseteq A$ & $x = \{a\} \to$ праведининица(x, g))

Приемы, связанные с символом "единица"

1. Усмотрение единицы в некоммутативном случае.

   $\forall_f$(левединица(a, f) & праведининица$(a, f) \leftrightarrow$ Единица(a, f))

   Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)". Он заменяет пару посылок задачи на исследование, имеющей цель "операция". Уровень срабатывания равен 1.

2. Умножение на единицу

   $\forall_{af}(f(a,$ единица$(f)) = a)$

   $\forall_{af}(f($единица$(f), a) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Используется указатель "ассоциативно(f)", означающий, что для ассоциативной операции f идентификация выполняется с учетом возможности выделения поднабора операндов. Уровень срабатывания равен 0.

3. Поиск единицы коммутативной операции.

   $\forall_{ABPQafg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))$ & бинарнооперация(f, B) &
   $(a \in B$ & $g(a, x) = x) = P(a, x)$ & $\forall_x(x \in B \to P(a, x)) = Q(a)$ &
   коммутативно$(f) \to \forall_a(Q(a) \to$ Единица(a, f)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "операция". Переменная f является неизвестной. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, третий и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Левая часть третьего антецедента разрешается относительно вспомогательной переменной a при помощи задачи на описание, левая часть четвертого - упрощается при помощи задачи на преобразование. Уровень срабатывания приема равен 2.

   $\forall_{ABPafg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))$ & бинарнооперация(f, B) &
   $(a \in B$ & $g(a, x) = x) = P(a, x)$ & $\exists_x(x \in B$ & $\neg(P(a, x)))$ & коммутативно$(f) \to$
   $\neg(\exists_a($Единица$(a, f))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются так же, как в предыдущем приеме. Истинность четвертого антецедента проверяется с помощью задачи на доказательство, которой передается дополнительная посылка "$a \in B$". Перед попыткой применения приема проверяется отсутствие посылки вида "Единица(X, f)". Уровень срабатывания равен 3.

4. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(Единица(b, a))

5. Единица для операции над множествами.

   $\forall_{ABafgx}$(Единица(a,f) & бинарноперация(f,A) & $g = \lambda_{yz}(f[y,z], B(y)$ & $B(z))$ & $y \subseteq A$ & $z \subseteq A$ & $x = \{a\} \rightarrow$ Единица$(x,g))$

   Аналогично случаям левой и правой единиц.

6. Единица для умножения чисел.

   $\forall_A$(единица$(\lambda_{xy}(xy, A(x)$ & $A(y))) = 1)$

   В теореме рассматривается символ "Умножение" для умножения комплексных чисел. Переменная A функциональная. Используется указатель "смравно", обеспечивающий учет случаев, когда отображение задано отдельной посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормединица".

   Пока нормализатор имеет пока всего два приема. Первый из них дублирует предыдущий прием для операции умножения чисел. Второй связан с умножением перестановок:

   $\forall_a$(единица$(\lambda_{xy}$(произведение(x,y), перестановка$(x,\{1,\dots,a\})$ & перестановка$(y,\{1,\dots,a\}))) = \lambda_x(x, x \in \{1,\dots,a\}))$

   Переменная a идентифицируется с натуральной константой. Терм "отображение" в заменяющей части выписывается в виде набора.

Приемы, связанные с символом "обратимслева"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Aabf}$(бинарноперация(f,A) & $a \in A$ & $b \in A \rightarrow$ обратимслева$(a,b,f) \leftrightarrow \exists_x(x \in A$ & $f(x,a) = b))$

   Как и выше, созданы два приема - для задач на доказательство и задач на описание, не имеющих неизвестных.

2. Поиск элементов, обратимых слева.

   $\forall_{ABQafg}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y))$ & бинарноперация(f,B) & левединица(a,f) & $(x \in B$ & $\exists_y(y \in B$ & $g(y,x) = a)) = Q(x) \rightarrow \forall_x(Q(x) \leftrightarrow$ обратимслева$(x,a,f)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "операция". Переменная f - неизвестная. Указатель "вариант" разрешает альтернативные заголовки "правединица", "Единица" у третьего антецедента. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Подкванторное утверждение четвертого антецедента разрешается относительно y при помощи задачи на описание, левая часть этого антецедента упрощается задачей на преобразование. Результат $Q(x)$ не содержит квантора существования. Отсутствуют посылки "левобратимо(f)", "обратимо(f)", "коммутативно(f)". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCDQaf}(f = \lambda_{xy}(g(x,y), A(x,y))$ & бинарноперация(f,B) & $\forall_a$(левединица$(a,f) \leftrightarrow \exists_z(a = C(z)$ & $D(z)))$ & $(x \in B$ & $D(z)$ & $\exists_y(y \in B$ & $g(y,x) = C(z))) = Q(x,z) \rightarrow \forall_{xz}(D(z) \rightarrow$ обратимслева$(x, C(z), f) \leftrightarrow Q(x,z)))$

Аналогично предыдущему, но третий антецедент, идентифицируемый с посылкой, имеет вид кванторной импликации. Уровень срабатывания прежний.

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(обратимслева(b, d, a))

Приемы, связанные с символом "обратимсправа"

Аналогично предыдущему пункту, поэтому приводим только теоремы приемов.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Aabf}$(бинарноперация(f, A) & $a \in A$ & $b \in A \to$ обратимсправа$(a, b, f) \leftrightarrow \exists_x(x \in A$ & $f(a, x) = b))$

2. Поиск элементов, обратимых справа.

   $\forall_{ABQafg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))$ & бинарноперация(f, B) & левединица(a, f) & $(x \in B$ & $\exists_y(y \in B$ & $g(x, y) = a)) = Q(x) \to \forall_x(Q(x) \leftrightarrow$ обратимсправа$(x, a, f)))$

   $\forall_{ABCDQafg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))$ & бинарноперация(f, B) & $\forall_a$(левединица$(a, f) \leftrightarrow \exists_z(a = C(z)$ & $D(z)))$ & $(x \in B$ & $D(z)$ & $\exists_y(y \in B$ & $g(x, y) = C(z))) = Q(x, z) \to \forall_{xz}(D(z) \to$ обратимсправа$(x, C(z), f) \leftrightarrow Q(x, z)))$

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(обратимсправа(b, d, a))

Приемы, связанные с символом "обратим"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Aaf}$(бинарноперация(f, A) & $a \in A \to$ обратим$(a, f) \leftrightarrow$ $\exists_{xy}$(Единица(x, f) & $y \in A$ & $f(a, y) = x$ & $f(y, a) = x))$

   Как и выше, созданы два приема - для задач на доказательство и задач на описание, не имеющих неизвестных.

2. Поиск обратимых элементов в коммутативном случае.

   $\forall_{ABQafg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))$ & бинарноперация(f, B) & Единица(a, f) & $(x \in B$ & $\exists_y(y \in B$ & $g(y, x) = a)) = Q(x)$ & коммутативно$(f) \to$ $\forall_x(Q(x) \leftrightarrow$ обратим$(x, f)))$

   Аналогично первому приему поиска элементов, обратимых слева.

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   замещениеусловий(длялюбого(b если значение(c, b) то обратим(b, a)))

   замещениеусловий(обратим(b, a))

4. Усмотрение обратимых элементов в некоммутативном случае.

   $\forall_{Paf}$(Единица$(a, f) \to \forall_x(P(x) \to$ обратимслева$(x, a, f))$ & $\forall_y(P(y) \to$ обратимсправа$(y, a, f)) \leftrightarrow \forall_x(P(x) \to$ обратим$(x, f)))$

Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)" и применяется к паре посылок задачи на исследование, имеющей цель "операция". Переменная f идентифицируется с неизвестной; переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 3.

5. Проверочный оператор "усмобратим".

   Кроме приема, усматривающего обратимость непосредственно из посылки, оператор имеет лишь прием про обратимость групповой операции:

   $\forall_{Aaf}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A)\ \&\ a \in \text{носитель}(A) \rightarrow \text{обратим}(a, f))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором.

Приемы, связанные с символом "обрэлемент"

1. Расшифровка условия равенства обратному элементу.

   $\forall_f(\text{обрэлемент}(a, f) = b \leftrightarrow f(a, b) = \text{единица}(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Прием блокируется для условия задачи на описание, у которого b - неизвестная, а выражения a, f не содержат неизвестных. Он также блокируется, если a - переменная, входящая в b. Уровень срабатывания равен 3.

2. Умножение элемента на обратный к нему.

   $\forall_{af}(f(\text{обрэлемент}(a, f), a) = \text{единица}(f))$

   $\forall_{af}(f(a, \text{обрэлемент}(a, f)) = \text{единица}(f))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Указатель "ассоциативно(f)" определяет, в случае ассоциативной операции f, идентификацию с произвольными двумя последовательными операндами. Уровень срабатывания равен 0.

3. Элемент, обратный к произведению.

   $\forall_{Afxy}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \rightarrow \text{обрэлемент}(f(x, y), f) =$
   $f(\text{обрэлемент}(y, f), \text{обрэлемент}(x, f)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "ассоциативно(f)". Уровень срабатывания равен 1.

4. Обратный элемент в случае произведения отображений.

   $\forall_{Af}(\text{обрэлемент}(f, \lambda_{xy}(\text{произведение}(x, y), A(x, y))) = \text{обрфункция}(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

5. Обратный элемент в случае произведения матриц.

   $\forall_{Af}(\text{обрэлемент}(f, \lambda_{xy}(x \cdot y, A(x, y))) = f^{-1})$

   Точкой обозначена операция "умножматр". Заменяющее выражение имеет вид "степеньматр(f, -1)".

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

6. Нормализатор общей стандартизации "нормобрэлемент".

   Пока нормализатор имеет единственный прием - про элемент, обратный к обратному:

   $\forall_{af}(\text{обрэлемент}(\text{обрэлемент}(a, f), f) = a)$

Приемы, связанные с символом "идемпотент"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Aaf}(\text{бинарнооперация}(f, A)\ \&\ a \in A \to \text{идемпотент}(a, f) \leftrightarrow f(a, a) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство либо задачи на описание, не имеющей цели "операция". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

2. Поиск идемпотентов.

   $\forall_{ABPfg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), A(x, y))\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, B)\ \&$
   $(x \in B\ \&\ g(x, x) = x) = P(x) \to \forall_x(P(x) \to \text{идемпотент}(x, f)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "операция", причем переменная f - неизвестная. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, третий - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно x вспомогательной задачей на описание. Переменные g, A, P функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

3. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   $\text{замещениеусловий}(\text{идемпотент}(b, a))$

Применение бинарной операции к набору подножеств

Бинарная операция f может применяться к набору $A_1, \ldots, A_n$ подмножеств своего носителя; результатом служит множество всех таких $f(a_1, \ldots, a_n)$, что $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. В случае ассоциативной операции n - любое, большее или равное 2, иначе n равно 2. Данный результат обозначается посредством терма "Значение(f, набор($A_1, \ldots, A_n$))" и прорисовывается формульным редактором как "$f[A_1, \ldots, A_n]$". Напомним, что для ассоциативных двуместных операций f выражение "значение(f, набор($a_1, \ldots, a_n$))" естественным образом доопределяется при всех натуральных n, больших 1.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABfn}(\exists_y(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to y(i) \in A(i))\ \&\ x = f(y)) = B(x) \to$
   $f[\lambda_i(A(i), i \in \{1, \ldots, n\})] = \text{set}_x(B(x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Утверждение под квантором существования разрешается относительно y с помощью задачи на описание, после чего сам квантор упрощается задачей на преобразование. Указатели "развертка" определяют идентификацию описателя "отображение"с набором и выписывание квантора общности в виде конъюнкции. При обработке антецедента прием вводит кортеж новых переменных y, имеющий длину n, а также новую переменную x. Переменные A, B функциональные. Утверждение $B(x)$ не содержит квантора существования. Преобразуемое выражение не расположено внутри терма с заголовком "функграфик" либо "функционально". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Afn}(f[\lambda_i(A(i), i \in \{1, \ldots, n\})] = \mathrm{set}_x(\exists_y(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to y(i) \in A(i))\ \&$
$x = f(y))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "развертка" используются так же, как в предыдущем приеме. Переменная A функциональная. Прием вводит кортеж новых переменных y. Преобразуемое выражение не расположено внутри терма с заголовком "функграфик" либо "функционально". Уровень срабатывания равен 3.

2. Включение результата применения двуместной операции к конечному списку.

   $\forall_{ABCafnx}(x = \{; \lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}\ \&\ B = \lambda_i(f(a(1), a(i)), i \in \{1, \ldots, n\})\ \&$
   $C = \lambda_i(f(a(i), a(1)), i \in \{1, \ldots, n\}) \to f[x, x] \subseteq A \leftrightarrow \{; B\} \subseteq A\ \&$
   $\{; C\} \subseteq A\ \&\ f[\{; \lambda_i(a(i), i \in \{2, \ldots, n\})\}, \{; \lambda_i(a(i), i \in \{2, \ldots, n\})\}] \subseteq A)$

   Для конечного списка x сначала рассматриваются всевозможные значения операции, в которых участвует первый элемент этого списка, а затем этот элемент отбрасывается.

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная a функциональная. Указатели "развертка" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" как конечных наборов. Уровень срабатывания равен 1.

3. Пустой список либо пустое множество.

   $\forall_f(f[\text{пустоеслово}] = \emptyset)$

   $\forall_{af}(f[a, \emptyset] = \emptyset)$

   $\forall_{af}(f[\emptyset, a] = \emptyset)$

   Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "Замыкание"

1. Представление множества степеней некоторого элемента как замыкания одноэлементного множества.

   $\forall_{Afgm}(f(n) = \text{алгстепень}(A, g, m)\ \&\ m = n \to \text{Замыкание}(\{A\}, \{g\}) =$
   $\mathrm{set}_x(\exists_n(n - \text{натуральное}\ \&\ x = f(n))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "$\mathrm{set}_x(\exists_n(n - \text{натуральное}\ \&\ x = f(n)))$", не связанного внешними кванторами и описателями. Переменная f функциональная. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "видстепень", который будет описан далее. Этому синтезатору передается дополнительная посылка "натуральное(n)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

2. Активизация анализатора "Замыкание".

   Чтобы определять замыкание конечного множества элементов относительно конечного списка операций, создан анализатор "Замыкание". Он выводит следствия во вспомогательной задаче на исследование, список посылок которой изначально совпадает со списком посылок текущей задачи. При выводе следствий используются только его собственные приемы. В частности, эти приемы выбирают среди полученных следствий наиболее интересные, и передают их обратно в текущую задачу. Для запуска анализатора "Замыкание" служит следующий прием:

   $\forall_{Aab}(A = \text{Замыкание}(\{;a\}, \{;b\}) \to \emptyset)$

   Прием имеет заголовок "замечание". Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "анализатор(Замыкание уровень(2)лимит(6000000))" определяет, что прием выполнит обращение к анализатору "Замыкание", причем вспомогательная задача анализатора будет решаться до уровня 2. На работу анализатора будет отведено 6000000 шагов интерпретатора ЛОСа. По исчерпании этого лимита все отобранные анализатором следствия передаются в текущаую задачу, и работа анализатора завершается. Для предотвращения повторных обращений к анализатору используется комментарий (анализатор Замыкание). Уровень срабатывания равен 4.

3. Анализатор "Замыкание".

   Анализатор предпринимает попытку определить конечное замыкание заданного конечного множества элементов относительно конечного списка алгебраических операций. Пока он имеет лишь приемы, относящиеся к случаю замыкания одноэлементного множества относительно единственной операции - других случаев в рассмотренных примерах не возникало. Напомним, что уровни срабатывания приемов анализатора, как и приемов сканирования задачи, начинаются с 0.

   (a) Инициализация порождения серии степеней.
   $\forall_{ABaf}(\text{бинарнооперация}(f, B)$ & $\text{ассоциативно}(f)$ &
   $\text{Замыкание}(\{a\}, \{f\}) = A \to \text{алгстепень}(a, f, 1) = a)$

   Третий антецедент идентифицируется с посылкой. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Прием выводит равенство, которое инициирует рассмотрение последовательных степеней элемента a. Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Переход к следующей степени.
   $\forall_{APabfgi}(\text{Замыкание}(\{a\}, \{f\}) = A$ & $f = \lambda_{xy}(g(x, y), P(x)$ & $P(y))$ &
   $P(a)$ & $P(b)$ & $\text{алгстепень}(a, f, i) = b$ & $j = i + 1 \to$
   $\text{алгстепень}(a, f, j) = g(a, b))$

   Первый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменные g, P функциональные. Истинность третьего и четвертого антецедента устанавливается с помощью задач на доказательство, решаемых до уровня 4. Шестой антецедент выделен указателем "программа". Правая часть выводимого равенства упрощается задачей на преобразование. Если уже имелась посылка вида "$\text{алгстепень}(a, f, j) = X$", то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Усмотрение зацикливания.
$\forall_{Aabcfmn}$(Замыкание($\{a\},\{f\}$) $= A$ & алгстепень$(a,f,m) = b$ &
алгстепень$(a,f,n) = b$ & $m < n$ &
$\forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \rightarrow$ алгстепень$(a,f,i) = c(i)) \rightarrow$
$A = \{;\lambda_i(c(i), i \in \{1,\dots,n-1\})\})$

Первые три антецедента и пятый антецедент идентифицируются с посылками, причем указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности с группой посылок. Переменная c функциональная. Переменные m,n идентифицируются с натуральными константами. Точка привязки выбрана в третьем антецеденте. Четвертый антецедент выделен указателем "программа". Отсутствует посылка вида "алгстепень$(a,f,k) = X$", у которой $n < k$. Указатель "развертка" определяет выписывание описателя "отображение" в выводимом равенстве как конечного списка. Указатель "обрыв" завершает работу анализатора и определяет перенесение выведенного равенства в список посылок внешней задачи. Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "замкнуто"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}$(замкнуто$(A,f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A \ \&\ y \in A \rightarrow f(x,y) \in A))$

   Созданы три приема, имеющих заголовок "второйтерм". Первый из них преобразует подутверждение условия задачи на доказательство и имеет уровни срабатывания 3 либо 4 - в зависимости от того, является ли подутверждение корневым либо расположено под корневым отрицанием. Второй прием преобразует подутверждение, расположенное под квантором. Его уровень срабатывания равен 4. Третий прием Преобразует подутверждение условия задачи на описание - корневое либо расположенное под корневым отрицанием. Его уровень срабатывания равен 5.

2. Попытка описания множества пар элементов, применение к которым операции выводит за рамки множества.

   $\forall_{APf}((x \in A \ \&\ y \in A \ \&\ \neg(f(x,y) \in A)) = P(x,y) \rightarrow$ замкнуто$(A,f) \leftrightarrow \neg(\exists_{xy}(P(x,y))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Либо выражение f имеет заголовок "отображение", либо в контексте имеется равенство, выражающее f через описатель "отображение". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно новых переменных x,y с помощью задачи на описание. Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 6.

3. Замкнутость конечного списка.

   $\forall_{Af}$(замкнуто$(\{;A\},f) \leftrightarrow f[\{;A\},\{;A\}] \subseteq \{;A\})$

   Напомним, что $\{;A\}$ обозначает конечное множество, элементы которого определяются набором A.

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "проверка". Уровень срабатывания равен 5.

4. Предварительная стандартизация списка перед проверкой замкнутости.

   В данном пункте собраны приемы, преобразующие различные задающие отображения термы к виду конечных таблиц при проверке замкнутости группы таких отображений.

   $\forall_{abcf}(b = \text{таблица}(\{;a\}) \to \text{замкнуто}(\{\text{таблица}(\{;a\});c\}, f) \leftrightarrow$ $\text{замкнуто}(\{b;c\}, f))$

   Напомним, что $\{A;B\}$ обозначает конечное множество, элементы которого определяются набором B, к которому добавлен в начале элемент A. В данном приеме обозначение использовано для выделения в наборе произвольного элемента A и оставшейся части B, так как указатель "список" определяет идентификацию без учета порядка элементов набора.

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение a имеет заголовок "набор"; один из элементов этого набора - выражение с заголовком "циклперест", задающее циклическую перестановку. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами "стандтаблица" и "нормтаблица". Напомним, что нормализатор "стандтаблица" преобразует циклические перестановки к виду объединения одноточечных отображений "$x \to y$". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{cfn}(\text{замкнуто}(\{\text{тождфунк}(\{1, \ldots, n\});c\}, f) \leftrightarrow$ $\text{замкнуто}(\{\text{таблица}(\{;\lambda_i(i \to i, i \in \{1, \ldots, n\})\});c\}, f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Указатель "развертка" определяет выписывание терма "отображение" в виде конечного набора. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{acfn}(\text{замкнуто}(\{\text{циклперест}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\}));c\}, f) \leftrightarrow$ $\text{замкнуто}(\{\text{таблица}(\{a(n) \to a(1);\lambda_j(a(j) \to a(j+1), j \in \{1, \ldots, n-1\})\});c\}, f))$

   $\forall_{abcfn}(\text{замкнуто}(\{\text{таблица}(\{\text{тождфунк}(\{;\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\});b\});c\}, f) \leftrightarrow$ $\text{замкнуто}(\{\text{таблица}(\{\text{таблица}(\{;\lambda_i(a(i) \to a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\});b\});c\}, f))$

   Аналогично предыдущему приему.

5. Проверочный оператор "усмзамкнуто".

   Кроме приема, непосредственно усматривающего замкнутость из посылки, оператор имеет единственный прием, выполняющий проверку замкнутости по определению:

   $\forall_{APf}(f(x,y) \in A \to \text{замкнуто}(A, \lambda_{xy}(f(x,y), P(x,y))))$

   Антецедент обрабатывается задачей на доказательство, которой передаются дополнительные посылки "$x \in A$", "$y \in A$", "$P(x,y)$". Переменные f, P функциональные.

6. Проверочный оператор "усмнезамкнуто".

   Оператор имеет только прием, непосредственно усматривающего незамкнутость из посылки.

Приемы, связанные с символом "алгстепень"

1. Усмотрение алгебраической степени.

   $\forall_{af}(\text{ассоциативно}(f) \to f(a,a) = \text{алгстепень}(a,f,2))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "ассоциативно(f)" разрешает идентификацию двух одинаковых идущих подряд операндов в более длинном списке операндов. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

2. Усмотрение обратного элемента.

   $\forall_{afn}(0 < n-1 \ \& \ \text{алгстепень}(a,f,n) = \text{единица}(f) \to \text{обрэлемент}(a,f) = \text{алгстепень}(a,f,n-1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3. Произведение степеней.

   $\forall_{afmn}(f(\text{алгстепень}(a,f,m), \text{алгстепень}(a,f,n)) = \text{алгстепень}(a,f,m+n))$

   $\forall_{afn}(f(a, \text{алгстепень}(a,f,n)) = \text{алгстепень}(a,f,n+1))$

   $\forall_{afn}(f(\text{алгстепень}(a,f,n), a) = \text{алгстепень}(a,f,n+1))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Указатель "ассоциативно(f)" разрешает идентификацию двух одинаковых идущих подряд операндов в более длинном списке операндов. Уровень срабатывания равен 1.

4. Степень произведения.

   $\forall_{abcfn}(n - \text{натуральное} \ \& \ f(c,a) = d \to \text{алгстепень}(f(a,b,c),f,n) = f(a, \text{алгстепень}(f(b,d),f,n-1),b,c))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается вспомогательной задачей на преобразование, причем результат d не содержит символа "значение". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abfn}(\text{обратим}(b,f) \ \& \ n - \text{натуральное} \to \text{алгстепень}(f(b,a),f,n) = f(b, \text{алгстепень}(f(a,b),f,n), \text{обрэлемент}(b,f)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение "алгстепень($f(a,b),f,n$)" встречается в посылках, а выражение "алгстепень($f(b,a),f,n$)" - не встречается. Уровень срабатывания приема равен 3.

5. Равенство степеней одного и того же элемента.

   $\forall_{Afmnx}(\text{группа}(A) \ \& \ x \in \text{носитель}(A) \ \& \ f = \text{операция}(A) \to \text{алгстепень}(x,f,m) = \text{алгстепень}(x,f,n) \leftrightarrow \text{алгстепень}(x,f,m-n) = \text{единица}(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, у которой третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, а первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания тот же.

6. Повторное возведение в степень.

   $\forall_{fmnx}(m$ – натуральное & n – натуральное & ассоциативно$(f) \to$ алгстепень(алгстепень$(x,f,m),f,n)$ = алгстепень$(x,f,mn))$

   $\forall_{fmnx}(m$ – целое & n – целое & ассоциативно(f) & обратимо$(f) \to$ алгстепень(алгстепень$(x,f,m),f,n)$ = алгстепень$(x,f,mn))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

7. Решение уравнения с неизвестным показателем.

   $\forall_{Aafnx}$(циклгруппа(A,a) & f = операция$(A) \to x$ = алгстепень$(a,f,n) \leftrightarrow$ n = циклпоказатель$(x,A,a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, имеющей цель "функционально". Выражение n содержит неизвестные, а выражения A,a,x - не содержат. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Цель "функционально" требует лишь установления факта однозначного определения неизвестных по известным параметрам; в прочих ситуациях переход к символу "циклпоказатель" может привести к нежелательному усложнению задачи. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Aafmn}$(группа(A) & порядокэлемента$(a,A) = n$ & f = операция(A) & n – число & m – целое $\to$ алгстепень(a,f,m) = единица$(f) \leftrightarrow n|m)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Первый, четвертый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Результат n обработки его левой части нормализатором общей стандартизации не имеет заголовка "порядокэлемента". Уровень срабатывания равен 2.

8. Специальные операции.

   (a) Сумма
   $\forall_{Aan}(A(a) \to$ алгстепень$(a, \lambda_{xy}(x+y, A(x)$ & $A(y)), n) = na)$
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Истинность антецедента устанавливается вспомогательной задачей на доказательство. Переменная A функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Произведение
   $\forall_{Aan}(A(a) \to$ алгстепень$(a, \lambda_{xy}(xy, A(x)$ & $A(y)), n) = a^n)$
   Аналогично предыдущему. Созданы две версии приема - для вещественного и комплексного случаев.

9. Нормализатор общей стандартизации "нормалгстепень".

   (a) Показатель 0.
   $\forall_{af}$(алгстепень$(a,f,0)$ = единица$(f))$

   (b) Показатель 1.

   $\forall_{af}$(алгстепень$(a, f, 1) = a$)

10. Синтезатор "циклзнач".

    Синтезатор реализует утверждение "циклзнач(a, b, c)". Значением входной переменной a служит ассоциативная алгебраическая операция, входной переменной b - набор последовательных попарно различных степеней относительно a некоторого элемента. Выходной переменной c присваивается продолжающий b максимальный такой набор.

    (a) Шаг возведения в степень.

    $\forall_{Aabcfnpz}(f = \lambda_{xy}(p(x, y), A(x, y))$ & $a = \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\})$ & $c = p(b(1), b(n))$ & $\neg(c \in \{; a\})$ & циклзнач$(f,$ суффикс$(a, c), z) \rightarrow$ циклзнач$(f, a, z))$

    Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор". Правая часть третьего из них упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором, пятый - реализует рекурсивное обращение. Указатель "развертка" обеспечивает идентификацию отображения из правой части второго антецедента с конечным набором.

    (b) Усмотрение результата.

    $\forall_{Aabcfnp}(f = \lambda_{xy}(p(x, y), A(x, y))$ & $a = \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\})$ & $c = p(b(1), b(n))$ & $c \in \{; a\} \rightarrow$ циклзнач$(f, a, a))$

    Антецеденты обрабатываются так же, как соответствующие антецеденты предыдущего приема.

Приемы, связанные с символом "изоморфизм"

Приемы, связанные с символами "гомоморфизм", "изоморфизм", "автоморфизм", главным образом, приводятся в разделах, относящихся к конкретным алгебраическим системам. Здесь же приведем два простейших приема.

1. Вывод следствий.

   $\forall_{ABf}$(изоморфизм$(f, A, B) \rightarrow$ гомоморфизм(f, A, B))

   $\forall_{ABf}$(изоморфизм$(f, A, B) \rightarrow$ взаимнооднозначно(f))

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

2. Расшифровка по определению.

   $\forall_{AB}$(изоморфны$(A, B) \leftrightarrow \exists_f$(изоморфизм$(f, A, B)$))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. В первом случае уровень срабатывания равен 3, во втором - 2.

Синтезатор усмотрения носителя бинарной операции "бинарноперация"

Синтезатор реализует утверждение "бинарноперация(f, A)". Значением входной переменной f служит бинарная операция. Выходной переменной A присваивается ее носитель. Уровни срабатывания приемов синтезатора равны 1.

1. Усмотрение из посылок.

   $\forall_{Af}(\text{бинарноперация}(f, A) \to \text{бинарноперация}(f, A))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой.

2. Явное задание функции.

   $\forall_{Pfg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), P(x)\ \&\ P(y)) \to \text{бинарноперация}(f, \text{set}_x(P(x))))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные g, P функциональные.

   $\forall_{Pfg}(\text{бинарноперация}(\lambda_{xy}(g(x, y), P(x)\ \&\ P(y)), \text{set}_x(P(x))))$

3. Операция группоида.

   $\forall_A(\text{группоид}(A) \to \text{бинарноперация}(\text{операция}(A), \text{носитель}(A)))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой.

Синтезатор "видстепени", усматривающий алгебраическую степень

Синтезатор реализует утверждение "$x = \text{алгстепень}(a, f, n)$". Входной переменной x присваивается некоторый объект. Синтезатор пытается представить его в виде "алгстепень(a, f, n)" и выдает найденные a, f, n. Пока синтезатор имеет единственный прием, связанный со степенью матрицы:

$\forall_{Abkmn}(\text{матр}(A, b, k, n)\ \&\ k = n\ \&\ b = \mathbb{R} \to A^m = \text{алгстепень}(A, \lambda_{xy}(xy,$
$\text{матр}(x, \mathbb{R}, n, n)\ \&\ \text{матр}(y, \mathbb{R}, n, n)), m))$

Здесь A^m - выражение "степеньматр(A, m)"; xy - выражение "умножматр(x, y)".

Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй и третий - выделены указателем "идентификатор".

Нормализатор "нормзнач" исключения вырожденных знчений двуместной операции на единственном операнде

Нормализатор имеет единственный прием "$\forall_{af}(f(a) = a)$".

3.3 Общие свойства группоидов

Приемы, связанные с символом "операция"

1. Ориентация равенства.

   $\forall_{ab}(a = \text{операция}(b) \leftrightarrow \text{операция}(b) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке, у которой a - переменная. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Преобразованное равенство снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

2. Единственная операция алгебраической системы.

   $\forall_{APfg}(f = \lambda_{xy}(g(x, y), P(x, y)) \to \text{операция}(\text{алгсист}(A, f)) =$
   $\lambda_{xy}(g(x, y), P(x, y) \ \& \ x \in A \ \& \ y \in A))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Переменные g, P функциональные. Уровень срабатывания равен 0.

3. Нормализатор общей стандартизации "нормоперация".

   Все приемы нормализатора имеют уровень срабатывания 1.

   (a) Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет заголовок "операция" и не является подвыражением выражения b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Создана еще одна версия приема, в которой последнее ограничение отброшено, причем выражение b имеет заголовок "отображение".

   (b) Группа перестановок.

   $\forall_a(\text{операция}(\text{Перестановки}(a)) = \lambda_{xy}(\text{произведение}(x, y),$
   $\text{Перестановка}(x, a) \ \& \ \text{Перестановка}(y, a)))$

   $\forall_a(\text{операция}(\text{перестановки}(a)) = \lambda_{xy}(\text{произведение}(x, y),$
   $\text{перестановка}(x, \{1, \ldots, a\}) \ \& \ \text{перестановка}(y, \{1, \ldots, a\})))$

   (c) Группа комплексных чисел по умножению.

   $\text{операция}(\text{комплумнож}) = \lambda_{xy}(xy, x - \text{комплексное} \ \& \ \neg(x = 0) \ \&$
   $y - \text{комплексное} \ \& \ \neg(y = 0))$

   (d) Группа комплексных чисел по сложению.

   $\text{операция}(\text{комплслож}) = \lambda_{xy}(x + y, x - \text{комплексное} \ \& \ y - \text{комплексное})$

   (e) Группа вещественных чисел по сложению.

   $\text{операция}(\text{вещслож}) = \lambda_{xy}(x + y, x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$

   (f) Группа вещественных чисел по умножению.

   $\text{операция}(\text{вещумнож}) = \lambda_{xy}(xy, x - \text{число} \ \& \ \neg(x = 0) \ \& \ y - \text{число} \ \&$
   $\neg(y = 0))$

   (g) Группа невырожденных матриц.

   $\forall_{An}(n - \text{натуральное} \ \& \ A = \text{носитель}(\text{матрумнож}(\text{веществполе}, n)) \to$
   $\text{операция}(\text{матрумнож}(\text{веществполе}, n)) = \lambda_{xy}(xy, x \in A \ \& \ y \in A))$

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормноситель".

Приемы, связанные с символом "носитель"

1. Непустота носителя.

   $\forall_A(\text{группоид}(A) \to \neg(\text{носитель}(A) = \emptyset))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

2. Принадлежность носителю значения операции группоида.

   $\forall_{ABa}$(группоид(A) & носитель$(A) \subseteq B \to$ операция$(A)(a) \in B)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

3. Носитель алгебраической системы.

   $\forall_{Af}$(носитель(алгсист$(A, f)) = A)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "группоид"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}$(группоид(алгсист$(A, f)) \leftrightarrow \neg(A = \emptyset)$ & $\forall_{xy}(x \in A$ & $y \in A \to$ $(x, y) \in \mathrm{Dom}(f)$ & $f(x, y) \in A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

2. Проверочный оператор "усмгруппоид".

   Кроме приема, выполняющего непосредственное усмотрение из посылки вида "группоид(...)", оператор имеет единственный прием:

   $\forall_A$(группа$(A) \to$ группоид$(A))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

Приемы, связанные с символом "идеал"

1. Разбор случаев в задачах на доказательство.

   $\forall_{ab}$(идеал$(a, b) \leftrightarrow$ левыйидеал(a, b) $\vee$ правыйидеал$(a, b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство либо задачи на исследование, имеющей цель "противоречие". Преобразованная посылка сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 4.

2. Расшифровка по определению для коммутативного случая.

   $\forall_{AMf}$(коммутативно(f) & группоид(M) & операция$(M) = f$ & $A \subseteq$ носитель$(M) \to$ идеал$(A, M) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A$ & $y \in$ носитель$(M) \to$ $f(x, y) \in A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, не имеющей неизвестных. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, третий выделен указателем "идентификатор". Первый и четвертый антецеденты обрабатываются задачами на доказательство. Уровень срабатывания равен 4. Создана еще две версии приема. В первой из них отброшено требование отсутствия неизвестных у текущей задачи на описание, причем преобразуемое утверждение содержит неизвестные и либо корневое, либо расположено под корневым отрицанием. Уровень срабатывания здесь равен 5. Вторая версия относится к подутверждению условия задачи на доказательство. Если это подутверждение корневое, то уровень срабатывания равен 6; если оно расположено под корневым отрицанием, то уровень срабатывания равен 7.

Приемы, связанные с символом "левыйидеал"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{AMf}$(группоид(M) & операция$(M) = f$ & $A \subseteq$ носитель$(M) \rightarrow$ левыйидеал$(A, M) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A$ & $y \in$ носитель$(M) \rightarrow f(y, x) \in A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй выделен указателем "идентификатор", третий обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство. В корневом случае уровень срабатывания равен 4, иначе он равен 5. Создана еще одна версия приема, применяемая к подутверждению квантора общности либо существования. Ее уровень срабатывания равен 4.

2. Принадлежность элемента идеала носителю.

   $\forall_{AMb}(b \in A$ & левыйидеал$(A, M) \rightarrow b \in$ носитель$(M))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

3. Использование определения для вывода следствий.

   $\forall_{AMaf}$(группоид(M) & левыйидеал(A, M) & $a \in A$ & $b \in$ носитель(M) & $f =$ операция$(M) \rightarrow f(b, a) \in A)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Выражения a, b не содержат символа "значение". Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Существует посылка, содержащая подвыражение "$f(b, a)$". Уровень срабатывания равен 5. Создана еще одна версия приема, в которой не требуется, чтобы $f(b, a)$ встречалось в посылках. Ее уровень срабатывания равен 6.

Приемы, связанные с символом "правыйидеал"

Так как приемы аналогичны приемам предыдущего подраздела, приводим только их теоремы.

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{AMf}$(группоид(M) & операция$(M) = f$ & $A \subseteq$ носитель$(M) \rightarrow$ правыйидеал$(A, M) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A$ & $y \in$ носитель$(M) \rightarrow f(x, y) \in A))$

2. Принадлежность элемента идеала носителю.

   $\forall_{AMb}(b \in A$ & правыйидеал$(A, M) \rightarrow b \in$ носитель$(M))$

3. Использование определения для вывода следствий.

   $\forall_{AMaf}$(группоид(M) & правыйидеал(A, M) & $a \in A$ & $b \in$ носитель(M) & $f =$ операция$(M) \rightarrow f(a, b) \in A)$

Приемы, связанные с символом "двусторидеал"

Пока созданы только два приема для расшифровки по определению. Они основаны на теореме "$\forall_{ab}$(двусторидеал$(a,b) \leftrightarrow$ левыйидеал(a,b) & правыйидеал$(a,b))$" и имеют заголовок "второйтерм". Первый из них применяется к подутверждению условия задачи на доказательство, причем преобразование выполняется, даже если текущее утверждение используется для сопровождения по о.д.з. Второй - применяется в любых случаях, но не разрешается нарушать сопровождение по о.д.з. Уровни срабатывания обоих приемов равны 3.

Приемы, связанные с символом "гомоморфизм"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABfgh}$(группоид(A) & группоид(B) & $g =$ операция(A) & $h =$ операция$(B) \rightarrow$ гомоморфизм$(f,A,B) \leftrightarrow f -$ функция & $\mathrm{Dom}(f) =$ носитель(A) & $\mathrm{Val}(f) \subseteq$ носитель(B) & $\forall_{xy}(x \in$ носитель(A) & $y \in$ носитель$(A) \rightarrow$ $f(g(x,y)) = h(f(x), f(y))))$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, следующие два - выделены указателем "идентификатор". В корневом случае уровень срабатывания равен 3, иначе он равен 4. Создана еще одна версия приема, применяемая к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание. Ее уровень срабатывания равен 4.

2. Использование определения для вывода следствий.

   $\forall_{ABfpq}$(группоид(A) & группоид(B) & гомоморфизм(f,A,B) & $p \in$ носитель(A) & $q \in$ носитель$(A) \rightarrow f($операция$(A)(p,q)) =$ операция$(B)(f(p), f(q)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$f($операция$(A)(p,q))$" в условии задачи на доказательство. Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, у которой указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "операция$(B)(f(p)$, $f(q))$". В этой версии лишь третий антецедент идентифицируется с посылкой, а остальные обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания тот же.

3. Переход от образа операции к операции над образами.

   $\forall_{ABfpq}$(группоид(A) & группоид(B) & гомоморфизм(f,A,B) & $p \in$ носитель(A) & $q \in$ носитель$(A) \rightarrow f($операция$(A)(p,q)) =$ операция$(B)(f(p), f(q)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

4. Гомоморфизмы аддитивной группы рациональных чисел.

   $\forall_{AQf}$(группа(Q) & носитель$(Q) = \mathbb{Q}$ & операция$(Q) = \lambda_{xy}(x+y, x - \mathrm{rational}$ & $y - \mathrm{rational})$ & группа$(A) \rightarrow$ гомоморфизм$(f,Q,A) \leftrightarrow f -$ функция &

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{Q}$ & $\exists_b(b \in$ носитель(A) & $\forall_x(x -$ rational $\rightarrow$ алгстепень$(f(x),$ операция$(A),$ знаменатель$(x)) =$ алгстепень$(b,$ операция$(A),$ числитель$(x)))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, второй и трерий - выделены указателем "идентификатор". Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "изоморфизм"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABf}($группоид(A) & группоид$(B) \rightarrow$ изоморфизм$(f, A, B) \leftrightarrow$ $f -$ функция & взаимнооднозначно(f) & $\mathrm{Val}(f) =$ носитель(B) & гомоморфизм$(f, A, B))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "проверка". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3. Создана еще одна версия приема, применяемая к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Ее уровень срабатывания равен 4.

2. Вывод простейших следствий.

   $\forall_{ABf}($группоид(A) & группоид(B) & изоморфизм$(f, A, B) \rightarrow$ $\mathrm{Dom}(f) =$ носитель(A) & $\mathrm{Val}(f) =$ носитель$(B))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "автоморфизм"

Создан единственный прием, связанный с расшифровкой по определению:

$\forall_{Af}($группоид$(A) \rightarrow$ автоморфизм$(f, A) \leftrightarrow$ изоморфизм$(f, A, A))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "полугруппа"

Создан единственный прием, связанный с расшифровкой по определению:

$\forall_{A}($группоид$(A) \rightarrow$ полугруппа$(A) \leftrightarrow$ ассоциативно(операция$(A)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "проверка". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3.4 Приемы, связанные с группами

Общие приемы, связанные с группами

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_A$(группоид(A) $\to$ группа(A) $\leftrightarrow$ ассоциативно(операция(A)) & обратимо(операция(A)))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство либо задачи на описание, имеющей цель "проверка". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_A$(группа(A) $\leftrightarrow$ группоид(A) & ассоциативно(операция(A)) & обратимо(операция(A)))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Переменная A не идентифицируется с неизвестной. Уровень срабатывания равен 5.

2. Сокращение равенства для групповой операции.

   $\forall_{Aabf}$(группа(A) & $f =$ операция(A) $\to f(a,b) = a \leftrightarrow b =$ единица(f) & $a \in$ носитель(A))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Не усматривается принадлежность a носителю группы A. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Aabf}$(группа(A) & $f =$ операция(A) & $a \in$ носитель(A) $\to f(a,b) = a \leftrightarrow b =$ единица(f))

   $\forall_{Aabf}$(группа(A) & $f =$ операция(A) & $a \in$ носитель(A) $\to f(b,a) = a \leftrightarrow b =$ единица(f))

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Axyz}$(группа(A) & $f =$ операция(A) $\to f$(префикс(x,y)) $= f$(префикс(x,z)) $\leftrightarrow f(y) = f(z)$)

   $\forall_{Axyz}$(группа(A) & $f =$ операция(A) $\to f$(суффикс(y,x)) $= f$(суффикс(z,x)) $\leftrightarrow f(y) = f(z)$)

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Указатель "операция(f)" определяет, что при выписывании терма вида $f(X)$ в случаев одноэлементного набора X знак операции отбрасывается. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{Aabfmnq}$(группа(A) & $f =$ операция(A) $\to$ алгстепень(f(префикс(a,b)), f, n) $=$ f(префикс(алгстепень(a, f, m), q)) $\leftrightarrow$
   f(суффикс(b, алгстепень(f(префикс(a,b)), $f, n-1$))) $=$
   f(префикс(алгстепень($a, f, m-1$), q)))

$\forall_{Afnxyz}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \to f(\text{суффикс}(y, x)) =$
$f(\text{суффикс}(z, \text{алгстепень}(x, f, n))) \leftrightarrow$
$f(y) = f(\text{суффикс}(z, \text{алгстепень}(x, f, n - 1))))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "операция(f)". Уровень срабатывания равен 2.

3. Сокращение равенства для групповой операции, использующее другое равенство.

$\forall_{Gabcdef}(\text{группа}(G)\ \&\ f = \text{операция}(G)\ \&\ f(\text{префикс}(c, e)) = a\ \&$
$f(\text{префикс}(a, b)) = f(\text{префикс}(c, d)) \to f(e; b) = f(d))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, прчием точка привязки выбрана в четвертом антецеденте. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "операция(f)". Уровень срабатывания равен 2.

4. Исключение обратных элементов в равенствах.

$\forall_{Aabcf}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \to f(\text{префикс}(\text{обрэлемент}(a, f), b)) = c \leftrightarrow$
$f(b) = f(a, c)\ \&\ c \in \text{носитель}(A))$

$\forall_{Aabcf}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \to f(\text{суффикс}(b, \text{обрэлемент}(a, f))) = c \leftrightarrow$
$f(b) = f(c, a)\ \&\ c \in \text{носитель}(A))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на преобразование либо на описание. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". В случае задачи на описание проверяется, что либо c не содержит неизвестных, либо хотя бы одно из выражений a, b, f их содержит. Используется указатель "операция(f)". Уровень срабатывания равен 2.

5. Исключение обратных элементов в описании класса.

$\forall_{AGPf}(\text{группа}(G)\ \&\ f = \text{операция}(G)\ \&\ A = \text{носитель}(G) \to$
$\exists_x(x \in A\ \&\ P(\text{обрэлемент}(x, f))) \leftrightarrow \exists_x(x \in A\ \&\ P(x)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

6. Решение уравнения относительно групповой операции.

$\forall_{Aabfx}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \to f(a, x) = b \leftrightarrow x = f(\text{обрэлемент}(a, f), b))$

$\forall_{Aabfx}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \to f(x, a) = b \leftrightarrow x = f(b, \text{обрэлемент}(a, f)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание. Выражения a, b не содержат неизвестных; x - неизвестная, на которую не накладывается прочих невырожденных ограничений. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2. Созданы дополнительные версии приемов, срабатывающие на уровне 5. В них допускаются прочие ограничения на неизвестную x.

7. Решение уравнения относительно операции взятия обратного элемента.

   $\forall_{Gafx}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $a \in$ носитель(G) & $x \in$ носитель$(G) \to$ $a =$ обрэлемент$(x, f) \leftrightarrow x =$ обрэлемент$(a, f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, f не содержат неизвестных, выражение x - содержит. Уровень срабатывания равен 1.

8. Группировка в одной части неединичных множителей доказываемого равенства.

   $\forall_{Aacf}$(группа(A) & $f =$ операция$(A) \to f(a) = b \leftrightarrow$ $f($суффикс$(a,$ обрэлемент$(b, f))) =$ единица$(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражение b не имеет заголовка "единица". Уровень срабатывания равен 5.

9. Переход к новой связанной переменной в кванторной импликации.

   $\forall_{ABGPQaf}$(группа(G) & $A =$ носитель(G) & $f =$ операция(G) & $B \subseteq A$ & $a \in A \to \forall_{xy}(x \in A$ & $P(x, y)$ & $f(x, a) \in B \to Q(x, y)) \leftrightarrow$ $\forall_{xy}(x \in B$ & $P(f(x,$ обрэлемент$(a, f)), y) \to Q(f(x,$ обрэлемент$(a, f)), y)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные условию задачи на описание. Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, третий выделен указателем "идентификатор". Четвертый и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные P, Q функциональные. Переменная y идентифицируется с набором связанных переменных, имеющим произвольную длину (включая нулевую). Уровень срабатывания равен 4.

10. Исключение квантора.

    $\forall_{AGPfyz}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $A =$ носитель(G) & $f(z) \in A \to$ $\exists_x(y = f($префикс$(x, z))$ & $P(x)) \leftrightarrow y \in A$ & $P(f(y,$ обрэлемент$(f(z), f))))$

    $\forall_{AGPfyz}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $A =$ носитель(G) & $f(z) \in A \to$ $\exists_x(y = f($суффикс$(z, x))$ & $P(x)) \leftrightarrow y \in A$ & $P(f($обрэлемент$(f(z), f), y)))$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подутверждению условия задачи на описание, являющемуся консеквентом кванторной импликации. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "операция(f)". Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 4.

11. Ввод обозначения для операции группы.

    $\forall_{Gf}$(операция$(G) = f)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "операция(G)" в задаче на доказательство. Эта задача имеет посылку "группа(G)" и не имеет посылки вида "операция(G) $= X$", где X - переменная. Прием вводит новую переменную f. Уровень срабатывания равен 4.

12. Выдача ответа.

    Теорема приема имеет вид "явное(a набор(группа(a)абелева(a)) пустоеслово пустоеслово)". Прием усматривает в качестве явного описания неизвестной a любое непустое подмножество пары утверждений "группа(a)", "абелева(a)". Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "коммутатор"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Axy}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A) \to \text{коммутатор}(x, y, A) =$
   $f(x, y, \text{обрэлемент}(x, f), \text{обрэлемент}(y, f)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задаче на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

2. Обратный элемент.

   $\forall_{Afxy}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A)\ \&\ x \in \text{носитель}(A)\ \&$
   $y \in \text{носитель}(A) \to \text{обрэлемент}(\text{коммутатор}(x, y, A), f) = \text{коммутатор}(y, x, A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

3. Вынесение операции наружу.

   $\forall_{Afxyz}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A)\ \&\ x \in \text{носитель}(A)\ \&\ y \in \text{носитель}(A)\ \&$
   $z \in \text{носитель}(A) \to \text{коммутатор}(f(x, y), z, A) = f(x, \text{коммутатор}(y, z, A),$
   $\text{обрэлемент}(x, f), \text{коммутатор}(x, z, A)))$

   $\forall_{Afxyz}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A)\ \&\ x \in \text{носитель}(A)\ \&\ y \in \text{носитель}(A)\ \&$
   $z \in \text{носитель}(A) \to \text{коммутатор}(z, f(x, y), A) = f(\text{коммутатор}(z, x, A), x,$
   $\text{коммутатор}(z, y, A), \text{обрэлемент}(x, f)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". В ситуациях, когда имеется установка на сокращенную запись условия задачи, прием блокируется. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор", три последних - обрабатываются проверочными операторами. Преобразуемое выражение не расположено под описателем, связывающим какое-либо из выражений f, x, z, A, но не связывающим e. Уровень срабатывания равен 2.

4. Равенство коммутатора единице.

   $\forall_{Afxy}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A)\ \&\ x \in \text{носитель}(A)\ \&\ y \in \text{носитель}(A) \to$
   $\text{коммутатор}(x, y, A) = \text{единица}(f) \leftrightarrow f(x, y) = f(y, x))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор", два последних - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "коммутант"

Создан единственный прием, выводящий условие принадлежности коммутанту:

$\forall_{Gabcf}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $c =$ обрэлемент$(a, f) \rightarrow$
$f(a, b, c,$ обрэлемент$(b, f)) \in$ коммутант$(G))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении подвыражения "$f(a, b, c)$" в условии задачи на доказательство. Эта задача имеет посылку, содержащую выражение "коммутант(G)". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

Приемы, связанные с символом "центргруппы"

Создан единственный прием, выполняющий расшифровку по определению:

$\forall_{AGf}$(группа(G) & $A =$ носитель(G) & $f =$ операция$(G) \rightarrow$
центргруппы$(G) = \mathrm{set}_x(x \in A$ & $\forall_y(y \in A \rightarrow f(x, y) = f(y, x))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и не применяется в ситуациях, ориентированных на получение сокращенной записи условий. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два других - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с абелевыми группами

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_a$(абелева$(a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in$ носитель(a) & $y \in$ носитель$(a) \rightarrow$
   операция$(a)(x, y) =$ операция$(a)(y, x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. В первом случае уровень срабатывания равен 6, во втором - 7.

2. Усмотрение абелевой группы.

   На предыдущей теореме создан еще один прием, имеющий заголовок "первыйтерм". Он применяется к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание. Уровень срабатывания равен 5.

3. Проверочный оператор "усмабелева".

   (a) Группа вещественных чисел по сложению.
   абелева(вещслож)

   (b) Группа вещественных чисел по умножению.
   абелева(вещумнож)

   (c) Группа целых чисел по сложению.
   абелева(целыеслож)

(d) Группа комплексных чисел по сложению.
абелева(комплслож)

(e) Группа комплексных чисел по умножению.
абелева(комплумнож)

Приемы, связанные с подгруппами

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Aaf}$(группа(A) & $f =$ операция$(A) \to$ подгруппа$(a, A) \leftrightarrow$
   $a \subseteq$ носитель(A) & $\forall_{xy}(x \in a$ & $y \in a \to f(x, y) \in a)$ &
   $\forall_x(x \in a \to$ обрэлемент$(x, f) \in a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, не имеющего переменных. Задача имеет неизвестные и решается на этапе редактирования ответа. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1. На той же теореме создана еще одна версия приема, применяемая к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. В первом случае уровень срабатывания равен 6, во втором - 7.

   $\forall_{APf}$(группа(A) & $f =$ операция$(A) \to$ подгруппа(set$_x(P(x)), A) \leftrightarrow$
   $\forall_x(P(x) \to x \in$ носитель$(A))$ & $\forall_{xy}(P(x)$ & $P(y) \to P(f(x, y)))$ &
   $\forall_x(P(x) \to P($обрэлемент$(x, f))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Переменная P функциональная. При редактировании ответа задачи на описание, если A - неизвестная, прием блокируется. Кроме того, он блокируется для условия задачи на описание, у которого A не содержит неизвестных, а выражение "set$_x(P(x))$" - содержит. Наконец, прием не применяется, если преобразуемое утверждение расположено под квантором либо описателем по переменной A и эта переменная не входит в "set$_x(P(x))$". Уровень срабатывания равен 5.

2. Вывод о принадлежности носителю группы из принадлежности подгруппе.

   $\forall_{GHa}(a \in H$ & подгруппа$(H, G) \to a \in$ носитель$(G))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство. Среди посылок встречается кванторная импликация с антецедентом вида "$x \in$ носитель(G)". Уровень срабатывания равен 2.

3. Подгруппа является подмножеством носителя группы.

   $\forall_{Hbn}$(подгруппа$(H,$ перестановки$(n))$ & $\{;b\} =$ set$_y$(перестановка$(y,$
   $\{1, \ldots, n\})) \to$ носитель(перестановки$(n)) = \{;b\}$ & $H \subseteq \{;b\})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, причем n - натуральная константа, меньшая 5, а H содержит неизвестные. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "развертка" определяет явное перечисление перестановок длины n в правой части второго антецедента. Уровень срабтывания равен 2.

   $\forall_{GH}$(подгруппа$(H, G) \to H \subseteq$ носитель$(G))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Выражение H содержит неизвестные, а выражение G не содержит. Уровень срабатывания равен 3.

4. Условие принадлежности подгруппе значения операции.

   $\forall_{Aabx}$(подгруппа(x, A) & $a \in x$ & операция$(A)(b) \in$ носитель$(A) \to$ операция(A)(префикс$(a, b)) \in x \leftrightarrow$ операция$(A)(b) \in x)$

   $\forall_{Aabx}$(подгруппа(x, A) & $b \in x$ & операция$(A)(a) \in$ носитель$(A) \to$ операция(A)(префикс$(a, b)) \in x \leftrightarrow$ операция$(A)(a) \in x)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Комментарий "нормнабор" к преобразуемой посылке блокирует применение приема. Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию терма "операция(A)" через равенство в посылках. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Aax}$(подгруппа(x, A) & $a \in$ носитель$(A) \to$ обрэлемент$(a,$операция$(A)) \in x \leftrightarrow a \in x)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. В случае подутверждения посылки, корневого либо расположенного под корневым отрицанием, прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

5. Принадлежность единицы.

   $\forall_{Gha}$(подгруппа(H, G) & $a =$ единица(операция$(G)) \to a \in H)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение a не содержит неизвестных, а выражение H содержит неизвестные внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 1.

6. Принадлежность подгруппе значения операции на двух элементах подгруппы.

   $\forall_{GHbdfp}$(подгруппа(H, G) & $d \in H$ & $b \in H$ & $f =$ операция(G) & $p = f(d, b) \to p \in H)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Точка привязки выбрана во втором антецеденте. Переменная H идентифицируестя с неизвестной, выражение G не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2. Создана также версия приема, у которой точка привязки выбрана в третьем антецеденте.

   $\forall_{GHbfp}$(подгруппа(H, G) & $b \in H$ & $f =$ операция(G) & $p = f(b, b) \to p \in H)$

   Аналогично предыдущему. Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, третий и четвертый - выделены указателем "идентификатор".

   $\forall_{Aabfp}$(подгруппа(p, A) & $a \in p$ & $f(b) \in p$ & $f =$ операция$(A) \to f$(префикс$(a, b)) \in p)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Выражение b имеет заголовок "набор", выражение a не имеет заголовка "значение". В условии задачи встречается выражение $f(X)$, такое, что набор операндов "префикс(a, b)" является подотрезком набора операндов X. Выводимая посылка сопровождается комментарием "нормнабор". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Aabfp}$(подгруппа(p, A) & $b \in p$ & $f(a) \in p$ & $f =$ операция$(A) \to$ $f($суффикс$(a, b)) \in p)$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{Aabfp}$(подгруппа(p, A) & $a \in p$ & $b \in p$ & $f =$ операция$(A) \to f(a, b) \in p)$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$f(a, b)$" в задаче на доказательство, либо на исследование, либо в задаче на описание, имеющей цель "пример". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Aabfpq}$(подгруппа(p, A) & $a \in p$ & $b \in p$ & $p \subseteq q$ & $f =$ операция$(A) \to$ $f(a, b) \in q)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "противоречие". Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражения a, b различны. Число посылок вида "$X \in p$" не превосходит 5. Уровень срабатывания равен 5.

7. Принадлежность подгруппе обратного элемента.

   $\forall_{Aabfp}$(подгруппа(p, A) & $a \in p$ & $f =$ операция$(A) \to$ обрэлемент$(a, f) \in p)$

   $\forall_{Aabfp}$(подгруппа(p, A) & $\neg(a \in p)$ & $f =$ операция$(A) \to$ $\neg($обрэлемент$(a, f) \in p))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в задаче выражения "обрэлемент(a, f)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

8. Усмотрение принадлежности подгруппе из равенства для значения операции.

   $\forall_{GHabcf}$(подгруппа(H, G) & $f =$ операция(G) & $a \in H$ & $b \in H$ & $f(a, c) = b \to$ $c \in H)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый, второй и пятый антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, причем точка привязки выбрана в пятом антецеденте. Третий и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

9. Непустота подгруппы.

   $\forall_{GH}$(подгруппа$(H, G) \to \neg(H = \emptyset))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

10. Носитель подгруппы.

    $\forall_{GH}$(носитель(Подгруппа$(H, G)) = H)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

11. Операция подгруппы.

    $\forall_{GHabf}($операция$(G) = f \;\&\; a \in H \;\&\; b \in H \to$ операция(Подгруппа$(H, G))(a, b) = f(a, b))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{GH}($операция(Подгруппа$(H, G)) =$ сужение(операция$(G), H \times H))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 4.

12. Усмотрение подгруппы с помощью проверочного оператора.

    $\forall_{ab}($подгруппа$(a, b) \to$ подгруппа$(a, b))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

13. Циклическая подгруппа.

    $\forall_{Gaf}(f =$ операция$(G) \to$ циклподгруппа$(a, G) = \mathrm{set}_x(\exists_n(n -$ целое $\&$ $0 \leq n \;\&\; x =$ алгстепень$(a, f, n))))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". При редактировании ответа задачи на преобразование либо на описание прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

14. Деление с остатком показателей степеней одного и того же элемента, принадлежащих подгруппе.

    $\forall_{ABfmn}($подгруппа$(B, A) \;\&\; f =$ операция$(A) \;\&\;$ алгстепень$(a, f, m) \in B \;\&$ алгстепень$(a, , f, n) \in B \;\&\; m -$ целое $\&\; n -$ натуральное $\to$ $\exists_{pk}(p-$целое $\&\; k-$целое $\&\; np+k = m \;\&\; 0 \leq k \;\&\; k < n \;\&$ алгстепень$(a, f, k) \in B))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент, а также третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на описание. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", пятый и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Задача имеет цель (независит $x_1 \ldots x_s$) переменные которой не входтя в выражение n, но входят в m. Уровень срабатывания равен 5.

15. Доказательство принадлежности подгруппе.

    $\forall_{AGHabcf}($группа$(G) \;\&\;$ подгруппа$(H, G) \;\&\; f =$ операция$(G) \;\&\; f(a, b) \in H \;\&$ $A =$ носитель$(G) \;\&\; a \in A \;\&\; b \in A \;\&\; f(c) \in H \to f(a, b; c) \in H)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - выделен указателем "идентификатор". Шестой и седьмой антецеденты обрабатываются проверочным оператором, восьмой - вспомогательной задачей на доказательство. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

16. Подстановка единицы в кванторное тождество.

    $\forall_{GHafg}$(подгруппа(H, G) & $f =$ операция(G) & $\forall_x(x \in H \to f(a, x) = g(a, x)) \to$ $a = g(a,$ единица$(f)))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменная g функциональная. Уровень срабатывания равен 3. Созданы две версии приема, для точек привязки в первом и третьем антецедентах.

17. Попытка развертки - свертки посылки "подгруппа(...)".

    $\forall_{Aaf}$(группа(A) & $f =$ операция(A) & подгруппа(a, A) & $\forall_{xy}(x \in A$ & $y \in a \to f(x, y) \in a) = b \to b)$

    $\forall_{Aaf}$(группа(A) & $f =$ операция(A) & подгруппа(a, A) & $\forall_x(x \in A \to$ обрэлемент$(x, f) \in a) = b \to b)$

    Приемы имеют заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, причем a - не переменная и не имеет заголовка "значение". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Левая часть последнего антецедента сначала обрабатывается задачей на преобразование, имеющей цели "упростить" и "развертка", инициирующие расшифровку по определениям. Затем эта часть обрабатывается задачей на преобразование, имеющей цель "свертка"и реализующей обратный процесс. Проверяется, что утверждение b не содержит кванторов. Уровень срабатывания равен 3.

18. Использование кванторного условия принадлежности подгруппе.

    $\forall_{GHPabf}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & подгруппа(H, G) & $\forall_x(P(x) \to f(x, a) \in H)$ & $P($обрэлемент$(f(b), f)) \to$ $f($префикс$($обрэлемент$(a, f), b)) \in H)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается задачей на доказательство. Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 4.

19. Любые две подгруппы одной и той же группы пересекаются.

    $\forall_{ABG}$(подгруппа(A, G) & подгруппа$(B, G) \to \neg($непересек$(A, B)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

20. Упрощение условия принадлежности подгруппе значения операции, использующее тождество из посылок.

    $\forall_{GHabcdef}(f(b, c) = f(d, e)$ & $e \in H$ & подгруппа(H, G) & $f =$ операция$(G) \to$ $f(a, b, c) \in H \leftrightarrow f(a, d) \in H)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

21. Использование параметрического описания для условия принадлежности произведения подгруппе.

$\forall_{GHafx}$(подгруппа(H,G) & $f=$ операция$(G)\to$
f(префикс(обрэлемент$(x,f),a))\in H\leftrightarrow\exists_y(y\in H$ & $x=f$(суффикс$(a,y))))$

$\forall_{GHafx}$(подгруппа(H,G) & $f=$ операция$(G)\to$
f(обрэлемент$(a,f),x)\in H\leftrightarrow\exists_y(y\in H$ & $x=f(a,y)))$

Приемы имеют заголовок "параметризация". Левая часть эквивалентности идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример" либо "параметризация". Затем решается вспомогательная задача на описание, полученная из текущей заменой данного условия на группу подкванторных утверждений правой части эквивалентности. Переменная y добавляется к списку неизвестных вспомогательной задачи. Если вспомогательная задача решена, то из ее ответа исключается y, и выдается ответ на текущую задачу.

Переменная x идентифицируется с неизвестной, не входящей в a,f,H. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5.

22. Два эквивалентных условия принадлежности подгруппе значения операции.

    $\forall_{GHabf}$(подгруппа(H,G) & $f=$ операция(G) & f(обрэлемент$(a,f),b)\in H\to$ f(обрэлемент$(b,f),a)\in H)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

23. Подбор примера.

    $\forall_{GHfx}(x=$ единица(f) & подгруппа(H,G) & $f=$ операция$(G)\to x\in H)$

    Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Первый антецедент выделен указателем "подборзначений"; на него текущеее условие заменяется во вспомогательной задаче. Проверяется, что отсутствуют прочие невырожденные ограничения на неизвестную x. Уровень срабатывания равен 1.

24. Проверочный оператор "усмподгруппа".

    Все приемы оператора срабатывают на уровне 1.

    (a) Подмножество подгруппы.
    $\forall_{GHP}(P\subseteq H$ & подгруппа(P,G) & подгруппа$(H,G)\to$
    подгруппа$(P,$ Подгруппа$(H,G)))$
    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

    (b) Группа целых чисел по сложению.
    $\forall_n(n-$ целое $\to$ подгруппа(set$_x(\exists_m(x=mn$ & $m-$ целое)), целыеслож))
    Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

    (c) Группа комплексных чисел по сложению.
    подгруппа(set$_x(\exists_{mn}(m-$ целое & $n-$ целое & $x=m+ni)$), комплслож)
    Сложение и умножение - комплексные.

(d) Группа комплексных чисел по умножению.

$\text{подгруппа}(\text{set}_x(|x| = 1 \ \& \ x - \text{комплексное}), \text{комплумнож})$

(e) Группа перестановок.

$\forall_{an}(a \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \text{подгруппа}(\text{set}_x(\text{перестановка}(x, \{1, \ldots, n\}) \ \& \ x(a) = a), \text{перестановки}(n)))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

(f) Пересечение подгрупп.

$\forall_{ABC}(\text{подгруппа}(A, C) \ \& \ \text{подгруппа}(B, C) \rightarrow \text{подгруппа}(A \cap B, C))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "дистрибразвертка" обеспечивает одношаговую обработку пересечений с любым числом операндов.

Приемы, связанные с порядком элемента группы

1. Ориентация равенства.

   $\forall_{abc}(c = \text{порядокэлемента}(a, b) \leftrightarrow \text{порядокэлемента}(a, b) = c)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Переменная c идентифицируется с переменной. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

2. Расшифровка равенства порядков.

   $\forall_{Aabf}(\text{группа}(A) \ \& \ f = \text{операция}(A) \ \& \ a \in \text{носитель}(A) \ \& \ b \in \text{носитель}(A) \rightarrow \text{порядокэлемента}(a, A) = \text{порядокэлемента}(b, A) \leftrightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \text{алгстепень}(a, f, n) = \text{единица}(f) \leftrightarrow \text{алгстепень}(b, f, n) = \text{единица}(f)))$

   $\forall_{Aabf}(\text{группа}(A) \ \& \ f = \text{операция}(A) \ \& \ a \in \text{носитель}(A) \ \& \ b \in \text{носитель}(A) \rightarrow \text{порядокэлемента}(a, A) - \text{порядокэлемента}(b, A) = 0 \leftrightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \text{алгстепень}(a, f, n) = \text{единица}(f) \leftrightarrow \text{алгстепень}(b, f, n) = \text{единица}(f)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. В корневом случае уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 7.

3. В случае бесконечного порядка элемента единице равна только его нулевая степень.

   $\forall_{Afnx}(\text{группа}(A) \ \& \ x \in \text{носитель}(A) \ \& \ f = \text{операция}(A) \ \& \ \text{порядокэлемента}(x, A) = \infty \rightarrow \text{алгстепень}(x, f, n) = \text{единица}(f) \leftrightarrow n = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

4. Натуральный порядок элемента делит любую степень, возведение в которую этого элемента равно единице.

   $\forall_{Afmnx}$(группа(A) & $x \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) &
   порядокэлемента$(x, A) = n$ & n – натуральное &
   алгстепень$(x, f, m) =$ единица$(f) \to n|m)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый, четвертый и шестой антецеденты идентифицируются с посылками, второй и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{Afmnx}$(группа(A) & $x \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) &
   порядокэлемента$(x, A) = n$ & n – натуральное &
   $n|m \to$ алгстепень$(x, f, m) =$ единица$(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{Afmnx}$(группа(A) & $x \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) &
   порядокэлемента$(x, A) = n$ & n – натуральное &
   m – целое $\to$ алгстепень$(x, f, m) =$ единица$(f) \leftrightarrow n|m)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Последние два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

5. Определение порядка элемента путем явного описания множества натуральных степеней, возведение в которые данного элемента дает единицу.

   $\forall_{APfx}$(группа(A) & $x \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) &
   set$_n$(алгстепень$(x, f, n) =$ единица(f) & n – натуральное$) = P \to$
   порядокэлемента$(x, A) = (\infty$ при $P = \emptyset$, иначе $\inf P))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Утверждения под описателем "класс" разрешаются относительно n с помощью задачи на описание, после чего сам описатель обрабатывается нормализатором "нормкласс". Выражение P не содержит подвыражения "порядокэлемента(x, A)". Уровень срабатывания равен 6.

6. Множество степеней элемента, имеющего конечный порядок.

   $\forall_{Gaf}(f =$ операция(G) & порядокэлемента(a, G) – число $\to$
   card(set$_x(\exists_n(n \leq$ порядокэлемента$(a, G) - 1$ & $0 \leq n$ & n – целое &
   $x =$ алгстепень$(a, f, n)))) =$ порядокэлемента$(a, G))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Gaf}(f =$ операция(G) & порядокэлемента(a, G) – число $\to$
   set$_x(\exists_n(n$ – целое & $0 \leq n$ & $x =$ алгстепень$(a, f, n))) =$
   set$_x(\exists_n(n \in \{0, \ldots,$ порядокэлемента$(a, G) - 1\}$ & $x =$ алгстепень$(a, f, n))))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{AGaf}(f =$ операция(G) & порядокэлемента(a, G) – число &
set$_x(\exists_n(n \leq$ порядокэлемента$(a, G) - 1$ & $0 \leq n$ & n – целое &
$x =$ алгстепень$(a, f, n))) = A \to$ card$A =$ порядокэлемента$(a, G))$

Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. В задаче встречается выражение "мощность(A)". Уровень срабатывания равен 3.

7. Порядок степени элемента.

$\forall_{Afkn}($группа(A) & $f =$ операция(A) & $n =$ порядокэлемента(a, A) &
k – целое $\to$ порядокэлемента(алгстепень$(a, f, k), A) = n/$нод$(k, n))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Aafmnx}($группа(A) & $a \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) &
порядокэлемента$(a, A) = mn$ & n – натуральное & m – натуральное &
$x =$ алгстепень$(a, f, n) \to x \in$ носитель(A) & порядокэлемента$(x, A) = m)$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквенты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Первые два антецедента и четвертый антецедент идентифицируются с утверждениями из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Пятый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Седьмой антецедент выделен указателем "подборзначений"; на него текущие условия заменяются во вспомогательной задаче. Уровень срабатывания равен 4.

8. Подстановка значения порядка, определяемого посылкой.

$\forall_{Aan}($порядокэлемента$(a, A) = n \to$ порядокэлемента$(a, A) = n)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства при идентификации блокируется. Выражение n не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

9. Равенство степени элемента единице.

$\forall_{Aafn}($группа(A) & n – целое & $a \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) &
порядокэлемента(a, A) – число $\to$ алгстепень$(a, f, n) =$ единица$(f) \leftrightarrow$
порядокэлемента$(a, A)|n)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

10. Равенство порядка элемента группы единице.

$\forall_{Aa}($группа(A) & $a \in$ носитель$(A) \to$ порядокэлемента$(a, A) = 1 \leftrightarrow$
$a =$ единица(операция$(A)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Af}$(группа(A) & $f =$ операция$(A) \rightarrow$ порядокэлемента(единица$(f), A) = 1)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

11. Существование элемента абелевой группы, порядок которого равен заданному натуральному числу.

    $\forall_{Akmnp}$(группа(A) & абелева(A) & $n = \prod_{i=1}^{k}(p(i))^{m(i)}$ & кортеж$(p, k, \mathbb{N})$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow$ простое$(p(i)))$ & k – натуральное & различны(p) & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow \exists_x(x \in$ носитель(A) & порядокэлемента$(x, A) = (p(i))^{m(i)})) \rightarrow$ $\exists_x(x \in$ носитель(A) & порядокэлемента$(x, A) = n))$

    Прием имеет заголовок "существует". Он выполняет попытку подбора значений несущественных неизвестных. Отличие от приемов "подборзначений" заключается в том, что вспомогательная задача снабжается группой дополнительных посылок, содержащих новые переменные. Эти же переменные могут встречаться в замещающем условии.

    Подкванторные утверждения консеквента идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими несущественную неизвестную x. Все неизвестные этой задачи - несущественные. Выражение n не содержит неизвестных и не имеет заголовка "степень". Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста. Антецеденты с третьего по восьмой порождают утверждения, заносимые в список посылок вспомогательной задачи. Последний антецедент выделен указателем "подборзначений". Он замещает группу содержащих неизвестную x условий во вспомогательной задаче. Прием вводит новые переменные k, m, p. Уровень срабатывания равен 5.

12. Нормализатор общей стандартизации "нормпорядокэлемента".

    (a) Использование посылки.
    $\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$
    Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение a имеет заголовок "порядокэлемента" и не является подвыражением выражения b. Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Циклическая группа.
    $\forall_{Aa}$(циклгруппа$(A, a) \rightarrow$ порядокэлемента$(a, A) = \mathrm{card}$(носитель$(A)))$
    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

Приемы, связанные с порождающим элементом подгруппы

Созданы лишь приемы, выполняющие расшифровку по определению. Они имеют общую теорему:

$\forall_{AGaf}(f =$ операция(G) & $a \in$ носитель(G) & $A \subseteq$ носитель(G) & группа$(G) \rightarrow$ порождэлемент$(a, A, G) \leftrightarrow a \in A$ & $\forall_x(x \in A \rightarrow \exists_n(n$–целое & $x =$ алгстепень$(a, f, n))))$

Заголовок приемов - "воройтерм". Первый прием применяется к подутверждению условия задачи на описание, не имеющей цели "исследовать". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4. Второй прием применяется к посылке. Его уровень срабатывания тоже равен 4. Наконец, третий прием применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. В корневом случае уровень срабатывания равен 4, иначе он равен 5.

Приемы, связанные с периодическими группами

Создан единственный прием, усматривающий периодическюу группу по кванторному тождеству для порядка элементов группы:

$\forall_A(\text{группа}(A)\ \&\ f(x){-}\text{число}\ \&\ \forall_x(x \in \text{носитель}(A)\ \&\ \neg(x = \text{единица}(\text{операция}(A))) \rightarrow \text{порядокэлемента}(x, A) = f(x)) \rightarrow \text{периодичгруппа}(A))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - обрабатывается проверочным оператором. Ему передаются дополнительные посылки "$x \in \text{носитель}(A)$", "$\neg(x = \text{единица}(\text{операция}(A)))$". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с периодом группы

1. Период конечной группы равен наименьшему общему кратному порядков ее элементов.

   $\forall_A(\text{группа}(A)\ \&\ \text{конечное}(\text{носитель}(A)) \rightarrow \text{периодгруппы}(A) = \text{ноквсех}(\text{set}_n(\exists_x(x \in \text{носитель}(A)\ \&\ n = \text{порядокэлемента}(x, A)))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче выражения "периодгруппы(A)". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

2. Ориентация равенства.

   $\forall_{ab}(b = \text{периодгруппы}(a) \leftrightarrow \text{периодгруппы}(a) = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение b не содержит символов "периодгруппы" и "порядокэлемента". Уровень срабатывания приема равен 0.

3. Период конечной циклической группы равен порядку ее образующего элемента.

   $\forall_{Aa}(\text{циклгруппа}(A, a)\ \&\ \text{конечное}(\text{носитель}(A)) \rightarrow \text{периодгруппы}(A) = \text{порядокэлемента}(a, A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. При завершающем редактировании ответа прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

4. Существование элемента конечной абелевой группы, порядок которого равен периоду группы.

   $\forall_{Aa}$(группа(A) & абелева(A) & конечное(носитель(A)) $\rightarrow$
   $a \in$ носитель(A) & порядокэлемента(a, A) = периодгруппы(A))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче выражения "периодгруппы(A)". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, третий - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "порядокэлемента(X, A) = периодгруппы(A)". Прием вводит новую переменную a. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные со смежными классами

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABx}(f =$ операция$(A) \rightarrow$ левсмежнкласс$(x, A, B) \leftrightarrow$
   $\exists_y(y \in$ носитель(A) & $x = \mathrm{set}_z(\exists_u(u \in B$ & $z = f(y, u)))))$

   $\forall_{ABx}(f =$ операция$(A) \rightarrow$ правсмежнкласс$(x, A, B) \leftrightarrow$
   $\exists_y(y \in$ носитель(A) & $x = \mathrm{set}_z(\exists_u(u \in B$ & $z = f(u, y)))))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3. Созданы три дополнительные версии приемов. Первая из них применяется к операнду описателя "класс", расположенному в посылке либо в условии задачи, не имеющей типа "преобразовать". Вторая версия применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Уровни срабатывания этих версий равны 3. Наконец, третья версия применяется к посылке задачи на доказательство, либо на исследование, либо задачи на описание, не имеющей цели "прямойответ". Ее уровень срабатывания равен 6.

   $\forall_{ABx}$(абелева(A) & $f =$ операция$(A) \rightarrow$ смежныйкласс$(x, A, B) \leftrightarrow$
   $\exists_y(y \in$ носитель(A) & $x = \mathrm{set}_z(\exists_u(u \in B$ & $z = f(y, u)))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5. Созданы еще две версии приема. Первая из них применяется к условию задачи на описание, причем выражение x содержит неизвестные, а выражения A, B - не содержат. Преобразованное условие снабжается комментарием "серия". Уровень срабатывания этой версии равен 3. Вторая версия применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. В первом случае уровень срабатывания равен 7, во втором - 6.

2. Ввод обозначения для множества смежных классов.

   $\forall_{AGH}(\mathrm{set}_a($левсмежнкласс$(a, G, H)) = A)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении выражения "set_a(левсмежнкласс$(a,$

$G, H))$" в задаче на доказательство. Проверяется, что это выражение является операндом при символе "мощность". Проверяется также отсутствие посылки вида "set_a(левсмежнкласс$(a, G, H)) = X$", где X - переменная. Прием вводит новую переменную A. Выведенное равенство снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{AGH}(\mathrm{set}_a(\text{правсмежнкласс}(a, G, H)) = A)$

Аналогично предыдущему.

3. Смежные классы образуют разбиение носителя группы.

   $\forall_{ABGH}(\text{группа}(G)\ \&\ \mathrm{set}_a(\text{левсмежнкласс}(a, G, H)) = A\ \&\ \text{носитель}(G) = B \to \text{разбиение}(B, A))$

   $\forall_{ABGH}(\text{группа}(G)\ \&\ \mathrm{set}_a(\text{правсмежнкласс}(a, G, H)) = A\ \&\ \text{носитель}(G) = B \to \text{разбиение}(B, A))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

4. Подгруппа принадлежит множеству смежных классов.

   $\forall_{GHa}(\text{подгруппа}(H, G)\ \&\ \mathrm{set}_x(\text{левсмежнкласс}(x, G, H)) = a \to H \in a)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "вариант" разрешает замену символа "левсмежнкласс" на "правсмежнкласс" либо "смежныйкласс". Уровень срабатывания равен 2.

5. Условие равенства смежного класса подгруппе.

   $\forall_{GHa}(\text{подгруппа}(H, G)\ \&\ a \in \text{носитель}(G)\ \&\ f = \text{операция}(G) \to$
   $\mathrm{set}_x(\exists_y(x = f(a, y)\ \&\ y \in H)) = H \leftrightarrow a \in H)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

6. Непринадлежность подгруппе представителя смежного класса, не пересекающегося с данной подгруппой.

   $\forall_{AGHaf}(A = \mathrm{set}_x(\exists_y(y \in H\ \&\ x = f(a, y)))\ \&\ \text{подгруппа}(H, G)\ \&$
   $f = \text{операция}(G)\ \&\ a \in \text{носитель}(G)\ \&\ \text{непересек}(A, H) \to \neg(a \in H))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и второй антецеденты идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

7. Индекс подгруппы.

   $\forall_{GH}(\text{подгруппа}(H, G) \to \text{индексподгруппы}(H, G) =$
   $\mathrm{card}(\mathrm{set}_x(\text{левсмежнкласс}(x, G, H))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. При редактировании ответа задачи прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с нормальными подгруппами

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{GH}$(подгруппа(H, G) & $A =$ носитель(G) & $f =$ операция$(G) \to$ нормподгруппа$(H, G) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in H$ & $y \in A \to f($обрэлемент$(y, f), x, y) \in H))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Первый антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". В корневом случае уровень срабатывания равен 4, иначе он равен 5. Создана еще одна версия приема, применяемая к подутверждению константного условия задачи на описание при редактировании ответа. Уровень срабатывания ее равен 0.

2. Нормальная подгруппа является подгруппой.

   $\forall_{GH}$(нормподгруппа$(H, G) \to$ подгруппа$(H, G))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания приема равен 1.

3. Вывод условия непринадлежности подгруппе.

   $\forall_{GHbcf}$(нормподгруппа(H, G) & носитель$(G) = \{b; c\}$ & $\neg(d \in H)$ & $f =$ операция(G) & $p = f($обрэлемент$(b, f), d, b) \to \neg(p \in H))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, последние два - выделены указателем "идентификатор". Правая часть последнего антецедента упрощается с помощью задачи на преобразование. Переменная H - неизвестная, выражение G не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

4. Вывод условия принадлежности подгруппе.

   $\forall_{GHbcf}$(нормподгруппа(H, G) & носитель$(G) = \{b; c\}$ & $d \in H$ & $f =$ операция(G) & $p = f($обрэлемент$(b, f), d, b) \to p \in H)$

   Аналогично предыдущему приему.

   $\forall_{GHabf}$(нормподгруппа(H, G) & $f =$ операция(G) & $a \in H$ & $b \in$ носитель$(G) \to f(b, a,$ обрэлемент$(b, f)) \in H)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче выражения "$f(b, a,$обрэлемент$(b, f))$". Задача - на доказательство, либо на исследование, либо на описание и имеет цель "пример". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор", третий и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "ассоциативно", в случае ассоциативной операции f, разрешает идентификацию с выделением подгруппы последовательно идущих операндов. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{GHabf}$(нормподгруппа(H, G) & $f =$ операция(G) & $a \in H$ & $b \in$ носитель$(G) \to f($обрэлемент$(b, f), a, b) \in H)$

   Аналогично предыдущему.

Группы специальных типов

1. Группа перестановок.

   (a) Усмотрение группы.
   $\forall_a$(группа(Перестановки(a)))
   $\forall_a$(группа(перестановки(a)))
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Носитель.
   $\forall_n$(носитель(перестановки(n)) = set$_x$(перестановка($x, \{1, \ldots, n\}$)))
   Прием имеет заголовок "второйтерм". В случае подвыражения посылки, снабженной комментарием "носитель", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_a$(носитель(Перестановки(a)) = set$_x$(Перестановка(x, a)))
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Операция.
   $\forall_a$(операция(Перестановки(a)) = λ_{xy}(произведение(x, y),
   Перестановка(x, a) & Перестановка(y, a)))
   $\forall_a$(операция(перестановки(a)) = λ_{xy}(произведение(x, y),
   перестановка($x, \{1, \ldots, a\}$) & перестановка($y, \{1, \ldots, a\}$)))
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   (d) Определения порядка элемента с помощью разложения перестановки в циклы.
   $\forall_{abmn}$(разложциклы(a, b) & $b = \{; \lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\})\} \rightarrow$
   порядокэлемента(таблица(a), перестановки(m)) =
   ноквсех($\{; \lambda_i$(порядокэлемента($c(i)$, перестановки(m)), $i \in \{1, \ldots, n\})\}$))
   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Указатели "развертка" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" как конечных наборов. Переменная c функциональная. Уровень срабатывания равен 3.
   $\forall_{am}$(порядокэлемента(циклперест(a), перестановки(m)) = $l(a)$)
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Заменяющее выражение обрабатывается нормализатором "нормдлинанабора". Уровень срабатывания приема равен 1.

2. Группа четных перестановок.

   (a) Усмотрение группы.
   $\forall_a$(группа(четнперестановки(a)))
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Носитель.
   $\forall_n$(носитель(четнперестановки(n)) = set$_x$(перестановка($x, \{1, \ldots, n\}$) &
   четность(x) = 0))
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

  (c) Операция.

  $\forall_a$(операция(четнперестановки(a)) $= \lambda_{xy}$(произведение(x, y), перестановка($x, \{1, \ldots, a\}$) & четность(x) $= 0$ & перестановка($y, \{1, \ldots, a\}$) & четность(y) $= 0$))

  Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

3. Группа комплексных чисел по умножению.

   Пока созданы только несколько приемов, связанных с определением порядка элемента:

   $\forall_{ab}(b = |a|$ & $\neg(b - 1 = 0) \rightarrow$ порядокэлемента(a, комплумнож) $= \infty$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором.

   $\forall_{ab}(|a|-1 = 0$ & $b = \arg(a)/\pi$ & $b-$rational $\rightarrow$ порядокэлемента(a, комплумнож) $=$ (знаменатель(b) при числитель(b) $-$ even, иначе 2знаменатель(b)))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ab}(b = \arg(a)/\pi$ & $\neg(b -$ rational) $\rightarrow$ порядокэлемента(a, комплумнож) $= \infty$)

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

4. Циклическая группа.

  (a) Носитель группы.

  $\forall_{Aafn}(n =$ card(носитель(A)) & циклгруппа(A, a) & $f =$ операция(A) $\rightarrow$ $x \in$ носитель(A) $\leftrightarrow \exists_i(i \in \{0, \ldots, n-1\}$ & $x =$ алгстепень(a, f, i)))

  Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная x - неизвестная; выражение A не содержит неизвестных. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый и третий - выделены указателем "идентификатор". Преобразованное условие снабжается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 2.

  $\forall_{Aafn}(n =$ card(носитель(A)) & циклгруппа(A, a) & $f =$ операция(A) $\rightarrow$ носитель(A) $= \mathrm{set}_x(\exists_i(i \in \{0, \ldots, n-1\}$ & $x =$ алгстепень(a, f, i))))

  Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются так же, как выше. Выражение n не содержит символа "носитель". Уровень срабатывания равен 3.

  (b) Порядок образующего элемента.

  $\forall_{Aan}(n =$ card(носитель(A)) & циклгруппа(A, a) $\rightarrow$ порядокэлемента(a, A) $= n$)

  Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, первый - выделен указателем "идентификатор". Выражение n не содержит символа "носитель". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Элемент носителя циклической группы представим в виде степени образующего элемента.

$\forall_{Aabf}$(циклгруппа(A,a) & $f =$ операция(A) & $B \subseteq$ носитель(A) & $b \in B \rightarrow$ $\exists_n(n -$ натуральное & $b =$ алгстепень$(a,f,n)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи, не имеющей типа "преобразовать". В случае задачи на описание, имеющей цель "прямойтвет", требуется, чтобы все неизвестные были несущественными. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка задачи, имеющая подутверждение вида "$b =$ алгстепень(a,f,c)", для которого все надутверждения имеют только заголовки "и" и "существует". Выражение b не имеет вида "алгстепень(a,f,c)". Уровень срабатывания равен 4.

(d) Ввод в рассмотрение образующего элемента.

$\forall_A$(Циклгруппа$(A) \leftrightarrow \exists_a$(циклгруппа$(A,a)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Усмотрение циклической группы.

$\forall_{Aa}$(циклгруппа$(A,a) \rightarrow$ Циклгруппа$(A))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{Aa}$(группа(A) & $a \in$ носитель(A) & порядокэлемента$(a,A) =$ card(носитель$(A)) \rightarrow$ циклгруппа$(A,a))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

(f) Существование натуральной степени образующего элемента циклической группы, принадлежащей подгруппе.

$\forall_{ABaf}$(циклгруппа(A,a) & подгруппа(B,A) & $f =$ операция$(A) \rightarrow$ $\exists_n$(алгстепень$(a,f,n) \in B$ & $n -$ натуральное))

Прием имеет заголовок "связка". Конъюнктивные члены подкванторного утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную n. Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

(g) Подгруппы циклической группы.

$\forall_{ABabfmn}$(циклгруппа(A,a) & $f =$ операция(A) & $n =$ card(носитель$(A))$ & $m -$ натуральное & $m|n$ & $b =$ алгстепень$(a,f,m/n) \rightarrow$ подгруппа(B,A) & card$(B) = m \leftrightarrow B =$ set$_x(\exists_k(k \in \{0,\dots,m-1\}$ & $x =$ алгстепень$(b,f,k))))$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Он применяется к паре условий задачи на описание. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражение B содержит неизвестные, выражения m и A - не содержат. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABafn}$(циклгруппа(A,a) & $f =$ операция(A) & $n =$ card(носитель$(A)) \rightarrow$ подгруппа$(B,A) \leftrightarrow \exists_k(k -$ натуральное & $k|n$ & $B =$ циклподгруппа(алгстепень$(a,f,k),A)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Выражение B содержит неизвестные, выражения a и A - не содержат. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABabfmn}$(циклгруппа(A,a) & подгруппа(B,A) & $f=$ операция(A) & $n=$ card(носитель(A)) & $m=$ card(B) & $b=$ алгстепень$(a,f,m/n)$ $\rightarrow$ set$_x(\exists_k(k\in\{0,\ldots,m-1\}$ & $x=$ алгстепень$(b,f,k))) = B)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, остальные - выделены указателем "идентификатор". Выражение m не содержит символа "мощность". Уровень срабатывания равен 4.

(h) Порождающий элемент подгруппы циклической группы.

$\forall_{ABafm}$(циклгруппа(A,a) & подгруппа(B,A) & $f=$ операция(A) & $m=$ inf(set$_x$(алгстепень$(a,f,x)\in B$ & $x-$ натуральное)) $\rightarrow$ порождэлемент(алгстепень$(a,f,m),B,A)$)

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Выражение m содержит неизвестные. Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, четвертый - выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 3.

(i) Наименьший ненулевой показатель элемента подгруппы циклической группы делит порядок группы.

$\forall_{ABaf}$(циклгруппа(A,a) & подгруппа(B,A) & $f=$ операция(A) $\rightarrow$ inf(set$_x$(алгстепень$(a,f,x)\in B$ & $x-$ натуральное))|card(носитель(A)))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 4.

Проверочный оператор "усмгруппа"

1. Группа комплексных чисел по умножению.

   группа(комплумнож)

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Циклическая группа.

   $\forall_{Aa}$(циклгруппа(A,a) $\rightarrow$ группа(A))

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2.

3. Группа целых чисел по сложению.

   группа(целыеслож)

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Группа вещественных чисел по сложению.

   группа(вещслож)

   Уровень срабатывания равен 1.

5. Подгруппа.

   $\forall_{GH}(\text{подгруппа}(H, G) \to \text{группа}(\text{Подгруппа}(H, G)))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

6. Группы перестановок.

   $\forall_a(\text{группа}(\text{перестановки}(a)))$

   $\forall_a(\text{группа}(\text{четнперестановки}(a)))$

   $\forall_a(\text{группа}(\text{Перестановки}(a)))$

   Уровень срабатывания равен 1.

7. Группа невырожденных матриц.

   $\forall_{an}(n - \text{натуральное} \to \text{группа}(\text{матрумнож}(a, n)))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3.5 Примеры задач по общей алгебре, на которых проводилось обучение решателя

Чтобы лучше представлять себе, как работают перечисленные выше приемы, рассмотрим три простых примера.

1. Исследовать свойства алгебраической операции:

   $f = \lambda_{xy}(\text{нод}(x, y), x - \text{натуральное} \ \& \ y - \text{натуральное})$

   Задача формализуется как задача на описание, имеющая условия "f–функция" и "$f = \lambda_{xy}(\text{нод}(x, y), x-$натуральное & $y-$натуральное)". Единственной посылкой служит логическая константа "истина". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "исследовать", "операция", "неизвестные f".

   Первым шагом является переход к задаче на исследование, посылками которой служат перечисленные выше условия и посылки задачи на описание. Цели - "неизвестные f", "исследовать" и "операция".

   Далее срабатывает прием, проверяющий коммутативность операции. Он обращается к вспомогательной задаче на описание, имеющей те же посылки, что и задача на исследование, и единственное условие "коммутативно(f)". Цели этой задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "проверка", "вспомописание". Ответом будет служить логическая константа, так что прием распознает как коммутативность, так и некоммутативность.

   Для решения указанной задачи на описание будут предприняты последовательные попытки доказать и опровергнуть коммутативность. Первая из них порождает вспомогательную задачу на доказательство, имеющую те же самые посылки и условие, что и задача на описание.

   Предпринимается расшифровка по определению условия задачи на доказательство, что приводит к новому условию:

   "$\forall_{ab}(a \in \mathbb{N} \ \& \ b \in \mathbb{N} \to f(a, b) = f(b, a))$"

Используя содержащееся в посылках определение функции f, решатель преобразует условие к виду:

$\forall_{ab}$(натуральное(a) & натуральное$(b) \rightarrow$ нод$(a,b) =$ нод$(a,b))$

Последнее сводится к логической константе "истина", и решение задачи на доказательство завершается. Возвращаясь к основной задаче на исследование, решатель вводит новую посылку "коммутативно(f)".

Аналогичным образом усматривается ассоциативность операции f. При проверке сократимости операции, с учетом уже установленной ее коммутативности, рассматривается лишь левая сократимость. Сначала предпринимается попытка ее доказать, но она оказывается неудачной. Тогда вводится задача на доказательство утверждения "$\neg$(левсократимо(f))". После расшифровки по определению и простых преобразований возникает условие "$\exists_{abc}(\neg(a = b)$ & $-$нод$(a,c)+$ нод$(b,c) = 0$ & a – натуральное & b – натуральное & c – натуральное)".

Далее решается задача на описание, условиями которой служат конъюнктивные члены подкванторного утверждения, а неизвестные суть a, b, c. Так как требуется лишь установить существование их допустимых значений, все эти неизвестные - несущественные. Предпринимаются попытки подбора значений. Чтобы исключить выражение "нод(a,c)", полагается $a = 1$. После этого усматривается существование такого натурального c что нод$(b,c) = 1$. Наконец, для удовлетворения требования $\neg(a = b)$ полагается $b = a + 1$. В результате утверждение "$\neg$(левсократимо(f))" оказывается доказанным, и утверждение "$\neg$(сократимо(f))" заносится в посылки основной задачи на исследование.

Аналогичным образом устанавливаются утверждения "$\neg$(обратимо(f))", "$\forall_x(x-$ натуральное $\rightarrow$ идемпотент$(x,f))$" и "$\forall_a(\neg$(Единица(a,f)))". По завершении цикла проверок основных свойств, все найденные утверждения передаются в список условий решаемой задачи на описание, и ответ формируется как конъюнкция этих условий.

2. Доказать, что объединение двух подгрупп является подгруппой тогда и только тогда, когда одна из них содержится в другой. Задача формализуется как задача на доказательство, имеющая единственное условие:

   $\forall_{xy}$(подгруппа(x,A) & подгруппа$(y,A) \rightarrow$ подгруппа$(x \cup y, A) \leftrightarrow x \subseteq y \vee y \subseteq x)$

   Посылкой задачи служит утверждение "группа(A)".

   После серии логических преобразований кванторная эквивалентность приобретает вид конъюнкции трех кванторных импликаций:

   $\forall_{xy}(\neg(x \subseteq y)$ & $x - \mathrm{set}$ & $y - \mathrm{set}$ & подгруппа(x,A) & подгруппа(y,A) & подгруппа$(x \cup y, A) \rightarrow y \subseteq x)$

   $\forall_{xy}(x - \mathrm{set}$ & $y - \mathrm{set}$ & $x \subseteq y$ & подгруппа(x,A) & подгруппа$(y,A) \rightarrow$ подгруппа$(x \cup y, A))$

   $\forall_{xy}(x - \mathrm{set}$ & $y - \mathrm{set}$ & $y \subseteq x$ & подгруппа(x,A) & подгруппа$(y,A) \rightarrow$ подгруппа$(x \cup y, A))$

   Эти импликации доказываются последовательно независимыми задачами на доказательство.

   В первой из них, прежде всего, исключаются избыточные антецеденты "$x-\mathrm{set}$" и "$y-\mathrm{set}$". Затем вводится задача с посылками "$\neg(x \subseteq y)$", "подгруппа(x,A)", " подгруппа(y,A)", "подгруппа$(x \cup y, A)$", "группа(A)" и условием "$y \subseteq x$".

В этой задаче срабатывает прием, усматривающий посылку "подгруппа($x \cup y, A$)", и предпринимающий попытку сначала маскимально развернуть ее "по определениям", упростить, а затем снова свернуть. Кванторная импликация "$\forall_{ab}(a \in x {\cup} y \ \& \ b \in x {\cup} y \rightarrow$ операция$(A)(a, b) \in x {\cup} y)$" после цепочки несложных преобразований приводится к паре кванторных импликаций: $\forall_{ab}(a \in y \ \& \ b \in x \cup y \rightarrow$ операция$(A)(a, b) \in x \cup y)$; $\forall_b(\neg(b \in x) \ \& \ biny \rightarrow x \subseteq y)$. Вторая из них сразу заменяется на "$x \subseteq y \ \vee \ y \subseteq x$". С учетом наличия в контексте отрицания первого дизъюнктивного члена, остается лишь утверждение $y \subseteq x$. Первая кванторная импликация, после дальнейшей расшифровки по определениям, преобразуется в константу "истина". Таким образомЮ посылка "подгруппа($x \cup y, A$)" после развертки - свертки дает включение "$y \subseteq x$", которое заносится в посылки и завершает доказательство первой части. Вторая и третья части очевидны, так как здесь объединение множеств совпадает с одним из них.

3. Доказать, что если две нормальные подгруппы пересекаются по единице, то любой элемент одной из них перестановочен с любым элементом другой. Имеем задачу на доказательство с посылками "группа(G)", "нормподгруппа(A, G)", "нормподгруппа(B, G)", "$f =$ операция(G)" и "$A \cap B = \{$единица$(f)\}$". Условием задачи служит утверждение "$\forall_{xy}(x \in A \ \& \ y \in B \rightarrow f(x, y) = f(y, x))$".

   Прежде всего, равенство для операции группы переориентируется: "операция$(G) = f$". Таким образом, далее в задаче все выражения "операция(G)" будут заменяться на переменную f.

   Затем выводятся посылки "подгруппа(A, G)" и "подгруппа(B, G)".

   Текущая задача на доказательство сводится к другой, посылки которой пополнены антецедентами "$x \in A$", "$y \in B$"доказываемой кванторной импликации, а условием служит ее консеквент "$f(x, y) = f(y, x)$".

   Предпринимается группировка неединичных множителей доказывпемого равенства в левой части: "$f(y, x,$ обрэлемент$(f(x, y), f)) =$ единица(f)".

   Элемент,обратный к произведению, заменяется на произведение обратных элементов: "$f(y, x, f($обрэлемент$(y, f),$ обрэлемент$(x, f))) =$ единица(f)".

   Выводятся посылки "обрэлемент$(y, f) \in B$", "обрэлемент$(x, f) \in A$". Условие нормальности подгруппы дает новую посылку: "$f(y, x,$ обрэлемент$(y, f)) \in A$", и далее выводится "$f(y, x,$ обрэлемент$(y, f),$ обрэлемент$(x, f)) \in A$". Аналогично выводятся посылки "$f(x,$ обрэлемент$(y, f),$ обрэлемент$(x, f)) \in B$", "$f(y, x,$ обрэлемент$(y, f),$ обрэлемент$(x, f)) \in B$".

   Наконец, используется посылка, указывающая, что подгруппы пересекаются по единице, и выводится следствие: "$f(y, x,$ обрэлемент$(y, f),$ обрэлемент$(x, f)) =$ единица(f)". Это и завершает доказательство.

Приведем еще несколько примеров задач на группы, по которым предпринималось обучение решателя, не разбирая ход их решения:

1. Проверить, является ли группой множество взаимно-однозначных отображений конечного множества на себя относительно операции умножения отображений.

2. Определить, замкнуто ли множество транспозиций на множестве $\{1, \ldots, n\}$, $n \geq 3$.

3. Описать все группы, для которых отображение $x \to x^2$ является гомоморфизмом.

4. Определить порядок элемента $i/2 - \sqrt{3}/2$ в группе комплексных чисел по умножению.

5. Найти порядок элемента x^k, если порядок элемента x равен n.

6. Порядок циклической группы равен p^n, где p - простое. Найти число элементов, порядок которых равен p^m, где $m \leq n$ - натуральное.

7. В неодноэлементной группе порядок каждого неединичного элемента равен натуральному числу m. Доказать, что m простое.

8. Доказать, что в конечной абелевой группе существует элемент, порядок которого равен периоду группы.

9. Найти правые смежные классы группы перестановок порядка n по подгруппе перестановок, сохраняющих элемент n.

10. Непустое подмножество K носителя группы обладает тем свойством, что для любых его элементов x, y, z элемент $xy^{-1}z$ снова лежит в K. Доказать, что K является правым смежным классом относительно некоторой подгруппы.

Как уже говорилось, обучение решателя задачам по общей алгебре находится на начальной стадии. Предлагаемая серия приемов лишь иллюстрирует особенности проработки данной предметной области.

Глава 4

Приемы по комплексному анализу

Обучение решателя комплексному анализу проводилось по стандартным задачам вычислительного характера, взятым из различных учебных пособий. Теоретические задачи пока не рассматривались.

4.1 Логические символы, используемые решателем в комплексном анализе

Хотя вещественные числа и отождествляются в решателе с подмножеством комплексных чисел, имеющих нулевую мнимую часть, для обозначения основных комплекснозначных операций вводятся двойники логических символов, обозначающих вещественнозначные операции. Название такого двойника получается из названия соответствующего вещественного оригинала изменением первой буквы слова на большую. Например, "плюс" преобразуется в "Плюс", "дробь" - в "Дробь", "синус" - в "Синус" и т.д.

4.1.1 Общие понятия, связанные с комплексными числами

Утверждение "комплексное(a)" означает, что a есть комплексное число. Утверждение "Комплексное(a)" обозначает, что a есть либо комплексное число, либо элемент "плюсбеск" расширенной комплексной плоскости.

Выражение "комплексные" обозначает множество комплексных чисел. Выражение "комплекснполе" обозначает поле комплексных чисел.

Выражение "вещественнаячасть(a)" обозначает вещественную часть комплексного числа a. Выражение "мнимаячасть(a)" обозначает мнимую часть комплексного числа a. Если мнимая часть равна нулю, то комплексное число совпадает со своей вещественной частью и является вещественным. Выражение "Вещественнаячасть(a)" обозначает матрицу, образованную вещественными частями элементов матрицы a. Выражение "Мнимаячасть(a)" обозначает матрицу, образованную мнимыми частями элементов матрицы a.

Выражение "мнимаяединица" обозначает мнимую единицу. Формульный редактор прорисовывает ее обычным образом, как несколько стилизованную букву "i".

Выражение "Модуль(a)" обозначает модуль комплексного числа a. Выражение "аргумент(a)" обозначает главное значение аргумента комплексного числа a которое берется из промежутка $(-\pi, \pi]$. Выражение "Аргумент(a)" обозначает множество всех значений аргумента комплексного числа a. Для нормировки аргументов введено выражение "нормарг(x)", представляющее собой величину, отличающуюся от вещественного x на кратное двух пи и находящуюся в промежутке $(-\pi, \pi]$.

Выражение "сопряженное(a)" обозначает комплексное число, сопряженное числу a.

Выражение "комплформа(A)" обозначает множество комплексных чисел $a + bi$, у которых пары (a, b) принадлежат множеству A, либо комплексное число $a+bi$ определяемое парой A вида (a, b).

Выражение "вещформа(A)" обозначает множество пар (a, b) вещественных чисел, для которых число $a+bi$ принадлежит множеству A, либо пару (a, b), определяемую комплексным числом $A = a + bi$.

Утверждение "комплцелое(a)" означает, что a есть комплексное число с целочисленными вещественной и мнимой частями. Выражение "вычеткомпл(a_1, a_2)" обозначает вычет комплексного целого числа a_1 по натуральному модулю a_2 (берутся вычеты по модулю a_2 вещественной и мнимой частей).

Выражение "комплграница(A)" обозначает множество граничных точек подмножества A комплексной плоскости.

Выражение "Плюс$(a_1, \ldots, a_n)$" обозначает сумму комплексных чисел $a_1, \ldots, a_n$. Эта сумма прорисовывается формульным редактором так же, как вещественная. Для уточнения следует переходить к текстовому представлению термов. Его же можно использовать для коррекции введенных формульным редактором комплекснозначных выражений. Впрочем, предусмотрена и некоторая автоматическая коррекция - для тех случаев, когда комплекснозначный случай легко усматривается из контекста

Выражение "Минус(a)" обозначает комплексное число, получаемое из a изменением знака.

Выражение "Умножение$(a_1, \ldots, a_n)$" обозначает произведение комплексных чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Выражение "Дробь(a_1, a_2)" обозначает частное от деления комплексного числа a_1 на ненулевое комплексное число a_2.

Выражение "Степень(a_1, a_2)" обозначает результат возведения комплексного числа a_1 в комплексную степень a_2. Берется главное значение степени. Чтобы рассматривать все значения степени, введено также выражение "ветвьстепени(a_1, a_2, a_3)". Оно обозначает значение a_3 - й ветви a_2 -й степени комплексного числа a_1. Здесь a_3 - произвольное целое; при $a_3 = 0$ имеем главное значение степени.

Выражения "Синус(a)", "Косинус(a)", "Тангенс(a)" и "Котангенс(a)" обозначают, соответственно, синус, косинус, тангенс и котангенс комплексного числа a.

Выражение "Логарифм(a_1, a_2)" обозначает логарифм комплексного числа a_2 по комплексному основанию a_1. Берется главное значение. Выражение "Натурлог(a_1, a_2)" обозначает значение a_2-й ветви комплексного натурального логарифма комплексного числа a_1. Здесь a_2 - произвольное целое, причем $a_2 = 0$ дает главное значение логарифма.

Выражения "Гипсинус(a)", "Гипкосинус(a)", "Гиптангенс(a)", "Гипкотангенс(a)" обозначают, соответственно, гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс комплексного числа a.

Выражения "Арксинус(a)", "Арккосинус(a)", "Арктангенс(a)", "Арккотангенс(a)" обозначают, соответственно, арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс комплексного числа a. Берутся главные значения. Выражения "ветвьарксинуса(a_1, a_2)", "ветвьарккосинуса(a_1, a_2)", "ветвьарктангенса(a_1, a_2)" и "ветвьарккотангенса(a_1, a_2)" обозначают, соответственно, значение a_2-й ветви арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса комплексного числа a_1. Ветви нумеруются целыми числами; в случае синуса и косинуса четные и нечетные номера соответствуют знакам "плюс" либо "минус" для радикала под логарифмом.

Выражения "Аркгипсинус(a)", "Аркгипкосинус(a)", "Аркгиптангенс(a)", "Аркгипкотангенс(a)" обозначают, соответственно, гиперболические арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс комплексного числа a. Берутся главные значения. Выражения "ветвьаркгипсинуса(a_1, a_2)", "ветвьаркгипкосинуса(a_1, a_2)", "ветвьаркгиптангенса(a_1, a_2)" и "ветвьаркгипкотангенса(a_1, a_2)" обозначают, соответственно, значение a_2-й ветви гиперболических арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса комплексного числа a_1. Ветви нумеруются целыми числами; в случае синуса и косинуса четные и нечетные номера соответствуют знакам "плюс" либо "минус" для радикала под логарифмом.

Выражение "Суммавсех(a)" обозначает сумму значений комплекснозначной функции a на ее конечной области определения. Выражение "Произведениевсех(a)" обозначает произведение значений комплекснозначной функции a на ее конечной области определения. Эти выражения прорисовываются формульным редактором так же, как их вещественные аналоги.

4.1.2 Понятия, связанные с кривыми на комплексной плоскости

Утверждение "комплкрив(a_1, a_2, a_3)" означает, что a_1 есть незамкнутая кусочно-гладкая ориентированная кривая на комплексной плоскости, имеющая своим началом точку a_2, а концом - точку a_3.

Выражение "комплотрезок(a_1, a_2)" обозначает множество комплексных чисел, принадлежащих отрезку с комплексными концами a_1 и a_2. Выражение "комплинтервал(a_1, a_2)" обозначает множество комплексных чисел, принадлежащих интервалу с комплексными концами a_1 и a_2.

Выражение "Комплотрезок(a_1, a_2)" обозначает ориентированный комплексный отрезок с началом a_1 и концом a_2.

Выражение "комплпуть(a)" обозначает ориентированную кривую на комплексной плоскости, возникающую при последовательном прохождении комплексных ориентированных кривых набора a.

Выражение "Оркривая(a)" обозначает ориентированную кривую на комплексной плоскости, определяемую заданной на вещественном промежутке комплекснозначной функцией a. Направление прохождения кривой соответствует возрастанию аргумента.

Выражение "Оркрив(a_1, a_2)" обозначает ориентированную замкнутую кривую на комплексной плоскости, получаемую из неориентированной кривой a_1 выбором ориентации a_2. Значение 1 означает движение против часовой стрелки, значение -1 - движение по часовой стрелке.

Выражение "Ориент(a)" обозначает направление ориентации замкнутой ориентированной кривой a на комплексной плоскости. Если кривая обходится против часовой стрелки, это направление равно 1, иначе оно равно -1.

Выражение "вещкривая(a_1, a_2)" обозначает ориентированную кривую на геометрической плоскости, определяемую комплексной ориентированной кривой a_1 и заданной на плоскости прямоугольной системой координат a_2.

Выражение "комплточки(a)" обозначает множество точек ориентированной кривой a на комплексной плоскости.

Утверждение "Контур(a_1, a_2)" означает, что область a_2 на комплексной плоскости ограничена замкнутой ориентированной кривой a_1.

Утверждение "комплконтур(a)" означает, что множество a точек комплексной плоскости образует замкнутую неориентированную кусочно-гладкую кривую.

Выражение "комплвнутр(a)" обозначает множество точек комплексной плоскости, расположенных внутри замкнутой неориентированной границы a. Точки самой границы не включаются.

Утверждение "комплодносвязно(a)" означает, что a есть односвязное множество на комплексной плоскости.

4.1.3 Понятия, связанные с функциями комплексного переменного

Утверждение "вещчастьфунк(a_1, a_2)" означает, что a_2 есть функция двух вещественных переменных x, y, являющаяся вещественной частью функции a_1 комплексного переменного $x + iy$.

Утверждение "мнимчастьфунк(a_1, a_2)" означает, что a_2 есть функция двух вещественных переменных x, y, являющаяся мнимой частью функции a_1 комплексного переменного $x + iy$.

Утверждение "вещчастьфункпол(a_1, a_2)" означает, что a_2 есть функция двух вещественных переменных x, y, являющаяся вещественной частью функции a_1 комплексного переменного, имеющего модуль x и аргумент y.

Утверждение "мнимчастьфункпол(a_1, a_2)" означает, что a_2 есть функция двух вещественных переменных x, y, являющаяся мнимой частью функции a_1 комплексного переменного, имеющего модуль x и аргумент y.

Утверждение "дроблинфунк(a)" означает, что a есть дробно-линейная функция комплексного переменного.

Выражение "Предел(a_1, a_2, a_3)" обозначает предел комплекснозначной функции a_1 в точке a_3 асширенной комплексной плоскости, либо предел последовательности a_1 комплексных чисел (в последнем случае $a_3 =$ "плюсбеск"). Указатель a_2 типа предела равен 0, если предел берется без ограничений на окрестность, либо равен тому множеству, по которому берется предел. Формульный редактор прорисовывает комплексный предел так же, как и вещественный.

Утверждение "Бескмалая(a_1, a_2, a_3, a_4)" означает, что отношение функций a_1 и a_2 комплексного переменного стремится к 0 при стремлении аргумента к точке a_3. Указатель a_4 такой же, как и выше.

Утверждение "Сходится(a)" означает, что a есть сходящаяся последовательность комплексных чисел.

Утверждение "Непрерывно(a_1, a_2)" означает, что комплекснозначная функция a_1 непрерывна на множестве a_2. Утверждение "локНепрерывно(a_1, a_2)" означает, что функция a_1 комплексного переменного непрерывна в какой-либо окрестности точки a_2.

Утверждение "точкаветвления(a_1, a_2)" означает, что a_1 есть точка ветвления функции комплексного переменного a_2.

Выражение "комплпроизводная(a_1, a_2)" обозначает значение производной функции a_1 комплексного переменного в точке a_2. Если эта производная не определена, то данным значением является символ "неопред". Выражение "комплПроизводная(a_1, a_2, a_3)" обозначает производную порядка a_2 функции комплексного переменного a_1 в точке a_3.

Утверждение "Дифференцируема(a_1, a_2)" означает, что функция a_1 комплексного переменного дифференцируема в точке a_2. Утверждение "аналитическая(a_1, a_2)" означает, что функция комплексного переменного a_1 является аналитической на множестве a_2.

Утверждение "нетождноль(a)" означает, что аналитическая функция a комплексного переменного не равна тождественно нулю.

Утверждение "нетождконст(a)" означает, что аналитическая функция a комплексного переменного не равна тождественно константе.

Утверждение "устранимособая(a_1, a_2)" означает, что a_1 есть устранимая особая точка функции комплексного переменного a_2.

Утверждение "существособая(a_1, a_2)" означает, что a_1 есть существенно особая точка функции комплексного переменного a_2.

Утверждение "Полюс(a_1, a_2, a_3)" означает, что a_1 есть полюс функции комплексного переменного a_2, порядок которого равен a_3, либо, при $a_3 = 0$, устранимая особая точка.

Утверждение "неизолирособая(a_1, a_2)" озеначает, что a_1 есть неизолированная особая точка функции комплексного переменного a_2.

В задачах используется вспомогательное утверждение "особенность(a_1, a_2)", означающее, что a_2 есть подмножество особых точек функции комплексного переменного, требующее специального уточнения типа.

Выражение "комплинтеграл(a_1, a_2)" обозначает интеграл от функции a_1 комплексного переменного вдоль комплексной ориентированной кривой a_2.

Выражение "комплвычет(a_1, a_2)" обозначает вычет функции a_1 комплексного переменного в точке a_2.

Выражение "радиуссходимости(a)" обозначает радиус сходимости степенного ряда с комплексными коэффициентами, образующими последовательность a.

Выражение "годограф(a_1, a_2)" обозначает кривую (вектор - функцию вещественного параметра), определяющую необходимый для оценки числа корней функции a_1 комплексного переменного на области a_2 образ границы этой области. Выражение "вертикпересеч(a_1, a_2, a_3)" обозначает множество значений параметра годографа функции a_1 относительно a_2 больших a_3, в которых этот годограф пересекает ось ординат. Выражение "горизпересеч(a_1, a_2, a_3)" обозначает множество значений параметра годографа функции a_1 относительно a_2 больших a_3, в которых этот годограф пересекает ось абсцисс.

Утверждение "внутркорни(a_1, a_2)" означает, что функция a_1 комплексного переменного не обращается в 0 на границе области a_2.

Выражение "преобрлапласа(a)" обозначает преобразование Лапласа функции a, определенной на неотрицательной полуоси. Выражение "обрпреобрлапласа(a)" обозначает обратное преобразование Лапласа для функции комплексного переменного a. Считается, что результирующая функция определена на неотрицательной полуоси.

Выражение "вещчастьмн(a)" обозначает вещественнозначный многочлен, получаемый из многочлена a над полем комплексных чисел заменой всех коэффициентов на их вещественные части.

Выражение "мнимчастьмн(a)" обозначает вещественнозначный многочлен, получаемый из многочлена a над полем комплексных чисел заменой всех коэффициентов на их мнимые части.

4.2 Общие приемы, связанные с комплексными числами

В теоремах приемов этого раздела, по умолчанию, будут подразумеваться комплекснозначные версии операций. Случаи вещественнозначных операций будут оговариваться особо.

Приемы, связанные с символом "комплексное"

1. Усмотрение комплексного числа.

   Для усмотрения того, что значением выражения служит комплексное число, может быть использован справочник "тип", анализирующий заголовок выражения. Соответствующий приема имеет заголовок "родобъекта" и основан на теореме "родобъекта(комплексное)". Уровень срабатывания равен 0.

   Если условие на комплексное значение встречается в конъюнкции с условием на другой числовой тип значения, то оно отбрасывается:

   $\forall_z(z$ – комплексное & z – целое $\leftrightarrow z$ – целое$)$

   $\forall_z(z$ – комплексное & z – число $\leftrightarrow z$ – число$)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

2. Обращение к оператору "усмкомплексное".

   $\forall_a(a$ – комплексное $\rightarrow a$ – комплексное$)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Так как непосредственное указание типа значения переменной бывает необходимо для обеспечения сопровождения по о.д.з., применение данного приема, устраняющего утверждения вида "a – комплексное", сопровождается серией ограничений. Прием не применяется к подутверждению условия задачи на описание, у которого a - неизвестная. Он не применяется также к подутверждению условия задачи на описание, снабженному комментарием "серия". Наконец, прием блокируется, если утверждение расположено под квантором существования по переменной a, который, в свою очередь, расположен под описателем "класс". Указатель "новый" блокирует ввод фильтра "новый" при компиляции. Таким образом обеспечиваются повторные попытки усмотрения истинности утверждения при изменениях его контекста. Уровень срабатывания равен 2.

3. Принадлежность множеству комплексных чисел.

   $\forall_a(a \in \mathbb{C} \leftrightarrow a -$ комплексное$)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Усмотрение множества комплексных чисел.

   $\mathrm{set}_z(z -$ комплексное$) = \mathbb{C}$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Усмотрение противоречивых указаний на тип объекта.

   Если в контексте утверждения "$a -$ комплексное", где a - переменная, встречается утверждение $P(a)$, причем справочник "родобъекта" усматривает, что символ P - отличное от символа "комплексное" название типа объекта, а справочник "род" устанавливает отсутствие надтипа "комплексное" типа P, то утверждение заменяется на логческую константу "ложь". Выполняющий данные действия прием имеет заголовок "различимы" и основан на теореме "родобъекта(комплексное)". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(a -$ число $\&$ $b -$ число $\& \neg(c = 0) \rightarrow \neg(a = b + ci))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение a отлично от переменной. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

6. Замена равенства комплексных чисел на два равенства для их вещественной и мнимой частей.

   $\forall_{abcd}(a -$ число $\&$ $b -$ число $\&$ $c -$ число $\&$ $d -$ число $\rightarrow a + bi = c + di$
   $\leftrightarrow a = c \;\&\; b = d)$

   $\forall_{abc}(a -$ число $\&$ $b -$ число $\&$ $c -$ число $\rightarrow a + bi = c \leftrightarrow a = c \;\&\; b = 0)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

7. Условие отличия комплексного числа от нуля.

   $\forall_{ab}(a -$ число $\&$ $b -$ число $\rightarrow \neg(a + bi = 0) \leftrightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Заменяемое утверждение неконстантное. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ab}(\neg(a \cos b + (a \sin b)i = 0) \leftrightarrow \neg(a = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется даже к утверждениям, используемым для сопровождения по о.д.з. Уровень срабатывания равен 0.

8. Усмотрение отличие комплексного числа от нуля.

   $\forall_{az}(a = Im(z)\ \&\ \neg(a = 0) \rightarrow \neg(z = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение z содержит мнимую единицу. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормнимаячасть". Выражение a не содержит символа "мнимаячасть". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

9. Параметрическое задание комплексного числа через модуль и аргумент.

   $\forall_z(z -$ комплексное $\&\ \neg(z = 0) \rightarrow \exists_{ab}(z = a\cos b + (a\sin b)i\ \&\ a -$ число $\&$ $b -$ число $\&\ 0 < a\ \&\ -\pi < b\ \&\ b \leq \pi))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении выражения "аргумент(z)" в условии задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная z - неизвестная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выведенное условие сопровождается комментарием "серия". При наличии в списке условий дизхюнкции прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

10. Параметрическое задание комплексного числа через вещественную и мнимую части.

    $\forall_z(z -$ комплексное $\leftrightarrow \exists_{xy}(x -$ число $\&\ y -$ число $\&\ z = x + iy))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, не находящейся на этапе редактирования ответа. Переменная z - неизвестная, входящая хотя бы в одно уравнение задачи. Существует также условие, содержащее подвыражение "Модуль(a)", где выражение a содержит z. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 5.

11. Устранение квантора существования в стандартном представлении комплексного числа.

    $\forall_z(\exists_{cd}(z = c + di\ \&\ c -$ число $\&\ d -$ число$) \leftrightarrow z -$ комплексное$)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Он не применяется к условиям задач на описание, сопровождаемым комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_z(\exists_{ab}(z = a\exp(bi)\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ 0 < a\ \&\ -\pi < b\ \&\ b \leq \pi) \leftrightarrow$ $z -$ комплексное$)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

12. Устранение квантора общности.

    $\neg(\forall_x(x -$ комплексное $\rightarrow x -$ число$))$

    $\neg(\forall_z(z -$ комплексное$))$

    $\neg(\forall_z(z -$ комплексное $\rightarrow z = a))$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

13. Переход к вещественной варьируемой переменной в кванторной импликации.

    $\forall_{AB}(\forall_{xy}(x$ – комплексное & $A(|x|, y) \to B(|x|, y)) \leftrightarrow$
    $\forall_{xy}(x$ – число & $0 \leq x$ & $A(x, y) \to B(x, y)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A, B функциональные. Указатели "новаргумент" организует проверку того, что переменная x входит в подутверждения $A(\ldots)$, $B(\ldots)$ только под модулем. Указатель "кортежпеременных" разрешает произвольное число переменных в списке y. Уровень срабатывания равен 1.

14. Усмотрение ответа задачи на описание.

    Следующие описания для комплексной неизвестной считаются явными:

    (a) Условие "комплексное(z)", сопровождаемое несколькими утверждениями вида "$\neg(z = a)$". Теорема приема имеет вид "явное(x1 набор(комплексное(x1)) набор(не(равно(x1 x2)))пустоеслово)".

    (b) Условия "комплексное(z)", "$|z + p| < a$", "$b < |z + p|$", сопровождаемые несколькими утверждениями вида "$\neg(z = c)$". Теорема приема имеет вид "явное(x1 набор(комплексное(x1) меньше(Модуль(Плюс(x1 x5))x2) меньше(x3 Модуль(Плюс(x1 x5)))) набор(не(равно(x1 x4)))пустоеслово)".

    (c) Условия "комплексное(z)", "$|z + p| \leq a$", "$b \leq |z + p|$", сопровождаемые несколькими утверждениями вида "$\neg(z = c)$". Теорема приема имеет вид "явное(x1 набор(комплексное(x1) меньшеилиравно(Модуль(Плюс(x1 x5))x2) меньшеилиравно(x3 Модуль(Плюс(x1 x5)))) набор(не(равно(x1 x4)))пустоеслово)".

    Во всех этих случаях любое подмножество списка указанных утверждений тоже считается явным описанием. Для обеспечения немедленного срабатывания, на каждой теореме создано столько версий приема, сколько имеет возможных точек привязки.

15. Подбор примера.

    $\forall_a(a$ – комплексное & $a = i \to \neg(a$ – число))

    Пример имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример", причем a - неизвестная. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "подборзначений". Неизвестная a не встречается в прочих (помимо первого антецедента) условиях задачи. Используется указатель "новый", обеспечивающий повторные попытки срабатывания при любых изменениях списка условий. Уровень срабатывания равен 0.

16. Нормализатор равенств с комплексными числами "нормкомпл".

    Нормализатор аналогичен вещественнозначному нормализатору "нормчисло" и часто используется в приемах, выполняющих эквивалентное преобразование либо вывод следствия, как фоновый нормализатор комплекснозначных равенств.

    (a) Равенство с совпадающими частями.

    $\forall_a(a = a)$

Указатель "эквивалентно" обеспечивает замену равенства на константу "истина".

(b) Сокращение обеих частей равенства на общий ненулевой множитель.

$\forall_{abc}(\neg(a=0) \to ab = ac \leftrightarrow b = c)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "комплексное" обеспечивает игнорирование различия между вещественными и комплексными версиями арифметических операций при идентификации. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Усмотрение ложности равенства при помощи оператора "усмне0".

$\forall_{ab}(\neg(a-b=0) \to \neg(a=b))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. При идентификации равенства не допускается перестановка его частей. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Наличие комментария "вывод" блокирует применение приема. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Равенство с минусом в одной части и нулем в другой.

$\forall_{a}(-a=0 \leftrightarrow a=0)$

Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Отбрасывание минусов в обоих частях равенства.

$\forall_{ab}(-a=-b \leftrightarrow a=b)$

Аналогично предыдущему.

(f) Равенство степени нулю.

$\forall_{ab}(a^b=0 \leftrightarrow a=0)$

Аналогично предыдущему.

(g) Равенство дроби нулю.

$\forall_{ab}(\neg(b=0) \to a=0 \leftrightarrow a/b=0)$

Замена выполняется справа налево. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(h) Равенство произведения нулю.

$\forall_{ab}(ab=0 \leftrightarrow a=0 \ \vee b=0)$

Равенства в заменяющей части обрабатываются тем же нормализатором "нормкомпл", а затем дизъюнкция обрабатывается нормализатором "нормлог". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(i) Перестановка неизвестной части равенства влево.

$\forall_{ab}(a=b \leftrightarrow b=a)$

Выражение b содержит неизвестные текущей задачи, а выражение a - не содержит. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Уровень срабатывания равен 2.

17. Проверочный оператор "усмкомплексное".

Уровни срабатывания приемов равны 1.

   (a) Вещественное число.
   $\forall_a(a -$ число $\to a -$ комплексное$)$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.
   (b) Мнимая единица.
   $i -$ комплексное

Приемы, связанные с символом "вещественнаячасть"

1. Вещественная часть вещественного числа.

   $\forall_a(a -$ число $\to \mathrm{Re}(a) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

2. Вещественная часть чисто мнимого числа.

   $\forall_a(a -$ число $\to \mathrm{Re}(ai) = 0)$

   Аналогично предыдущему.

3. Выражение через сумму числа и сопряженного с ним.

   $\forall_z(\mathrm{Re}(z) = (z +$ сопряженное$(z))/2)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание, имеющей цель "мнимаячасть". Такие задачи возникают при нахождении образов множеств точек комплексной плоскости. Выражение z содержит неизвестные. Среди условий задачи имеется уравнение с неизвестными. Уровень срабатывания равен 3.

4. Минус перед вещественной частью.

   $\forall_z(\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Вещественная часть суммы.

   $\forall_{ab}(\mathrm{Re}(a+b) = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

6. Вещественная часть произведения.

   $\forall_{az}(a -$ число $\to \mathrm{Re}(az) = a\mathrm{Re}(z))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

7. Вещественная часть натуральной степени.

   $\forall_{abcn}(b = |a|\ \&\ c = \arg(a)\ \&\ n -$ натуральное $\to \mathrm{Re}(a^n) = b^n\cos(cn))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Из правые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Выражение b не содержит символа "Модуль", а выражение c - отлично от 0 и не содержит символа "аргумент". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается, что a - вещественное. Если n - десятичная константа, меньшая 5, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

8. Вещественная часть дроби.

$\forall_{ab}(b -$ число $\rightarrow \mathrm{Re}(a/(bi)) = \mathrm{Im}(a)/b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ab}(b -$ число $\rightarrow \mathrm{Re}(a/b) = \mathrm{Re}(a)/b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(c -$ число $\rightarrow \mathrm{Re}(a/(bc)) = \mathrm{Re}(a/b)/c)$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abcd}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ d -$ число $\rightarrow \mathrm{Re}((a+bi)/(c+di)) = (ac+bd)/(c^2+d^2))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "подстановка" разрешает обращение b в ноль. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABabcdepr}(A = a - ce \ \& \ B = b - de \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ p = A \cdot$ сопряженное$(c) +$ $c\cdot$сопряженное$(A) \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ r = (B\cdot$сопряженное$(c)+d\cdot$сопряженное$(A))/p \rightarrow \mathrm{Re}((az+b)/(cz+d)) = e \leftrightarrow |z+r| = |Ad - Bc|/|p|)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на описание, имеющих комментарий (сопряженное y). Такой комментарий используется в задачах, решаемых для отыскания образа множества X при комплексном отображении. Неизвестной служит точка множества X, а y - известный параметр, равный значению отображения в данной точке. Переменная y не входит в выражения a, b, c, d, но входит в z. Первый, второй, четвертый и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Указатель "подстановка" разрешает нулевое значение a. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, применяемая в любых задачах. В ней требуется, чтобы выражения a, b, c, d были константыми, а z - неконстантным. Преобразуемое выражение не расположено внутри выражения "вещформа(...)"; в случае задачи на преобразование максимальный уровень должен быть более 4. Уровень срабатывания этой версии прежний.

$\forall_{ABabcdempr}(A = a - ce \ \& \ B = b - de \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ p = A \cdot$ сопряженное$(c) +$ $c\cdot$сопряженное$(A) \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ r = (B\cdot$сопряженное$(c)+d\cdot$сопряженное$(A))/p \ \&$ $m = \mathrm{Re}(a/c) - e \ \& \ \neg(m = 0) \rightarrow e < \mathrm{Re}((az+b)/(cz+d)) \leftrightarrow$
$0 < (|z+r| - |Ad - Bc|/|p|)\mathrm{sg}(m))$

Аналогично предыдущему; как и выше, созданы две версии приема. Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение нестрогих неравенств"указатель "дробь" - перестановку частей неравенства.

$\forall_{ABabcde}(A = a - ce \ \& \ B = b - de \ \& \ A\cdot$сопряженное$(c) + c\cdot$сопряженное$(A) = 0 \rightarrow \mathrm{Re}((az+b)/(cz+d)) = e \leftrightarrow \mathrm{Re}(A \cdot$ сопряженное$(d) + B \cdot$ сопряженное$(c))\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(A \cdot$ сопряженное$(d) - B \cdot$ сопряженное$(c))\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(B \cdot$ сопряженное$(d)) = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на описание, имеющих комментарий (сопряженное y). Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная y не входит в выражения a, b, c, d, но входит в z.

Указатель "подстановка" разрешает нулевое значение a. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще она версия приема, применяемая в любых задачах. У нее выражения a, b, c, d должны быть константыми, а z - неконстантное. Уровень срабатывания этой версии тот же.

$\forall_{ABabcde}(A = a-ce \ \& \ B = b-de \ \& \ A\cdot\text{сопряженное}(c)+c\cdot\text{сопряженное}(A) = 0 \rightarrow e < \mathrm{Re}((az+b)/(cz+d)) \leftrightarrow 0 < \mathrm{Re}(A\cdot\text{сопряженное}(d)+B\cdot\text{сопряженное}(c))\mathrm{Re}(z)- \mathrm{Im}(A \cdot \text{сопряженное}(d) - B \cdot \text{сопряженное}(c))\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(B \cdot \text{сопряженное}(d)))$

Аналогично предыдущим приемам. Уровень срабатывания равен 1. Созданы две версии.

9. Вещественная часть экспоненты.

   $\forall_{abc}(b = \mathrm{Re}(a) \ \& \ c = \mathrm{Im}(a) \rightarrow \mathrm{Re}(\exp(a)) = \exp(b)\cos c)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения b, c не содержат символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть". Уровень срабатывания равен 1.

10. Линейная комбинация вещественной и мнимой частей дроби.

    $\forall_{abcdepqr}(p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ e = (az+b)/(cz+d) \ \& \ r - \text{число} \rightarrow p\mathrm{Im}(e) + q\mathrm{Re}(e) + r = 0 \leftrightarrow \mathrm{Re}(((qa-pai)z+qb-pbi)/(cz+d)) = -r)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на описание, имеющих комментарий (сопряженное y). Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Переменная y не входит в выражения a, b, c, d, но входит в z. Указатель "подстановка" разрешает обращение a в ноль. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abcdepqr}(p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ e = (az+b)/(cz+d) \ \& \ r - \text{число} \rightarrow 0 < p\mathrm{Im}(e) + q\mathrm{Re}(e) + r \leftrightarrow -r < \mathrm{Re}(((qa-pai)z+qb-pbi)/(cz+d)))$

    Аналогично предыдущему. Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение нестрогих неравенств"указатель "дробь" - перестановку частей неравенства.

11. Неравенство для вещественной части дроби.

    $\forall_{abc}(\mathrm{Re}(a/b) < c \leftrightarrow 0 < c(\mathrm{Re}(b))^2 + c(\mathrm{Im}(b))^2 - \mathrm{Re}(a)\mathrm{Re}(b) - \mathrm{Im}(a)\mathrm{Im}(b))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется при редактировании ответа в задачах на описание, имеющих цель "мнимаячасть". Такая цель используется при нахождении образа множества точек комплексной плоскости. Текущий терм задачи не должен содержать неизвестных. Уровень срабатывания приема равен 3.

12. Условие равенства вещественной части нулю.

    $\forall_{az}(a - \text{число} \ \& \ z - \text{комплексное} \rightarrow \mathrm{Re}(a/z) = 0 \leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_{z}(z - \text{комплексное} \rightarrow \mathrm{Re}(zi) = 0 \leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0)$

    Аналогично предыдущему.

    $\forall_{abcdz}(a - \text{число} \ \&_{-}\text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ z - \text{комплексное} \rightarrow \mathrm{Re}((azi + b)/(cz+d)) = 0 \leftrightarrow bc\mathrm{Re}(z) - ad\mathrm{Im}(z) + bd = 0)$

Прием имеет заголовок "воротерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

13. Усмотрение отличия числа от нуля из неравенства для линейной комбинации вещественной и мнимой частей.

    $\forall_{abpqz}(p\mathrm{Re}(z) + q\mathrm{Im}(z) < 0 \ \& \ ap + bq \leq 0 \to \neg(z + a + bi = 0))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Переменные a, b, p, q идентифицируются с десятичными константами. Уровень срабатывания равен 2.

14. Усмотрение ложности неравенства для вещественной части.

    $\forall_{abcz}(|z + a| < b \ \& \ b + c + \mathrm{Re}(a) < 0 \to \neg(\mathrm{Re}(z) \leq c))$

    $\forall_{abcz}(|z + a| < b \ \& \ b - c + \mathrm{Re}(a) < 0 \to \neg(c + \mathrm{Re}(z) \leq 0))$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "вариант" разрешает нестрогое неравенство в первом антецеденте. Уровень срабатывания равен 2.

15. Декомпозиция условия существования с двумя вещественными параметрами путем раздельного рассмотрения вещественной и мнимой частей.

    $\forall_{ABPQcd}(c -$ число $\& \ d -$ число $\& \ m -$ число $\& \ n -$ число $\to$
    $\exists_{mn}(A = B + cm + dni \ \& \ P(m) \ \& \ Q(n)) \leftrightarrow \exists_m(\mathrm{Re}(A) = \mathrm{Re}(B) + cm \ \& \ P(m)) \ \&$
    $\exists_n(\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B) + dn \ \& \ Q(n)) \ \& \ A -$ комплексное$)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные P, Q функциональные. Уровень срабатывания равен 4.

16. Переход от параметрического описания с комплексным параметром к параметрическому описанию с двумя вещественными параметрами.

    $\forall_P(\exists_z(z-$комплексное $\& \ P(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))) \leftrightarrow \exists_{xy}(x-$число $\& \ y-$число $\& \ P(x, y)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная P функциональная. Переменная z встречается в "$P(\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z))$" только внутри выражений $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$. Уровень срабатывания приема равен 3.

17. Нормализатор общей стандартизации "нормвещественнаячасть".

    (a) Вещественная часть вещественного числа.
    $\forall_a(a -$ число $\to \mathrm{Re}(a) = a)$

    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Заголовок выражения a отличен от символов "Плюс", "Умножение", "Минус". Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Вещественная часть чисто мнимого числа.
    $\forall_a(a -$ число $\to \mathrm{Re}(ai) = 0)$

    Аналогично предыдущему.

(c) Вещественная часть суммы.

$\forall_{ab}(\mathrm{Re}(a+b) = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Re}(b))$

Сумма комплексная; уровень срабатывания равен 1.

(d) Минус под вещественной частью.

$\forall_{z}(\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z))$

Аналогично предыдущему.

(e) Вещественная часть натуральной степени.

$\forall_{abcn}(b = |a| \ \& \ c = \arg(a) \ \& \ n$ – натуральное $\rightarrow \mathrm{Re}(a^n) = b^n \cos(cn))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Правые части первых двух антецедентов обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Выражение b не содержит символа "Модуль", выражение c - отлично от нуля и не содержит символа "аргумент". Не усматривается, что a - число. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Вещественная часть дроби.

$\forall_{ab}(b$ – число $\rightarrow \mathrm{Re}(a/b) = \mathrm{Re}(a)/b)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Вещественная часть экспоненты.

$\forall_{abc}(b = \mathrm{Re}(a) \ \& \ c = \mathrm{Im}(a) \rightarrow \mathrm{Re}(\exp(a)) = \exp(b)\cos(c))$

нтецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения b, c не содержат символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть". Уровень срабатывания равен 1.

(h) Использование посылки.

$\forall_{az}(\mathrm{Re}(z) = a \rightarrow \mathrm{Re}(z) = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть". Уровень срабатывания равен 1.

18. Нормализатор общей стандартизации "нормВещественнаячасть".

В нормализаторе имеется единственный прием, выполняющий переход к матрице вещественных частей:

$\forall_{amn}(\mathrm{Re}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,m\})) = \lambda_{ij}(\mathrm{Re}(a(i,j)), i \in \{1,\ldots,n\}$ $\& \ j \in \{1,\ldots,m\}))$

Указатели "матрица" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" в виде прямоугольных матриц.

Приемы, связанные с символом "мнимаячасть"

1. Минимая часть вещественного числа.

$\forall_{a}(a$ – число $\rightarrow \mathrm{Im}(a) = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

2. Мнимая часть чисто мнимого числа.

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \mathrm{Im}(ai) = a)$

   Аналогично предыдущему.

3. Выражение через разность числа и сопряженного с ним.

   $\forall_z(\mathrm{Im}(z) = (z - \text{сопряженное}(z))/(2i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подвыражению условия задачи на описание, имеющей цель "мнимаячасть". В то же самое условие входит выражение "сопряженное(z)". Задача имеет хотя бы одно уравнение с неизвестными. Уровень срабатывания равен 3.

4. Минус под мнимой частью.

   $\forall_a(\mathrm{Im}(-a) = -\mathrm{Im}(a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Мнимая часть суммы.

   $\forall_{ab}(\mathrm{Im}(a + b) = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

6. Мнимая часть произведения.

   $\forall_{az}(a - \text{число} \rightarrow \mathrm{Im}(az) = a\mathrm{Im}(z))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

7. Мнимая часть дроби.

   $\forall_{ab}(b - \text{число} \rightarrow \mathrm{Im}(a/b) = \mathrm{Im}(a)/b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow \mathrm{Im}(1/z) = -\mathrm{Im}(z)/(|z|^2))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcd}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \rightarrow \mathrm{Im}((a + bi)/(c + di)) = (bc - ad)/(c^2 + d^2))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "подстановка" разрешает нулевое значение b. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABabcdepr}(A = a - cei \;\&\; B = b - dei \;\&\; \neg(c = 0) \;\&\; p = A \cdot \text{сопряженное}(c) - c{\cdot}\text{сопряженное}(A) \;\&\; \neg(p = 0) \;\&\; r = (B{\cdot}\text{сопряженное}(c) - d{\cdot}\text{сопряженное}(A))/p \rightarrow \mathrm{Im}((az + b)/(cz + d)) = e \leftrightarrow |z + r| = |Ad - Bc|/|p|)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Третий и пятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Либо выражения a, b, c, d, e константные, а z - неконстантное, либо заменяемое подвыражение входит в условие задачи на описание, имеющей комментарий (сопряженное y), причем y не входит в $a, , b, c, d, e$ и входит в z. Заменяемое подвыражение не расположено внутри выражения "вещформа(...)". В случае задачи на преобразование максимальный уровень болжен быть больше 4. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABabcdempr}(A = a - cei \ \&\ B = b - dei \ \&\ \neg(c = 0) \ \&\ p = A \cdot \text{сопряженное}(c) - c \cdot \text{сопряженное}(A) \ \&\ \neg(p = 0) \ \&\ r = (B \cdot \text{сопряженное}(c) - d \cdot \text{сопряженное}(A))/p \ \&\ m = \text{Im}(a/c) - e \ \&\ \neg(m = 0) \to e < \text{Im}((az + b)/(cz + d)) \leftrightarrow 0 < (|z + r| - |Ad - Bc|/|p|)\text{sg}(m))$

Аналогично предыдущему. Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение нестрогих неравенств"указатель "дробь" - перестановку частей неравенства.

$\forall_{ABabcde}(A = a - cei \ \&\ B = b - dei \ \&\ A \cdot \text{сопряженное}(c) - c \cdot \text{сопряженное}(A) = 0 \to \text{Im}((az + b)/(cz + d)) = e \leftrightarrow \text{Im}(A \cdot \text{сопряженное}(d) + B \cdot \text{сопряженное}(c))\text{Re}(z) + \text{Re}(A \cdot \text{сопряженное}(d) - B \cdot \text{сопряженное}(c))\text{Im}(z) + \text{Im}(B \cdot \text{сопряженное}(d)) = 0)$

$\forall_{ABabcde}(A = a - cei \ \&\ B = b - dei \ \&\ A \cdot \text{сопряженное}(c) - c \cdot \text{сопряженное}(A) = 0 \to e < \text{Im}((az + b)/(cz + d)) \leftrightarrow 0 < \text{Im}(A \cdot \text{сопряженное}(d) + B \cdot \text{сопряженное}(c))\text{Re}(z) + \text{Re}(A \cdot \text{сопряженное}(d) - B \cdot \text{сопряженное}(c))\text{Im}(z) + \text{Im}(B \cdot \text{сопряженное}(d)))$

Аналогично предыдущему. Антецеденты выделены указателем "идентификатор".

8. Мнимая часть натуральной степени.

   $\forall_{abcn}(b = |a| \ \&\ c = \arg(a) \ \&\ n - \text{натуральное} \to \text{Im}(a^n) = b^n \sin(cn))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Выражение b не содержит символа "Модуль", а выражение c - отлично от 0 и не содержит символа "аргумент". Не усматривается, что a вещественное. Если n - десятичная константа, то ее значение больше 4. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

9. Мнимая часть экспоненты.

   $\forall_{abc}(b = \text{Re}(a) \ \&\ c = \text{Im}(a) \to \text{Im}(\exp a) = \exp(b)\sin(c))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения b, c не содержат символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть". Уровень срабатывания равен 1.

10. Условие равенства мнимой части нулю.

    $\forall_z(z - \text{комплексное} \to \text{Im}(zi) = 0 \leftrightarrow \text{Re}(z) = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

11. Нормализатор общей стандартизации "нормнимаячасть".

    Все приемы нормализатора сpрабывают на уровне 1.

    (a) Мнимая часть вещественного числа.
    $\forall_a(a - \text{число} \to \text{Im}(a) = 0)$
    Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

(b) Мнимая часть чисто мнимого числа.

$\forall_a(a - \text{число} \to \mathrm{Im}(ai) = a)$

Аналогично предыдущему.

(c) Мнимая часть суммы.

$\forall_{ab}(\mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b))$

(d) Минус под мнимой частью.

$\forall_a(\mathrm{Im}(-a) = -\mathrm{Im}(a))$

(e) Мнимая часть натуральной степени.

$\forall_{abcn}(b = |a| \ \& \ c = \arg(a) \ \& \ n - \text{натуральное} \to \mathrm{Im}(a^n) = b^n \sin(cn))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Выражение b не содержит символа "Модуль", а выражение c - отлично от 0 и не содержит символа "аргумент". Не усматривается, что a вещественное. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором.

(f) Мнимая часть дроби.

$\forall_{ab}(b - \text{число} \to \mathrm{Im}(a/b) = \mathrm{Im}(a)/b)$

(g) Мнимая часть экспоненты.

$\forall_{abc}(b = \mathrm{Re}(a) \ \& \ c = \mathrm{Im}(a) \to \mathrm{Im}(\exp a) = \exp(b)\sin(c))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения b, c не содержат символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть".

(h) Использование посылки.

$\forall_{az}(\mathrm{Im}(z) = a \to \mathrm{Im}(z) = a)$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a не содержит символов "мнимаячасть", "вещественнаячасть".

12. Нормализатор общей стандартизации "нормМнимаячасть".

В нормализаторе имеется единственный прием, выполняющий переход к матрице мнимых частей:

$\forall_{amn}(\mathrm{Im}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,m\})) = \lambda_{ij}(\mathrm{Im}(a(i,j)), i \in \{1,\dots,n\}$
$\& \ j \in \{1,\dots,m\}))$

Указатели "матрица" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" в виде прямоугольных матриц.

Приемы, связанные с символом "Модуль"

Комплексный и вещественный модули прорисовываются формульным редкатором одинаковым образом. В данном разделе, если не оговорено обратное, имеется в виду комплексный модуль.

1. Равенство модулю нулю.

$\forall_a(|a| = 0 \leftrightarrow a = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Положительность модуля.

   $\forall_z(0 < |z| \leftrightarrow \neg(z = 0))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3. Усмотрение отличия числа от нуля из отличия от нуля его модуля.

   $\forall_{az}(|z| = a \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow \neg(z = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте, второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{az}(a < |z| \rightarrow \neg(z = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Уровень срабатывания равен 3.

4. Модуль вещественного числа.

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = |a|)$

   Первый модуль комплексный, второй - вещественный. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Вычисление модуля комплексного числа, представленного в стандартной форме.

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow |a + bi/c| = \sqrt{a^2c^2 + b^2}/|c|)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Коэффициенты b, c могут обращаться в единицу. Уровень срабатывания равен 2.

6. Отбрасывание минуса.

   $\forall_a(|-a| = |a|)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{az}(|-z + a| = |z - a|)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Не усматривается, что z вещественное. Либо усматривается, что a вещественное, либо выражение a константное, а z - неконстантное. Уровень срабатывания равен 1.

7. Модуль произведения.

   $\forall_{ab}(|ab| = |a||b|)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

8. Модуль дроби.

   $\forall_{ab}(|a/b| = |a|/|b|)$

   Аналогично предыдущему.

9. Модуль степени с вещественным показателем.

   $\forall_n(n - \text{число} \rightarrow |z^n| = |z|^n)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

10. Модуль сопряженного числа.

    $\forall_z(|\text{сопряженное}(z)| = |z|)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровен срабатывания равен 0.

11. Модуль экспоненты.

    $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to |\exp(a+bi)| = \exp a)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ab}(b - \text{число} \to |\exp(a+bi)| = |\exp(a)|)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \to |\exp(ab)| = |\exp(b)|^a)$

    Аналогично предыдущему.

    $\forall_z(|\exp(z)| = \exp(\text{Re}(z)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подвыражению условия. Уровень срабатывания равен 3.

12. Модуль числа, представленного в тригонометрической форме.

    $\forall_{ab}(|b\cos a + ib\sin a| = |b|)$

    $\forall_{ab}(|b\cos a - ib\sin a| = |b|)$

    $\forall_{ab}(|b\sin a + ib\cos a| = |b|)$

    $\forall_{ab}(|b\sin a - ib\cos a| = |b|)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "комплексное" определяет идентификацию без учета различия между комплексными и вещественными операциями. Уровень срабатывания равен 0.

13. Усмотрение квадрата модуля в сумме квадратов вещественной и мнимой частей.

    $\forall_{ab}(a(\text{Im}(b))^2 + a(\text{Re}(b))^2 = a|b|^2)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на преобразование, имеющих цель "комплексное". Такая цель означает установку на исключение символов "вещественнаячасть", "мнимаячасть". Преобразуемое выражение расположено внутри некоторого логарифма. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abcz}(\neg(c=0) \to c(\text{Re}(z))^2 + a\text{Re}(z) + c(\text{Im}(z))^2 + b\text{Im}(z) = c(|z + a/(2c) + bi/(2c)|)^2 - (a^2+b^2)/(4c))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение расположено внутри равенства либо неравенства. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "подстановка" разрешают нулевые значения коэффициентов a, b. Уровень срабатывания равен 3.

14. Линейная комбинация квадрата модуля, вещественной части и мнимой части.

    $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(c=0) \to a\text{Im}(z) + b\text{Re}(z) + c|z|^2 = c(|z + b/(2c) + ai/(2c)|)^2 - (a^2+b^2)/(4c))$

Прием имеет заголовок "second term". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатели "подстановка" разрешают нулевые значения коэффициентов a, b, причем хотя бы один из этих коэффициентов должен быть отличен от нуля. Уровень срабатывания равен 2.

15. Переход от неравенства для квадрата модуля к неравенству для модуля.

    $\forall_{abc}(0 \leq a \;\&\; 0 \leq b \to a < b(|c|)^2 \leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}|c|)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Допускается перестановка частей неравенств и переход к нестрогим неравенствам. Уровень срабатывания равен 1.

16. Равенство модулей.

    $\forall_{abz}(|z+a| = |z+b| \leftrightarrow 2\mathrm{Re}(b-a)\mathrm{Re}(z) + 2\mathrm{Im}(b-a)\mathrm{Im}(z) + (|a|)^2 - (|b|)^2 = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, b константные, z - неконстантное. Уровень срабатывания равен 2.

17. Неравенство для разности модулей.

    $\forall_{abz}(a-\text{число} \;\&\; b-\text{число} \to 0 < |z+ai|-|z+bi| \leftrightarrow 0 < (\mathrm{Im}(z)-(a+b)/2)\mathrm{sg}(a-b))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{abcdefp}(a-\text{число} \;\&\; b-\text{число} \;\&\; c-\text{число} \;\&\; d-\text{число} \;\&\; e-\text{число} \;\&\; f-\text{число} \;\&\; d < 0 \;\&\; 0 < a \;\&\; 0 < b \;\&\; 0 < e \;\&\; ab + de = 0 \;\&\; p = -(bf + ce)/(2be) \to$
    $0 < a|bz + c| + d|ez + f| \leftrightarrow 0 < (\mathrm{Re}(z) - p)\mathrm{sg}(ec - bf))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Преобразуемое выражение не расположено внутри выражения с заголовком "вещформа". Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{abcd}(a - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; 0 < a \;\&\; 0 < c \;\&\; \neg(a - c = 0) \;\&\; p = a^2 - c^2 \;\&$
    $e = (a^2b - c^2d)/p \to 0 < a|z + b| - c|z + d| \leftrightarrow ac|b - d|/p < \mathrm{sg}(p)|z + e|)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{abhmnpqrsuvz}(m = \mathrm{Re}(a) \;\&\; n = \mathrm{Im}(a) \;\&\; p = \mathrm{Re}(b) \;\&\; q = \mathrm{Im}(b) \;\&$
    $s = -(m + p)/2 \;\&\; r = -(n + q)/2 \;\&\; u = m - p \;\&\; v = n - q \;\&$
    $h = (m^2 + n^2 - p^2 - q^2)/2 \to 0 < |z + a| - |z + b| \leftrightarrow$
    $0 < (u\mathrm{Re}(z) + v\mathrm{Im}(z) + h)\mathrm{sg}(h - pu - qv))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражения a, b не содержат неизвестных, z - неизвестная. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения m, p не содержат символа "вещественнаячасть", а выражения n, q - символа "мнимаячасть". Уровень срабатывания равен 2.

18. Вынесение коэффициента при неизвестной из-под модуля.

    $\forall_{abz}(\neg(a = 0) \to |az + b| = |a||z + b/a|)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание. Выражения a, b не содержат неизвестных, z - неизвестная.

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

19. Параметрическое описание для равенства модуля константе.

    $\forall_{az}(0 \leq a \to z - \text{комплексное } \& \ |z| = a \leftrightarrow \exists_x(x - \text{число } \& \ z = a\exp(ix)))$

    Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Он применяется к паре условий задачи на описание. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит неизвестных, z - неизвестная. На этапе редактирования ответа прием блокируется, если отсутствует условие, содержащее z не в качестве операнда символов "Модуль" либо "комплексное". Заменяющее условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания приема равен 4.

20. Сокращение линейно зависимых модулей.

    $\forall_{abcd}(a|b| - c|d| = 0 \to p|b|^n/(q|d|^n) = pc^n/(qa^n))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, c не содержат символа "Модуль". Разрешаются одновременные перестановки числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 2.

21. Отсечение случаев с помощью неравенства для модуля.

    $\forall_{abcdpz}(|z + c + di| < p \ \& \ 0 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2 - p^2 \to \neg(z = a + bi))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражения a, b, c, d, p константные. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Точка привязки выбрана в первом антецеденте. Указатели "подстановка" разрешают нулевые значения коэффициентов b, d. Уровень срабатывания равен 0.

22. Усмотрение истинности неравенства для модуля.

    $\forall_{abcdpz}((a + c)^2 + (b + d)^2 - p^2 < 0 \ \& \ z = a + bi \to |z + c + di| < p)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения a, b, c, d, p константные; z - неизвестная. Допускается нулевое значение коэффициента d. Уровень срабатывания равен 0.

23. Исключение квантора либо описателя.

    $\forall_a(a - \text{число} \to \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное } \& \ |z| = a) = \emptyset \leftrightarrow a < 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "вариант" разрешает замену равенства для модуля при идентификации на нестрогое неравенство $\leq$. Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_a(a - \text{число} \to \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное } \& \ |z| \leq a \ \& \ \neg(z = 0)) = \emptyset \leftrightarrow a \leq 0)$

    Аналогично предыдущему, но указатель "вариант" разрешает замену нестрогого неравенства под описателем на строгое.

    $\forall_a(a - \text{число} \to \forall_z(z - \text{комплексное} \to \neg(|z| = a)) \leftrightarrow a < 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \forall_z(z - \text{комплексное } \& \ |z| = a \rightarrow z = 0) \leftrightarrow a \leq 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "вариант" разрешает замену равенства для модуля на неравенства $\leq$ либо $<$. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abn}(a - \text{число} \rightarrow \exists_z(z - \text{комплексное } \& \ |z| < a \ \& \ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \neg(z = b(i)))) \leftrightarrow 0 < a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности как конъюнкции. Переменная b функциональная. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(\forall_z(z - \text{комплексное } \& \ |z| \leq a \rightarrow |z| \leq b) \leftrightarrow a \leq b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

24. Исключение несущественной неизвестной.

    $\forall_a(\exists_z(z - \text{комплексное } \& \ |z| \leq a \ \& \ \neg(z = 0)) \leftrightarrow 0 < a)$

    Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими несущественную неизвестную z. Разрешается замена нестрогого неравенства на строгое. Переменная z не входит в выражение a. Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_{abcn}(b - \text{число } \& \ 0 \leq b \rightarrow \exists_z(z - \text{комплексное } \& \ |z| \leq a \ \& \ b < |z| \ \& \ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \neg(z = c(i)))) \leftrightarrow b < a)$

    Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими несущественную неизвестную z. Указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности как конъюнкции. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменная c функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

25. Переход от комплексного параметра к вещественному.

    $\forall_P(\exists_{xy}(P(|x|) \ \& \ x - \text{комплексное}) \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число } \& \ P(x)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет идентификацию внутри заменяемого подтерма выражения "Модуль(x)". Переменная x встречается в подтерме $P(\ldots)$ только под комплексным модулем. Переменная P функциональная. Переменная y идентифицируется со списком переменных, имеющим произвольную длину (включая нулевую). Указатель "обобщподст" отменяет проверку невхождения переменных связывающей приставки в термы, идентифицированные с прочими переменными под квантором существования. Уровень срабатывания равен 2.

26. Нормализатор общей стандартизации "нормМодуль".

    Так как приемы нормализаторы аналогичны приведенным выше приемам сканирования задачи, ограничимся лишь перечислением их названий:

    (a) Вычисление модуля комплексного числа, представленного в стандартной форме.

(b) Модуль числа, представленного в тригонометрической форме.

(c) Модуль произведения.

(d) Модуль дроби.

(e) Модуль степени с вещественным показателем.

(f) Модуль сопряженного числа.

(g) Модуль экспоненты.

(h) Учет равенства из посылок, явно задающего значение модуля.

(i) Модуль вещественного числа.

(j) Отбрасывание минуса.

(k) Символ бесконечности. Теорема приема имеет вид "$|\infty| = \infty$".

Приемы, связанные с символом "аргумент"

Напоним, что главное значение аргумента прорисовывается формульным редактором как $\arg(z)$; полный аргумент - множество всех значений аргумента - обозначается $\mathrm{Arg}(z)$.

1. Аргумент вещественного числа.

   $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \arg(a) = 0)$

   $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ a < 0 \rightarrow \arg(a) = \pi)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \arg(a) = (0 \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } \pi))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

2. Аргумент комплексного числа.

   $\forall_{abc}(a < 0 \ \& \ 0 \leq bc \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \arg(a + bi/c) = \mathrm{arctg}(b/(ac)) + \pi)$

   $\forall_{abc}(a < 0 \ \& \ bc < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \arg(a + bi/c) = \mathrm{arctg}(b/(ac)) - \pi)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ab}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \arg(ai/b) = \mathrm{sg}(ab)\pi/2)$

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{abc}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \arg(a + bi/c) = \mathrm{arctg}(b/(ac)))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

3. Полный аргумент.

   $\forall_a(\mathrm{Arg}(a) = \mathrm{set}_x(\exists_i(i - \text{целое} \ \& \ x = \arg(a) + 2\pi i)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

4. Учет минуса.

   $\forall_{ab}(\arg(a) = b \rightarrow \arg(-a) = (b - \pi \text{ при } 0 < b, \text{ иначе } b + \pi))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор"; его левая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации. Применение приема к содержащему неизвестные подвыражению условия задачи на описание блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

5. Аргумент произведения.

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(ab) = \arg(b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{abc}(c = \arg(a) + arg(b) \rightarrow \arg(ab) = (c - 2\pi \text{ при } 0 \leq c - \pi, \text{ иначе }$
   $(c + 2\pi \text{ при } \pi + c < 0, \text{ иначе } c)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Не усматривается, что a либо b вещественное. Выражение c не содержит символа "аргумент". Применение приема к содержащему неизвестные подвыражению условия задачи на описание блокируется. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 3. В ней отброшено требование на a, b.

6. Аргумент дроби.

   $\forall_{abc}(c = \arg(a) - \arg(b) \rightarrow \arg(a/b) = (c - 2\pi \text{ при } 0 \leq c - \pi, \text{ иначе }$
   $(c + 2\pi \text{ при } \pi + c < 0, \text{ иначе } c)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение c не содержит символа "аргумент". Применение приема к содержащему неизвестные подвыражению условия задачи на описание блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

7. Аргумент целочисленной степени.

   $\forall_{mnz}(n - \text{целое} \ \& \ m = n \arg(z) \rightarrow \arg(z^n) = m + 2\pi[(\pi - m)/(2\pi)])$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение m не содержит символа "аргумент". Уровень срабатывания равен 1.

8. Аргумент корня.

   $\forall_{nz}(n - \text{натуральное} \rightarrow \arg(z^{1/n}) = \arg(z)/n)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

9. Аргумент экспоненты.

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \arg(\exp(a + bi)) = b + 2\pi[(\pi - b)/(2\pi)])$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

10. Аргумент суммы.

    $\forall_{abcde}(\arg(-b) = c \ \& \ |b| = d \ \& \ e = -b \rightarrow \arg(a+b) = c \ \& \ \neg(a = e) \leftrightarrow$ $\arg(a) = c \ \& \ d < |a|)$

    Прием имеет заголовок "воройтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная a идентифицируется с непустой суммой всех неконстантных слагаемых. Остаточная сумма b не тождественно нулевая. Уровень срабатывания равен 0.

11. Аргумент числа, представленного в тригонометрической форме.

    $\forall_{ab}(0 \leq b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(a \sin b - (a \cos b)i) =$ $(b - \pi/2 \text{ при } 0 < 2b + \pi, \text{ иначе } b + 3\pi/2))$

    $\forall_{ab}(0 \leq b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(-a \sin b - (a \cos b)i) =$ $(3\pi/2 - b \text{ при } 0 < 2b - \pi, \text{ иначе } -(\pi/2 + b)))$

    $\forall_{ab}(0 \leq b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(a \sin b + (a \cos b)i) =$ $(\pi/2 - b \text{ при } 0 < 2b + \pi, \text{ иначе } -(b + 3\pi/2)))$

    $\forall_{ab}(0 \leq b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(-a \cos b + (a \sin b)i) =$ $(\pi - b \text{ при } 0 \leq b, \text{ иначе } -(b + \pi)))$

    $\forall_{ab}(0 \leq b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(-a \cos b - (a \sin b)i) =$ $(b - \pi \text{ при } 0 < b, \text{ иначе } b + \pi))$

    $\forall_{ab}(0 \leq b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(-a \sin b + (a \cos b)i) =$ $(b + \pi/2\text{при } 0 \leq 2b - \pi, \text{ иначе } b - 3\pi/2))$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "комплексное" определяет игнорирование различий между вещественными и комплексными операциями при идентификации. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ab}(0 \leq b + \pi \ \& \ 0 < \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(a \cos b - (a \sin b)i) = -b)$

    $\forall_{ab}(0 < b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(a \cos b + (a \sin b)i) = b)$

    Аналогично предыдущему.

12. Равенство аргумента заданному числу.

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \arg(a + bi) = 0 \leftrightarrow b = 0 \ \& \ 0 < a)$

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \arg(a + bi) = \pi/2 \leftrightarrow a = 0 \ \& \ 0 < b)$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_z(\arg(z) = 0 \leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \ \& \ 0 < \mathrm{Re}(z))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание. Выражение z не содержит символа "комплпроизводная". Уровень срабатывания равен 1.

13. Переход от неравенства для модуля аргумента к двум неравенствам для аргумента.

    $\forall_{afP}(\mathrm{set}_x(|\arg(f(x))| < a \,\&\, P(x)) = \mathrm{set}_x(-a < \arg(f(x)) \ \& \ \arg(f(x)) < a \,\&\, P(x)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, P функциональные. Разрешается связывающая приставка произвольной длины. Возможен случай нестрогого неравенства. Уровень срабатывания равен 2.

14. Свертка арктангенса в аргумент.

    $\forall_a(\mathrm{arctg}(\mathrm{Im}(a)/\mathrm{Re}(a)) = \arg(a))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в условиях задачах на преобразование, имеющих цель "комплексное". Такая цель дает установку на исключение символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть". Уровень срабатывания равен 1.

15. Восстановление числа по модулю и аргументу.

    $\forall_{abx}(|x| = a \ \&\ \arg(x) = b \leftrightarrow x = a\exp(bi))$

    Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и применяется к паре условий задачи на описание. Выражения a, b не содержат неизвестных, а выражение x - содержит. Уровень срабатывания равен 1.

16. Переход к параметрическому заданию области.

    $\forall_P(\mathrm{set}_z(z - \text{комплексное} \ \&\ \neg(z = 0) \ \&\ P(\arg(z), z)) =$
    $\mathrm{set}_z(\exists_{ar}(r - \text{число} \ \&\ 0 < r \ \&\ a - \text{число} \ \&\ z = r\exp(ai) \ \&\ -\pi < a \ \&$
    $a \leq \pi \ \&\ P(a, r\exp(ai)))))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Терм "$P(\arg(z), z)$" не содержит символов "вещественнаячасть", "мнимаячасть", но содержит символ "аргумент". Заменяемое выражение является вторым операндом терма "образ$(f, \ldots)$", где f не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

17. Исключение параметрического задания области.

    $\forall_{Aa}(\mathrm{set}_z(\exists_{xy}(z = x\exp(iy) \ \&\ x - \text{число} \ \&\ y - \text{число} \ \&\ 0 < x \ \&\ a < y \ \&$
    $y < a + 2\pi \ \&\ A(x))) = \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное} \ \&\ \neg(z = 0) \ \&$
    $\neg(\arg(z) = \text{нормарг}(a)) \ \&\ A(|z|)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Преобразуемое выражение не является вторым операндом символа "образ". Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{cd}(0 < c + \pi \ \&\ 0 \leq \pi - d \rightarrow \mathrm{set}_z(\exists_{ab}(z = a\exp(bi) \ \&\ c < b \ \&\ b < d \ \&\ 0 < a \ \&$
    $a - \text{число} \ \&\ b - \text{число})) = \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное} \ \&\ \neg(z = 0) \ \&\ c < \arg(z) \ \&$
    $\arg(z) < d))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Преобразуемое выражение не является вторым операндом символа "образ". Уровень срабатывания равен 3.

18. Явное разрешение неравенства относительно аргумента.

    $\forall_{abz}(0 < a \rightarrow 0 < a \cdot \arg(z) + b \leftrightarrow -b/a < \arg(z))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению квантора существования либо описателя "класс" по переменной z. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Разрешаются переход к нестрогим неравенствам и перестановка частей неравенства. Уровень срабатывания равен 2.

19. Переход от комплексного параметра к вещественному.

    $\forall_P(\exists_{xy}(P(\arg(x)) \ \&\ \neg(x = 0) \ \&\ x - \text{комплексное}) \leftrightarrow \exists_{xy}(x \in (-\pi, \pi] \ \&\ P(x)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст(...)" определяет идентификацию в заменяемом терме подвыражения "$\arg(x)$". Переменная P функциональная. Нормализатор "извлечение" преобразует выражение "$P(\ldots))$" к такому виду, в котором переменная x втречается только под символом "arg". Переменная y идентифицируется с кортежем связанных переменных, имеющим произвольную (в том числе нулевую) длину. Указатель "обобщподст" блокирует проверку невхождения переменных связывающей приставки квантора существования в термы, идентифицированные с прочими переменными под этим квантором. Уровень срабатывания равен 2.

20. Использование символа "нормарг" при вычислении аргумента неизвестного выражения.

    (a) Величина от минус пи до пи.

    $\forall_a(0 < a + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - a \rightarrow \text{нормарг}(a) = a)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_a(\text{нормарг}(\arg(a)) = \arg(a))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Устранение минуса.

    $\forall_a(\arg(-a) = \text{нормарг}(\arg(a) + \pi))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подвыражению условия задачи на описание. Уровень срабатывания равен 3.

    (c) Устранение умножения.

    $\forall_{ab}(\arg(ab) = \text{нормарг}(\arg(a) + \arg(b)))$

    Аналогично предыдущему.

    (d) Устранение дроби.

    $\forall_{ab}(\arg(a/b) = \text{нормарг}(\arg(a) - \arg(b)))$

    Аналогично предыдущему.

    (e) Вложенные вхождения.

    $\forall_{ab}(\text{нормарг}(a + \text{нормарг}(b)) = \text{нормарг}(a + b))$

    $\forall_{ab}(\text{нормарг}(a - \text{нормарг}(b)) = \text{нормарг}(a - b))$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

    (f) Простейшие уравнения.

    $\forall_{ab}(\text{нормарг}(-a) = b \leftrightarrow \text{нормарг}(a) = \text{нормарг}(-b))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подутверждению условия задачи на описание. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abc}(\text{нормарг}(a + b) = c \leftrightarrow \text{нормарг}(a) = \text{нормарг}(c - b))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение a идентифицируется с непустой подсуммой всех неизвестных слагаемых. Остаточное выражение b ненулевое; c не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

   (g) Нормализатор общей стандартизации "нормнормарг".

   Пока нормализатор имеет единственный прием:

   $\forall_a(0 < a + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - a \rightarrow$ нормарг$(a) = a)$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

21. Нормализатор общей стандартизации "нормаргумент".

    Так как приемы нормализаторы аналогичны приведенным выше приемам сканирования задачи, ограничимся лишь перечислением их названий:

    (a) Аргумент вещественного числа.
    (b) Аргумент комплексного числа.
    (c) Аргумент числа, представленного в тригонометрической форме.
    (d) Учет минуса.
    (e) Аргумент произведения.
    (f) Аргумент дроби.
    (g) Аргумент степени с целочисленным показателем.
    (h) Аргумент корня.
    (i) Аргумент экспоненты.
    (j) Учет равенства из посылок. Теорема приема имеет вид "$\forall_{ab}(a = b \rightarrow \arg(a) = \arg(b))$". Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a неконстантное, а выражение a - константное.

Приемы, связанные с символом "сопряженное"

1. Сопряженное к вещественному числу.

   $\forall_a(a -$ число $\rightarrow$ сопряженное$(a) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Сопряженное к чисто мнимому числу.

   $\forall_a(a -$ число $\rightarrow$ сопряженное$(ai) = -ai)$

   Аналогично предыдущему.

3. Сопряженное к сумме.

   $\forall_{ab}($сопряженное$(a + b) =$ сопряженное$(a) +$ сопряженное$(b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

4. Сопряженное к произведению.

   $\forall_{ab}($сопряженное$(ab) =$ сопряженное(a)сопряженное$(b))$

   Аналогично предыдущему.

5. Сопряженное к дроби.

   $\forall_{ab}($сопряженное$(a/b) =$ сопряженное$(a)/$сопряженное$(b))$

   Аналогично предыдущему.

6. Сопряженное к натуральной степени.

   $\forall_{an}(n-$натуральное & $a-$комплексное $\to$ сопряженное$(a^n) =$ сопряженное$(a)^n)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

7. Сумма числа и сопряженного с ним числа.

   $\forall_{ab}(a-$ комплексное & $b-$ комплексное $\to ab+$ сопряженное$(a)b = 2\mathrm{Re}(a)b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В случае задачи на описание, имеющей цель "мнимаячасть", прием блокируется, если выражение a содержит неизвестные и в условиях задачи присутствует уравнение с неизвестными. Он также блокируется в случае задач на преобразование, имеющих цель "мнимаячасть". Напомним, что цель "мнимаячасть" указывает на задачу нахождения образа множества точек комплексной плоскости. Уровень срабатывания равен 0.

8. Разность числа и сопряженного с ним числа.

   $\forall_{abc}(b+c=0 \to ab+$ сопряженное$(a)c = 2i\mathrm{Im}(a)b)$

   Аналогично предыдущему.

9. Произведение числа на сопряженное с ним число.

   $\forall_a(a\cdot$ сопряженное$(a) = |a|^2)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcdn}(n-$ целое & $b=ci$ & $d=a^2+c^2 \to (a+b)^n(a-b)^n = d^n)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два других - выделены указателем "идентификатор". В случае задачи на преобразование, решаемой для разложения на комплексные множители, прием блокируется. Выражение d не имеет вида суммы. Преобразуемое выражение не является сомножителем числителя либо знаменателя дроби. Указатель "комплексное" обеспечивает идентификацию с игнорированием различия между комплексными и вещественными операциями. Уровень срабатывания равен 1.

10. Равенство сопряженного числа нулю.

    $\forall_z($сопряженное$(z) = 0 \leftrightarrow z=0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

11. Простейшее уравнение.

    $\forall_{az}($сопряженное$(z) = a \leftrightarrow z =$ сопряженное$(a))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение z содержит неизвестные, а выражение a - не содержит. Уровень срабатывания равен 0.

12. Равенство числа сопряженному с ним.

    $\forall_z(z-$ сопряженное$(z) = 0 \leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". В случае условия задачи на описание, имеющей цель "мнимаячасть", прием блокируется, если z содержит неизвестные, причем существует другое условие задачи на описание, представляющее собой равенство с неизвестными. Уровень срабатывания равен 1.

13. Нормализатор общей стандартизации "нормсопряженное".

    В нормализаторе имеется всего три приема, аналогичных приведенным выше приемам сканирования задачи: "сопряженное к вещественному числу", "сопряженное к чисто мнимому числу" и "сопряженное к сумме.

Приемы, связанные с символом "мнимаяединица"

1. Степень с целым показателем.

    $i^0 = 1$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{mnk}(n = 2m + k \rightarrow i^n = (-1)^m i^k)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная n идентифицируется с целочисленной константой, отличной от 0. Антецедент выделен указателем "программа". Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_{mn}(n - \text{целое} \rightarrow i^{2n+m} = (-1)^n i^m)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

2. Упрощение антецедента.

    $\forall_{AB}(\forall_{xy}(x\text{−комплексное} \,\&\, ix\text{−число} \,\&\, A(x,y) \rightarrow B(x,y)) \leftrightarrow \forall_{xy}(x\text{−число} \,\&\, A(ix,y) \rightarrow B(ix,y)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A, B функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с комплексной суммой

Если не оговаривается противное, имеются в виду комплексные версии арифметических операций.

1. Лексикографическое упорядочение операндов.

    Теорема приема имеет вид "коммутативно(Плюс)". Заголовок приема - "лексупорядочение". Уровень срабатывания равен 0.

2. Устранение вложенных сумм.

    Теорема приема та же самая. Заголовок - "спускоперандов". Уровень срабатывания равен 0.

3. Сложение с нулем.

    $\forall_a(a + 0 = a)$

    Приема имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Переход к вещественной сумме.

   $\forall_{ab}(a$ – число & b – число $\rightarrow a + b = a + b)$

   Левая сумма комплексная, правая - вещественная. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Введен ускоряющий фильтр, проверяющий отсутствие в сумме мнимых единиц. Уровень срабатывания равен 1.

5. Условие вещественнозначности комплексной суммы.

   $\forall_{ab}(a$ – число $\rightarrow (a + b)$ – число $\leftrightarrow b$ – число$)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

6. Приведение подобных членов с числовыми коэффициентами.

   $\forall_{abcd}(d = b + c \rightarrow ab + ac = ad)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". b, c - десятичные числа. Выражение a не содержит символов бесконечности и символа "O". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "комплексное" допускает как вещественные, так и комплексные версии операций умножения и изменения знака при идентификации. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcdefgh}(f = ae + cd$ & $h = ce \rightarrow ab/(cg) + db/(eg) = (f/h) \cdot (b/g))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, c, d, e идентифицируются с десятичными числами. Выражения b, g не содержат символов "O". Антецеденты выделены указателем "программа". Используется указатель "комплексное", допускающий как комплексные, так и вещественные версии операций умножения, деления и изменения знака при идентификации. Первая дробь в заменяющем терме вещественная. Заметим, что вещественная дробь, в качестве сомножителя комплексного произведения, обычно не преобразуется в комплексную дробь. Она играет роль вещественного коэффициента. Лишь на этапе редактирования ответа происходит устранение таких коэффициентов. Уровень срабатывания приема равен 2.

   $\forall_{abcde}(e = a + cd \rightarrow ab/c + db = e/c \cdot b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, c, d идентифицируются с десятичными числами. Выражение b не содержит символа "O". Антецедент выделен указателем "программа". Используется указатель "комплексное", допускающий как комплексные, так и вещественные версии операций умножения, деления и изменения знака при идентификации. Дробь в заменяющем терме вещественная. Уровень срабатывания равен 3.

7. Приведение подобных членов с неизвестными.

   $\forall_{abc}(ab + ac = a(b + c))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Тип текущей задачи отличен от "доказать". Выражение a содержит неизвестные, а выражения b, c - не содержат. Отсутствует цель (независит ...), содержащая переменные термов b, c. Переменные заменяемого терма не связаны внешними кванторами либо описателями. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcd}((ad)b + ac = a(db + c))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Операция "умножение" в произведении ad - вещественная, внешнее умножение - комплексное. Заметим, что общая стандартизация предусматривает группировку вещественных множителей комплексного произведения под знак вещественного умножения. В остальном прием аналогичен предыдущему.

$\forall_{abcde}((ad)b + (ae)c = a(db + ce))$

Аналогично предыдущему. Произведения ad, ae - вещественные.

8. Приведение подобных членов для вещественных коэффициентов комплексных слагаемых.

   $\forall_{abcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d = b + c \rightarrow ab + ac = ad)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, третий - выделен указателем "идентификатор". Его операция сложения вещественная. Число слагаемых выражения d меньше суммарного числа слагаемых выражений b, c. Уровень срабатывания равен 4.

9. Вынесение за скобку общего минуса всех слагаемых.

   $\forall_{ab}(-a - b = -(a + b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Сумма расположена под операцией, обеспечивающей дальнейшее продвижение минуса наружу либо его исключение - "Минус", "Умножение", "Дробь", "Модуль", "Синус", и т.п. Используется указатель "набор(второйтерм)", обеспечивающий одновременную обработку любого числа слагаемых, а также указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 0.

10. Группировка чисто мнимых слагаемых.

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ai + bi = (a + b)i)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

11. Решение уравнения "$X + A = B$".

    $\forall_{abc}(a + b = c \leftrightarrow a = c - b)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование. Выражение a идентифицируется с непустой суммой всех содержащих неизвестные слагаемых рассматриваемой части равенства. Остаточная сумма b непустая. Выражение c не содержит неизвестных. При редактировании ответа задачи на описание прием блокируется. Заменяемое утверждение может располагаться только внутри подутверждений с заголовками "и", "или", "существует". К параметрическим описаниям прием не применяется. Если решается задача на исследование, имеющая цель "известно", либо текущий терм задачи имеет заголовок "или", то уровень срабатывания равен 0. Иначе он равен 1.

12. Группировка всех ненулевых слагаемых в одной части равенства.

    $\forall_{ab}(a - \text{комплексное} \ \& \ b - \text{комплексное} \rightarrow a = b \leftrightarrow a - b = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b отличны от константы 0. Дополнительно накладываются следующие ограничения:

(a) Либо заменяемое равенство расположено под корневым отрицанием, либо оно расположено в условии, либо оно является посылкой задачи на исследование.

(b) Выполнено хотя бы одно из следующих условий:

  i. Текущая задача имеет тип "доказать".

  ii. Заменяемое равенство не содержит неизвестных. Не выполняются следующие требования: одна из частей равенства - переменная, не входящая в другую часть; либо текущая задача на описание имеет цель "редакция", либо равенство не расположено под корневым отрицанием.

  iii. Текущая задача на описание имеет цель "редуцирование". Такая цель используется при выводе теорем. Заменяемое равенство расположено под отрицанием. Либо это отрицание является антецедентом кванторной импликации, либо задача имеет цель "наборантецедентов".

  iv. Заменяемое равенство расположено внутри подтерма, заголовок которого отличен от символов "существует", "длялюбого", "и", "или", "не".

(c) Если имеет место этап редактирования ответа задачи на описание, то отсутствует комментарий "стандменьше".

(d) Если текущая задача имеет тип "описать", то она не имеет цели "известно ...".

(e) Если текущая задача имеет тип "исследовать", то она не имеет целей "анализфразы", "текстоваязадача", возникающих при работе с текстами естественного языка.

(f) Если одна из частей заменяемого равенства - переменная, то она не связана внешним квантором либо описателем.

(g) Либо текущая задача имеет тип "доказать", а заменяемое равенство расположено в условии задачи и его переменные не связаны внешними кванторами и описателями, либо неверно, что одна из частей этого равенства - невырожденный числовой атом, не входящий в другую часть. Данный фильтр необходим для блокировки приема в случае вещественных a, b.

(h) Либо текущая задача имеет тип "доказать", а заменяемое равенство расположено в ее условии и его переменные не связаны внешними кванторами и описателями, либо заменяемое равенство неконстантное, либо ни одна из частей этого равенства не является константным невырожденным числовым атомом, причем неверно, что одна из частей содержит невырожденный константный числовой атом, а другая - не содержит.

(i) Для одной из частей равенства не усматривается, что ее значение - двоичное.

(j) Если текущая задача имеет тип "преобразовать", то она не имеет цели "нормтеорема". Такая цель используется при редактировании теорем, генерируемых системой логического вывода.

(k) Если текущая задача имеет тип "исследовать", то она не имеет цели "теоремаприема". Кроме того, текущая посылка не имеет комментария "исключ". Оба ограничения связаны с процедурами вывода теорем.

Уровень срабатывания равен 0.

13. Группировка в одной части всех слагаемых уравнения.

    $\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a - b = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование, не имеющих цели "известно". Выражения a и b содержат неизвестные, причем ни одно из этих выражений не является неизвестной, не входящей в другое выражение. Заголовком выражения a служит один из символов "Плюс", "Дробь", "Степень", "Умножение", "Минус". Допустимыми заголовками надтермов заменяемого утверждения являются символы "существует", "и", "или". Не имеет места этап редактирования ответа задачи на описание. Уровень срабатывания приема равен 1.

14. Обращение к оператору "видУмножение" для разложения на множители.

    $\forall_{abc}(c = a + b \rightarrow a + b = c)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование, имеющей цель "разложитьнамножители". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "видУмножения" разложения на множители комплекснозначных выражений. Либо, с точностью до знака "Минус", выражение c имеет своим заголовком один из символов "Дробь", "Умножение", "Степень", либо оно короче исходной суммы и не имеет заголовка "Плюс". Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, ориентированная на вещественную сумму $a+b$. Задача, кроме цели "разложитьнамножители", имеет цель "видУмножение", явно указывающую на рассмотрение комплексных множителей. Либо, с точностью до знака, выражение c имеет своим заголовком один из символов "Дробь", "Умножение", "Степень", "дробь", "умножение", "степень", либо оно короче исходной суммы и не имеет заголовков "Плюс", "плюс". Уровень срабатывания прежний.

15. Символ бесконечности.

    $\forall_a(a - \text{комплексное} \rightarrow a + \infty = \infty)$

    $\forall_{ab}(a - \text{комплексное} \rightarrow a + b = \infty \leftrightarrow b = \infty)$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

16. Исключение квантора существования.

    $\forall_{uv}(v - \text{комплексное} \rightarrow \exists_x(x - \text{число} \ \& \ u = v + x) \leftrightarrow u - \text{комплексное} \ \& \ \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

17. Нормализатор общей стандартизации "нормПлюс".

    Так как приемы аналогичны приведенным выше приемам сканирования задачи, приведем только их названия:

    (a) Сложение с нулем.
    (b) Переход к вещественной сумме.
    (c) Устранение вложенных сумм.
    (d) Лексикографическое упорядочение операндов.
    (e) Приведение подобных членов с числовыми коэффициентами.

18. Нормализатор сокращенной записи "упрощПлюс".

    (a) Устранение вложенной операции вещественного сложения.
    $\forall_{abc}((a+b)+c=a+b+c)$
    Внутренняя сумма в левой части вещественная, внешняя - комплексная. Уровень срабатывания равен 1.
    (b) Устранение вложенных сумм. Уровень срабатывания равен 1.
    (c) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 3.
    (d) Усмотрение экспоненты.
    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a\cos b + ia\sin b = a\exp(bi))$
    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

19. Нормализатор раскрывания скобок "стандПлюс".

    В тех случаях, когда прием аналогичен уже приведенному выше приему сканирования задачи, ограничиваемся его названием.

    (a) Устранение вложенных сумм и произведений.
    (b) Лексикографическое упорядочение операндов.
    (c) Сложение с нулем.
    (d) Раскрывание скобок.
    $\forall_{abc}(ab+ac=a(b+ac))$
    Замена происходит справа налево. Указатель "набор(первыйтерм)" обеспечивает одновременную обработку любого числа слагаемых. Создана еще одна версия приема, имеющая указатель "комплексное" - для игнорирования различия между комплексными и вещественными операциями. Для ее срабатывания необходимо, чтобы нормализатор имел комментарии "матрмногочлен" и "переменная x", где x входит в $b+c$. Уровни срабатывания обеих версий равны 1.
    (e) Возведение в четную степень.
    $\forall_{abmn}(n=2m \rightarrow (a+b)^n=(a^2+2ab+b^2)^m)$
    Замена выполняется слева направо. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Антецедент выделен указателем "программа". Основание степени в заменяющем терме обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандПлюс". Уровень срабатывания равен 1.

(f) Возведение в нечетную степень.

$\forall_{abmn}(n = 2m + 1 \to (a + b)^n = (a^2 + 2ab + b^2)^m)(a + b)$

Аналогично предыдущему.

(g) Внесение минуса под знак суммы.

$\forall_{ab}(-(a + b) = -a - b)$

Уровень срабатывания равен 1.

(h) Преобразование дроби с суммой в числителе к виду суммы дробей.

$\forall_{abc}(\neg(c = 0)\ \&\ c -$ число $\to a/c + b/c = (a + b)/c)$

Замена выполняется справа налево. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Используются указатели "набор(первыйтерм)" и "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(i) Усмотрение вещественного дробного слагаемого.

$\forall_{abc}(a -$ число $\&\ b -$ число $\to a/b + c = a/b + c)$

В заменяемой части дробь комплексная, а в заменяющей - вещественная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если имеются комментарии "НормМногочлен" и "переменная x", где x входит в дробь a/b, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Приведение подобных членов.

$\forall_{abcde}(e = a + cd \to ab/c + bd = e/c \cdot b)$

Операция сложения комплексная, остальные операции консеквента - вещественные. Переменные a, c, d идентифицируются с десятичными числами. Антецедент выделен указателем "программа". Выражение b не содержит символа "O". Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, в которой все операции консеквента, кроме дроби в заменяющей части, комплексные. Уровень срабатывания тот же.

$forall_{abcdefgh}(f = ae + cd\ \&\ h = ce \to ab/(cg) + bd/(eg) = (f/h) \cdot (b/g))$

Первая дробь в заменяющей части вещественная, остальные операции консеквента - комплексные. Переменные a, c, d, e идентифицируются с десятичными числами. Выражения b, g не содержат символа "O". Антецеденты выделены указателем "программа". Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, в которой операция сложения комплексная, а остальные операции консеквента - вещественные. Уровень срабатывания тот же.

$\forall_{abcd}(d = b + c \to ab + ac = ad)$

Все операции консеквента комплексные, но используется указатель "комплексное", обеспечивающий игнорирование различия между комплексными и вещественными операциями при идентификации. Переменные b, c идентифицируются с десятичными константами. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение a не содержит символов "O", а также символов бесконечности. Уровень срабатывания равен 4.

(k) Нормализация дробных слагаемых.

$\forall_{abc}(a \cdot (b/c) = ab/c)$

Используется указатель "комплексное". Выражение a не содержит символа "мнимаяединица". Уровень срабатывания равен 3.

(l) Преобразование к виду суммы тригонометрических выражений.

Обычно данное преобразование выполняется при наличии комментария "видумножение". Случай, когда он не требуется, оговаривается особо.

i. Произведение синусов.
$\forall_{abcd}(c = a - b \;\&\; d = a + b \rightarrow \sin a \sin b = \cos c/2 - \cos d/2)$
Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

ii. Произведение синуса на косинус.
$\forall_{abcd}(c = a - b \;\&\; d = a + b \rightarrow \sin a \cos b = \sin d/2 + \sin c/2)$
Аналогично предыдущему.
$\forall_{ab}(b = 2a \rightarrow \sin a \cos a = \sin b/2)$
Антецедент выделен указателем "идентификатор". Не требуется наличие комментария "видумножение", но требуется, чтобы некоторое слагаемое рассматриваемой суммы имело своим сомножителем "Синус(b)". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания приема равен 1.

iii. Произведение косинусов.
$\forall_{abcd}(c = a - b \;\&\; d = a + b \rightarrow \cos a \cos b = \cos c/2 + \cos d/2)$
Аналогично произведению синусов.

iv. Квадрат синуса.
$\forall_{abc}(a = 2b \rightarrow (\sin c)^a = (1 - \cos(2c))^b/2^b)$
Переменная a идентифицируется с натуральной константой. Антецедент выделен указателем "программа". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

v. Квадрат косинуса.
$\forall_{abc}(a = 2b \rightarrow (\cos c)^a = (1 + \cos(2c))^b/2^b)$
Аналогично предыдущему.

vi. Куб синуса.
$\forall_{abc}(a = 3b \rightarrow (\sin b)^3 = (3 \sin b - \sin a)/4)$
Антецедент выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

vii. Куб косинуса.
$\forall_{abc}(a = 3b \rightarrow (\cos b)^3 = (3 \cos b + \cos a)/4)$
Аналогично предыдущему.

viii. Понижение степени синуса.
$\forall_{ab}((\sin a)^b = (\sin a)^{b-2}/2 - (\sin a)^{b-2} \cos(2a)/2)$
Переменная b идентифицируется с натуральной константой, большей 3. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

ix. Понижение степени косинуса.
$\forall_{ab}((\cos a)^b = (\cos a)^{b-2}/2 + (\cos a)^{b-2} \cos(2a)/2)$
Аналогично предыдущему.

20. Синтезатор деления многочленов с комплексными коэффициентами "частноеМногочленов".

Синтезатор реализует утверждение "частноеМногочленов(a, b, c, d)". Входные данные суть комплексные многочлены a, b, заданные через описатели "отображение" и рассматриваемые как функции комплексного переменного. Выходные данные суть неполное частное c и остаток d, заданные в таком же формате. Уровни срабатывания приемов равны 1.

(a) Степень делимого меньше степени делителя.
$\forall_{abcdefgh}(a = \lambda_x(bx^c + f(x), x - \text{комплексное})$ &
$d = \lambda_x(ex^g + h(x), x - \text{комплексное})$ & $0 < g - c \rightarrow$
$\text{частноеМногочленов}(a, d, \lambda_x(0, x - \text{комплексное}), a))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Указатели "сммногочлен" определяют идентификацию переменных a, d, f, h с многочленами от переменной x, заданными в виде термов "отображение(...)". Фактически, программа приема находит наборы коэффициентов этих многочленов для последовательных степеней переменной. При этом первые два антецедента выделяют старший член многочлена и сумму остальных членов. Используется указатель "комплексное".

(b) Степень делимого не меньше степени делителя.
$\forall_{abcdefghiju}(a = \lambda_x(bx^c + f(x), x - \text{комплексное})$ &
$d = \lambda_x(ex^g + h(x), x - \text{комплексное})$ & $i = c - g$ & $0 \leq i$ & $\neg(e = 0)$ &
$\text{частноеМногочленов}(\lambda_x(f(x) - (bx^i h(x)/e), x - \text{комплексное}), d, u, j) \rightarrow$
$\text{частноеМногочленов}(a, d, \lambda_x(b/e \cdot x^i + u(x), x - \text{комплексное}), j))$

Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор", четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Шестой антецедент реализует рекурсивное обращение. Указатели "сммногочлен" определяют идентификацию переменных a, d, f, h с многочленами от переменной x. Указатель "функция(u, x)" определяет идентификацию переменной u с термом "отображение(x...)". Это позволяет компилятору извлечь значение $u(x)$ как последний операнд данного терма. Степень c старшего члена многочлена a отлична от нуля. Используется указатель "комплексное".

(c) Две константы.
$\forall_{ab}(\neg(b = 0) \rightarrow \text{частноеМногочленов}(\lambda_x(a, x - \text{комплексное}),$
$\lambda_x(b, x - \text{комплексное}), \lambda_x(a/b, x - \text{комплексное}), \lambda_x(0, x - \text{комплексное})))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

21. Нормализатор преобразования выражения к виду комплексного многочлена от заданной переменной "НормМногочлен".

Нормализатору передается комментарий (переменная x), и он предпринимает попытку преобразовать выражение к стандартному виду комплексного многочлена - сумме произведений попарно различных степеней переменной x на коэффициенты, не содержащие x. Нормализатор корневой, т.е. приемы применяются только ко всему преобразуемому терму, а не к его собственным подтермам.

(a) Внесение минуса под знак суммы.
$\forall_{ab}(-a - b = -(a + b))$

Замена выполняется справа налево. Указатель "набор(первыйтерм)" определяет одновременную обработку любого числа слагаемых. Используется также указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(b) Приведение подобных членов.

$\forall_{abcdnx}(ax^n/c + bx^n/d = (a/c + b/d)x^n)$

Имеется комментарий (переменная x). Переменная n идентифицируется с натуральной константой, возможно, равной единице. Выражения a, b, c, d не содержат x. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcdnx}(i \cdot (ax^n/c) + bx^n/d = (i \cdot (a/c) + b/d)x^n)$

Аналогично предыдущему.

$\forall_a(a + 0 = a)$

Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Раскрывание скобок.

$\forall_{abc}(ab + ac = a(b + c))$

Замена выполняется справа налево. Имеется комментарий (переменная x), где x встречается как в a, так и в $b + c$. Указатель "набор(первыйтерм)" определяет применимость приема к любому числу слагаемых. Используется также указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcd}(a(b + c) + d = ab + ac + d)$

Имеется комментарий (переменная x), где x входит в $b + c$. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abkn}(n = 2k \rightarrow (a + b)^n = (a + b)^k(a + b)^k)$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой, большей 2. Антецедент выделен указателем "программа". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abn}((a + b)^n = (a + b)(a + b)^{n-1})$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой, большей 1. Имеется указатель (переменная x), где x входит в $a + b$. Имеется также указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Отбрасывание высших степеней.

Комментарий (степень m) инициирует отбрасывание степеней, больших m. Например, такая ситуация может сложиться при получении первых членов разложения в степенной ряд.

$\forall_{abcnx}(ax^n/c + b = b)$

Имеется комментарий (степень m). Переменная n идентифицируется с натуральной константой, большей m. Имеется также комментарий (переменная x), где x не входит в a, c. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Преобразование дроби с суммой в числителе к виду суммы дробей.

$\forall_{abcde}(e(a + b)/c + d = ae/c + be/c + d)$

Имеется комментарий (переменная x), где x входит в $a + b$. Используется указатель "комплексное".

(f) Устранение вложенных сумм.

Созданы два приема с заголовками "замена(спускоперандов НормМногочлен)", имеющие теоремы "коммутативно(Плюс)" и "коммутативно(плюс)". Уровень срабатывания равен 1. Кроме того, создан прием с теоремой:

$\forall_{abc}((a+b)+c=a+b+c)$

Здесь сумма $a+b$ вещественная, а остальные суммы - комплексные. Уровень срабатывания прежний.

(g) Переход к вещественной сумме.

$\forall_{av}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow a+b=a+b)$

Левая сумма комплексная, а правая - вещественная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "набор(первыйтерм)" обеспечивает применимость приема к любому числу слагаемых. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "Минус"

1. Двойной минус.

   $\forall_a(--a=a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Вещественный операнд.

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -a=-a)$

   Левый минус комплексный, правый - вещественный. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Вещественное значение.

   $\forall_a(a - \text{комплексное} \rightarrow -a - \text{число} \leftrightarrow a - \text{число})$

   Аналогично предыдущему.

4. Внесение минуса под знак суммы.

   $\forall_{ab}(-(a+b)=-a-b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

5. Уравнение $-X=A$.

   $\forall_{ab}(a=-b \leftrightarrow b=-a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование. Выражение b содержит неизвестные, а выражение a - не содержит. Не имеет места этап редактирования ответа задачи на описание. Заголовками надтермов заменяемого терма могут быть только символы "и", "или", "существует". Преобразуемый терм задачи не расположен внутри квантора существования, не являющегося параметрическим описанием и не выделенного комментарием "серия". Если решается задача на исследование, имеющая цель "известно", либо текущий терм задачи имеет заголовок "или", то уровень срабатывания равен 0. Иначе он равен 1.

6. Исключение минуса из параметрического описания.

   $\forall_{abc}(\exists_n(n - \text{целое}\ \&\ a=-(nc)b) \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое}\ \&\ a=(nc)b))$

В произведении "nc" берется символ вещественного умножения, прочие операции - комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормМинус".

   Так как приемы нормализатора воспроизводят одноименные приемы сканирования задачи, ограничимся перечислением их названий.

   (a) Двойной минус.
   (b) Вещественный операнд.
   (c) Внесение минуса под знак суммы.

8. Нормализатор "упрощМинус".

   Приемы нормализатора обеспечивают внесение минуса в сомножитель вида $(A - B)$.

   $\forall_{abcde}(a - \mathrm{rational}\ \&\ \neg(\text{числитель}(a) - \text{четное})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{четное}) \to -((b-c)^a d/e) = (c-b)^a d/e)$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Обращение знаменателя в единицу не допускается. Используется указатель "комплексное".

   $\forall_{abcd}(a - \mathrm{rational}\ \&\ \neg(\text{числитель}(a) - \text{четное})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{четное}) \to -((b-c)^a d) = (c-b)^a d)$

   $\forall_{abcde}(a - \mathrm{rational}\ \&\ \neg(\text{числитель}(a) - \text{четное})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{четное}) \to -b/(c(d-e)^a) = b/(c(e-d)^a))$

   Аналогично первому приему.

Приемы, связанные с символом "Умножение"

1. Устранение вложенных умножений.

2. Лексикографическое упорядочение операндов.

3. Вещественные множители.

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to ab = ab)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Левое умножение комплексное, правое - вещественное. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Сомножители не имеют своим заголовком символ "Плюс". Уровень срабатывания равен 1.

4. Множитель единица.

   $\forall_a(a - \text{комплексное} \to 1 \cdot a = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Множитель ноль.

   $\forall_a(a \cdot 0 = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

6. Условие вещественнозначности комплексного произведения.

   $\forall_a(a - \text{число} \to ai - \text{число} \leftrightarrow a = 0)$

   Прием имеет заголовок "вторoйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \to ab - \text{число} \leftrightarrow b - \text{число} \ \vee \ a = 0)$

   Прием имеет заголовок "вторoйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

7. Вынесение минуса за знак умножения.

   $\forall_{ab}((-a)b = -ab)$

   Прием имеет заголовок "вторoйтерм". Указатель "вариант" разрешает как комплексную, так и вещественную версию левого минуса. Уровень срабатывания равен 0.

8. Группировка вещественных множителей.

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to abc = (ab)c)$

   Произведение ab вещественное, остальные символы умножения - комплексные. Прием имеет заголовок "вторoйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочным оператором. Сомножители a, b не имеют заголовка "Плюс". В случае задачи на преобразование, имеющей комментарий "длина", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

9. Получение явного выражения для известного параметра из линейного соотношения.

   $\forall_{abc}(\neg(a = 0) \to ab + c = 0 \leftrightarrow b = -(c/a))$

   Прием имеет заголовок "вторoйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, не содержащего неизвестных. Это подутверждение - либо корневое, либо является конъюнктивным членом дизъюнктивного члена условия. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная b идентифицируется с переменной, не входящей в выражения a, c. Уровень срабатывания равен 1.

10. Раскрывание скобок.

    $\forall_{abc}(c = a + b \to a + b = c)$

    Прием имеет заголовок "вторoйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "комплексное". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "стандПлюс". Преобразуемое выражение имеет сомножителем некоторого своего слагаемого степень суммы, показателем которой является натуральная константа (возможно, равная единице). Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 4.

11. Равенство произведения нулю.

    $\forall_{ab}(ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". В условии задачи на описание, имеющей цель "свертка", либо в не содержащем неизвестных условии задачи на описание, имеющей цель "соединение", прием блокируется. Прием применяется даже к утверждениям, используемым для сопровождения по о.д.з. Если утверждение расположено в посылке под корневым отрицанием, либо является условием задачи на описание, имеющей цель "или", то уровень срабатывания равен 0. Иначе он равен 2. Напомним, что цель "или" блокирует свертку дизъюнкций при редактировании ответа.

12. Уравнения.

    (a) Решение уравнения $AX = B$.

    $\forall_{abz}(z$ – комплексное & $\neg(a = 0) \to az = b \leftrightarrow z = b/a)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение z идентифицируется с непустым произведением всех содержащих неизвестные сомножителей. Выражение b не содержит неизвестных. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

    $\forall_{abz}(az = b \leftrightarrow \neg(a = 0)$ & $z = b/a \ \vee \ a = 0$ & $b = 0)$

    Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 1.

    (b) Раскрывание скобок с неизвестными слагаемыми.

    $\forall_{abcdfg}(f = a(b + c)^d \to a(b + c)^d = g \leftrightarrow f = g)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение $b + c$ содержит неизвестные. Переменная d идентифицируется с натуральной константой, меньшей 6 и,возможно, равной единице. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "стандПлюс". Выражение g не содержит неизвестных и отлично от 0. Либо задача имеет не менее двух неизвестных, либо при раскрывании скобок максимальная глубина вхождений неизвестной уменьшается, либо показатель степени равен единице, а оба сомножителя линейны по некоторой неизвестной. Либо число неизвестных равно 1, либо выражение a не имеет своим сомножителем степень с неизвестным основанием и дробным показателем. Либо a, либо d отлично от единицы. Задача не имеет цели (известно ...). Используется указатель "комплексное". Если число неизвестных задачи более единицы, либо сумма в основании степени имеет дробное слагаемое, то уровень срабатывания равен 2. Иначе он равен 3.

    $\forall_{abcdefg}(f = a(b + c)^d + e \to a(b + c)^d + e = g \leftrightarrow f = g)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение $b + c$ содержит неизвестные. Переменная d идентифицируется с натуральной константой, меньшей 6 и,возможно, равной единице. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "стандПлюс". Выражение g не содержит неизвестных. Выражение a не имеет своим сомножителем степень с неизвестным основанием и дробным показателем. Выражение e не тождественно нулевое и не имеет дробных слагаемых. Либо a, либо d отлично от единицы. Задача не имеет целей (известно ...), (независит ...). Используется указатель "комплексное". Если число неизвестных задачи более единицы, либо сумма в основании степени имеет дробное слагаемое, то уровень срабатывания равен 2. Иначе он равен 3.

(c) Разложение на множители разности частей уравнения.

$\forall_{abc}(c = a - b$ & a – комплексное & b – комплексное $\rightarrow a = b \leftrightarrow c = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, не имеющей целей вида (известно ...) и (независит ...). Не имеет места этап редактирования ответа. Не усматривается, что обе части уравнения вещественные. Выражение a содержит неизвестные и отлично от переменной. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "видУмножение". Следующие два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Либо выражение b ненулевое, либо a не имеет своим заголовком символы "Умножение", "Степень", "Дробь". Выражение c, с точностью до знака, имеет своим заголовком символ "Степень" либо "Умножение". Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Выражение неизвестной из линейного уравнения в задаче с целью "пример".

$\forall_{abcx}(x$ – комплексное & $\neg(a = 0) \rightarrow ax + b = c \leftrightarrow x = (c - b)/a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x идентифицируется с неизвестной, не входящей в выражения a, b, c. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Раскрывание скобок с мнимой единицей.

$\forall_{abcdpq}(a(b + ic) + d = p + iq$ & p – число & q – число $\rightarrow a(b + ic) + d = 0 \leftrightarrow$ $p = 0$ & $q = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение a содержит неизвестные. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается задачей на преобразование, имеющей цель "упростить". Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

13. Исключение квантора существования.

$\forall_{uv}(v$ – комплексное $\rightarrow \exists_z(z$ – комплексное & $u = zv$ & $|z| = 1) \leftrightarrow$
u – комплексное & $|u| = |v|)$

$\forall_{uv}(u$ – комплексное & $\neg(u = 0) \rightarrow \exists_x(x$ – число & $0 < x$ & $v = ux) \leftrightarrow$
v – комплексное & $\neg(v = 0)$ & $\arg(u) = \arg(v))$

$\forall_{uv}(u$ – комплексное & $\neg(u = 0) \rightarrow \exists_x(x$ – число & $\neg(x = 0)$ & $v = ux) \leftrightarrow$
v – комплексное & $\neg(v = 0)$ & Остаток$(\arg(u), \pi) =$ Остаток$(\arg(v), \pi))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение "Остаток(A, B)" обозначает неотрицательное вещественное число, меньшее положительного числа B и отличающееся от вещественного числа A на целое кратное B. Уровень срабатывания равен 1.

14. Обращение к нормализатору "стандПлюс" для умножения комплексных выражений.

$\forall_{abcden}(e = (a+bi)^n c + d \; \& \; a$ – число $\& \; b$ – число $\rightarrow (a+bi)^n c + d = e)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная n идентифицируется с натуральной константой, меньшей 7 (возможно, равной 1). Либо n, либо c отлично от единицы. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами "стандПлюс" и блоком "норм" нормализаторов общей стандартизации. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В следующих случаях прием блокируется:

(a) Преобразуемое выражение расположено в условии задачи на преобразование, имеющей цель "видУмножение", причем d есть 0.

(b) Преобразуемое выражение является числителем либо знаменателем комплексной дроби, выражение d есть 0, причем выражение c не содержит мнимой единицы.

(c) Выражение c имеет дробное слагаемое.

(d) Текущая задача не имеет типа "доказать", причем выражение c содержит неизвестные, а выражения a, b - не содержат.

(e) Преобразуемое выражение расположено под описателем, связывающим какую-либо переменную выражения c и не связывающим переменных выражений a, b.

(f) Преобразуемое выражение расположено под интегралом, причем d есть 0.

Уровень срабатывания приема равен 2.

15. Нормализатор общей стандартизации "нормУмножение".

(a) Устранение вложенных умножений.

(b) Лексикографическое упорядочение операций.

(c) Множитель единица.

(d) Множитель ноль.

(e) Вещественные множители.

(f) Вынесение минуса за знак умножения.

(g) Группировка вещественных множителей.

(h) Умножение степеней с одинаковым основанием.

$\forall_{amn}(a^m a^n = a^{m+n})$

Переменные m, n идентифицируются с целочисленными константами. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(i) Умножение степеней с основаниями, отличающимися знаком.

$\forall_{amn}(n$ – целое $\& \; m$ – целое $\rightarrow (-a)^m a^n = (-1)^m a^{m+n})$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Умножение на дробь.

$\forall_{abc}(a \cdot (b/c) = (ab)/c)$

Уровень срабатывания равен 1.

(k) Умножение комплексных констант.

$\forall_{abc}(a$ – число & b – число & c – число $\rightarrow a(b+ci) = ab + (ac)i)$

В произведениях ab и ac операция умножения вещественная. Остальные операции комплексные. Переменные a, b, c идентифицируются с константными выражениями. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcde}(a$ – число & b – число & c – число & d – число & $e = ac - bd \rightarrow (a+bi)(c+di) = e + (bc+ad)i)$

В выражениях $ac-bd$ и $bc+ad$ операции вещественные. Остальные операции комплексные. Первые четыре антецедента обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Выражения a, b, c, d константные. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Символ бесконечности.

$\forall_{a}(a$ – комплексное & $\neg(a = 0) \rightarrow a \cdot \infty = \infty)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

16. Нормализатор сокращенной перезаписи "упрощумножение".

(a) Устранение вложенных комплексных умножений.

(b) Устранение вложенной операции вещественного умножения.

$\forall_{abc}((ab)c = abc)$

Произведение ab вещественное, остальные умножения комплексные.

(c) Переход к комплексной дроби с вещественным знаменателем.

$\forall_{abc}((a/b) \cdot c = (ac)/b)$

Левая дробь вещественная, правая - комплексная. Уровень срабатывания равен 2.

17. Нормализатор разложения на множители "видУмножение".

(a) Устранение вложенных сумм.

(b) Разложение на множители вещественной и мнимой частей.

$\forall_{abcde}(a = cd$ & $b = ce \rightarrow a + bi = c(d+ei))$

Умножения в антецедентах вещественные, остальные операции комплексные. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются вещественным нормализатором разложения на множители "видумножение". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Сумма квадратов.

$\forall_{ab}(a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi))$

Отсутствует комментарий (переменная x), где x входит в b. Указатель "модификатор" обеспечивает проверку прочих слагаемых суммы. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ab}(b$ – число & $0 < b \rightarrow a^2 + b = (a + \sqrt{b}i)(a - \sqrt{b}i))$

$\forall_{ab}(b{-}\text{число}\ \&\ 0 < b \to a^2{+}bi = (a{-}\sqrt{b}/\sqrt{2}{+}\sqrt{b}/\sqrt{2}i)(a{+}\sqrt{b}/\sqrt{2}{-}\sqrt{b}/\sqrt{2}i))$

$\forall_{ab}(b{-}\text{число}\ \&\ 0 < b \to a^2{-}bi = (a{-}\sqrt{b}/\sqrt{2}{-}\sqrt{b}/\sqrt{2}i)(a{+}\sqrt{b}/\sqrt{2}{+}\sqrt{b}/\sqrt{2}i))$

Выражение a неконстантное. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Используются указатели "модификатор" и "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Вещественная сумма.

$\forall_{abc}(c = a + b \to a + b = c)$

Знак сложения вещественный. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается вещественным нормализатором разложения на множители "видумножение". Заголовком результата c не является символ "плюс". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Формулы сокращенного умножения.

i. Квадрат суммы.
$\forall_{ab}(a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2)$
Используются указатели "модификатор" и "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

ii. Квадрат разности.
$\forall_{ab}(a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2)$
Аналогично предыдущему.

iii. Разность квадратов.
$\forall_{ab}(a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$
Если текущая задача - на преобразование и имеет комментарий "рядтейлора", то прием блокируется. В остальном аналогично предыдущему.

iv. Сумма кубов.
$\forall_{abpqz}(p = \sqrt[3]{a}\ \&\ q = \sqrt[3]{b} \to az^3 + b = (pz + q)(p^2z^2 - pqz + q^2))$
Нормализатор имеет комментарий (нормкомплвычет z). Переменная z не входит в выражения a, b. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализатором "нормСтепень". Уровень срабатывания равен 2.

(f) Квадратный трехчлен.

$\forall_{abcde}(\neg(a = 0)\ \&\ e = \sqrt{b^2 - 4ac} \to ad^2{+}bd{+}c = (2ad{+}b{-}e)(2ad{+}b{+}e)/(4a))$

Нормализатор имеет комментарий (нормкомплвычет d). Переменная d не входит в выражения a, b, c. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Указатель "группировка(b)" определяет идентификацию коэффициента b путем группировки всех слагаемых, имеющих множитель d. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcdef}(\neg(a = 0)\ \&\ f = b^2 - 4ac\ \&\ e = (\sqrt{f}\ \text{при}\ 0 \leq f,\ \text{иначе}\sqrt{-f}i) \to ad^2 + bd + c = (2ad + b - e)(2ad + b + e)/(4a))$

Все операции заменяемого выражения, а также все операции антецедентов, кроме умножения на мнимую единицу, - вещественные. Коэффициенты a, b идентифицируются путем группировки необходимых слагаемых. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два других - выделены указателем "идентификатор". Выражение d неконстантное. Оно не

имеет вида степени, основание которой встречается в выражении b либо c, а также само не входит в эти выражения. Уровень срабатывания равен 4.
$\forall_{abcde}(\neg(a = 0) \ \& \ e = \sqrt{b^2 - 4ac} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ad^2 + bd + c = (2ad + b - e)(2ad + b + e)/(4a))$

Все операции комплексные (кроме дроби 1/2 в показателе степени). Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Используется указатель "комплексное". Выражение d неконстантное. Оно не имеет вида степени, основание которой встречается в выражении b либо c, а также само не входит в эти выражения. Уровень срабатывания равен 5.

(g) Квадратный двучлен.

$\forall_{abcdx}(a - \text{число} \ \&_{-}\text{число} \ \& \ c = \operatorname{sg}(b)\sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)/2} \ \&$
$d = \sqrt{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)/2} \rightarrow x^2 + a + bi = (x + c - di)(x - c + di))$

Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, следующие два - выделены указателем "идентификатор". Выражение x неконстантное. Оно не имеет вида степени (быть может, с показателем единица), основание которой входит хотя бы в одно из выражений a, b. Указатель "модификатор" не допускает наличие других слагаемых в заменяемой сумме. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{acde}(\neg(a = 0) \ \& \ e = \sqrt{-ac} \rightarrow ad^2 + c = (ad - e)(ad + e)/a)$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Нормализатор имеет комментарий (нормкомплвычет d). Выражение под радикалом обрабатывается нормализатором "видУмножение". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 3.

(h) Доразложение на множители операндов выражения, уже имеющего требуемый вид.

Уровни срабатывания приемов этого пункта равны 1.

i. Сомножитель.
$\forall_{abc}(a = b \rightarrow ac = bc)$
Созданы две версии приема. В одной из них оба умножения комплексные, в другой - левое умножение вещественное. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "видУмножение", которому передается комментарий (контекст v). Здесь v - вхождение преобразуемого сомножителя. Проверяется отсутствие комментария (повторение корень), причем этот комментарий передается нормализатору, обрабатывающему сомножитель a. Выражение a неконстантное. Результат b доразложения a отличен от a.

ii. Числитель.
$\forall_{abc}(a = b \rightarrow a/c = b/c)$
Аналогично предыдущему. В одной версии приема обе дроби комплексные, в другой - левая дробь вещественная. В случае комплексных дробей выражение a может быть константным.

iii. Минус.
$\forall_{ab}(a = b \rightarrow -a = -b)$

Аналогично предыдущему. Созданы две версии приема. В одной из них оба минуса комплексные, в другой - оба вещественные. Не требуется, чтобы a было неконстантным.

iv. Основание степени.
$\forall_{abc}(a = b \to a^c = b^c)$
Аналогично предыдущему. Созданы две версии приема. В одной из них обе степени комплексные, в другой - левая степень вещественная.

(i) Переход от комплексных операций к вещественным.

$\forall_{ab}(b -$ число $\to a - b = a - b)$

Минус в правой части вещественный, остальные операции комплексные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(b -$ число & $c -$ число $\to a + bc = a + bc)$

Умножение в правой части вещественное, остальные операции комплексные. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Заголовками выражений b, c не являются символы "Плюс", "Минус". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcn}(c -$ число & $0 < c$ & $n -$ число $\to a + bc^n = a + bc^n)$

Степень в правой части вещественная, остальные операции комплексные. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\to a + b = a + b)$

В левой части сумма комплексная, в правой - вещественная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Заметим, что a идентифицируется с некоторым слагаемым, а b - с суммой остальных слагаемых. Заголовками выражений a, b не являются символы "Умножение", "Минус", "Дробь". Уровень срабатывания равен 2.

(j) Сложение дробей.

$\forall_{abcdef}(\neg(c = 0)$ & $\neg(d = 0)$ & $\neg(f = 0) \to ab/(cd) + ae/(cf) =$
$a(bf + de)/(cdf))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выбираются два самых коротких дробных слагаемых суммы. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcd}(\neg(b = 0) \to ad/b + cd = (a + bc)d/b)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Второе слагаемое не дробное. Если a, b, d вещественные, причем c имеет вид ei, где e вещественное, то прием блокируется. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 4.

(k) Вспомогательное раскрывание скобок.

$\forall_{ab}(b = a \to a = b)$

Преобразуемое выражение имеет некорневое вхождение символа "Плюс". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть сначала обрабатывается нормализатором "стандПлюс", а затем - обрабатывается нормализатором "видУмножение", которому передается комментарий "станд". Предварительно проверяется, что выражение a не имеет своим заголовком ни один из логических символов "Умножение", "умножение", "Степень", "степень", "Дробь", "дробь", "Минус", "минус". Отсутствует комментарий "станд". Выражения a, b различны. Указатель "выход" обеспечивает завершение работы нормализатора сразу после срабатывания данного приема. Уровень срабатывания равен 5.

(l) Вынесение за скобку общего множителя всех слагаемых.
$\forall_{abc}(ab + ac = a(b + c))$
Указатель "набор(второйтерм)" обеспечивает одновременную обработку любого числа слагаемых. Либо отсутствует комментарий "константа", либо a неконстантное. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(m) Произведение двух сумм по два слагаемых.
$\forall_{abcd}(ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d))$
Введен ускоряющий фильтр, требующий, чтобы второе слагаемое располагалось в сумме после первого. Указатель "модификатор" запрещает наличие других слагаемых. Указатель "пересечениесписков" блокирует применение компилятором сравнительно трудоемкой процедуры "алгебрпересечение", заменяя ее непосредственным пересечением групп сомножителей для определения их общей части. Уровень срабатывания равен 1.

(n) Тригонометрические и гиперболические функции.

   i. Разность синусов.
   $\forall_{abcde}(d = \cos((a + b)/2)\ \&\ e = \sin((a - b)/2) \to c \sin a - c \sin b = 2cde)$
   Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Преобразуемое выражение неконстантное. Дополнительные слагаемые отсутствуют. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

   ii. Сумма синусов.
   $\forall_{abcde}(d = \cos((a - b)/2)\ \&\ e = \sin((a + b)/2) \to c \sin a + c \sin b = 2cde)$
   Аналогично предыдущему.

   iii. Разность косинусов
   $\forall_{abcde}(d = \sin((a + b)/2)\ \&\ e = \sin((a - b)/2) \to c \cos a - c \cos b = -2cde)$
   Аналогично предыдущему.

   iv. Сумма косинусов.
   $\forall_{abcde}(d = \cos((a + b)/2)\ \&\ e = \cos((a - b)/2) \to c \cos a + c \cos b = 2cde)$
   Аналогично предыдущему.

   v. Переход от гиперболической функции к тригонометрической.
   $\forall_{abcx}(c = a + b \cos(ix) \to a + b \operatorname{ch} x = c)$
   $\forall_{abcx}(c = a - b \sin(ix) \to a + b \operatorname{sh} x = c)$
   Сомножителем выражения a служит комплексный синус либо косинус. Дополнительные слагаемые не разрешаются. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "видУмножение". Результат c, с точностью до знака, представляет собой произведение либо степень. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

   vi. Сумма синуса и косинуса.
   $\forall_{abcde}(d = \sin(\pi/4 + a/2 - b/2)\ \&\ e = \cos(a/2 + b/2 - \pi/4) \to$
   $c \sin a + c \cos b = 2cde)$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Преобразуемое выражение содержит неизвестые текущей задачи. Дополнительные слагаемые отсутствуют. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

vii. Разность синуса и косинуса.
$\forall_{abcde}(d = \cos(a/2 - b/2 + \pi/4)$ & $e = \cos(a/2 + b/2 - \pi/4) \rightarrow$
$c \sin a - c \cos b = 2cde)$
Аналогично предыдущему.

(o) Обращение к пакету продукций "комплкорни" для приближенного разложения на множители многочлена с комплексными коэффициентами.

$\forall_{abcfnpqr}(a = f(x)$ & точность(p) & комплкорни(f, p, q, r) & $l(q) = n \rightarrow$
$a = \prod_{i=1}^{n}(x - q(i))^{r(i)})$

Посредством $f(x)$ обозначено выражение "значениемн(f, x)" - значение многочлена f в точке x. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, причем p - десятичное число, определяющее уровень точности вычислений. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию переменной x как некоторого параметра преобразуемого выражения. Проверяется, что x расположено в основании какой-либо степени. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "значениемн(f)" определяет идентификацию набора константных коэффициентов многочлена f из рассмотрения выражения, имеющего вид суммы. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "программа". Первый из них обрабатывается пакетом продукций "комплкорни", который будет описан в разделе данного тома, посвященном вычислениям на ГЕНОЛОГе. Пакету передаются набор комплексных коэффициентов многочлена f и точность вычислений p. Определяются набор q корней и набор r их кратностей. Указатель "округл" определяет округление корней до точности p. Конечное произведение в заменяющем выражении выписывается как обычное произведение. Уровень срабатывания равен 1.

18. Нормализатор "Корни".

Этот нормализатор преобразует разложение многочлена с вещественными коэффициентами на комплексные множители к виду, позволяющему определить корни и их кратности. Если не оговорено противное, уровень срабатывания приема равен 1. Нормализатор корневой, т.е. его приемы применяются только ко всему преобразуемому терму, а не к подтермам.

(a) Устранение вложенных умножений.

Созданы два приема - для вещественного и комплексного умножений.

(b) Отбрасывание знаменателя.

$\forall_{ab}(a/b = a)$

(c) Отбрасывание минуса.

$\forall_{a}(-a = a)$

(d) Нормализация комплексного множителя.

$\forall_{abckx}(\neg(a = 0) \rightarrow (axi + b)^k c = (x - b/a \cdot i)^k c)$

Переменная k идентифицируется с целочисленной константой. Переменная x идентифицируется по комментарию (переменная x), вводимому при обращении к нормализатору. Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

$\forall_{abcdk}(\neg(a=0)\to((ax+b)+ci)^k d=(x+(b+ci)/a)^k d)$

Подвыражение $ax+b$ имеет вещественные операции; прочие операции комплексные. В остальном аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdk}(a-\text{число}\ \&\ \neg(a=0)\ \&\ b-\text{число}\to(ax+b+ci)^k d=(x+(b+ci)/a)^k d)$

Произведение ax вещественное, прочие операции комплексные. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В остальном аналогично предыдущему.

$\forall_{abcdek}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(b=0)\to(a(bx+d)+ci)^k e=(x+d/b+ci/(ab))^k e)$

Подвыражения $a(bx+d)$, d/b и ab имеют вещественные операции; прочие операции комплексные. В остальном аналогично предыдущему.

(e) Нормализация вещественного множителя.

$\forall_{abdk}(\neg(a=0)\to(ax+b)^k d=(x+b/a)^k d)$

Созданы две версии приема. В одной из них внешнее умножение комплексное, в другой - вещественное. Прочие операции - вещественные. Переменная k идентифицируется с целочисленной константой. Переменная x идентифицируется по комментарию (переменная x), вводимому при обращении к нормализатору. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abn}((a-x)^n b=(x-a)^n b)$

Все операции вещественные. Переменная x идентифицируется по комментарию (переменная x) и не входит в выражение a. Уровень срабатывния равен 2.

(f) Отбрасывание постоянного множителя.

$\forall_{ab}(ab=b)$

Умножение вещественное. Выражение a не содержит переменной x, выделенной комментарием (переменная x).

(g) Обработка условного выражения.

$\forall_{abP}((a\ \text{при}\ P,\ \text{иначе}\ b)=(a\ \text{при}\ P,\ \text{иначе}\ b))$

Подвыражения a, b обрабатываются нормализатором "Корни". Для блокировки повторного применения приема используется комментарий "варианты".

19. Синтезатор "наборкорней" получения по разложению на множители набора пар (корень - кратность). Формат обращения к нормализатору имеет вид "наборкорней(a, b)". Здесь a - произведение стандартных множителей, подготовленное нормализатором "Корни", b - результирующий набор пар. Дополнительно синтезатору передается комментарий (переменная x), указывающий переменную многочлена.

(a) Вещественный множитель.

$\forall_{abcd}(\text{наборкорней}(c,d)\to\text{наборкорней}((x+a)^b c, d\cup\{(-a,b)\}))$

Созданы две версии приема, у одной из которых умножение комплексное, а у другой - вещественное. Остальные операции вещественные. Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Комплексный множитель.
$\forall_{abcd}(\text{наборкорней}(c, d) \to \text{наборкорней}((x+a)^b c, d \cup \{(-a, b)\}))$
Все операции комплексные. В остальном - аналогично предыдущему.

(c) Единица.
$\text{наборкорней}(1, \emptyset)$
Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "Дробь"

1. Общая стандартизация выражений.

(a) Вещественные операнды.
$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to a/b = a/b)$
Левая дробь комплексная, правая - вещественная. Прием имеет заголовок "второйтерм".Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Знаменатель единица.
$\forall_a(a - \text{комплексное} \to a/1 = a)$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

(c) Числитель ноль.
$\forall_a(0/a = 0)$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

(d) Вещественный знаменатель.
$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to ai/b = a/b \cdot i)$
Вторая дробь вещественная, остальные операции комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм".Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В задачах на преобразование, имеющих цель "длина", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Сокращение дробей.
$\forall_{abcd}(a(b-c)/(d(c-b)) = -(a/d))$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \to ab/(ac) = b/c)$
Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{abcdmnkpq}(m = \text{нод}(a, b)\ \&\ n = \text{нод}(c, d)\ \&\ k = \text{нод}(m, n) \to$
$(a+bi)p/((c+di)q) = (a/k + (b/k)i)p/((c/k + (d/k)i)q))$
Дроби со знаменателем k вещественные, остальные операции - комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, b, c, d идентифицируются с целочисленными константами. Антецеденты выделены указателем "программа". Указатель "подстановка" разрешает нулевое значение d. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Деление на дробь.

$\forall_{abc}(a/(b/c) = ac/b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

(g) Деление дроби.

$\forall_{abc}((a/b)/c = a/(bc))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abcd}(((a/b)c)/d = ac/(bd))$

Дробь a/b вещественная, остальные операции комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

(h) Умножение дробей.

$\forall_{abcd}((a/b) \cdot (c/d) = ac/(bd))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

(i) Умножение на дробь.

$\forall_{abc}(a \cdot (b/c) = ab/c)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "вариант" разрешает случай вещественной дроби, но только для задач на преобразование, имеющих цель "комплексное", и при условии, что a не является мнимой единицей. Уровень срабатывания равен 0.

(j) Минус в числителе.

$\forall_{ab}(-a/b = -(a/b))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

(k) Минус в знаменателе.

$\forall_{ab}(a/(-b) = -(a/b))$

Аналогично предыдущему.

(l) Одновременное изменение знака числителя и знаменателя.

$\forall_{abcd}((-a+b)/(-c+d) = (a-b)/(c-d))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения b, d константные, а хотя бы одно из выражений a, c неконстантное. Уровень срабатывания равен 1.

(m) Деление суммы дробей.

$\forall_{abcde}((a/b + c/d)/e = a/(be) + c/(de))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Знаменатель e не имеет сумму своим обобщенным сомножителем (достижимым из него через вещественные либо комплексные операции "минус", "умножение", "дробь", "модуль" и через основания степеней). Уровень срабатывания равен 3.

2. Равенство дроби нулю.

$\forall_{ab}(\neg(b = 0) \to a = 0 \leftrightarrow a/b = 0)$

Прием имеет заголовок "первыйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Замена выполняется даже в тех случаях, когда утверждение используется для сопровождения по о.д.з. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 0.

3. Условие вещественнозначности комплексной дроби.

   $\forall_{ab}(b - \text{число} \to a/b - \text{число} \leftrightarrow a - \text{число})$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

4. Уравнение с неизвестной дробью в одной части.

   $\forall_{abcdepqrs}(a/b = dp/(es)\ \&\ c = pq/(rs)\ \&\ \neg(b = 0) \to a/b = c \leftrightarrow p = 0\ \vee\ dr = eq)$

   Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к условию задачи на описание либо посылке задачи на исследование. Выражение a/b содержит неизвестные, а выражение c - не содержит. Если c - переменная, не входящая в a/b, то отсутствует внешний квантор либо описатель по этой переменной. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". При этом выражения a, b, c обрабатываются нормализатором разложения на множители "видУмножение". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abc}(a/b = c \leftrightarrow a = bc\ \&\ \neg(b = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение b содержит неизвестные. Выражение c не содержит символа "плюсбеск". Уровень срабатывания равен 2.

5. Сложение неизвестных дробей в одной из частей уравнения.

   $\forall_{abcde}(e = a/b + c \to a/b + c = d \leftrightarrow e = d)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Каждое из выражений a/b, c содержит неизвестные, а d - не содержит. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "видУмножение". Отсутствует другое условие задачи, содержащее равенство вида $x = t$, где x - неизвестная, не входящая в t, но входящая в текущее условие, причем это равенство - корневое либо расположено только внутри термов с заголовками "и", "существует". Используется указатель "комплексное". В случае задачи с единтсвенной неизвестной уровень срабатывания равен 1, иначе он равен 3.

6. Домножение знаменателя на комплексно сопряженное число.

   $\forall_{abcdn}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(b + ci = 0) \to a/((b + ci)^n d) =$
   $a(b - ci)^n/((b^2 + c^2)^n d))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если преобразуемое выражение не связано внешними кванторами и описателями, то выводится сопровождающая посылка $\neg(b^2 + c^2 = 0)$. Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Если выражения b, c константные, то уровень срабатывания равен 1, иначе он равен 3.

7. Попытка сложения дробей при упрощении выражения.

   $\forall_{abcd}(d = a/b + c \to a/b + c = d)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "видУмножение". Преобразуемое выражение не расположено внутри другой суммы с дробным слагаемым, к которой пока не предпринималась попытка применения данного приема. Оно также не расположено под описателем "отображение". Выполнено хотя бы одно из следующих требований:

(a) Задача имеет цель "сложитьдроби".

(b) Выражение d короче исходной суммы.

(c) Выражение d - константное и не содержит символа "Плюс".

(d) Задача имеет цель "редакция".

(e) Выражение d не имеет вида суммы, причем преобразуемый терм - сомножитель произведения, либо операнд дроби, либо основание степени.

(f) Выражение d не имеет вида дроби либо суммы с дробным слагаемым.

Если имеется комментарий "сокращение", то вводятся ограничения на длину условия задачи и преобразуемого выражения. Безотносительно к этому, введены несколько более слабые ограничения на оба параметра. Уровни срабатывания равны 3 и 7. Если условие задачи имеет вид $A^2 + B$, где A - преобразуемое выражение, то на уровне 3 прием блокируется. На уровне 7 он применяется лишь в тех случаях, когда имела место неудачная попытка применения данного приема к надвыражению текущей суммы.

8. Попытка разложения на множители суммы - основания степени сомножителя числителя дроби.

   $\forall_{abcdefn}(f = b + c \to a(d(b + c)^n)/e = a(df^n)/e)$

   Операции выражений $d(b + c)^n$ и df^n вещественные, остальные операции - комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Переменная n идентифицируется с целочисленной константой, возможно, равной единице. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "видумножение". Результат f отличен от исходной суммы. Преобразуемое выражение не расположено внутри описателя "отображение". Терм $b + c$ не содержит символа "суммавсех". Если задача имеет цель "известны" и выражения b, c неконстантные, то они имеют общий параметр. Введен средний органичитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{abcefn}(f = b + c \to a(b + c)^n/e = af^n/e)$

   Все операции комплексные. В остальном - аналогично предыдущему. Используется нормализатор "видУмножение". Если преобразуемое выражение - операнд тригонометрической операции, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

9. Попытка разложения на множители суммы - основания степени сомножителя знаменателя дроби.

   $\forall_{abcdef}(\neg(b + c = 0)\ \&\ f = b + c \to a/((b + c)^d e) = a/(f^d e))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Переменная n идентифицируется с целочисленной константой, возможно, равной единице. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть неконстантная и обрабатывается нормализатором "видУмножение". Результат f отличен от исходной суммы. Уровень срабатывания равен 4.

10. Разделение дроби с вещественным знаменателем и комплексной суммой в числителе на вещественное и мнимое слагаемое.

    $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to (a+bi)/c = a/c + (b/c)i)$

    Дроби в правой части вещественные, остальные операции - комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

11. Занесение мнимой единицы в числитель дроби, уже содержащей слагаемые с мнимой единицей.

    $\forall_{abc}((a+bi)/c \cdot i = (ai-b)/c)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

12. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

    $\forall_{abc}(ai/b + ci/b = (a+c)i/b)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abc}(a/b + c/b = (a+c)/b)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Либо выражение b содержит мнимую единицу, либо выражения a, ее не содержат, либо каждое из выражений a, b имеет заголовок "Плюс". Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия данного приема, имеющая тот же уровень срабатывания. В ней все операции вещественные, кроме левой суммы. Она применяется без ограничений.

13. Выделение вещественных слагаемых.

    $\forall_{abcd}(a - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to (ab+c)/b + d = c/b + d)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование. Не усматривается, что b вещественное. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

14. Попытка сокращения вещественных множителей.

    $\forall_{abcd}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ a/c = p/q \to ab/(cd) = bp/(dq))$

    Дроби в антецеденте вещественные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, третий - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на упрощение. Указатели "вариант" разрешают вещественные произведения в числителе и знаменателе преобразуемой дроби. Выражения a, b отличны от десятичных констант. Уровень срабатывания равен 3.

15. Символ бесконечности.

    $\forall_{ab}(a/b = \infty \leftrightarrow \neg(a=0)\ \&\ b=0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Уровень срабатывания равен 0. Созданы две версии приема - для комплексной и вещественной дробей.

16. Нормализатор общей стандартизации "нормдробь".

    Так как приемы нормализатора аналогичны одноименным приемам сканирования задачи, далее приводим лишь их названия.

    (a) Вещественные операнды.

    (b) Знаменатель единица.

    (c) Числитель ноль.

    (d) Сокращение дробей.

    (e) Разделение дроби с вещественным знаменателем и комплексной суммой в числителе на вещественное и мнимое слагаемое.

    (f) Деление дроби.

    (g) Деление на дробь.

    (h) Минус в числителе.

    (i) Минус в знаменателе.

    (j) Деление комплексных констант.

    $\forall_{abcde}(a$ – число & b – число & c – число & d – число & $e = c^2 + d^2$ & $\neg(e = 0) \rightarrow (a + bi)/(c + di) = (ac + bd)/e + i \cdot (bc - ad)/e)$

    Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Выражения c, d константные. Операции в дробных выражениях заменяющей части вещественные. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{acde}(a$ – число & c – число & d – число & $e = c^2 + d^2$ & $\neg(e = 0) \rightarrow a/(c + di) = ac/e - i \cdot ad/e)$

    Аналогично предыдущему.

    $\forall_{acde}(c$ – число & d – число & $e = c^2 + d^2$ & $\neg(e = 0) \rightarrow ai/(c + di) = ad/e + i \cdot ac/e)$

    Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Выражения c, d константные. Не усматривается, что a вещественное. Уровень срабатывания равен 3.

    $\forall_{acde}(c$ – число & d – число & $e = c^2 + d^2$ & $\neg(e = 0) \rightarrow a/(c + di) = ac/e - iad/e)$

    Аналогично предыдущему. Выражение a не имеет вида суммы.

    (k) Выделение вещественного множителя.

    $\forall_{ab}(a$ – число & b – число $\rightarrow ai/b = a/b \cdot i)$

    Дробь в заменяющей части вещественная. Остальные операции комплексные. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

    (l) Сокращение экспонент.

    $\forall_{abcd}(a \exp(b)/(c \exp(d)) = a \exp(b - d)/c)$

    Уровень срабатывания равен 2.

17. Нормализатор "Простейшиедроби". Нормализатор служит для преобразования выражения к виду суммы простейших дробей. Он является аналогом вещественного нормализатора "простейшиедроби". Переменная x, относительно которой рассматриваются простейшие дроби, передается нормализатору через комментарий (вход x).

(a) Минус перед дробью.

$\forall_{ab}(a = b \rightarrow -b = -a)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "Простейшиедроби". Результат, с точностью до знака, является суммой. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(b) Выделение множителей числителя и знаменателя, не зависящих от рассматриваемой переменной.

$\forall_{abcde}(d/c = e \rightarrow ad/(bc) = a/b \cdot e)$

Указатель "вход" определяет переменную x, по которой выполняется приведение. Выражения c, d идентифицируются с произведениями всех членов, содержащих x. Хотя бы одно из остаточных произведений a, b не равно 1. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "Простейшиедроби". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Устранение дробного слагаемого в числителе.

$\forall_{abcd}((a + b/c)/d = a/d + b/(cd))$

Входная переменная x встречается в выражении c. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Специальное тождество для преобразования к сумме простейших дробей.

$\forall_{abcdefg}(c = d - b \ \& \ \neg(c = 0) \rightarrow e/(f(a + bg)(a + dg)) = e/(fcg(a + bg)) - e/(fcg(a + dg)))$

Входная переменная x встречается в выражении a, которое после раскрывания скобок преобразуется к виду многочлена от x, имеющего степень, большую единицы. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

(e) Применение рекуррентной формулы, понижающей степень знаменателя.

$\forall_{afghpuvw}(\text{частноеМногочленов}(\lambda_x(f(x), x - \text{комплексное}), \lambda_x(g(x),$
$x - \text{комплексное}), h, u) \ \& \ \text{частноеМногочленов}(\lambda_x(v(x), x - \text{комплексное}),$
$\lambda_x(g(x), x - \text{комплексное}), w, p) \rightarrow f(x)/(g(x)^a v(x)) =$
$(h(x)p(x) - u(x)w(x))/(p(x)(g(x))^{a-1}v(x)) + u(x)/(p(x)g(x)^a))$

Переменная a идентифицируется с натуральной константой, меньшей 5. Указатель "сммногочлен" определяет идентификацию $g(x)$ с многочленом от входной переменной x. Переменные f, v функциональные. Первые два антецедента обрабатываются пакетными синтезаторами. Указатели "функция" определяют идентификацию переменных h, u, w, p с термами вида "отображение(...)". Переменная x входит в выражения $g(x)$, $v(x)$. Эти выражения могут быть преобразованы к виду многочленов от x, причем степень второго из них не меньше степени первого. Выражение $p(x)$ не тождественно нулевое. Каждое из слагаемых заменяющей суммы преобразуется нормализатором "Простейшиедроби". После этого сумма обрабатывается нормализаторами "стандПлюс" и "нормПлюс". Прием использует также нормализатор "сокращПлюс", единственный прием которого заменяет произведение суммы и разности двух выражений на разность квадратов. Это иногда существенно ускоряет вычисления. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Понижение степени числителя.

$\forall_{abfghu}$(частноеМногочленов($\lambda_x(f(x), x$ – комплексное), $\lambda_x(g(x)$, x – комплексное), $h, u) \to f(x)/(bg(x)^a) = h(x)/(bg(x)^{a-1}) + u(x)/(bg(x)^a))$

Переменная a идентифицируется с натуральной константой. Указатель "смногочлен" определяет идентификацию $g(x)$ с неконстантным многочленом от входной переменной x. Переменная f функциональная. Выражения $g(x)$, $f(x)$ можно преобразовать к виду многочленов от x, причем степень второго из них не меньше степени первого. Используется указатель "комплексное". Каждое из слагаемых заменяющей суммы преобразуется нормализатором "Простейшиедроби". После этого сумма обрабатывается нормализаторами "стандПлюс" и "нормПлюс". Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "Степень"

1. Переход к вещественной степени.

   $\forall_{ab}(a$ – число & b – rational & $\neg$(знаменатель(b) – even) $\to a^b = a^b)$

   $\forall_{ab}(a$ – число & b – число & $0 \leq a \to a^b = a^b)$

   Левая степень комплексная, правая - вещественная. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

2. Единица в показателе степени.

   $\forall_a(a$ – комплексное $\to a^1 = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

3. Ноль в показателе степени.

   $\forall_a(a$ – комплексное $\to a^0 = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение a не есть ноль. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Заметим, что случай нулевого основания степени и нулевого показателя отсекается ограничениями на о.д.з., поэтому в приемах его можно игнорировать. Если же ограничения на о.д.з. нарушены и посылки ложны, то допустимы произвольные действия, сохраняющие ложность посылок. Уровень срабатывания приема равен 1.

4. Единица в основании степени.

   $\forall_a(1^a = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Ноль в основании степени.

   $\forall_a(0^a = 0)$

   Аналогично предыдущему.

6. Умножение степеней с одинаковым основанием.

   $\forall_{amn}(a^m a^n = a^{m+n})$

Созданы две версии приема, в одной из которых обе левые степени комплексные, а в другой - вторая степень вещественная. Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

7. Умножение степеней с основаниями, отличающимися знаком.

   $\forall_{abmn}((a-b)^n(b-a)^m = (a-b)^{m+n}(-1)^m)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная m идентифицируется с натуральной константой. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 0.

8. Минус в показателе степени.

   $\forall_{ab}(\neg(a=0) \to a^{-b} = 1/a^b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Если решается задача на преобразование, имеющая цель "рядТейлора", то прием блокируется. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

9. Минус в основании степени.

   $\forall_a((-a)^n = a^n)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная n идентифицируется с четной натуральной константой. Уровень срабатывания равен 0.

10. Вынесение наружу общего минуса всех слагаемых одного из сомножителей выражения под радикалом.

    $\forall_{abcd}(\sqrt{(a-b)c/d} = i\sqrt{(b-a)c/d})$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Все слагаемые выражения $a-b$ имеют своим заголовком символ "Минус" либо "минус". Уровень срабатывания приема равен 1.

11. Вынесение степени мнимой единицы в отдельный множитель.

    $\forall_{abn}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq ab \to (ai/b)^n = (a/b)^n i^n)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

12. Умножение на степень минус единицы.

    $\forall_{kmn}(n - \text{целое} \to (-1)^{m+n}a^{k+n} = (-1)^{k+m}(-a)^{k+n})$

    Операции выражений $(-1)^{m+n}$, $k+n$ и $(-1)^{k+m}$ вещественные. Остальные операции комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные k, m идентифицируются с целочисленными константами. Выражение a константное. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

13. Степень минус единицы умножается на сумму степеней с тем же показателем.

    $\forall_{abcdnpqrs}(n - \text{целое} \to (r(a-b)^{n+p} + s(c-d)^{n+q})(-1)^n = r(b-a)^{n+p}(-1)^p + s(d-c)^{n+q}(-1)^q)$

Суммы $n + p$ и $n + q$ вещественные, остальные операции комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные p, q идентифицируются с целочисленными константами. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

14. Группировка в виде степени с дробным основанием.

$\forall_{cdefi}(i -$ целое & $d -$ целое $\rightarrow e/(fc^{di}) = e(1/c^d)^i/f)$

Произведение di вещественное, остальные операции комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Указатель "контекст" определяет идентификацию внешнего описателя "отображение" по переменной i. Эта переменная не входит в выражения c, d. В задачах на разложение в ряд тейлора по переменной c прием блокируется. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

15. Повторное возведение в степень.

$\forall_{an}(n -$ натуральное $\rightarrow (a^{1/n})n = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ab}(a -$ число & $0 < \pi + a$ & $0 \leq \pi - a \rightarrow (\exp(ai))^b = \exp(abi))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{mnz}(m -$ натуральное & $n -$ натуральное $\rightarrow (z^m)^n = z^{mn})$

Аналогично предыдущему.

16. Произведение в основании степени.

$\forall_{abn}((ab)^n = a^n b^n)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Под описателем "отображение" прием блокируется. Он также блокируется при редактировании ответа задачи. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abn}(n -$ целое $\rightarrow (ab)^n = a^n b^n)$

Аналогично предыдущему, но n - произвольное выражение, а уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число $\rightarrow (a \exp(bi))^c = a^c \exp(bci))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

17. Группировка под общий показатель степени при суммировании.

$\forall_{abcdefghi}(ha^{dg+f}/(ie^{bg+c}) = ha^f(a^d/e^b)^g/(ie^c))$

Операции выражений $dg + f$ и $bg + c$ вещественные, остальные операции - комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Указатель "контекст" определяет идентификацию надвыражения - конечной суммы по переменной j, входящей в g и не входящей в выражения a, b, c, d, e, f. Выражения a, e не имеют своим множителем факториал. При решении задачи на разложение в ряд Тейлора прием блокируется. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{abcdepq}(c - \text{целое} \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ \text{neg}(b = 0) \rightarrow a^{pc+d}b^{qc+e} = a^d b^e (a^p b^q)^c)$

Операции выражений $pc + d$ и $qc + e$ вещественные, остальные операции - комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Указатель "контекст" определяет идентификацию надвыражения - конечной суммы по переменной j, входящей в и не входящей в выражения a, b, d, e, p, q. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если одно из выражений a^p, b^q имеет параметр, не встречающийся в текущем терме задачи вне преобразуемого выражения, а другое - не имеет, то прием блокируется. Выражения a, b не имеют своим множителем факториал. При решении задачи на разложение в ряд Тейлора прием блокируется. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 0.

18. Дробь в основании степени.

$\forall_{abn}(n - \text{целое} \rightarrow (a/b)^n = a^n/b^n)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. При редактировании ответа прием блокируется. Он также блокируется, если выражение расположено под описателем "отображение" по переменной, входящей в n. Если выражение n неконстантное, то не предпринимается суммирование ряда по переменной, входящей в n. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{az}((1/z)^a = 1/z^a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение не расположено под конечной суммой. Уровень срабатывания равен 1.

19. Равенство степени нулю.

$\forall_{nz}(z - \text{комплексное} \rightarrow z^n = 0 \leftrightarrow z = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

20. Сокращение комплексных степеней.

$\forall_{abcpq}(pa^b/(qa^c) = pa^{b-c}/q)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

21. Приведение подобных степеней с усмотрением сопряженных величин.

$\forall_{abcdefp}(c = ae \ \& \ d + be = 0 \ \& \ b = fi \ \& \ p = a^2 + f^2 \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow (a + b)^n c + (a + b)^n d = ep(a + b)^{n-1})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые четыре антецедента выделены указателем "идентификатор". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение p не является суммой. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 4.

22. Квадратный корень из комплексного числа.

    $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ a < 0 \to \sqrt{a} = \sqrt{-a}i)$

    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \to \sqrt{a+bi} = \mathrm{sg}(b)\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}/\sqrt{2} + \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}/\sqrt{2}i)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_t(t - \text{число} \to \sqrt{i\sin t + \cos t} = i\sin(t/2) + \cos(t/2))$

    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

23. Корень из чисто мнимого числа (главное значение).

    $\forall_{an}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ n - \text{натуральное} \to (ai)^{1/n} = a^{1/n}\cos(\pi/(2n)) + ia^{1/n}\sin(\pi/(2n)))$

    $\forall_{an}(a < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ n - \text{натуральное} \to (ai)^{1/n} = (-a)^{1/n}\cos(\pi/(2n)) + i(-a)^{1/n}\sin(\pi/(2n)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

24. Возведение в квадрат комплексного числа.

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если преобразуемое выражение неконстантное, то оно не расположено под интегралом. При разложении на множители прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

25. Возведение в натуральную степень по формуле Муавра.

    $\forall_{abcn}(b = |a| \ \& \ c = \arg(a) \ \& \ n - \text{натуральное} \to a^n = b^n\cos(cn) + ib^n\sin(cn))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается, что a вещественное. Выражение b не содержит символа "Модуль"; выражение c не тождественно нулевое и не содержит символа "аргумент". Если решается задача на описание либо на исследование, то выражение n не содержит неизвестных. Прием блокируется при разложении на множители, а также под конечными суммами. Уровень срабатывания равен 4.

26. Формула Эйлера.

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \exp(a+bi) = \exp a\cos b + i\exp a\sin b)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Преобразуемое выражение не расположено под описателем. При переходе к сокращенной записи выражений прием блокируется. Если преобразуется сомножитель слагаемого корневой суммы, причем имеется другой сомножитель вида $c + di$, то уровень срабатывания равен 1, иначе он равен 2.

Создана еще одна версия приема, срабатывающая при уровне 1. В ней преобразуемое выражение - константное и расположено внутри описателя "отображение".

$\forall_{ab}(b - \text{число} \rightarrow \exp(a + bi) = (\cos b + i \sin b) \exp a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается, что a вещественное. Преобразуемое выражение не расположено под конечной суммой. При переходе к сокращенной записи прием блокируется. Он также блокируется в задачах на описание, имеющих цель "исследовать". Уровень срабатывания равен 4.

27. Главное значение степени.

    $\forall_{az}(\neg(a = 0) \rightarrow a^z = \exp(z \ln a))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a отлично от константы e. Выражение z содержит мнимую единицу. Уровень срабатывания равен 4.

28. Периодичность степени.

    $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c \ln a - \text{even} \rightarrow a^{b+ic\pi} = a^b)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

29. Уравнения со степенями.

    (a) Простейшее степенное уравнение.

    $\forall_{abz}(az^2 = b \leftrightarrow \neg(a = 0) \ \& \ (z = \sqrt{b/a} \ \vee \ z = -\sqrt{b/a}) \ \vee \ a = 0 \ \& \ b = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение z не имеет вида $c + di$ и содержит неизвестные; выражения a и b - не содержат. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{abmnz}(n - \text{натуральное} \ \& \ m = \arg(b) - \arg(a) \rightarrow az^n = b \leftrightarrow$
    $\neg(a = 0) \ \& \ \exists_k(k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \& \ z = |b|^{1/n}(\cos((m + 2\pi k)/n) +$
    $i \sin((m + 2\pi k)/n))/(|a|^{1/n})) \ \vee \ a = 0 \ \& \ b = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение z содержит неизвестные, выражения a и b - не содержат. Переменная n идентифицируется с натуральной константой, отличной от 2. Указатель "или" определяет развертку квантора существования в дизъюнкцию. Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Квадратное уравнение.

    $\forall_{abcdep}(e = b^2 + 4ac \ \& \ p = \sqrt{e} \rightarrow ad^2 + bd = c \leftrightarrow \neg(a = 0) \ \&$
    $(d = (p - b)/(2a) \ \vee \ d = -((p + b)/(2a))) \ \vee \ bd = c \ \& \ a = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражения a, b, c не содержат неизвестных, выражение d - содержит. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Уравнение для экспоненты.

$\forall_{az}(\exp z = a \to \neg(a = 0)\ \&\ \exists_n(n - \text{целое}\ \&\ z = Ln(a, n)))$

Посредством $Ln(a, n)$ обозначен "Натурлог(a, n)" значение a_2-й ветви комплексного натурального логарифма комплексного числа a_1. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение a не содержит неизвестных, z - содержит. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания приема равен 1.

(d) Стандартизация рационального комплексного основания степени с неизвестным целочисленным показателем.

$\forall_{abmnpqrs}(n - \text{натуральное}\ \&\ m = \text{нод}(q, s) \to (p/q + r/s \cdot i)^n a = b \leftrightarrow$
$(pm/q + rm/s \cdot i)^n a = bm^n)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению посылки задачи на исследование. Выражение n содержит неизвестные; выражения p, q, r, s идентифицируются с целочисленными константами. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "программа". Уровень срабатывания равен 3.

30. Стандартизация параметрического описания.

$\forall_{Abc}(\neg(b = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to \text{set}_z(\exists_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&$
$0 < x\ \&\ z = x\exp(iby/c)\ \&\ A(x, y))) = \text{set}_z(\exists_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&$
$0 < x\ \&\ z = x\exp(iy)\ \&\ A(x, cy/b))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

31. Нормализатор общей стандартизации "нормСтепень".

(a) Переход к вещественной степени.

(b) Единица в показателе степени.

(c) Ноль в показателе степени.

(d) Единица в основании степени.

(e) Ноль в основании степени.

(f) Степень мнимой единицы.

(g) Вынесение степени мнимой единицы в отдельный множитель.

(h) Квадратный корень из вещественного отрицательного числа.

$\forall_a(a - \text{число}\ \&\ a < 0 \to \sqrt{a} = \sqrt{-a}i)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

(i) Произведение в основании степени.

$\forall_{abn}((ab)^n = a^n b^n)$

Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Используется указатель "комплексное".

(j) Дробь в основании степени.

$\forall_{abn}((a/b)^n = a^n/b^n)$

Переменная n идентифицируется с целочисленной константой.

(k) Повторное возведение в степень.
$\forall_{amn}((a^m)^n = a^{mn})$
Переменные m, n идентифицируются с целочисленными константами.

(l) Возведение в квадрат комплексной константы.
$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi)$
Переменные a, b идентифицируются с константными выражениями. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

(m) Минус в основании степени.
$\forall_{ab}(b - \mathrm{rational}$ & числитель$(b) - \mathrm{even} \rightarrow (-a)^b = a^b)$
$\forall_a(a -$ число $\rightarrow \sqrt{-a} = i\sqrt{a})$
Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

(n) Корень из чисто мнимого числа.

(o) Квадратный корень из комплексного числа.

Приемы, связанные с символом "Синус"

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a -$ число $\rightarrow \sin a = \sin a)$

   Слева синус комплексный, справа - вещественный. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Чисто мнимый аргумент.

   $\forall_x(x -$ число $\rightarrow \sin(ix) = i \operatorname{sh} x)$

   Гиперболический синус вещественный, остальные операции комплексные. Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Выражение через экспоненту.

   $\forall_z(z -$ комплексное $\rightarrow \sin z = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием блокируется при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

   (a) Текущая задача на преобразование имеет цель "быстрпреобр"либо "комплексное".

   (b) Текущая задача на описание имеет цель "исследовать" либо "редакция".

   (c) Преобразуемое выражение расположено под комплексным интегралом.

   (d) Задача имеет комментарий "рядтейлора", указывающий, что предпринимается предварительное преобразование для разложения в ряд Тейлора.

   (e) Текущая задача на преобразование имеет цель "формулатейлора ...".

   (f) Выражение входит в посылку задачи на исследование и связано внешними кванторами либо описателями.

   (g) Выражение расположено внутри терма "комплвычет(...)".

Уровень срабатывания приема равен 4.

4. Синус суммы.

   $\forall_{ab}(\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Преобразуемое выражение содержит мнимую единицу. В случае содержащего неизвестные подвыражения условия задачи на описание прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

5. Вынесение минуса.

   $\forall_a(\sin a = -\sin a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

6. Множитель аргумента - мнимая единица.

   $\forall_x(\sin(ix) = i \operatorname{sh} x)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

7. Уравнение для синуса.

   $\forall_{az}(\sin z = a \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ z = \operatorname{Arcsin}(a,n)))$

   Посредством $\operatorname{Arcsin}(a,n)$ обозначено выражение "ветвьарксинуса(a,n)" - значение n-й ветви арксинуса комплексного числа a. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение z содержит неизвестные, выражение a - не содержит. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 5.

8. Преобразование дробного слагаемого аргумента к виду суммы дробей.

   $\forall_{abcdefn}(f = (a+b)^n c/d + e \rightarrow \sin((a+b)^n c/d + e) = \sin f)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандПлюс". Переменная n идентифицируется с натуральной константой, меньшей 4. Хотя бы одно из выражений c, d, n не тождественно единичное. В случае подвыражения условия задачи на описание прием блокируется, если a, b известны, а c содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 1.

9. Нормализатор общей стандартизации "нормСинус".

   В нормализаторе имеются всего два приема, аналогичные приведенным выше - "Вещественный операнд" и "Чисто мнимый операнд".

Приемы, связанные с символом "Косинус"

Так как приемы аналогичны приемам символа "Синус", ограничиваемся лишь указанием их теорем.

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \cos a = \cos a)$

2. Чисто мнимый аргумент.

   $\forall_x(x - \text{число} \rightarrow \cos(ix) = \operatorname{ch} x)$

3. Выражение через экспоненту.

   $\forall_z(z-$ комплексное $\rightarrow \cos z = (\exp(iz)+\exp(-iz))/2)$

4. Косинус суммы.

   $\forall_{ab}(\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$

5. Отбрасывание минуса.

   $\forall_a(\cos(-a) = \cos a)$

6. Множитель аргумента - мнимая единица.

   $\forall_x(\cos(ix) = \operatorname{ch} x)$

7. Уравнение для косинуса.

   $\forall_{az}(\cos z = a \leftrightarrow \exists_n(n-$ целое $\&\ z = \operatorname{Arccos}(a,n)))$

8. Преобразование дробного слагаемого аргумента к виду суммы дробей.

9. Нормализатор общей стандартизации "нормКосинус".

Приемы, связанные с символом "Тангенс"

Аналогично двум предыдущим разделам.

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a-$ число $\&\ \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} a)$

2. Чисто мнимый аргумент.

   $\forall_x(x-$ число $\rightarrow \operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{th} x)$

3. Выражение через экспоненту.

   $\forall_z(z-$ комплексное $\rightarrow \operatorname{tg} z = (\exp(iz)-\exp(-iz))/(\exp(iz)+\exp(-iz)))$

4. Уравнение для тангенса.

   $\forall_{az}(\operatorname{tg} z = a \leftrightarrow \exists_n(n-$ целое $\&\ z = \operatorname{Arctg}(a,n)))$

5. Нормализатор общей стандартизации "нормТангенс".

   Нормализатор имеет единственный прием "Вещественный операнд".

Приемы, связанные с символом "Котангенс"

Аналогично предыдущему.

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a-$ число $\rightarrow \operatorname{ctg} a = \operatorname{ctg} a)$

2. Чисто мнимый аргумент.

   $\forall_x(x-$ число $\rightarrow \operatorname{ctg}(ix) = -i \operatorname{cth} x)$

3. Выражение через экспоненту.

   $\forall_z(z-$ комплексное $\rightarrow \operatorname{ctg} z = (\exp(iz)+\exp(-iz))/(\exp(iz)-\exp(-iz)))$

4. Уравнение для котангенса.

   $\forall_{az}(\operatorname{ctg} z = a \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ z = \operatorname{Arcctg}(a, n)))$

5. Нормализатор общей стандартизации "нормКотангенс".

   Нормализатор имеет единственный прием "Вещественный операнд".

Приемы, связанные с символом "Арксинус"

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a - \text{число} \to \arcsin a = \arcsin a)$

   Левый арксинус комплексный, правый - вещественный. Уровень срабатывания равен 1.

2. Выражение через логарифм.

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \to \arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1 - x^2}))$

   У комплексного логарифма берется главное значение. Прием имеет заголовок "воройтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

3. Ветвь арксинуса.

   $\forall_{nz}(\operatorname{Arcsin}(z, n) = -i \ln(iz + (-1)^n \sqrt{1 - z^2}) + 2[n/2]\pi)$

   Посредством $\operatorname{Arcsin}(z, n)$ обозначено выражение "ветвьарксинуса(a, n)" - значение n -й ветви арксинуса комплексного числа a. Прием имеет заголовок "воройтерм". Либо выражение z имеет вещественное значение, либо оно содержит мнимую единицу. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "Арккосинус"

Аналогично предыдущему разделу.

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a - \text{число} \to \arccos a = \arccos a)$

2. Выражение через логарифм.

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \to \arccos x = -i \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$

3. Ветвь арккосинуса.

   $\forall_{nz}(\operatorname{Arccos}(z, n) = -i \ln(z + (-1)^n \sqrt{z^2 - 1}) + 2[n/2]\pi)$

Приемы, связанные с символом "Арктангенс"

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a - \text{число} \to \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg} a)$

2. Выражение через логарифм.

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \to \operatorname{arctg} x = -(i \ln((1 + ix)/(1 - ix))/2))$

3. Ветвь арккосинуса.

   $\forall_{nz}(\operatorname{Arctg}(z, n) = -(i \ln((1 + iz)/(1 - iz))/2) + \pi n)$

Приемы, связанные с символом "Арккотангенс"

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \operatorname{arcctg} a = \operatorname{arcctg} a)$

2. Выражение через логарифм.

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \rightarrow \operatorname{arcctg} x = i\ln((x-i)/(x+i))/2)$

3. Ветвь арккосинуса.

   $\forall_{nz}(\operatorname{Arctg}(z,n) = i\ln((z-i)/(z+i))/2 + \pi n)$

Приемы, связанные с символом "Логарифм"

1. Вещественный аругмент.

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \&\ b - \text{число} \ \&\ 0 < a \ \&\ 0 < b \ \&\ \neg(a - 1 = 0) \rightarrow \log_a b = \log_a b)$

   Левый логарифм комплексный, правый - вещественный. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

2. Главное значение.

   $\forall_z(\ln z = \ln|z| + i\arg(z))$

   Левый логарифм комплексный, правый - вещественный. Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение z содержит мнимую единицу. В задачах на преобразование, имеющих цель "комплексное", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

3. Ветвь натурального логарифма.

   $\forall_{nz}(\operatorname{Ln}(z,n) = ln|z| + (\arg(z) + 2\pi n)i)$

   Логарифм в заменяющей части вещественный. Прием имеет заголовок "второйтерм". Либо усматривается, что выражение z имеет вещественное значение, либо это выражение содержит мнимую единицу. Уровень срабатывания приема равен 2.

4. Уравнение с логарифмом.

   $\forall_z(\ln z = a \leftrightarrow z = \exp a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение z содержит неизвестные, а выражение a - не содержит.

5. Усмотрение логарифма.

   $\forall_{abcpz}(iap - c = 0 \rightarrow p(a\ln|z| + b) + c\arg(z) = p(a\ln z + b))$

   Левый логарифм вещественный, правый - комплексный. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задачах на преобразование, имеющих цель "комплексное". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

6. Нормализатор общей стандартизации "нормЛогарифм".

(a) Определение логарифма.
$\forall_z(\ln z = \ln|z| + i\arg(z))$
Выражение z содержит мнимую единицу. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Вещественный операнд.
$\forall_{ab}(a$ – число & b – число $\to \log_a b = \log_a b)$
Преобразуемый терм не содержит мнимой единицы. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормНатурлог".

Нормализатор обрабатывает выражение $\mathrm{Ln}(z, n)$ для n-й ветви логарифма. Он имеет единственный прием:

$\forall_{nz}(\mathrm{Ln}(z, n) = \ln|z| + (\arg(z) + 2\pi n)i)$

Либо выражение z содержит мнимую единицу, либо усматривается, что его значение вещественное.

Приемы, связанные с комплексными гиперболическими функциями

1. Вещественный аргумент.

$\forall_a(a$ – число $\to \mathrm{sh}\, a = \mathrm{sh}\, a)$

$\forall_a(a$ – число $\to \mathrm{ch}\, a = \mathrm{ch}\, a)$

$\forall_a(a$ – число $\to \mathrm{th}\, a = \mathrm{th}\, a)$

$\forall_a(a$ – число $\to \mathrm{cth}\, a = \mathrm{cth}\, a)$

Левая операция комплексная, правая - вещественная. Приемы имеют заголовок "615второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Чисто мнимый аргумент.

$\forall_x(x$ – число $\to \mathrm{sh}(ix) = i\sin x)$

$\forall_x(x$ – число $\to \mathrm{ch}(ix) = \cos x)$

$\forall_x(x$ – число $\to \mathrm{th}(ix) = i\,\mathrm{tg}\, x)$

$\forall_x(x$ – число $\to \mathrm{cth}(ix) = -i\,\mathrm{ctg}\, x)$

Тригонометрическая операция вещественная, остальные операции комплексные. Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Выражение через экспоненту.

$\forall_z(z$ – комплексное $\to \mathrm{sh}\, z = (\exp(z) - \exp(-z))/2)$

$\forall_z(z$ – комплексное $\to \mathrm{ch}\, z = (\exp(z) + \exp(-z))/2)$

$\forall_z(z$ – комплексное $\to \mathrm{th}\, z = (\exp(z) - \exp(-z))/(\exp(z) + \exp(-z)))$

$\forall_z(z$ – комплексное $\to \mathrm{cth}\, z = (\exp(z) + \exp(-z))/(\exp(z) - \exp(-z)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Прием блокируется в следующих случаях:

(a) В задаче на преобразование, имеющей цель "комплексное".

(b) При редактировании ответа задачи на описание.

(c) При наличии в задаче на описание либо на исследование цели "особыеточки", означающей, что предпринимается исследование функции на особые точки.

(d) При преобразовании выражения, которое требуется разложить в ряд Тейлора.

Уровень срабатывания приемов равен 4.

4. Минус под функцией.

$\forall_a(\operatorname{sh}(-a) = -\operatorname{sh} a)$

$\forall_a(\operatorname{ch}(-a) = \operatorname{ch} a)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Функция от суммы.

$\forall_{ab}(\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b)$

$\forall_{ab}(\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Сумма содержит мнимую единицу. При преобразовании содержащего неизвестные подвыражения условия задачи на описание прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

6. Множитель аргумента мнимая единица.

$\forall_z(\operatorname{sh}(iz) = i \sin z)$

$\forall_z(\operatorname{ch}(iz) = \cos z)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

7. Сумма и разность гиперболических синуса и косинуса.

$\forall_{ab}(a \operatorname{sh} b + a \operatorname{ch} b = a \exp b)$

$\forall_{ab}(-a \operatorname{sh} b + a \operatorname{ch} b = a \exp(-b))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

8. Уравнение для гиперболическй функции.

$\forall_{az}(\operatorname{sh} z = a \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ z = \operatorname{Arsh}(a, n)))$

$\forall_{az}(\operatorname{ch} z = a \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ z = \operatorname{Arch}(a, n)))$

$\forall_{az}(\operatorname{th} z = a \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ z = \operatorname{Arth}(a, n)))$

$\forall_{az}(\operatorname{cth} z = a \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ z = \operatorname{Arcth}(a, n)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание. Выражение z содержит неизвестные, выражение a - не содержит. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 5.

Приемы, связанные с комплексными обратными гиперболическими функциями

1. Вещественный аргумент.

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{arsh}a = \text{arsh}a)$

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{arch}a = \text{arch}a)$

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{arth}a = \text{arth}a)$

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{arccth}a = \text{arccth}a)$

   Левая операция комплексная, правая - вещественная. Приемы имеют заголовок "аторойтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Выражение через логарифм.

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \rightarrow \text{arsh}x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}))$

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \rightarrow \text{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))$

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \rightarrow \text{arth}x = \ln((1 + x)/(1 - x))/2)$

   $\forall_x(x - \text{комплексное} \rightarrow \text{arccth}x = \ln((1 + x)/(x - 1))/2)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

3. Ветвь обратной гиперболической функции.

   $\forall_{nz}(\text{Arsh}(z, n) = \ln(z + (-1)^n\sqrt{1 + z^2}) + 2[n/2]\pi i)$

   $\forall_{nz}(\text{Arch}(z, n) = \ln(z + (-1)^n\sqrt{z^2 - 1}) + 2[n/2]\pi i)$

   $\forall_{nz}(\text{Arth}(z, n) = \ln((1 + z)/(1 - z))/2 + 2\pi n i)$

   $\forall_{nz}(\text{Arcth}(z, n) = \ln((z + 1)/(z - 1))/2 + 2\pi n i)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Либо выражение z содержит мнимую единицу, либо усматривается, что его значение вещественное. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с множествами точек комплексной плоскости

1. Переход к комплексным координатам множества точек от вещественных координат.

   $\forall_f(\text{комплформа}(\text{set}_{xy}(f(x, y)\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})) =$
   $\text{set}_z(f((z + \text{сопряженное}(z))/2, (\text{сопряженное}(z) - z)i/2)\ \&\ z - \text{комплексное}))$

   $\forall_f(\text{комплформа}(\text{set}_{xy}(x = a\ \&\ f(y)\ \&\ y - \text{число})) =$
   $\text{set}_z((z+\text{сопряженное}(z))/2 = a\ \&\ f((\text{сопряженное}(z)-z)i/2)\ \&\ z-\text{комплексное}))$

   $\forall_f(\text{комплформа}(\text{set}_{xy}(y = a\ \&\ f(x)\ \&\ x - \text{число})) =$
   $\text{set}_z((\text{сопряженное}(z)-z)i/2 = a\ \&\ f((z+\text{сопряженное}(z))/2)\ \&\ z-\text{комплексное}))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подвыражению условия задачи. Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 3.

2. Переход к комплексному числу от пары вещественных чисел.

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \text{комплформа}((a,b)) = a + bi)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

3. Теоретико - множественные операции.

   $\forall_{AB}(\text{комплформа}(A \setminus B) = \text{комплформа}(A) \setminus \text{комплформа}(B))$

   $\forall_{AB}(\text{комплформа}(A \cup B) = \text{комплформа}(A) \cup \text{комплформа}(B))$

   $\forall_{AB}(\text{комплформа}(A \cap B) = \text{комплформа}(A) \cap \text{комплформа}(B))$

   $\forall_{ab}(a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(a \times b) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&$
   $\text{Re}(z) \in a\ \&\ \text{Im}(z) \in b))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

4. Комплексные координаты специальных множеств точек.

   (a) Дуга окружности.

   $\forall_{ABCKabcd}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{комплформа}(\text{коорд}(A,K)) = a\ \&$
   $\text{комплформа}(\text{коорд}(B,K)) = b\ \&\ \text{комплформа}(\text{коорд}(C,K)) = c\ \&$
   $d = \{\arg(b-a), \arg(c-a)\} \rightarrow \text{комплформа}(\text{коорд}(\text{дуга}(ABC),K)) =$
   $\text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ |z-a| = \ -b|\ \&\ \inf d \leq \arg(z)\ \&\ \arg(z) \leq \sup d))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Их выражения обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Выражения a, b, c не содержат символов "коорд" и "комплформа". Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Окружность.

   $\forall_{ABKabc}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{комплформа}(\text{коорд}(A,K)) = a\ \&$
   $\text{комплформа}(\text{коорд}(B,K)) = b\ \&\ = |b-a| \rightarrow$
   $\text{комплформа}(\text{коорд}(\text{окружность}(AB),K)) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&$
   $|z-a| = c))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

   (c) Луч.

   $\forall_{ABCKab}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{комплформа}(\text{коорд}(A,K)) = a\ \&$
   $\text{комплформа}(\text{коорд}(C,K)) = b\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,C) \rightarrow$
   $\text{комплформа}(\text{коорд}(\text{луч}(AB),K)) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ \neg(z=a)\ \&$
   $\arg(z-a) = \arg(b-a)) \cup \{a\})$

   $\forall_{ABCKab}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{комплформа}(\text{коорд}(A,K)) = a\ \&$
   $\text{комплформа}(\text{коорд}(C,K)) = b\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,C) \rightarrow$
   $\text{комплформа}(\text{коорд}(\text{внутренность}(\text{луч}(AB)),K)) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&$
   $\neg(z=a)\ \&\ \arg(z-a) = \arg(b-a)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй и третий выделены указателем "идентификатор", четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Выражения a, b не содержат символов "коорд" и "комплформа". Уровень срабатывания равен 3.

(d) Отрезок.

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & комплформа(коорд$(A, K)) = a$ & комплформа(коорд$(B, K)) = b$ & $\arg(a) = \arg(b)$ & $c = |a|$ & $d = |b|$ & $0 < d - c$ & $0 < c \rightarrow$ комплформа(коорд(отрезок$(AB), K)) =$ set$_z$(z – комплексное & $\arg(z) = \arg(a)$ & $c \leq |z|$ & $|z| \leq d$))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат символов "коорд" и "комплформа". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & комплформа(коорд$(A, K)) = a$ & комплформа(коорд$(B, K)) = b$ & $c = \mathrm{Re}(a)$ & $c = \mathrm{Re}(b)$ & $d = \mathrm{Im}(a)$ & $e = \mathrm{Im}(b)$ & $0 < e - d \rightarrow$ комплформа(коорд(отрезок$(AB), K)) =$ set$_z$(z – комплексное & $\mathrm{Re}(z) = c$ & $d \leq \mathrm{Im}(z)$ & $\mathrm{Im}(z) \leq e$))

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & комплформа(коорд$(A, K)) = a$ & комплформа(коорд$(B, K)) = b$ & $c = \mathrm{Im}(a)$ & $c = \mathrm{Im}(b)$ & $d = \mathrm{Re}(a)$ & $e = \mathrm{Re}(b)$ & $0 < e - d \rightarrow$ комплформа(коорд(отрезок$(AB), K)) =$ set$_z$(z – комплексное & $\mathrm{Im}(z) = c$ & $d \leq \mathrm{Re}(z)$ & $\mathrm{Re}(z) \leq e$))

Аналогично предыдущему, но проверочным оператором обрабатывается только последний антецедент.

$\forall_{ABKab}$(прямкоорд(K) & комплформа(коорд$(A, K)) = a$ & комплформа(коорд$(B, K)) = b \rightarrow$ комплформа(коорд(отрезок$(AB), K)) =$ set$_z$(z–комплексное & $\neg(z = a)$ & $\arg(z-a) = \arg(b-a)$ & $|z| \leq |b-a|$)$\cup\{a\}$)

Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Угол.

$\forall_{ABCKabc}$(прямкоорд(K) & комплформа(коорд$(A, K)) = a$ & комплформа(коорд$(B, K)) = b$ & комплформа(коорд$(C, K)) = c$ & $p = \arg(b - a)$ & $q = \arg(c - a)$ & $0 < q - p$ & $q - p \leq \pi \rightarrow$ комплформа(коорд(внутренность(Угол$(BAC)), K)) =$ set$_z$(z – комплексное & $\neg(z = a)$ & $p < \arg(z - a)$ & $\arg(z - a) < q$))

Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Сектор.

$\forall_{ABCKabc}$(прямкоорд(K) & комплформа(коорд$(A, K)) = a$ & комплформа(коорд$(B, K)) = b$ & комплформа(коорд$(C, K)) = c$ & $p = \arg(b - a)$ & $q = \arg(c - a)$ & $0 < q - p$ & $q - p \leq \pi \rightarrow$ комплформа(коорд(внутренность(сектор$(BAC)), K)) =$ set$_z$(z–комплексное & $\neg(z = a)$ & $p < \arg(z-a)$ & $\arg(z-a) < q$ & $|z-a| < |b - a|$))

Аналогично предыдущему.

(g) Полуплоскость.

$\forall_{ABCKabcdefpqr}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & коорд$(C, K) = (e, f)$ & $p = d - b$ & $q = a - c$ & $r = ad - bc \rightarrow$ комплформа(коорд(внутренность(полуплоскость(прямая$(AB), C)), K)) =$ set$_z$(z – комплексное & $0 < (p\mathrm{Re}(z) + q\mathrm{Im}(z) - r)(pe + qf - r)$))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

(h) Полукруг.

$\forall_{ABC}$(полукруг(ABC) = полуплоскость(прямая(AB), C) $\cap$ круг(AB))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение расположено внутри терма "комплформа(...)". Уровень срабатывания равен 1.

(i) Круг.

$\forall_{ABKabc}$(прямкоорд(K) & комплформа(коорд(A, K)) = a & комплформа(коорд(B, K)) = b & $c = |b - a| \rightarrow$ комплформа(коорд(внутренность(круг(AB)), K)) = set$_z$(z – комплексное & $|z - a| < c$))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, два последних - обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражения a, b не содержат символов "коорд" и "комплформа". Уровень срабатывания равен 2.

5. Переход от комплексного числа к паре вещественных чисел.

   $\forall_{ab}$(a – число & b – число $\rightarrow$ вещформа($a + bi$) = (a, b))

   $\forall_a$(a – число $\rightarrow$ вещформа(a) = $(a, 0)$)

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

6. Пустое множество.

   вещформа($\emptyset$) = $\emptyset$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

7. Конечное множество точек.

   $\forall_{ab}$(вещформа($\{a; b\}$) = {вещформа(a)} $\cup$ вещформа($\{; b\}$))

   Напомним, что $\{a; b\}$ обозначает "префикс(a, b)". Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

8. Переход от комплексных координат множества точек к вещественным координатам.

   $\forall_P$(вещформа(set$_z$($P(z)$ & z – комплексное)) = set$_{xy}$(x – число & y – число & $P(x + iy)$))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Прием блокируется в следующих двух случаях:

   (a) Текущая задача на описание имеет цель "точки". Такая цель задачи на описание либо на исследование означает, что требуется получить бескоординатное описание множества точек.

   (b) Текущая задача на исследование имеет цель "точки", причем преобразуемое выражение является одной из частей корневого равенства, а другая часть этого равенства - переменная X. Либо имеется комментарий (точки вид X), означающий, что уже получено бескоординатное описание для X, либо задача имеет посылку "$X = T$, где заголовок выражения T отличен от символа "точки".

Уровень срабатывания приема равен 4.

9. Геометрическая характеризация множества точек, определяемых через комплексные координаты.

   (a) Равенство модулей сумм.

   $\forall_{ABCKab}$(прямкоорд(K) & $A=$ точки(вещформа($\mathrm{set}_z(|z+a|=|z+b|$ & $z-$ комплексное$)), K) \rightarrow B=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(-a))$ & $C=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(-b))$ & $A=$ перпендикуляр(прямая(BC), доляотрезка$(B,C,1/2)))$

   Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задаче на исследование, имеющей цель "точки". Такая цель означает, что нужно получить бескоординатное описание множества точек, обозначенного неизвестной. Антецеденты идентифицируются с посылками. Прием вводит новые переменные B, C. Создается комментарий (точки вид A). Уровень срабатывания приема равен 2.

   (b) Усмотрение прямой с проколотой точкой.

   $\forall_{ABCKab}$(прямкоорд(K) & $A=$ точки(вещформа($\mathrm{set}_z(\neg(z+a=0)$ & $z-$ комплексное & $2|\arg(z+a)+b|-\pi=0)), K) \rightarrow B=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(-a))$ & $C=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(-a+\sin b+i\cos b))$ & $A=$ прямая$(BC)\setminus\{B\}$ & $B-$ точка & $C-$ точка)

   Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задаче на исследование, имеющей цель "точки". Антецеденты идентифицируются с посылками. Отсутствует посылка вида "$A=P$", где выражение P не содержит символа "точки". Прием вводит новые переменные B, C. Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Усмотрение круга либо окружности.

   $\forall_{ABCEKbc}$(прямкоорд(K) & $A=$ точки(вещформа($\mathrm{set}_z(|z+b|<c$ & $z-$ комплексное & $P(z))), K) \rightarrow B=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(-b))$ & $C=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(c-b))$ & $E=$ точки(вещформа($\mathrm{set}_z(P(z)$ & $z-$ комплексное$)), K)$ & $B-$ точка & $C-$ точка & $A=E\cap$ внутренность(круг$(BC)))$

   $\forall_{ABCKbc}$(прямкоорд(K) & $A=$ точки(вещформа($\mathrm{set}_z(|z+b|<c$ & $z-$ комплексное$)), K) \rightarrow B=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(-b))$ & $C=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(c-b))$ & $B-$ точка & $C-$ точка & $A=$ внутренность(круг$(BC)))$

   $\forall_{ABCKbc}$(прямкоорд(K) & $A=$ точки(вещформа($\mathrm{set}_z(|z+b|\leq c$ & $z-$ комплексное$)), K) \rightarrow B=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(-b))$ & $C=$ тчкоорд($K,$ вещформа$(c-b))$ & $B-$ точка & $C-$ точка & $A=$ круг$(BC))$

   Приемы имеют заголовок "вывод" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "точки". Антецеденты идентифицируются с посылками. Вводятся новые переменные B, C, E. Уровень срабатывания приемов равен 3.

   (d) Усмотрение кольца.

   $\forall_{ABCDEFKabc}$(прямкоорд(K) & $A=$ точки(вещформа($\mathrm{set}_z(a<|z+b|$ & $|z+b|<c$ & $z-$ комплексное & $P(z))), K) \rightarrow$

$B =$ тчкоорд$(K,$ вещформа$(-b))$ & $C =$ тчкоорд$(K,$ вещформа$(a-b))$ & $D =$ тчкоорд$(K,$ вещформа$(c-b))$ & $E =$ точки(вещформа(set$_z(P(z)$ & z – комплексное$)), K)$ & B – точка & C – точка & D – точка & $A = E \cap$ внутренность(кольцо$(BCD)))$

$\forall_{ABCDEFKabc}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(a \leq |z+b|$ & $|z+b| \leq c$ & z – комплексное & $P(z))), K) \rightarrow$ $B =$ тчкоорд$(K,$ вещформа$(-b))$ & $C =$ тчкоорд$(K,$ вещформа$(a-b))$ & $D =$ тчкоорд$(K,$ вещформа$(c-b))$ & $E =$ точки(вещформа(set$_z(P(z)$ & z – комплексное$)), K)$ & B – точка & C – точка & D – точка & $A = E \cap$ кольцо$(BCD))$

Приемы имеют заголовок "вывод" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "точки". Антецеденты идентифицируются с посылками. Вводятся новые переменные B, C, D, E. Уровень срабатывания приемов равен 2.

(e) Усмотрение полуплоскости.

$\forall_{ABCDKab}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(a\mathrm{Im}(z) < b$ & z – комплексное$)), K)$ & $0 < a \rightarrow B =$ тчкоорд$(K, (0, b/a))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (1, b/a))$ & $D =$ тчкоорд$(K, (0, b/a - 1))$ & $A =$ внутренность(полуплоскость(прямая$(BC), D)))$

$\forall_{ABCDKab}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(b < a\mathrm{Im}(z)$ & z – комплексное$)), K)$ & $0 < a \rightarrow B =$ тчкоорд$(K, (0, b/a))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (1, b/a))$ & $D =$ тчкоорд$(K, (0, b/a + 1))$ & $A =$ внутренность(полуплоскость(прямая$(BC), D)))$

$\forall_{ABCDKab}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(a\mathrm{Re}(z) < b$ & z – комплексное$)), K)$ & $0 < a \rightarrow B =$ тчкоорд$(K, (b/a, 0))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (b/a, 1))$ & $D =$ тчкоорд$(K, (b/a - 1, 0))$ & $A =$ внутренность(полуплоскость(прямая$(BC), D)))$

$\forall_{ABCDKab}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(b < a\mathrm{Re}(z)$ & z – комплексное$)), K)$ & $0 < a \rightarrow B =$ тчкоорд$(K, (b/a, 0))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (b/a, 1))$ & $D =$ тчкоорд$(K, (b/a + 1, 0))$ & $A =$ внутренность(полуплоскость(прямая$(BC), D)))$

$\forall_{ABCDKabcde}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(\neg(z = a + bi)$ & z – комплексное & $|\arg(cz+d)| < e)), K)$ & $0 < c$ & $d + ac + bci = 0$ & a – число & b – число & c – число $\rightarrow$ $B =$ тчкоорд$(K, (a, b))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (a + \cos e, b + \sin e))$ & $D =$ тчкоорд$(K, (a+1, b))$ & $A =$ внутренность(полуплоскость(прямая$(BC), D)))$

$\forall_{ABCDKabc}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(c < a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z)$ & z – комплексное$)), K)$ & $\neg(a = 0) \rightarrow B =$ тчкоорд$(K, (c/a, 0))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (c/a + b, -a))$ & $D =$ тчкоорд$(K, (c/a + \mathrm{sg}(a)))$ & $A =$ внутренность(полуплоскость(прямая$(BC), D)))$

$\forall_{ABCDKabc}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) < c$ & z – комплексное$)), K)$ & $\neg(a = 0) \rightarrow B =$ тчкоорд$(K, (c/a, 0))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (c/a + b, -a))$ & $D =$ тчкоорд$(K, (c/a - \mathrm{sg}(a)))$ & $A =$ внутренность(полуплоскость(прямая$(BC), D)))$

$\forall_{ABCDKabc}$(прямкоорд(K) & $A =$ точки(вещформа(set$_z(b < \arg(z+a)$ & $\arg(z+a) < c$ & z – комплексное & $\neg(z + a = 0))), K)$ & $c - b = \pi \rightarrow$

$B = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-a))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-a+\cos c+ i\sin c))\ \&\ D = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-a+\cos((b+c)/2)+i\sin((b+c)/2)))\ \&\ A = \text{внутренность}(\text{полуплоскость}(\text{прямая}(BC), D)))$

Аналогично предыдущему.

(f) Усмотрение угла.

$\forall_{ABCDKabc}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ A = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(b < \arg(z+a)\ \&\ \arg(z+a) < c\ \&\ z - \text{комплексное}\ \&\ \neg(z+a=0))), K)\ \&\ c-b < \pi \to B = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-a))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-a+\cos c+ i\sin c))\ \&\ D = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-a+\cos b+i\sin b))\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ A = \text{внутренность}(\text{Угол}(CBD)))$

Прием имеет заголовок "вывод"и применяется в задачах на исследование, имеющих цель "точки". Отсутствует посылка вида "$A = P$, где выражение P не содержит символа "точки". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Вводятся новые переменные B, C, D. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Усмотрение полосы.

$\forall_{ABCDEKabc}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ A = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(|a+b\text{Re}(z)| < c\ \&\ z - \text{комплексное})), K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b=0) \to B = \text{тчкоорд}(K, ((c-a)/b, 0))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K, ((-c-a)/b, 0))\ \&\ D = \text{тчкоорд}(K, ((c-a)/b, 1))\ \&\ E = \text{тчкоорд}(K, ((-c-a)/b, 1))\ \&\ A = \text{внутренность}(\text{полоса}(\text{прямая}(BD), \text{прямая}(CE))))$

$\forall_{ABCDEKabcd}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ A = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(|a+b\text{Re}(z)+c\text{Im}(z)| < d\ \&\ z - \text{комплексное})), K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(c=0) \to B = \text{тчкоорд}(K, (0, (d-a)/c))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K, (1, (d-a-b)/c))\ \&\ D = \text{тчкоорд}(K, (0, (-d-a)/c))\ \&\ E = \text{тчкоорд}(K, (1, (-d-a-b)/c))\ \&\ A = \text{внутренность}(\text{полоса}(\text{прямая}(BC), \text{прямая}(DE))))$

$\forall_{ABCDEKPabcd}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ A = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(|a+b\text{Re}(z)+c\text{Im}(z)| < d\ \&\ P(z)\ \&\ z - \text{комплексное})), K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(c=0) \to B = \text{тчкоорд}(K, (0, (d-a)/c))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K, (1, (d-a-b)/c))\ \&\ D = \text{тчкоорд}(K, (0, (-d-a)/c))\ \&\ E = \text{тчкоорд}(K, (1, (-d-a-b)/c))\ \&\ F = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(P(z)\ \&\ z - \text{комплексное})), K)\ \&\ A = \text{внутренность}(\text{полоса}(\text{прямая}(BC), \text{прямая}(DE))) \cap F\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка})$

Приемы имеют заголовок "вывод" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "точки". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Вводятся новые переменные B, C, D, E. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Усмотрение внешности круга.

$\forall_{ABCEKbc}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ A = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(c < |z+b|\ \&\ z - \text{комплексное}\ \&\ P(z))), K) \to B = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-b))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(c-b))\ \&\ E = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(P(z)\ \&\ z - \text{комплексное})), K)\ \&\ A = E \cap \text{внешность}(\text{круг}(BC)))$

$\forall_{ABCKbc}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ A = \text{точки}(\text{вещформа}(\text{set}_z(c < |z+b|\ \&\ z - \text{комплексное})), K) \to B = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(-b))\ \&\ C = \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(c-b))\ \&\ A = \text{внешность}(\text{круг}(BC)))$

Приемы имеют заголовок "вывод" и применяются в задачах на исследование, имеющих цель "точки". Антецеденты идентифицируются с посылками. Вводятся новые переменные B, C, E. Уровень срабатывания приемов равен 3.

(i) Передача результатов характеризации во внешнюю задачу на описание.

Теоремы приемов этого раздела имеют вид "замещениеусловий(A)", где A - посылка, передаваемая во внешнюю задачу. Заголовки приемов - "замещениеусловий". Приемы применяются в задачах на исследование, имеющих цель "исследовать". Все уровни срабатывания равны 7.

i. Перпендикуляр к прямой, проходящий через заданную точку.
замещениеусловий($a =$ перпендикуляр(bc))
a - неизвестная внешней задачи на описание.

ii. Сопровождающая описание точка.
замещениеусловий($a =$ тчкоорд(b, c))
Переменная a встречается в посылке вида $x = t$, где x - неизвестная внешней задачи.

iii. Равенство, выражающее множество точек через теоретико-множественные операции.
замещениеусловий($a = b \setminus c$)
замещениеусловий($a = b \cap c$)
замещениеусловий($a = b \cup c$)
Переменная a - неизвестная внешней задачи на описание.

iv. Внутренность множества.
замещениеусловий($a =$ внутренность(b))
Аналогично предыдущему.

v. Внешность множества.
замещениеусловий($a =$ внешность(b))
Аналогично предыдущему.

vi. Полуплоскость.
замещениеусловий($a =$ полуплоскость(bc))
Аналогично предыдущему.

vii. Круг.
замещениеусловий($a =$ круг(bc))
Аналогично предыдущему.

viii. Полоса.
замещениеусловий($a =$ полоса(bc))
Аналогично предыдущему.

ix. Прямоугольник.
замещениеусловий(прямоугольник$(abcd)$)
Некоторая посылка содержит как неизвестную внешней задачи, так и выражение "фигура(набор$(abcd)$)".

(j) Отбрасывание в задаче на описание исходного задания множества точек.

$\forall_{ABK}(A =$ точки(вещформа$(B), K$))

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "точки". Указатель "эквивалентно" означает, что равенство заменяется на константу "истина". Проверяется наличие другого условия, содержащего A. Такое условие возникнет после того, как в блоке анализа текущей задачи будет сформирован ответ, который далее окажется перенесен в список условий. Уровень срабатывания равен 12.

(k) Линейное неравенство относительно переменной связывающей приставки внешнего описателя.

$\forall_{abx}(0 < b \to 0 < a + bx \leftrightarrow -a/b < x)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию надвыражения "класс(...)". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение a не содержит переменных связывающей приставки описателя "класс". Выражение b идентифицируется с произведением всех не содержащих переменных этой связывающей приставки сомножителей. Остаточное произведение x имеет подвыражение с заголовком "Модуль", либо "вещественнаячасть", либо "мнимаячасть", либо "аргумент", зависящее от переменных связывающей приставки. Заменяемое выражение не имеет надвыражения вида "равно(образ(A, B)C)". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abx}(b < 0 \to 0 < a + bx \leftrightarrow x < -a/b)$

Аналогично предыдущему.

10. Комплексные кривые.

(a) Ориентированный отрезок.

$\forall_{Kab}(\text{вещкривая}(\text{Комплотрезок}(a, b), K) =$
$\text{Отрезок}(\text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(a)), \text{тчкоорд}(K, \text{вещформа}(b))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

(b) Цепь кривых.

$\forall_{Kan}(\text{вещкривая}(\text{комплпуть}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})), K) =$
$\text{путь}(\lambda_i(\text{вещкривая}(a(i), K), i \in \{1, \ldots, n\})))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "развертка" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" как конечных наборов. Переменная a функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Ориентация кривой, заданной как "Оркрив(...)".

$\forall_{Ka}(\text{Ориент}(\text{Оркрив}(K, a)) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

11. Нормализатор общей стандартизации "нормкомплвнутр".

Пока нормализатор имеет единственный прием, определяющий внутренность прямоугольника:

$\forall_{abcdpqrs}(p = \mathrm{Re}(a)\ \&\ p = \mathrm{Re}(d)\ \&\ q = \mathrm{Re}(b)\ \&\ q = \mathrm{Re}(c)\ \&\ r = \mathrm{Im}(d)\ \&$
$r = \mathrm{Im}(c)\ \&\ s = \mathrm{Im}(a)\ \&\ s = \mathrm{Im}(b) \to \text{комплвнутр}(\text{комплотрезок}(a, b) \cup$
$\text{комплотрезок}(b, c) \cup \text{комплотрезок}(c, d) \cup \text{комплотрезок}(d, a)) =$
$\mathrm{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ \min(p, q) < \mathrm{Re}(z)\ \&\ \mathrm{Re}(z) < \max(p, q)\ \&$
$\min(r, s) < \mathrm{Im}(z)\ \&\ \mathrm{Im}(z) < \max(r, s)))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор".

12. Проверочный оператор "усмкомплконтур".

Кроме приема непосредственного усмотрения истинности из посылок, оператор имеет единственный прием для границы прямоугольника:

$\forall_{ab}(\text{комплконтур}(\text{комплграница}(\mathrm{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ |\mathrm{Re}(z)| < a\ \&$
$|\mathrm{Im}(z)| < b))))$

13. Синтезатор "контур" определения области, ограниченной замкнутой кривой на комплексной плоскости.

    Синтезатор реализует утверждение "Контур(A, B)". Входным данным служит выражение A, определяющее замкнутую ориентированную кривую на комплексной плоскости. Выходной переменной B присваивается выражение для области, ограниченной этой кривой.

    (a) Усмотрение из посылок.
    $\forall_{AB}(\text{Контур}(A, B) \to \text{Контур}(A, B))$
    Уровент срабатывания равен 1.

    (b) Внутренность окружности.
    $\forall_{abc}(\neg(a = 0) \to \text{Контур}(\text{Оркрив}(\text{set}_z(|az + b| = c \;\&\; z - \text{комплексное}), d),$
    $\text{set}_z(|z + b/a| < c/|a| \;\&\; z - \text{комплексное})))$

       Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

    (c) Внутренность многоугольника.
    $\forall_{APabn}(P = \text{комплпуть}(\lambda_i(\text{Комплотрезок}(a(i), b(i)), i \in \{1, \dots, n\})) \;\&$
    $a(1) = b(n) \;\&\; A = \text{комплвнутр}(\bigcup_{i=1}^{n} \text{комплотрезок}(a(i), b(i))) \to$
    $\text{Контур}(P, A))$

       Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Указатель "развертка" определяет рассмотрение описателя "отображение" как конечного набора и конечного объединения как обычного. Переменные a, b функциональные. Выражение A, после обработки нормализатором общей стандартизации, не имеет заголовка "комплвнутр". Уровень срабатывания приема равен 2.

    (d) Внутренность сегмента.
    $\forall_{abcde}(\neg(a = 0) \to \text{Контур}(\text{Оркрив}(\text{set}_z(|az + b| = c \;\&\; d \leq \mathrm{Im}(z) \;\&$
    $z - \text{комплексное}) \cup \text{set}_z(d = \mathrm{Im}(z) \;\&\; |az + b| \leq c \;\&\; z - \text{комплексное}), e),$
    $\text{set}_z(|z + b/a| < c/|a| \;\&\; d \leq \mathrm{Im}(z) \;\&\; z - \text{комплексное})))$

       Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

14. Объединение непересекающихся противоположных лучей.

    $\forall_{ABCabcdefmnpqrst}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; (ax + by + c = 0 \;\&$
    $dx + ey + f = 0) = (x = m \;\&\; y = n) \;\&\; (Ax + By + C = 0 \;\&$
    $px + qy + r = 0) = (x = s \;\&\; y = t) \;\&\; ds + et + f < 0 \;\&\; pm + qn + r < 0 \;\&$
    $aB - Ab = 0 \;\&\; aC - Ac = 0 \;\&\; bC - Bc = 0 \to$
    $\text{set}_z(z - \text{комплексное} \;\&\; a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) + c = 0 \;\&\; 0 < d\mathrm{Re}(z) + e\mathrm{Im}(z) + f) \cup$
    $\text{set}_z(z - \text{комплексное} \;\&\; A\mathrm{Re}(z) + B\mathrm{Im}(z) + C = 0 \;\&\; 0 < p\mathrm{Re}(z) + q\mathrm{Im}(z) + r) =$
    $\text{set}_z(a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) + c = 0 \;\&\; z - \text{комплексное}) \setminus \text{комплотрезок}(m + in, s + it))$

    $\forall_{ABCabcdefmnpqrst}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; (ax + by + c = 0 \;\&$
    $dx + ey + f = 0) = (x = m \;\&\; y = n) \;\&\; (Ax + By + C = 0 \;\&$
    $px + qy + r = 0) = (x = s \;\&\; y = t) \;\&\; ds + et + f < 0 \;\&\; pm + qn + r < 0 \;\&$
    $aB - Ab = 0 \;\&\; aC - Ac = 0 \;\&\; bC - Bc = 0 \to$
    $\text{set}_z(z - \text{комплексное} \;\&\; a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) + c = 0 \;\&\; 0 \leq d\mathrm{Re}(z) + e\mathrm{Im}(z) + f) \cup$

$\mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $A\mathrm{Re}(z) + B\mathrm{Im}(z) + C = 0$ & $0 \leq p\mathrm{Re}(z) + q\mathrm{Im}(z) + r) =$
$\mathrm{set}_z(a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) + c = 0$ & $z -$ комплексное$) \setminus$ комплинтервал$(m + in, s + it))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первые три антецедента, а также шестой и седьмой обрабатываются проверочными операторами. Остальные - выделены указателем "идентификатор". Левые части четвертого и пятого антецедентов обрабатываются задачами на описание, разрешающими их относительно вспомогательных переменных x, y. Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения a, b, d, e, p, q, A, B. Уровень срабатывания приемов равен 2.

15. Усмотрение ответа задачи на описание множества комплексных точек.

    $z -$ комплексное & $a < b\mathrm{Re}(z) + c\mathrm{Im}(z)$ & $\neg(z = d)$

    Прием имеет заголовок "ответзадачи". Теорема приема представляет собой конъюнкцию термов, идентифицируемых со всеми содержащими неизвестные условиями задачи на описание. Точка привязки выбирается во втором конъюнктивном члене. Третий конъюнктивный член может идентифицироваться с несколькими условиями. Переменная z представляет собой неизвестную; выражения a, b, c, d не содержат неизвестных. Указатели "подстановка" допускают нулевые значения b, c, но хотя бы одно из них должно быть ненулевым. Уровень срабатывания равен 2.

    $z -$ комплексное & $b\mathrm{Re}(z) + c\mathrm{Im}(z) < a$ & $\neg(z = d)$

    $z -$ комплексное & $|z + a| = b$ & $\neg(z = c)$

    Аналогично предыдущему.

16. Нормализатор общей стандартизации "нормкомплформа".

    Нормализатор пока имеет единственный прием, выполняющий переход к комплексному числу от пары вещественных чисел:

    $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow$ комплформа$((a, b)) = a + bi)$

    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

Приемы, связанные с сивмолом "комплцелое"

1. Усмотрение невыполнимости уравнения в целых комплексных числах с помощью модулярной арифметики.

   $\forall_{ABabcnp}(a(n) + b(n) = c$ & простое(p) & комплцелое$(a(n))$ & комплцелое$(b(n))$ & комплцелое(c) & $n -$ натуральное & $A = \mathrm{set}_x(\exists_d(d -$ натуральное &
   $x =$ вычеткомпл$(a(d), p)))$ & $B = \mathrm{set}_x(\exists_d(d -$ натуральное &
   $x =$ вычеткомпл$(c - b(d), p)))$ & непересек$(A, B) \rightarrow$ ложь$)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию в его левой части комплексной степени f^n с константным основанием f. Переменная n - неизвестная. Второй антецедент выделен указателем "программа". Он перечисляет последовательные простые числа p. Седьмой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Правые части седьмого и восьмого антецедентов обрабатываются нормализатором "опркласс", предпринимающим попытку преобразовать описатель "класс" к виду конечного списка. Проверяется, что эти попытки успешные. веден средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 5.

2. Проверочный оператор "усмкомплцелое".

   Все приемы оператора срабатывают на уровне 1.

   (a) Комплексное число задано явным образом.
   $\forall_{mn}(m -$ целое & $n -$ целое $\to$ комплцелое$(m+ni))$
   $\forall_{n}(n -$ целое $\to$ комплцелое$(n))$
   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

   (b) Вещественное число.
   $\forall_{n}(n -$ число & $n -$ целое $\to$ комплцелое$(n))$
   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

   (c) Сумма.
   $\forall_{ab}($комплцелое(a) & комплцелое$(b) \to$ комплцелое$(a+b))$
   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "дистрибразвертка" определяет одновременную обработку любого числа слагаемых. Используется указатель "комплексное".

   (d) Произведение.
   $\forall_{ab}($комплцелое(a) & комплцелое$(b) \to$ комплцелое$(ab))$
   Аналогично предыдущему.

   (e) Минус.
   $\forall_{a}($комплцелое$(a) \to$ комплцелое$(-a))$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

   (f) Степень.
   $\forall_{an}($комплцелое(a) & $n -$ натуральное $\to$ комплцелое$(a^n))$
   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

Вычет целого комплексного числа по натуральному модулю

С символом "вычеткомпл" пока связан только нормализатор общей стандартизации "нормвычеткомпл". Он имеет следующие приемы:

1. Число задано в явном виде.

   $\forall_{mnk}($вычеткомпл$(m+ni,k) = m(\mathrm{mod}\ k) + n(\mathrm{mod}\ k)i)$

   Уровень срабатывания данного и всех остальных приемов нормализатора равен 1.

2. Вещественное число.

   $\forall_{kn}(n -$ число $\to$ вычеткомпл$(n,k) = n(\mathrm{mod}\ k))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

3. Умножение.

   $\forall_{abmnk}$(вычеткомпл$(m, k) = a$ & вычеткомпл$(n, k) = b \rightarrow$ вычеткомпл$(mn, k) =$ вычеткомпл$(ab, k))$

   Антецеденты выделены указателем "идентификатор" и реализуют рекурсивное обращение к нормализатору. Выражения a, b не содержат символа "вычеткомпл".

Комплексная конечная сумма

1. Вырожденное суммирование.

   $\forall fx(\sum_{n=x}^{x} f(n) = f(x))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{fmn}(0 < m - n \rightarrow \sum_{i=m}^{n} f(i) = 0)$

   Прие имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная f функциональная. Либо выражение n константное, либо m неконстантное. Уровень срабатывания равен 3.

2. Вынесение минуса из-под суммы.

   $\forall_{afg}(\sum_{x,f(x)}(-g(x)) = -\sum_{x,f(x)} g(x))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение не расположено внутри утверждения "Сходится(...)". Переменные f, g функциональные. Связывающая приставка x имеет произвольную длину. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

3. Вынесение константного множителя из-под суммы.

   $\forall_{afgh}(\sum_{x,f(x)}(ag(x)/h(x)) = a\sum_{x,f(x)}(g(x)/h(x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Аналогично предыдущему.

4. Сокращение знаменателя выражения под суммой и внешнего множителя.

   $\forall_{afgP}(\neg(a = 0) \rightarrow a\sum_{i,P(i)}(f(i)/(ag(i))) = \sum_{i,P(i)}(f(i)/g(i)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, g, P функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Pafg}(\neg(a = 0)$ & $a = b^p \rightarrow a\sum_{i,P(i)}(f(i)/(b^{h(i)}g(i))) = \sum_{i,P(i)}(f(i)/(b^{h(i)-p}g(i))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, b идентифицируются с натуральными константами. Антецеденты выделены указателем "программа". Переменные f, g, h, P функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

Комплексное конечное произведение

В этом разделе пока имеется единственный прием, обеспечивающий переход к вещественному конечному произведению:

$\forall_{fkm}(f(n)$ – число $\rightarrow \prod n = m^k f(n) = \prod n = m^k f(n))$

Левое конечное произведение комплексное, правое - вещественное. Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания приема равен 1.

Нормализатор "нормвеществ" перехода к операциям для вещественных чисел

1. Сумма.

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\to a + b = a + b)$

   Левая операция комплексная, правая - вещественная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

2. Произведение.

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\to ab = ab)$

   Аналогично предыдущему.

3. Минус.

   $\forall_{a}(a -$ число $\to -a = -a)$

4. Степень.

   $\forall_{ab}(a -$ число & $0 \leq a$ & $b -$ число $\to a^b = a^b)$

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{an}(a -$ число & $a < 0 \to a^n = i(-a)^n)$

   Переменная n идентифицируется с простой дробью, имеющей четный знаменатель. Правая степень вещественная, остальные операции комплексные. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{an}(a -$ число $\to a^n = (a^n$ при $0 \leq a,$ иначе $i(-a)^n))$

   Переменная n идентифицируется с простой дробью, имеющей четный знаменатель. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Обе правые степени вещественные, остальные операции комплексные. Уровень срабатывания равен 3.

5. Устранение вложенных вещественных сумм.

6. Устранение вложенных вещественных произведений.

7. Вынесение условного выражения наружу.

   $\forall_{Pabc}(a + (b$ при $P,$ иначе $c) = (a + b$ при $P,$ иначе $a + c))$

   Все суммы комплексные. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{Pabc}(a(b$ при $P,$ иначе $c) = (ab$ при $P,$ иначе $ac))$

   $\forall_{Pab}(-(a$ при $P,$ иначе $b) = (-a$ при $P,$ иначе $-b))$

   $\forall_{Pabc}((b$ при $P,$ иначе $c)/a = (b/a$ при $P,$ иначе $c/a))$

   Аналогично первому приему.

8. Вложенные условные выражения.

   $\forall_{Pabc}(((a$ при $P,$ иначе $b)$ при $P,$ иначе $c) = (a$ при $P,$ иначе $c))$

   $\forall_{Pabc}((a$ при $P,$ иначе $(b$ при $P,$ иначе $c)) = (a$ при $P,$ иначе $c))$

   Уровень срабатывания равен 1.

4.3 Приемы, связанные с функциями комплексного переменного

Условие взаимной однозначности

1. Сложение с константой.

   $\forall_{Paf}($взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z)+a, P(z))) \leftrightarrow$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z), P(z))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, P функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

2. Умножение на константу.

   $\forall_{Paf}(\neg(a=0) \to$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(af(z), P(z))) \leftrightarrow$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z), P(z))))$

   Аналогично предыдущему.

3. Минус.

   $\forall_{Pf}($взаимнооднозначно$(\lambda_z(-f(z), P(z))) \leftrightarrow$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z), P(z))))$

   Аналогично предыдущему.

4. Вынесение константных множителей числителя и знаменателя дроби.

   $\forall_{Pabfg}(\neg(a=0) \to$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(af(z)/(bg(z)), P(z))) \leftrightarrow$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z)/g(z), P(z))))$

   Аналогично предыдущему.

5. Константа в числителе.

   $\forall_{Paf}(\neg(f(z)=0)\ \&\ \neg(a=0) \to$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(a/f(z), P(z))) \leftrightarrow$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z), P(z))))$

   Первый антецедент обрабатывается вспомогательной задачей на доказательство, второй - проверочным оператором. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

6. Натуральная степень.

   $\forall_{Pfn}(n -$ натуральное $\&\ \neg(\exists_{abuv}(P(u)\ \&\ P(v)\ \&\ f(u) = a\cos b + (a\sin b)i\ \&$ $f(v) = a\cos(b+2\pi/n) + (a\sin(b+2\pi/n))i\ \&\ 0 < a\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число$)) \to$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z)^n, P(z))) \leftrightarrow$ взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z), P(z))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - вспомогательной задачей на доказательство. Переменные f, P функциональные. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Pfn}(n -$ натуральное & $\exists_{abuv}(P(u)$ & $P(v)$ & $f(u) = a\cos b + (a\sin b)i$ & $f(v) = a\cos(b + 2\pi/n) + (a\sin(b + 2\pi/n))i$ & $0 < a$ & $a -$ число & $b -$ число$) \to \neg($взаимнооднозначно$(\lambda_z(f(z)^n, P(z)))))$

Аналогично первому приему.

Определение образа при комплексном отображении путем решения вспомогательной задачи на описание

$\forall_{Pafg}((x \in a$ & $g(x)$ & $y = f(x)$ & $y -$комплексное$) = P(x, y)$ & $f(x) -$комплексное $\to$ образ$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) = \mathrm{set}_y(\exists_x(P(x, y))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно x вспомогательной задачей на описание, имеющей цель "мнимаячасть". При этом x является несущественной неизвестной. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается, что $f(x)$ вещественное. Утверждение $P(x, y)$ не содержит подвыражений вида "мнимаячасть(X)", "вещественнаячасть(X)", где X отлично от переменной. Выражение a не содержит символа "аргумент" и не имеет вида "$\mathrm{set}_z(\exists_u(z = A(u)$ & $B(u)))$". Переменные f, g, P функциональные. В качестве y выбирается новая переменная. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{Aafg}((p + qi \in a$ & $g(p + qi)$ & $b + ci = f(p + qi)$ & $b -$ число & $c -$ число & $p -$ число & $q -$ число$) = A(b, c, p, q)$ & $f(x) -$ комплексное $\to$ образ$(\lambda_x(f(x), x -$ комплексное & $g(x)), a) = \mathrm{set}_z(\exists_{pq}(A(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), p, q)$ & $z -$ комплексное$)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм"и применяется к подвыражению условия задачи. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно p, q вспомогательной задачей на описание. При этом p, q являются несущественными неизвестными. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Не усматривается, что $f(x)$ вещественное. Выражение a не содержит символа "аргумент" и не имеет вида "$\mathrm{set}_z(\exists_u(z = A(u)$ & $B(u)))$". Переменные f, g, A функциональные. В качестве b, c, p, q выбираются новые переменные. Уровень срабатывания равен 7.

Непрерывность функций комплексного переменного

1. Проверочный оператор "усмНепрерывно".

   Все приемы оператора срабатывают на уровне 1.

   (a) Константа.
   $\forall_{abf}($Непрерывно$(\lambda_x(a, f(x)), b))$
   Переменная f функциональная. Переменная x идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины.

   (b) Тождественная функция.
   $\forall_{bf}($Непрерывно$(\lambda_x(x, f(x)), b))$
   Аналогично предыдущему, но x - единственная переменная.

(c) Плюс.
$\forall_{afgh}$(Непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & Непрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ Непрерывно$(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a)$)

Антецеденты реализуют рекурсивное обращение. Переменные f, g, h функциональные. Связывающая приставка x имеет произвольную длину. Используется указатель "комплексное".

(d) Умножение.
$\forall_{afgh}$(Непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & Непрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ Непрерывно$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a)$)

Аналогично предыдущему.

(e) Минус.
$\forall_{afh}$(Непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \to$ Непрерывно$(\lambda_x(-f(x), h(x)), a)$)

Аналогично предыдущему.

(f) Дробь.
$\forall_{afgh}(\neg(g(x) = 0)$ & Непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & Непрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ Непрерывно$(\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), a)$)

Аналогично предыдущему.

(g) Степень.
$\forall_{afhp}(p -$ натуральное & Непрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \to$ Непрерывно$(\lambda_x(f(x)^p, h(x)), a)$)

Аналогично предыдущему.

2. Проверочный оператор "усмлокНепрерывно".

Приемы аналогичны приемам предыдущего оператора. Уровни срабатывания равны 1.

(a) Константа.
$\forall_{abf}$(локНепрерывно$(\lambda_x(a, f(x)), b)$)

(b) Тождественная функция.
$\forall_{bf}$(локНепрерывно$(\lambda_x(x, f(x)), b)$)

(c) Плюс.
$\forall_{afgh}$(локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ локНепрерывно$(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a)$)

(d) Умножение.
$\forall_{afgh}$(локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ локНепрерывно$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a)$)

(e) Минус.
$\forall_{afh}$(локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \to$ локНепрерывно$(\lambda_x(-f(x), h(x)), a)$)

(f) Дробь.
$\forall_{afgh}(\neg(g(x) = 0)$ & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$ & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \to$ локНепрерывно$(\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), a)$)

(g) Степень.
$\forall_{afhp}(p -$ натуральное & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a) \to$ локНепрерывно$(\lambda_x(f(x)^p, h(x)), a)$)

Приемы, связанные с точками ветвления функций комплексного переменного

1. Обращения к проверочным операторам "усмточкаветвления", "усмнеточкаветвления".

   $\forall_{ab}$(точкаветвления$(a,b) \to$ точкаветвления$(a,b))$

   $\forall_{ab}(\neg$(точкаветвления$(a,b)) \to \neg$(точкаветвления$(a,b)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

2. Проверочный оператор "усмточкаветвления".

   (a) Минус.
   $\forall_{afh}$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x),h(x)),a) \to$
   точкаветвления$(\lambda_x(-f(x),h(x)),a))$

   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные f,h функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Плюс.
   $\forall_{afgh}$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x),h(x)),a)$ &
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(g(x),h(x)),a))$ & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x),h(x)),a) \to$
   точкаветвления$(\lambda_x(f(x)+g(x),h(x)),a))$

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные f,g,h функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Умножение.
   $\forall_{afgh}$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x),h(x)),a)$ &
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(g(x),h(x)),a))$ & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x),h(x)),a)$
   & $\neg(g(a)=0) \to$ точкаветвления$(\lambda_x(f(x)g(x),h(x)),a))$

   Аналогично предыдущему.

   (d) Дробь.
   $\forall_{afgh}$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x),h(x)),a)$ &
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(g(x),h(x)),a))$ & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x),h(x)),a) \to$
   точкаветвления$(\lambda_x(f(x)/g(x),h(x)),a))$

   $\forall_{afgh}$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x),h(x)),a)$ &
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(g(x),h(x)),a))$ & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x),h(x)),a)$
   & $\neg(g(a)=0) \to$ точкаветвления$(\lambda_x(g(x)/f(x)),h(x)),a))$

   Аналогично предыдущему.

   (e) Степень.
   $\forall_{abghmnp}(p -$ rational & $\neg(n=0)$ & $n -$ комплексное & $m -$ натуральное &
   $\neg$(знаменатель$(p)|m)$ & $ca^n+b=0$ & $\neg(h(a)=0)$ &
   локНепрерывно$(\lambda_x(h(x),g(x)),a)$ & $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(h(x),g(x)),a)) \to$
   точкаветвления$(\lambda_x(((cx^n+b)^m h(x))^p,g(x)),a))$

   Шестой антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные g,h

функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afgp}$(точкаветвления$(\neg(f(a) = 0)$ & $\lambda_x(f(x), g(x)), a)$ & p − rational → точкаветвления$(\lambda_x(f(x)^p, g(x)), a))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные f, g функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

3. Проверочный оператор "усмнеточкаветвления".

   (a) Константа.

   $\forall_{abf}(\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(a, f(x)), b)))$

   Переменная f функциональная. Длина связывающей приставки x произвольная. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Тождественная функция.

   $\forall_{abf}(\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(x, f(x)), b)))$

   Аналогично предыдущему, но x - единственная переменная.

   (c) Минус.

   $\forall_{afh}(\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)) \rightarrow$
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(-f(x), h(x)), a)))$

   Переменные f, h функциональные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

   (d) Плюс.

   $\forall_{afgh}(\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x), h(x)), a))$ &
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(g(x), h(x)), a))$ & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$
   & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \rightarrow$
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x) + g(x), h(x)), a)))$

   Переменные f, g, h функциональные. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Используется указатель "комплексное". Слагаемое $f(x)$ - первое в сумме. Уровень срабатывания равен 2.

   (e) Умножение.

   $\forall_{afgh}(\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x), h(x)), a))$ &
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(g(x), h(x)), a))$ & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$
   & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \rightarrow$
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x)g(x), h(x)), a)))$

   Аналогично предыдущему.

   (f) Дробь.

   $\forall_{afgh}(\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x), h(x)), a))$ &
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(g(x), h(x)), a))$ & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), h(x)), a)$
   & локНепрерывно$(\lambda_x(g(x), h(x)), a) \rightarrow$
   $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x)/g(x), h(x)), a)))$

   Аналогично предыдущему.

   (g) Натуральная степень.

$\forall_{afgn}(n$ – натуральное & $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$) & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x)^n, g(x)), a)$))

Аналогично предыдущему.

(h) Дробная степень.

$\forall_{afgp}(p$ – rational & $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x), g(x)), a)$) & $\neg(f(a) = 0)$ & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), g(x)), a) \to$ $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x)^p, g(x)), a)$))

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abfgnp}(p$ – rational & $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(f(x), g(x)), b)$) & $\neg(f(b) = 0)$ & n – натуральное & знаменатель$(p)|n$ & $a + b = 0$ & локНепрерывно$(\lambda_x(f(x), g(x)), b) \to$ $\neg$(точкаветвления$(\lambda_x(((x + a)^n f(x))^p, g(x)), b)$))

Шестой антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Переменные f, g функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания приема равен 3.

Ряды с комплексными членами

1. Усмотрение абсолютно сходящегося ряда.

   $\forall_{fg}(g(i) = |f(i)|$ & сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^n g(i), n$ – натуральное)) $\to$ Сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i), n$ – натуральное)))

   Левый ряд вещественный, правый - комплексный. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Результат не содержит символа "Модуль". Истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Переменные f, g функциональные. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3. Создана копия приема, срабатывающая на уровне 5. У нее ограничитель трудоемкости существенно ослаблен.

2. Сдвиг области суммирования.

   $\forall_{abf}(\sum_{i=a}^{\infty} f(i + b) = \sum_{i=a+b}^{\infty} f(i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри суммируемого выражения подтерма "$i + b$". После этого идентификация шаблона $f(\ldots)$ выполняется с помощью указателя "новаргумент(f,i,извлечение)", группирующего все вхождения i под суммы $i + b$. Уровень срабатывания равен 1.

3. Расходимость ряда, предел общего члена которого не равен 0.

   $\forall_{fg}(g(i) = |f(i)|$ & $b = \lim_{i\to\infty}\{g(i)\}$ & $\neg(b = 0) \to$ $\neg$(Сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i), n$ – натуральное))))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Правая часть первого антецедента упрощается вспомогательной задачей на преобразование, причем результат не содержит символа "Модуль". Правая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "нормпредел". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные f, g функциональные. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

4. Усмотрение расходимости ряда путем выделения вещественной и мнимой частей.

   $\forall_{fg}(g(i) = \mathrm{Re}(f(i))$ & $\neg$(сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} g(i), n -$ натуральное))) $\rightarrow$
   $\neg$(Сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} f(i), n -$ натуральное))))

   $\forall_{fg}(g(i) = \mathrm{Im}(f(i))$ & $\neg$(сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} g(i), n -$ натуральное))) $\rightarrow$
   $\neg$(Сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} f(i), n -$ натуральное))))

   Приемы имеют заголовок "воройтерм" и применяются к подутверждению условия задачи. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается вспомогательной задачей на преобразование, причем результат не содержит, соответственно, символа "вещественнаячасть" и "мнимаячасть". Истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Переменные f, g функциональные. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

5. Усмотрение сходимости ряда путем установления сходимости рядов для вещественной и мнимой частей.

   $\forall_{fgh}(g(i) = \mathrm{Re}(f(i))$ & $h(i) = \mathrm{Im}(f(i))$ & сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} g(i), n-$натуральное))
   & сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} h(i), n -$ натуральное)) $\rightarrow$
   Сходится($\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} f(i), n -$ натуральное)))

   Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подутверждению условия задачи. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части упрощаются задачами на преобразование, причем результаты не содержат символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть" соответственно. Истинность третьего и четвертого антецедентов устанавливается при помощи задач на доказательство. Переменные f, g, h функциональные. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

6. Вынесение минуса наружу при анализе сходимости.

   $\forall_{af}$(Сходится($\lambda_n(\sum_{m=a}^{n} -f(m), n -$ натуральное)) $\leftrightarrow$
   Сходится($\lambda_n(\sum_{m=a}^{n} f(m), n -$ натуральное)))

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

7. Вынесение наружу константного ненулевого множителя.

   $\forall_{abfg}(\neg(a = 0) \rightarrow$ Сходится($\lambda_n(\sum_{m=b}^{n} af(m)/g(m), n -$ натуральное)) $\leftrightarrow$
   Сходится($\lambda_n(\sum_{m=b}^{n} f(m)/g(m), n -$ натуральное)))

   $\forall_{abfg}(\neg(a = 0) \rightarrow$ Сходится($\lambda_n(\sum_{m=b}^{n} f(m)/(ag(m)), n -$ натуральное)) $\leftrightarrow$
   Сходится($\lambda_n(\sum_{m=b}^{n} f(m)/g(m), n -$ натуральное)))

   Приемы имеют заголовок "воройтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные f, g функциональные, причем $g(m)$ может быть тождественной единицей. Уровень срабатывания равен 0.

8. Усмотрение расходимости ряда, обращающегося в гармонический.

   $\forall_{az}(|z| = 1 \to \text{Сходится}(\lambda_n(\sum_{m=1}^{n} z^m/(m+a), n - \text{натуральное})) \leftrightarrow \neg(z = 1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормМодуль". Уровень срабатывания равен 2.

9. Исключение условного выражения под суммой.

   $\forall_{afgn}(\sum_{i=n}^{\infty}(a \text{ при } i = n, \text{ иначе } f(i))g(i) = ag(n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} f(i)g(i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, g функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Pafgn}(\sum_{i=n}^{\infty}(a \text{ при } i = n \ \vee \ P(i), \text{ иначе } f(i))g(i) =$
   $ag(n) + \sum_{i=n+1}^{\infty}(a \text{ при } P(i), \text{ иначе } f(i)g(i)))$

   Аналогично предыдущему.

10. Сокращение внешнего множителя с внутренним.

    $\forall_{afgkmp}(k - \text{целое} \ \& \ p(n) - \text{целое} \to a^k \sum_{n=m}^{\infty} f(n)/(g(n)a^{p(n)}) =$
    $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)/(g(n)a^{p(n)-k}))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Используется указатель "комплексное". Переменные f, g, p функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

11. Суммирование рядов.

    (a) Обращение к нормализатору "Суммаряда".
    $\forall_{abf}(b = \sum_{i=a}^{\infty} f(i) \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i) = b)$
    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Переменная f функциональная. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "Суммаряда". Этот нормализатор, описываемый ниже, пока может суммировать лишь геометрические прогрессии. Проверяется, что результат b не содержит символа "Суммавсех". Уровень срабатывания равен 3.

    (b) Переобозначение параметра.
    $\forall_{Aabfn}((x \to 0) \ \& \ \sum_{i=n}^{\infty} f(x) = A(x) \to \sum_{i=n}^{\infty} f(ax/b) = A(ax/b))$
    Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию в суммируемом выражении подтерма "ax/b", где x - переменная. Указатель "новаргумент" проверяет, что эта переменная встречается в данном выражении только в окружении "ax/b". Хотя бы одно из выражений a, b не тождественно единичное. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование. Результат $A(x)$ не содержит символа "Суммавсех". Уровень срабатывания равен 3.

    (c) Попытка почленного интегрирования степенного ряда.
    $\forall_{Aabcdefghpq}(b = ad/c - 1 \ \& \ \sum_{i=e}^{\infty}(ci+d)^{p-1} f(i) x^{ai+b+1}/g(i) = h(x) \ \&$
    $s(x) = dh(x)/dx \ \& \ 0 \leq ae + b \ \& \ 0 < a \ \&$

$r =$ радиуссходимости$(\lambda_i((ci+d)^{p-1}f(i)/g(i), i -$ натуральное$))$ &
$0 < r^{1/a} - |A| \to \sum_{i=e}^{\infty}(ci+d)^p f(i)A^{ai+q}/g(i) = cs(A)A^{q-b}/a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование. Переменная b идентифицируется с целочисленной константой, а переменная p - с натуральной. Первые три антецедента и шестой антецедент выделены указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Правые части первого, третьего и шестого антецедентов упрощаются задачами на преобразование, решаемыми до уровня 4. При обработке левой части второго антецедента задача на преобразование решается до уровня 5, причем ей передается дополнительная посылка "$x \to 0$". Проверяется, что результат $h(x)$ не содержит символа "Суммавсех". При разложении в степенной ряд прием блокируется. Переменные f, g, h, s функциональные. Используется указатель "комплексное". В качестве x выбирается новая переменная. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Нормализатор "Суммаряда".

Уровни срабатывания приемов нормализатора равны 1.

i. Вынесение наружу константного множителя.
$\forall_{abcfgs}(s = \sum_{i=c}^{\infty} f(i)/g(i) \to \sum_{i=c}^{\infty} af(i)/(bg(i)) = as/b)$
Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные f, g функциональные. Хотя бы одно из выражений a, b не тождественно единичное. Выражение s не содержит символа "Суммавсех".

ii. Геометрическая прогрессия.
$\forall_{abc}(0 \le c$ & $0 < 1 - |a|$ & $b -$ целое & $d -$ целое $\to \sum_{i=c}^{\infty} a^{bi+d} = a^d/(1-a^b) - \sum_{i=0}^{c-1} a^{bi+d})$
Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

Пределы комплекснозначных функций

1. Вычисление предела последовательности путем раздельного рассмотрения вещественной и мнимой частей.

   $\forall_{ABabf}(\mathrm{Re}(f(n)) = a(n)$ & $\mathrm{Im}(f(n)) = b(n)$ & $\lim_{n\to\infty}\{a(n)\} = A$ &
   $\lim_{n\to\infty}\{b(n)\} = B$ & $A -$ число & $B -$ число $\to \lim_{n\to\infty}\{f(n)\} = A + Bi)$

   Фигурные скобки под пределами означают, что рассматриваются функции натурального аргумента n. Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые четыре антецедента выделены указателем "идентификатор", последние два - обрабатываются проверочными операторами. Переменные a, b, f функциональные. Выражения $a(n), b(n)$ не содержат символов "вещественнаячасть" и "мнимаячасть". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{af}(\mathrm{Re}(f(n)) = a(n)$ & $\lim_{n\to\infty}\{a(n)\} =$ неопред $\to \lim_{n\to\infty}\{f(n)\} =$ неопред$)$

   $\forall_{af}(\mathrm{Im}(f(n)) = a(n)$ & $\lim_{n\to\infty}\{a(n)\} =$ неопред $\to \lim_{n\to\infty}\{f(n)\} =$ неопред$)$

   Аналогично предыдущему.

2. Обращение к комплекснозначному оператору "нормПредел".

   $\forall_{abcf}(a = \lim_{x\to b\backslash c} f(x) \to \lim_{x\to b\backslash c} f(x) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на доказательство либо на преобразование. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормПредел". Проверяется, что результат a не имеет заголовка "Предел". Переменная f функциональная. Указатель "нормзадача" обеспечивает передачу дополнительных условий на о.д.з., найденных нормализатором при вычислении предела, в текущую задачу. Под условным выражением прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

3. Нормализатор "нормПредел" вычисления пределов функций комплексного переменного.

   (a) Предел константы.
   $\forall_{abc}(\lim_{x\to c\backslash a} b = b)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Предел тождественной функции.
   $\forall_{ab}(\lim_{x\to b\backslash a} x = b)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Вынесение минуса из-под предела.
   $\forall_{abcf}(c = \lim_{x\to b\backslash a} f(x)\ \&\ c - \text{комплексное} \to \lim_{x\to b\backslash a}(-f(x)) = -c)$
   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Он реализует рекурсивное обращение. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Его истинность можно усмотреть лишь в том случае, когда нормализатор успешно вычислили предел. Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.
   $\forall_{abf}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = \infty \to \lim_{x\to b\backslash a}(-f(x)) = \infty)$
   $\forall_{abf}(\lim_{x\to b\backslash a} f(x) = \text{неопред} \to \lim_{x\to b\backslash a}(-f(x)) = \text{неопред})$
   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

   (d) Предел суммы.

      i. Конечные пределы слагаемых.
      $\forall_{abcdfg}(c = \lim_{x\to b\backslash a} f(x)\ \&\ c - \text{комплексное}\ \&\ d = \lim_{x\to b\backslash a} g(x)\ \&\ d - \text{комплексное} \to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x) + g(x)) = c + d)$
      Первый и третий антецеденты реализуют рекурсивные обращения, второй и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Переменные f, g функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

      ii. Бесконечный предел одного слагаемого и конечный предел суммы остальных слагаемых.
      $\forall_{bcdfg}(\lim_{x\to b\backslash a} g(x) = \infty\ \&\ = \lim_{x\to d\backslash b} f(x)\ \&\ c - \text{комплексное} \to \lim_{x\to d\backslash b}(f(x) + g(x)) = \infty)$
      Аналогично предыдущему.

      iii. Бесконечный предел многочлена.
      $\forall_{afn}(\neg(a = 0) \to \lim_{z\to\infty}(az^n + f(z)) = \infty)$
      Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Переменная f функциональная. Каждое содержащее z слагаемое остаточной суммы $f(z)$ представляет собой одночлен степени, меньшей n. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

iv. Сумма дробей.
$\forall_{apqfg}(\lim_{z\to a}g(z) = 0 \ \& \ \lim_{z\to a} = 0 \ \&$
$\lim_{z\to a}(f(z)q(z) + p(z)g(z))/(g(z)q(z)) = b \to$
$\lim_{z\to a}(f(z)/g(z) + p(z)/q(z)) = b)$
Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормПредел". Выражение b не содержит символа "Предел". Переменные f, g, p, q функциональные. Уровень срабатывания равен 5.

(e) Предел произведения.

  i. Конечные пределы сомножителей.
  $\forall_{abcdfg}(c = \lim_{x\to b\backslash a}f(x) \ \& \ c -$ комплексное $\& \ d = \lim_{x\to b\backslash a}g(x) \ \&$
  $d -$ комплексное $\to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)g(x)) = cd)$
  Первый и третий антецеденты реализуют рекурсивные обращения, второй и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Переменные f, g функциональные. Либо выражение $f(x)$ идентифицировано с первым сомножителем, либо вычисленный его предел c не тождественно нулевой. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания приема равен 2.

  ii. Бесконечный предел.
  $\forall_{bcdfg}(\lim_{x\to d\backslash b}f(x) = \infty \ \& \ c = \lim_{x\to d\backslash b}g(x) \ \&$
  $(c = \infty \ \vee \ c -$ комплексное $\& \ \neg(c = 0)) \to \lim_{x\to d\backslash b}(f(x)g(x)) = \infty)$
  Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения, третий - обрабатывается проверочным оператором. Переменные f, g функциональные. Выражение c не имеет заголовка "Предел". Уровень срабатывания равен 2.

(f) Предел дроби.

  i. Конечные пределы числителя и знаменателя, с ненулевым пределом знаменателя.
  $\forall_{abcdefg}(a = \lim_{x\to c\backslash d}f(x) \ \& \ a -$ комплексное $\& \ b = \lim_{x\to c\backslash d}g(x) \ \&$
  $b -$ комплексное $\& \ e = b \ \& \ \neg(e = 0) \to \lim_{x\to c\backslash d}(f(x)/g(x)) = a/e)$
  Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор" и реализуют рекурсивные обращения. Пятый антецедент тоже выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Вспомогательная переменная e позволяет выполнить проверку условия "$b-$комплексное" до упрощения выражения b. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

  ii. Ненулевой предел числителя и нулевой - знаменателя.
  $\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to c\backslash d}f(x) \ \& \ (a = \infty \ \vee \ a -$ комплексное $\&$
  $\neg(a = 0)) \ \& \ \lim_{x\to c\backslash d}g(x) = 0 \to \lim_{x\to c\backslash d}(f(x)/g(x)) = \infty)$
  Первый и третий антецеденты реализуют рекурсивные обращения, второй - обрабатывается проверочным оператором. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

  iii. Конечный предел числителя и бесконечный - знаменателя.
  $\forall_{abcdfg}(a = \lim_{x\to c\backslash d}f(x) \ \& \ a -$ комплексное $\& \ \lim_{x\to c\backslash d}g(x) = \infty \to$
  $\lim_{x\to c\backslash d}(f(x)/g(x)) = 0)$

Аналогично предыдущему.

iv. Попытка сокращения числителя и знаменателя, если их пределы равны 0.
$\forall_{abfgmnpq}(\lim_{x\to a\backslash b} f(x) = 0\ \&\ \lim_{x\to a\backslash b} g(x) = 0\ \&\ f(x+a) = m(x)x^p/r(x)$
$\&\ g(x+a) = n(x)x^q/s(x) \to \lim_{x\to a\backslash b}(f(x)/g(x)) =$
$\lim_{x\to a\backslash b}(m(x-a)s(x-a)(x-a)^{p-q}/(r(x-a)n(x-a))))$
Выражение a не тождественно нулевое. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор" и реализуют рекурсивные обращения. Третий и четвертый антецеденты тоже выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются комплексным нормализатором разложения на множители "видУмножение". Дробь под пределом не содержит символов "Синус", "Косинус", "Логарифм". Ее числитель и знаменатель не содержат символа "Дробь". Переменные f, g, m, n, r, s функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 3.

v. Выделение главного члена числителя либо знаменателя.
$\forall_{abfghp}(\text{Бескмалая}(\lambda_z(g(z), z - \text{комплексное}), \lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}),$
$a, b) \to \lim_{x\to a\backslash b}((g(z) + f(z))p(z)/h(z)) = \lim_{x\to a\backslash b}(f(z)p(z)/h(z)))$
Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные f, g, h, p функциональные. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{cfhmnp}(\lim_{z\to\infty}((cz^n + f(z))^m p(z)/h(z)) = \lim_{z\to\infty}(c^m z^{mn} p(z)/h(z)))$
Переменные m, n идентифицируются с натуральными константами. Переменные f, h, p функциональные. Каждое содержащее z слагаемое выражения $f(z)$ представляет собой одночлен от z, степень которого меньше n. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 3.

vi. Правило Лопиталя.
$\forall_{afgpqr}(\lim_{z\to a} f(z) = 0\ \&\ \lim_{z\to a} g(z) = 0\ \&\ p(z) = df(z)/dz\ \&$
$q(z) = dg(z)/dz\ \&\ \lim_{z\to a} p(z)/q(z) = r\ \&\ r - \text{комплексное} \to$
$\lim_{z\to a} f(z)/g(z) = r)$
$\forall_{afgpqr}(\lim_{z\to a} f(z) = \infty\ \&\ \lim_{z\to a} g(z) = \infty\ \&\ p(z) = df(z)/dz\ \&$
$q(z) = dg(z)/dz\ \&\ \lim_{z\to a} p(z)/q(z) = r\ \&\ r - \text{комплексное} \to$
$\lim_{z\to a} f(z)/g(z) = r)$
Производные рассматриваются комплексные. Первые пять антецедентов выделены указателем "идентификатор", шестой - обрабатывается проверочным оператором. Левые части первых двух антецедентов обрабатываются нормализатором "нормПредел", после чего упрощаются задачей на преобразование. Правые части третьего и четвертого антецедентов упрощаются задачей на преобразование. Проверяется, что результаты не содержат символа "комплпроизводная". Наконец, левая часть пятого антецедента обрабатывается нормализатором "нормПредел", которому передается комментарий "комплпроизводная". Этот комментарий регулирует число попыток последовательного применения правила Лопиталя. Если число таких комментариев больше 3, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.

vii. Выделение множителей числителя и знаменателя, имеющих ненулевой конечный предел.

    $\forall_{abcfgh}(\lim_{z\to a}f(z)=b\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ \lim_{z\to a}(g(z)/h(z))=c\ \&$ b – комплексное & (c – комплексное $\vee$ $c=\infty$) $\to$ $\lim_{z\to a}(f(z)g(z)/h(z))=bc)$

    $\forall_{abcfgh}(\lim_{z\to a}f(z)=b\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ \lim_{z\to a}(g(z)/h(z))=c\ \&$ b – комплексное & (c – комплексное $\vee$ $c=\infty$) $\to$ $\lim_{z\to a}(g(z)/(f(z)h(z)))=c/b)$

    Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор" и реализуют рекурсивное обращение. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные f, g, h функциональные. Уровень срабатывания равен 4.

  viii. Асимптотическая замена для синуса - множителя числителя либо знаменателя.
    $\forall_{fgp}(\neg(p=0)\to\lim_{z\to 0}f(z)/(g(z)(\sin z)^p)=\lim_{z\to 0}f(z)/(g(z)z^p))$
    Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные f, g функциональные. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Указатель "вариант" разрешает замену символа "Синус" на "Гипсинус". Уровень срабатывания равен 1.

(g) Предел степени.

  i. Натуральная степень.
    $\forall_{abcfn}(a=\lim_{z\to b\backslash c}f(z)$ & a – комплексное & n – натуральное $\to$ $\lim_{z\to b\backslash c}(f(z))^n=a^n)$
    Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.
    $\forall_{bcfn}(\lim_{z\to b\backslash c}f(z)=\infty$ & n – натуральное $\to\lim_{z\to b\backslash c}(f(z))^n=\infty)$
    Аналогично предыдущему.

  ii. Экспонента.
    $\forall_{abcf}(a=\lim_{z\to b\backslash c}f(z)$ & a – комплексное $\to\lim_{z\to b\backslash c}\exp(f(z))=\exp a)$
    Аналогично предыдущему.

(h) Предел модуля.
  $\forall_{abcf}(c=\lim_{x\to a\backslash b}f(x)$ & c – комплексное $\to\lim_{x\to a\backslash b}|f(x)|=|c|)$

  Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

  $\lim_{z\to\infty}|z|=\infty$

  Уровень срабатывания равен 1.

(i) Предел синуса.
  $\forall_{abcf}(c=\lim_{x\to a\backslash b}f(x)$ & c – комплексное $\to\lim_{x\to a\backslash b}\sin f(x)=\sin c)$

  Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается проверочным оператором. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(j) Предел косинуса.
  $\forall_{abcf}(c=\lim_{x\to a\backslash b}f(x)$ & c – комплексное $\to\lim_{x\to a\backslash b}\cos f(x)=\cos c)$

  Аналогично предыдущему.

(k) Предел тангенса.

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & c – комплексное & $\neg(\cos c = 0) \to$
$\lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} c)$

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & c – комплексное & $\cos c = 0 \to$
$\lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{tg} f(x) = \infty)$

Аналогично предыдущему. В первом случае третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, во втором - выделен указателем "идентификатор".

$\forall_{abfgh}(\lim_{z \to a \backslash b}(f(z) \operatorname{tg} g(z)/h(z)) = \lim_{z \to a \backslash b}(f(z) \sin g(z)/(h(z) \cos g(z))))$

Переменные f, g, h функциональные. Указатель "дробь" разрешает перестановку числителя и знаменателя. Уровень срабатывания равен 4.

(l) Предел котангенса.

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & c – комплексное & $\neg(\sin c = 0) \to$
$\lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} c)$

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & c – комплексное & $\sin c = 0 \to$
$\lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{ctg} f(x) = \infty)$

$\forall_{abfgh}(\lim_{z \to a \backslash b}(f(z) \operatorname{ctg} g(z)/h(z)) = \lim_{z \to a \backslash b}(f(z) \cos g(z)/(h(z) \sin g(z))))$

Аналогично приемам для тангенса.

(m) Предел логарифма.

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & c – комплексное & $(\neg(\mathrm{Im}(c) = 0) \ \vee \ 0 < \mathrm{Re}(c))$ &
$\neg(c = 0) \to \lim_{x \to a \backslash b} \ln f(x) = \ln c)$

Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(n) Предел гиперболического синуса.

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & c – комплексное $\to \lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{sh} f(x) = \operatorname{sh} c)$

Аналогично предыдущему.

(o) Предел гиперболического косинуса.

$\forall_{abcf}(c = \lim_{x \to a \backslash b} f(x)$ & c – комплексное $\to \lim_{x \to a \backslash b} \operatorname{ch} f(x) = \operatorname{ch} c)$

Аналогично предыдущему.

(p) Вычисление предела последовательности путем раздельного рассмотрения вещественной и мнимой частей.

$\forall_{ABabf}(\mathrm{Re}(f(n)) = a(n)$ & $\mathrm{Im}(f(n)) = b(n)$ & $\lim_{n \to \infty}\{a(n)\} = A$ &
$\lim_{n \to \infty}\{b(n)\} = B$ & A – число & B – число $\to \lim_{n \to \infty}\{f(n)\} = A + Bi)$

$\forall_{af}(\mathrm{Re}(f(n)) = a(n)$ & $\lim_{n \to \infty}\{a(n)\} = \infty \to \lim_{n \to \infty}\{f(n)\} = \infty)$

$\forall_{af}(\mathrm{Im}(f(n)) = a(n)$ & $\lim_{n \to \infty}\{a(n)\} = \infty \to \lim_{n \to \infty}\{f(n)\} = \infty)$

Аналогично одноименным приемам сканирования задачи, описанным выше. Уровень срабатывания равен 1.

4. Проверочный оператор "Бескмалая".

(a) Константа и степенная функция.

$\forall_{abfn}(\lim_{z \to a \backslash b} f(z) = \infty$ & n – натуральное $\to$
Бескмалая$(\lambda_z(c, z$ – комплексное$), \lambda_v((f(v))^n, v$ – комплексное$), a, b))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Переменная f функциональная.

(b) Сумма.
$\forall_{abfgh}$(Бескмалая($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), h, a, b$) &
Бескмалая($\lambda_z(g(z), z$ – комплексное$), h, a, b$) $\rightarrow$
Бескмалая($\lambda_z(f(z) + g(z), z$ – комплексное$), h, a, b$))
Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "дистрибразвертка" обеспечивает одновременную обработку любого числа слагаемых. Переменные f, g функциональные.

Производные функций комплексного переменного

1. Обращение к нормализатору "нормкомплпроизводная".

   $\forall_{abc}(c =$ комплпроизводная$(a, b) \rightarrow$ комплпроизводная$(a, b) = c)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, либо не содержащему неизвестных подвыражению условия задачи на описание, не имеющей цели (связка . . .). Антецедент выделен указателем "идентификатор", причем его правая часть обрабатывается нормализатором "нормкомплпроизводная". Если a имеет вид "отображение($x_1 \dots x_k A$)", причем A содержит подтерм "значение(f, t)", где t зависит от $x_1, \dots, x_k$, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcd}(d =$ частнпроизв$(a, b, c) \rightarrow$ частнпроизв$(a, b, c) = d)$

   Формульный редактор прорисовывает как "частнпроизв(a, b, c)" выражение "комплПроизводная(a, b, c)". В остальном - аналогично предыдущему, но используется нормализатор "нормкомплПроизводная".

2. Нормализатор вычисления комплексной производной "нормкомплпроизводная".

   (a) Производная константы.
   $\forall_a(da/db = 0)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Производная тождественной функции.
   $\forall_a(da/da = 1)$
   Аналогично предыдыщему.

   (c) Вынесение минуса из-под производной.
   $\forall_{abf}(df(a)/da = b$ & b – комплексное $\rightarrow d(-f(a))/da = -b)$
   Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается проверочным оператором. Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

   (d) Вынесение коэффициента из-под производной.
   $\forall_{abcf}(df(b)/db = c$ & c – комплексное $\rightarrow d(af(b))/db = ac)$
   Аналогично предыдущему.

   (e) Производная суммы.
   $\forall_{abcfg}(a = df(c)/dc$ & $b = dg(c)/dc$ & a – комплексное &
   b – комплексное $\rightarrow d(f(c) + g(c))/dc = a + b)$
   Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения, следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Переменные f, g функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(f) Производная произведения.

$\forall_{abcfg}(a = df(c)/dc\ \&\ b = dg(c)/dc\ \&\ a -$ комплексное $\&$ $b -$ комплексное $\rightarrow d(f(c)g(c))/dc = ab)$

Аналогично предыдущему.

(g) Производная дроби.

$\forall_{abfgx}(a = df(x)/dx\ \&\ b = dg(x)/dx\ \&\ a -$ комплексное $\&$ $b -$ комплексное $\rightarrow d(f(x)/g(x))/dx = (ag(x) - bf(x))/g(x)^2)$

Аналогично предыдущему.

(h) Производная степени.

$\forall_{abfy}(b = df(y)/dy\ \&\ b -$ комплексное $\&\ \neg(a = 0) \rightarrow da^{f(y)}/dy = \ln(a)ba^{f(y)})$

Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{abfy}(b = df(y)/dy\ \&\ b -$ комплексное $\&\ 0 \leq \mathrm{Re}(a) - 1 \rightarrow$ $df(y)^a/dy = baf(y)^{a-1})$

Аналогично предыдыщему, но уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abfgx}(a = df(x)/dx\ \&\ a -$ комплексное $\&\ b = dg(x)/dx\ \&$ $b -$ комплексное $\rightarrow d(f(x)^{g(x)})/dx = f(x)^{g(x)}(b\ln f(x) + g(x)a/f(x)))$

Первый и третий антецеденты реализуют рекурсивные обращения, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Переменные f, g функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 4.

(i) Производная логарифма.

$\forall_{abf}(\neg(f(a) = 0)\ \&\ b = df(a)/da\ \&\ b -$комплексное $\rightarrow d\ln f(a)/da = b/f(a))$

Второй антецедент реализует рекурсивное обращение, первый и третий - обрабатываются проверочными операторами. Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания приема равен 2.

(j) Производная синуса.

$\forall_{abf}(b = df(a)/da\ \&\ b -$ комплексное $\rightarrow d\sin f(a)/da = b\cos f(a))$

Аналогично предыдущему.

(k) Производная косинуса.

$\forall_{abf}(b = df(a)/da\ \&\ b -$ комплексное $\rightarrow d\cos f(a)/da = -b\sin f(a))$

Аналогично предыдущему.

(l) Производная тангенса.

$\forall_{abf}(b = df(a)/da\ \&\ b -$ комплексное $\&\ \neg(\cos f(a) = 0) \rightarrow$ $d\,\mathrm{tg}\, f(a)/da = b(\cos f(a))^2)$

Аналогично предыдущему.

(m) Производная котангенса.

$\forall_{abf}(b = df(a)/da\ \&\ b -$ комплексное $\&\ \neg(\sin f(a) = 0) \rightarrow$ $d\,\mathrm{ctg}\, f(a)/da = -b(\sin f(a))^2)$

Аналогично предыдущему.

(n) Производная арксинуса.
$\forall_{abf}(b = df(a)/da$ & b – комплексное & $\neg(f(a)+1=0)$ & $\neg(f(a)-1=0) \to d\arcsin f(a)/da = b/\sqrt{1-f(a)^2})$
Аналогично предыдущему.

(o) Производная арккосинуса.
$\forall_{abf}(b = df(a)/da$ & b – комплексное & $\neg(f(a)+1=0)$ & $\neg(f(a)-1=0) \to d\arcsin f(a)/da = -b/\sqrt{1-f(a)^2})$
Аналогично предыдущему.

(p) Производная арктангенса.
$\forall_{abf}(b = df(a)/da$ & b – комплексное $\to d\,\mathrm{arctg}\, f(a)/da = b/(1+f(a)^2))$
Аналогично предыдущему.

(q) Производная арккотангенса.
$\forall_{abf}(b = df(a)/da$ & b – комплексное $\to d\,\mathrm{arcctg}\, f(a)/da = -b/(1+f(a)^2))$
Аналогично предыдущему.

(r) Производная гиперболического синуса.
$\forall_{abf}(b = df(a)/da$ & b – комплексное $\to d\,\mathrm{sh}\, f(a)/da = b\,\mathrm{ch}\, f(a))$
Аналогично предыдущему.

(s) Производная гиперболического косинуса.
$\forall_{abf}(b = df(a)/da$ & b – комплексное $\to d\,\mathrm{ch}\, f(a)/da = b\,\mathrm{sh}\, f(a))$
Аналогично предыдущему.

3. Исследование функции на дифференцируемость.

Для исследования функции F на дифференцируемость используется задача на описание, имеющая условие вида "Дифференцируема(F, a)", где a - неизвестная.

(a) Ввод обозначения для рассматриваемой функции.
$\forall_{afu}($Дифференцируема$(\lambda_z(u(z), z$ – комплексное$), a) \leftrightarrow$ Дифференцируема$(f, a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, не имеющей цели "исследовать". Переменная u функциональная. Выражение $u(z)$ не содержит неизвестных. Выбирается новая переменная f, причем одновременно с преобразованием условия в список посылок заносится утверждение "$\lambda_z(u(z), z-$комплексное$) = f$". Это утверждение сопровождается комментарием "упростить", блокирующим попытки упрощения, а также комментарием "определениепараметра". Переменная f регистрируется в цели "обозначение ...". Уровень срабатывания равен 1. После применения данного приема все ссылки на исследуемую функцию будут делаться через переменную f.

(b) Ввод обозначений для вещественной и мнимой частей функции.
$\forall_{fgru}(f = \lambda_z(g(z), z$ – комплексное$)$ & $r = \mathrm{Re}(g(x+iy)) \to \lambda_{xy}(r, x$ – число & y – число & одз$(r)) = u$ & вещчастьфунк$(f, u))$
$\forall_{fgru}(f = \lambda_z(g(z), z$ – комплексное$)$ & $r = \mathrm{Im}(g(x+iy)) \to \lambda_{xy}(r, x$ – число & y – число & одз$(r)) = u$ & мнимчастьфунк$(f, u))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, не имеющей цели "исследовать", но имеющей условие вида "Дифференцируема$(f,\ldots)$". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что выражение r не содержит символа "мнимаяединица". Прием выбирает новую переменную u, обозначающую, соответственно, вещественную либо мнимую функциональную часть исследуемой функции. Предварительно проверяется, что такое обозначение пока не введено. Уровень срабатывания равен 1.

Если вычисление вещественной или мнимой частей функции при задании аргумента "в прямоугольных координатах" не удается, то предпринимается попытка задать аргумент в полярных координатах:

$\forall_{fgru}(f = \lambda_z(g(z), z - \text{комплексное})\ \&\ r = \mathrm{Re}(g(x\exp(iy))) \rightarrow$
$\lambda_{xy}(r, x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ 0 < x\ \&\ 0 < y + \pi\ \&\ 0 \leq \pi - y\ \&$
$\text{одз}(r)) = u\ \&\ \text{вещчастьфункпол}(f, u))$

$\forall_{fgru}(f = \lambda_z(g(z), z - \text{комплексное})\ \&\ r = \mathrm{Im}(g(x\exp(iy))) \rightarrow$
$\lambda_{xy}(r, x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ 0 < x\ \&\ 0 < y + \pi\ \&\ 0 \leq \pi - y\ \&$
$\text{одз}(r)) = u\ \&\ \text{мнимачастьфункпол}(f, u))$

Аналогично первым двум приемам, но уровень срабатывания равен 2. Приемы применяются только при отсутствии хотя бы одной из двух посылок "вещчастьфунк$(f,\ldots)$", "мнимчастьфунк$(f,\ldots)$".

(c) Вычисление частных производных вещественной и мнимой частей.

$\forall_{afghiux}(f = \lambda_x(g(x), u(x))\ \&\ i \in \{1, \ldots, 2\}\ \&\ a = dg(x)/dx(i) \rightarrow$
$\lambda_x(a, u(x)\ \&\ \text{одз}(a)) = h\ \&\ \text{Частнпроизв}(f, i, h))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, имеющей условие вида "Дифференцируема(F, X)" и посылку "вещчастьфунк(F, f)" либо "мнимчастьфунк(F, f)". При этом требуется наличие обеих посылок вида "вещчастьфунк(F, G)" и "мнимчастьфунк(F, G)". Задача не должна иметь цель "исследовать". Второй антецедент выделен указателем "программа"; он перечисляет в качестве значения i номер переменной, по которой вычисляется частная производная. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть сначала обрабатывается нормализатором "нормпроизводная", а затем - упрощается задачей на преобразование. Переменные g, u функциональные. Прием выбирает для обозначения вычисленной производной новую переменную h. Предварительно проверяется отсутствие уже введенного обозначения этой производной. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, ориентированная на рассмотрение посылок "вещчастьфункпол(F, f)" и "мнимчастьфункпол(F, f)". Ее уровень срабатывания равен 3.

(d) Определение особых точек.

$\forall_{fghpq}(\text{вещчастьфунк}(f, g)\ \&\ \text{мнимчастьфунк}(f, g)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, 2\} \rightarrow$
$\text{Частнпроизв}(g, i, p(i)))\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, 2\} \rightarrow \text{Частнпроизв}(h, i, q(i)))\ \&$
$A(x, y) = (x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ (x, y) \in \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(g))\ \&$
$(x, y) \in \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(h))\ \&\ \neg((x, y) \in \mathrm{Dom}(p(1)) \cap \mathrm{Dom}(p(2)) \cap$
$\mathrm{Dom}(q(1))\ \&\ \mathrm{Dom}(q(2)))) \rightarrow \text{особыеточки}(f) = \mathrm{set}_z(\exists_{xy}(A(x, y)\ \&$
$z = x + iy)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на описание, не имеющей цели "исследовать" и имеющей условие вида "Дифференцируема(f, X)". Указатеои "развертка" определяют идентификацию третьего и четвертого антецедентов с парами посылок. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть разрешается относительно вспомогательных переменных x, y при помощи задачи на описание. Выводимая посылка сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{fghpq}(\text{вещчастьфункпол}(f,g)\ \&\ \text{мнимчастьфункпол}(f,g)\ \&$
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,2\} \to \text{Частнпроизв}(g,i,p(i)))\ \&$
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,2\} \to \text{Частнпроизв}(h,i,q(i)))\ \&$
$A(x,y) = (x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ (x,y) \in \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(g))\ \&$
$(x,y) \in \text{внутренность}(\mathrm{Dom}(h))\ \&\ \neg((x,y) \in \mathrm{Dom}(p(1)) \cap \mathrm{Dom}(p(2)) \cap$
$\mathrm{Dom}(q(1))\ \&\ \mathrm{Dom}(q(2)))) \to \text{особыеточки}(f) = \mathrm{set}_z(\exists_{xy}(A(x,y)\ \&$
$z = x + iy)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

(e) Использование условий Коши-Римана.

$\forall_{ABCDEFGHPQRSabcdfghmu}(\text{вещчастьфунк}(f,g)\ \&\ \text{мнимчастьфунк}(f,h)\ \&$
$g = \lambda_{ij}(A(i,j), B(i,j))\ \&\ h = \lambda_{kl}(C(k,l), D(k,l))\ \&\ \text{Частнпроизв}(g,1,a)\ \&$
$\text{Частнпроизв}(g,2,b)\ \&\ \text{Частнпроизв}(h,1,c)\ \&\ \text{Частнпроизв}(h,2,d)\ \&$
$a = \lambda_{np}(E(n,p), F(n,p))\ \&\ b = \lambda_{qr}(G(q,r), H(q,r))\ \&\ c = \lambda_{st}(P(s,t), Q(s,t))$
$\&\ d = \lambda_{vw}(R(v,w), S(v,w))\ \&\ \text{особыеточки}(f) = m\ \&$
$u(x,y) = (x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ B(x,y)\ \&\ D(x,y)\ \&\ F(x,y)\ \&\ H(x,y)\ \&$
$Q(x,y)\ \&\ S(x,y)\ \&\ E(x,y) = R(x,y)\ \&\ G(x,y) = -P(x,y)) \to$
$\text{Дифференцируема}(f,z) \leftrightarrow \exists_{xy}(u(x,y)\ \&\ \text{дифференцируема}(g,(x,y))\ \&$
$\text{дифференцируема}(h,(x,y))\ \&\ z = x + iy\ \vee$
$z \in m\ \&\ \text{Дифференцируема}(f,z)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение f не содержит неизвестных, выражение z - содержит. Все антецеденты, кроме последнего, идентифицируются с посылками. Переменные $u, A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S$ функциональные. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть разрешается относительно вспомогательных переменных x, y задачей на описание. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFGHPQRSabcdfghmu}(\text{вещчастьфункпол}(f,g)\ \&\ \text{мнимчастьфункпол}(f,h)$
$\&\ g = \lambda_{ij}(A(i,j), B(i,j))\ \&\ h = \lambda_{kl}(C(k,l), D(k,l))\ \&\ \text{Частнпроизв}(g,1,a)\ \&$
$\text{Частнпроизв}(g,2,b)\ \&\ \text{Частнпроизв}(h,1,c)\ \&\ \text{Частнпроизв}(h,2,d)\ \&$
$a = \lambda_{np}(E(n,p), F(n,p))\ \&\ b = \lambda_{qr}(G(q,r), H(q,r))\ \&\ c = \lambda_{st}(P(s,t), Q(s,t))$
$\&\ d = \lambda_{vw}(R(v,w), S(v,w))\ \&\ \text{особыеточки}(f) = m\ \&$
$u(x,y) = (x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ B(x,y)\ \&\ D(x,y)\ \&\ F(x,y)\ \&\ H(x,y)\ \&$
$Q(x,y)\ \&\ S(x,y)\ \&\ E(x,y) = R(x,y)/x\ \&\ G(x,y) = -xP(x,y)) \to$
$\text{Дифференцируема}(f,z) \leftrightarrow \exists_{xy}(u(x,y)\ \&\ \text{дифференцируема}(g,(x,y))\ \&$
$\text{дифференцируема}(h,(x,y))\ \&\ z = x\exp(iy)\ \vee$
$z \in m\ \&\ \text{Дифференцируема}(f,z)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4.

(f) Ограничение области дифференцируемости путем вычисления пределов по направлениям.

Прием служит для отбрасывания особых точек.

$\forall_{abfghk}(a$ – число & b – число & Дифференцируема$(f, a+bi)$ & вещчастьфунк(f, g) & $g = \lambda_{xy}(h(x,y), p(x,y))$ & $c(k) = \lim_{u\to 0+0}((h(a+u, b+ku) - h(a,b))/u)$ & $C = \neg(\exists_k(k$ – число & $(\neg(c(k)$ – число$)$ $\vee$ $\neg(c(k) = c(0))))) \to C)$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Третий антецедент идентифицируется с условием задачи на описание. Указатель "подстановка" разрешает вырожденное нулевое значение b, а указатель "единица" - нулевое значение a. Четвертый и пятый антецеденты идентифицируются с посылками, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть шестого антецедента обрабатывается нормализатором "нормпредел", причем числитель дроби под пределом предварительно упрощается задачей на преобразование. Подкванторное утверждение в седьмом антецеденте разрешается относительно k при помощи задачи на описание. После этого вся правая часть этого антецедента упрощается задачей на преобразование. Заметим, что если предел по направлению вычислить не удалось, то задача на описание выдаст отказ, и прием не сработает. Уровень срабатывания равен 3.

4. Нормализатор вычисления кратной комплексной производной "нормкомплПроизводная"

   (a) Производная первого порядка.

   $\forall_{fx}(df(x)/dx = df(x)/dx)$

   Левая производная имеет вид "комплПроизводная$(\lambda_a(f(a), a-$комплексное$)$, $1, x)$", правая - "комплпроизводная$(\lambda_a(f(a), a-$комплексное$), x)$". Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Понижение порядка.

   $\forall_{fgmnx}(m = n-1 \ \& \ 0 < m \ \& \ g(z) = d^m f(z)/dz^m \to d^n f(x)/dx^n = dg(x)/dx)$

   Первые две производные выражены через символ "комплПроизводная", последняя - через символ "комплпроизводная". Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор", второй - указателем "программа". Третий антецедент реализует рекурсивное обращение к нормализатору. Уровень срабатывания равен 2.

Аналитичность функций комплексного переменного

1. Обращение к проверочному оператору "усманалитическая".

   $\forall_{ab}($аналитическая$(a, b) \to$ аналитическая$(a, b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение a имеет заголовок "отображение". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

2. Обращение к нормализатору "комплособыеточки".

   $\forall_{af}($Особыеточки$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$)) = a \to$ Особыеточки$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$)) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "комплособыеточки". Проверяется, что результат a не имеет заголовка "Особыеточки". Уровень срабатывания равен 2. Заметим, что нормализатор "комплособыеточки" лишь определяет множество особых точек, а их классификация выполняется другими средствами.

3. Восстановление аналитической функции по ее вещественной либо мнимой части.

   $\forall_{ABCDPfpqruv}(\text{гармоническая}(\lambda_{xy}(u(x,y), x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}), B) \ \&$
   $C = \text{внутренность}(B) \ \& \ p \in C \ \& \ p = (q,r) \ \&$
   $v(x,y) = \int_r^y (du(x,w)/dx)dw - \int_q^x (du(w,y)/d(y=0))dw \ \&$
   $g = \lambda_z(u(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) + iv(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) + ci, z - \text{комплексное}) \ \&$
   $\text{аналитическая}(g, D) \ \& \ A = D \ \& \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ f = g) \rightarrow$
   $\text{аналитическая}(f, A) \ \& \ \text{вещчастьфунк}(f, \lambda_{xy}(u(x,y), P(x,y))))$

   $\forall_{ABCDPfpqruv}(\text{гармоническая}(\lambda_{xy}(v(x,y), x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}), B) \ \&$
   $C = \text{внутренность}(B) \ \& \ p \in C \ \& \ p = (q,r) \ \&$
   $u(x,y) = \int_q^x (du(w,y)/d(y=0))dw - \int_r^y (dv(x,w)/dx)dw \ \&$
   $g = \lambda_z(u(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) + iv(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) + c, z - \text{комплексное}) \ \&$
   $\text{аналитическая}(g, D) \ \& \ A = D \ \& \ \exists_c(c - \text{число} \ \& \ f = g) \rightarrow$
   $\text{аналитическая}(f, A) \ \& \ \text{мнимчастьфунк}(f, \lambda_{xy}(v(x,y), P(x,y))))$

   Приемы имеют заголовок "подборзначений". Консеквенты идентифицируются с условиями задачи на описание, не имеющей цели "полный". Выражение A содержит неизвестные. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, и таким образом определяется множество B, на котором выполнено условие гармоничности. Второй антецедент, выделенный указателем "идентификатор", определяет внутренность C множества B при помощи задачи на преобразование. Третий антецедент, обрабатываемый пакетным синтезатором, выбирает некоторую точку p множества C. Четвертый, пятый и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть пятого антецедента и выражение под описателем "отображение" в шестом антецеденте обрабатываются задачами на преобразование. Седьмой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором и находит область аналитичности D восстановленной функции g. Наконец, восьмой и девятый антецеденты выделены указателем "подборзначений". Они замещают исходные условия текущей задачи во вспомогательной задаче на описание. Девятый антецедент сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

4. Исследование функции на особые точки.

   (a) Определение особых точек.

      $\forall_{af}(\text{Особыеточки}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) = a \ \&$
      $g = \lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}) \rightarrow \text{Особыеточки}(g) = a)$

      Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки". Переменная g - неизвестная задачи. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "комплособыеточки", который будет описан ниже. Предварительно проверяется отсутствие посылки вида "Особыеточки$(g) = c$", где c не содержит неизвестных. Если задача имеет цель "(Особыеточки X)", выделяющую конкретную особую точку, тип которой требуется установить, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Подразбиение серии особых точек.

$\forall_{Afgmp}(f = \lambda_z(g(z), z - \text{комплексное})\ \&\ h(p(n)) = 0\ \&$
$(r(p(n)) = 0\ \&\ A(n)\ \&\ n - \text{целое}) = B(n)\ \&$
$C = \text{set}_x(\exists_n(B(n)\ \&\ x = p(n)))\ \&$
$D = \text{set}_x(\exists_n(A(n)\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ \neg(B(n))\ \&\ x = p(n))) \rightarrow$
$\text{set}_x(\exists_n(n - \text{целое}\ \&\ A(n)\ \&\ x = p(n))) = C \cup D)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки" и не имеющей цели "вычеты". Первый антецедент идентифицируется с другой посылкой, причем переменная f - неизвестная. Указатель "контекст" определяет идентификацию внутри $g(z)$ подвыражения "Дробь($r(z)$, $h(z)$)". Антецеденты со второго по пятый выделены указателем "идентификатор". Сначала второй антецедент, левая часть которого упрощается задачей на преобразование, убеждается в том, что на рассматриваемой серии точек знаменатель $h(z)$ обращается в ноль. Третий антецедент, левая часть которого разрешается относительно n задачей на описание, определяет условие $B(n)$ на обращение в ноль числителя $r(z)$. Четвертый и пятый антецеденты при помощи задач на преобразование определяют множество C точек рассматриваемой серии, где числитель обращается в ноль, и множество D остальных точек серии. Проверяется, что преобразуемое выражение является фрагментом множества особых точек, определенного посылкой "Особыеточки(f) = $\ldots$". В случаях, когда $B(n)$ обращается в логическую константу "истина" либо "ложь", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, отличающаяся от первой лишь тем, что указатель "контекст" выделяет внутри $g(z)$ две дроби - "Дробь($u(z)$, $h(z)$)" и "Дробь($v(z)$, $r(z)$)".

$\forall_{Afgmp}(f = \lambda_z(g(z), z - \text{комплексное})\ \&\ \sin h(p(n)) = 0\ \&$
$(r(p(n)) = 0\ \&\ A(n)\ \&\ n - \text{целое}) = B(n)\ \&$
$C = \text{set}_x(\exists_n(B(n)\ \&\ x = p(n)))\ \&$
$D = \text{set}_x(\exists_n(A(n)\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ \neg(B(n))\ \&\ x = p(n))) \rightarrow$
$\text{set}_x(\exists_n(n - \text{целое}\ \&\ A(n)\ \&\ x = p(n))) = C \cup D)$

Прием отличается от двух предыдущих тем, что указатель "контекст" выделяет внутри $g(z)$ подвыражение вида $r(z)(\text{ctg}\, h(z))^k$. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Усмотрение устранимой особой точки.

$\forall_{abcdfg}(\text{Особыеточки}(f) = \{a; b\} \cup d\ \&\ f = \lambda_z(g(z), z - \text{комплексное})\ \&$
$\lim_{z \to a} g(z) = c\ \&\ c - \text{комплексное} \rightarrow \text{устранимособая}(a, f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки" и не имеющей цели "вычеты". Переменная f идентифицируется с неизвестной. Переменная g функциональная. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормПредел". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, в которых ограничитель трудоемкости ослаблен. Она срабатывает на уровне 3, причем предварительно устанавливается отсутствие посылки, задающей тип особой точки ("существособая", "неизолиреособая", "устранимособая", "Полюс").

$\forall_{fgc}(f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ & $\lim_{z\to\infty} g(z) = c$ & $c -$ комплексное $\to$ устранимособая$(\infty, f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки" и не имеющей цели "вычеты". Переменная f - неизвестная. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{af}($Полюс$(a, f, 0) \leftrightarrow$ устранимособая$(a, f))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{acfg}(f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ & $\lim_{z\to a} g(z) = c$ & $c -$ комплексное $\to$ устранимособая$(a, f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки" и не имеющей цели "вычеты". Указатель "контекст" определяет идентификацию цели "Особыеточки a", означающей, что требуется установить тип особой точки a. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка, задающая тип особой точки a. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

(d) Усмотрение неизолированной особой точки.

$\forall_{Pabfr}($Особыеточки$(f) = \{a; b\} \cup \mathrm{set}_z(\exists_n(P(n)$ & $z = r(n)))$ & $\lim_{n\to\infty}\{r(n)\} = a$ & $\forall_e(e -$ натуральное $\to \exists_m(m -$ натуральное & $e < m$ & $P(m))) \to$ неизолиреособая$(a, f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки" и не имеющей цели "вычеты", причем переменная f - неизвестная. Отсутствует посылка, задающая тип особой точки a. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Истинность третьего антецедента устанавливается с помощью задачи на доказательство. Для блокировки ненужных действий из ее посылок исключаются все утверждения, содержащие символы "Особыеточки", "Полюс", "отображение". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Pafr}($Особыеточки$(f) = a \cup \mathrm{set}_z(\exists_n(P(n)$ & $z = r(n)))$ & $\lim_{n\to\infty}\{r(n)\} = \infty$ & $\forall_e(e -$ натуральное $\to \exists_m(m -$ натуральное & $e < m$ & $P(m))) \to$ неизолиреособая$(\infty, f))$

Аналогично предыдущему.

(e) Обращение к проверочному оператору "усмсуществособая".

$\forall_{abdfg}($Особыеточки$(f) = \{a; b\} \cup d$ & $f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ & существособая$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)) \to$ существособая$(a, f))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки" и не имеющей цели "вычеты". Переменная f - неизвестная. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором "усмсуществособая", который будет описан ниже. Отсутствует посылка, задающая тип особой точки a. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{fg}(f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ &
существособая$(\infty, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)) \rightarrow$ существособая$(\infty, f))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{Afgmp}($Особыеточки$(f) = \mathrm{set}_x(\exists_n(n -$ целое & $A(n)$ & $x = p(n))) \cup m$ &
$f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ &
существособая$(p(n), \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)) \rightarrow$
$\forall_n(n -$ целое & $A(n) \rightarrow$ существособая$(p(n), f)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 4. Проверочному оператору передаются посылки "$n -$ целое, $A(n)$".

$\forall_{afg}(f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ &
существособая$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)) \rightarrow$ существособая$(a, f))$

Указатель "контекст" определяет идентификацию цели "(Особыеточки a)". В остальном аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Обращение к синтезатору "усмПолюс".

$\forall_{abdfgn}($Особыеточки$(f) = \{a; b\} \cup d$ & $f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), n) \rightarrow$ Полюс$(a, f, n))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки" и не имеющей цели "вычеты". Переменная f - неизвестная. Третий антецедент обрабатывается синтезатором "усмПолюс", усматривающим, что точка a является полюсом и определяющим порядок n этого полюса. Синтезатор "усмПолюс" будет описан ниже. Отсутствует посылка, задающая тип особой точки a. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{fgn}(f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ &
Полюс$(\infty, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), n) \rightarrow$ Полюс$(\infty, f, n))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{Afgkmp}($Особыеточки$(f) = \mathrm{set}_x(\exists_n(n -$ целое & $A(n)$ & $x = p(n))) \cup m$ &
$f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ &
Полюс$(p(n), \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), k) \rightarrow$
$\forall_n(n -$ целое & $A(n) \rightarrow$ Полюс$(p(n), f, k)))$

Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{afgn}(f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), n) \rightarrow$ Полюс$(a, f, n))$

Указатель "контекст" определяет идентификацию цели "(Особыеточки a)". В остальном аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Разбор случаев для полюса либо устранимой особой точки.

$\forall_{afn}($Полюс$(a, f, n) \rightarrow n = 0 \ \vee \ 1 \leq n)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки". Выражение n неконстантное, причем не усматривается, что оно больше нуля. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 2.

(h) Упрощение выражения для кратности полюса, содержащего условное подвыражение.

$\forall_{Aabcf}(c(m) = b(m) \to \forall_m(A(m) \to \text{Полюс}(a(m), f, b(m))) \leftrightarrow$
$\forall_m(A(m) \to \text{Полюс}(a(m), f, c(m))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению посылки задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки". Выражение $b(m)$ содержит символ "вариант", но не имеет заголовка "вариант". Переменные a, b, c, A функциональные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Либо результат $c(m)$ не содержит символа "вариант", либо он имеет заголовок "вариант". Уровень срабатывания равен 4.

(i) Подразбиение серии для значений кратности полюса.

$\forall_{ABafpq}(\forall_m(A(m) \to \text{Полюс}(a(m), f, (p(m) \text{ при } B(m), \text{ иначе } q(m)))) \leftrightarrow$
$\forall_m(A(m)\ \&\ B(m) \to \text{Полюс}(a(m), f, p(m)))\ \&$
$\forall_m(A(m)\ \&\ \neg B(m) \to \text{Полюс}(a(m), f, q(m))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению посылки задачи на исследование, имеющей цель "особыеточки". Переменные a, p, q, A, B функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

(j) Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

В приводимых ниже приемах рассматривается посылка задачи на исследование,имеющей цели "исследовать" и "особыеточки". Переменная a идентифицируется с неизвестной. Уровень срабатывания равен 7.

"замещениеусловий(равно(Особыеточки(a)b))"

"замещениеусловий(существособая(b, a))"

"замещениеусловий(устранимособая(b, a))"

"замещениеусловий(Полюс(b, a, c))"

"замещениеусловий(неизолирособая(b, a))"

Следующий прием отличается от предыдущих только тем, что неизвестной является c:

"замещениеусловий(длялюбого(a если целое(a) то Полюс($b(a), c, d(a)$)))"

(k) Проверочный оператор "усмсуществособая".

i. Сумма функций.
$\forall_{abfg}(\lim_{z\to a} g(z) = b\ \&\ (b - \text{комплексное } \vee\ b = \infty)\ \&$
$\text{существособая}(a, \lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) \to$
$\text{существособая}(a, \lambda_z(g(z) + f(z), z - \text{комплексное})))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормПредел". Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение $g(z)$ идентифицируется с произвольным слагаемым. Указатель "спуск(2)" означает, что после обработки второго антецедента проверка условия полностью сводится к проверке третьего антецедента. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afgk}(\text{Полюс}(a, \lambda_z(g(z), z\text{−комплексное}), k)\ \&\ \text{существособая}(a, \lambda_z(f(z), z-$
$\text{комплексное})) \to \text{существособая}(a, \lambda_z(g(z) + f(z), z - \text{комплексное})))$

Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Используется указатель "спуск(1)". Уровень срабатывания равен 1.

ii. Усмотрение существенно особой точки с помощью вычисления пределов по направлениям.

$\forall_{acdgpq}(\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Re}(g(a+x))=c$ & $\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Im}(g(a+x))=p$ & $\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Re}(g(a+ix))=d$ & $\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Im}(g(a+ix))=q$ & $((c=\infty \vee c=-\infty \vee p=-\infty \vee p=\infty)$ & $d-$ число & $q-$ число $\vee$ $(d=\infty \vee d=-\infty \vee q=-\infty \vee q=\infty)$ & $c-$ число & $p-$ число $\vee$ $c-$ число & $p-$ число & $d-$ число & $q-$ число & $(\neg(c-d=0) \vee \neg(p-q=0)))\to$ существособая$(a,\lambda_z(g(z),z-$ комплексное)))

$\forall_{acdgpq}(\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Re}(g(a+x))=c$ & $\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Im}(g(a+x))=p$ & $\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Re}(g(a+ix))=d$ & $\lim_{x\to 0+0}\operatorname{Im}(g(a+ix))=q$ & $((c=$ неопред $\vee$ $p=$ неопред) & $(c-$ число $\vee$ $c=$ неопред) & $(p-$ число $\vee$ $p=$ неопред) $\vee$ $(d=$ неопред $\vee$ $q=$ неопред) & $(d-$ число $\vee$ $d=$ неопред) & $(q-$ число $\vee$ $q=$ неопред$))\to$ существособая$(a,\lambda_z(g(z),z-$ комплексное)))

$\forall_{cdgpq}(\lim_{x\to\infty}\operatorname{Re}(g(x))=c$ & $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Im}(g(x))=p$ & $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Re}(g(ix))=d$ & $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Im}(g(ix))=q$ & $((c=$ неопред $\vee$ $p=$ неопред) & $(c-$ число $\vee$ $c=$ неопред) & $(p-$ число $\vee$ $p=$ неопред) $\vee$ $(d=$ неопред $\vee$ $q=$ неопред) & $(d-$ число $\vee$ $d=$ неопред) & $(q-$ число $\vee$ $q=$ неопред$))\to$ существособая$(\infty,\lambda_z(g(z),z-$ комплексное)))

$\forall_{cdgpq}(\lim_{x\to\infty}\operatorname{Re}(g(x))=c$ & $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Im}(g(x))=p$ & $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Re}(g(ix))=d$ & $\lim_{x\to\infty}\operatorname{Im}(g(ix))=q$ & $((c=\infty \vee c=-\infty \vee p=-\infty \vee p=\infty)$ & $d-$ число & $q-$ число $\vee$ $(d=\infty \vee d=-\infty \vee q=-\infty \vee q=\infty)$ & $c-$ число & $p-$ число $\vee$ $c-$ число & $p-$ число & $d-$ число & $q-$ число & $(\neg(c-d=0) \vee \neg(p-q=0)))\to$ существособая$(\infty,\lambda_z(g(z),z-$ комплексное)))

Выражение $g(z)$ не имеет вида суммы. Первые четыре антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормпредел". Результаты не содержат символа "предел". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

iii. Усмотрение существенно особой точки с помощью разложения в степенной ряд.

$\forall_{abcgmpqr}(0<p$ & $g(1/z)=c\sum_{n=m}^{\infty}a(n)/(b(n)z^{pn+q})+r$ & $\neg(a(n)=0)\to$ существособая$(\infty,\lambda_z(g(z),z-$ комплексное)))

Первый и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть сначала обрабатывается задачей на преобразование, имеющей цель "(рядтейлора z 0)", а затем - нормализатором "главнчасть", которому передается комментарий "(рядтейлора z 0)". Этот нормализатор отбрасывает правильную часть ряда и будет описан ниже. Проверяется, что остаточная сумма r не содержит символа "Суммавсех". Уровень срабатывания равен 3.

iv. Произведение функций.

$\forall_{abfg}(\lim_{z\to a}g(z)=b$ & $b-$ комплексное & $(\neg(b=0)$ $\vee$ нетождноль$(\lambda_z(g(z),z-$ комплексное))) &

существсобая$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$)) \rightarrow$
существсобая$(a, \lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$)))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормПредел". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение $g(z)$ идентифицируется с произвольным сомножителем. Выражение $f(z)$ должно содержать неарифметическую операцию либо степень с не натуральным показателем. Используется указатель "спуск(3)". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afgk}($Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), k)$ &
существсобая$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$))$ & $0 < k \rightarrow$
существсобая$(a, \lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$)))$

Аналогично предыдущему, но первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Используется указатель "спуск(1)". Уровень срабатывания равен 2.

v. Дробное выражение.
$\forall_{abfg}(\lim_{z\rightarrow a} g(z) = b$ & $b -$ комплексное &
существсобая$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$)) \rightarrow$
существсобая$(a, \lambda_z(f(z)/g(z), z -$ комплексное$)))$

$\forall_{afgk}($Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), k)$ &
существсобая$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$)) \rightarrow$
существсобая$(a, \lambda_z(f(z)/g(z), z -$ комплексное$)))$

Аналогично приемам для произведения функций.

vi. Элементарная функция.
$\forall_{afn}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), n)$ & $0 < n \rightarrow$
существсобая$(a, \lambda_z(\exp(f(z)), z -$ комплексное$)))$

$\forall_{afn}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), n)$ & $0 < n \rightarrow$
существсобая$(a, \lambda_z(\sin(f(z)), z -$ комплексное$)))$

$\forall_{afn}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), n)$ & $0 < n \rightarrow$
существсобая$(a, \lambda_z(\cos(f(z)), z -$ комплексное$)))$

Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afn}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), n)$ & $n = 0 \rightarrow$
$\neg($существсобая$(a, \lambda_z(\sin(f(z)), z -$ комплексное$))))$

$\forall_{afn}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), n)$ & $n = 0 \rightarrow$
$\neg($существсобая$(a, \lambda_z(\cos(f(z)), z -$ комплексное$))))$

Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Указатель "не" определяет немедленный выход из проверочного оператора по истинностному значению "ложь". Уровень срабатывания равен 1.

(l) Синтезатор определения порядка полюса "усмполюс".

Синтезатор реализует утверждение "Полюс(a, b, c)". Входные данные суть комплексное число a и функция комплексного переменного b. Переменной c присваивается порядок a как полюса функции b, либо, в случае устранимой особой точки, ноль.

i. Усмотрение полюса с помощью выделения главного члена степенного ряда.

$\forall_{adgnpq}(g(z) = p/(q(z+d)^n)$ & $0 \leq n$ & $a + d = 0 \rightarrow$
Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), n))$

$\forall_{adgnpq}(g(z) = p(z+d)^n/q$ & $0 \leq n$ & $a + d = 0 \rightarrow$
Полюс$(a, \lambda_z(1/g(z), z -$ комплексное$), n))$

Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого антецедента обрабатывается сначала нормализатором "рядТейлора" разложения в степенной ряд (Тейлора либо Лорана), затем - упрощается задачей на преобразование, и затем - обрабатывается нормализатором "главнчлен" выделения главного члена степенного ряда. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{adgnpq}(g(z) = p/(q(z+d)^n)$ & $0 \leq n$ & $\neg(a + d = 0) \rightarrow$
Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), 0))$

$\forall_{abgnpq}(g(z) = p(z+d)^n/q$ & $0 \leq n$ & $\neg(a + d = 0) \rightarrow$
Полюс$(a, \lambda_z(1/g(z), z -$ комплексное$), 0))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", два других - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_n($Полюс$(\infty, \lambda_z(z^n, z -$ комплексное$), n))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Уровень срабатывания равен 1.

ii. Попытка разложения на множители знаменателя.

$\forall_{bcfghn}(f(z) = (bz + c)^n g(z)/h(z)$ & $ab + c = 0$ & $\neg(h(a) = 0)$ &
$\neg(g(a) = 0)$ & $n -$ натуральное $\rightarrow$
Полюс$(a, \lambda_z(1/f(z), z -$ комплексное$), n))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "видУмножение"Последние три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

iii. Вычисление производной для усмотрения полюса первого порядка.

$\forall_{abf}(f(a) = 0$ & $df(a)/da = b$ & $\neg(b = 0) \rightarrow$
Полюс$(a, \lambda_z(1/f(z), z -$ комплексное$), 1))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части упрощаются задачами на преобразование. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

iv. Бесконечноудаленная точка как полюс многочлена.

$\forall_{afn}(\neg(a = 0) \rightarrow$ Полюс$(\infty, \lambda_z(az^n + f(z), z -$ комплексное$), n))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Каждое содержащее z слагаемое выражения $f(z)$ представляет собой одночлен относительно z, степень которого меньше n. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

v. Непосредственное усмотрение полюса.

$\forall_{abc}(a$ – комплексное $\to$ Полюс$(a, \lambda_z(bz + c, z$ – комплексное$), 0))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Aab}((a + b = 0) = A \to$
Полюс$(a, \lambda_z(1/(z + b), z$ – комплексное$), (1$ при $A,$ иначе $0)))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на описание, решаемой с целью "редакция". Выражение a неконстантное. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Aamn}((ma/(n\pi)$ – целое$) = A \to$
Полюс$(a, \lambda_z(1/\sin(mz/n), z$ – комплексное$), (1$ при $A,$ иначе $0)))$

Аналогично предыдущему.

vi. Переход к более простому выражению.

A. Плюс.

$\forall_{abfgk}(\lim_{z\to a} f(z) = b$ & b – комплексное & Полюс$(a, \lambda_z(g(z),$
z–комплексное$), k) \to$ Полюс$(a, \lambda_z(f(z)+g(z), z$–комплексное$), k))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормПредел". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, третий - реализует рекурсивное обращение. Остаточная сумма $g(z)$ содержит переменную z. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afgkm}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), m)$ & Полюс$(a, \lambda_z(g(z),$
z – комплексное$), k)$ & $0 < k - m \to$ Полюс$(a, \lambda_z(f(z) + g(z),$
z – комплексное$), k)$

Первый и второй антецеденты реализуют рекурсивные обращения к синтезатору, третий - обрабатывается проверочным оператором. Каждое из выражений $f(z), g(z)$ содержит переменную z. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abfgkm}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), m)$ & Полюс$(a, \lambda_z(g(z),$
z – комплексное$), k)$ & $k = m$ & $b = \lim_{z\to a} f(z)(z - a)^k$ &
b – комплексное & $c = \lim_{z\to a} g(z)(z - a)^k$ & c – комплексное &
$\neg(b + c = 0) \to$ Полюс$(a, \lambda_z(f(z) + g(z), z$ – комплексное$), k))$

Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения. Третий, четвертый и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Пределы вычисляются нормализатором "нормПредел". Пятый, седьмой и восьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Aabfgkm}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z$–комплексное$), m)$ & Полюс$(a, \lambda_z(g(z),$
z – комплексное$), k)$ & $(k - m = 0) = A$ & $b = \lim_{z\to a} f(z)(z - a)^k$ &
b – комплексное & $c = \lim_{z\to a} g(z)(z - a)^k$ & c – комплексное &
$\neg(b + c = 0) \to$ Полюс$(a, \lambda_z(f(z) + g(z), z$ – комплексное$),$
$(k$ при $A,$ иначе $\max(k, m))))$

Аналогично предыдущему, но указатель "контекст" определяет выбор некоторого параметра d выражений m, k, относительно которого и разрешается левая часть третьего антецедента. Уровень срабатывания равен 3.

B. Дробь.

$\forall_{abfgk}(\lim_{z\to a} f(z) = b$ & b – комплексное & $\neg(b = 0)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(1/g(z), z$ – комплексное$), k) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)/g(z), z$ – комплексное$), k))$

Числитель $f(z)$ не тождественно единичный. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Четвертый антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abfgk}(\lim_{z\to a} g(z) = b$ & b – комплексное & $\neg(b = 0)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), k) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)/g(z), z$ – комплексное$), k))$

$\forall_{abfgn}(f(a) = b$ & b – комплексное & $\neg(b = 0)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(1/g(z), z$ – комплексное$), n) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(1/(f(z)g(z)), z$ – комплексное$), n))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abfg}(\lim_{z\to a} g(z) = \infty$ & $\lim_{z\to a} f(z) = b$ & b – комплексное $\to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)/g(z), z$ – комплексное$), 0))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abfgkm}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), m)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z$ – комплексное$), k)$ & $0 < m - k$ &
$b = \lim_{z\to a} g(z)$ & $\neg(b = 0) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)/g(z), z$ – комплексное$), m - k))$

Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения, третий и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Либо a есть символ бесконечности, либо $g(a)$, после упрощения задачей на преобразование, не обращается в ноль. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcfgmn}($Полюс$(a, \lambda_z(1/f(z), z$ – комплексное$), m)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(1/g(z), z$ – комплексное$), n)$ & $b = \lim_{z\to a} f(z)$ &
b – комплексное & $c = \lim_{z\to a} g(z)$ & c – комплексное $\to$
Полюс$(a, \lambda_z(1/(f(z)g(z)), z$ – комплексное$), m + n))$

Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения, третий и пятый - выделены указателем "идентификатор". Четвертый и шестой антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{abcfgkm}($Полюс$(a, \lambda_z(1/f(z), z$ – комплексное$), m)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(1/g(z), z$ – комплексное$), k)$ & $b = \lim_{z\to a} f(z)$ &

$b -$ комплексное & $c = \lim_{z\to a} g(z)$ & $c -$ комплексное $\to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)/g(z), z -$ комплексное$),$
$(k - m$ при $0 \leq k - m,$ иначе $0)))$

Аналогично предыдущему. Если усматривается, что $f(a) \neq 0$, то прием блокируется.

C. Умножение.

$\forall_{abfgk}(\lim_{z\to a} f(z) = b$ & $\neg(b = 0)$ & $b -$ комплексное &
Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), k) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$), k))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Четвертый антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afgmn}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), m)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), n)$ & $\neg(m = 0)$ & $\neg(n = 0) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$), m + n)$

Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения, последние два - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afgmn}(\lim_{z\to a} g(z) = 0$ & Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), m)$ &
Полюс$(a, \lambda_z(1/g(z), z -$ комплексное$), n)$ & $0 \leq m - n \to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$), m - n)$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй и третий - реализуют рекурсивные обращения. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

D. Минус.

$\forall_{afk}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), k) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(-f(z), z -$ комплексное$), k))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

E. Натуральная степень.

$\forall_{afkn}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), k)$ & $n -$ натуральное $\to$
Полюс$(a, \lambda_z(f(z)^n, z -$ комплексное$), kn))$

$\forall_{afkn}($Полюс$(a, \lambda_z(1/f(z), z -$комплексное$), k)$ & $n -$натуральное $\to$
Полюс$(a, \lambda_z(1/f(z)^n, z -$ комплексное$), kn))$

Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

F. Тангенс и котангенс.

$\forall_{afgkn}($Полюс$(a, \lambda_z((\cos f(z))^n/((\sin f(z))^n g(z)), z -$комплексное$), k) \to$
Полюс$(a, \lambda_z(1/((\operatorname{tg} f(z))^n g(z)), z -$ комплексное$), k))$

$\forall_{afgkn}$(Полюс$(a, \lambda_z((\sin f(z))^n/(\cos f(z))^n, z$ – комплексное$), k) \rightarrow$ Полюс$(a, \lambda_z(\operatorname{tg} f(z))^n, z$ – комплексное$), k))$

$\forall_{afgkn}$(Полюс$(a, \lambda_z((\cos f(z))^n/(\sin f(z))^n, z$ – комплексное$), k) \rightarrow$ Полюс$(a, \lambda_z(\operatorname{ctg} f(z))^n, z$ – комплексное$), k))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

G. Синус.

$\forall_{afgk}(\lim_{z\to a} f(z) = 0$ & Полюс$(a, \lambda_z(1/f(z), z$ – комплексное$), k) \rightarrow$ Полюс$(a, \lambda_z(1/\sin f(z), z$ – комплексное$), k)$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания приема равен 1.

H. Косинус.

$\forall_{afgkn}(\lim_{z\to a} f(z) = \pi k/2$ & k – целое & $\neg(k$ – even$)$ & Полюс$(a, \lambda_z(1/(f(z) - \pi k/2), z$ – комплексное$), n) \rightarrow$ Полюс$(a, \lambda_z(1/\cos f(z), z$ – комплексное$), n)$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

(m) Нормализатор выделения главного члена степенного ряда "главнчлен". Нормализатор корневой. При обращении ему передается комментарий (рядтейлора z a), указывающий переменную разложения z и точку разложения a.

i. Бесконечная сумма по возрастающим степеням.

$\forall_{bkmnpqr}(r = -(kn + m)$ & $0 \leq r$ & $0 < k$ & $\neg(p(n) = 0) \rightarrow \sum_{i=n}^{\infty} p(i)(z + b)^{ki+m}/q(i) = p(n)/(q(n)(z + b)^r))$

$\forall_{bkmnpqr}(r = kn + m$ & $0 \leq r$ & $0 < k$ & $\neg(p(n) = 0) \rightarrow \sum_{i=n}^{\infty} p(i)(z + b)^{ki+m}/q(i) = p(n)(z + b)^r/q(n))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{bkmnpqr}(r = kn + m$ & $0 \leq r$ & $0 < k$ & $p(n) = 0 \rightarrow \sum_{i=n}^{\infty} p(i)(z + b)^{ki+m}/q(i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i)(z + b)^{ki+m}/q(i))$

Первый и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор", второй и третий - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

ii. Отбрасывание константного слагаемого.

$\forall_{bnpqrsz}(n$ – натуральное $\rightarrow p/(q(z + b)^n) + r + s = p/(q(z + b)^n) + s)$

Указатель "перечень" определяет идентификацию r с непустой суммой всех не содержащих переменную разложения z слагаемых. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

iii. Отбрасывание младшего члена.

$\forall_{Abmnpqrsz}(m$ – натуральное & n – натуральное & $0 < n - m \rightarrow$ $p/(q(z+b)^n) + r/(s(z+b)^m) + A = p/(q(z+b)^n) + A)$

$\forall_{Abmnpqrsz}(m$ – натуральное & n – натуральное & $0 < m - n \rightarrow$ $p(z+b)^n/q + r(z+b)^m/s + A = p(z+b)^n/q + A)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражения b, p, q, r, s не содержат переменной z. Уровень срабатывания равен 1.

iv. Отбрасывание минуса.

$\forall_{afn}(\sum_{i=n}^{\infty} f(i) = a \rightarrow -\sum_{i=n}^{\infty} = -a)$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Результат a не содержит символа "Суммавсех". Уровень срабатывания равен 1.

v. Выделение первого слагаемого бесконечной суммы.

$\forall_{abckmnpqr}(0 < k \ \& \ c = a + p(n)(z+b)^{kn+m}/q(n) \rightarrow$ $a + \sum_{i=n}^{\infty} p(i)(z+b)^{ki+m}/q(i) = c + \sum_{i=n+1}^{\infty} p(i)(z+b)^{ki+m}/q(i))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть сначала упрощается задачей на преобразование, а затем обрабатывается нормализатором "главнчлен". Число слагаемых результата c не превосходит числа слагаемых выражения a. Уровень срабатывания равен 2.

vi. Отбрасывание бесконечной суммы.

$\forall_{abckmnpqs}(0 < k \ \& \ 0 < kn + m - s \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow$ $a(z+b)^s/c + \sum_{i=n}^{\infty} p(i)(z+b)^{ki+m}/q(i) = a(z+b)^s/c)$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменная s идентифицируется с целочисленной константой. Выражения a, b, c не содержат переменной разложения z. Уровень срабатывания приема равен 1.

$\forall_{abckmnpq}(0 < k \ \& \ 0 < kn + m \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow$ $a + \sum_{i=n}^{\infty} p(i)(z+b)^{ki+m}/q(i) = a$

Аналогично предыдущему.

(n) Нормализатор выделения главной части степенного ряда "главнчасть".

При обращении к нормализатору ему передается комментарий (рядтейлора z s), указывающий на переменную разложения z и точку разложения s. Уровни срабатывания приемов равны 1.

i. Отбрасывание степенного слагаемого.
$\forall_{abcdnz}(n$ – натуральное $\rightarrow a(z+b)^n/c + d = d)$
Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

ii. Отбрасывание константного слагаемого.

$\forall_{ab}(a + b = b)$

Указатель "перечень" определяет идентификацию a с непустой суммой слагаемых, не содержащих переменной разложения z.

iii. Отбрасывание бесконечной суммы, относящейся к правильной части.

$\forall_{abckmpqrz}(0 < p\ \&\ (n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq pn + q) = (k \leq n) \rightarrow$
$\sum_{n=m}^{\infty} a(n)(z+b)^{pn+q}/c(n) + r = \sum_{n=m}^{k-1} a(n)(z+b)^{pn+q}/c(n) + r)$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно n вспомогательной задачей на описание. Переменная k идентифицируется с целочисленной константой. Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы в заменяющей части как обычной суммы.

(o) Проверочный оператор "усмнетождноль".

Оператор проверяет утверждение "нетождноль(a)", означающее, что аналитическая функция a комплексного переменного не равна тождественно нулю. Уровни срабатывания приемов равны 1.

i. Константа.

$\forall_a(\neg(a = 0) \rightarrow \text{нетождноль}(\lambda_z(a, z - \text{комплексное})))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

ii. Тождественная функция.

$\text{нетождноль}(\lambda_z(z, z - \text{комплексное}))$

iii. Степенная функция.

$\forall_{fn}(\text{нетождноль}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) \rightarrow$
$\text{нетождноль}(\lambda_z(f(z)^n, z - \text{комплексное})))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение.

iv. Тангенс.

$\forall_{fn}(\text{нетождконст}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) \rightarrow$
$\text{нетождноль}(\lambda_z(\operatorname{tg} f(z), z - \text{комплексное})))$

Аналогично предыдущему.

(p) Проверочный оператор "нетождконст".

Оператор проверяет утверждение "нетождконст(a)", означающее, что a есть аналитическая функция комплексного переменного, не равная тождественно константе. Уровни срабатывания приемов равны 1.

i. Тождественная функция.

$\text{нетождконст}(\lambda_z(z, z - \text{комплексное}))$

ii. Произведение на константу.

$\forall_a(\neg(a = 0)\ \&\ \text{нетождконст}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) \rightarrow$
$\text{нетождконст}(\lambda_z(af(z), z - \text{комплексное})))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

5. Обращение к синтезатору "обланалитичности".

$\forall_{afx}(\text{аналитическая}(f, a) \rightarrow \text{аналитическая}(f, x) \leftrightarrow x = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример" либо не имеющей цели "полный". Переменная

x - неизвестная. Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "обланаличности", определяющим некоторую область, в которой функция заведомо аналитична. Уровень срабатывания равен 3.

6. Проверочный оператор "усманалитическая".

   Оператор проверяет утверждение "аналитическая(f, a)", означающее, что функция f комплексного переменного является аналитической на множества a.

   (a) Константа.
   $\forall_{ab}(a -$ комплексное $\rightarrow$ аналитическая$(\lambda_z(a, z -$ комплексное$), b))$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Переменная.
   $\forall_a($аналитическая$(\lambda_z(z, z -$ комплексное$), a))$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Минус.
   $\forall_{af}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
   аналитическая$(\lambda_z(-f(z), z -$ комплексное$), a))$
   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

   (d) Сумма.
   $\forall_{afg}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
   аналитическая$(\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
   аналитическая$(\lambda_z(f(z) + g(z), z -$ комплексное$), a))$
   Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 1.

   (e) Произведение.
   $\forall_{afg}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
   аналитическая$(\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
   аналитическая$(\lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$), a))$
   Аналогично предыдущему.

   (f) Дробь.
   $\forall_{afg}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ & $\neg(g(z) = 0)$ &
   аналитическая$(\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
   аналитическая$(\lambda_z(f(z)/g(z), z -$ комплексное$), a))$
   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. При обработке второго антецедента используются дополнительные посылки "z—комплексное" и "$z \in a$". Уровень срабатывания равен 2.
   $\forall_{afg}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), \{a\})$ & $\neg(g(a) = 0)$ &
   аналитическая$(\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), \{a\}) \rightarrow$
   аналитическая$(\lambda_z(f(z)/g(z), z -$ комплексное$), \{a\}))$
   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

   (g) Степень.

$\forall_{afn}(n$ – натуральное & аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a) \rightarrow$ аналитическая$(\lambda_z(f(z)^n, z$ – комплексное$), a))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{abf}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), b)$ & $\neg(a = 0) \rightarrow$ аналитическая$(\lambda_z(a^f(z), z$ – комплексное$), b))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afg}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a)$ &
$\neg(\exists_z(z$ – комплексное & $z \in a$ & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0))$ &
аналитическая$(\lambda_z(g(z), z$ – комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая$(\lambda_z(f(z)^{g(z)}, z$ – комплексное$), a))$

Первый и третий антецеденты реализуют рекурсивные обращения, истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 3.

(h) Логарифм.

$\forall_{af}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a)$ &
$\neg(\exists_z(z$ – комплексное & $z \in a$ & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0))$ &
аналитическая$(\lambda_z(g(z), z$ – комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая$(\lambda_z(\ln f(z), z$ – комплексное$), a))$

Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, истинность второго устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 3.

(i) Синус.

$\forall_{af}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая$(\lambda_z(\sin f(z), z$ – комплексное$), a))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Косинус.

$\forall_{af}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая$(\lambda_z(\cos f(z), z$ – комплексное$), a))$

Аналогично предыдущему.

(k) Тангенс.

$\forall_{af}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a)$ & $\neg(\cos f(z) = 0) \rightarrow$
аналитическая$(\lambda_z(\mathrm{tg}\, f(z), z$ – комплексное$), a))$

Аналогично предыдущему.

(l) Котангенс.

$\forall_{af}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a)$ & $\neg(\sin f(z) = 0) \rightarrow$
аналитическая$(\lambda_z(\mathrm{ctg}\, f(z), z$ – комплексное$), a))$

Аналогично предыдущему.

(m) Гипсинус.

$\forall_{af}($аналитическая$(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая$(\lambda_z(\mathrm{sh}\, f(z), z$ – комплексное$), a))$

Аналогично предыдущему.

(n) Гипкосинус.

$\forall_{af}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(\operatorname{ch} f(z), z -$ комплексное$), a$))

Аналогично предыдущему.

(o) Гиптангенс.

$\forall_{af}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ & $\neg(\operatorname{ch} f(z) = 0) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(\operatorname{th} f(z), z -$ комплексное$), a$))

Аналогично предыдущему.

(p) Гипкотангенс.

$\forall_{af}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ & $\neg(\operatorname{sh} f(z) = 0) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(\operatorname{cth} f(z), z -$ комплексное$), a$))

Аналогично предыдущему.

7. Нормализатор определения особых точек функции комплексного переменного "комплособыеточки".

Нормализатор преобразует выражение "Особыеточки(f)", обозначающее некоторое множество точек, проколотая окрестность которых включается в область определения функции комплексного переменного f, причем каждая такая точка, где нарушается аналитичность f, принадлежит данному множеству. Бесконечноудаленная точка в данное множество не включается.

(a) Константа.

$\forall_a(a -$ комплексное $\rightarrow$ Особыеточки($\lambda_z(a, z -$ комплексное$)) = \emptyset)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Переменная.

Особыеточки($\lambda_z(z, z -$ комплексное$)) = \emptyset$

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Минус.

$\forall_f$(Особыеточки($\lambda_z(-f(z), z -$ комплексное$)) =$
Особыеточки($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$)))$

Уровень срабатывания равен 1.

(d) Сумма.

$\forall_{abfg}$(Особыеточки($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$)) = a$ &
Особыеточки($\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)) = b \rightarrow$
Особыеточки($\lambda_z(f(z) + g(z), z -$ комплексное$)) = a \cup b)$

Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Произведение.

$\forall_{abfg}$(Особыеточки($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$)) = a$ &
Особыеточки($\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)) = b \rightarrow$
Особыеточки($\lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$)) = a \cup b)$

Аналогично предыдущему.

(f) Дробь.

$\forall_{abfg}$(Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)) $= a$ &
Особыеточки($\lambda_z(g(z), z$ – комплексное)) $= b \to$
Особыеточки($\lambda_z(f(z)/g(z), z$ – комплексное)) $=$
$a \cup b \cup \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $g(z) = 0$))

Аналогично предыдущему.

(g) Степень.

$\forall_{fn}(n$ – натуральное $\to$ Особыеточки($\lambda_z(f(z)^n, z$ – комплексное)) $=$
Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)))

$\forall_{af}(\neg(a = 0) \to$ Особыеточки($\lambda_z(a^{f(z)}, z$ – комплексное)) $=$
Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abfg}$(Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)) $= a$ &
Особыеточки($\lambda_z(g(z), z$ – комплексное)) $= b \to$
Особыеточки($\lambda_z(f(z)^{g(z)}, z$ – комплексное)) $=$
$a \cup b \cup \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0$))

Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Логарифм.

$\forall_{af}$(Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)) $= a \to$
Особыеточки($\lambda_z(\ln f(z), z$ – комплексное)) $=$
$a \cup \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0$))

Аналогично последнему приему предыдущего пункта.

(i) Синус.

$\forall_f$(Особыеточки($\lambda_z(\sin f(z), z$ – комплексное)) $=$
Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)))

Уровень срабатывания равен 1.

(j) Косинус.

$\forall_f$(Особыеточки($\lambda_z(\cos f(z), z$ – комплексное)) $=$
Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)))

Аналогично предыдыщему.

(k) Тангенс.

$\forall_{af}$(Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)) $= a \to$
Особыеточки($\lambda_z(\mathrm{tg}\, f(z), z$ – комплексное)) $=$
$a \cup \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $\cos f(z) = 0$))

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

(l) Котангенс.

$\forall_{af}$(Особыеточки($\lambda_z(f(z), z$ – комплексное)) $= a \to$
Особыеточки($\lambda_z(\mathrm{ctg}\, f(z), z$ – комплексное)) $=$
$a \cup \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $\sin f(z) = 0$))

Аналогично предыдущему.

(m) Гипсинус.

$\forall_f$(Особыеточки(λ_z(sh $f(z), z$ – комплексное)) =
Особыеточки(λ_z($f(z), z$ – комплексное)))

Уровень срабатывания равен 1.

(n) Гипкосинус.

$\forall_f$(Особыеточки(λ_z(ch $f(z), z$ – комплексное)) =
Особыеточки(λ_z($f(z), z$ – комплексное)))

Аналогично предыдущему.

(o) Гиптангенс.

$\forall_{af}$(Особыеточки(λ_z($f(z), z$ – комплексное)) = $a \rightarrow$
Особыеточки(λ_z(th $f(z), z$ – комплексное)) =
$a \cup \mathrm{set}_z$(z – комплексное & ch $f(z) = 0$))

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

(p) Гипкотангенс.

$\forall_{af}$(Особыеточки(λ_z($f(z), z$ – комплексное)) = $a \rightarrow$
Особыеточки(λ_z(cth $f(z), z$ – комплексное)) =
$a \cup \mathrm{set}_z$(z – комплексное & sh $f(z) = 0$))

Аналогично предыдущему.

8. Синтезатор определения области аналитичности "обланалитичности".

Синтезатор реализует утверждение "аналитическая(a, b)". Входным данным служит выражение a для функции комплексного переменного, выходным - выражение b, определяющее некоторое (возможно более полное) множество точек, на котором эта функция аналитична.

(a) Константа.

$\forall_a$(a – комплексное $\rightarrow$ аналитическая(λ_z(a, z – комплексное), $\mathbb{C}$))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Переменная.

аналитическая(λ_z(z, z – комплексное), $\mathbb{C}$)

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Минус.

$\forall_{af}$(аналитическая(λ_z($f(z), z$ – комплексное), a) $\rightarrow$
аналитическая(λ_z($-f(z), z$ – комплексное), a))

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Сумма.

$\forall_{abfg}$(аналитическая(λ_z($f(z), z$ – комплексное), a) &
аналитическая(λ_z($g(z), z$ – комплексное), b) $\rightarrow$
аналитическая(λ_z($f(z) + g(z), z$ – комплексное), $a \cap b$))

Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Произведение.

$\forall_{abfg}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
аналитическая($\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), b) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(f(z)g(z), z -$ комплексное$), a \cap b))$

Аналогично предыдущему.

(f) Дробь.

$\forall_{abcfg}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
аналитическая($\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), b)$ &
$c = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $g(z) = 0) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(f(z)/g(z), z -$ комплексное$), a \cap b) \setminus c)$

Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения, третий - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Степень.

$\forall_{afn}(n -$ натуральное & аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(f(z)^n, z -$ комплексное$), a))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{af}(\neg(a = 0)$ & аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), b) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(a^{f(z)}, z -$ комплексное$), b))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcfg}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
аналитическая($\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$), b)$ &
$c = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(f(z)^{g(z)}, z -$ комплексное$), a \cap b) \setminus c)$

Первые два антецедента реализуют рекурсивные обращения, третий - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

(h) Логарифм.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $\mathrm{Re}(f(z)) \leq 0) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(\ln f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 1.

(i) Синус.

$\forall_{af}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(\sin f(z), z -$ комплексное$), a))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Косинус.

$\forall_{af}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) \rightarrow$
аналитическая($\lambda_z(\cos f(z), z -$ комплексное$), a))$

Аналогично предыдущему.

(k) Тангенс.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(\cos f(z) = 0$ & $z -$ комплексное$) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{tg}\, f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 1.

(l) Котангенс.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(\sin f(z) = 0$ & $z -$ комплексное$) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{ctg}\, f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Аналогично предыдущему.

(m) Арксинус.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $1 \leq |\mathrm{Re}(f(z))|) \to$
аналитическая($\lambda_z(\arcsin f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Аналогично предыдущему.

(n) Арккосинус.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$ & $1 \leq |\mathrm{Re}(f(z))|) \to$
аналитическая($\lambda_z(\arccos f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Аналогично предыдущему.

(o) Арктангенс.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ & $1 \leq |\mathrm{Im}(f(z))|) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{arctg}\, f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Аналогично предыдущему.

(p) Арккотангенс.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ & $1 \leq |\mathrm{Im}(f(z))|) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{arcctg}\, f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Аналогично предыдущему.

(q) Гипсинус.

$\forall_{af}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{sh}\, f(z), z -$ комплексное$), a))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

(r) Гипкосинус.

$\forall_{af}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{ch}\, f(z), z -$ комплексное$), a))$

Аналогично предыдущему.

(s) Гиптангенс.

$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(\mathrm{ch}\, f(z) = 0$ & $z -$ комплексное$) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{th}\, f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

Аналогично тангенсу.

(t) Гипкотангенс.
$\forall_{abf}$(аналитическая($\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a)$ &
$b = \mathrm{set}_z(\mathrm{sh}\, f(z) = 0$ & $z -$ комплексное$) \to$
аналитическая($\lambda_z(\mathrm{cth}\, f(z), z -$ комплексное$), a \setminus b))$

9. Нормализатор "Стандкомпл" стандартизации комплексных выражений, ориентированной на исключение вещественных и мнимых частей.

   Нормализатор сначала исключает все мнимые части, а затем путем раскрывания скобок и некоторых сопутствующих стандартизирующих преобразований пытается избавиться и от вещественных частей.

   (a) Выражение мнимой части числа через это число и вещественную часть.
   $\forall_a(\mathrm{Im}(a) = -ia + i\mathrm{Re}(a))$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Устранение вложенных операндов.

   Имеются два приема - для вложенных комплексных произведений и комплексных сумм. Уровни срабатывания равны 1.

   (c) Синус либо косинус суммы.
   $\forall_{ab}(\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$
   $\forall_{ab}(\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$
   Уровень срабатывания равен 2.

   (d) Гиперболические синус либо косинус суммы.
   $\forall_{ab}(\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b)$
   $\forall_{ab}(\cos(a+b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b)$
   Уровень срабатывания равен 2.

   (e) Множитель аргумента мнимая единица.
   $\forall_z(\sin(iz) = i\, \mathrm{sh}\, z)$
   $\forall_z(\cos(iz) = \mathrm{ch}\, z)$
   $\forall_z(\mathrm{ch}(iz) = \cos z)$
   $\forall_z(\mathrm{sh}(iz) = i \sin z)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (f) Вынесение минуса за знак тригонометрической операции.
   $\forall_z(\sin(-z) = -\sin z)$
   $\forall_z(\cos(-z) = \cos z)$
   $\forall_z(\mathrm{sh}(-z) = -\mathrm{sh}\, z)$
   $\forall_z(\mathrm{ch}(-z) = \mathrm{ch}\, z)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (g) Вынесение минуса за знак умножения.
   $\forall_{ab}((-a)b = -ab)$
   Уровень срабатывания равен 2.

   (h) Двойной минус.
   $\forall_a(- - a = a)$
   Уровень срабатывания равен 1.

(i) Вещественный аргумент.

$\forall_a(a - \text{число} \to \cos a = \cos a)$

$\forall_a(a - \text{число} \to \sin a = \sin a)$

$\forall_a(a - \text{число} \to \operatorname{ch} a = \operatorname{ch} a)$

$\forall_a(a - \text{число} \to \operatorname{sh} a = \operatorname{sh} a)$

$\forall_a(a - \text{число} \to -a = -a)$

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \to a^b = a^b)$

Левая операция комплексная, правая - вещественная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

(j) Раскрывание скобок.

$\forall_{abc}(c = a + b \to a + b = c)$

Преобразуемая сумма имеет слагаемое вида "$(p(q+r)^n)$", где n - натуральное, быть может, равное 1. Используется указатель "комплексное". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "стандПлюс", которому передается комментарий "комплексное". Уровень срабатывания равен 4.

Преобразования множеств точек комплексной плоскости

Для поиска аналитического преобразования, переводящего одно множество точек комплексной плоскости в другое, используется задача на описание с условием вида образ$(f, A) = B$, где A, B - выражения без неизвестных, f - неизвестная. Эта задача имеет цель "пример". На первом этапе определяются "канонические"области C, D, в которые должны быть отображены A, B. После подбора соответствующих отображений остается отобразить C в D.

1. Преобразование неравенства, задающего область комплексной плоскости, к виду с нулем в левой части.

   $\forall_{Afg}(\text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ f(z) < g(z) \ \& \ A(z)) =$
   $\text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ 0 < g(z) - f(z) \ \& \ A(z)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение расположено внутри равенства вида "образ$(X) = Y$". Левая часть неравенства ненулевая. Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение нестрогих неравенств. Уровень срабатывания равен 1.

2. Определение преобразований, сводящих области к каноническим.

   $\forall_{ABCDEFfghpq}(\text{каноничобласть}(A, C) \ \& \ \text{каноничобласть}(B, D) \ \&$
   $\text{аналитическая}(f, P) \ \& \ (\text{образ}(g, A) = C \ \& \ \text{аналитическая}(g, E)) =$
   $(g = \lambda_w(p(w), w - \text{комплексное})) \ \& \ (\text{образ}(h, D) = B \ \& \ \text{аналитическая}(h, F)) =$
   $(h = \lambda_v(q(v), v - \text{комплексное})) \to \text{образ}(f, A) = B \leftrightarrow$
   $\exists_u(\text{дроблинфунк}(u) \ \& \ f = \lambda_z(q(u(p(z))), z - \text{комплексное}) \ \& \ \text{образ}(u, C) = D))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражения A, B не содержат неизвестных, f - неизвестная. Первые два антецедента обрабатываются пакетным синтезатором, определяющим канонические области C, D. Этот синтезатор "каноничобласть" будет описан ниже. Третий антецедент идентифицируется с условием задачи. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части разрешаются вспомогательными задачами на описание относительно неизвестных g, E и h, F соответственно, причем неизвестные E, F несущественные. Эти задачи, как и текущая задача, имеют цель "пример". В качестве g, h, E, F берутся новые переменные. Существует содержащее f условие, отличное от преобразуемого и не имеющее вида "аналитическая(...)" либо вида "$X \subseteq$ область(f)". Уровень срабатывания равен 4.

3. Линейное отображение.

   (a) Образ отрезка либо интервала.

   $\forall_{abcd}(\text{образ}(\lambda_z(az+b, z - \text{комплексное}), \text{комплотрезок}(c,d)) =$
   $\text{комплотрезок}(ac+b, ad+b))$

   $\forall_{abcd}(\text{образ}(\lambda_z(az+b, z - \text{комплексное}), \text{комплинтервал}(c,d)) =$
   $\text{комплинтервал}(ac+b, ad+b))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Определение линейного преобразования, переводящего одну прямую в другую.

   $\forall_{PQRfpqr}(p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ P - \text{число} \ \& \ Q - \text{число} \ \&$
   $R - \text{число} \ \& \ \text{аналитическая}(f, A) \ \& \ \neg(p^2+q^2=0) \ \& \ \neg(P^2+Q^2=0) \ \&$
   $(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ b(pP+qQ) =$
   $a(pQ-qP) \ \& \ Pcp+Qdp+Rp = Pra+Qrb \ \& \ Pcq+Qdq+Rq =$
   $Qra-Prb \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ (\neg(a=0) \ \vee \neg(b=0)))) =$
   $(a=e \ \& \ b=h \ \& \ c=i \ \& \ d=j) \ \&$
   $f = \lambda_z((e+hi)z+i+ji, z - \text{комплексное}) \rightarrow$
   $\text{образ}(f, \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ p\text{Re}(z)+q\text{Im}(z)+r=0)) =$
   $\text{set}_w(w - \text{комплексное} \ \& \ P\text{Re}(w)+Q\text{Im}(w)+R=0))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Оба описателя "класс" не содержат неизвестных, f - неизвестная. Первые шесть антецедентов, а также восьмой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Седьмой антецедент идентифицируется с условием задачи, десятый - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается задачей на описание относительно вспомогательных переменных a, b, c, d. Последний антецедент, выделенный указателем "подборзначений", замещает в новой задаче текущее условие. Указатели "подстановка" допускают вырожденные нулевые значения коэффициентов p, q, P, Q. Каждое вхождение неизвестной f в прочие условия имеет вид "функция(f)" либо "область(f)". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{PQRabcdpqruy}(p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ P - \text{число} \ \& \ Q - \text{число} \ \&$
   $R - \text{число} \ \& \ \neg(p^2+q^2=0) \ \& \ \neg(P^2+Q^2=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \&$
   $c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ u = a+bi \ \& \ y = c+di \rightarrow$
   $\text{образ}(\lambda_v(uv+y, v - \text{комплексное}), \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ p\text{Re}(z)+q\text{Im}(z)+$
   $r=0)) = \text{set}_w(w - \text{комплексное} \ \& \ P\text{Re}(w)+Q\text{Im}(w)+R=0) \leftrightarrow$
   $b(pP+qQ) = a(pQ-qP) \ \& \ Pcp+Qdp+Rp = Pra+Qrb \ \&$
   $Pcq+Qdq+Rq = Qra-Prb \ \& \ (\neg(a=0) \ \vee \ \neg(b=0)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание. Последние два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором раскрывания скобок "стандПлюс". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение $uv+y$ содержит неизвестные. Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов p, q, P, Q. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{PQRfpqr}(p -$ число & $q -$ число & $r -$ число & $P -$ число & $Q -$ число &
$R -$ число & образ$(f, \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $p\mathrm{Re}(z) + q\mathrm{Im}(z) + r = 0)) =$
$\mathrm{set}_w(w -$ комплексное & $P\mathrm{Re}(w) + Q\mathrm{Im}(w) + R = 0)$ &
$\exists_{abcd}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
$f = \lambda_z((a + bi)z + c + di, z -$ комплексное$)) \to$ аналитическая$(f, A))$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная. Седьмой антецедент идентифицируется с другим условием, первые шесть антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Восьмой антецедент выделен указателем "подборзначений". Он замещает текущее условие во вспомогательной задаче, причем снабжается комментарием "серия". Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов p, q, P, Q. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Определение линейного преобразования, переводящего одну окружность в другую.

$\forall_{abcdf}(b -$ число & $d -$ число & $0 < b$ &
$f = \lambda_z((d/b)z + ad/b - c, z -$ комплексное$) \to$
образ$(f, \mathrm{set}_z(|z + a| = b$ & $z -$ комплексное$)) = \mathrm{set}_z(|z + c| = d$ &
$z -$ комплексное$))$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание. Оба описателя "класс" не содержат неизвестных, f - неизвестная. Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, четвертый - выделен указателем "подборзначений". Отсутствуют вхождения f в другие условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", либо вида "область(f)", либо вида "аналитическая$(f, \ldots)$". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Определение линейного преобразования, переводящего полуплоскость в полуплоскость.

$\forall_{PQRfpqr}(p -$ число & $q -$ число & $r -$ число & $P -$ число & $Q -$ число &
$R -$ число & аналитическая(f, A) & $\neg(p^2 + q^2 = 0)$ & $\neg(P^2 + Q^2 = 0)$ &
$(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
$b(pP + qQ) = a(pQ - qP)$ & $Pcp + Qdp + Rp = Pra + Qrb$ &
$Pcq + Qdq + Rq = Qra - Prb$ & $0 \leq (Pa + Qb)p$ & $0 \leq (Qa - Pb)q$ &
$c -$ число & $d -$ число & $(\neg(a = 0) \vee \neg(b = 0))) =$
$(a = e$ & $b = h$ & $c = i$ & $d = j)$ & $f = \lambda_z((e+hi)z+i+ji, z-$комплексное$) \to$
образ$(f, \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $0 \leq p\mathrm{Re}(z) + q\mathrm{Im}(z) + r)) =$
$\mathrm{set}_w(w -$ комплексное & $0 \leq P\mathrm{Re}(w) + Q\mathrm{Im}(w) + R))$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Оба описателя "класс" не содержат неизвестных, f - неизвестная. Первые шесть антецедентов, а также восьмой и девятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Седьмой антецедент идентифицируется с условием задачи, десятый - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается задачей на описание относительно вспомогательных переменных a, b, c, d. Последний антецедент, выделенный указателем "подборзначений", замещает в новой задаче текущее условие. Указатели "подстановка" допускают вырожденные нулевые значения коэффициентов p, q, P, Q. Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение строгих неравенств. Каждое вхождение неизвестной f в прочие условия имеет вид "функция(f)" либо "область(f)". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{PQRabcdpqruy}(p -$ число & $q -$ число & $r -$ число & $P -$ число & $Q -$ число & $R -$ число & $\neg(p^2 + q^2 = 0)$ & $\neg(P^2 + Q^2 = 0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $u = a + bi$ & $y = c + di \rightarrow$
образ$(\lambda_v(uv + y, v -$ комплексное$), \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $0 \leq p\mathrm{Re}(z) + q\mathrm{Im}(z) + r)) = \mathrm{set}_w(w -$ комплексное & $0 \leq P\mathrm{Re}(w) + Q\mathrm{Im}(w) + R) \leftrightarrow$
$b(pP + qQ) = a(pQ - qP)$ & $Pcp + Qdp + Rp = Pra + Qrb$ &
$Pcq + Qdq + Rq = Qra - Prb$ & $0 \leq (Pa + Qb)q$ & $0 \leq (Qa - Pb)q$ &
$(\neg(a = 0) \ \vee \ \neg(b = 0)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание. Последние два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором раскрывания скобок "стандПлюс". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение $uv+y$ содержит неизвестные. Указатели "подстановка" разрешают вырожденные нулевые значения коэффициентов p, q, P, Q. Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение строгих неравенств. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Определение линейного преобразования, переводящего одну полосу в другую.

$\forall_{KMNPQRfkmnpqr}(p-$число & $q-$число & $r-$число & $P-$число & $Q-$число & $R -$ число & $\exists_{abcd}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
$f = \lambda_z((a+bi)z+c+di, z-$комплексное$))$ & образ$(f, \mathrm{set}_z(z-$комплексное & $0 \leq p\mathrm{Re}(z)+q\mathrm{Im}(z)+r)) = \mathrm{set}_w(w-$комплексное & $0 \leq P\mathrm{Re}(w)+Q\mathrm{Im}(w)+R)$ & образ$(f, \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $0 \leq k\mathrm{Re}(z) + m\mathrm{Im}(z) + n)) =$
$\mathrm{set}_w(w -$ комплексное & $0 \leq K\mathrm{Re}(w) + M\mathrm{Im}(w) + N) \rightarrow$
аналитическая(f, A) & образ$(f, \mathrm{set}_z(z-$комплексное & $0 \leq p\mathrm{Re}(z)+q\mathrm{Im}(z)+r$ & $0 \leq k\mathrm{Re}(z) + m\mathrm{Im}(z) + n)) = \mathrm{set}_w(w -$ комплексное & $0 \leq P\mathrm{Re}(w) + Q\mathrm{Im}(w) + R$ & $0 \leq K\mathrm{Re}(w) + M\mathrm{Im}(w) + N))$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквенты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная. Первые шесть антецедентов обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "подборзначений". При этом седьмой антецедент сопровождается во вспомогательной задаче комментарием "серия". Указатели "подстановка" допускают вырожденные нулевые значения коэффициентов k, m, p, q, K, M, P, Q. Уровень срабатывания равен 3. Для случая строгих неравенств создан аналогичный прием.

(f) Определение линейного преобразования, переводящего один круг в другой.

$\forall_{abcdf}(b-$число & $d-$число & $0 < b$ & $f = \lambda_z((d/b)z+ad/b, z-$комплексное$) \rightarrow$
образ$(f, \mathrm{set}_z(0 < -|z + a| + b$ & $z -$ комплексное$)) =$
$\mathrm{set}_z(0 < -|z + c| + d$ & $z -$ комплексное$))$

$\forall_{abcdf}(b-$число $\&\ d-$число $\&\ 0 < b\ \&\ f = \lambda_z((d/b)z+ad/b, z-$комплексное$) \rightarrow$ образ$(f, \mathrm{set}_z(0 < |z+a| - b\ \&\ z -$ комплексное$)) =$ $\mathrm{set}_z(0 < |z+c| - d\ \&\ z -$ комплексное$))$

Приемы имеют заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание. Оба описателя "класс" не содержат неизвестных, f - неизвестная. Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, четвертый - выделен указателем "подборзначений". Отсутствуют вхождения f в другие условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", либо вида "область(f)", либо вида "аналитическая$(f,\ldots)$". Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение нестрогих неравенств. Уровень срабатывания равен 2.

4. Дробно - линейное отображение.

   (a) Перевод внутренности или внешности круга в полуплоскость, если образ неограничен.

   Если требуется отобразить внутренность либо внешность круга в неограниченную область, то предприниается попытка сначала отобразить ее в полуплоскость. Эвристическим признаком неограниченности области служит отсутствие символа "Модуль" в ее задании.

   $\forall_{ABMabfgh}(b -$ число $\&\ 0 < b\ \&$ аналитическая$(f, A)\ \&$ (образ$(g, \mathrm{set}_z(z -$ комплексное $\&\ 0 < 2b\mathrm{Re}(z) - 1)) = M\ \&$ аналитическая$(g, B)) = (g = \lambda_w(h(w), w -$ комплексное$)) \rightarrow$ образ$(f, \mathrm{set}_z(z -$ комплексное $\&\ 0 < b - |z+a|)) = M \leftrightarrow$ $f = \lambda_z(h(1/(z+a+b)), z -$ комплексное$))$

   $\forall_{ABMabfgh}(b -$ число $\&\ 0 < b\ \&$ аналитическая$(f, A)\ \&$ (образ$(g, \mathrm{set}_z(z -$ комплексное $\&\ 0 < 1 - 2b\mathrm{Re}(z))) = M\ \&$ аналитическая$(g, B)) = (g = \lambda_w(h(w), w -$ комплексное$)) \rightarrow$ образ$(f, \mathrm{set}_z(z -$ комплексное $\&\ 0 < |z+a| - b)) = M \leftrightarrow$ $f = \lambda_z(h(1/(z+a+b)), z -$ комплексное$))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная, причем отсутствуют прочие содержащие f условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", "аналитическая$(f,\ldots)$", "содержится$(\ldots,$область$(f))$". Выражение M не содержит символа "Модуль". Третий антецедент идентифицируется с условием задачи, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно неизвестных g, B вспомогательной задачей на описание, причем неизвестная B - несущественная. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Перевод внутренности одного круга во внешность другого.

   $\forall_{abcdf}(b-$число $\&\ d-$число $\&\ 0 < b\ \&\ f = \lambda_z(bd/(z+a)-c, z-$комплексное$) \rightarrow$ образ$(f, \mathrm{set}_z(0 < -|z+a| + b\ \&\ z -$ комплексное$)) =$ $\mathrm{set}_z(0 < -d + |z+c|\ \&\ z -$ комплексное$))$

   $\forall_{abcdf}(b-$число $\&\ d-$число $\&\ 0 < b\ \&\ f = \lambda_z(bd/(z+a)-c, z-$комплексное$) \rightarrow$ образ$(f, \mathrm{set}_z(0 < |z+a| - b\ \&\ z -$ комплексное$)) =$ $\mathrm{set}_z(0 < d - |z+c|\ \&\ z -$ комплексное$))$

Приемы имеют заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание. Оба описателя "класс" не содержат неизвестных, переменная f - неизвестная. Отсутствуют вхождения f в другие условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", либо вида "область(f)", либо вида "аналитическая($f, \ldots$)". Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, четвертый - выделен указателем "подборзначений". Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение нестрогих неравенств. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Перевод разности двух касающихся внутренним образом кругов в полосу, если образ неограничен.

$\forall_{AMPabcdfghpq}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < d \ \&$
$b - d = |a - c| \ \& \ \neg(b - d = 0) \ \& \ \text{аналитическая}(f, A) \ \&$
$p = \mathrm{Re}((b - d)/(a - c)) \ \& \ q = \mathrm{Im}((b - d)/(a - c)) \ \&$
$(\text{образ}(g, \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ 0 < -1 - 2bp\mathrm{Re}(z) - 2bq\mathrm{Im}(z) \ \&$
$0 < 1 + 2dp\mathrm{Re}(z) + 2dq\mathrm{Im}(z) \ \& \ P(1/z + (ad - bc)/(b - d)))) = M \ \&$
$\text{аналитическая}(g, B)) = (g = \lambda_w(h(w), w - \text{комплексное})) \rightarrow$
$\text{образ}(f, \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ 0 < b - |z + a| \ \& \ 0 < |z + c| - d \ \& \ P(z))) =$
$M \leftrightarrow f = \lambda_z(h((b - d)/((b - d)z - ad + bc)), z - \text{комплексное}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная, причем отсутствуют прочие содержащие f условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", "аналитическая($f, \ldots$)", "содержится($\ldots$, область(f))". Выражение M не содержит символа "Модуль". Седьмой антецедент идентифицируется с условием задачи, первые четыре и шестой - обрабатываются проверочными операторами. Пятый антецедент и три последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Правые части восьмого и девятого антецедентов упрощаются задачами на преобразование. Левая часть последнего антецедента разрешается относительно неизвестных g, B вспомогательной задачей на описание, причем неизвестная B - несущественная. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Перевод пересечения двух кругов в угол.

$\forall_{ABMPabcdfghmnpqrs}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \&$
$(b = |z + a| \ \& \ c = |z + d| \ \& \ z - \text{комплексное}) = (z = p \ \vee \ z = q) \ \&$
$\neg(q - p = 0) \ \& \ (a + p)/(a + q) = m + ni \ \& \ (d + p)/(d + q) = r + si \ \&$
$m - \text{число} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ s - \text{число} \ \& \ \text{аналитическая}(f, A)$
$\& \ (\text{образ}(g, \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ 0 < \mathrm{sg}s((r + 1)\mathrm{Im}(z) - s\mathrm{Re}(z)) \ \&$
$0 < \mathrm{sgn}((m + 1)\mathrm{Im}(z) - n\mathrm{Re}(z)) \ \& \ P((zq - p)/(z - 1)))) = M \ \&$
$\text{аналитическая}(g, B)) = (g = \lambda_w(h(w), w - \text{комплексное})) \ \&$
$\neg(n = 0) \ \& \ \neg(s = 0) \rightarrow \text{образ}(f, \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ 0 < b - |z + a| \ \&$
$0 < c - |z + d| \ \& \ P(z))) = M \leftrightarrow f = \lambda_z(h((z - p)/(z - q)), z - \text{комплексное}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная. Выражение M не содержит символа "Модуль". Отсутствуют прочие содержащие f условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", "аналитическая($f, \ldots$)", "содержится($\ldots$, область(f))". Тринадцатый антецедент идентифицируется с условием задачи. Первые четыре антецедента, шестой антецедент, антецеденты с девятого по двенадцатый, а также два последних обрабатываются проверочными операторами. Пятый, седьмой, восьмой и четырнадцатый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правые части седьмого и восьмого антецедентов упрощаются задачами на преобразование. Левая часть пятого антецедента разрешается относительно неизвестной z вспомогательной задачей на описание. Левая часть четырнадцатого антецедента разрешается относительно неизвестных g, B, причем неизвестная B несущественная. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Перевод сегмента в угол.

$\forall_{ABMPabcdfghmnpqr}(b$ – число & $0 < b$ & c – число & d – число &
$(b = |z + a|$ & $c\mathrm{Re}(z) + d\mathrm{Im}(z) = 0$ & z – комплексное$) =$
$(z = p \ \vee \ z = q)$ & $\neg(q - p = 0)$ & $(a + p)/(a + q) = m + ni$ &
$r = c(\mathrm{Im}(q) - \mathrm{Im}(p)) + d(\mathrm{Re}(p) - \mathrm{Re}(q))$ & m – число & n – число &
аналитическая(f, A) & (образ$(g, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $0 < \mathrm{sg}r\mathrm{Im}(z)$ &
$0 < \mathrm{sg}n((m + 1)\mathrm{Im}(z) - n\mathrm{Re}(z))$ & $P((zq - p)/(z - 1)))) = M$ &
аналитическая$(g, B)) = (g = \lambda_w(h(w), w$ – комплексное$))$ &
$\neg(n = 0) \rightarrow$ образ$(f, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $0 < b - |z + a|$ &
$0 < c\mathrm{Re}(z) + d\mathrm{Im}(z)$ & $P(z))) = M \leftrightarrow$
$f = \lambda_z(h((z - p)/(z - q)), z$ – комплексное$))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная. Выражение M не содержит символа "Модуль". Отсутствуют прочие содержащие f условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", "аналитическая$(f, \ldots)$", "содержится$(\ldots,$ область$(f))$". Одиннадцатый антецедент идентифицируется с условием задачи. Первые четыре антецедента, а также шестой, девятый, десятый и тринадцатый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Пятый, седьмой, восьмой и двенадцатый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть пятого антецедента разрешается относительно неизвестной z вспомогательной задачей на описание. Левая часть двенадцатого антецедента разрешается относительно неизвестных g, B, причем неизвестная B несущественная. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABMPabcdfghpqr}(b$ – число & $0 < b$ & c – число & d – число &
$(b = |z + a|$ & $c\mathrm{Re}(z) + d\mathrm{Im}(z) = 0$ & z – комплексное$) =$
$(z = p \ \vee \ z = q)$ & $\neg(q - p = 0)$ & $(a + p)/(a + q) = -1$ &
$r = c(\mathrm{Im}(q) - \mathrm{Im}(p)) + d(\mathrm{Re}(p) - \mathrm{Re}(q))$ & m – число & n – число &
аналитическая(f, A) & (образ$(g, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $0 < \mathrm{sg}r\mathrm{Im}(z)$ &
$\mathrm{Re}(z) < 0$ & $P((zq - p)/(z - 1)))) = M$ & аналитическая$(g, B)) =$
$(g = \lambda_w(h(w), w$ – комплексное$)) \rightarrow$ образ$(f, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное &
$0 < b - |z + a|$ & $0 < c\mathrm{Re}(z) + d\mathrm{Im}(z)$ & $P(z))) = M \leftrightarrow$
$f = \lambda_z(h((z - p)/(z - q)), z$ – комплексное$))$

Аналогично предыдущему. Девятый антецедент идентифицируется с условием задачи. Первые четыре антецедента, а также шестой обрабатываются проверочными операторами. Пятый, седьмой, восьмой и десятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

(f) Перевод комплексной плоскости с двумя бесконечными разрезами, лежащими на общей прямой, в комплексную плоскость с одним разрезом.

$\forall_{ABMabfghpqr}(p$ – число & q – число & r – число & аналитическая(f, A) &
(образ$(g, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное & $\neg(z = 0)$ & $\neg(\arg(z) = \pi))) = M$ &

аналитическая$(g, B)) = (g = \lambda_w(h(w), w -$ комплексное$)) \to$
образ$(f, C \setminus \text{set}_z(z -$ комплексное $\&\ p\text{Re}(z) + q\text{Im}(z) + r = 0) \cup$
комплинтервал$(a, b)) = M \leftrightarrow f = \lambda_z(h((a - z)/(z - b)), z -$ комплексное$))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная. Выражение M не содержит символа "Модуль". Отсутствуют прочие содержащие f условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", "аналитическая$(f, \ldots)$", "содержится$(\ldots,$ область$(f))$". Четвертый антецедент идентифицируется с условием задачи. Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами. Пятый антецедент выделены указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно неизвестных g, B, причем неизвестная B несущественная. Уровень срабатывания равен 3.

(g) Нахождение дробно-линейного преобразования по образам трех различных точек.

$\forall_{abcdfgpq}(\neg(a - c = 0)\ \&\ \neg(a - p = 0)\ \&\ \neg(p - c = 0)\ \&\ \neg(b - q = 0)\ \&$
$\neg(d - q = 0)\ \&\ \neg(b - d = 0)\ \&\ ((w - b)(q - d)/((w - d)(q - b)) =$
$(z - a)(p - c)/((z - c)(p - a))\ \&\ w -$ комплексное$) = (w = g(z)\ \&\ A(z)) \to$
$f(a) = b\ \&\ f(c) = d\ \&\ f(p) = q\ \&$ дроблинфунк$(f) \leftrightarrow$
$f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$))$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и заменяет группу условий задачи на описание. Выражения a, b, c, d, p, q не содержат неизвестных, выражение f - содержит. Первые шесть антецедентов обрабатываются проверочными операторами, седьмой - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть, содержащая вспомогательные переменные z, w, разрешается относительно переменной z задачей на описание. Этой задаче передается дополнительная посылка "комплексное(z)". Переменные g, A функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

(h) Общий вид дробно-линейного преобразования единичного круга в себя.

$\forall_f($дроблинфунк$(f)\ \&$ образ$(f, \text{set}_z(0 < 1 - |z|\ \&\ z -$ комплексное$)) =$
$\text{set}_w(0 < 1 - |w|\ \&\ w -$ комплексное$) \leftrightarrow$
$\exists_{uv}(u -$ комплексное $\&\ v -$ комплексное $\&\ |v| = 1\ \&\ |u| < 1\ \&$
$f = \lambda_z(v(z - u)/(1 - z \cdot$ сопряженное$(u)), z -$ комплексное$)))$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и применяется к группе условий задачи на описание. Переменная f - неизвестная. Заменяющее утверждение сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 1.

(i) Общий вид дробно-линейного преобразования верхней полуплоскости в единичный круг.

$\forall_f($дроблинфунк$(f)\ \&$ образ$(f, \text{set}_z(0 < \text{Im}(z)\ \&\ z -$ комплексное$)) =$
$\text{set}_w(0 < 1 - |w|\ \&\ w -$ комплексное$) \leftrightarrow$
$\exists_{uv}(u -$ комплексное $\&\ v -$ комплексное $\&\ |v| = 1\ \&\ 0 < \text{Im}(u)\ \&$
$f = \lambda_z(v(z - u)/(z -$ сопряженное$(u)), z -$ комплексное$)))$

Аналогично предыдущему.

(j) Общий вид дробно- линейного преобразования верхней полуплоскости в себя.

$\forall_f($дроблинфунк$(f)\ \&$ образ$(f, \text{set}_z(0 < \text{Im}(z)\ \&\ z -$ комплексное$)) =$
$\text{set}_w(0 < \text{Im}(w)\ \&\ w -$ комплексное$) \leftrightarrow \exists_{abcd}(a -$ число $\&\ b -$ число $\&$

c – число & d – число & $0 < ad - bc$ & $f = \lambda_z((az+b)/(cz+d),$
z – комплексное)))

Аналогично предыдущему.

(k) Нормализатор "нормбеск" исключения символа бесконечности в уравнении для дробно-линейного преобразования.

Нормализатор используется в тех случаях, когда при построении дробно-линейного отображения по образам трех точек (см. выше) встречаются условия на его значения, содержащие бесконечноудаленную точку. Уровни срабатывания приемов равны 1.

i. Сумма.
$\forall_a(a + \infty = \infty)$

ii. Минус.
$-\infty = \infty$

iii. Дробь.
$\forall_{ab}(a\infty/(b\infty) = a/b)$

5. Степенное отображение.

(a) Перевод угла в плоскость.

$\forall_{ABCDEMabcdfghmnpqr}(a$ – число & b – число & c – число & d – число &
$m = \mathrm{sg}(bc - ad)$ & $E = \sqrt{a^2 + b^2}$ & $D = \sqrt{c^2 + d^2}$ &
$n = \pi - \arccos((bd + ac)/(DE))$ & $\neg(\pi - n = 0)$ & $\neg(n = 0)$ &
$p = \pi/n \arccos(bm/E)\mathrm{sg}(am)$ & $C = \sqrt{(b-d)^2 + (c-a)^2}$ &
$q = \pi/n \arccos((b-d)m/C)\mathrm{sg}((c-a)m)$ & $r = \mathrm{sg}(\sin(q - p))$ &
аналитическая(f, A) & (образ$(g, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное &
$0 < r(\cos(p)\mathrm{Im}(z) - \sin(p)\mathrm{Re}(z)))) = M$ & аналитическая$(g, B)) =$
$(g = \lambda_w(h(w), w$ – комплексное$)) \to$ образ$(f, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное &
$0 < a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z)$ & $0 < c\mathrm{Re}(z) + d\mathrm{Im}(z))) = M \leftrightarrow$
$f = \lambda_z(h(z^{\pi/n}), z$ – комплексное$))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная. Отсутствуют прочие содержащие f условия задачи, не имеющие вида "функция(f)", "аналитическая$(f, \ldots)$", "содержится$(\ldots,$ область$(f))$". Предпоследний антецедент идентифицируется с условием задачи. Первые четыре антецедента, а также девятый и десятый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть последнего антецедента разрешается относительно неизвестных g, B, причем неизвестная B несущественная. Правая часть четырнадцатого антецедента упрощается задачей на преобразование. Правые части остальных выделенных указателем "идентификатор" антецедентов обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 3.

(b) Перевод плоскости с бесконечным разрезом в полуплоскость.

$\forall_{ABMfgh}($аналитическая(f, A) & (образ$(g, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное &
$0 < \mathrm{Re}(z))) = M$ & аналитическая$(g, B)) =$
$(g = \lambda_w(h(w), w$ – комплексное$)) \to$ образ$(f, \mathrm{set}_z(z$ – комплексное &
$\neg(z = 0)$ & $\neg(\arg(z) = \pi))) = M \leftrightarrow f = \lambda_z(h(\sqrt{z}), z$ – комплексное$))$

Аналогично предыдущему. Первый антецедент идентифицируется с условием задачи, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается так же, как и выше. Уровень срабатывания равен 3.

6. Синтезатор выбора канонической области "каноничобласть".

   Синтезатор реализует утверждение "каноничобласть(A, B)". Входным данным служит выражение A, задающее подмножество точек комплексной плоскости. В зависимости от вида этого выражения, определяется каноническая область B, к которой будет преобразовано A. В качестве такой области выступает единичный круг либо верхняя полуплоскость.

   (a) Выбор единичного круга для области, в описании которой участвует модуль.

   $\forall_A$(каноничобласть$(\mathrm{set}_z(A(z)$ & $z -$ комплексное$), \mathrm{set}_z(|z| < 1$ &
   $z -$ комплексное$)))$

   Существует такое вхождение в $A(z)$ выражения вида "Модуль(b)", которое подчинено строгому неравенству, причем если это неравенство имеет вид "$0 < |z + d| + e$", то не существует посылки, содержащей подвыражение $F(-d)$. Здесь A - функциональная переменная, F - обычная. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Выбор верхней полуплоскости в качестве остаточной альтернативы.

   $\forall_A$(каноничобласть$(A, \mathrm{set}_z(0 < \mathrm{Im}(z)$ & $z -$ комплексное$)))$

   Уровень срабатывания равен 2.

Интегрирование функций комплексного переменного

1. Вычисление комплексного интеграла путем сведения его к криволинейному.

   $\forall_{ABCKfpquv}(u(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + iy))$ & $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + iy))$ &
   $B =$ вещкривая(A, K) & $p = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy$ &
   $q = \int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy \to \int_A f(z)dz = p + qi)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их правые части обрабатываются задачами на преобразование. Выражения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не содержат символов "вещественнаячасть", "мнимаячасть", а выражения p, q - символа "Кривинтеграл". Уровень срабатывания равен 6, так как сначала предпринимаются альтернативные попытки вычисления (например, через вычеты).

2. Вычисление комплексного интеграла вдоль кривой, заданной параметрически.

   $\forall_{ACabfgpq}(C =$ оркривая$(\lambda_t(g(t), A(t)))$ & $A(t) = (a \leq t$ & $t \leq b$ & $t -$ число$)$ &
   $f(g(t))dg(t)/dt = p + iq$ & $p -$ число & $q -$ число $\to \int_C f(z)dz = \int_a^b pdt + i\int_a^b qdt)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые три антецедента выделены указателем "идентификатор". Левая часть второго антецедента разрешается относительно t вспомогательной задачей на описание, левая часть третьего - упрощается задачей на преобразование. Два последних антецедента обрабатываются проверочными операторами. Указатель "подстановка" разрешает вырожденное нулевое значение q. Каждое из слагаемых заменяющего выражения упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

3. Вычисление комплексного интеграла от аналитической функции.

   $\forall_{ABCGabfg}$(комплкрив(C, a, b) & аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), A)$ & комплточки$(C) \subseteq A$ & $\int f(z)dz = \lambda_z(g(z), z -$ число$)$ & $G(z) = g(z)$ & аналитическая$(\lambda_z(G(z), z -$ комплексное$), B)$ & комплточки$(C) \subseteq B \to$ $\int_C f(z)dz = G(b) - G(a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем a, b тличны от символа "плюсбеск". Второй и шестой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, третий и седьмой - проверочными операторами. Четвертый и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Подынтегральное выражение в четвертом антецеденте обрабатывается нормализатором "вещтерм", выполняющим переход от комплексных операций к их вещественным аналогам. Левая часть четвертого антецедента имеет своим заголовком символ вещественного неопределенного интеграла. Она обрабатывается задачей на преобразование. Правая часть пятого антецедента обрабатывается нормализатором "комплтерм", обеспечивающим обратный переход от вещественных операций к комплексным. Уровень срабатывания равен 2.

4. Вычисление комплексного интеграла вдоль замкнутого контура с помощью вычетов.

   $\forall_{ABDf}$(Контур(A, B) & аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), D)$ & $\mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $z \in B \setminus D) = \emptyset \to \int_A f(z)dz = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент, обрабатываемый пакетным синтезатором "Контур", определяет область B по ограничивающему ее контуру A. Второй антецедент тоже обрабатывается пакетным синтезатором и определяет область D аналитичности функции f. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкласс" после того, как утверждение под описателем оказывается разрешено относительно z вспомогательной задачей на описание. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDfnp}$(Контур(A, B) & аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), D)$ & $\mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $z \in B \setminus D) = \{; \lambda_i(p(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}$ & $C = f(z) \to$ $\int_A f(z)dz = 2\pi$Ориент$(A)i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(\lambda_z(C, z -$ комплексное$), p(i)))$

   Посредством "Ориент(A)" обозначен указатель ориентации замкнутой ориентированной кривой A на плоскости. Если кривая обходится против часовой стрелки, то он равен 1, иначе -1.

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и второй антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, третий и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Левая часть третьего антецедента обрабатывается так же, как в предыдущем приеме. Указатели "развертка" определяют рассмотрение правой части третьего антецедента как конечного списка, а конечной суммы в заменяющем терме - как обычной суммы. Правая часть четвертого антецедента обрабатывается задачей на преобразование, имеющей цель "комплексное". Такая цель ориентирует на устранение подвыражений вида "Re(...)", "Im(...)". Вычеты под суммой вычисляются нормализатором "нормкомплвычет". Результирующее выражение не содержит символа "комплвычет". Либо n меньше 4, либо D не имеет вида "$\mathbb{C} \setminus \{q_1, \ldots, q_k\}$", где $k < 2n$. Если данное условие нарушено, то число особых точек вне контура меньше числа особых точек внутри контура, и предпочтительнее применять следующий прием. Уровень срабатывания данного приема равен 2.

$\forall_{ABCDabfn}$(Контур(A, B) & аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), D)$ & $\{\infty\} \cup \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $z \in \{; b\} \setminus B) = \{; a\}$ & $D = C\{; b\}$ & $l(a) = n$ & $C = f(z) \to \int_A f(z)dz = -2\pi$Ориент$(A)i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(\lambda_z(C, z -$ комплексное$), a(i)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и второй антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, остальные - выделены указателем "идентификатор". Описатель "класс" и правая часть последнего антецедента обрабатываются так же, как выше. Конечная сумма в заменяющем терме выписывается как обычная сумма. Заменяющий терм не содержит символа "комплвычет". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDfnp}(A =$ комплграница(B) & аналитическая$(\lambda_z(f(z), z -$комплексное$), D)$ & $B \setminus D = \{; \lambda_i(p(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}$ & $C = f(z)$ & комплконтур$(A) \to$ $\int_{\text{Оркрив}(A,s)} f(z)dz = 2\pi si \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(\lambda_z(C, z -$ комплексное$), p(i)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "смравно" допускает идентификацию подвыражения "Оркрив(...)" через равенство в контексте. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается пакетным синтезатором. После этого обрабатываются третий и четвертый антецеденты, также выделенные указателем "идентификатор". Разность $B \setminus D$ упрощается задачей на преобразование; правая часть четвертого антецедента обрабатывается так же, как и выше. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Используются указателеи "развертка". Уровень срабатывания равен 2.

5. Вычисление комплексного интеграла вдоль незамкнутой кривой путем ввода вспомогательного замкнутого контура.

   $\forall_{ABCDGabfgp}$(аналитическая$(\lambda_z(f(z), z-$комплексное$), B)$ & комплкрив(A, a, b) & комплточки$(A) \subseteq B$ & комплиния(b, a, C, D) & $\int f(z)dz = \lambda_z(g(z), z -$ число$)$ & $G(z) = g(z)$ & аналитическая$(\lambda_z(G(z), z -$ комплексное$), C)$ & $p = \int_{\text{комплпуть}(A,D)} f(z)dz \to \int_A f(z)dz = p + G(b) - G(a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Первый и седьмой антецеденты обрабатываются пакетными синтезаторами, определяющими области аналитичности. Четвертый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "комплиния", выбирающим некоторую кусочно-гладкую кривую D на комплексной плоскости, начинающуюся в точке b, кончающуюся в точке a и содержащуюся в области C. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Пятый, шестой и восьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Интеграл в пятом антецеденте вещественный, причем его подынтегральное выражение предварительно обрабатывается нормализатором "вещтерм", обеспечивающим переход от комплексных операций к их вещественным аналогам. Шестой антецедент реализует обратный переход - его правая часть обрабатывается нормализатором "комплтерм". Интеграл в восьмом антецеденте комплексный. Оба интеграла вычисляются вспомогательными задачами на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

6. Вычисление интегралов от функций вещественного переменного путем сведения их к комплекснозначным интегралам.

   (a) Тригонометрическая замена.

   $\forall_{Cafg}(g(z) = f(1/2 \cdot (z + 1/z), 1/(2i) \cdot (z - 1/z))/(zi)$ &
   $C =$ Оркрив$(\mathrm{set}_z(|z| = 1$ & $z -$ комплексное$), 1)$ & $a = \int_C g(z)dz \to$
   $\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)dx = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия. Переменная f функциональная. Указатель "новаргумент" обеспечивает проверку того, что переменная x встречается в подынтегральном выражении только под синусами и косинусами. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражение "$f(\ldots)$" в правой части первого антецедента обрабатывается нормализатором "комплтерм", преобразующим вещественные операции в их комплексные аналоги. После это вся правая часть данного антецедента упрощается задачей на преобразование. Интеграл в правой части третьего антецедента вычисляется задачей на преобразование. Проверяется, что результат a не содержит символа "комплинтеграл". Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Несобственный интеграл от рациональной функции.

   $\forall_{abfghn}(\neg(g(x) = 0)$ & $h(x) = f(x)/g(x)$ & $\{;a\} =$ Особыеточки$(\lambda_x(h(x),$
   $x -$ комплексное$))$ & $\mathrm{set}_x(x \in \{;a\}$ & $0 < \mathrm{Im}(x)) = \{;b\}$ & $l(b) = n$ &
   $2n \leq l(a) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)/g(x)dx =$
   $2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(\lambda_x(h(x), x -$ комплексное$), b(i)))$

   $\forall_{abfghn}(\neg(g(x) = 0)$ & $h(x) = f(x)/g(x)$ & $\{;a\} =$ Особыеточки$(\lambda_x(h(x),$
   $x -$ комплексное$))$ & $\mathrm{set}_x(x \in \{;a\}$ & $\mathrm{Im}(x) < 0) = \{;b\}$ & $l(b) = n$ &
   $2n \leq l(a) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)/g(x)dx =$
   $-2\pi i \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(\lambda_x(h(x), x -$ комплексное$), b(i)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подвыражению условия. Выражения $f(x), g(x)$ приводятся к виду многочленов от x, причем степень второго многочлена больше степени первого. Истинность первого антецедента устанавливается с помощью задачи на доказательство, шестого - с помощью проверочного оператора. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "комплтерм", правая часть третьего - нормлизатором "комплособыеточки". Левая часть четвертого антецедента обрабатывается нормализатором "нормкласс". Конечная сумма в заменяющей части выписывается в виде обычной суммы. Ее слагаемые обрабатываются нормализатором "нормкомплвычет". Проверяется, что все вычеты удалось вычислить. Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Несобственный интеграл от произведения рациональной функции на тригонометрическую.

   $\forall_{abcfghn}(\neg(g(x) = 0)$ & $h(x) = f(x)\exp(icx)/g(x)$ &
   $\{;a\} =$ Особыеточки$(\lambda_x(h(x), x -$ комплексное$))$ & $\mathrm{set}_x(x \in \{;a\}$ &
   $0 < \mathrm{Im}(x)) = \{;b\}$ & $l(b) = n$ & $0 < c \to$
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(cx)/g(x)dx = 2\pi\mathrm{Re}(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(\lambda_x(h(x), x -$ комплексное$), b(i))))$

$\forall_{abcfghn}(\neg(g(x)=0)\ \&\ h(x)=f(x)\exp(icx)/g(x)\ \&$
$\{;a\}=\text{Особыеточки}(\lambda_x(h(x),x-\text{комплексное}))\ \&\ \mathrm{set}_x(x\in\{;a\}\ \&$
$0<\mathrm{Im}(x))=\{;b\}\ \&\ l(b)=n\ \&\ 0<c\rightarrow$
$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(cx)/g(x)dx=-2\pi\mathrm{Im}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{res}(\lambda_x(h(x),x-\text{комплексное}),b(i))))$

Аналогично предыдущему пункту.

(d) Усмотрение четной функции.
$\forall_{af}(\text{четнаяфункция}(\lambda_x(f(x),x-\text{число}))\ \&\ a=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\rightarrow$
$\int_{0}^{\infty}f(x)dx=a/2)$

Прием относится к чисто вещественному случаю, но подготавливает возможность применения предыдущих приемов, использующих комплексные интегралы. Заголовок приема - "второйтерм"; он применяется к подвыражению условия. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Интеграл в его правой части вычисляется задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

7. Нормализатор перехода от комплексных операций к вещественным "вещтерм".

   Нормализатор имеет приемы, преобразующие комплексные операции "Плюс", "Минус", "Умножение", "Дробь", "Степень", "Логарифм", "Синус", "Косинус" в их вещественные аналоги.

8. Нормализатор перехода от вещественных операций к комплексным "компл-терм".

   Нормализатор имеет приемы, преобразующие вещественные операции "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "степень", "логарифм", "синус", "косинус", "арксинус", "арккосинус", "арктангенс", "арккотангенс" в их комплексные аналоги. Кроме того, имеется прием, отбрасывающий вещественные модули.

9. Синтезатор "комплиния" определения кусочно - гладкой ориентированной кривой на комплексной плоскости, соединяющей две заданные точки и расположенной в заданной области.

   Синтезатор реализует утверждение "комплиния(a,b,c,d)". Входные данные суть точки a,b и область c на комплексной плоскости. Выходной переменной d присваивается некоторая кривая, содержащаяся в области c, начинающаяся в точке a и концающаяся в точке b. Пока синтезатор имеет единственный прием, усматривающий явное упоминание искомой кривой в посылках:

   $\forall_{ABab}(\text{комплкрив}(A,a,b)\ \&\ \text{комплточки}(A)\subseteq B\rightarrow\text{комплиния}(a,b,B,A))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором.

Функциональные ряды в комплекснозначном случае

1. Обращение к нормализатору "рядТейлора", выполняющему разложение в степенной ряд.

   Прием реализован на ЛОСе и закреплен за типом задачи "преобразовать". Если эта задача имеет цель (рядтейлора z a), причем не усматривается, что значение преобразуемого выражения - условия данной задачи - вещественное, то предпринимается обращение к нормализатору "рядТейлора". Этому нормализатору передается комментарий (рядтейлора z a), уточняющий, что разложение выполняется по переменной z, в окрестности точки a. Заметим, что цель (рядтейлора z a) - такая же, как для вещественнозначного случая.

2. Признак Даламбера.

   $\forall_{abf}(\lim_{n\to\infty}|f(n{+}1)/f(n)| = a \to$ Сходится$(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m-$натуральное$)) \leftrightarrow$ $(a-1<0 \ \vee\ a-1=0 \ \&$ Сходится$(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m-$ натуральное$))) \ \& \ A)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющему свободные переменные. Общий член ряда должен иметь обобщенный сомножитель (допускаются переходы в числители либо знаменатели дробей, а также в основания степеней), представляющий собой степень с зависящим от n показателем. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию утверждения A вида "одз$(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m-$ натуральное$))$", причем фактически вместо этого утверждения берется конъюнкция условий на о.д.з., определяемая оператором "Одз". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Предварительно выражение под пределом упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что результат a отличен от единицы и не содержит символов "предел", "неопред". Уровень срабатывания равен 5.

3. Сходимость суммы рядов.

   $\forall_{PQfg}($Сходится$(\lambda_n(\sum_{m=1}^{n} f(m), n-$ натуральное$)) = P \ \&$
   Сходится$(\lambda_n(\sum_{m=1}^{n} g(m), n-$ натуральное$)) = Q \ \& \ (P \ \vee\ Q) \to$
   Сходится$(\lambda_n(\sum_{m=1}^{n} f(m)+g(m), n-$ натуральное$)) \leftrightarrow (P \ \& \ Q))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, содержащему неизвестные. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части разрешаются относительно неизвестных текущей задачи вспомогательными задачами на описание. Истинность третьего антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 4.

4. Определение радиуса сходимости степенного ряда.

   $\forall_{ab}(b = \overline{\lim}_{n\to\infty}\{|a(n)|^{1/n}\} \to$ радиуссходимости$(\lambda_n(a(n), n-$ натуральное$)) =$ $(\infty$ при $b=0,$ иначе $1/b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть вычисляется задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

5. Сдвиг области суммирования.

   $\forall_{afgkmz}(\sum_{n=k}^{\infty} f(n)(z+a)^{n+m}/g(n) = \sum_{n=m+k}^{\infty} f(n-m)(z+a)^{n}/g(n-m))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель (рядтейлора z b), Такая цель указывает на разложение в степенной ряд по переменной z в окрестности точки b. Уровень срабатывания равен 1.

6. Разложение в степенной ряд в окрестности бесконечноудаленной точки.

   $\forall_{fgz}(g(z) = f(1/z) \to f(z) = g(1/z))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование, имеющей цель (рядтейлора z плюсбеск). Так как переменная f функциональная, невозможно обеспечить привязку к какому-либо символу преобразуемого выражения. Поэтому используется указатель "корень", задающий привязку к типу задачи - символу "преобразовать". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается последовательно двумя задачами на преобразование - сначала с целью "упростить", а затем с целью (рядтейлора z 0). Проверяется, что исходное выражение $f(z)$ не содержало символа "Суммавсех". Уровень срабатывания равен 0.

7. Исключение степени единицы, деленной на варьируемую переменную.

   $\forall_{fgkmpz}(\sum_{n=k}^{\infty} f(n)(1/z)^{pn+m}/g(n) = \sum_{n=k}^{\infty} f(n)/(g(n)z^{pn+m}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель (рядтейлора z b). Уровень срабатывания равен 2.

8. Нормализатор "рядТейлора" разложения аналитической функции в степенной ряд.

   Нормализатор корневой. Случаи разложения в ряды Тейлора и Лорана объединены.

   (a) Минус.

   $\forall_{dfghklpqx}(f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i) \ \&\ p = -q \to -f(x) =$
   $\sum_{i=d}^{\infty} -(g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i)))$

   $\forall_{dfghklpqx}(f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)/(h(i)(x+p)^{ik+l}) \ \&\ p = -q \to -f(x) =$
   $\sum_{i=d}^{\infty} -(g(i)/(h(i)(x+p)^{ik+l})))$

   Имеется комментарий (рядтейлора x q). Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них обрабатывается нормализатором "рядТейлора", правая часть второго - нормализатором общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Константный множитель.

   $\forall_{abdfghklpqrx}(f(x)/r(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i) \ \&\ p = -q \to$
   $af(x)/br(x) = \sum_{i=d}^{\infty} ag(i)(x+p)^{ik+l}/(bh(i)))$

   $\forall_{adfghklpqx}(f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)(x+p)^{ik+l}/h(i) \ \&\ p = -q \to$
   $af(x) = \sum_{i=d}^{\infty} ag(i)(x+p)^{ik+l}/h(i))$

   $\forall_{adfghklpqx}(f(x) = \sum_{i=d}^{\infty} g(i)/(h(i)(x+p)^{ik+l}) \ \&\ p = -q \to$
   $af(x) = \sum_{i=d}^{\infty} ag(i)/(h(i)(x+p)^{ik+l}))$

   Аналогично предыдущему.

   (c) Степенной множитель.

   $\forall_{abcfhklmpx}(c = -b \ \&\ f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l}/p(i) \ \&\ m - \text{целое} \to$
   $(x+c)^m f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l+m}/p(i))$

$\forall_{abcfhklmpx}(c = -b \;\&\; f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)/(p(i)(x+c)^{ik+l}) \;\&\; m$ – целое $\rightarrow (x+c)^m f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)/(p(i)(x+c)^{ik+l-m}))$

Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", причем второй реализует рекурсивное обращение. Уровни срабатывания равны 1.

$\forall_{abcfghklmpx}(c = -b \;\&\; f(x)/g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l}/p(i) \;\&\; m$ – целое $\rightarrow (x+c)^m f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l+m}/p(i))$

$\forall_{abcfghklmpx}(c = -b \;\&\; f(x)/g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l}/p(i) \;\&\; m$ – целое $\rightarrow f(x)/((x+c)^m g(x)) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)(x+c)^{ik+l-m}/p(i))$

$\forall_{abcfghklmpx}(c = -b \;\&\; f(x)/g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)/(p(i)(x+c)^{ik+l}) \;\&\; m$ – целое $\rightarrow f(x)/((x+c)^m g(x)) = \sum_{i=a}^{\infty} h(i)/(p(i)(x+c)^{ik+l+m}))$

Аналогично предыдущему.

(d) Сумма.

Прием разложения в ряд каждого из слагаемых сопровождается приемами последующей группировки рядов:

i. Разложение в ряд каждого из слагаемых.

$\forall_{abcd}(a = b \;\&\; c = d \rightarrow a + c = b + d)$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "рядТейлора". Выражение a не имеет заголовка "Суммавсех", выражение b либо не содержит переменной разложения x, либо имеет заголовок "Суммавсех". Выражение d либо имеет заголовок "Суммавсех", либо представляет собой сумму конечного числа слагаемых, представляющих собой одночлены от x с целочисленными показателями степени. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

ii. Занесение слагаемого под знак суммирования.

$\forall_{abcfgpx}(c = -b \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} f(i)(x+c)^{pi}/g(i) + a = \sum_{i=0}^{\infty}(f(0)/g(0) + a$ при $i = 0,$ иначе $f(i)/g(i))(x+c)^{pi})$

Комментарий (рядтейлора x b) определяет точку разложения b и переменную разложения x. Выражение a не зависит от x. Переменная p идентифицируется с натуральной константой. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcdfgx}(c = -b \rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} f(i)(x+c)^i/g(i) + a(x+c)/e + d = \sum_{i=0}^{\infty}(f(1)/g(1) + a/e$ при $i = 1,$ иначе $f(i)/g(i))(x+c)^i + d)$

Аналогично предыдущему. Переменная x не входит в a, d, e.

$\forall_{abcdefgkmx}(c = -b \;\&\; k < 0 \;\&\; k+m \leq 0 \rightarrow \sum_{i=k}^{\infty} f(i)(x+c)^i/g(i) + a/(e(x+c)^m) + d = \sum_{i=k}^{\infty}(f(-m)/g(-m) + a/e$ при $i = -m,$ иначе $f(i)/g(i))(x+c)^i + d)$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", два других - обрабатываются проверочными операторами. Переменная x не входит в a, d, e. Уровень срабатывания равен 4.

iii. Сложение двух рядов.

$$\forall_{abcfghklp}(c = -b \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i)(x+c)^{ki+l}/g(i) + \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ki+l}/h(i) = \sum_{i=a}^{\infty}(f(i)/g(i) + p(i)/h(i))(x+c)^{ki+l})$$

$$\forall_{abcfghklp}(c = -b \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i)/(g(i)(x+c)^{ki+l}) + \sum_{i=a}^{\infty} p(i)/(h(i)(x+c)^{ki+l}) = \sum_{i=a}^{\infty}(f(i)/g(i) + p(i)/h(i))/(x+c)^{ki+l})$$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная x не входит в c. Уровень срабатывания равен 2.

$$\forall_{abcfghklp}(c = -b \;\&\; 0 < d - a \to \sum_{i=a}^{\infty} f(i)/(g(i)(x+c)^{ki+l}) + \sum_{i=d}^{\infty} p(i)/(h(i)(x+c)^{ki+l}) = \sum_{i=a}^{\infty}(f(i)/g(i) \text{ при } i \leq d-1, \text{иначе } f(i)/g(i) + p(i)/h(i))/(x+c)^{ki+l})$$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 5.

iv. Выделение степенных слагаемых.

$$\forall_{abcdefx}(f = -e \;\&\; c = d \to ax/b + c = a(x+f)/b - (af/b) + d)$$

Комментарий "вход" определяет точку разложения e и переменную разложения x. Выражения a, b не содержат x, выражение c - содержит. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть второго из них обрабатывается нормализатором "рядТейлора". Либо результат d имеет заголовок "Суммавсех", либо он не содержит x. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

$$\forall_{abcd}(c = d \to ax^k/b + c = ax^k/b + d)$$

$$\forall_{abcd}(c = d \to a/(bx^k) + c = a/(bx^k) + d)$$

Комментарий "вход" определяет разложение в нуле и переменную разложения x. Выражения a, b не содержат x. Переменная k идентифицируется с целочисленной константой. Выражение c имеет слагаемое, содержащее x и не являющееся одночленом от x, показатель степени которого целочисленный. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "рядТейлора". Выражение d содержит символ "Суммавсех". Уровень срабатывания равен 1.

v. Умножение рядов.

$$\forall_{abcdefgkl}(f(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a(i)x^i/b(i) \;\&\; g(x) = \sum_{i=l}^{\infty} c(i)x^i/d(i) \;\&\; e(i) = \sum_{j=0}^{i} a(j+k)c(i+l-j)/(b(j+k)d(i+l-j)) \to f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e(i)x^{i+k+l})$$

$$\forall_{abcdefghkl}(f(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a(i)x^i/b(i) \;\&\; g(x)/h(x) = \sum_{i=l}^{\infty} c(i)x^i/d(i) \;\&\; e(i) = \sum_{j=0}^{i} a(j+k)c(i+l-j)/(b(j+k)d(i+l-j)) \to f(x)g(x)/h(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e(i)x^{i+k+l})$$

Переменная разложения - x, точка разложения - 0. Переменные k, l идентифицируются с неотрицательными целочисленными константами. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левые части первых двух из них обрабатываются нормализатором "рядТейлора", правая часть третьего - упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 5.

vi. Возведение в квадрат.

$$\forall_{abcfkn}(f(x) = \sum_{i=k}^{\infty} a(i)x^{ni+m}/b(i) \;\&\; c = \lambda_i(\sum_{j=0}^{i} a(j+k)a(i+k-j)/(b(j+k)b(i+k-j)), i - \text{целое}) \to$$

$f(x)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} c(i)x^{ni+2kn+2m})$

Переменная разложения - x, точка разложения - 0. Переменная k идентифицируется с неотрицательной целочисленной константой, переменная m - с произвольной целочисленной константой, переменная n - с натуральной константой. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них обрабатывается нормализатором "рядТейлора", конечна сумма в правой части второго упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 5.

vii. Экспонента.

$\forall_{abcdkx}(k -$ натуральное $\& \; c = -b \rightarrow \exp(a(x+c)^k/d) = \sum_{i=0}^{\infty} a^i(x+c)^{ki}/(d^i \cdot i!))$

Переменная разложения - x, точка разложения - b. выражения a, c, d, k не содержат x. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1.

viii. Логарифм.

$\forall abcdkx(k -$ натуральное $\& \; b = -c \; \& \; \neg(a = 0) \rightarrow \ln(1 + a(x+b)^k/d) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a^i(x+b)^{ki}/(d^i i))$

Переменная разложения - x, точка разложения - c. выражения a, b, d, k не содержат x. Первый и третий антецеденты обрабатываются проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания приема равен 1.

ix. Синус.

$\forall abcdkx(k -$ натуральное $\& \; c = -b \rightarrow \sin(a(x+c)^k/d) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a^{2i-1}(x+c)^{(2i-1)k}/((2i-1)!d^{2i-1}))$

Аналогично предыдущему, но точка разложения - b.

x. Косинус.

$\forall abcdkx(k -$ натуральное $\& \; c = -b \rightarrow \cos(a(x+c)^k/d) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}a^{2i}(x+c)^{2ik}/((2i)!d^{2i}))$

Аналогично предыдущему.

xi. Степенная функция.

$\forall abcdkmx(k -$ натуральное $\& \; c = -b \; \& \; \neg(a = 0) \rightarrow (1 + a(x+c)^k/d)^m = \sum_{i=0}^{\infty}(a^i \prod_{j=0}^{i-1}(m-j) \cdot (x+c)^{ki}/(d^i i!))$

$\forall abcdekmx(k -$ натуральное $\& \; c = -b \; \& \; \neg(d = 0) \; \& \; \neg(a = 0) \rightarrow 1/(d + a(x+c)^k/e)^m = 1/d^m \cdot \sum_{i=0}^{\infty}((-a)^i \prod_{j=0}^{i-1}(m+j) \cdot (x+c)^{ki}/(d^i e^i i!))$

Аналогично предыдущему.

xii. Гиперболический синус.

$\forall abcdkx(k -$ натуральное $\& \; c = -b \rightarrow \mathrm{sh}(a(x+c)^k/d) = \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i-1}(x+c)^{(2i-1)k}/((2i-1)!d^{2i-1}))$

Аналогично предыдущему.

xiii. Гиперболический косинус.

$\forall abcdkx(k$ – натуральное & $c = -b \to \mathrm{ch}(a(x+c)^k/d) = \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i}(x+c)^{2ik}/((2i)!d^{2i}))$

Аналогично предыдущему.

xiv. Явное указание серий нулевых коэффициентов.

Некоторые из приведенных выше приемов предполагают, что промежуточный результат разложения в ряд, возникающий при рекурсивном обращении, имеет стандартный вид: показатели степени суть последовательные целые числа, начинающиеся с нуля. Для такой стандартизации служат специальные приемы. Приведем первый из них:

$\forall_{abcdfgkmnpx}(m = kp + n$ & $d = -c \to b + \sum_{i=a} \infty f(i)(x+d)^{ki+m}/g(i) = b + \sum_{i=ka+m}^{\infty}(f((i-m)/k)/g((i-m)/k)$ при $i(\mathrm{mod}\, k) = n$, иначе $0)(x+d)^i)$

Переменная k идентифицируется с натуральной константой, переменная m - с целочисленной. Переменная разложения- x, точка разложения - c. Первый антецедент выделен указателем "программа", второй - указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

xv. Добавление тождественно нулевых младших членов.

$\forall_{abcfx}(c = -b \to a + \sum_{i=1}^{\infty}(f(i)$ при $i(\mathrm{mod}\ 2) = 1,$ иначе $0)(x+c)^i = a + \sum_{i=0}^{\infty}(f(i)$ при $i(\mathrm{mod}\ 2) = 1,$ иначе $0)(x+c)^i)$

Переменная разложения - x, точка разложения - b. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{bcdefgx}(b$ – целое & $0 \le b$ & $c = -d \to e + \sum_{i=b}^{\infty} f(i)(x+c)^i/g(i) = e + \sum_{i=0}^{\infty}(0$ при $i < b,$ иначе $f(i)/g(i))(x+c)^i)$

Переменная разложения - x, точка разложения - d. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, третий - выделен указателем "идентификатор". Выражение b отлично от тождественного нуля. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{abcdefgx}(b$ – целое & $0 \le b$ & $c = -d \to e + \sum_{i=b}^{\infty} f(i)(x+c)^{i+a}/g(i) = e + \sum_{i=0}^{\infty}(0$ при $i < a + b,$ иначе $f(i-a)/g(i-a))(x+c)^i)$

Аналогично предыдущему. Переменная a идентифицируется с натуральной константой.

xvi. Отбрасывание тождественно нулевых старших членов при отрицательных степенях.

$\forall_{bcdefgx}(b$ – целое & $b < 0$ & $c = -d$ & $f(b) = 0 \to$
$e + \sum_{i=b}^{\infty} f(i)(x+c)^i/g(i) = e + \sum_{i=b+1}^{\infty} f(i)(x+c)^i/g(i))$

Переменная разложения - x, точка разложения - d. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, третий и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Левая часть четвертого антецедента упрощается задачей на преобразование, решаемой до максимального уровня 3. Уровень срабатывания равен 5.

xvii. Нормализация показателя степени.

$\forall_{acfgkmnpr}(p = r + kn \to \sum_{i=m}^{\infty} f(i)(x+c)^{ki+p}/g(i) + a =$
$\sum_{i=m+n}^{\infty} f(i-n)(x+c)^{ki+r}/g(i-n) + a)$

$\forall_{acfgkmnpr}(p = r + kn \to \sum_{i=m}^{\infty} f(i)/(g(i)(x+c)^{ki+p}) + a =$
$\sum_{i=m+n}^{\infty} f(i-n)/(g(i-n)(x+c)^{ki+r}) + a)$

Переменные k, p идентифицируются с целочисленными константами. Антецедент, выполняющий деление с остатком, выделен указателем "программа". Проверяется, что r не равно p. Переменные f, g функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

xviii. Переход к разложению в нуле.

$\forall_{bfgxy}(f(y+b) = g(y) \to f(x) = g(x-b))$

Переменная разложения - x, точка разложения - b. Выражение b не тождественно нулевое и отлично от символа "плюсбеск". Переменные f, g функциональные. Преобразуемое выражение не содержит символа "Суммавсех". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть сначала упрощается задачей на преобразование, имеющей комментарий "рядтейлора", а затем обрабатыается нормализатором "рядТейлора". Переменной разложения становится y, а точкой разложения - 0. Заменяющее выражение обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 0.

xix. Почленное интегрирование ряда для производной.

$\forall_{abcfgkmpqx}(g = \lambda_x(df(x)/dx, x - \text{комплексное})\ \&$
$g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m}/q(i)\ \&\ c = -b \to$
$f(x) = f(b) + \sum_{i=a}^{\infty} p(i)(x+c)^{ik+m+1}/(q(i)\cdot(ik+m+1)))$

Переменная разложения - x, точка разложения - b. Переменная k идентифицируется с натуральной константой, переменная m - с целочисленной. Либо преобразуемое выражение имеет своим заголовком один из символов "Арктангенс", "Арксинус", "Арккосинус", "Логарифм", либо имеет вид произведения переменной на выражение с таким заголовком. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Производная в первом из них вычисляется при помощи задачи на преобразование. Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "рядТейлора". Уровень срабатывания равен 4.

xx. Усмотрение зависимости от натуральной степени переменной.

$\forall_{afgkmnpq}(g(x^k) = f(x)\ \&\ g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)x^{mi+n}/q(i) \to$
$f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)x^{kmi+kn}/q(i))$

Переменные k, m идентифицируются с натуральными константами, переменная n - с целочисленной. Переменная разложения - x, точка разложения - 0. Переменная x имеет более одного вхождения в преобразуемое выражение. Указатель "контекст" определяет идентификацию k с наибольшим общим делителем натуральных сомножителей показателей степени при x, встречающихся в этом выражении. Проверяется, что k не равно 1. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Идентификация шаблона $g(\ldots)$ определяется указателем "новаргумент(g x извлечение)". Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором "рядТейлора". Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 6. В ней не требуется, чтобы k было натуральной константой. Указатель "контекст" определяет идентификацию k как показателя некоторой степени при x. Здесь также проверяется, что преобразуемое выражение не содержит символа "Суммавсех".

$\forall_{afgkmnpq}(g(x^k) = f(x)\ \&\ g(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)/(q(i)x^{mi+n}) \rightarrow$
$f(x) = \sum_{i=a}^{\infty} p(i)/(q(i)x^{kmi+kn}))$

Аналогично первой версии предыдущего приема, но уровень срабатывания равен 5.

xxi. Переход к обратному аргументу при разложении в ряд Лорана.

$\forall_{bfghmpq}(f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} g(n)x^{pn+q}/h(n) \rightarrow$
$f(1/x) = \sum_{n=m}^{\infty} g(n)/(h(n)x^{pn+q}))$

Переменная разложения - x, точка разложения - 0. Указатель "контекст" определяет идентификацию в преобразуемом выражении подтерма вида "$A/(B(x+C)^D)$", где C может обращаться в 0, а B и D - в единицы. Шаблон $f(\ldots)$ идентифицируется при помощи указателя "новаргумент(f x извлечение)". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "рядТейлора". Преобразуемое выражение не имеет заголовка "Плюс" и не содержит символа "Суммавсех". Перед обработкой антецедента проверяется, что каждое вхождение переменной x в его левую часть имеет только такие надоперации, которые либо имеют заголовок из списка "Синус", "Косинус", "Гипсинус", "Гипкосинус", "Плюс", Умножение", "Минус", либо представляют собой натуральные степени или экспоненты, либо представляют собой дроби, у которых данное вхождение x расположено в числителе или является обобщенным множителем знаменателя. Уровень срабатывания равен 2.

xxii. Вспомогательные преобразования, предшествующие разложению в ряд. Напомним, что нормализатор корневой, и все нижеследующие приемы применяются только к корневому вхождению.

A. Преобразование экспоненты к стандартному виду.
$\forall_{abfx}(a^{f(x)+b} = a^b \exp(\ln(a)f(x)))$
Переменная разложения - x. Выражение b группируется как сумма всех не содержащих x слагаемых. Выражение a не содержит x. Либо a отлично от числа e, либо b ненулевое. Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

B. Разложение на простейшие дроби.
$\forall_{abc}(a = b/c \rightarrow b/c = a)$
Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается комплексным нормализатором "Простейшиедроби" приведения к виду суммы простейших дробей. Этому нормализатору передается комментарий (переменная x), где x - переменная разложения в ряд. Предварительно проверяется, что b, c могут быть приведены к виду многочленов от x, причем степень второго из них больше 1. Уровень срабатывания равен 3.

C. Преобразование дроби с суммой в числителе к виду суммы дробей.
$\forall_{abc}((a+b)/c = a/c + b/c)$
Уровень срабатывания равен 2.

D. Преобразование логарифма к стандартному виду.
$\forall_{af}(\lim_{z\to d} f(z) = 0 \ \&\ (0 < \mathrm{Re}(a)\ \vee\ \neg(\mathrm{Im}(a) = 0))\ \&\ \neg(a = 0) \to \ln(f(z) + a) = \ln a + \ln(1 + f(z)/a))$

Переменная разложения - z, точка разложения - d. Выражение a идентифицируется с непустой суммой всех слагаемых, не содержащих z. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", его левая часть обрабатывается нормализатором "нормПредел". Следующие два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

E. Синус либо косинус суммы.
$\forall_{ab}(\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$
$\forall_{ab}(\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$

Выражение a содержит переменную разложения, а выражение b - не содержит. Разложение предпринимается в нуле. Уровень срабатывания равен 3.

F. Раскрывание скобок.
$\forall_{abcdn}(a = (b + c)^n d \to (b + c)^n d = a)$

Переменная разложения входит хотя бы в одно из выражений b, c. Переменная n идентифицируется с натуральной константой, меньшей 5. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "стандПлюс". Уровень срабатывания равен 6.

G. Вынесение константного множителя из-под экспоненты.
$\forall_{fgpq}(\neg(q = 0) \to \exp((pf(x) + g(x))/(qf(x))) = \exp(p/q)\exp(g(x)/(qf(x))))$

Переменная разложения - x. Она не встречается в выражениях p, q. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

H. Переход к синусу либо косинусу суммы.
$\forall_{abcdf}(\neg(c = 0)\ \&\ cf(g) + d = 0 \to \sin((af(z) + b)/(cf(z) + d)) = \sin(a/c + (bc - ad)/(c(cf(z) + d))))$
$\forall_{abcdf}(\neg(c = 0)\ \&\ cf(g) + d = 0 \to \cos((af(z) + b)/(cf(z) + d)) = \cos(a/c + (bc - ad)/(c(cf(z) + d))))$

Переменная разложения - z, точка разложения - g. Выражения a, b, c, d не содержат z. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандПлюс". Уровень срабатывания равен 4.

I. Преобразование произведения тригонометрических функций к виду суммы.
$\forall_{abdkm}((\cos d)^m(\sin a)^k = b \to (\cos d)^m(\sin a)^k = b)$

Переменные k, m идентифицируются с натуральными константами. Выражения a, d содержат переменную разложения. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "стандПлюс", которому передается комментарий "видумножение", активирующий тригонометрические приемы. Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{abk}((\sin a)^k = b \to (\sin a)^k = b)$

$\forall_{abk}((\cos a)^k = b \to (\cos a)^k = b)$
Аналогично предыдущему, но натуральный показатель степени отличен от 1.

Применение локальной формулы Тейлора

$\forall_{afn}(a \in \mathrm{set}_x(\text{одз}(f(x)))\ \&\ x - \text{комплексное} \to f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} d^i f(a)/da^i (x-a)^i/i!)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование, имеющей цель (формулатейлора $x\ a\ n$), означающей, что требуется разложить выражение по переменной x в ряд Тейлора около точки a с точностью до членов степени не выше n. Истинность первого антецедента устанавливается с помощью задачи на доказательство, второго - с помощью проверочного оператора. Переменная f функциональная. Производная вычисляется вспомогательной задачей на преобразование. Указатель "развертка" определяет выписывание конечной суммы как обычной. Уровень срабатывания равен 5.

Вычеты

1. Обращение к нормализатору "нормкомплвычет" при исследовании функции на особые точки.

   $\forall_{abcdf}(\text{Особыеточки}(f) = \{a; b\} \cup c\ \&\ f = \lambda_z(g(z), z - \text{комплексное})\ \&$
   $\mathrm{res}(\lambda_z(g(z), z - \text{комплексное}), a) = d \to res(f, a) = d)$

   Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задаче на исследование, имеющей цель "особыеточки", а также цель "вычет" либо "вычеты". Наличие цели "вычет" указывает на необходимость найти вычеты в особых точках, а также определить типы этих точек. В случае цели "вычеты" требуется лишь найти вычеты в особых точках, не определяя типов этих точек. Переменная f - неизвестная. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором вычисления вычетов "нормкомплвычет". Результат d не содержит символа "комплвычет". Уровень срабатывания равен 2.

2. Определение вычета в бесконечноудаленной точке.

   $\forall_{abfn}(\text{Особыеточки}(f) = \{; \lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}\ \&$
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \mathrm{res}(f, a(i)) = b(i)) \to \mathrm{res}(f, \infty) = -\sum_{i=1}^{n} b(i))$

   Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задаче на исследование, имеющей цель "особыеточки", а также цель "вычет" либо "вычеты". Переменная f - неизвестная. Антецеденты идентифицируются с посылками. Указатели "развертка" определяют идентификацию второго антецедента с группой посылок и выписывание конечной суммы в виде обычной. Уровень срабатывания равен 2.

3. Обращение к нормализатору "нормкомплвычет" для вычисления вычета.

   $\forall_{abf}(\mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), a) = b \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), a) = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкомплвычет". Результат b не содержит символа "комплвычет". Уровень срабатывания равен 2.

4. Отбор утверждений для ответа внешней задачи на описание.

   Теорема приема - "замещениеусловий(равно(комплвычет(a b)c))", заголовок - "замещениеусловий". Прием усматривает посылку "равно(комплвычет(a b)c)" задачи на исследование, имеющей цели "исследовать" и "особыеточки", а также "вычет" либо "вычеты". Переменная a - неизвестная. Эта посылка передается в список условий внешней задачи на описание. Уровень срабатывания равен 7.

5. Определение числа корней многочлена с помощью вычетов.

   (a) Ввод обозначений для функции и множества.

   $\forall_{APQf}(\mathrm{card}(\mathrm{set}_z(P(z) = 0\ \&\ z - \text{комплексное}\ \&\ Q(z))) = \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, A)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование. Указатели "посылка(...)" определяют одновременный ввод новых посылок "$\lambda_z(P(z), z - \text{комплексное}\ \&\ \text{одз}(P(z))) = f$" и "$\mathrm{set}_z(Q(z)\ \&\ z - \text{комплексное}) = A$", сопровождаемых комментарием "ориентацияравенства". Здесь A, f - новые переменные. Переменные P, Q функциональные. Уровень срабатывания равен 3.

   (b) Определение годографа.

   $\forall_{AQfg}(f = \lambda_z(g(z), Q(z))\ \&\ A = \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ \mathrm{Re}(z) < 0) \to \text{годограф}(f, A) = \lambda_t((\mathrm{Re}(g(it)), \mathrm{Im}(g(it))), t \in \mathbb{R}))$

   $\forall_{AQfg}(f = \lambda_z(g(z), Q(z))\ \&\ A = \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ 0 < \mathrm{Re}(z)) \to \text{годограф}(f, A) = \lambda_t((\mathrm{Re}(g(-it)), \mathrm{Im}(g(-it))), t \in \mathbb{R}))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении в условии задачи на преобразование выражения "card(roots(f, A))". Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменные g, Q функциональные. Вещественные и мнимые части в выводимом равенстве упрощаются задачами на преобразование. Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Определение точек пересечения годографа с осями координат (случай многочлена).

   $\forall_{ABfgh}(\text{годограф}(f, A) = \lambda_t((h(t), g(t)), t - \text{число})\ \&$
   $\text{точность}(\text{корнимн}(h), 0.000000001) = B \to \text{вертикпересеч}(f, A, -\infty) = B)$

   $\forall_{ABfgh}(\text{годограф}(f, A) = \lambda_t((h(t), g(t)), t - \text{число})\ \&$
   $\text{точность}(\text{корнимн}(g), 0.000000001) = B \to \text{горизпересеч}(f, A, -\infty) = B)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытки их применения при усмотрении подвыражения "card(roots(f, A))" в условии задачи на преобразование. Указатель "значениемн" определяет идентификацию h либо, соответственно, g с многочленом от t, имеющим константные коэффициенты. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "программа". Для нахождения множества корней вещественного многочлена с заданной точностью здесь используется пакет продукций "корнимн". Указатель "округл" определяет округление элементов B с точностью до 9-го знака после запятой. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Установление отсутствия корней на границе области.

$\forall_{BCaf}$(горизпересеч$(f, A, -\infty) = \{; \lambda_i(B(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}$ & вертикпересеч$(f, A, -\infty) = \{; \lambda_j(C(j), j \in \{1, \ldots, m\})\}$ & $\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, m\} \to 0.00000001 < |B(i) - C(j)|) \to$ внутркорни(f, A))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "программа". Указатели "развертка" определяют идентификацию описателей "отображение" в первых двух антецедентах с наборами. Переменные B, C функциональные. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{BCaf}$(горизпересеч$(f, A, -\infty) = \emptyset \to$ внутркорни(f, A))

$\forall_{BCaf}$(вертикпересеч$(f, A, -\infty) = \emptyset \to$ внутркорни(f, A))

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 0.

(e) Полярный угол годографа в начале кривой.

$\forall_{Afpq}$(годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & $\deg(q) < \deg(p) \to$ теквращение(годограф$(f, A), -\infty$, (0 при 0 < старшкоэфф$(p)(-1)^{\deg(p)}$, иначе π), 0))

$\forall_{Afpq}$(годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & $\deg(p) < \deg(q) \to$ теквращение(годограф$(f, A), -\infty$, ($\pi/2$ при 0 < старшкоэфф$(q)(-1)^{\deg(q)}$, иначе $\pi/2$), 0))

Утверждение "теквращение(a, b, c, d)" означает, что a - параметрически заданная кривая (вектор-функция), b - значение параметра этой кривой, c - полярный угол для точки кривой, определенной значением b (больше $-\pi$ и не больше π), d - полное изменение полярного угла с начала кривой до точки b.

Приемы имеют заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатели "значениемн" определяют идентификацию $p(t), q(t)$ с многочленами от t, имеющими константные коэффициенты. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Afpqr}$(годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & $\deg(p) = \deg(q)$ & $r = \mathrm{arctg}$(старшкоэфф(q)/старшкоэфф$(p)) \to$
теквращение(годограф$(f, A), -\infty$, (r при 0 < старшкоэфф$(p)(-1)^{\deg(p)}$, иначе ($\pi + r$ при 0 < старшкоэфф$(q)(-1)^{\deg(q)}$, иначе $r - \pi$)), 0)

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и третий - выделены указателем "идентификатор". Используются указателеи "значениемн". Уровень срабатывания равен 1.

(f) Пересечение годографа с осью абсцисс.

$\forall_{ABCdfhmpquv}(d = \inf(B)$ & $\forall_x(x \in C \to d < x)$ & годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & $m = p(d) \to$ теквращение(годограф$(f, A), h, u, v)$ & горизпересеч$(f, A, h) = B$ & вертикпересеч$(f, A, h) = C \leftrightarrow$ теквращение(годограф$(f, A), d,$ (0 при $0 < m,$ иначе $\pi), v - u +$ (0 при $0 < m,$ иначе $\pi \mathrm{sg} u$)) & горизпересеч$(f, A, d) = B \setminus \{d\}$ & вертикпересеч$(f, A, d) = C)$

Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)" и применяется к группе посылок. Выражение B имеет заголовок "перечень". Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Правая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "норминф". Результат d представляет собой константное выражение. Правая часть четвертого антецедента обрабатывается нормализатором "нормвыч", определяющим численное значение m при помощи вычислений в машинном формате "с плавающей запятой". Истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Пересечение годографа с осью ординат.

$\forall_{ABCdfhmpquv}(d = \inf(B)$ & $\forall_x(x \in C \to d < x)$ & годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & $m = q(d) \to$ теквращение(годограф$(f, A), h, u, v)$ & горизпересеч$(f, A, h) = C$ & вертикпересеч$(f, A, h) = B \leftrightarrow$ теквращение(годограф$(f, A), d, (\pi/2$ при $0 < m,$ иначе $-\pi/2),$ $v + (\pi/2 - u$ при $0 < m,$ иначе $|u| - \pi/2))$ & горизпересеч$(f, A, d) =$ $C \setminus \{d\}$ & вертикпересеч$(f, A, d) = B \setminus \{d\})$

Аналогично предыдущему.

(h) Полярный угол годографа в конце кривой.

$\forall_{Afpq}$(годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & горизпересеч$(f, A, h) = \emptyset$ & вертикпересеч$(f, A, h) = \emptyset$ & теквращение(годограф$(f, A), h, u, v)$ & $\deg(p) < \deg(q) \to$ теквращение(годограф$(f, A), \infty, (\pi/2$ при $0 <$ старшкоэфф(q), иначе $-\pi/2), v + (\pi/2 - u$ при $0 <$ старшкоэфф(q), иначе $-\pi/2 + |u|)))$

$\forall_{Afpq}$(годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & горизпересеч$(f, A, h) = \emptyset$ & вертикпересеч$(f, A, h) = \emptyset$ & теквращение(годограф$(f, A), h, u, v)$ & $\deg(q) < \deg(p) \to$ теквращение(годограф$(f, A), \infty,$ (0 при $0 <$ старшкоэфф(p), иначе $\pi), v - u +$ (0 при $0 <$ старшкоэфф(p), иначе $\pi \mathrm{sg} u$)))

Приемы имеют заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, пятый - обрабатывается проверочным оператором. Указатели "значениемн" обеспечивают идентификацию $p(t)$, $q(t)$ с многочленами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Afpqr}$(годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число) & $\deg(p) = \deg(q)$ & $r = \mathrm{arctg}$(старшкоэфф(q)/старшкоэфф(p)) & горизпересеч$(f, A, h) = \emptyset$ & вертикпересеч$(f, A, h) = \emptyset$ & теквращение(годограф$(f, A), h, u, v) \to$ теквращение(годограф$(f, A), \infty, (r$ при $0 <$ старшкоэфф(p), иначе

$(\pi + r$ при $0 <$ старшкоэфф(q), иначе $r - \pi)), v + r + (-u$ при $0 <$ старшкоэфф(p), иначе $(\pi - u$ при $0 <$ старшкоэфф(q), иначе $-\pi + |u|))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор", остальные - идентифицируются с посылками. Используются указатели "значениемн". Уровень срабатывания приема равен 1.

(i) Определение числа корней в полуплоскости по вращению годографа.

$\forall_{Afgknuv}(f = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ & $A = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $0 < \mathrm{Re}(z))$ & теквращение(годограф$(f, A), \infty, u, v)$ & $n = \deg(g)$ & $k = v/(2\pi)$ & внутркорни$(f, A) \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, A)) = k + n/2)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Указатель "дробь" разрешает перестановку частей неравенства во втором антецеденте. Указатель "значениемн" определяет идентификацию $g(z)$ с многочленом, коэффициенты которого - константы. Уровень срабатывания равен 3.

(j) Случай наличия корней на границе.

$\forall_{AFQfghpqrsuv}($годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число$)$ & $A = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $\mathrm{Re}(z) < 0)$ & $f = \lambda_z(g(z), Q(z))$ & $r =$ НОД(p, q) & $1 \leq \deg(r)$ & $r(-it) = h(t)$ & $g(z) = s(z)$ & частноемн$(s, h, u, v) \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, A)) = \mathrm{card}(\mathrm{roots}(F, A)))$

$\forall_{AFQfghpqrsuv}($годограф$(f, A) = \lambda_t((p(t), q(t)), t -$ число$)$ & $A = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $0 < \mathrm{Re}(z))$ & $f = \lambda_z(g(z), Q(z))$ & $r =$ НОД(p, q) & $1 \leq \deg(r)$ & $r(it) = h(t)$ & $g(z) = s(z)$ & частноемн$(s, h, u, v) \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, A)) = \mathrm{card}(\mathrm{roots}(F, A)))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к подвыражению условия задачи на преобразование. Отсутствует посылка "внутркорни(f, A)". Первые три антецедента идентифицируются с посылками. Четвертый, шестой и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть четвертого антецедента обрабатывается нормализатором вычисления наибольшего общего делителя двух многочленов "нормНОД". Левая часть шестого антецедента упрощается задачей на преобразование, левая часть седьмого - обрабатывается нормализаторами "вещтерм" и "норм". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором, восьмой - пакетным синтезатором. Прием вводит новую переменную F, которую сопровождает новой посылкой "$\lambda_z(u(z), z-$комплексное$) = F$". Здесь выражение $u(z)$ обрабатывается нормализатором "комплтерм" и упрощается задачей на преобразование. Указатели "значениемн" определяют идентификацию p, q, h, s как многочленов с константными коэффициентами. Уровень срабатывания равен 1.

6. Нормализатор вычисления вычетов "нормкомплвычет".

   (a) Простой полюс.

$\forall_{abcfg}(ac + b = 0$ & аналитическая$(\lambda_z(f(z)/g(z), z$ – комплексное$), \{a\})$ & $\neg(c = 0) \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z)/((cz + b)g(z)), z$ – комплексное$), a) = f(a)/(cg(a)))$

Выражение a отлично от "плюсбеск". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Используется указатель "комплексное". Заменяющее выражение упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Неособая точка.

$\forall_{af}($аналитическая$(f, \{a\}) \to \mathrm{res}(f, a) = 0)$

Выражение a отлично от "плюсбеск". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abf}(\lim_{z\to a} f(z) = b$ & b – комплексное $\to$ $\mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a) = 0)$

Выражение a отлично от "плюсбеск". Выражение $f(z)$ содержит только символы арифметических комплексных операций и комплексных элементарных функций. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормПредел". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 5.

(c) Кратный полюс.

$\forall_{abfg}(a + b = 0$ & аналитическая$(\lambda_z(f(z)/g(z), z$ – комплексное$), \{a\})$ & $p = d^{n-1}(f(a)/g(a))/da^{n-1}$ & $\neg(f(a) = 0) \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z)/((z + b)^n g(z)),$ z – комплексное$), a) = p/(n - 1)!)$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой, отличной от единицы. Выражение a отлично от "плюсбеск". Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них обрабатывается нормализатором "нормПлюс", правая часть третьего - нормализатором "нормкомплПроизводная". Второй и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abfgkn}(a + b = 0$ & Полюс$(a, \lambda_z(f(z)/((z + b)^n g(z)), z$ – комплексное$), k)$ & $p = \lim_{z\to a} d^{k-1}(f(z)/(g(z)(z + b)^{n-k}))/dz^{k-1} \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z)/((z + b)^n g(z)),$ z – комплексное$), a) = p/(k - 1)!)$

Выражение a отлично от "плюсбеск". Переменные k, n идентифицируются с натуральными константами, отличными от единицы. Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Производная в них вычисляется нормализатором "нормкомплПроизводная", а предел - нормализатором "нормПредел". Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Проверяется, что p не содержит символа "комплПроизводная". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afk}($Полюс$(a, \lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), k)$ & $p = \mathrm{res}(\lambda_z(f(z),$ z – комплексное$), a) \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z$ – комплексное$), a) = p)$

Выражение a отлично от "плюсбеск". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "вычетвполюсе", которому передается комментарий (Полюс k). Этот нормализатор будет описан ниже. Проверяется, что результат p не содержит символа "комплвычет". Уровень срабатывания равен 3.

(d) Разложение на множители знаменателя.

$\forall_{afghkp}(g(z) = p(z) \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z)/(g(z)^k h(z)), z - \text{комплексное}), a) = \mathrm{res}(\lambda_z(f(z)/(p(z)^k h(z)), z - \text{комплексное}), a))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается комплексным нормализатором разложения на множители "видУмножение", которому передается комментарий (нормкомплвычет z). Исходное выражение $g(z)$ имеет заголовок "Плюс", но не имеет вида "$Az+B$", где A, B не содержат z. Результат $p(z)$ не имеет заголовка "Плюс". Переменная k идентифицируется с натуральной константой. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Разложение в ряд.

$\forall_{abcdf}(f(z) = b/(c(z+d)) \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), a) = b/c)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть сначала обрабатывается нормализатором "рядТейлора", обеспечивающим разложение $f(z)$ в степенной ряд, а затем - нормализатором "извлечвычет", выделяющим в степенном ряде член степени -1. Переменная f функциональная. Выражение a отлично от "плюсбеск". Выражения b, c, d не содержат z. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{a,f}(f(z) = 0 \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), a) = 0)$

Аналогично предыдущему, но после обработки левой части антецедента возникает константа 0. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{abcf}(f(1/z) = g(z)\ \&\ g(1/z) = b/(cz) \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), \infty) = -(b/c))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор".Левая часть первого из них сначала упрощается задачей на преобразование, затем - обрабатывается нормализатором "рядТейлора". Левая часть второго антецедента сначала упрощается задачей на преобразование, затем - обрабатывается нормализатором "извлечвычет". Выражения b, c не содержат переменной z. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{fg}(f(1/z) = g(z)\ \&\ g(1/z) = 0 \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), \infty) = 0)$

Аналогично предыдущему.

(f) Определение вычета в бесконечноудаленной точке путем предварительного вычисления вычетов в конечных особых точках.

$\forall_{abfn}(\text{Особыеточки}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) = \{;a\}\ \&\ l(a) = n\ \&$
$b = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), a(i)) \to$
$\mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), \infty) = -b)$

Антецеденты выделеня указателем "идентификатор". Левая часть первого из них обрабатывается нормализатором "комплособыеточки". Правая часть третьего антецедента разворачивается в обычную сумму, причем слагаемые обрабатываются нормализатором "нормкомплвычет". Уровень срабатывания равен 6.

(g) Вычет суммы.

$\forall_{afg}(\mathrm{res}(\lambda_z(f(z)+g(z), z - \text{комплексное}), a) =$
$\mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), a) + \mathrm{res}(\lambda_z(g(z), z - \text{комплексное}), a))$

Переменные f, g функциональные, причем $f(z)$ идентифицируется с первым слагаемым. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{fghp}(p(z) = (f(z)+g(z))h(z) \to \mathrm{res}(\lambda_z((f(z)+g(z))h(z),$
$z - \text{комплексное}), a) = \mathrm{res}(\lambda_z(p(z), z - \text{комплексное}), a))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания собок "стандПлюс". Уровень срабатывания равен 3.

(h) Вычет в бесконечноудаленной точке, если она устранимая особая.

$\forall_{abf}(\lim_{z\to\infty} f(z) = a \ \& \ a - \text{комплексное} \ \& \ b = \lim_{z\to\infty}(a - f(z))z \ \&$
$b - \text{комплексное} \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), \infty) = b)$

Первый и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них и правая часть второго обрабатываются нормализатором "нормПредел". Второй и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

7. Нормализатор "извлечвычет" выделения члена ряда, имеющего степень -1.

При обращении к нормализатору ему передается комментарий (переменная z), указывающий переменную разложения. Все приемы срабатывают на уровне 1.

(a) Выделение члена бесконечной суммы.

$\forall_{abcpqs}((ip+q=-1) = (i=s) \ \& \ s - \text{целое} \ \& \ 0 \le s - m \to$
$\sum_{i=m}^{\infty} a(i)(z+c)^{ip+q}/b(i) = a(s)/(b(s)(z+c)))$

$\forall_{abcpqs}((ip+q=1) = (i=s) \ \& \ s - \text{целое} \ \& \ 0 \le s - m \to$
$\sum_{i=m}^{\infty} a(i)/(b(i)(z+c)^{ip+q}) = a(s)/(b(s)(z+c)))$

Переменные p, q идентифицируются с десятичными константами. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно i задачей на описание. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

$\forall_{abcpqs}((ip+q=1) = (i=s) \ \& \ (\neg(s - \text{целое}) \ \vee \ \& \ 0 < m - s) \to$
$\sum_{i=m}^{\infty} a(i)/(b(i)(z+c)^{ip+q}) = 0$

Аналогично предыдущему.

(b) Конечная сумма.

$\forall_{abcd}(a = c \mathbin{\&} b = d \to a + b = c + d)$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "извлечвычет". Хотя бы один из результатов отличен от исходного выражения. Заменяющая сумма обрабатывается нормализатором "нормПлюс".

(c) Константа.

$\forall_{a}(a = 0)$

Выражение a не содержит переменной z и не имеет заголовка "плюс".

(d) Одночлен.

$\forall_{abn}(0 < n \to a(z + b)^n = 0)$

Выражение a не содержит z. Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

$\forall_{abn}(\neg(n + 1 = 0) \to a(z + b)^n = 0)$

$\forall_{abcn}(0 < n \to a(z + c)^n/b = 0)$

$\forall_{abcn}(\neg(n + 1 = 0) \to a(z + c)^n/b = 0)$

$\forall_{abcn}(\neg(n - 1 = 0) \to a/(b(z + c)^n) = 0)$

Аналогично предыдущему.

(e) Минус.

$\forall_{ab}(a = b \to -a = -b)$

Антецедент выделен указателем "идентификатор" и реализует рекурсивное обращение.

8. Нормализатор определения вычета в полюсе или устранимой особой точке "вычетвполюсе".

При обращении к нормализатору ему передается комментарий (Полюс k), где k - кратность рассматриваемой особой точки a как полюса.

(a) Устранимая особая точка.

$\forall_{af}(\mathrm{res}(f, a) = 0)$

Кратность полюса k равна 0. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Простой полюс.

$\forall_{af}(\mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное}), a) = \lim_{z \to a} f(z)(z - a))$

Кратность полюса k равна 1. Заменяющее выражение обрабатывается нормализатором "нормПредел", причем проверяется, что результат не содержит символа "Предел". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Кратный полюс.

$\forall_{abcfgkm}(k = m - 1 \mathbin{\&} ac + b = 0 \mathbin{\&} \neg(g(a) = 0) \mathbin{\&} \neg(c = 0) \to$
$\mathrm{res}(\lambda_z(f(z)/((cz + b)^n g(z)), z - \text{комплексное}), a) =$
$1/(k!c^n)(d^k(f(a)/g(a))/da^k))$

Кратность полюса k отлична от 0 и 1 и выражена десятичной константой. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", следующие два - обрабатываются проверочными операторами. Производная вычисляется нормализатором "нормкомплПроизводная". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{afk}(k = b - 1 \to \mathrm{res}(\lambda_z(f(z), z -$ комплексное$), a) =$
$1/k! \lim_{z\to a} d^k(f(z)(z-a)^b)/dz^k)$

Кратность полюса - десятичная константа, отличная от 0 и 1. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Предел вычисляется нормализатором "нормПредел", производная - нормализатором "нормкомплПроизводная". Результат не содержит символа "Предел". Уровень срабатывания равен 2.

(d) Условное выражение для кратности полюса.

$\forall_{Aabknpq}(\mathrm{res}(f,a) = p \ \&\ b = a \ \&\ \mathrm{res}(f,b) = q \ \&\ t = (k$ при A, иначе $m) \to$ $\mathrm{res}(f,a) = (p$ при A, иначе $q))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Кратность полюса определяется условным выражением t. Левые части первого и третьего антецедентов реализуют рекурсивные обращения, причем комментарий (Полюс t) заменяется, соответственно, на (Полюс k) и (Полюс m), а к посылкам добавляются A либо $\neg(A)$. Переменная b введена, чтобы компилятор сумел различить два подслучая. Уровень срабатывания равен 3.

Преобразование Лапласа

1. Обращение к нормализатору "нормпреобрлапласа".

   $\forall_{fg}($преобрлапласа$(f) = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$) \to$
   преобрлапласа$(f) = \lambda_z(g(z), z -$ комплексное$))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение f имеет заголовок "отображение". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором вычисления преобразования Лапласа "нормпреобрлапласа", который будет описан ниже. Переменная g функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

2. Обращение к нормализатору "нормобрпреобрлапласа".

   $\forall_{fg}($обрпреобрлапласа$(f) = \lambda_x(g(x), x -$ число $\&\ 0 \leq x) \to$
   обрпреобрлапласа$(f) = \lambda_x(g(x), x -$ число $\&\ 0 \leq x))$

   Аналогично предыдущему, но для вычисления обратного преобразования Лапласа используется нормализатор "нормобрпреобрлапласа".

3. Нормализатор "нормпреобрлапласа".

   (a) Непосредственное определение изображения.

   Уровень срабатывания перечисляемых ниже приемов равен 1.

      i. Константа.
      $\forall_c($преобрлапласа$(\lambda_x(c, x -$ число $\&\ 0 \leq x)) =$
      $\lambda_z(c/z, z -$ комплексное$))$

      ii. Сигнум.
      $\forall_c($преобрлапласа$(\lambda_x(\mathrm{Sg}(x), x -$ число $\&\ 0 \leq x)) =$
      $\lambda_z(1/z, z -$ комплексное$))$

      iii. Натуральная степень.
      $\forall_n($преобрлапласа$(\lambda_x(x^n, x -$ число $\&\ 0 \leq x)) =$
      $\lambda_z(n!/z^{n+1}, z -$ комплексное$))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой, быть может, равной единице. В этом и последующих приемах раздела используется указатель "комплексное".

iv. Экспонента.
$\forall_{abc}(c -$ число $\& \ 0 < c \ \& \ \neg(c-1=0) \rightarrow$
преобрлапласа$(\lambda_x(c^{ax/b}, x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(b/(bz - a\ln c), z -$ комплексное$))$
Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

v. Синус.
$\forall_{ab}($преобрлапласа$(\lambda_x(\sin(ax/b), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(ab/(b^2z^2 + a^2), z -$ комплексное$))$

vi. Косинус.
$\forall_{ab}($преобрлапласа$(\lambda_x(\cos(ax/b), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(b^2z/(b^2z^2 + a^2), z -$ комплексное$))$

vii. Гиперболический синус.
$\forall_{ab}($преобрлапласа$(\lambda_x(\mathrm{sh}(ax/b), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(ab/(b^2z^2 - a^2), z -$ комплексное$))$

viii. Гиперболический косинус.
$\forall_{ab}($преобрлапласа$(\lambda_x(\mathrm{ch}(ax/b), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(b^2z/(b^2z^2 - a^2), z -$ комплексное$))$

(b) Минус.
$\forall_{afg}($преобрлапласа$(\lambda_x(f(x), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$) \rightarrow$
преобрлапласа$(\lambda_x(-f(x), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(-g(z), z -$ комплексное$))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Сумма.

$\forall_{fgpq}($преобрлапласа$(\lambda_x(f(x), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(p(z), z -$ комплексное$) \ \&$ преобрлапласа$(\lambda_x(g(x), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_u(q(u), u -$ комплексное$) \rightarrow$ преобрлапласа$(\lambda_x(f(x) + g(x), x -$ число $\&$
$0 \leq x)) = \lambda_z(p(z) + q(z), z -$ комплексное$))$

Указатель "операнд" определяет идентификацию $f(x)$ с отдельным слагаемым. Используется указатель "комплексное". Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Умножение на константу.

$\forall_{cdfgp}($преобрлапласа$(\lambda_x(f(x)/g(x), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(p(z), z -$ комплексное$) \rightarrow$ преобрлапласа$(\lambda_x(cf(x)/(dg(x)), x -$ число $\&$
$0 \leq x)) = \lambda_z(cp(z)/d, z -$ комплексное$))$

$\forall_{cdfp}($преобрлапласа$(\lambda_x(f(x), x -$ число $\& \ 0 \leq x)) =$
$\lambda_z(p(z), z -$ комплексное$) \rightarrow$ преобрлапласа$(\lambda_x(cf(x)/d, x -$ число $\&$
$0 \leq x)) = \lambda_z(cp(z)/d, z -$ комплексное$))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Умножение на экспоненту.

$\forall_{abfgp}$(преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/g(x), x -$ число & $0 \leq x)) =$
$\lambda_z(p(z), z -$ комплексное$) \to$ преобрлапласа($\lambda_x(\exp(ax/b)f(x)/g(x),$
$x -$ число & $0 \leq x)) = \lambda_z(p(z - a/b), z -$ комплексное$))$

$\forall_{abfgp}$(преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/g(x), x -$ число & $0 \leq x)) =$
$\lambda_z(p(z), z -$ комплексное$) \to$ преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/(\exp(ax/b)g(x)),$
$x -$ число & $0 \leq x)) = \lambda_z(p(z + a/b), z -$ комплексное$))$

Аналогично предыдущему.

(f) Запаздывание.

$\forall_{afg}(a \leq 0$ & преобрлапласа($\lambda_x(f(x - a), x -$ число & $0 \leq x)) =$
$\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$) \to$ преобрлапласа($\lambda_x(f(x)\mathrm{Sg}(x + a),$
$x -$ число & $0 \leq x)) = \lambda_z(\exp(az)g(z), z -$ комплексное$))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - реализует рекурсивное обращение уровень срабатывания равен 2.

(g) Умножение на степенную функцию.

$\forall_{fgn}$(преобрлапласа($\lambda_x(f(x), x -$ число & $0 \leq x)) =$
$\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$) \to$ преобрлапласа($\lambda_x(x^n f(x),$
$x -$ число & $0 \leq x)) = \lambda_z((-1)^n d^n g(z)/dz^n, z -$ комплексное$))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Деление на степенную функцию.

$\forall_{fghn}$(преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/x^{n-1}, x -$ число & $0 \leq x)) =$
$\lambda_z(g(z), z -$ комплексное$)$ & $\int_u^\infty g(y)dy = h(u) \to$
преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/x^n, x -$число & $0 \leq x)) = \lambda_z(h(z), z -$комплексное$))$

Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Первый из них реализует рекурсивное обращение, левая часть второго обрабатывается задачей на преобразование. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 3.

(i) Перенесение экспоненты в числитель.

$\forall_{abfg}$(преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/(\exp(ax/b)g(x)), x -$ число & $0 \leq x)) =$
преобрлапласа($\lambda_x(\exp(-(ax/b))f(x)/g(x), x -$ число & $0 \leq x)))$

Переменные f, g функциональные. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(j) Умножение на гиперболический синус либо косинус.

$\forall_{fg}$(преобрлапласа($\lambda_x(\mathrm{ch}(f(x))g(x), x -$ число & $0 \leq x)) =$
преобрлапласа($\lambda_x((\exp(f(x))g(x) + \exp(-f(x))g(x))/2, x -$ число & $0 \leq x)))$

$\forall_{fg}$(преобрлапласа($\lambda_x(\mathrm{sh}(f(x))g(x), x -$ число & $0 \leq x)) =$
преобрлапласа($\lambda_x((\exp(f(x))g(x) - \exp(-f(x))g(x))/2, x -$ число & $0 \leq x)))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 3.

(k) Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы.

$\forall_{fgn}$(преобрлапласа($\lambda_x((\sin f(x))^n g(x), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x((\sin f(x))^n g(x), x$ – число & $0 \le x$)))

$\forall_{fgn}$(преобрлапласа($\lambda_x((\cos f(x))^n g(x), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x((\cos f(x))^n g(x), x$ – число & $0 \le x$)))

$\forall_{fgh}$(преобрлапласа($\lambda_x(\sin f(x) \sin g(x) h(x), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(\sin f(x) \sin g(x) h(x), x$ – число & $0 \le x$)))

$\forall_{fgh}$(преобрлапласа($\lambda_x(\sin f(x) \cos g(x) h(x), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(\sin f(x) \cos g(x) h(x), x$ – число & $0 \le x$)))

$\forall_{fgh}$(преобрлапласа($\lambda_x(\cos f(x) \cos g(x) h(x), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(\cos f(x) \cos g(x) h(x), x$ – число & $0 \le x$)))

Выражение под описателем "отображение" обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "Стандплюс", которому передается комментарий "видумножение", активирующий тригонометрические преобразования. Переменная n идентифицируется с натуральной константой, большей единицы. Уровень срабатывания равен 2.

(l) Раскрывание скобок.

$\forall_{fghn}$(преобрлапласа($\lambda_x((f(x) + g(x))^n h(x), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x((f(x) + g(x))^n h(x), x$ – число & $0 \le x$)))

Переменная n идентифицируется с натуральной константой, возможно, равной единице. В остальном аналогично предыдущему.

(m) Синус либо косинус суммы.

$\forall_{af}$(преобрлапласа($\lambda_x(\sin(f(x) + a), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(\sin f(x) \cos a + \cos f(x) \sin a, x$ – число & $0 \le x$)))

$\forall_{af}$(преобрлапласа($\lambda_x(\cos(f(x) + a), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(\cos f(x) \cos a + \sin f(x) \sin a, x$ – число & $0 \le x$)))

Переменная f функциональная. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

(n) Условное выражение.

$\forall_{fg}$(преобрлапласа($\lambda_x((f(x)$ при $x < a,$ иначе $g(x)), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(f(x) + (g(x) - f(x))\mathrm{Sg}(x - a), x$ – число & $0 \le x$)))

$\forall_{fg}$(преобрлапласа($\lambda_x((g(x)$ при $a < x,$ иначе $f(x)), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(f(x) + (g(x) - f(x))\mathrm{Sg}(x - a), x$ – число & $0 \le x$)))

Указатель "вариант" разрешает рассмотрение нестрогих неравенств. Уровень срабатывания равен 2.

(o) Выделение константного множителя экспоненты.

$\forall_{afgh}$(преобрлапласа($\lambda_x(\exp(h(x) + a) f(x)/g(x), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(\exp a \exp(h(x)) f(x)/g(x), x$ – число & $0 \le x$)))

$\forall_{afgh}$(преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/(\exp(h(x) + a) g(x)), x$ – число & $0 \le x$)) = преобрлапласа($\lambda_x(f(x)/(\exp a \exp(h(x)) g(x)), x$ – число & $0 \le x$)))

Уровень срабатывания равен 1.

(p) Интегрирование.

$\forall_{fgn}$(преобрлапласа($\lambda_x(f(x), x$ – число & $0 \leq x)) =$
$\lambda_z(g(z), z$ – комплексное) $\to$ преобрлапласа($\lambda_x(\int_0^x f(y)dy, x$ – число &
$0 \leq x)) = \lambda_z(g(z)/z, z$ – комплексное))

Переменные f, g функциональные. Антецедент реализует рекурсивное обращение. Используется указатель "комплексное". Уровень срабатывания равен 2.

4. Нормализатор общей стандартизации "нормобрпреобрлапласа".

(a) Непосредственное определение оригинала.

Уровень срабатывания приемов этого раздела, если не оговорено противное, равен 1.

i. Усмотрение константы.

$\forall_a$(обрпреобрлапласа($\lambda_z(a/z, z$ – комплексное)) $=$
$\lambda_x(a, x$ – число & $0 \leq x))$

ii. Усмотрение экспоненты.

$\forall_{ab}$(обрпреобрлапласа($\lambda_z(a/(z+b), z$ – комплексное)) $=$
$\lambda_x(a \exp(-bx), x$ – число & $0 \leq x))$

iii. Единица, деленная на натуральную степень переменной, большую единицы.

$\forall_{abn}$(обрпреобрлапласа($\lambda_z(a/(z+b)^n, z$ – комплексное)) $=$
$\lambda_x(ax^{n-1} \exp(-bx)/(n-1)!, x$ – число & $0 \leq x))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Антецедент выделен указателем "программа".

iv. Единица, деленная на квадратный двучлен.

$\forall_{ab}(0 < b$ & b – число $\to$ обрпреобрлапласа($\lambda_z(a/(z^2+b),$
z – комплексное)) $= \lambda_x(a \sin(\sqrt{b}x)/\sqrt{b}, x$ – число & $0 \leq x))$

$\forall_{ab}(b < 0$ & b – число $\to$ обрпреобрлапласа($\lambda_z(a/(z^2+b),$
z – комплексное)) $= \lambda_x(a\,\mathrm{sh}(\sqrt{-b}x)/\sqrt{-b}, x$ – число & $0 \leq x))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

v. Переменная, деленная на квадратный двучлен.

$\forall_{ab}(0 < b$ & b – число $\to$ обрпреобрлапласа($\lambda_z(az/(z^2+b),$
z – комплексное)) $= \lambda_x(a \cos(\sqrt{b}x), x$ – число & $0 \leq x))$

$\forall_{ab}(b < 0$ & b – число $\to$ обрпреобрлапласа($\lambda_z(az/(z^2+b),$
z – комплексное)) $= \lambda_x(a\,\mathrm{ch}(\sqrt{-b}x), x$ – число & $0 \leq x))$

Аналогично предыдущему.

vi. Единица, деленная на квадрат квадратного двучлена.

$\forall_{ab}(b$ – число & $0 < b \to$ обрпреобрлапласа($\lambda_z(a/(z^2+b)^2,$
z – комплексное)) $= \lambda_x(a(\sin(\sqrt{b}x) - \sqrt{b}x \cos(\sqrt{b}x))/(2b\sqrt{b}),$
x – число & $0 \leq x))$

Аналогично предыдущему.

vii. Переменная, деленная на квадрат квадратного двучлена.

$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \to \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(az/(z^2+b)^2,$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(a\sin(\sqrt{b}x)/(2\sqrt{b}), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Аналогично предыдущему.

viii. Квадратичная функция, деленная на квадрат квадратного двучлена.

$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \to \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(az^2/(z^2+b)^2,$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(a(\sin(\sqrt{b}x) + \sqrt{b}x\cos(\sqrt{b}x))/(2\sqrt{b}),$
$x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Аналогично предыдущему.

ix. Единица, деленная на двучлен четвертой степени.

$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \to \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(a/(z^4+b),$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(a(\sin(\sqrt[4]{b/4}x)\,\text{ch}(\sqrt[4]{b/4}x) -$
$\cos(\sqrt[4]{b/4}x)\,\text{sh}(\sqrt[4]{b/4}x))(\sqrt{2}b^{3/4}), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Сумма.

$\forall_{fguv}(\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) = \lambda_x(u(x), x - \text{число} \ \&$
$0 \leq x) \ \& \ \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(g(z), z - \text{комплексное})) = \lambda_x(v(x), x - \text{число} \ \&$
$0 \leq x) \to \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z) + g(z), z - \text{комплексное})) =$
$\lambda_x(u(x) + v(x), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Указатель "операнд". определяет идентификацию $f(z)$ с отдельным слагаемым, а $g(z)$ - с остаточной суммой. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Умножение на константу.

$\forall_{abfgu}(\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z)/g(z), z - \text{комплексное})) =$
$\lambda_x(u(x), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x) \to \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(af(z)/(bg(z)),$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(au(x)/b, x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

$\forall_{abfu}(\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) =$
$\lambda_x(u(x), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x) \to \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(af(z)/b,$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(au(x)/b, x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Хотя бы одно из выражений a, b не тождественно единичное. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Удаление минуса в знаменателе перед неконстантным членом.

$\forall_{abf}(\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(a/(b - f(z)), z - \text{комплексное})) =$
$\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(-a/(f(z) - b), z - \text{комплексное})))$

Уровень срабатывания равен 2.

(e) Смещение.

$\forall_{afg}(\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) =$
$\lambda_x(g(x), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x) \to \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z+a),$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(g(x)exp(-ax), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Указатель "контекст" определяет идентификацию внутри преобразуемого выражения суммы $z + a$. Для идентификации шаблона $f(\ldots)$ далее используется указатель "новаргумент(f z фикс)". Уровень срабатывания приема равен 2.

(f) Запаздывание.

$\forall_{afgh}(a - \text{число} \ \& \ a \leq 0 \ \& \ \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z)/h(z),$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(g(x), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x) \rightarrow$
$\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(\exp(az)f(z)/h(z), z - \text{комплексное})) =$
$\lambda_x(g(x+a)\mathrm{Sg}(x+a), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Первые два антецедент обрабатываются проверочными операторами, третий - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Преобразование к виду суммы простейших дробей.

$\forall_{fghp}(g(z) = h(z) \ \& \ f(z)/h(z) = p \rightarrow \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z)/g(z),$
$z - \text{комплексное})) = \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(p, z - \text{комплексное})))$

Усматривается, что $f(z)$ и $g(z)$ приводятся к виду многочленов от z, причем либо степень второго больше единицы, либо степень первого больше степени второго. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них последовательно обрабатывается нормализаторами "вещтерм" (переход к вещественным версиям операций), "норм" (общая стандартизация) и "видумножение" (разложение на множители". Проверяется, что результат $h(z)$ не имеет сомножителей, основание степени которых - многочлен от z степени больше 2. Левая часть второго антецедента последовательно обрабатывается нормализаторами "простейшиедроби" (преобразование к виду суммы простейших дробей), "комплтерм" (переход к комплексным версиям операций) и "норм". Предварительно выражение $f(z)$ обрабатывается нормализатором "вещтерм". Уровень срабатывания равен 3.

(h) Преобразование квадратного трехчлена в квадратный двучлен.

$\forall_{abcfgk}(\neg(a = 0) \ \& \ \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z - b/(2a))/(az^2 + c - b^2/(4a))^k,$
$z - \text{комплексное})) = \lambda_x(g(x), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x) \rightarrow$
$\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z)/(az^2 + bz + c)^k, z - \text{комплексное})) =$
$\lambda_x(g(x)\exp(-bx/(2a)), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

(i) Преобразование дроби с суммой в числителе к виду суммы дробей.

$\forall_{fgh}(\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z((f(z) + g(z))/h(z), z - \text{комплексное})) =$
$\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z)/h(z) + g(z)/h(z), z - \text{комплексное})))$

Выражение $f(z)$ идентифицируется с отдельным слагаемым. Уровень срабатывания равен 4.

(j) Использование разложения в ряд.

$\forall_{abfghkmn}(f(z) = a\sum_{i=k}^{\infty} g(i)/(h(i)z^{mi+n})/b \rightarrow$
$\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z), z - \text{комплексное})) =$
$\lambda_x(\sum_{i=k}^{\infty} ag(i)x^{mi+n-1}/(bh(i)(mi+n-1)!), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается задачей на преобразование, имеющей цель (рядтейлора z плюсбеск). Уровень срабатывания равен 5.

(k) Вынесение коэффициента.

$\forall_{abfmn}(\neg(a = 0) \rightarrow \text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z)/(az^m + b)^n, z - \text{комплексное})) =$
$\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(f(z)/(a^n(z^m + b/a)^n), z - \text{комплексное})))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Глава 5

Приемы по теории вероятностей

При обучении решателя пока использовались задачи из первых пяти глав сборника "Е.С.Вентцель, Л.А.Овчаров. Задачи и упражнения по теории вероятностей". Теоретические задачи не рассматривались.

5.1 Логические символы, используемые решателем в теории вероятностей

5.1.1 Общие понятия, связанные с вероятностями

Утверждение "верпространство(a)" означает, что a есть вероятностное пространство.

Утверждение "событие(a, b)" означает, что a есть событие в вероятностном пространстве b.

Выражение "элемсобытия(a)" обозначает множество элементарных событий вероятностного пространства a.

Выражение "события(a)" обозначает множество всех событий вероятностного пространства a.

Выражение "вероятность(a, b)" обозначает вероятность события a в вероятностном пространстве b.

Выражение "услвероятн(a, b, c)" обозначает условную вероятность события a при наличии события b в вероятностном пространстве c.

Утверждение "независобытия(a, b)" означает, что события семейства a в вероятностном пространстве b являются независимыми.

Утверждение "услнезавис(a, b, c)" означает, что каждое из событий семейства a является подсобытием события b, причем события этого семейства в сужении вероятностного пространства c на событие b являются независимыми.

Утверждение "незавсерия(a, b)" означает, что a есть семейство F семейств $F(i)$ событий вероятностного пространства b, имеющих одну и ту же область определения D. Для каждого d из D это семейство определяет группу событий $F(i)(d)$, причем любые события A_j, каждое из которых построено при помощи теоретико-множественных операций из событий одной и той же группы, но для разных A_j их группы различны, - независимы.

Утверждение "услнезавсерия(a, b, c)" означает, что a есть семейство F семейств $F(i)$ событий вероятностного пространства c, имеющих одну и ту же область определения D. Для каждого d из D это семейство определяет группу событий $F(i)(d)$, причем любые два события, построенные теоретико-множественными операциями из событий двух таких различных групп, условно независимы относительно события b.

Утверждение "незавгруппы(a, b)" означает, что a есть семейство семейств событий вероятностного пространства b, причем события, полученные из событтий различных семейств теоретико-множественными операциями, независимы.

Утверждение "относитнезавис(a, b, c)" означает, что a и b суть два семейства событий вероятностного пространства c, причем любые два события семейства a независимы в сужении вероятностного пространства c на любую теоретико-множественную комбинацию событий семейства b.

Выражение "версочетания(a, b, c)" обозначает вероятность одновременного выполнения ровно c независимых событий из списка, длина которого равна длине набора целых неотрицательных чисел a, а вероятность события списка, соответствующего числу n - вероятности объединения n независимых событий, каждое из которых происходит с вероятностью b.

Утверждение "несовместны(a, b)" означает, что любые два различных события семейства a являются несовместными в вероятностном пространстве b.

Выражение "равновер(a)" обозначает вероятностное пространство, определяемое на конечном множестве a из соглашения о равновероятности его элементов (событиями служат всевозможные конечные подмножества множества a), либо вероятностное пространство, определяемое на множестве a бесконечных последовательностей элементов конечного множества из соглашения о равновероятности для каждого натурального n его событий, получающихся при фиксации первых n элементов последовательности.

Выражение "верпроизв$(a_1, \ldots, a_n)$" обозначает прямое произведение вероятностных пространств $a_1, \ldots, a_n$.

5.1.2 Понятия, связанные со случайными величинами

Утверждение "случвеличина(a, b)" означает, что a есть числовая функция, определенная на множестве элементарных событий вероятностного пространства b.

Утверждение "дискрвеличина(a, b)" означает, что a есть дискретная случайная величина на вероятностном пространстве b.

Утверждение "непрвеличина(a, b)" означает, что a есть непрерывная случайная величина на вероятностном пространстве b.

Утверждение "незавслучвел(a, b)" означает, что случайные величины семейства a в вероятностном пространстве b являются независимыми.

Выражение "функраспред(a, b)" обозначает функцию распределения случайной величины a, заданной на вероятностном пространстве b.

Выражение "рядраспред(a, b)" обозначает ряд распределения дискретной случайной величины a в вероятностном пространстве b (функцию, определенную на множестве значений величины a и принимающую в качестве своих значений соответствующие вероятности).

Выражение "плотнраспред(a, b)" обозначает плотность распределения непрерывной случайной величины a на вероятностном пространстве b.

Выражение "мода(a, b)" обозначает моду случайной величины a, заданной на вероятностном пространстве b, т.е. точку, в которой ее плотность вероятности достигает максимума.

Выражение "матожидание(a, b)" обозначает математическое ожидание случайной величины a, определенной в вероятностном пространстве b.

Выражение "центрирование(a, b)" обозначает результат центрирования случайной величины a, определенной в вероятностном пространстве b.

Выражение "дисперсия(a, b)" обозначает дисперсию случайной величины a, определенной в вероятностном пространстве b.

Выражение "средквадроткл(a, b)" обозначает среднее квадратическое отклонение случайной величины a, определенной в вероятностном пространстве b.

Выражение "начмомент(a, b, c)" обозначает начальный момент b - го порядка случайной величины a, определенный в вероятностном пространстве c.

Выражение "центрмомент(a, b, c)" обозначает центральный момент порядка b случайной величины a, определенной в вероятностном пространстве c.

Утверждение "Пуассон(a, b, c)" означает, что случайная величина a в вероятностном пространстве b распределена по закону Пуассона с параметром c.

Утверждение "показатзакон(a, b, c)" означает, что случайная величина a в вероятностном пространстве b распределена по показательному закону с параметром c.

Утверждение "нормраспред(a, b, c, d)" означает, что случайная величина a в вероятностном пространстве b распределена по нормальному закону с математическим ожиданием c и средним квадратическим отклонением d.

Выражение "Нормраспред(a)" обозначает значение в точке a нормальной функции распределения для математического ожидания 0 и среднего квадратического отклонения 1.

Выражение "обрнормраспред(a)" обозначает значение в точке a функции, обратной к нормальной функции распределения для математического ожидания 0 и среднего квадратического отклонения 1.

Утверждение "случпоток(a, b)" означает, что a есть случайный поток, рассматриваемый как семейство событий в вероятностном пространстве b, состоящих в том, что в заданный момент наступает событие потока, либо как семейство событий в вероятностном пространстве, состоящих в том, что в заданном месте числовой прямой расположена точка рассматриваемого случайного множества точек.

Выражение "числособытий(a, b)" обозначает случайную величину, равную числу событий случайного потока a, произошедших на множестве моментов времени b.

Утверждение "простейшийпоток(a, b)" означает, что a есть простейший случайный поток, характеризуемый параметром b.

Утверждение "случполе(a, b, c)" означает, что a есть случайное поле, рассматриваемое как семейство событий в вероятностном пространстве c, состоящих в том, что в заданном месте плоскости (при $b = 2$) либо трехмерного пространства (при $b = 3$) располагается точка поля.

Выражение "числоточек(a, b)" обозначает случайную величину, равную числу точек случайного поля a, попадающих в подмножество плоскости либо трехмерного пространства b.

Утверждение "равномерноеполе(a, b)" означает, что a есть равномерное случайное поле с плотностью b.

Утверждение "незавсобытие(a, b)" означает, что a есть случайный поток либо случайное поле в некотором вероятностном пространстве; b - событие в этом вероятностном пространстве, независимое от любого события, состоящего в том, что число точек потока либо поля, попадающих на данный промежуток (в данную область), равно данной величине.

Выражение "длинапаузы(a)" обозначает случайную величину, равную паузе между двумя последовательными событиями в случайном потоке a либо расстоянию от точки до ближайшей к ней в случайном поле.

5.2 Непосредственный подсчет вероятностей

Конечное множество равновероятных элементарных событий

$\forall_{ABa}(a = \mathrm{card}(B)\ \&\ \neg(a = 0) \rightarrow \text{вероятность}(A, \text{равновер}(B)) = \mathrm{card}(A)/a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания приема равны 2 и 3.

Вероятность пустого события

$\forall_A(\text{вероятность}(\emptyset, A) = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Полное событие

$\forall_A(\text{вероятность}(A, \text{равновер}(A)) = 1)$

$\forall_A(\text{вероятность}(\text{элемсобытия}(A), A) = 1)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{AB}(B = \text{элемсобытия}(A) \rightarrow \text{вероятность}(B, A) = 1)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 0.

Изменение пространства перестановок

$\forall_{ABP}(B \subseteq A \rightarrow \text{вероятность}(\mathrm{set}_f(\text{перестановка}(f, A)\ \&\ f - \text{функция}\ \&$
$P(\text{выборка}(f, B))), \text{равновер}(\mathrm{set}_f(\text{перестановка}(f, A)))) =$
$\text{вероятность}(\mathrm{set}_f(\text{перестановка}(f, B)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ P(f)),$
$\text{равновер}(\mathrm{set}_f(\text{перестановка}(f, B)))))$

Напомним, что выражение "выборка(f, B)" обозначает набор, полученный из набора f отбрасыванием всех разрядов, не принадлежащих множеству B. Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Указатель "контекст" определяет идентификацию в заменяемом выражении подтерма "выборка(f, B)". После этого шаблон для $P(\ldots)$ определяется в соответствии с указателем "новаргумент(P, f, извлечфунк)". Нормализатор "извлечфунк" ориентирован на преобразование термов с заголовками "значение", "образ", "прообраз" к виду, в котором используется заданный подтерм. В нашем случае это подтерм "выборка(f, B)". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Переход от пространства последовательностей к пространству наборов

$\forall_{Afn}(\text{вероятность}(\text{set}_x(\text{последовательность}(x, A)\ \&\ f(\text{сужение}(x, \{1, \ldots, n\}))),$
$\text{равновер}(\text{set}_y(\text{последовательность}(y, A)))) = \text{вероятность}(\text{set}_x(\text{кортеж}(x, n, A)$
$\&\ f(x)), \text{равновер}(\text{set}_x(\text{кортеж}(x, n, A)))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет идентификацию под первым описателем "класс" подвыражения "значение(x, n)". Переменная f функциональная. Шаблон $f(\ldots)$ определяется при помощи указателя "новаргумент(f, x, извлсужение)". Нормализатор "извлсужение" определяет преобразование термов с заголовками "образ", "значение" к виду, в котором присутствует заданный терм "сужение$(\ldots)$". Уровень срабатывания приема равен 3.

Использование равенства из контекста

$\forall_{ABp}(\text{вероятность}(A, B) = p \to \text{вероятность}(A, B) = p)$

$\forall_{ABCp}(\text{услвероятн}(A, B, C) = p \to \text{услвероятн}(A, B, C) = p)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой, причем перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение p не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания приема равен 3.

Усмотрение вероятности из кванторной посылки

$\forall_{ABCPQpt}(\forall_x(C(x) \to \text{вероятность}(A(x), B(x)) = p(x))\ \&\ (A(t), B(t)) = (P, Q)\ \&$
$C(t) \to \text{вероятность}(P, Q) = p(t))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи. Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем допускается кванторная приставка x произвольной длины. Переменные A, B, C, p функциональные. Подвыражение $p(t)$ не содержит символа "вероятность". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Истинность последнего антецедента усматривается при помощи оператора "очевидно", обращающегося к необходимым проверочным операторам. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDPQRpt}(\forall_x(D(x) \to \text{услвероятн}(A(x), B(x), C(x)) = p(x))\ \&$
$(A(t), B(t), C(t)) = (P, Q, R)\ \&\ D(t) \to \text{услвероятн}(P, Q, R) = p(t))$

Аналогично предыдущему. Подвыражение $p(t)$ не содержит символов "вероятность" и "услвероятн".

$\forall_{ABCjn}(\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to \text{услвероятн}(A(i),C(i),B) = p(i))\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\} \to \text{услвероятн}(A(j),C(j),B) = p(j))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" определяет попытку его применения при усмотрении подвыражения "вероятность$(A(j),B)$". Переменные p, C - функциональные, переменная A - обычная. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Подвыражение $p(i)$ не содержит символа "услвероятн". Преобразуемое выражение не связано внешними кванторами и описателями. Уровень срабатывания равен 4.

Вероятность произведения событий в произведении вероятностных пространств

$\forall_{ABCD}(\text{вероятность}(A \times B, C \times D) = \text{вероятность}(A,C)\text{вероятность}(B,D))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Нормализатор общей стандартизации "нормвероятность"

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет заголовок "вероятность" и не входит в выражение b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Уровень срабатывания равен 1.

2. Вероятность пустого события.

   $\forall_A(\text{вероятность}(\emptyset, A) = 0)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Использование кванторного тождества.

   $\forall_{ABPmn}(\forall_{ij}(P(i,j) \to \text{вероятность}(A(i,j),B) = p(i,j))\ \&\ P(m,n) \to \text{вероятность}(A(m,n),B) = p(m,n))$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные P, p функциональные, переменная A обычная. Истинность второго антецедента устанавливается при помощи оператора "очевидно", обращающегося к необходимому проверочному оператору. Выражение $p(i,j)$ не содержит символа "вероятность". Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор общей стандартизаци "нормэлемсобытия"

Уровень срабатывания приемов нормализатора равен 1.

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет заголовок "элемсобытия" и не входит в выражение b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается.

2. Произведение вероятностных пространств.

   $\forall_{AB}$(элемсобытия$(A \times B)$ = элемсобытия$(A) \times$ элемсобытия(B))

3. Пространство равновероятных событий.

   $\forall_{A}$(элемсобытия(равновер(A)) $= A$)

Проверочный оператор "усмверпространство"

Уровень срабатывания приемов оператора равен 1.

1. Пространство равновероятных событий.

   $\forall_{A}(A - \mathrm{set} \to$ верпространство(равновер(A)))

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

2. Произведение вероятностных пространств.

   $\forall_{AB}$(верпространство(A) & верпространство$(B) \to$ верпространство$(A \times B)$)

   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

5.3 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вероятность объединения событий

$\forall_{ABC}$(вероятность$(A \cup B, C)$ = вероятность(A, C) + вероятность(B, C) − вероятность$(A \cap B, C)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Либо отсутствует посылка вида "несовместны(...)", либо имеется посылка вида "вероятность$(P, C) = Q$, где P и $A \cup B$ зависят от общей переменной, либо нет такой посылки вида "услвероятн$(P, R, C) = Q$", что P и $A \cup B$ зависят от общей переменной. A - самый короткий операнд объединения. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 6. У нее приведенное выше ограничение на посылки задачи отброшено.

$\forall_{ABCD}$(услвероятн$(A \cup B, C, D)$ = услвероятн(A, C, D) + услвероятн(B, C, D) − услвероятн$(A \cap B, C, D)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCD}(D = A \cup B \to$ вероятность(D, C) = вероятность(A, C) + вероятность(B, C) − вероятность$(A \cap B, C)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровни срабатывания приема равны 2 и 4. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 5. В ней антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "стандобъединение", преобразующим выражения к виду стандартной формы "объединение пересечений".

Вероятность разности событий

$\forall_{AB}$(вероятность(элемсобытия$(B) \setminus A, B) = 1 -$ вероятность(A, B))

Прием имеет заголовок "воройтерм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$(услвероятн$(A \setminus B, D, C) =$ услвероятн$(A, D, C) -$ услвероятн$(A \cap B, D, C)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(незавсобытия$((A, B), C) \rightarrow$ вероятность$(A \setminus B, C) =$ вероятность$(A, C)(1 -$ вероятность(B, C))))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. При завершающем редактировании ответа прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(вероятность$(A \setminus B, C) =$ вероятность$(A, C) -$ вероятность$(A \cap B, C)$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 3.

Вероятность пересечения событий

$\forall_{AB}$(вероятность$(A \cap$ элемсобытия$(B), B) =$ вероятность(A, B))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}(B =$ элемсобытия$(A) \rightarrow$ вероятность$(B \cap C, A) =$ вероятность(C, A))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(вероятность$(A \cap B, C) =$ вероятность(A, C)услвероятн(B, A, C))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Задача имеет посылку, содержащую либо подвыражение "услвероятн(X, A, C)", либо подутверждение "услнезавис(X, A, C)", либо подутверждение "услнезавсерия(X, A, C)". Выражение "$A \cap B$" не содержит символа "прообраз". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDQp}(D = A \cap (B \cup C) \ \& \ p =$ вероятность$(D, Q) \rightarrow$ вероятность$(A \cap (B \cup C), Q) = p)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть первого из них обрабатывается нормализатором "стандобъединение", преобразующим к виду "объединение пересечений", после чего упрощается задачей на преобразование. Правая часть второго антецедента упрощается задачей на преобразование, причем результат p не содержит символа "вероятность". Уровень срабатывания равен 4.

Вероятность конечного списка

$\forall_{AQabcp}(A = \{;a\} \ \&$ вероятность$(A, Q) = p \ \& \ \{;b\} \subseteq \{;a\} \ \& \ \{;c\} = \{;a\} \setminus \{;b\} \rightarrow$ вероятность$(\{;b\}, Q) = p -$ вероятность$(\{;c\}, Q)$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении содержащего неизвестные подвыражения "вероятность$(\{;b\}, Q)$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи, причем выражение p не содержит неизвестных. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 3.

Приведение подобных членов с вероятностями

$\forall_{ABabcd}(a(b\cdot$вероятность$(A,B)+c)+d\cdot$вероятность$(A,B)=(ab+d)$вероятность$(A,B)+ac)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a,b,d не содержат символа "вероятность". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABabcd}(a\cdot$вероятность$(A,B)/b+c\cdot$вероятность$(A,B)/d=(a/b+c/d)$вероятность$(A,B))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a,b,c,d не содержат невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

Условная вероятность

1. Выражение условной вероятности через безусловные.

   $\forall_{ABC}($непересек$(A,B)\rightarrow$ услвероятн$(A,B,C)=0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABC}(\neg($вероятность$(A,C)=0)$ & $a=$ вероятность$(A\cap B,C)\rightarrow$ услвероятн$(B,A,C)=a/$вероятность$(A,C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормвероятность". Результат a не содержит символа "пересечение". Отсутствует посылка вида "услвероятн$(B,A,C)=p$", где p не содержит неизвестных. Введен сравнительно сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABC}($незавсобытия$((A,B),C)\rightarrow$ услвероятн$(A,B,C)=$ вероятность$(A,C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCabcpq}(p=$ вероятность(A,C) & $q=$ вероятность$(A\cap B,C)$ & $\neg($вероятность$(A,C)=0)\rightarrow$ услвероятн$(B,A,C)=q/p)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их правые части упрощаются задачами на преобразование. Результаты p,q не содержат невырожденных числовых атомов. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Преобразуемое выражение не связано внешними кванторами и описателями. Оно не является левой часть равенства, правая часть которого не содержит неизвестных. Если решается задача на исследование, имеющая посылку вида "услвероятн$(X,Y,C)=Z$", где параметры X пересекаются с параметрами A либо B, но не имеющая посылки вида "вероятность$(U,C)=V$", где параметры U пересекаются с параметрами A либо B, то прием блокируется. Уровень срабатывания равен 4.

   $\forall_{ABCp}($услвероятн$(B,A,C)=p\rightarrow p\cdot$вероятность$(A,C)=$ вероятность$(A\cap B,C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Выражение p не содержит неизвестных, а выражение "вероятность$(A \cap B, C)$" - содержит. Уровень срабатывания равен 4.

2. Подсобытие.

   $\forall_{ABC}(A \subseteq B \to \text{услвероятн}(B, A, C) = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Использование известной условной вероятности.

   $\forall_{AQnp}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{услвероятн}(A(i), \text{элемсобытия}(Q) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A(j), Q) = p(i)) \to \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{вероятность}(A(i), Q) = p(i) \prod_{j=1}^{i-1}(1 - p(j))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с кванторной посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Переменные A, p функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{AQnp}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{услвероятн}(A(i), \bigcap_{j=1}^{i-1} A(j), Q) = p(i)) \to$
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{вероятность}(A(i), Q) = \prod_{j=1}^{i} p(j)))$

   Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCDq}(A \subseteq B \ \& \ B \subseteq C \ \& \ q = \text{услвероятн}(A, B, D) \to \text{услвероятн}(A, C, D) = q \cdot \text{услвероятн}(B, C, D))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на исследование подвыражения "услвероятн(A, C, D)". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, причем выражение q не содержит неизвестных. Результат обработки выражения "услвероятн(A, C, D)" нормализатором "нормуслвероятн" содержит неизвестные. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCp}(\text{услвероятн}(A, B, C) = p \ \& \ A \subseteq B \to \text{вероятность}(A, C) =$
   $p \cdot \text{вероятность}(B, C))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование, причем выражение p не содержит неизвестных. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение "вероятность(A, C)" уже встречается в посылках задачи. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCp}(\text{услвероятн}(A, \text{элемсобытия}(C) \setminus B, C) = p \ \& \ \text{непересек}(A, B) \to$
   $\text{вероятность}(A, C) = p(1 - \text{вероятность}(B, C)))$

   Аналогично предыдущему.

4. Вычитание события, не пересекающегося с тем событием, относительно которого берется условная вероятность.

   $\forall_{ABCDE}(D \setminus A = B \ \& \ \text{непересек}(A, C) \rightarrow \text{условероятн}(D, C, E) =$
   $\text{услвероятн}(B, C, E))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "услвероятн(D, C, E)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение B имеет свободную переменную, не входящую в D. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

5. Условная вероятность пересечения событий.

   $\forall_{ABC}(\text{услвероятн}(A \cap B, A, C) = \text{услвероятн}(B, A, C))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ABCD}(\text{независсобытия}((A, B), D) \ \& \ B \subseteq C \rightarrow \text{услвероятн}(A \cap B, C, D) =$
   $\text{вероятность}(A, D)\text{услвероятн}(B, C, D))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. При редактировании ответа задачи на описание либо на преобразование прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCD}(\text{независсобытия}((B, C), D) \rightarrow \text{услвероятн}(A \cap B, C, D) =$
   $\text{вероятность}(B, D)\text{услвероятн}(A, B \cap C, D))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

6. Формула полной вероятности.

   $\forall_{ABCk}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow \text{услвероятн}(A, B(i), C) = p(i)) \ \& \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(i) \ \&$
   $\text{несовместны}(\lambda_i(B(i), i \in \{1, \ldots, k\}), C) \rightarrow \text{вероятность}(A, C) =$
   $\sum_{i=1}^{k}(p(i)\text{вероятность}(B(i), C)))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Первый антецедент, выделенный указателем "развертка", идентифицируется с группой утверждений из контекста, имеющей более одного элемента. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "услвероятн$(A, X, C) = Y$". Истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" определяют выписывание конечных объединения и суммы как обычных, а также выписывание описателя "отображение" в третьем антецеденте как конечного набора. При обработке второго антецедента используется средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABC}(\text{вероятность}(A, C) = \text{услвероятн}(A, B, C)\text{вероятность}(B, C) +$
   $\text{услвероятн}(A, \text{элемсобытия}(C) \setminus B, C)(1 - \text{вероятность}(B, C)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию подвыражения посылки "услвероятн(X, элемсобытия(C)$\backslash B, C$)", не расположенного в области действия квантора либо описателя по переменной, входящей в B. Для каждого нечисленного параметра выражения A должны существовать такие подвыражения посылок "услвероятн(X, B, C)" и "услвероятн(Y, элемсобытия(C) $\setminus B, C$)",что этот параметр входит в X и в Y. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEk}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow$ услвероятн$(A, B(i), C) = p(i))$ &
$E =$ элемсобытия$(C) \setminus \bigcup_{i=1}^k B(i)$ & несовместны$(\lambda_i(B(i), i \in \{1, \ldots, k\}), C) \rightarrow$
вероятность$(A, C) = \sum_{i=1}^k (p(i)$вероятность$(B(i), C)) +$
услвероятн(A, E, C)вероятность$(E, C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "вероятность(A, C)" в посылке задачи на исследование. Первый антецедент, выделенный указателем "развертка", идентифицируется с группой посылок, имеющей более одного элемента. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" определяют выписывание конечных объединения и суммы как обычных, а также выписывание описателя "отображение" в третьем антецеденте как конечного набора. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEFk}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow$ услвероятн$(A, B(i), C) = p(i))$ &
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow B(i) \subseteq D)$ & $E = D \setminus \bigcup_{i=1}^k B(i)$ &
несовместны$(\lambda_i(B(i), i \in \{1, \ldots, k\}), C) \rightarrow$ услвероятн$(A, D, C) =$
$\sum_{i=1}^k (p(i)$услвероятн$(B(i), D, C)) +$ услвероятн(A, E, C)услвероятн$(E, D, C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "услвероятн(A, D, C)" в посылке задачи на исследование. Первый антецедент, выделенный указателем "развертка", идентифицируется с группой посылок, имеющей более одного элемента. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Выражение E не есть символ пустого множества. Второй и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Используются указатели "развертка". Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDEPkps}(\forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, k\}$ & $P(j) \rightarrow$ услвероятн$(A(j), B(i, j), C) = p(i, j))$ &
$E =$ элемсобытия$(C) \setminus \bigcup_{i=1}^k B(i, s)$ & несовместны$(\lambda_i(B(i, s), i \in \{1, \ldots, k\}), C)$
& $P(s) \rightarrow$ вероятность$(A(s), C) = \sum_{i=1}^k (p(i, s)$вероятность$(B(i, s), C)) +$
услвероятн$(A(s), E, C)$вероятность$(E, C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "вероятность($A(s)$,C)" в посылке задачи на исследование. Это подвыражение не связано внешними кванторами и описателями. Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Выражение E не есть символ пустого множества. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором, истинность четвертого устанавливается при помощи задачи на доказательство, решаемой до максимального уровня 4. Переменные A, B, P, p функциональные. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCRk}(\forall_i(R(i) \to \text{условероятн}(A, B(i), C) = p(i))$ & $A \subseteq \bigcup_{i,R(i)} B(i)$ & несовместны$(\lambda_i(B(i), R(i)), C)$ & конечное$(\text{set}_i(R(i))) \to$ вероятность$(A, C) = \sum_{i,R(i)}(p(i)$вероятность$(B(i), C)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Переменные B, R, p функциональные. Переменная i идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания приема равен 3.

$\forall_{ABCn}($несовместны(B, C) & $l(B) = n \to$ вероятность$(A, C) = \sum_{i=1}^{n}($услвероятн$(A, B(i), C)$вероятность$(B(i), C)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на исследование подвыражения "вероятность(A, C)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение B имеет заголовок "набор". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормдлинанабора". Для каждого элемента X набора B имеется посылка вида "услвероятн$(Y, X, C) = Z$". Результат обработки выражения "вероятность(A, C)" нормализатором "нормвероятность" содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 5.

$\forall_{ABCDEPkmpqs}(\forall_{ij}(i \in \{m, \dots, k\}$ & $P(j) \to$ услвероятн$(A(j), B(i), C) = q(i, j))$ & $E =$ элемсобытия$(C) \setminus \bigcup_{i=m}^{k} B(i)$ & несовместны$(\lambda_i(B(i), i \in \{m, \dots, k\}), C)$ & услвероятн$(D, B(s), C) = p(s) \to$ вероятность$(D, C) = \sum_{i=m}^{k}(p(i)$вероятность$(B(i), C)) +$ услвероятн(D, E, C)вероятность$(E, C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на исследование подвыражения "вероятность(D, C)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй и четвертый - выделены указателем "идентификатор". Правая часть второго антецедента упрощается задачей на преобразование. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Перед обработкой левой части четвертого антецедента задачей на преобразование выбирается новая переменная s, и задаче передается посылка "$s \in \{m, \dots, k\}$". Результат $p(s)$ не содержит символов "вероятность", "услвероятн". Выражение D не имеет вида $A(n)$. Переменные A, B, P, p, q функциональные. Уровень срабатывания приема равен 5.

7. Формула Байеса.

$\forall_{ABC}($услвероятн(A, B, C)вероятность$(B, C) =$ услвероятн$(B, A, C) \cdot$ вероятность$(A, C))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку применения приема при усмотрении не содержащего неизвестных подвыражения "услвероятн(A, B, C)" в посылке задачи на исследование. Уровень срабатывания равен 3. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 5. В ней не требуется, чтобы подвыражение "услвероятн(A, B, C)" не содержало неизвестных, однако требуется, чтобы некоторая посылка содержала такое подвыражение "услвероятн(X, Y, Z)", что B и X имеют общую свободную переменную. Уровень срабатывания равен 5.

8. Переход от безусловной вероятности к условной.

$\forall_{ABCp}(\text{вероятность}(A, C) = p \rightarrow \text{вероятность}(B \setminus A, C) =$
$(1 - p)\text{услвероятн}(B, \text{элемсобытия}(C) \setminus A, C))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормвероятность". Результат p не содержит символа "вероятность". Для каждой переменной X выражения B существует посылка вида "услвероятн$(X, \text{элемсобытия}(C) \setminus A, C) = Y$". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}(A \subseteq C \rightarrow \text{вероятность}(A, B) = \text{вероятность}(C, B)\text{услвероятн}(A, C, B))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию подутверждения "услвероятн$(X, C, B) = Y$" некоторой посылки. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Преобразуемое выражение не является левой частью корневого равенства, правая часть которого не содержит неизвестных. Выражения A, C различны; A не имеет вида "$C \cap Z$". В случае задачи на преобразование, имеющей цель "версочетания", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 3.

9. Ориентация равенства.

$\forall_{ABCd}(d = \text{услвероятн}(A, B, C) \leftrightarrow \text{услвероятн}(A, B, C) = d)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение d не содержит символа "услвероятн". Преобразованное утверждение сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

10. Условная вероятность относительно надсобытия.

$\forall_{ABCDp}(A \subseteq D \;\&\; D \subseteq B \;\&\; \text{услвероятн}(A, D, C) = p \rightarrow \text{услвероятн}(A, B, C) =$
$p \cdot \text{услвероятн}(D, B, C))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем выражение p не содержит неизвестных. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

11. Нормализатор общей стандартизации "нормуслвероятн".

Нормализатор имеет единственный прием, использующий явное выражение для условной верояности в виде равенства из посылок.

Независимые события

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABC}$(незавсобытия$((A,B),C) \leftrightarrow$ вероятность$(A,C) =$ услвероятн(A,B,C) & вероятность$(B,C) =$ услвероятн$(B,A,C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Уровень срабатывания равен 3.

2. Вероятность пересечения независимых событий.

   $\forall_{ACn}$(незавсобытия$(A,C) \to$ вероятность$(\bigcap_{i=1}^{n} A(i), C) = \prod_{i=1}^{n}$ вероятность$(A(i),C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" определяют идентификацию конечного пересечения с обычным и выписывание конечного произведения в виде обычного. Параметр n больше единицы. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABC}$(незавсобытия$((A,B),C) \to$ вероятность$(A \cap B, C) =$ вероятность(A,C)вероятность$(B,C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. При редактировании ответа задачи прием блокируется. Отличие данного приема от предыдущего заключается в том, что в пересечении многих событий лишь одно из них может оказаться независимым от других. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ACP}$(конечное$(\mathrm{set}_i(P(i)))$ & незавсобытия$(\lambda_i(A(i),P(i)),C) \to$ вероятность$(\bigcap_{i,P(i)} A(i), C) = \prod_{i,P(i)}$ вероятность$(A(i),C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные A, P функциональные. Указатели "развертка" отсутствуют. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCn}$(услнезавис$(A,B,C) \to$ услвероятн$(\bigcap_{i=1}^{n} A(i), B, C) = \prod_{i=1}^{n}$ услвероятн$(A(i),B,C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" преобразуют конечные пересечение и произведение в обычные. Параметр n больше единицы. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCn}$(услнезавис$(\lambda_i(A(i), i \in \{1,\dots,n\}),B,C) \to$ услвероятн$(\bigcap_{i=1}^{n} A(i), B, C) = \prod_{i=1}^{n}$ услвероятн$(A(i),B,C))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная A функциональная. Указатели "развертка" отсутствуют. Уровень срабатывания равен 3.

3. Вероятность объединения независимых событий.

   $\forall_{ACn}$(незавсобытия$(A, C) \to$ вероятность$(\bigcup_{i=1}^{n} A(i), C) =$
   $1 - \prod_{i=1}^{n}(1 -$ вероятность$(A(i), C)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" преобразуют конечные объединение и произведение в обычные. Параметр n больше единицы. введен средний ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ACP}$(конечное$(\mathrm{set}_i(P(i)))$ & незавсобытия$(\lambda_i(A(i), P(i)), C) \to$
   вероятность$(\bigcup_{i,P(i)} A(i), C) = 1 - \prod_{i,P(i)}(1 -$ вероятность$(A(i), C)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные A, P функциональные. Указатели "развертка" отсутствуют. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCn}$(услнезавис$(\lambda_i(A(i), i \in \{1, \ldots, n\}), B, C) \to$
   услвероятн$(\bigcap_{i=1}^{n} A(i), B, C) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 -$ услвероятн$(A(i), B, C)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная A функциональная. Указатели "развертка" отсутствуют. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABCn}$(услнезавис$(A, B, C) \to$ услвероятн$(\bigcup_{i=1}^{n} A(i), B, C) =$
   $1 - \prod_{i=1}^{n}(1 -$ услвероятн$(A(i), B, C)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" преобразуют конечные пересечение и произведение в обычные. Параметр n больше единицы. Уровень срабатывания равен 3.

4. Разложение события на несколько независимых подсобытий.

   $\forall_{MNPQmn}(\mathrm{card}(\mathrm{set}_b(Q(a, b))) = m$ & $\mathrm{card}(\mathrm{set}_d(N(c, d))) = n \to$
   вероятность$(\mathrm{set}_{ab}(P(a)$ & $Q(a, b))$, равновер$(\mathrm{set}_{cd}(M(c)$ & $N(c, d)))) =$
   $m \cdot$ вероятность$(\mathrm{set}_a(P(a))$, равновер$(\mathrm{set}_c(M(c))))/n)$

   $\forall_{MNPQmn}(\mathrm{card}(\mathrm{set}_b(Q(a, b))) = m$ & $\mathrm{card}(\mathrm{set}_d(N(c, d))) = n \to$
   вероятность$(\mathrm{set}_{ba}(P(a)$ & $Q(a, b))$, равновер$(\mathrm{set}_{dc}(M(c)$ & $N(c, d)))) =$
   $m \cdot$ вероятность$(\mathrm{set}_a(P(a))$, равновер$(\mathrm{set}_c(M(c))))/n)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатели "перечень" определяют идентификацию $N(c, d)$ с конъюнкцией всех членов, содержащих d, а $Q(a, b)$ - с конъюнкцией всех членов, содержащих b. Остаточные конъюнкции $P(a)$ и $M(c)$ невырожденные. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "норммощность". Выражение m не содержит переменной a, а выражение n - переменной c. Уровень срабатывания равен 2.

5. Проверочный оператор "усмнезавсобытия".

   Оператор проверяет утверждение "незавсобытия(A, B)", где A - семейство событий, B - вероятностное пространство.

(a) Включение в явно указанный список независимых событий.

$\forall_{ABC}$(независобытия(A, C) & включается$(B, A) \to$ независобытия(B, C))

Утверждение "включается(B, A)" означает включение семейства B в семейство A, т.е. существование взаимно-однозначного отображения множества индексов первого семейства на подмножество индексов второго, сохраняющего значения соответствующих элементов. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Семейство пересечений.

$\forall_{ABCDP}$(независобытия$(\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)); C, D) \to$
независобытия$(\lambda_i(A(i) \cap B(i)), P(i)); C, D)$

$\forall_{ABDP}$(независобытия$(\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)), D) \to$
независобытия$(\lambda_i(A(i) \cap B(i)), P(i)), D)$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные A, B, P функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCPQ}$(независобытия$(\lambda_{ij}(A(i,j), P(i,j)$ & $Q(i)); B, C) \to$
независобытия$(\lambda_i(\bigcap_{j,P(i,j)} A(i,j), Q(i)); B, C))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные A, P, Q функциональные. Указатель "множество" определяет выбор пересечения на произвольной позиции набора. Остаточная часть B может быть пустой. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABDP}$(незавсерия$((\lambda_i(A(i), P(i)), \lambda_i(B(i), P(i))), D) \to$
независобытия$(\lambda_i(A(i) \cap B(i), P(i)), D))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. В посылках имеется утверждение с заголовком "незавсерия". Переменные A, B, P функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Семейство объединений.

$\forall_{ABCDP}$(независобытия$(\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)); C, D) \to$
независобытия$(\lambda_i(A(i) \cup B(i)), P(i)); C, D)$

$\forall_{ABDP}$(независобытия$(\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)), D) \to$
независобытия$(\lambda_i(A(i) \cup B(i)), P(i)), D)$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные A, B, P функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCPQ}$(независобытия$(\lambda_{ij}(A(i,j), P(i,j)$ & $Q(i)); B, C) \to$
независобытия$(\lambda_i(\bigcup_{j,P(i,j)} A(i,j), Q(i)); B, C))$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные A, P, Q функциональные. Указатель "множество" определяет выбор пересечения на произвольной позиции набора. Остаточная часть B может быть пустой. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABDP}$(незавсерия$((\lambda_i(A(i), P(i)), \lambda_i(B(i), P(i))), D) \to$
независобытия$(\lambda_i(A(i) \cup B(i), P(i)), D))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. В посылках имеется утверждение с заголовком "независерия". Переменные A, B, P функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

(d) Семейство разностей.

$\forall_{ABCDP}$(независобытия$(\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)); C, D) \rightarrow$ независобытия$(\lambda_i(A(i) \setminus B(i)), P(i)); C, D)$

$\forall_{ABDP}$(независобытия$(\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)), D) \rightarrow$ независобытия$(\lambda_i(A(i) \setminus B(i)), P(i)), D)$

Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные A, B, P функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABDP}$(независерия$((\lambda_i(A(i), P(i)), \lambda_i(B(i), P(i))), D) \rightarrow$ независобытия$(\lambda_i(A(i) \setminus B(i), P(i)), D))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. В посылках имеется утверждение с заголовком "независерия". Переменные A, B, P функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Выделение объединения.

$\forall_{ABCPn}(l(A) = n \,\&$ незавгруппы(префикс$(B, \lambda_i((A(i)), i \in \{1, \dots, n\})), C) \rightarrow$ независобытия(префикс$(\bigcup_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "развертка" определяет выписывание терма "отображение" во втором антецеденте как конечного набора. Переменная P функциональная, остальные переменные - обычные. Конечное объединение идентифицируется с произвольным элементом набора. Задача имеет посылку с заголовком "незавгруппы". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCD}$(независобытия(префикс$(A, C), D) \,\&$ независобытия(префикс$(B, C), D)$ & непересек$(A, B) \rightarrow$ независобытия(префикс$(A \cup B, C), D))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Объединение идентифицируется с произвольным элементом набора. Выражения A, B не встречаются внутри выражения C. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCD}$(независобытия$(A, B; C, D) \rightarrow$ независобытия(префикс$(A \cup B, C), D))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCP}$(независобытия$(\lambda_i(B(i), P(i)); A, C) \rightarrow$ независобытия(префикс$(\bigcup_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные B, P функциональные. Конечное объединение идентифицируется с произвольным элементом набора. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDP}$(независобытия$(\lambda_i(B(i), P(i)); D; A, C) \rightarrow$ независобытия(префикс$(\bigcup_{i,P(i)} B(i), D); A, C))$

Аналогично предыдущему. Конечное объединение идентифицируется с произвольным элементом набора, а этот набор - с произвольным операндом конкатенации.

$\forall_{ABCPn}(l(A) = n\ \&$ незавгруппы(префикс$(\lambda_i(B(i), P(i)),$ $\lambda_i((A(i)), i \in \{1, \ldots, n\})), C) \rightarrow$ незавсобытия(префикс$(\bigcup_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "развертка" определяет выписывание второго терма "отображение" во втором антецеденте как конечного набора. Переменные B, P функциональные, остальные переменные - обычные. Конечное объединение идентифицируется с произвольным элементом набора. Задача не имеет посылки с заголовком "незавгруппы". Уровень срабатывания равен 3.

(f) Выделение пересечения.

$\forall_{ABCPn}(l(A) = n\ \&$ незавгруппы(префикс$(B, \lambda_i((A(i)), i \in \{1, \ldots, n\})), C) \rightarrow$ незавсобытия(префикс$(\bigcap_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "развертка" определяет выписывание терма "отображение" во втором антецеденте как конечного набора. Переменная P функциональная, остальные переменные - обычные. Конечное пересечение идентифицируется с произвольным элементом набора. Задача имеет посылку с заголовком "незавгруппы". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCP}($незавсобытия$(\lambda_i(B(i), P(i)); A, C) \rightarrow$ незавсобытия(префикс$(\bigcap_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные B, P функциональные. Конечное пересечение идентифицируется с произвольным элементом набора. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDP}($незавсобытия$(\lambda_i(B(i), P(i)); D; A, C) \rightarrow$ незавсобытия(префикс$(\bigcap_{i,P(i)} B(i), D); A, C))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCD}($незавсобытия$(A, B; C, D) \rightarrow$ незавсобытия(префикс$(A \cap B, C), D))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения A, B не встречаются в выражении C. Пересечение идентифицируется с произвольным элементом набора. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCPn}(l(A) = n\ \&$ незавгруппы(префикс$(\lambda_i(B(i), P(i)), \lambda_i((A(i)),$ $i \in \{1, \ldots, n\})), C) \rightarrow$ незавсобытия(префикс$(\bigcap_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Указатель "развертка" определяет выписывание второго терма "отображение" во втором антецеденте как конечного набора. Переменные B, P функциональные, остальные переменные - обычные. Конечное пересечение идентифицируется с произвольным элементом набора. Задача не имеет посылки с заголовком "незавгруппы". Уровень срабатывания равен 3.

(g) Выделение разности.

$\forall_{ABCD}$(незавсобытия$(A, B; C, D) \rightarrow$ незавсобытия(префикс$(A \setminus B, C), D$))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения A, B не встречаются в выражении C. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Двухпараметрическое семейство.

$\forall_{ABCDP}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = B \times C$ & $i \in B$ &
$\forall_j(P(j) \rightarrow j \in C) \rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_j(A(i,j), P(j)), D)$)

$\forall_{ABCDP}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = B \times C$ & $j \in C$ &
$\forall_i(P(i) \rightarrow j \in B) \rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_j(A(i,j), P(i)), D)$)

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Истинность четвертого антецедента устанавливается с помощью задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = B \times C$ &
$\forall_i(P(i,j) \rightarrow i \in B)$ & $\forall_j(Q(j) \rightarrow j \in C) \rightarrow$
незавсобытия$(\lambda_j(\bigcup_{i,P(i,j)} A(i,j), Q(j)), D)$)

$\forall_{ABCDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = B \times C$ &
$\forall_i(P(i,j) \rightarrow j \in C)$ & $\forall_i(Q(i) \rightarrow i \in B) \rightarrow$
незавсобытия$(\lambda_j(\bigcup_{i,P(i,j)} A(i,j), Q(i)), D)$)

$\forall_{ABCDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = B \times C$ &
$\forall_i(P(i,j) \rightarrow i \in B)$ & $\forall_j(Q(j) \rightarrow j \in C) \rightarrow$
незавсобытия$(\lambda_j(\bigcap_{i,P(i,j)} A(i,j), Q(j)), D)$)

$\forall_{ABCDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = B \times C$ &
$\forall_i(P(i,j) \rightarrow j \in C)$ & $\forall_i(Q(i) \rightarrow i \in B) \rightarrow$
незавсобытия$(\lambda_j(\bigcap_{i,P(i,j)} A(i,j), Q(i)), D)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Истинность двух последних антецедентов устанавливается при помощи задач на доказательство.

$\forall_{ABDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = \mathrm{set}_{ij}(B(i,j))$ &
$\forall_{ij}(Q(i)$ & $P(i,j) \rightarrow B(i,j)) \rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(\bigcup_{j,P(i,j)} A(i,j), Q(i)), D)$)

$\forall_{ABDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = \mathrm{set}_{ij}(B(i,j))$ &
$\forall_{ij}(Q(j)$ & $P(i,j) \rightarrow B(i,j)) \rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(\bigcup_{j,P(i,j)} A(i,j), Q(j)), D)$)

$\forall_{ABDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = \mathrm{set}_{ij}(B(i,j))$ &
$\forall_{ij}(Q(i)$ & $P(i,j) \rightarrow B(i,j)) \rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(\bigcap_{j,P(i,j)} A(i,j), Q(i)), D)$)

$\forall_{ABDPQ}$(незавсобытия(A, D) & $\mathrm{Dom}(A) = \mathrm{set}_{ij}(B(i,j))$ &
$\forall_{ij}(Q(j)$ & $P(i,j) \rightarrow B(i,j)) \rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(\bigcap_{j,P(i,j)} A(i,j), Q(j)), D)$)

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Истинность третьего антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Переменные B, P, Q функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABDP}$(незавсобытия(A,D) & $\mathrm{Dom}(A)=\mathrm{set}_{ij}(B(i,j))$ & $\forall_j(P(j)\rightarrow B(i,j))\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_j(A(i,j),P(j)),D))$

$\forall_{ABDP}$(незавсобытия(A,D) & $\mathrm{Dom}(A)=\mathrm{set}_{ij}(B(i,j))$ & $\forall_i(P(i)\rightarrow B(i,j))\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_j(A(i,j),P(i)),D))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Истинность третьего устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

(i) Переход к полному семейству.

$\forall_{ABCP}$(незавсобытия$(B;A,C)\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(B(i),P(i));A,C))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная P функциональная, а B - обычная. Выражение A не содержит переменной B. Переменная i идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{BCP}$(незавсобытия$(B,C)\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(B(i),P(i)),C))$

Аналогично предыдущему.

(j) Объединение непересекающихся подмножеств.

$\forall_{ABCDj}(\neg(B(j))$ & незавсобытия$(\lambda_i(A(i),B(i)\ \vee\ i=j);C,D)\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(A(i),B(i));A(j);C,D))$

Переменные A,B функциональные. Истинность первого антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство, второй - обрабатывается проверочным оператором. Терм "отображение"в консеквенте идентифицируется с произвольным элементом конкатенации. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEfg}(\neg(f(i)-g(j)=0)$ & незавсобытия$(\lambda_k(A(k),\exists_i(k=f(i)$ & $B(i))\ \vee$ $\exists_j(k=g(j)$ & $C(j)));D,E)\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_i(A(f(i)),B(i));$ $\lambda_j(A(g(j)),C(j));D,E))$

Переменные f,g,B,C функциональные, переменная A - обычная. Истинность первого антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство, которой передаются дополнительные посылки $B(i),C(j)$. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEk}(\neg(B(k,j))$ & незавсобытия$(\lambda_{ij}(A(i,j),B(i,j)\ \vee\ i=k$ & $C(j));D,$ $E)\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_{ij}(A(i,j),B(i,j));\lambda_s(A(k,s),C(s));D,E))$

$\forall_{ABCDEk}(\neg(B(k,j))$ & незавсобытия$(\lambda_{ji}(A(j,i),B(i,j)\ \vee\ i=k$ & $C(j));D,$ $E)\rightarrow$ незавсобытия$(\lambda_{ji}(A(j,i),B(i,j));\lambda_s(A(s,k),C(s));D,E))$

Переменные B,C функциональные, переменная A - обычная. Истинность первого антецедента устанавливается задачей на доказательство, второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Термы "отображение"в консеквенте идентифицируются с произвольными элементами конкатенации. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

(k) Независимые серии событий.

$\forall_{ABPQRf}$(независерия$(\lambda_j(\lambda_i(A(i,j),P(i)),Q(j)),B)$ & $P(k) \to$ независобытия$(\lambda_k(A(k,f(k)),R(k)),B))$

Переменные f,P,Q,R функциональные. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство, которой передается дополнительная посылка $R(k)$. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABPQabn}$(независерия$(\lambda_j(\lambda_i(A(i,j),P(i)),Q(j)),B)$ & $\forall_k(k \in \{1,\dots,n\} \to Q(b(k)))$ & взаимнооднозначно$(\lambda_k(a(k),k \in \{1,\dots,n\})) \to$ независобытия$(\lambda_k(A(a(k),b(k)),k \in \{1,\dots,n\}),B))$

Переменные a,b,P,Q функциональные, переменная A - обычная. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Истинность второго и третьего антецедентов устанавливается при помощи задач на доказательство. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Указатели "развертка" определяют выписывание термов "отображение" в консеквенте и в четвертом антецеденте как конечных наборов, а кванторов общности во втором и третьем антецедентах - как конъюнкций. Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{ABCP}$(независерия(префикс$(A,B),C) \to$ независобытия$(\lambda_i(A(i),P(i)),C))$

Переменная P функциональная. Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Независимые группы событий.

$\forall_{ABCDEF}$(независгруппы(префикс(A,B), префикс$(C,D);E,F) \to$ независобытия$((A,C),F))$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем элементы A,B берутся на произвольной позиции наборов (которые могут быть заданы явно либо неявно), а сами эти наборы - произвольные операнды конкатенации. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(независгруппы(A,B) & семействоэлементов$(A,C) \to$ независобытия$(C,B))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(независгруппы$(((A),(B)),C) \to$ независобытия$((A,B),C))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Каждая общая переменная выражений A,B имеет такое вхождение хотя бы в одно из этих выражений, которое расположено внутри подтерма, имеющего своим заголовком символ, отличный от символов "объединение", "пересечение", "разность". Уровень срабатывания равен 4.

(m) Усмотрение зависимых событий.

$\forall_{ab}(\neg$(независобытия$(a,b)))$

Выражение a - набор, имеющий хотя бы два совпадающих разряда. Указатель "не" определяет немедленный выход из проверочного оператора по значению "ложь". Уровень срабатывания равен 1.

(n) Слой семейства.

$\forall_{ABCi}$(незавсобытия(префикс$(B, A), C) \rightarrow$ незавсобытия($(B,$ слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(C), i)), C)$)

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Подвыражение "слойсемейства(...)" идентифицируется с произвольным элементом пары. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCD}$(незавгруппы(D, C) & вложимыесемейства$(((B), A), D) \rightarrow$ незавсобытия($(B,$ слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(C), i)), C)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Подвыражение "слойсемейства(...)" идентифицируется с произвольным элементом пары. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCij}$(незавгруппы$((A, B), C) \rightarrow$ незавсобытия((слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(C), i),$ слойсемейства$(B,$ элемсобытия$(C), j)), C)$)

Антецедент идентифицируется с посылкой. Подвыражения "слойсемейства(...)" идентифицируются в произвольном порядке. Уровень срабатывания приема равен 3.

(o) Независимость событий, порожденных случайными потоками.

$\forall_{ABCDn}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow A(i) =$ прообраз(числособытий$(C(i), M), N)$) & $l(A) = n$ & незавгруппы$(C, D) \rightarrow$ незавсобытия(A, D))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Переменная A обычная. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(p) Использование независимости случайных величин.

$\forall_{ABCDE}$(незавслучвел(D, E) & включается$(\lambda_i(A(i), C(i)), D) \rightarrow$ незавсобытия(λ_i(прообраз$(A(i), B(i)), C(i)), E)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Переменные A, B, C функциональные. Уровень срабатывания равен 3.

6. Проверочный оператор "усмнезавгруппы".

Оператор проверяет утверждение "незавгруппы(A, B)", где A - семейство семейств вероятностного пространства B: события, полученные из событий различных семейств теоретико-множественными операциями, должны быть независимы.

(a) Подсемейство семейства независимых семейств.

$\forall_{ABCDab}$(незавгруппы(C, D) & включается$(A; B, C) \rightarrow$ незавгруппы$((A(a), B(b)), D)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Переменные A, B обычные. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(незавгруппы(A, C) & включается$(B, A) \rightarrow$ незавгруппы$(B, C))$

Аналогично предыдущему.

(b) Выделение объединения.

$\forall_{ABCDE}$(незавгруппы(префикс$((A, B; C), D), E) \rightarrow$
незавгруппы(префикс(префикс$(A \cup B, C), D), E))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения "$A \cup B$"и "префикс($A{\cup}B$,C)" идентифицируются с произвольными элементами соответствующих наборов. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCP}$(незавгруппы(префикс$(B, A), C) \rightarrow$
незавгруппы(префикс$(\bigcup_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Конечное объединение идентифицируется с произвольным элементом набора. Переменная P функциональная. Имеется посылка с заголовком "незавгруппы". Уровень срабатывания равен 1.

(c) Выделение пересечения.

$\forall_{ABCDE}$(незавгруппы(префикс$((A, B; C), D), E) \rightarrow$
незавгруппы(префикс(префикс$(A \cap B, C), D), E))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения "$A \cap B$"и "префикс($A{\cap}B$,C)" идентифицируются с произвольными элементами соответствующих наборов. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCP}$(незавгруппы(префикс$(B, A), C) \rightarrow$
незавгруппы(префикс$(\bigcap_{i,P(i)} B(i), A), C))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Конечное пересечение идентифицируется с произвольным элементом набора. Переменная P функциональная. Имеется посылка с заголовком "незавгруппы". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Семейство разностей.

$\forall_{ABCDEP}$(незавгруппы(префикс$((\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)); C), D), E) \rightarrow$
незавгруппы(префикс$((\lambda_i(A(i) \setminus B(i), P(i)); C), D), E))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные A, B, P функциональные. Описатель "отображение" в консеквенте идентифицируется с произвольным элементом набора. Переменная i идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABDEP}$(незавгруппы(префикс$((\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i))), D), E) \rightarrow$
незавгруппы(префикс$((\lambda_i(A(i) \setminus B(i), P(i))), D), E))$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABCDE}$(незавгруппы(префикс($A, B; C, D$), E) $\rightarrow$
незавгруппы(префикс($A \setminus B, C$), D), E)

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражения "$A \setminus B$"и "префикс($A \setminus B$,C)" идентифицируются с произвольными элементами соответствующих наборов. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Семейство объединений.

$\forall_{ABCDEP}$(незавгруппы(префикс(($\lambda_j(A(j), \exists_i(B(i)\ \&\ P(i,j)))$; C), D), E) $\rightarrow$
незавгруппы(префикс(($\lambda_i(\bigcup_{j,P(i,j)} A(j), B(i))$; C), D), E))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные A, B, P функциональные. Описатель "отображение" идентифицируется с произвольным операндом конкатенации, а сама конкатенация - с произвольным элементом внешнего набора. Переменная i идентифицируется с кванторной приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Объединение подсемейств.

$\forall_{ABCDEF}$(незавгруппы(префикс(($\lambda_i(A(i), B(i)\ \vee\ C(i))$; D), E), F) $\rightarrow$
незавгруппы(префикс(($\lambda_i(A(i), B(i))$; $\lambda_j(A(j), C(j))$; D), E), F))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные A, B, C функциональные. Описатель "отображение" идентифицируется с произвольным операндом конкатенации, а сама конкатенация - с произвольным элементом внешнего набора. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Переход к полному семейству.

$\forall_{ABCD}$(незавгруппы(префикс(A, C), D) $\rightarrow$
незавгруппы(префикс($\lambda_i(A(i), B(i)), C$), D))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная B функциональная, а переменная A - обычная. Описатель "отображение" идентифицируется с произвольным элементом набора. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Использование независимости событий.

$\forall_{ABCk}(\neg(B(k))$ & незавсобытия(A, C) $\rightarrow$
незавгруппы(($\lambda_i(A(i), B(i)), (A(k))), C$))

Истинность первого антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используется комментарий, блокирующий встречное обращение. Переменная B функциональная, а переменная A - обычная. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABC}$(незавсобытия(префикс(B, A), C) $\rightarrow$ незавгруппы(($A, (B)), C$))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используется комментарий, блокирующий встречное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

(i) Слои семейства.

$\forall_{ABCDEi}$(незавгруппы(префикс((A; B), D), E) $\rightarrow$ незавгруппы(префикс(префикс(слойсемейства(A, элемсобытия(E), i), B), D), E))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение "слойсемейства" идентифицируется с произвольным элементом набора, а сам этот набор - с произвольным элементом внешнего набора. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Вложимые семейства.

$\forall_{ABC}$(незавгруппы(A, B) & вложимыесемейства(C, A) $\rightarrow$ незавгруппы(C, B))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(k) Группы событий, порожденных случайными потоками.

$\forall_{ABCDn}$($\forall_i$($i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow A(i) =$ прообраз(числособытий($C(i)$, M), N)) & $l(A) = n$ & незавгруппы((C; B), D) $\rightarrow$ незавгруппы(префикс(A, B), D))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Элемент A идентифицируется с произвольным элементом набора. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDn}$($\forall_i$($i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow A(i) =$ прообраз(числособытий($C(i)$, M), N)) & $l(A) = n$ & незавгруппы((C; B; E), D) $\rightarrow$ незавгруппы((префикс(A, B); E), D))

Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 1.

7. Проверочный оператор "усмнезавсерия".

Оператор проверяет утверждение "незавсерия(A, B)", где A - семейство семейств $A(i)$ событий вероятностного пространства B, имеющих одну и ту же область определения D. Для каждого d из D это семейство определяет группу событий $A(i)(d)$, причем любые события S_1, S_2, построенные при помощи теоретико - множественных операций из событий любых двух различных таких групп, должны быть независимы.

(a) Переход к полным наборам.

$\forall_{ABCD}$(незавсерия((A, B), D) $\rightarrow$ незавсерия(($\lambda_i(A(i), C(i)), \lambda_j(B(j), C(j))$), D))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная C, а переменные A, B обычные. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Включение серий.

$\forall_{ABC}$(незавсерия(A, C) & включается(B, A) $\rightarrow$ незавсерия(B, C))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Серии, порождаемые независимыми случайными величинами.

$\forall_{ABCmn}$(незавслучвел(A,B) & $l(A)=n$ & $\forall_i(i\in\{1,\dots,m\}\to$
$\forall_j(j\in\{i+1,\dots,m\}\to$ непересек$(C(i),C(j))))\to$
незавсерия$(\lambda_j(\lambda_i($прообраз$(A(i),C(j)),i\in\{1,\dots,n\}),j\in\{1,\dots,m\}),B))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй выделен указателем "идентификатор", третий обрабатывается проверочным оператором. Переменная C функциональная. Переменные m,n идентифицируются с натуральными константами. Указатели "развертка" определяют идентификацию внешнего "отображения" в консеквенте с конечным набором, а также сведение кванторных импликаций в третьем антецеденте к конъюнкциям. Уровень срабатывания равен 1.

8. Проверочный оператор "усмуслнезавис".

Оператор проверяет утверждение "услнезавис(A,B,C)", означающее, что каждое из событий семейства A является подсобытием события B, причем события этого семейства в сужении вероятностного пространства C на событие B являются независимыми.

(a) Включение в явно указанный список независимых событий.

$\forall_{ABC}$(услнезавис(A,D,C) & включается(A,D,C) & включается$(B,A)\to$
услнезавис$(B,D,C))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Независимые серии событий.

$\forall_{ABCDEij}$(услнезавсерия$(((A,B);D),E,C)$ & $\neg(i=j)\to$
услнезавис$((A(i),B(j)),E,C))$

$\forall_{ABCDij}$(услнезавсерия(префикс$(A,B),D,C)$ & $\neg(i=j)\to$
услнезавис$((A(i),A(j)),D,C))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, истинность второго устанавливается при помощи задачи на доказательство. Переменные A,B обычные. В первом приеме пара элементов A,B конечного набора, а во втором - элемент A идентифицируются на произвольных позициях. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 3.

(c) Семейство разностей.

$\forall_{ABDP}$(услнезавсерия$((\lambda_i(A(i),P(i)),\lambda_i(B(i),P(i))),C,D)\to$
услнезавис$(\lambda_i(A(i)\setminus B(i),P(i)),C,D))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменные A,B,P функциональные. Имеется посылка с заголовком "услнезавсерия".

$\forall_{ABDEP}$(услнезавис$((\lambda_i(A(i),P(i));\lambda_i(B(i),P(i))),E,D)\to$
услнезавис$(\lambda_i(A(i)\setminus B(i),P(i)),E,D))$

$\forall_{ABCDEP}$(услнезавис$((\lambda_i(A(i),P(i));\lambda_i(B(i),P(i));C),E,D)\to$
услнезавис$((\lambda_i(A(i)\setminus B(i),P(i));C),E,D))$

Аналогично предыдущему, но требование о посылке с заголовком "услнезавсерия" отброшено.

(d) Семейство пересечений.

$\forall_{ABDEP}$(услнезавис$((\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i))), E, D) \to$ услнезавис$(\lambda_i(A(i) \cap B(i), P(i)), E, D))$

$\forall_{ABCDEP}$(услнезавис$((\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)); C), E, D) \to$ услнезавис$((\lambda_i(A(i) \cap B(i), P(i)); C), E, D))$

Аналогично предыдущим двум приемам.

(e) Семейство объединений.

$\forall_{ABDEP}$(услнезавис$((\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i))), E, D) \to$ услнезавис$(\lambda_i(A(i) \cup B(i), P(i)), E, D))$

$\forall_{ABCDEP}$(услнезавис$((\lambda_i(A(i), P(i)); \lambda_i(B(i), P(i)); C), E, D) \to$ услнезавис$((\lambda_i(A(i) \cup B(i), P(i)); C), E, D))$

Аналогично предыдущему.

(f) Выделение пересечения.

$\forall_{ABCDE}$(услнезавис$(A, B; C, E, D) \to$ услнезавис(префикс$(A \cap B, C), E, D))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Пересечение идентифицируется с произвольным элементом набора. Выражение C не содержит подвыражений A, B. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Выделение объединения.

$\forall_{ABCDE}$(услнезавис$(A, B; C, E, D) \to$ услнезавис(префикс$(A \cup B, C), E, D))$

Аналогично предыдыщему.

(h) Выделение разности.

$\forall_{ABCDE}$(услнезавис$(A, B; C, E, D) \to$ услнезавис(префикс$(A \setminus B, C), E, D))$

Аналогично предыдыщему.

(i) Относительно независимые семейства событий.

$\forall_{ABCk}$(относитнезавис$(A, B, C) \to$ услнезавис$(A,$ слойсемейства$(B,$ элемсобытия$(C), k), C))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

9. Проверочный оператор "усмуслнезавсерия".

Оператор проверяет утверждение "услнезавсерия(A, B, C)", где A есть семейство семейств $A(i)$ событий вероятностного пространства C, имеющих одну и ту же область определения D. Для каждого d из D это семейство определяет группу событий $A(i)(d)$, причем любые два события, построенные теоретико-множественными операциями из событий двух таких различных групп, условно независимы относительно события b.

(a) Переход к полным наборам.

$\forall_{ABCDE}$(услнезавсерия$((A,B),E,D)\to$ услнезавсерия$((\lambda_i(A(i),C(i)),$ $\lambda_j(B(j),C(j))),E,D))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Переменная C функциональная; переменные A,B обычные. Уровень срабатывания равен 2.

(b) Включение серий.

$\forall_{ABCD}$(услнезавсерия(A,D,C) & включается$(B,A)\to$ услнезавсерия$(B,D,C))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Несовместные события

1. Переход к несовместным событиям.

$\forall_{ABCPQ}(A\subseteq B\to$ вероятность(set$_x(x\subseteq B$ & $x-$set & $\neg$(непересек$(x,A))$ & $P(x))$ $\cup$ set$_x(x-$ set & $x\subseteq B$ & $Q(x)),C)=$ вероятность(set$_x(x\subseteq B$ & $x-$ set & $\neg$(непересек$(x,A))$ & $P(x)),C)+$вероятность(set$_x(x-$set & $x\subseteq B\backslash A$ & $Q(x)),C))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные P,Q функциональные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Вероятность объединения несовместных событий.

$\forall_{ABCn}$(несовместны$(\lambda_i(A(i),B(i)),C)\to$ вероятность$(\bigcup_{i,B(i)}A(i),C)=$ $\sum_{i,B(i)}$ вероятность$(A(i),C))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A,B функциональные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию конечного объединения через равенство в контексте. Переменная i идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABC}$(функционально(set$_{xn}(B(x,n)$ & $A(x)$ & $n-$ натуральное$))\to$ вероятность(set$_x(A(x)$ & $\exists_n(B(x,n)$ & $n-$ натуральное$)),C)=$ $\sum_{n=1}^{\infty}$ вероятность(set$_x(A(x)$ & $B(x,n)),C))$

Напомним, что условие "функционально(X)" истинно, если X есть множество наборов одинаковой длины, не содержащее двух различных наборов, у которых совпадают все соответствующие разряды, кроме последних.

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A,B функциональные. Истинность антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 3.

3. Пересечение несовместных событий.

$\forall_{ABCDE}$(несовместны$((A,B),D)\to$ вероятность$(A\cap B\cap C\cup E,D)=$ вероятность$(E,D))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ABCD}$(несовместны$((A, B), D) \rightarrow$ вероятность$(A \cap B \cap C, D) = 0)$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

4. Расщепление события.

   $\forall_{ABCDEab}$(несовместны$((B, E), D)$ & $A \subseteq B \cup E$ &
   услвероятн$(A \cap B, C, D) = a$ & услвероятн$(A \cap E, C, D) = b \rightarrow$
   услвероятн$(A, C, D) = a + b)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Выражения a, b не содержат неизвестных. Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, причем введен сильный ограничитель трудоемкости. Выражение "услвероятн(A, C, D)" входит в некоторую посылку и пока не известно. Уровень срабатывания равен 3.

5. Проверочный оператор "усмнесовместны".

   (a) Непосредственное усмотрение.

   $\forall_{ABC}$(несовместны$(A, C) \rightarrow$ несовместны$(\lambda_i(A(i), B(i)), C))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменная B функциональная, а переменная A обычная. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Семейство пересечений с несовместными событиями.

   $\forall_{ABCD}$(несовместны(A, C) & $\forall_i(D(i) \rightarrow i \in \mathrm{Dom}(A)) \rightarrow$
   несовместны$(\lambda_i(A(i) \cap B(i), D(i)), C))$

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, истинность второго устанавливается при помощи задачи на доказательство. Переменные B, D функциональные, переменная A обычная. Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Подсемейство семейства несовместных событий.

   $\forall_{ABCn}(l(A) = n$ & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & несовместны$(A, C) \rightarrow$
   несовместны$(\lambda_i(A(i), B(i)), C))$

   Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. При этом вводится дополнительная посылка "$B(i)$". Переменная B функциональная, переменная A - обычная. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABCD}$(несовместны$((A, B; C), D) \rightarrow$ несовместны$((A, B), D))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой, причем элементы A, B идентифицируются с произвольными элементами набора. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDE}$(несовместны(префикс$(A,B),C)$ & несовместны(префикс(A,E), $C)\rightarrow$ несовместны(префикс$(A\cap D,E),C)$)

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражения A и $A\cap D$ идентифицируются с произвольными элементами наборов. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(несовместны(A,B) & включается$(C,A)\rightarrow$ несовместны(C,B))

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABPQmnk}(P(k)$ & $Q(m)$ & $Q(n)$ & $\neg(m=n)$ & $\forall_i(P(i)\rightarrow$ несовместны$(\lambda_j(A(i,j),Q(j)),B))\rightarrow$ несовместны$((A(k,m),A(k,n)),B))$

Пятый антецедент идентифицируется с посылкой, истинность первых четерых устанавливается при помощи задач на доказательство. Переменные P,Q функциональные, переменная A обычная. Уровень срабатывания равен 3.

(d) Семейство попарно непересекающихся событий.

$\forall_{ABC}$(непересек$(A(i),A(j))\rightarrow$ несовместны$(\lambda_i(A(i),B(i)),C)$)

Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем вводятся дополнительные посылки "$B(i),B(j),\neg(i=j)$". Переменные A,B функциональные. Прием выбирает вспомогательную переменную j. Предварительно проверяется, что не усматривается утверждение "число(i)", даже при дополнительной посылке $B(i)$. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}(i-$ число & непересек$(A(i),A(j))\rightarrow$ несовместны$(\lambda_i(A(i),B(i)),C)$)

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Первому из них передается дополнительная посылка $B(i)$, второму - посылки $B(i),B(j)$, $0<j-i$. В качестве j выбирается новая переменная. Переменные A,B функциональные. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCD}(A(i)\subseteq B(j)\rightarrow$ несовместны$(\lambda_i(A(i)\setminus B(i),C(i)),D)$)

Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используются дополнительные посылки $C(i),C(j),\neg(i=j)$. В качестве j выбирается новая переменная. Переменные A,B,C функциональные. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABC}$(несовместны(префикс$(A,B),C)$)

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Семейство пересечений для серий несовместных событий.

$\forall_{APQ}(\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{set}_i(P(i))$ & непересек$(A(i,f(j)),A(i,f(k)))\rightarrow$ несовместны$(\lambda_f(\bigcap_{i,P(i)}A(i,f(i)),Q(f)),B)$)

Истинность антецедентов устанавливается с помощью задач на доказательство. При этом первому антецеденту передается дополнительная посылка $Q(f)$, а второму - посылки $P(i),P(j),P(k),\neg(f(i)=f(j)),Q(f)$. Переменные P,Q функциональные, переменная A - обычная. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Одноэлементный набор.

$\forall_{AB}$(несовместны$((A), B)$)

Уровень срабатывания равен 1.

(g) Усмотрение из кванторной импликации.

$\forall_{ABCDm}(\forall_i(D(i) \to$ несовместны$(\lambda_j(A(i,j), B(j)), C))$ & $D(m) \to$ несовместны$(\lambda_k(A(m,k), B(k)), C))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, истинность второго устанавливается при помощи задачи на доказательство. Переменные B, D функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

(h) Двухпараметрическое семейство пересечений элементов семейств несовместных событий.

$\forall_{ABCPQR}$(несовместны$(\lambda_i(A(i), P(i)), C)$ & несовместны$(\lambda_j(B(j), Q(j)), C) \to$ несовместны$(\lambda_{ij}(A(i) \cap B(j), P(i)$ & $Q(j)$ & $R(i,j)), C))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Переменные A, B, P, Q, R функциональные. Выражение $P(i)$ идентифицируется с конъюнкцией всех членов, содержащих i и не содержащих j, а выражение $Q(j)$ - с конъюнкцией всех членов, содержащих j и не содержащих i. Уровень срабатывания равен 2.

(i) Семейство слоев.

$\forall_{ABCP}$(несовместны$(\lambda_i($слойсемейств$(A, B, i), P(i)), C))$

Переменная P функциональная. Переменная i идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания приема равен 1.

5.4 Повторение опытов

Опыты с двумя исходами

1. Равновероятные независимые события.

   $\forall_{ABinp}(l(A) = n$ & незавсобытия(A, B) & $j \in \{0, \dots, n\}$ & вероятность$(A(k), B) = p \to$ вероятность(слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), j),$ $B) = C_n^j p^j (1-p)^{n-j})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". В качестве k прием выбирает новую переменную. Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором общей стандартизации, а левая часть четвертого - задачей на преобразование, имеющей цели "упростить", "услвероятн" и "(значение k)". Последняя цель инициирует вывод следствий из кванторных посылок, имеющих подвыражения вида "$X(k)$. Задаче передается дополнительная посылка "$k \in \{1, \dots, n\}$". Проверяется, что результат p не содержит переменной k. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCinp}(l(A) = n$ & услнезавис(A, C, B) & $j \in \{0, \dots, n\}$ & услвероятн$(A(k), C, B) = p \rightarrow$ услвероятн(слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), j),$ $C, B) = C_n^j p^j (1-p)^{n-j})$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{ABinp}(l(A) = n$ & независобытия(A, B) & $j \in \{0, \dots, n\}$ & $\forall_k(k \in \{1, \dots, n\} \rightarrow$ вероятность$(A(k), B) = p)$ & вероятность$(A(1), B) = p \rightarrow$ вероятность(слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), j), B) = C_n^j p^j (1-p)^{n-j})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Пятый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. После этого четвертый антецедент, выделенный указателем "развертка", идентифицируется с группой посылок. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". После обработки его левой части нормализатором общей стандартизации возникает натуральная константа n. Второй и третий антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDjmn}(l(A) = n$ & $j \in \{0, \dots, n\}$ & незавсерия$((A, D), B)$ & $l(D) = n$ & вероятность$(A(m), B) = p$ & вероятность$(D(m), B) = q$ & непересек$(A(m),$ $D(m)) \rightarrow$ вероятность(слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B) \setminus \bigcup_{i=1}^n D(i), j), B) =$ $C_n^j p^j (1-p-q)^{n-j})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная D обычная. Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Первый антецедент, а также антецеденты с четвертого по шестой выделены указателем "идентификатор". Левые части пятого и шестого антецедентов упрощаются задачами на преобразование, которым передается дополнительная посылка "$m \in \{1, \dots, n\}$". Результаты p и q не содержат переменной m. Второй и седьмой антецеденты обрабатываются проверочными операторами, причем в последнем случае используется та же дополнительная посылка. Уровень срабатывания равен 2.

2. Две независимых серии событий.

   $\forall_{ABCiknpq}($незавсерия$((A, B), C)$ & $l(A) = n$ & $l(B) = n$ & $i \in \{0, \dots, 2n\}$ & вероятность$(A(k), C) = p$ & услвероятн$(B(k),$ элемсобытия$(C) \setminus A(k), C) = q$ & непересек$(A(k), B(k)) \rightarrow$ вероятность(слойсемейства$(A; B,$ элемсобытия$, i), C) =$ $\sum_{j=0}^{i}(C_n^j p^j (1-p)^{n-j} C_n^{i-j} q^{i-j} (1-q)^{n-i}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Второй, третий, пятый и шестой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левые части пятого и шестого антецедентов упрощаются задачами на преобразование, которым передается дополнительная посылка $k \in \{1, \dots, n\}$. Результаты p, q не содержат переменной k. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Истинность седьмого антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство, которой передается та же дополнительная посылка. Уровень срабатывания равен 4.

3. Различные вероятности событий.

$\forall_{ABabknp}$(незавсобытия(A, B) & $l(A) = n$ & λ_i(вероятность$(A(i), B), i \in \{1, \ldots, n\}) = p$ & $\prod_{i=1}^{n}(1 - p(i) + p(i)x) = ax^k + b \rightarrow$ вероятность(слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), k), B) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - выделены указателем "идентификатор". Левая часть второго антецедента обрабатывается нормализатором общей стандартизации, результатом служит натуральная константа n. Описатель "отображение" в левой части второго антецедента выписываеся в виде конечного набора. Предварительно вероятности упрощаются задачей на преобразование, причем результаты такого упрощения суть десятичные константы. Конечное произведение в левой части последнего антецедента выписывается как обычное, после чего обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". Переменная k идентифицируется с натуральной константой, коэффициент a - с десятичной константой, возможно, равной 0. В качестве x выбирается новая переменная. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABabnp}$(незавсобытия(A, B) & $l(A) = n$ & λ_i(вероятность$(A(i), B), i \in \{1, \ldots, n\}) = p$ & $\prod_{i=1}^{n}(1 - p(i) + p(i)x) = a + b \rightarrow$ вероятность(слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), 0), B) = a)$

Аналогично предыдущему. Переменная a идентифицируется с суммой всех слагаемых, представляющих собой десятичные константы. Уровень срабатывания прежний.

$\forall_{ABfmnp}$(вероятность$(A(i, j), B) = p$ & незавсерия$(\lambda_j(\lambda_i(A(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}),$ $j \in \{1, \ldots, m\}), B)$ & кортеж$(f, n, \{1, \ldots, m\}) \rightarrow$ вероятность(слойсемейства$(\lambda_j(\bigcup_{i,j=f(i),i\in\{1,\ldots,n\}} A(i, j), j \in \{1, \ldots, m\}),$ элемсобытия$(B), k), B) =$ версочетания(комплект$(f), p, k))$

Выражение "комплект(f)" обозначает набор натуральных чисел, представляющих собой упорядоченные по невозрастанию кратности элементов конечного семейства f. Выражение "версочетания(a, b, c)" обозначает вероятность одновременного выполнения ровно c независимых событий из списка, длина которого равна длине набора целых неотрицательных чисел a, а вероятность события списка, соответствующего числу n - вероятности объединения n независимых событий, каждое из которых происходит с вероятностью b.

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, первый - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование, которой передаются дополнительные посылки "$i\{1, \ldots, n\}$", "$j \in \{1, \ldots, m\}$". Результат p не содержит переменных i, j. Переменная A обычная. Уровень срабатывания равен 2.

4. Переход к дополнительным слоям.

$\forall_{ABkn}(l(A) = n \rightarrow$ вероятность$(\bigcup_{i=k}^{n}$ слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), i), B) =$ $1 - \sum_{i=1}^{n}$ вероятность(слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), i - 1), B))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная k идентифицируется с натуральной константой, меньшей 3. Конечная сумма выписывается как обычная. Уровень срабатывания равен 1.

5. Вероятность нулевого слоя.

$\forall_{ABn}$(вероятность(слойсемейства(A, элемсобытия(B), 0), B) =
1 − вероятность($\bigcup_{i=1}^{n} A(i), B$))

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение A имеет заголовок "отображение". Уровень срабатывания равен 2.

6. Групповые испытания.

$\forall_{ABCknpq}$(несовместны($\lambda_j(B(i,j), j \in \{1,\ldots,k\}), C$) &
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to A(i) = \bigcup_{j=1}^{k} B(i,j))$ & вероятность($A(i), C$) = p &
услвероятн($B(i,j), A(i), C$) = q & незавсерия($\lambda_i(\lambda_j(B(i,j), j \in \{1,\ldots,k\})$,
$i \in \{1,\ldots,n\}), C$) & $\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to$ услнезавис($\lambda_j(B(i,j), j \in \{1,\ldots,k\})$,
$A(i), C$)) → вероятность(слойсемейства($\lambda_j(\bigcup_{i=1}^{n} B(i,j), j \in \{1,\ldots,k\})$,
элемсобытия(C), 1), C) = $k \sum_{m=1}^{n} C_n^m (pq)^m (1-p)^{n-m}$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент, а также пятый и шестой антецеденьы идентифицируются с утверждениями из контекста. Переменные A, B функциональные. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому передается дополнительная посылка "$i \in \{1,\ldots,n\}$". Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части упрощаются задачами на преобразование, которым передаются дополнительные посылки "$i \in \{1,\ldots,n\}$" и "$j \in \{1,\ldots,k\}$" (последняя - только для четвертого антецедента). Выражение p не содержит переменной i, а выражение q - переменных i, j. Уровень срабатывания равен 3.

7. Обращение к нормализатору "нормверсочетания".

Чтобы вычислить значение выражения "версочетания(...)", вводимого приведенным выше приемом, используется нормализатор "нормверсочетания". Обращение к нему выполняется следующим приемом:

$\forall_{abip}$(b = версочетания(a, p, i) → версочетания(a, p, i) = b)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором. Проверяется, что выражение b не содержит символа "версочетания". Уровень срабатывания равен 0.

8. Нормализатор "нормверсочетания".

   (a) Пустой набор.

   $\forall_a$(версочетания(пустоеслово, a, 0) = 1)

   Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(0 < b \to$ версочетания(пустоеслово$, a, b) = 0)$

Переменная b идентифицируется с натуральной константой. Антецедент выделен указателем "программа". Уровень срабатывания равен 1.

(b) Шаг рекурсии.

$\forall_{abip}$(версочетания(префикс$(a, b), p, i) = (1 - (1 - p)^a)$версочетания$(b, p,$ $i - 1) + (1 - p)^a$версочетания$(b, p, i))$

Переменная a идентифицируется с натуральной константой. Выражения "версочетания(...)" в заменяющем выражении обрабатываются тем же нормализатором. Прочие подвыражения заменяющего выражения обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Отрицательное число событий.

$\forall_{aip}(i < 0 \to$ версочетания$(a, p, i) = 0)$

Переменная i идентифицируется с целочисленной константой. Антецедент выделен указателем "программа". Уровень срабатывания равен 1.

Опыты с несколькими исходами

1. Равновероятные события.

   $\forall_{ABNkmnpq}(l(A) = m$ & незавсерия(A, B) & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \to l(A(i)) = n)$ & разбиения(A) & $p = \lambda_i$(вероятность$(A(i)(j), B), i \in \{1, \ldots, m\})$ & $k = \sum_{i=1}^{m} N(i)$ & $q = \sum_{i=1}^{m} p(i) \to$ вероятность(слойсемейств$(A,$ элемсобытия$(B), N), B) =$ $n!(1 - q)^{n-k} \prod_{i=1}^{m} p(i)^{N(i)}/((n - k)! \prod_{i=1}^{m} N(i)!))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения A, N имеют заголовок "набор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "$l(b) = n$", где b - подвыражение выражения A. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", причем m - натуральная константа. Второй и третий антецедент идентифицируются с утверждениями из контекста; указатель "развертка" определяет идентификацию третьего антецедента с группой равенств. Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Он означает, что A - семейство семейств множеств, имеющих одну и ту же область определения, причем для каждого элемента этой области определения соответствующие множества попарно не пересекаются. Последние три антецедента выделены указателем "идентификатор". Указатели "развертка" определяют выписывание отображения в пятом антецеденте как конечного набора, а конечных сумм и произведений - как обычных. Вероятности в пятом антецеденте вычисляются при помощи задач на преобразование. Выражение p не содержит переменной j. Уровень срабатывания равен 2.

2. Различные вероятности событий.

   $\forall_{ABNabmnpuz}(l(A) = m$ & незавсерия(A, B) &
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \to l(A(i)) = n)$ & разбиения(A) &
   $b = \prod_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}($вероятность$(A(i)(j), B)(z(i) - 1)) + 1)$ & смкоэфф$(b, z, N, a) \to$
   вероятность(слойсемейств$(A,$ элемсобытия$(B), N), B) = a)$

Выражение "слойсемейств(X, Y, Z)" определено для набора $X = (X_1, \dots, X_n)$ семейств множеств, имеющих общую область определения и для каждого элемента этой области образующих n попарно непересекающихся подмножеств множества Y; $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ - набор целых неотрицательных чисел. Это выражение обозначает множество всех элементов множества Y, принадлежащих ровно Z_1 множествам семейства X_1, ровно Z_2 множествам семейства X_2, и т.д. вплоть до n.

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения A, N имеют заголовок "набор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "$l(d) = n$", где d - подтерм терма A, n - натуральная константа. Второй и третий антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, причем указатель "развертка" определяет идентификацию третьего антецедента с группой равенств. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", четвертый - обрабатывается проверочным оператором. Переменная m идентифицируется с натуральной константой. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его конечные сумма и произведение выписываются как обычные; предварительно вероятности вычисляются вспомогательными задачами на преобразование. Сомножители внешнего произведения правой части обрабатываются нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". В качестве z прием выбирает набор новых переменных, имеющий длину m. Последний антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "смкоэфф". Входными данными служат набор натуральных чисел N, набор переменных z и выражение b, определяющее, после раскрывания скобок, многочлен от этих переменных. Синтезатор вычисляет коэффициент a одночлена, соответствующего степеням N переменных z. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABNabmnpuz}(l(A) = m \ \& \ \text{незавсерия}(A, B) \ \&$
$\forall_i(i \in \{2, \dots, m\} \to l(A(i)) = n) \ \& \ \text{разбиения}(A) \ \&$
$b = \prod_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}(\text{вероятность}(A(i)(j), B)(z(i) - 1)) + 1) \ \& \ \text{смкоэфф}(b, z, N, a) \ \&$
$l(A(1)) = n \to \text{вероятность}(\text{слойсемейств}(A, \text{элемсобытия}(B), N), B) = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения A, N имеют заголовок "набор". Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Первый, третий, пятый и седьмой антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть пятого антецедента обрабатывается так же, как и выше. Второй и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами, шестой - пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 3.

5.5 Случайные величины

Простейшая стандартизация случайной величины

1. Переход к сумме отображений.

   $\forall_{fgP}(\lambda_x(f(x) + g(x), P(x)) = \lambda_x(f(x), P(x)) + \lambda_x(g(x), P(x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки - равенства $t = R$, причем данное подвыражение расположено внутри R, а t - случайная величина, для которой в задаче рассматривается некоторая численная либо функциональная характеристика - математическое ожидание, дисперсия, ряд распределения либо функция распределения. Переменные f, g, P

функциональные. Знак сложения в правой части консеквента обозначает символ "плюсфунк". Переменная x идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Уровень срабатывания равен 2.

2. Вынесение минуса из-под описателя "отображение".

   $\forall_{fP}(\lambda_x(-f(x),P(x)) = -\lambda_x(f(x),P(x)))$

   Аналогично предыдущему. В правой части равенства используется символ "минусфунк".

Приемы, связанные с функцией распределения

1. Известен ряд распределения.

   $\forall_{AXabcdn}(\text{рядраспред}(X,A) = \text{таблица}(\{;a\})\ \&\ \text{упорядтаблица}(a,b)\ \&$
   $b = \lambda_i(c(i) \mapsto d(i), i \in \{1,\ldots,n\}) \to \text{функраспред}(X,A) =$
   $\text{таблица}(\{\text{конст}((-\infty,c(1)),0), \text{конст}((c(n),\infty),1); \lambda_i(\text{конст}((c(i),c(i+1)],$
   $\sum_{j=1}^{i} d(j)), i \in \{1,\ldots,n-1\}\})\}))$

   Утверждение "упорядтаблица(a,b)" означает, что a есть набор функций, определенных каждая в единственной точке, а b - набор этих же функций, переупорядоченный по неубыванию их точек определения. Запись "$p \mapsto q$" обозначает функцию, определенную в единственной точке p и принимающую в ней значение q. Заметим, что формульный редактор прорисовывает ее стрелку несколько иначе - так же, как импликацию, но слева и справа оставляются пробелы.

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "функраспред(X,A)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается пакетным синтезатором, выполняющим переупорядочение. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатели "развертка" определяют идентификацию и выписывание термов "отображение" как конечных наборов, а также выписывание конечной суммы как обычной. Переменные c, d функциональные. Выведенное утверждение сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{PXan}(\text{рядраспред}(X,P) = \lambda_i(a(i), i - \text{целое}\ \&\ n \le i) \to \text{функраспред}(X,P) =$
   $\lambda_x(\sum_{j=n}^{-[x]-1} a(j), x - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "функраспред(X,P)". Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменная a функциональная. Уровень срабатывания равен 5.

2. Известна плотность распределения.

   $\forall_{ABfgh}(\text{плотнраспред}(A,B) = \lambda_t(f(t),h(t))\ \&\ g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \to$
   $\text{функраспред}(A,B) = \lambda_t(g(t), t - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "функраспред(A,B)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, правая часть которой не содержит неизвестных, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается при помощи задачи на преобразование, которой передается допоонительная посылка "число(t)". Отсутствует посылка вида "функраспред$(A,B) = C$", где C не содержит неизвестных. Переменные f, g, h функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

3. Вычисление вероятности попадания случайной величины на заданный промежуток.

   $forall_{ABabcdf}$(функраспред$(A,B) = \lambda_t(f(t), t -$ число$) \rightarrow$
   вероятность(прообраз$(A,[a,b]),B) = f(b) - f(a))$

   Промежуток рассматривается с произвольными типами концов. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется в задаче на описание либо на исследование. Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем правая часть не содержит неизвестных. Переменная f функциональная. Задача имеет посылку вида "плотнраспред$(A,B) = C$". Уровень срабатывания приема равен 3.

4. Ориентация равенства, определяющего функцию распределения случайной величины.

   $\forall_{abc}(b =$ функраспред$(a,c) \leftrightarrow$ функраспред$(a,c) = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение b не содержит символа "функраспред". Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с плотностью распределения

1. Прибавление константы к случайной величине.

   $\forall_{ABCa}$(плотнраспред$(A,C) = \lambda_t(f(t), t -$ число$)$ &
   $B = A + \lambda_x(a, x \in$ элемсобытия$(C)) \rightarrow$ плотнраспред$(B,C) =$
   $\lambda_t(f(t-a), t -$ число$))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками, причем переменная f функциональная. Отсутствует посылка вида "плотнраспред$(B,C) =$ отображение$(\ldots)$". Уровень срабатывания равен 2.

2. Определение неизвестных параметров плотности распределения.

   $\forall_{BXfg}$(случвеличина(X,B) & плотнраспред$(X,B) = \lambda_x(f(x), g(x)) \rightarrow$
   $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем переменные f, g функциональные. Выражение $f(x)$ содержит неизвестные. В нем отсутствуют невырожденные числовые атомы. Уровень срабатывания равен 1.

3. Вычисление плотности распределения по известной функции распределения.

   $\forall_{AXab}$(функраспред$(X,A) = \lambda_x(a(x), x -$ число$)$ & $b(x) = da(x)/dx \rightarrow$
   плотнраспред$(X,A) = \lambda_x(b(x), x -$ число$))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Переменные a, b функциональные, причем $b(x)$ не содержит символа "производная". Отсутствует посылка вида "плотнраспред$(X,A) =$ отображение$(\ldots)$". Уровень срабатывания равен 2.

4. Вычисление вероятности попадания случайной величины на заданный промежуток.

   $\forall_{ABabfgkl}$(плотнраспред$(A, B) = \lambda_x(f(x), g(x)) \rightarrow$
   вероятность(прообраз$(A, [a, b]), B) = \int_a^b f(x)dx$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменные f, g функциональные. Отсутствует посылка вида "функраспред$(A, B) =$ ". Уровень срабатывания равен 4.

5. Ориентация равенства, определяющего плотность распределения случайной величины.

   $\forall_{abc}(b =$ плотнраспред$(a, c) \leftrightarrow$ плотнраспред$(a, c) = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Выражение b не содержит символа "плотнраспред". Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с рядом распределения

1. Случайная величина, принимающая два значения.

   $\forall_{APabp}(\neg(a - b = 0)$ & $B =$ элемсобытия(A) & $X = \lambda_x((a$ при $P(x),$ иначе $b),$
   $x \in B)$ & $p =$ вероятность$(\mathrm{set}_x(P(x)), A) \rightarrow$ рядраспред$(X, A) =$
   таблица$(\{a \mapsto p, b \mapsto 1 - p\}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Второй и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Вероятность вычисляется при помощи задачи на преобразование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение вида $f(X, \ldots, A)$, где f - символ из списка "рядраспред", "функраспред", "матожидание", "дисперсия", "средквадроткл", "начмомент", "центрмомент". Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

2. Случайная величина равна мощности подмножества элементов, находящихся в заданном отношении с точкой вероятностного пространства.

   $\forall_{ABPXn}(\mathrm{card}A = n$ & $X = \lambda_x(\mathrm{card}(\mathrm{set}_y(y \in A$ & $P(x, y))), x \in$ элемсобытия$(B)) \rightarrow$
   рядраспред$(X, B) =$ таблица$(\{; \lambda_i(i \mapsto$ вероятность$(\mathrm{set}_x(x \in$ элемсобытия(B) &
   $\mathrm{card}(\mathrm{set}_y(y \in A$ & $P(x, y))) = i), B), i \in \{0, \ldots, n\}\}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение вида $f(X, \ldots, B)$, где f - символ из списка "рядраспред", "функраспред", "матожидание", "дисперсия", "средквадроткл", "начмомент", "центрмомент". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Описатель "отображение" в выводимом равенстве выписывается как конечный набор. Вероятность вычисляется при помощи задачи на преобразование. Переменная P функциональная. Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{ABXn}(l(A) = n \ \& \ X = \lambda_x(\mathrm{card}(\mathrm{set}_y(y \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ x \in A(y))), x \in$ элемсобытия$(B)) \to$ рядраспред$(X, B) =$
$\lambda_i($вероятность$($слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), i), B), i \in \{0, \ldots, n\}))$

$\forall_{ABXn}(l(A) = n \,\&\, X = \lambda_x(\mathrm{card}(\mathrm{set}_y(y \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(x \in A(y)))), x \in$ элемсобытия$(B)) \to$ рядраспред$(X, B) =$
$\lambda_i($вероятность$($слойсемейства$(A,$ элемсобытия$(B), n - i), B), i \in \{0, \ldots, n\}))$

Приемы имеют заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение вида $f(X, \ldots, B)$, где f - символ из списка "рядраспред", "функраспред", "матожидание", "дисперсия", "средквадроткл", "начмомент", "центрмомент". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", причем в первом приеме n идентифицируется с неконстантным термом. Во втором приеме ограничения на n отсутствуют. Уровень срабатывания равен 2.

3. Деление случайной величины на константу.

$\forall_{BPXYfgm}(\neg(m = 0) \ \& \ X = \lambda_x(f(x)/m, P(x)) \to Y = \lambda_x(f(x), P(x)) \ \&$
$g =$ рядраспред$(Y, B) \ \&$ рядраспред$(X, B) = \lambda_x(g(mx), \exists_y(y \in \mathrm{Dom}(g) \ \&$
$x = y/m)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "рядраспред(X, B)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с посылкой. Переменные f, P функциональные. Прием выбирает новые переменные g, Y. Уровень срабатывания равен 2.

4. Случайная величина задана перечислением множеств и принимаемых на них константных значений.

$\forall_{ABXbn}(X =$ таблица$(\{; \lambda_i($конст$(A(i), b(i)), i \in \{1, \ldots, n\})\}) \ \&$
$\forall_k(k \in \{1, \ldots, n\} \to \forall_j(j \in \{k + 1, \ldots, n\} \to \neg(b(k) - b(j) = 0))) \to$
рядраспред$(X, B) =$ таблица$(\{; \lambda_i(b(i) \mapsto$ вероятность$(A(i), B), i \in \{1, \ldots, n\})\}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные A, b функциональные, n - натуральная константа. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение вида $f(X, \ldots, B)$, где f - символ из списка "рядраспред", "функраспред", "матожидание", "дисперсия", "средквадроткл", "начмомент", "центрмомент". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатели "развертка" определяют идентификацию и запись термов "отображение" как конечных наборов. Кванторы общности во втором антецеденте рассматриваются как конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCPX}(X =$ таблица$(\mathrm{set}_f(\exists_i(f =$ конст$(A(i), B(i)) \ \& \ P(i)))) \ \&$
$\forall_{ij}(P(i) \ \& \ P(j) \ \& \ \neg(i = j) \to \neg(B(i) - B(j) = 0)) \to$ рядраспред$(X, C) =$
таблица$(\mathrm{set}_f(\exists_i(P(i) \ \& \ f = (B(i) \mapsto$ вероятность$(A(i), C))))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные A, B, P функциональные. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение вида

$f(X, \ldots, C)$, где f - символ из списка "рядраспред", "функраспред", "матожидание", "дисперсия", "средквадроткл", "начмомент", "центрмомент". Истинность второго антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABCDXbn}(X = \text{таблица}(\{; \lambda_i(\text{конст}(A(i), b(i)), i \in \{1, \ldots, n\})\} \cup$
$\text{set}_f(\exists_j(f = \text{конст}(C(j), D(j)) \ \& \ P(j)))) \ \& \ \forall_k(k \in \{1, \ldots, n\} \to$
$\forall_p(p \in \{k+1, \ldots, n\} \to \neg(b(k) - b(p) = 0))) \ \& \ \forall_{jk}(P(j) \ \& \ P(k) \ \& \ \neg(j = k) \to$
$\neg(D(j) - D(k) = 0)) \ \& \ \forall_j(j \in \{1, \ldots, n\} \to \forall_k(P(k) \to \neg(b(j) - D(k) = 0))) \to$
$\text{рядраспред}(X, B) = \text{таблица}(\{; \lambda_i(b(i) \mapsto \text{вероятность}(A(i), B), i \in \{1, \ldots, n\})\} \cup$
$\text{set}_f(\exists_j(P(j) \ \& \ f = (D(j) \mapsto \text{вероятность}(C(j), B))))))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные A, C, D, P, b функциональные, переменная n идентифицируется с натуральной константой. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение вида $f(X, \ldots, B)$, где f - символ из списка "рядраспред", "функраспред", "матожидание", "дисперсия", "средквадроткл", "начмомент", "центрмомент". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Истинность третьего и четвертого антецедентов устанавливается при помощи задач на доказательство. Описатели "отображение" рассматриваются как конечные наборы, а кванторы общности - как конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с математическим ожиданием

1. Константа.

   $\forall_{APa}(\text{матожидание}(\lambda_x(a, x \in A), P) = a)$

   $\forall_{APa}(\text{матожидание}(\text{конст}(A, a), P) = a)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Сумма случайных величин.

   $\forall_{APfg}(A = \text{элемсобытия}(P) \to \text{матожидание}(\lambda_x(f(x) + g(x), x \in A), P) =$
   $\text{матожидание}(\lambda_x(f(x), x \in A), P) + \text{матожидание}(\lambda_x(g(x), x \in A), P))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, g функциональные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания приема равен 1.

3. Умножение на константу.

   $\forall_{APaf}(A = \text{элемсобытия}(P) \to \text{матожидание}(\lambda_x(af(x), x \in A), P) =$
   $a \cdot \text{матожидание}(\lambda_x(f(x), x \in A), P))$

   Аналогично предыдущему.

4. Изменение знака.

   $\forall_{APf}(A = \text{элемсобытия}(P) \to \text{матожидание}(\lambda_x(-f(x), x \in A), P) =$
   $-\,\text{матожидание}(\lambda_x(f(x), x \in A), P))$

   Аналогично предыдущему.

5. Вычисление математического ожидания случайной величины, для которой известен ряд распределения.

   $\forall_{PXabn}(\text{рядраспред}(X,P) = \text{таблица}(\{;\lambda_i(a(i) \mapsto b(i), i \in \{1,\ldots,n\})\}) \to \text{матожидание}(X,P) = \sum_{i=1}^{n} a(i)b(i))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Переменные a,b функциональные. Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Указатели "развертка" определяют идентификацию описателя "отображение" с конечным набором и выписывание конечной суммы как обычной. Выражения a,b (наборы) не содержат неизвестных. Задача имеет посылку, содержащую подвыражение вида "$f(X,\ldots)$", где f - символ, принадлежащий списку "матожидание", "дисперсия", "центрмомент". Выражение "матожидание(X,P)", после обработки его нормализатором "нормматожидание", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABXf}(\text{рядраспред}(X,B) = \lambda_x(f(x), A(x)) \to \text{матожидание}(X,B) = \sum_{x,A(x)}(xf(x)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Переменные f,A функциональные. Термы $f(x)$ и $A(x)$ не содержат неизвестных. Задача имеет посылку, содержащую подвыражение вида "$f(X,\ldots)$", где f - символ, принадлежащий списку "матожидание", "дисперсия", "центрмомент". Выражение "матожидание(X,P)", после обработки его нормализатором "нормматожидание", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{APXabcdn}(\text{рядраспред}(X,P) = \text{таблица}(\{;\lambda_i(a(i) \mapsto b(i), i \in \{1,\ldots,n\})\} \cup \text{set}_f(\exists_j(A(j)\ \&\ f = (c(j) \mapsto d(j))))) \to \text{матожидание}(X,P) = \sum_{i=1}^{n} a(i)b(i) + \sum_{j,A(j)} c(j)d(j))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Переменные a,b,c,d,A функциональные. Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Указатели "развертка" определяют идентификацию описателя "отображение" с конечным набором и выписывание конечной суммы как обычной. Термы a,b,c,d,A не содержат неизвестных. Задача имеет посылку, содержащую подвыражение вида "$f(X,\ldots)$", где f - символ, принадлежащий списку "матожидание", "дисперсия", "центрмомент". Выражение "матожидание(X,P)", после обработки его нормализатором "нормматожидание", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{PXab}(\text{рядраспред}(X,P) = \text{таблица}(\text{set}_f(\exists_i(i - \text{натуральное}\ \&\ f = (a(i) \mapsto b(i))))) \to \text{матожидание}(X,P) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)b(i))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Переменные a,b функциональные. Выражения a,b не содержат неизвестных. Задача имеет посылку, содержащую подвыражение вида "$f(X,\ldots)$", где f - символ, принадлежащий списку "матожидание", "дисперсия", "центрмомент". Выражение "матожидание(X,P)", после обработки его нормализатором "нормматожидание", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 2.

6. Вычисление математического ожидания случайной величины, для которой известна плотность распределения.

   $\forall_{ABfg}(\text{плотнраспред}(A,B)=\lambda_t(f(t),g(t))\rightarrow\text{матожидание}(A,B)=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)dt)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо на исследование. Переменные f,g функциональные. Выражение $f(t)$ не содержит неизвестных. Задача имеет посылку, содержащую подвыражение вида "$f(A,\ldots)$", где f - символ, принадлежащий списку "матожидание", "дисперсия", "центрмомент". Выражение "матожидание(A,B)", после обработки его нормализатором "нормматожидание", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABfg}(\text{плотнраспред}(A,B)=\lambda_t(f(t),g(t))\ \&\ \text{матожидание}(A,B)=a\rightarrow$
   $a=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t)dt)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Оба антецедента идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Переменные f,g функциональные. Хотя бы одно из выражений $a,f(t)$ содержит неизвестные. Ни одно из них не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 2.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормматожидание".

   В нормализаторы продублированы приведенные выше приемы для константной величины, суммы величин, произведения величины на константу и изменения знака величины. Кроме того, введен прием, использующий равенство из посылок:

   $\forall_{ab}(a=b\rightarrow a=b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет заголовок "матожидание" и не является подвыражением выражения b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается.

Приемы, связанные с дисперсией

1. Константа.

   $\forall_{APa}(\text{дисперсия}(\lambda_x(a,x\in A),P)=0)$

   $\forall_{APa}(\text{дисперсия}(\text{конст}(A,a),P)=0)$

   Приемы имеют заголовок "воройтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Сложение с константой.

   $\forall_{APaf}(A=\text{элемсобытия}(P)\rightarrow\text{дисперсия}(\lambda_x(f(x)+a,x\in A),P)=$
   $\text{дисперсия}(\lambda_x(f(x),x\in A),P))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации. Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

3. Умножение на константу.

   $\forall_{APaf}(A=\text{элемсобытия}(P)\rightarrow\text{дисперсия}(\lambda_x(af(x),x\in A),P)=$
   $a^2\cdot\text{дисперсия}(\lambda_x(f(x),x\in A),P))$

   Аналогично предыдущему.

4. Изменение знака.

   $\forall_{APf}(A = \text{элемсобытия}(P) \to \text{дисперсия}(\lambda_x(-f(x), x \in A), P) = \text{дисперсия}(\lambda_x(f(x), x \in A), P))$

   Аналогично предыдущему.

5. Вычисление дисперсии случайной величины, для которой известен ряд распределения.

   $\forall_{PXabmn}(\text{рядраспред}(X, P) = \text{таблица}(\{;\lambda_i(a(i) \mapsto b(i), i \in \{1, \dots, n\})\}) \;\&\; \text{матожидание}(X, P) = m \to \text{дисперсия}(X, P) = \sum_{i=1}^{n}((a(i) - m)^2 b(i)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрения подвыражения "дисперсия(X, P)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Указатели "развертка" определяют идентификацию описателя "отображение" с конечным набором и выписывание конечной суммы как обычной. Выражения a, b (наборы), а также выражение m не содержат неизвестных. Выражение "дисперсия(X, P)", после обработки его нормализатором "нормдисперсия", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABXfm}(\text{рядраспред}(X, B) = \lambda_x(f(x), A(x)) \;\&\; \text{матожидание}(X, B) = m \to \text{дисперсия}(X, B) = \sum_{x,A(x)}((x - m)^2 f(x)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрения подвыражения "дисперсия(X, B)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменные f, A функциональные. Термы $f(x), A(x)$ и m не содержат неизвестных. Выражение "дисперсия(X, B)", после обработки его нормализатором "нордисперсия", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

6. Вычисление дисперсии случайной величины, для которой известна плотность распределения.

   $\forall_{ABfgm}(\text{плотнраспред}(A, B) = \lambda_t(f(t), g(t)) \;\&\; \text{матожидание}(A, B) = m \to \text{дисперсия}(A, B) = \int_{-\infty}^{\infty}(t - m)^2 f(t)dt)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрения подвыражения "дисперсия(A, B)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменные f, g функциональные. Выражения $f(t), m$ не содержат неизвестных. Выражение "дисперсия(A, B)", после обработки его нормализатором "нормдисперсия", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ABafgm}(\text{плотнраспред}(A, B) = \lambda_t(f(t), g(t)) \;\&\; \text{матожидание}(A, B) = m \;\&\; \text{дисперсия}(A, B) = a \to a = \int_{-\infty}^{\infty}(t - m)^2 f(t)dt)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование. Переменные f, g функциональные. Хотя бы одно из выражений $a, f(t), m$ содержит неизвестные. Ни одно из них не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 4.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормдисперсия".

   В нормализаторе продублированы приведенные выше приемы для константной случайной величины, измненения знака величины, умножения ее на константу и сложения с константой.

Среднее квадратическое отклонение

1. Константа.

   $\forall_{APa}(\text{средквадроткл}(\lambda_x(a, x \in A), P) = 0)$

   $\forall_{APa}(\text{средквадроткл}(\text{конст}(A, a), P) = 0)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Сложение с константой.

   $\forall_{APaf}(A = \text{элемсобытия}(P) \to \text{средквадроткл}(\lambda_x(f(x) + a, x \in A), P) = \text{средквадроткл}(\lambda_x(f(x), x \in A), P))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации. Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

3. Умножение на константу.

   $\forall_{APaf}(A = \text{элемсобытия}(P) \to \text{средквадроткл}(\lambda_x(af(x), x \in A), P) = |a| \cdot \text{средквадроткл}(\lambda_x(f(x), x \in A), P))$

   Аналогично предыдущему.

4. Изменение знака.

   $\forall_{APf}(A = \text{элемсобытия}(P) \to \text{средквадроткл}(\lambda_x(-f(x), x \in A), P) = \text{средквадроткл}(\lambda_x(f(x), x \in A), P))$

   Аналогично предыдущему.

5. Выражение среднего квадратического отклонения через дисперсию.

   $\forall_{PXm}(\text{дисперсия}(X, P) = m \to \text{средквадроткл}(X, P) = \sqrt{m})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на исследование подвыражения "средквадроткл(X, P)". Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение m не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

6. Вычисление среднего квадратического отклонения случайной величины, для которой известен ряд распределения.

   $\forall_{PXabmn}(\text{рядраспред}(X, P) = \text{таблица}(\{; \lambda_i(a(i) \mapsto b(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}) \;\&\; \text{матожидание}(X, P) = m \to \text{средквадроткл}(X, P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a(i) - m)^2 b(i)})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрения подвыражения "средквадроткл(X, P)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменная n идентифицируется с целочисленной константой. Указатели "развертка" определяют идентификацию описателя "отображение" с конечным набором и выписывание конечной суммы как обычной. Выражения a, b (наборы), а также выражение m не содержат неизвестных. Выражение "средквадроткл(X, P)", после обработки его нормализатором "средквадроткл", содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормсредквадроткл".

   В нормализаторе продублированы приведенные выше приемы для константной случайной величины, измненения знака величины, умножения ее на константу и сложения с константой.

Начальные моменты

Создан единственный прием для определения начального момента случайной величины по ее ряду распределения:

$\forall_{PXabn}($рядраспред$(X, P) =$ таблица$(\{;\lambda_i(a(i) \mapsto b(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}) \rightarrow$ начмомент$(X, k, P) = \sum_{i=1}^{n} a(i)^k b(i))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатели "развертка" определяют идентификацию описателя "отображение" с конечным набором и выписывание конечной суммы как обычной. Уровень срабатывания равен 3.

Центральные моменты

1. Вычисление центрального момента случайной величины, для которой известен ряд распределения.

   $\forall_{PXabkmn}($рядраспред$(X, P) =$ таблица$(\{;\lambda_i(a(i) \mapsto b(i), i \in \{1, \ldots, n\})\})$ & матожидание$(X, P) = m \rightarrow$ центрмомент$(X, k, P) = \sum_{i=1}^{n}(a(i) - m)^k b(i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем переменные a, b - функциональные. Указатели "развертка" определяют идентификацию описателя "отображение" с конечным набором и выписывание конечной суммы как обычной. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормматожидание". Правая часть не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{APXfkm}($рядраспред$(X, B) = \lambda_x(f(x), x \in A)$ & матожидание$(X, P) = m \rightarrow$ центрмомент$(X, k, P) = \sum_{x, x \in A}((x - m)^k f(x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем переменная f функциональная. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение m не содержит невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 3.

2. Вычисление центрального момента случайной величины, для которой известна плотность распределения.

   $\forall_{ABfmn}($плотнраспред$(A, B) = \lambda_t(f(t), t -$ число$)$ & матожидание$(A, B) = m \rightarrow$ центрмомент$(A, n, B) = \int_{-\infty}^{\infty}(t - m)^n f(t)dt)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрения подвыражения "центрмомент(A, n, B)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменная f функциональная. Выражения $f(t), m, n$ не содержат неизвестных. Выражение "центрмомент(A, n, B)"содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 3.

Мода

В разделе имеется единственный прием для нахождения моды при известной плотности распределения:

$\forall_{ABXfgmnp}(\text{плотнраспред}(X, A) = \lambda_x(f(x), g(x))\ \&\ \text{Max}(\lambda_x(f(x), g(x)),$
$\text{set}_x(x - \text{число}\ \&\ g(x)), m, n) = (m = \{p\}\ \&\ B(n)) \to \text{мода}(X, A) = p)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем переменные f, g функциональные. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть содержит вспомогательные переменные m, n и разрешается относительно них с помощью задачи на описание. Переменная B функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

Закон Пуассона

1. Ряд распределения.

   $\forall_{PXa}(\text{Пуассон}(X, P, a) \to \text{рядраспред}(X, P) = \lambda_i(a^i/i! \exp(-a), i \in \mathbb{N}+))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "$f(X, \ldots, P)$", где f - символ из списка "рядраспред", "функраспред", "матожидание", "дисперсия", "средквадроткл", "начмомент", "центрмомент". Уровень срабатывания равен 2.

2. Вероятность попадания в заданное множество.

   $\forall_{MPXa}(\text{Пуассон}(X, P, a) \to \text{вероятность}(\text{прообраз}(X, M), P) =$
   $\sum_{i, i \in M \cap \mathbb{N}+} a^i \exp(-a)/i!)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 3.

3. Число событий на заданном промежутке времени в простейшем потоке.

   $\forall_{ABabc}(\text{простейшийпоток}(A, a)\ \&\ \text{случпоток}(A, B) \to$
   $\text{Пуассон}(\text{числособытий}(A, [b, c]), B, a(c - b)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении не связанного внешними кванторами и описателями подвыражения "числособытий$(A, [b, c])$" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABab}(\text{простейшийпоток}(A, a)\ \&\ \text{случпоток}(A, B) \to$
   $\text{Пуассон}(\text{числособытий}(A, b), B, a\text{длина}(b)))$

   Аналогично предыдущему, но указатель "контрольвывода" относится к подвыражению "числособытий(A, b)", где b не имеет заголовка "промежуток". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{ABMabcnpq}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{случпоток}(A(i), B))\ \&$
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to\ \text{простейшийпоток}(A(i), a))\ \&$

$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to Q(i) = \text{прообраз}(\text{числособытий}(A(i),[p,q]),M))$ &
$b = a(q-p)$ & $c = \sum_{i,i\in M\cap\mathbb{N}+} b^i \exp(-b)/i! \to$
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to \text{вероятность}(Q(i),B) = c))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, четвертый и пятый - выделены указателем "идентификатор". Конечная сумма упрощается при помощи задачи на преобразование. Отсутствует посылка вида "$\forall_k(k \in \{1,\ldots,n\} \to \text{вероятность}(Q(k),B) = d$". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ABCDEPMabm}(\text{случпоток}(A,B)$ & $\text{простейшийпоток}(A,m)$ &
$\forall_i(P(i) \to C(i) = \text{прообраз}(\text{числособытий}(A,D(i)),E(i)))$ & $a(i) = m\cdot\text{длина}(D(i))$
& $b(i) = \sum_{j,j\in E(i),j-\text{целое}} \exp(-a(i))a(i)^j/j! \to$
$\forall_i(P(i) \to \text{вероятность}(C(i),B) = b(i)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

4. Число точек в заданной области равномерного случайного поля.

   $\forall_{ABab}(\text{равномернполе}(A,a)$ & $\text{случполе}(A,2,B) \to$
   $\text{Пуассон}(\text{числоточек}(A,b),B,aS(b)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" определяет попытку его применения при усмотрении подвыражения "числоточек(A,b)" в посылке задачи на доказательство либо на исследование. Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

5. Длина паузы для простейшего потока либо поля.

   $\forall_{ABmn}(\text{случпоток}(A,B)$ & $\text{простейшийпоток}(A,n)$ &
   $\text{плотнраспред}(\text{длинапаузы}(A),B) = \lambda_x((0 \text{ при } x < 0, \text{ иначе } m\cdot\exp(-mx)),$
   $x - \text{число}) \to m = n)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{ABm}(\text{случполе}(A,2,B)$ & $\text{равномерноеполе}(A,m) \to$
   $\text{плотнраспред}(\text{длинапаузы}(A),B) = \lambda_x((0 \text{ при } x < 0, \text{ иначе } 2\pi mx\exp(-\pi mx^2)),$
   $x - \text{число}))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче выражения "длинапаузы(A)". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

6. Ввод вспомогательного случайного поля либо потока при пересечении событий.

   $\forall_{ABCDEbcdm}(\text{случполе}(A,m,C)$ & $\text{равномернполе}(A,b)$ &
   $\text{незавгруппы}((A,\text{префикс}(B,E)),C) \to \text{случполе}(D,m,C)$ &
   $\text{равномерноеполе}(D,b\cdot\text{вероятность}(B,C))$ &
   $\text{вероятность}(\text{прообраз}(\text{числоточек}(A,c),d) \cap B,C) =$
   $\text{вероятность}(\text{прообраз}(\text{числоточек}(D,c),d),C))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "вероятность(прообраз(числоточек$(A,c),d)\cap$

$B, C)$". Антецеденты идентифицируются с посылками, причем событие B выбирается как произвольный элемент набора. Прием вводит новую переменную D. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{ABCDEbcd}$(случпоток(A, C) & простейшийпоток(A, b) &
незавгруппы$((A,$ префикс$(B, E)), C) \to$ случпоток(D, C) &
простейшийпоток$(D, b \cdot$ вероятность$(B, C))$ &
вероятность(прообраз(числособытий$(A, c), d) \cap B, C) =$
вероятность(прообраз(числособытий$(D, c), d), C))$

Аналогично предыдущему.

7. Математическое ожидание числа событий на заданном промежутке времени для простейшего потока.

   $\forall_{ABpt}$(случпоток(A, B) & простейшийпоток$(A, p) \to$
   матожидание(числособытий$(A, t), B) = p$длина$(t))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 3.

8. Независимость семейства событий в простейшем потоке, отнесенных к непересекающимся промежуткам времени.

   $\forall_{ABCDEPm}$(случпоток(A, B) & простейшийпоток(A, m) &
   $\forall_i(P(i) \to C(i) =$ прообраз(числособытий$(A, D(i)), E(i)))$ &
   $\mathrm{Dom}(C) = \mathrm{set}_i(P(i))$ & $\forall_{ij}(P(i)$ & $P(j)$ & $\neg(i = j) \to$ непересек$(D(i), D(j))) \to$
   незавсобытия$(C, B))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на описание. Переменные D, E, P функциональные, переменная C - обычная. Истинность двух последних антецедентов устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 1.

Показательный закон

В разделе имеется единственный прием, выполняющий усмотрение простейшего потока:

$\forall_{ABc}$(случпоток$(A, B) \to$ показатзакон(длинапаузы$(A), B, c) \leftrightarrow$
простейшийпоток$(A, 1/c))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Истинность антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство, решаемой до максимального уровня 4. Уровень срабатывания равен 1.

Нормальный закон

1. Вероятность попадания в заданный промежуток.

   $\forall_{ABabcdms}$(нормраспред$(A, B, m, s) \to$ вероятность(прообраз$(A, [a, b]), B) =$
   Нормраспред$((b - m)/s) -$ Нормраспред$((a - m)/s))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровни срабатывания равны 1 и 5.

2. Устранение минуса перед нормальной функцией распределения.

   $\forall_a$(Нормраспред$(-a) = 1 -$ Нормраспред(a))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abcd}$(Нормраспред$((a-b)c/d) = 1 -$ Нормраспред$((b-a)c/d)$)

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет идентификацию в преобразуемом терме подвыражения "Нормраспред$((b-a)c/d)$". Выражение b лексикографически предшествует выражению a. Уровень срабатывания равен 2.

3. Бесконечные значения.

   Нормраспред$(\infty) = 1$

   Нормраспред$(-\infty) = 0$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Уравнение с нормальной функцией распределения.

   $\forall_{ab}(0 < b \mathbin{\&} 0 < 1 - b \rightarrow$ Нормраспред$(a) = b \leftrightarrow a =$ обрнормраспред(b))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование. Выражение a содержит неизвестные, а b - не содержит. Допустимыми заголовками надутверждений преобразуемого утверждения служат символы "и", "или", "существует". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Если решается задача на исследование, имеющая цель "известно", либо текущий терм задачи - дизъюнкция, то уровень срабатывания равен 0. Иначе он равен 1.

5. Математическое ожидание и дисперсия.

   $\forall_{ABms}$(нормраспред$(A, B, m, s) \rightarrow$ матожидание$(A, B) = m$)

   $\forall_{ABms}$(нормраспред$(A, B, m, s) \rightarrow$ дисперсия$(A, B) = s^2$)

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 0.

6. Плотность распределения.

   $\forall_{ABms}$(нормраспред$(A, B, m, s) \rightarrow$ плотнраспред$(A, B) =$
   $\lambda_x(1/(s\sqrt{2\pi}) \exp -(x-m)^2/(2s^2), x -$ число))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи на доказательство либо на исследование подвыражения "плотнраспред(A, B)". Антецедент идентифицируется с другой посылкой. Выражения m, s не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

Глава 6

Приемы, связанные с интегральными уравнениями

Задача на решение интегрального уравнения формулируется в решателе так же, как задача на решение дифференциального уравнения: вместо равенства для функций записывается равенство для их значений, а к списку целей добавляются элементы (связка x), выделяющие варьируемые переменные. В процессе решения сразу же вводится дополнительная цель (интеграл $y_1 \dots y_n$), означающая, что решаются интегральные уравнения относительно неизвестных функций $y_1, \dots, y_n$. Это обеспечивается реализованным на ЛОСе приемом символа "интеграл", срабатывающим на уровне 0.

6.1 Уравнения Вольтерра

Сведение уравнения Вольтерра к дифференциальному уравнению

$$\forall_{afghpq}((h(x)r(x)dz(x)/dx + g(x)f(x)z(x) = g(x)p(x) \ \& \ z - \text{функция} \ \& \ z(a) = 0) = (z(x) = q(x)) \to f(x)\int_a^x (g(t)y(t)/r(t))dt + h(x)y(x) = p(x) \leftrightarrow y(x) = (-f(x)q(x) + p(x))/h(x))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x \dots$"и неизвестную y. Допускаются вырожденные единичные значения f, g, h, r, однако слагаемое с $h(x)$ не тождественно нулевое. Переменные f, g, h, p, q, r функциональные. Выражения $a, f(x), g(t), r(t), h(x), p(x)$ не содержат неизвестных. Переменная x не входит ни в $g(t)$, ни в $r(t)$. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно z при помощи вспомогательной задачи на описание, копирующей цель (связка $\dots$) текущей задачи. В качестве z прием выбирает новую переменную. Уровень срабатывания равен 2.

$$\forall_{afghp}(p(a) = 0 \to f(x)\int_a^x g(t)y(t)/h(t)dt = p(x) \leftrightarrow y(x) = h(x)d(p(x)/f(x))/dx/g(x))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x \dots$"и неизвестную y. Переменные f, g, h, p функциональные. Выражения $a, f(x), g(t), h(t), p(x)$ не содержат неизвестных. Переменная x не входит ни в $g(t)$, ни в $h(t)$. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

Решение уравнения Вольтерра с помощью резольвенты, если ядро является многочленом от t

$\forall_{Afghnpqrsuz}(g(x)f(x,x-z)/(h(z)r(x,x-z)) = \sum_{i=1}^{n}(q(i)z^{i-1})$ &
$(d^n u(x)/dx^n - \sum_{i=1}^{n}(q(i)(i-1)!d^{n-i}u(x)/dx^{n-i}) = 0$ &
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to d^{i-1}u(t)/dt^{i-1} = (1 \text{ при } i = n,\ \text{ иначе } 0))) = (u(x) = b(x,t)$ & $A(t))$
& $d^n b(x,t)/dx^n = c(x,t) \to$
$g(x)\int_s^x (f(x,t)y(t)/r(x,t))dt + h(x)y(x) = p(x) \leftrightarrow$
$y(x) = p(x)/h(x) + \int_s^x (c(x,t)p(t)/h(t))dt)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x\ldots$" и неизвестную y. Переменные b, c, f, g, h, p, r, A функциональные. Выражения $s, g(x), h(x), p(x), f(x,t), r(x,t)$ не содержат неизвестных. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого антецедента сначала упрощается задачей на преобразование, а затем обрабатывается нормализатором раскрывания скобок "стандплюс". В качестве z берется новая переменная. Результат представляет собой многочлен от z; переменная n идентифицируется с натуральной константой. Коэффициенты $q(i)$ не содержат z. Левая часть второго антецедента разрешается относительно u при помощи задачи на описание, которой передается цель (связка $\ldots$) текущей задачи. Указатели "разверка" определяют рассмотрение конечной суммы как обычной, а квантора общности - как конъюнкции. Левая часть третьего антецедента упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

Решение уравнения Вольтерра с помощью резольвенты, если ядро является многочленом от x

$\forall_{Afghnpqrsuz}(g(t-z)f(t-z,t)/(h(t-z)r(t-z,t)) = \sum_{i=1}^{n}(q(i)z^{i-1})$ &
$(d^n u(t)/dt^n + \sum_{i=1}^{n}(q(i)(i-1)!d^{n-i}u(t)/dt^{n-i}) = 0$ &
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to d^{i-1}u(x)/dx^{i-1} = (1 \text{ при } i = n,\ \text{ иначе } 0))) = (u(t) = b(x,t)$ & $A(x))$
& $d^n b(x,t)/dx^n = c(x,t) \to$
$g(x)\int_s^x (f(x,t)y(t)/r(x,t))dt + h(x)y(x) = p(x) \leftrightarrow$
$y(x) = p(x)/h(x) - \int_s^x (c(x,t)p(t)/h(t))dt)$

Аналогично предыдущему, но вспомогательной задаче на описание передается цель (связка t).

Решение обобщенного уравнения Абеля

$\forall_{abf}(0 < b$ & $0 < 1 - b \to f(x)\int_a^x (y(t)/(x-t)^b)dt = g(x) \leftrightarrow y(x) = (\sin(b\pi)/\pi) \cdot (g(a)/(f(a)(x-a)^{1-b}) + \int_a^x (d(g(t)/f(t))/dt/(x-t)^{1-b})dt))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x\ldots$" и неизвестную y. Переменные f, g функциональные. Выражения $a, b, g(x), f(x)$ не содержат неизвестных. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{bc}(0 \leq c$ & $0 < b + 1$ & $n = [b+1]$ & $\forall_i(i \in \{0,\ldots,n\} \to \neg(c - b + i = 0)) \to \int_0^x (x-t)^b y(t)dt = x^c \leftrightarrow y(x) = \Gamma(c+1)x^{c-b-1}/(\Gamma(b+1)\Gamma(c-b)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x\ldots$" и неизвестную y. Переменные f, g функциональные.

Выражения b, c константные. Первые два антецедента и четвертый антецедент обрабатывается проверочными операторами, третий - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 4.

$$\forall_{bc}(0 \leq c \ \& \ 0 < b+1 \ \& \ n = [b+1] \ \& \ \forall_i(i \in \{0,\ldots,n\} \rightarrow \neg(c-b+i=0)) \rightarrow \int_0^x (t-x)^b y(t)dt = x^c \leftrightarrow y(x) = \Gamma(c+1)x^{c-b-1}/(\Gamma(b+1)\Gamma(c-b)))$$

$$\forall_{bc}(0 \leq c \ \& \ 0 < b+1 \ \& \ n = [b+1] \ \& \ \forall_i(i \in \{0,\ldots,n\} \rightarrow \neg(c-b+i=0)) \rightarrow \int_0^x (t-x)^b y(t)dt = x^c \leftrightarrow y(x) = -\Gamma(c+1)x^{c-b-1}/(\Gamma(b+1)\Gamma(c-b)))$$

Аналогично предыдущему, но первый прием относится к случаю, когда b - рациональное с нечетными числителем и знаменателем, а второй - к случаю, когда числитель четный.

Декомпозиция уравнения Вольтерра первого рода, если правая часть имеет вид суммы

$$\forall_{abcfghpq}((h(x)\int_a^x (f(x,t)y(t)/g(x,t))dt = p(x)) = (y(x)=b) \ \& \\ (h(x)\int_a^x (f(x,t)y(t)/g(x,t))dt = q(x)) = (y(x)=c) \rightarrow \\ h(x)\int_a^x (f(x,t)y(t)/g(x,t))dt = p(x)+q(x) \leftrightarrow y(x) = b+c)$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x\ldots$" и неизвестную y. Переменные f, g, h, p, q функциональные. Выражения $a, g(x,t), h(x), p(x), f(x,t), q(x)$ не содержат неизвестных. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левые части антецедентов разрешаются относительно y с помощью задач на описание. Уровень срабатывания приема равен 3.

Отбрасывание постоянного множителя правой части уравнения Вольтерра первого рода

$$\forall_{abcfghp}((h(x)\int_a^x (f(x,t)y(t)/g(x,t))dt = p(x)) = (y(x)=b) \rightarrow \\ h(x)\int_a^x (f(x,t)y(t)/g(x,t))dt = cp(x) \leftrightarrow y(x) = cb)$$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

Почленное дифференцирование обобщенного уравнения Абеля в случае натурального показателя степени

$$\forall_{afgn}(g(a) = 0 \ \& \ p = dg(x)/dx \ \& \ q = df(x)/dx \rightarrow f(x)\int_a^x (x-t)^n y(t)dt = g(x) \leftrightarrow nf(x)^2 \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t)dt = pf(x) - qg(x))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей неизвестную y. Переменные f, g функциональные. Выражения $a, f(x), g(x)$ не содержат неизвестных. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них и правые части двух других упрощаются задачами на преобразование. Выражения p, q не содержат символа "производная". Уровень срабатывания равен 2.

Использование преобразования Лапласа для решения уравнения 2-го рода

$\forall_{efghmpqrs}(\text{преобрлапласа}(\lambda_x(p(x)/e(x), x\text{−число} \ \& \ 0 \leq x)) = \lambda_z(q(z), z\text{−комплексное})$ $\& \ \text{преобрлапласа}(\lambda_x(mg(x)/h(x), x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x)) = \lambda_z(r(z), z - \text{комплексное}) \ \&$ $\text{обрпреобрлапласа}(\lambda_z(q(z)/(1 - r(z)), z - \text{комплексное})) = \lambda_w(s(w), w - \text{число} \ \&$ $0 \leq w) \ \& \ f(x)/e(x) = m \rightarrow f(x) \int_0^x (g(x-t)y(t)/h(x-t))dt + e(x)y(x) = p(x) \leftrightarrow$ $y(x) = s(x))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x \ldots$" и неизвестную y. Переменные e, f, g, h, p, q, r, s функциональные. Указатели "новаргумент" определяют идентификацию шаблонов $g(x-t)$, $h(x-t)$ с термами, преобразуемыми нормализатором "извлечение"к виду, где переменные x, t входят только внутри разностей $x - t$. Выражения $f(x), p(x), g(x-t), h(x-t)$ не содержат неизвестных. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левые части первых двух антецедентов обрабатываются нормализатором "нормпреобрлапласа", левая часть третьего - нормализатором "нормобрпреобрлапласа". Предварительно выражения под описателями "отображение" упрощаются задачами на преобразование. Левая часть последнего антецедента обрабатывается нормализатором общей стандартизации "нормдробь". Результат m не содержит переменной x. Уровень срабатывания равен 3.

Сведение уравнения первого рода к уравнению второго рода

$\forall_{Abfghpqr}(q(x) = d(p(x)/h(x))/dx \ \& \ r(x,t) = d(f(x,t)/g(x,t))/dx \ \&$ $(f(x,x)y(x) + g(x,x) \int_b^x r(x,t)y(t)dt = g(x,x)q(x)) = A(x) \rightarrow$ $h(x) \int_b^x (f(x,t)y(t)/g(x,t))dt = p(x) \leftrightarrow A(x))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x \ldots$" и неизвестную y. Переменные f, g, h, p, q, r, A функциональные. Выражения $b, h(x), p(x), f(x,t), g(x,t)$ не содержат неизвестных. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правые части первых двух антецедентов упрощаются задачами на преобразование, левая часть третьего антецедента - разрешается относительно y задачей на описание. Выражение $r(x,t)$ не содержит символа "производная". Созданые две версии приема, с учетом того, входит ли символ "значение" в выражение $p(x)$. Если входит, то правая часть первого антецедента предварительно обрабатывается нормализатором "нормдифф", иначе этого не происходит. Соответственно, в первом случае не требуется, чтобы $q(x)$ не содержало символа "производная", иначе - требуется. Уровень срабатывания в обоих случаях равен 5.

6.2 Уравнения Фредгольма

Случай вырожденного ядра

1. Ядро представимо в виде произведения двух функций одной переменной.

   $\forall_{Aabfghpy}(\int_a^b (g(x)h(x)/(p(x)q(x)))dx = A \rightarrow$
   $p(x)y(x) + g(x) \int_a^b (h(t)y(t)/q(t))dt = f(x) \leftrightarrow$
   $y(x) = f(x)/p(x) - g(x)/(p(x)(1+A)) \int_a^b (f(t)h(t)/(p(t)q(t)))dt)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x\ldots$" и неизвестную y. Переменные f, g, h, p, q функциональные. Выражения $a, b, f(x), g(x), h(t), p(x)$ не содержат неизвестных. Выражения $a, b, h(t)$ не содержат переменной x. Выражение $f(x)$ не тождественно нулевое. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

2. Ядро представимо в виде суммы двух произведений двух функций, зависящих от одной переменной.

$$\forall_{ABCKabfghpy}(K(x,t) = g(x)h(x,t)/p(x)\ \&\ A = \int_a^b K(x,x)dx\ \&$$
$$B(x,t) = AK(x,t) - \int_a^b K(x,s)K(s,t)ds\ \&\ C = \int_a^b B(x,x)dx\ \&$$
$$h(x,t) = c + d \rightarrow p(x)y(x) + g(x)\int_a^b h(x,t)y(t)dt = f(x) \leftrightarrow$$
$$y(x) = f(x)/p(x) - \int_a^b((K(x,t) + B(x,t))f(t)/((1 + A + C/2)p(t)))dt)$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x\ldots$" и неизвестную y. Переменные f, g, h, p, B, K функциональные. Выражения $a, b, f(x), g(x), h(x,t), p(x)$ не содержат неизвестных. Выражения a, b не содержат переменной x. Выражение $f(x)$ не тождественно нулевое. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Правая часть первого антецедента обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Правые части второго, третьего и четвертого антецедентов упрощаются задачами на преобразование. Пятый антецедент устанавливает представимость $h(x,t)$ в виде суммы двух таких произведений c, d, у которых каждый содержащий x сомножитель не содержит переменной t. Его левая часть предварительно обрабатывается приводимым ниже нормализатором "нормядро". Уровень срабатывания приема равен 3.

3. Общий случай.

$$\forall_{Aabcdfghnpryz}(\text{вырождядро}(g(x)h(x,t)/(p(x)q(x,t)), c, d)\ \&\ c = u(x)\ \&$$
$$l(c) = n\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^n(((1 \text{ при } j = i,\ \text{иначе } 0) + \int_a^b(u(t)(j)d(i))dt)z(j)) = \int_a^b(d(i)f(t)/p(t))dt) =$$
$$(\forall_j(j \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow z(j) = r(j))\ \&\ A) \rightarrow$$
$$p(x)y(x) + g(x)\int_a^b(h(x,t)y(t)/q(x,t))dt = f(x) \leftrightarrow$$
$$y(x) = f(x)/p(x) - \sum_{i=1}^n(r(i)c(i))\ \&\ A)$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "связка $x\ldots$" и неизвестную y. Переменные f, g, h, p, q, r, u функциональные. Выражения $a, b, f(x), g(x), h(x,t), p(x)$ не содержат неизвестных. Выражения a, b не содержат переменной x. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "вырождядро", усматривающим вырожденное ядро и определяющим два набора c, d функций, зависящих только от x и только от t, таких, что данное ядро является суммой произведений пар функций $c(i), d(i)$. Этот синтезатор приводится ниже. Второй, третий и четвертый антецеденты выделены указателем "идентификатор". Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Левая часть четвертого антецедента разрешается относительно z при помощи задачи на описание, после чего преобразуется к виду дизъюнкции конъюнкций и обрабатывается нормализатором "допнеизв". В качестве z выбирается набор новых переменных, имеющий длину n. Указатели "развертка" определяют выписывание конечных сумм как обычных и кванторов общности как конъюнкций. Указатель "дизъюнктчлен" определяет последовательную идентификацию правой части четвертого антецедента с каждым из полученных дизъюнктивных членов левой части. При этом итоговое заменяющее утверждение приема формируется как дизъюнкция соответствующих частных случаев таких утверждений. Нормализатор "допнеизв", приводимый ниже, получает входной комментарий (неизвестные z). При необходимости он вводит фиктивные равенства для переменных $z(j)$, чтобы оказалась возможной идентификация с правой частью антецедента. Уровень срабатывания равен 4.

4. Синтезатор "вырождядро" усмотрения вырожденного ядра и определения соответствующих двух наборов функций одной переменной.

   Синтезатор реализует утверждение "вырождядро(a, b, c)". Входным данным служит выражение a для ядра рассматриваемого интегрального уравнения. Выходным переменным b, c присваиваются наборы функций, зависящих, соответственно, от x и от t, такие, что ядро представимо как сумма произведений функций $b(i), c(i)$. При обращении синтезатору передаются комментарии (переменная x) и (параметр t).

   (a) Произведение двух функций одной переменной.
   $\forall_{abcdpq}(a = bc \to$ вырождядро$(a, (b), (c)))$

   Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная b идентифицируется с произведением всех сомножителей, содержащих x. Это произведение не содержит t. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Отделение произведения двух функций одной переменной.
   $\forall_{abcdpq}(a = bc + d$ & вырождядро$(d, p, q) \to$
   вырождядро$(a,$ префикс$(b, p),$ префикс$(c, q)))$

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор" и обрабатывается аналогично предыдущему приему. Второй антецедент реализует рекурсивное обращение к синтезатору. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{abcdpqr}(a = bc/r + d$ & вырождядро$(d, p, q) \to$
   вырождядро$(a,$ префикс$(b, p),$ префикс$(c/r, q)))$

   Аналогично предыдущему. Выражение r не содержит переменной x.

5. Нормализатор "допнеизв" ввода равенств для варьируемых параметров в случае характеристического значения.

   $\forall_{abcx}(a \ \vee \ b \leftrightarrow a$ & $x = c$ & $c -$ число $\vee \ b)$

   Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию комментария (неизвестные ...) и переменной x, упоминаемой в этом комментарии. Проверяется, что утверждение a не содержит x. В качестве c выбирается новая переменная. Указатель "текпеременные" позволяет учитывать при выборе новой переменной список переменных, встречающихся в комментарии.

   $\forall_{FGcx}(F(x) \ \vee \ G \leftrightarrow F(c)$ & $x = c$ & $c -$ число $\vee \ G)$

   Переменная F функциональная. Указатель "контекст" такой же, как в предыдущем случае. Проверяется, что $F(x)$ содержит x, но не имеет конъюнктивного члена вида "$x = \ldots$". В качестве c выбирается новая переменная. Уровень срабатывания равен 2.

Дифференцирование уравнения

Как и любая задача на описание, задача на решение интегрального уравнения в некоторый момент может перейти к рассмотрению своего блока анализа. При этом будут выводиться следствия уравнения, ориентированные на определение неизвестных. Один из приемов такого вывода следствий - дифференцирование уравнения.

$\forall_{afgy}(ay(x)+f(x)=g(x)\rightarrow ady(x)/dx+df(x)/dx=dg(x)/dx)$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель (связка $x\ldots$) и неизвестную y. Переменные f,g функциональные. Выражение $f(x)$ содержит определенный интеграл, подынтегральное выражение которого зависит от y. Выражение a не содержит x. Обе части выводимого равенства упрощаются задачами на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{afgy}(ady(x)/dx+f(x)=g(x)\rightarrow ad^2y(x)/dx^2+df(x)/dx=dg(x)/dx)$

Аналогично предыдущему.

$\forall_{afgy}(ay(x)+f(x)=g(x)\rightarrow ady(x)/dx+da/dx\cdot y(x)+df(x)/dx=dg(x)/dx)$

Аналогично предыдущему, но выражение a содержит x, и уровень срабатывания равен 4. Созданы две версии приема: в одной из них вычисление производных сопровождается применением нормализатора "нормдифф", а в другой - нет.

Линейная комбинация уравнений, позволяющая исключить интеграл

$\forall_{abcdefpqrs}(a\int_b^c f(t)dt+d=e\ \&\ s=pe-pd+aq-ar\rightarrow p\int_b^c f(u)du+q=r\leftrightarrow s=0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование, имеющей цель (интеграл $\ldots$). Первый антецедент идентифицируется с другой посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок. Результат s не содержит символа "интеграл" и отличен от нуля. Уровень срабатывания равен 3.

Отбрасывание вырожденного подслучая

$\forall_{AB}(A\ \vee\ B\leftrightarrow A)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению посылки задачи на исследование, имеющей цель (интеграл $\ldots$). Выражение A содержит неизвестные, а выражение B - не содержит. Уровень срабатывания равен 1.

Решение дифференциального уравнения относительно неизвестной функции

При решении интегральных уравнений путем вывода следствий, в блоке анализа могут возникать дифференциальные уравнения. Они решаются следующим приемом:

$\forall_{Aabcn}((ad^ny(x)/dx^n+b=c)=A\ \&\ ad^ny(x)/dx^n+b=c\rightarrow A)$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель (связка $x\ldots$)и неизвестную y. Эта посылка не содержит определенных интегралов с неизвестными. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно y при помощи задачи на описание. Уровень срабатывания равен 6.

Подстановка значения неизвестной функции при редактировании параметрического описания

$\forall_{atxy}(y(x) = t(x) \to y(a) = t(a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание, имеющей цели (интеграл $\ldots$), (связка $x \ldots$) и "учетответа". Напомним, что последняя цель указывает на этап редактирования параметрического описания. Переменная y - неизвестная. Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменная t функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

Исключение модуля

$\forall_a(|a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание, имеющей цели (интеграл $\ldots$) и (связка X), причем хотя бы одна из переменных X встречается в a. Преобразуемое выражение расположено под интегралом. Уровень срабатывания равен 3.

Обращение к синтезатору "тождравны" для подбора параметров

Синтезатор "тождравны", описываемый ниже, служит для подбора значений произвольных постоянных, обращающих уравнение в тождество.

$\forall_{abc}(\text{тождравны}(a = b, c) \ \& \ c = p \to a = b \leftrightarrow p)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель (интеграл y), причем неизвестная y не встречается в данном условии. Задача также имеет цель "учетответа". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию цели (связка $\ldots$), перечисляющей варьируемые переменные, и входящей в преобразуемое условие варьируемой переменной x. Другой указатель "контекст" определяет идентификацию цели (серия P), перечисляющей параметры P редактируемого параметрического описания. Первый антецедент обрабатывается синтезатором "тождравны", которому передается комментарий (переменная x). Синтезатор определяет конъюнкцию не содержащих x равенств, обращающих текущее условие в тождество. Предварительно равенство $a = b$ обрабатывается описываемым ниже нормализатором "нормтожд", выполняющим группировку относительно выражений с варьируемым параметром x. При обращении к этому нормализатору ему передается комментарий (переменная x). Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается относительно неизвестных P при помощи задачи на описание. Уровень срабатывания равен 6.

Усмотрение синус- либо косинус- преобразования Фурье

$\forall_{fgy}(f(x) \int_0^\infty y(t)\sin(xt)dt = g(x) \leftrightarrow y(x) = 2/pi \int_0^\infty (g(t)\sin(tx)/f(t))dt)$

$\forall_{fgy}(f(x)\int_0^\infty y(t)\cos(xt)dt = g(x) \leftrightarrow y(x) = 2/pi\int_0^\infty(g(t)\cos(tx)/f(t))dt)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на описание, имеющей цель (связка $x\ldots$) и неизвестную y. Переменные f, g функциональные. Выражения $f(x)$, $g(x)$ не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор "нормядро" приведения ядра к виду, удобному для решения уравнения

Нормализатору передаются входные комментарии (параметр t) и (переменная x). Пока понадобились лишь приемы для косинуса либо синуса суммы:

$\forall_{ab}(\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b)$

$\forall_{ab}(\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b)$

Переменная a идентифицируется с суммой всех слагаемых, содержащих t. Эта сумма не содержит t. Оба выражения a, b не тождественно нулевые.

Синтезатор "тождравны" подбора значений произвольных постоянных, обращающих уравнение в тождество

Синтезатор реализует утверждение "тождравны(a, b)". Входными данными служат равенство a с нулем в правой части и комментарий (переменная x). Выходной переменной b присваивается конъюнкция таких не содержащих варьируемой переменной x равенств, при выполнении которых равенство a истинно для любых удовлетворяющих посылкам значений x.

1. Равенство не содержит варьируемого параметра.

   $\forall_a$(тождравны$(a = 0, a = 0)$)

   Выражение a не содержит варьируемой переменной. Уровень срабатывания равен 1.

2. Шаг исключения слагаемого, содержащего варьируемую переменную.

   $\forall_{abcde}$(тождравны$(d = 0, e)$ & $\neg(c = 0) \rightarrow$ тождравны$(ab/c + d = 0, e$ & $b = 0)$)

   Переменная a идентифицируется с непустым произведением всех содержащих x сомножителей. Выражение c не содержит x. Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Нормализатор "нормтожд" группировки относительно вражений с варьируемым параметром

Все приемы нормализатора, кроме приема лексикографического упорядочения сомножителей, срабатывают на уровне 1.

1. Группировка ненулевых членов в левой части.

   $\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a - b = 0)$

   Обе части равенства ненулевые.

2. Группировка слагаемых с одинаковым выражением, зависящим от варьируемого параметра.

   $\forall_{abc}(ab/d + ac/e = a(b/d + c/e))$

   Выражение a идентифицируется с непустым произведением всех содержащих варьируемую переменную x сомножителей числителя первой дроби. Проверяется, что выражения c, d, e не содержат x.

   $\forall_{abcdef}(ab/(cd) + (ae)/(cf) = a/c(b/d + e/f))$

   Выражения a, c идентифицируются с произведениями всех содержащих x сомножителей, соответственно, числителя и знаменателя первой дроби. Хотя бы одно из этих произведений непусто. Проверяется, что выражения e, f не содержат x.

3. Синус либо косинус суммы.

   $\forall_{ab}(\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   $\forall_{ab}(\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$

   Выражение a содержит варьируемую переменную x, а b - не содержит.

4. Раскрывание скобок.

   $\forall_{abcd}(a(b + c)/d = ab/d + ac/d)$

5. Минус перед суммой.

   $\forall_{ab}(-(a + b) = -a - b)$

6. Сумма в показателе степени.

   $\forall_{abc}(0 < a \to a^{b+c} = a^b a^c)$

   Выражение b содержит варьируемую переменную, а c - не содержит. Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

7. Прием для устранения вложенных сумм.

8. Прием для устранения вложенных произведений.

9. Прием для лексикографического упорядочения сомножителей.

Глава 7

Приемы, связанные с метрическими пространствами

В некоторых из разделов, о которых упоминается в данной книге, обучение решателя только начато. Одним из таких разделов является функциональный анализ, где было проработано лишь около трех десятков задач на метрические пространства - на замкнутые и открытые множества и на простейшие свойства непрерывных отображений. При решении задач, как правило, приемы ГЕНОЛОГа обеспечивали лишь расшифровку понятий по определениям, а основной объем работы выполняли реализованные на ЛОСе общелогические приемы. Впрочем, траектории решения задач оказались достаточно громоздкими. При этом кванторные условия регулярно вынуждали решатель обращаться к задачам на описание, имеющим цель "длялюбого". Подробнее о таких задачах говорилось в начале второго тома монографии.

7.1 Логические символы, относящиеся к метрическим пространствам

Утверждение "метрпространство(a)" означает, что a есть метрическое пространство.

Утверждение "метрика(a, b)" означает, что числовая функция a задает метрику на множестве b.

Утверждение "функрасст(a, b)" означает, что a есть функция расстояния метрического пространства b.

Выражение "метрпрост(a, b)" обозначает метрическое пространство, определенное на множестве a метрикой b.

Выражение "метрнаборы(a, b)" обозначает метрическое пространство вещественных наборов длины a, расстояние между которыми задается как корень b-й степени из суммы b-х степеней модулей разности координат.

Выражение "метрпослед(a)" обозначает метрическое пространство вещественных последовательностей, для которых сходится ряд a-х степеней модулей. Расстояние определяется как корень a-й степени из суммы a-х степеней модулей разности соответствующих членов.

Выражение "метрогрпослед" обозначает метрическое пространство ограниченных вещественных последовательностей, на котором расстояние определяется как супремум модулей разности соответственных членов.

Выражение "метрсход" обозначает метрическое пространство сходящихся вещественных последовательностей, расстояние между которыми равно супремуму модулей разности соответственных членов.

Выражение "метрсход0" обозначает метрическое пространство сходящихся к нулю вещественных последовательностей, расстояние между которыми равно супремуму модулей разности соответственных членов.

Выражение "метрчислпослед" обозначает метрическое пространство вещественных последовательностей, расстояние между которыми определяется как сумма произведений отрицательных степеней двойки на дроби, имеющие в числителе модуль разности соответственных членов, а в знаменателе - этот модуль, увеличенный на единицу.

Выражение "метрнепр(a, b)" обозначает метрическое пространство непрерывных вещественных функций на отрезке $[a, b]$, расстояние между которыми определяется как максимум модулей разности.

Выражение "метрогр(a, b)" обозначает метрическое пространство ограниченных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций, расстояние между которыми равно супремуму модулей разностей.

Выражение "метринтегр(a, b)" обозначает метрическое пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций, расстояние между которыми определяется как интеграл от модуля разности.

Выражение "шарметр(a, b, c)" обозначает открытый шар радиуса b в метрическом пространстве c, имеющий своим центром точку a.

Выражение "закршар(a, b, c)" обозначает закрытый шар радиуса b в метрическом пространстве c, имеющий своим центром точку a.

Утверждение "внутртчк(a, b, c)" означает, что a есть внутренняя точка множества b метрического пространства c.

Выражение "внутрметр(a, b)" обозначает внутренность множества a в метрическом пространстве b.

Утверждение "открметр(a, b)" означает, что a есть открытое множество в метрическом пространстве b.

Утверждение "окртчк(a, b, c)" означает, что множество b является окрестностью точки a в метрическом пространстве c.

Утверждение "сходметр(a, b, c)" означает, что последовательность a точек метрического пространства c сходится к точке b.

Утверждение "предтчкметр(a, b, c)" означает, что a есть предельная точка множества b в метрическом пространстве c.

Утверждение "замкнметр(a, b)" означает, что a есть замкнутое множество в метрическом пространстве b.

Утверждение "изолиртчкметр(a, b, c)" означает, что a есть изолированная точка множества b в метрическом пространстве c.

Выражение "замыкметр(a, b)" обозначает замыкание множества a метрического пространства b.

Выражение "расстметр(a, b, c)" обозначает точную нижнюю грань расстояний точки a метрического пространства c до точек множества b.

Утверждение "плотнметр(a, b, c)" означает, что множество a точек метрического пространства c плотно в множестве b точек этого пространства.

Утверждение "огрметр(a, b)" означает, что a есть ограниченное множество в метрическом пространстве b.

Выражение "прямпроизвметр(a, b)" обозначает прямое произведение метрических пространств a, b. Метрика определяется как сумма исходных метрик.

Утверждение "непрметр(a, b, c)" означает, что a есть числовая функция, определенная на подмножестве точек метрического пространства c и непрерывная в точке b.

Утверждение "равнепрметр(a, b, c)" означает, что a есть числовая функция, равномерно непрерывная на подмножестве b носителя метрического пространства c.

Утверждение "фундпослметр(a, b)" означает, что a есть фундаментальная последовательность точек метрического пространства b.

7.2 Приемы, связанные с простейшими свойствами метрических пространств

Использование определения метрики

$$\begin{aligned}
&\forall_{Af}(\forall_{xy}(x \in A \ \& \ y \in A \to f(x, y) - \text{число} \ \& \ 0 \leq f(x, y)) \to \text{метрика}(f, A) \leftrightarrow \\
&\forall_{xy}(x \in A \ \& \ y \in A \to f(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y) \ \& \\
&\forall_{xy}(x \in A \ \& \ y \in A \to f(x, y) = f(y, x)) \ \& \\
&\forall_{xyz}(x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ z \in A \to f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)))
\end{aligned}$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Переменная f функциональная. Истинность антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

Ввод в рассмотрение функции расстояния

$$\forall_{Mf}(\text{метрпространство}(M) \to f - \text{функция} \ \& \ \text{функция}(f, M))$$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Отсутствует посылка вида "функрасст(X, M)". Прием выбирает новую переменную f. Уровень срабатывания равен 1.

Лексикографическое упорядочение операндов функции расстояния

$$\forall_{abf}(\text{функрасст}(f, M) \to f(a, b) = f(b, a))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменная f обычная. Выражение a не предшествует в лексикографическом порядке выражению b и не совпадает с ним. Уровень срабатывания равен 0.

Заметим, что для идентификации выражений $f(a, b)$ без учета порядка операндов в нижеследующих приемах по умолчанию используются указатели "список".

Расстояние от точки до нее самой

$\forall_{AMabf}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) & $a \in A$ & $b \in A \rightarrow f(a, b) = 0 \leftrightarrow a = b$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Maf}$(метрпространство(M) & функрасст$(f, M) \rightarrow f(a, a) = 0$)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

Использование неравенства треугольника для вывода следствия из кванторного неравенства

$\forall_{AMabfpt}$(метрпространство(M) & функрасст(f, M) & $\forall_x(A(x) \rightarrow f(a, t(x)) \leq p(x)) \rightarrow \forall_x(A(x) \rightarrow f(b, t(x)) \leq p(x) + f(a, b))$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на описание. Переменные p, t, A функциональные, переменная f обычная. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию подвыражения посылки, имеющего вид $f(a, b)$ либо $f(b, a)$. Это подвыражение не связано внешними кванторами и описателями. Некоторое условие задачи содержит подвыражение b. Указатель "альтернатива" разрешает рассмотрение строгого неравенства. Уровень срабатывания равен 4.

Использование неравенства треугольника для вывода следствия из двух кванторных неравенств

$\forall_{AMabfpqt}$(метрпространство(M) & функрасст(f, M) & $\forall_x(A(x) \rightarrow f(a, t(x)) \leq p(x))$ & $\forall_y(A(y) \rightarrow f(b, t(y)) \leq q(y)) \rightarrow \forall_x(A(x) \rightarrow f(a, b) \leq p(x) + q(x))$)

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменные p, q, t, A функциональные, переменная f обычная. Указатели "вариант" разрешают рассмотрение строгих неравенств в антецедентах. Уровень срабатывания равен 4.

Обратный вывод с помощью неравенства треугольника

$\forall_{Aabcdfpq}$(метрпространство(A) & функрасст(f, A) & $0 \leq p - f(a, c) - f(b, d)$ & $0 \leq q - p \rightarrow 0 \leq q - |f(a, b) - f(c, d)|$)

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "независит X". Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста. Выражение p не содержит переменных списка X, а хотя бы одно из выражений a, b, c, d - содержит. Четвертый антецедент, выделенный указателем "подборзначений", заменяет текущее условие во вспомогательной задаче на описание. Указатель "вариант" разрешает рассмотрение строгого неравенства в третьем антецеденте. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{Aabcdfpq}$(метрпространство(A) & функрасст(f, A) & $0 \leq p - f(a, c) - f(b, d)$ & $0 < q - p \rightarrow 0 < q - |f(a, b) - f(c, d)|$)

Аналогично предыдущему.

$\forall_{Aabcdfpq}$(метрпространство(A) & функрасст(f, A) & $0 < c - f(a, p)$ & $0 < d - f(a, q)$ & $0 < e - c - d \rightarrow 0 < e - f(p, q)$)

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "независит X". Первые четыре антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста. Выражения $, d$ не содержат переменных списка X, а выражения p, q - содержат. Пятый антецедент, выделенный указателем "подборзначений", заменяет текущее условие во вспомогательной задаче на описание. Указатели "вариант" разрешают рассмотрение нестрогих неравенств в третьем и четвертом антецедентах. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{ABMabfpq}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) & $a \in A$ & $b \in A$ & $f(a, b) + p \leq q \rightarrow \forall_x(f(a, x) < p$ & $x \in A$ & $B(x) \rightarrow f(b, x) < q)$)

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицруется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная B функциональная, переменная f - обычная. Первые пять антецедентов идентифицируются с утверждениями из контекста. Шестой антецедент, выделенный указателем "подборзначений", заменяет исходное условие во вспомогательной задаче на описание. Уровень срабатывания равен 4.

$\forall_{ABabfp}$(метрпространство(A) & функрасст(f, A) & $B \subseteq$ носитель(A) & $a \in$ носитель(A) & $b \in$ носитель(A) & $f(a, b) < p \rightarrow$ $0 < p - |$расстметр$(a, B, A) -$ расстметр$(b, B, A)|$)

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "независит X". Первые два антецедент идентифицируются с утверждениями из контекста, следующие три - обрабатываются проверочными операторами. Последний антецедент, выделенный указателем "подборзначений", заменяет исходное условие во вспомогательной задаче на описание. Уровень срабатывания равен 6.

Вывод неравенства треугольника в посылках задачи на описание, имеющей цель "независит"

$\forall_{ABabcf}$(метрпространство(A) & $B =$ носитель(A) & функрасст(f, A) & $a \in B$ & $b \in B$ & $c \in B$ & $0 < p - f(a, b) \rightarrow 0 \leq -|f(a, c) - f(b, c)| + p$)

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$|f(a, c) - f(b, c)|$" в условии задачи на описание, имеющей цель "независит X". Третий и седьмой антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение p не содержит переменных списка X, а выражение $f(a, b)$ - содержит. Уровень срабатывания равен 4.

Примеры метрических пространств

В каждом из пунктов этого раздела рассматривается некоторый тип метрических пространств, название которого было введено выше. Приводятся два приема, имеющих заголовок "второйтерм". Первый из них определяет носитель пространства, второй - значение функции расстояния. Уровни срабатывания приемов равны 1.

1. Метрнаборы.

   $\forall_{np}(\text{носитель}(\text{метрнаборы}(n,p)) = \text{set}_x(\text{кортеж}(x,n,\mathbb{R})))$

   $\forall_{fnp}(\text{функрасст}(f,\text{метрнаборы}(n,p)) \to f(x,y) = (\sum_{i=1}^{n}|x(i)-y(i)|^p)^{1/p})$

2. Метрпослед.

   $\forall_p(\text{носитель}(\text{метрпослед}(p)) = \text{set}_x(\text{последовательность}(x,\mathbb{R})\ \&$ $\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}|x(i)|^p, n - \text{натуральное}))))$

   $\forall_{fpxy}(\text{функрасст}(f,\text{метрпослед}(p)) \to f(x,y) = (\sum_{i=1}^{\infty}|x(i)-y(i)|^p)^{1/p})$

3. Метрогрпослед.

   $\text{носитель}(\text{метрогрпослед}) = \text{set}_x(\text{последовательность}(x,\mathbb{R})\ \&\ \text{огрмнож}(\text{Val}(x)))$

   $\forall_{fxy}(\text{функрасст}(f,\text{метрогрпослед}) \to f(x,y) =$ $\sup(\text{set}_z(\exists_i(i - \text{натуральное}\ \&\ z = |x(i)-y(i)|))))$

4. Метрсход.

   $\text{носитель}(\text{метрсход}) = \text{set}_x(\text{последовательность}(x,\mathbb{R})\ \&\ \text{сходится}(x))$

   $\forall_{fxy}(\text{функрасст}(f,\text{метрсход}) \to f(x,y) =$ $\sup(\text{set}_z(\exists_i(i - \text{натуральное}\ \&\ z = |x(i)-y(i)|))))$

5. Метрсход0.

   $\text{носитель}(\text{метрсход0}) = \text{set}_x(\text{последовательность}(x,\mathbb{R})\ \&\ \lim(x) = 0)$

   $\forall_{fxy}(\text{функрасст}(f,\text{метрсход0}) \to f(x,y) =$ $\sup(\text{set}_z(\exists_i(i - \text{натуральное}\ \&\ z = |x(i)-y(i)|))))$

6. Метрчислпослед.

   $\text{носитель}(\text{метрчислпослед}) = \text{set}_x(\text{последовательность}(x,\mathbb{R}))$

   $\forall_{fxy}(\text{функрасст}(f,\text{метрчислпослед}) \to f(x,y) =$ $\sum_{i=1}^{\infty}|x(i)-y(i)|/(2^i(1+|x(i)-y(i)|)))$

7. Метрнепр.

   $\forall_{ab}(\text{носитель}(\text{метрнепр}(a,b)) = \text{set}_x(\text{Отображение}(x,[a,b],\mathbb{R})\ \&$ $\text{непрерывно}(x,[a,b])))$

   $\forall_{abfxy}(\text{функрасст}(f,\text{метрнепр}(a,b)) \to f(x,y) =$ $\sup(\text{set}_z(\exists_t(t \in [a,b]\ \&\ z = |x(t)-y(t)|))))$

8. Метрогр.

   $\forall_{ab}$(носитель(метрогр(a,b)) $=$ set$_x$(Отображение$(x,[a,b],\mathbb{R})$ & огрмнож(Val(x))))

   $\forall_{abfxy}$(функрасст$(f,$ метрогр$(a,b)) \to f(x,y) =$ sup(set$_z(\exists_t(t \in [a,b]$ & $z = |x(t)-y(t)|)))))$

9. Метринтегр.

   $\forall_{ab}$(носитель(метринтегр(a,b)) $=$ set$_x$(Отображение$(x,[a,b],\mathbb{R})$ & непрерывно$(x,[a,b])$)))

   $\forall_{abfxy}$(функрасст$(f,$ метринтегр$(a,b)) \to f(x,y) = \int_a^b |x(t)-y(t)|dt)$

Прямое произведение метрических пространств

1. Носитель прямого произведения.

   $\forall_{AB}$(носитель(прямпроизвметр(A,B)) $=$ носитель(A) $\times$ носитель(B))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

2. Значение функции расстояния.

   $\forall_{ABfgh}$(функрасст(f,A) & функрасст(g,B) & функрасст$(h,$ прямпроизвметр$(A,B)) \to h(a,b) = f(a(1),b(1)) + g(a(2),b(2)))$

   Аналогично предыдущему.

3. Ввод в рассмотрение функции расстояния.

   $\forall_{ABf}(f -$ функция & функрасст$(f,$ прямпроизвметр$(A,B)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "прямпроизвметр(A,B)". Посылка вида "функрасст$(X,$ прямпроизвметр$(A,B))$" должна отсутствовать. Прием выбирает новую переменную f. Уровень срабатывания равен 1.

Проверочный оператор "усмметрпрост"

Кроме приемов непосредственного усмотрения из контекста, оператор имеет единственный прием - для прямого произведения метрических пространств:

$\forall_{AB}$(метрпространство(A) & метрпространство$(B) \to$ метрпространство(прямпроизвметр(A,B))))

Антецеденты реализуют рекурсивное обращение к данному оператору.

Нормализатор "нормноситель"

Данный нормализатор был введен при рассмотрении приемов по общей алгебре. Здесь перечисляются приемы, относящиеся к метрическим пространствам. Они дублируют приведенные выше приемы определения носителя метрических пространств "метрнаборы", "метрпослед", "метрогрпослед", "метрсход", "метрсход0", "метрчислпослед", "метрнепр", "метрогр", "метринтегр".

7.3 Множества точек метрических пространств

Ограниченные множества

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABMf}$(метрпространство(M) & $A =$ носитель(M) & функрасст(f, M) & $B \subseteq A \to$ огрметр$(B, M) \leftrightarrow \exists_{xy}(x \in A$ & $y -$ число & $\forall_z(z \in B \to f(x, z) < y)))$

   Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Если подутверждение корневое, то уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 5.

2. Вывод определения.

   $\forall_{ABMf}$(метрпространство(M) & $A =$ носитель(M) & функрасст(f, M) & $B \subseteq A$ & огрметр$(B, M) \to \exists_{xy}(x \in A$ & $y -$ число & $\forall_z(z \in B \to f(x, z) < y)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, исследование либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Второй антецедент выделен указателем "равно", первый и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

Расстояние от точки до множества

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABaf}$(метрпространство(A) & $B \subseteq$ носитель(A) & $\neg(B = \emptyset)$ & функрасст(f, A) & $a \in$ носитель$(A) \to$ расстметр$(a, B) = \inf(\text{set}_x(\exists_y(y \in B$ & $x = f(a, y)))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на доказательство либо на описание. Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 7.

2. Свертка кванторной импликации.

   $\forall_{BMadf}$(метрпространство(M) & функрасст$(f, M) \to \forall_x(x \in B \to d \leq f(a, x)) \leftrightarrow$ $0 \leq$ расстметр$(a, B) - d)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

Открытые множества

1. Расшифровка по определению условия "открытое".

   $\forall_{AM}$(метрпространство(M) & $A \subseteq$ носитель$(M) \to$ открметр$(A, M) \leftrightarrow$ $\forall_x(x \in A \to$ внутртчк$(x, A, M)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. В корневом случае уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 7.

$\forall_{AM}$(метрпространство(M) & $A \subseteq$ носитель(M) & открметр$(A, M) \rightarrow$
$\forall_x(x \in A \rightarrow$ внутртчк$(x, A, M)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, на исследование либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

2. Расшифровка по определению условия "внутренняя точка".

   $\forall_{AMaf}$(метрпространство(M) & функрасст$(f, M) \rightarrow$ внутртчк$(a, A, M) \leftrightarrow$
   $a \in A$ & $\exists_r(r -$ число & $0 < r$ & $\forall_x(x \in$ носитель(M) & $f(a, x) < r \rightarrow x \in A)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое утверждение не связано внешними кванторами и описателями. Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

3. Открытый шар.

   (a) Расшифровка принадлежности.
   $\forall_{Marx}$(функрасст$(f, M) \rightarrow x \in$ шарметр$(a, r, M) \leftrightarrow x \in$ носитель(M) &
   $f(a, x) < r)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Кванторная свертка в непересечение проколотой окрестности с множеством.

   $\forall_{AMabf}$(метрпространство(M) & функрасст(f, M) & $A \subseteq$ носитель$(M) \rightarrow$
   $\forall_x(x \in A$ & $f(x, a) < b \rightarrow x = a) \leftrightarrow$ шарметр$(a, b, M) \cap A \subseteq \{a\})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению посылки. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый и третий - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

Последовательности точек метрического пространства

1. Расшифровка по определению условия сходимости.

   $\forall_{AMabf}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) &
   последовательность(a, A) & $b \in A$ & сходметр$(a, b, M) \rightarrow$
   $\lim(\lambda_n(f(a(n), b), n -$ натуральное$)) = 0)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый, третий и шестой антецеденты идентифицируются с посылками. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", четвертый и пятый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{AMabf}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) &
   последовательность(a, A) & $b \in A \rightarrow$ сходметр$(a, b, M) \leftrightarrow$
   $\forall_e(e -$ число & $0 < e \rightarrow \exists_n(n -$ натуральное &
   $\forall_m(m -$ натуральное & $n \leq m \rightarrow f(a(m), b) < e))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная a идентифицируется с неизвестной. Выражения b, f не содержат неизвестных. Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 6.

2. Переход к пределу в неравенстве треугольника.

   $\forall_{AMabcfpq}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) &
   последовательность(a, A) & $b \in A$ & $c \in A$ &
   $\lim(\lambda_n(f(b, a(n)), n -$ натуральное$)) = p$ &
   $\lim(\lambda_m(f(c, a(m)), m -$ натуральное$)) = q \to f(b, c) \leq p + q$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - идентифицируются с посылками. Точка привязки выбрана в пятом антецеденте. Уровень срабатывания равен 3.

3. Расшифровка по определению условия фундаментальности.

   $\forall_{AMabf}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) &
   последовательность(a, A) & фундпослметр$(a, M) \to$
   $\forall_e(e -$ число & $0 < e \to \exists_m(m -$ натуральное &
   $\forall_{pq}(p -$ натуральное & $q -$ натуральное & $m < p$ & $m < q \to f(a(p), a(q)) < e))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий и пятый антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", первый и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{AMabf}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) &
   последовательность$(a, A) \to$ фундпослметр$(a, M) \leftrightarrow$
   $\forall_e(e -$ число & $0 < e \to \exists_m(m -$ натуральное &
   $\forall_{pq}(p -$ натуральное & $q -$ натуральное & $m < p$ & $m < q \to f(a(p), a(q)) < e))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Первый и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 6.

Предельные точки множеств метрических пространств

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABMaf}$(метрпространство(M) & функрасст(f, M) & носитель$(M) = B$ &
   $A \subseteq B$ & $a \in B \to$ предтчкметр$(a, A, M) \leftrightarrow$
   $\forall_b(b -$ число & $0 < b \to \exists_x(x \in A$ & $f(a, x) < b$ & $\neg(x = a))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению посылки задачи на доказательство, на исследование либо задачи на описание, не имеющей цели "прямойответ". Это подутверждение расположено под корневым отрицанием. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

Создана еще одна версия приема, применяемая к подутверждению условия задачи на доказательство. Если это подутверждение корневое, то уровень срабатывания равен 6. Иначе утверждение должно быть расположено под корневым отрицанием, и тогда уровень срабатывания равен 7.

2. Вывод определения.

   $\forall_{ABMaf}$(метрпространство(M) & функрасст(f, M) & носитель$(M) = B$ &
   $A \subseteq B$ & $a \in B$ & предтчкметр$(a, A, M) \to$
   $\forall_b(b$ – число & $0 < b \to \exists_x(x \in A$ & $f(a, x) < b$ & $\neg(x = a))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и шестой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, на исследование либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

3. Принадлежность носителю.

   $\forall_{AMa}$(предтчкметр$(a, A, M) \to a \in$ носитель$(M))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

Замкнутые множества

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{AM}$(метрпространство(M) & $A \subseteq$ носитель$(M) \to$ замкнметр$(A, M) \leftrightarrow$
   $\forall_x$(предтчкметр$(x, A, M) \to x \in A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В корневом случае уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 7.

2. Вывод определения.

   $\forall_{AM}$(метрпространство(M) & $A \subseteq$ носитель(M) & замкнметр$(A, M) \to$
   $\forall_x$(предтчкметр$(x, A, M) \to x \in A))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, на исследование либо задачи на описание, имеющей цель "пример". Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

3. Замыкание множества.

   $\forall_{AMa}$(метрпространство$(M) \to a \in$ замыкметр$(A, M) \leftrightarrow$
   $a \in A \;\vee\;$ предтчкметр$(a, A, M))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 3.

4. Принадлежность закрытому шару.

   $\forall_{AMaf}$(метрпространство(M) & функрасст(f, M) & $A =$ носитель(M) &
   $a \in A \to b \in$ закршар$(a, r, M) \leftrightarrow b \in A$ & $f(a, b) \leq r)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Первый и четвертый антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

Плотные множества

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ABCMf}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) & $B \subseteq A$ & $C \subseteq A \to$ плотнметр$(B, C, M) \leftrightarrow \forall_{ex}(e -$ число & $0 < e$ & $x \in C \to \exists_y(y \in B$ & $f(x, y) < e)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. В корневом случае уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 7.

2. Вывод определения.

   $\forall_{ABCMf}$(метрпространство(M) & носитель$(M) = A$ & функрасст(f, M) & $B \subseteq A$ & $C \subseteq A$ & плотнметр$(B, C, M) \to \forall_{ex}(e -$ число & $0 < e$ & $x \in C \to \exists_y(y \in B$ & $f(x, y) < e)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй, третий и шестой антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, на исследование либо задачи на описание, имеющей цель "пример". При этом второй антецедент выделен указателем "равно". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

7.4 Непрерывные отображения метрических пространств

Непрерывность вещественных функций, определенных на метрическом пространстве

$\forall_{Aafg}$(метрпространство(A) & $a \in$ носитель(A) & функрасст$(f, A) \to$ непрметр$(g, a, A) \leftrightarrow \forall_e(e -$ число & $0 < e \to \exists_d(d -$ число & $0 < d$ & $\forall_x(x \in$ носитель(A) & $f(a, x) < d \to |g(x) - g(a)| < e))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство - корневому либо расположенному под корневым отрицанием. Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. В корневом случае уровень срабатывания равен 6, иначе он равен 7.

Равномерная непрерывность вещественных функций, определенных на метрическом пространстве

$\forall_{ABfg}(\text{метрпространство}(A)\ \&\ B \subseteq \text{носитель}(A)\ \&\ \text{функрасст}(f, A) \rightarrow$
$\text{равнепрметр}(g, B, A) \leftrightarrow \forall_e(e - \text{число}\ \&\ 0 < e \rightarrow \exists_d(d - \text{число}\ \&\ 0 < d\ \&$
$\forall_x(x \in B\ \&\ y \in B\ \&\ f(x, y) < d \rightarrow |g(x) - g(y)| < e))))$

Аналогично предыдущему приему.

7.5 Пример задачи на метрические пространства

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий поведение решателя на задачах, связанных с метрическими пространствами. В нем требуется доказать, что объединение произвольного семейства открытых множеств является открытым.

Задача на доказательство имеет посылки "$\text{метрпространство}(M)$", "$\text{носитель}(M) = A$", "$\text{семействомножеств}(B)$", "$\forall_x(x \in \text{Val}(B) \rightarrow x \subseteq A\ \&\ \text{открметр}(x, M))$" и условие "$\text{открметр}(\bigcup(B), M)$".

Прежде всего, срабатывает прием, вводящий обозначение для функции расстояния. Он добавляет посылки "$\text{функрасст}(a, M)$" и "$a - \text{функция}$". Затем идет серия стандартизирующих преобразований, после которых список посылок приобретает вид:

"$\forall_b(b \in \text{Dom}(B) \rightarrow \text{открметр}(B(b), M))$", "$\text{функрасст}(a, M)$", "$a - \text{функция}$", "$B - \text{функция}$", "$A - \text{set}$", "$\text{метрпространство}(M)$", "$\text{носитель}(M) = A$", "$\text{семействомножеств}(B)$", "$\forall_c(c \in \text{Dom}(B) \rightarrow B(c) \subseteq A)$".

Далее срабатывает прием, выполняющий расшифровку условия:

$\forall_d(d \in \bigcup(B) \rightarrow \text{внутртчк}(d, \bigcup(B), M))$

Конечное объединение переписывается в развернутом виде:

$\forall_d(d \in \bigcup_{e, e \in \text{Dom}(B)} B(e) \rightarrow \text{внутртчк}(d, \bigcup(B), M))$

Срабатывает общелогический прием, перебрасывающий антецеденты доказываемой кванторной импликации в посылки. К посылкам задачи добавляется утверждение "$d \in \bigcup_{e, e \in \text{Dom}(B)} B(e)$", а условием становится "$\text{внутртчк}(d, \bigcup(B), M)$".

Предпринимается расшифровка условия:

$\exists_f(\forall_g(a(d, g) < f\ \&\ g \in \text{носитель}(M) \rightarrow g \in \bigcup(B))\ \&\ 0 < f\ \&\ f - \text{число})$

Подставляется выражение для носителя, определяемое равенством из контекста:

$\exists_f(\forall_g(a(d, g) < f\ \&\ g \in A \rightarrow g \in \bigcup(B))\ \&\ 0 < f\ \&\ f - \text{число})$

Теперь срабатывает прием, сводящий задачу на доказательство существования к задаче на описание, выполняющей подбор примера. Посылки прежние, а условия суть утверждения "$\forall_g(a(d, g) < f\ \&\ g \in A \rightarrow g \in \bigcup(B))$", "$0 < f$", "$f - \text{число}$". Неизвестной служит переменная f. Эта неизвестная - несущественная.

Посылка "$d \in \bigcup_{e, e \in \text{Dom}(B)} B(e)$" преобразуется по определению принадлежности конечному объединению:

$\exists_e(d \in B(e)\ \&\ e \in \text{Dom}(B))$

Конечное объединение в условии задачи переписывается в развернутом виде:

$\forall_g(a(d,g) < f \ \& \ g \in A \to g \in \bigcup_{h,h \in \mathrm{Dom}(B)} B(h))$

Квантор существования в посылке исключается за счет ввода вспомогательных объектов. Вместо него появляются посылки "$d \in B(i)$", "$i \in \mathrm{Dom}(B)$".

Предпринимается расшифровка условия принадлежности конечному объединению в условии задачи:

$\forall_g(a(d,g) < f \ \& \ g \in A \to \exists_h(g \in B(h) \ \& \ h \in \mathrm{Dom}(B)))$

Срабатывает общелогический прием, выодящий следствие в посылках из имеющейся там кванторной импликации:

открметр$(B(i), M)$

Аналогичным образом, выводится следствие $B(i) \subseteq A$, которое сразу же отбрасывается как очевидное.

Выполняется расшифровка по определению посылки "открметр$(B(i), M)$", которая сохраняется, а результат добавляется в качестве новой посылки:

$\forall_e(e \in B(i) \to$ внутртчк$(e, B(i), M))$

Эта кванторная импликация инициирует очередной вывод следствия:

внутртчк$(d, B(i), M)$

Последнее, после расшифровки и простейшей стандартизации, заменяется на:

$\exists_j(\forall_k(a(d,k) < j \ \& \ k \in A \to k \in B(i)) \ \& \ 0 < j \ \& \ j -$ число$)$

Связанная переменная j квантора существования заменяется на вспомогательный объект l, а вместо квантора возникают посылки "$\forall_k(a(d,k) < l \ \& \ k \in A \to k \in B(i))$", "$0 < l$", "$l -$ число".

Начиная с этого момента, для реализации кванторной импликации в условиях задачи вводится задача на описание, имеющая цель "длялюбого". Антецеденты импликации и прочие условия переносятся в посылки, а в качестве условия используется консеквент "$\exists_h(g \in B(h) \ \& \ h \in \mathrm{Dom}(B))$". Для удобства дальнейших рассмотрений перечислим посылки, имеющиеся на текущий момент:

"$a(d,g) < f$", "$g \in A$", "$0 < f$", "$0 < l$", "$\forall_k(a(d,k) < l \ \& \ k \in A \to k \in B(i))$",
"$\forall_e(e \in B(i) \to$ внутртчк$(e, B(i), M))$", "открметр$(B(i), M)$", "$i \in \mathrm{Dom}(B)$",
"$d \in B(i)$", "$\forall_b(b \in \mathrm{Dom}(B) \to$ открметр$(B(b), M))$", "функрасст(a, M)",
"метрпространство(M)", "носитель$(M) = A$", "семействомножеств(B)",
"$\forall_c(c \in \mathrm{Dom}(B) \to B(c) \subseteq A)$".

Введенная задача на описание имеет цель (независит g). Эта задача не имеет неизвестных. Она решается для того, чтобы получить несколько бескванторных утверждений, следствием которых являлась бы исходная кванторная импликация. Такие утверждения заменят импликацию во внешней задаче на описание.

Предпринимается исключение квантора существования в условии задачи. Новые условия суть "$g \in B(h)$", "$h \in \mathrm{Dom}(B)$". Переменная h становится неизвестной, причем эта неизвестная - несущественная. Допускается ее зависимость от "запрещенной" переменной g.

Кванторная посылка "$\forall_k(a(d,k) < l \ \& \ k \in A \to k \in B(i))$" используется для попытки обратного вывода: ее консеквент унифицируется с условием "$g \in B(h)$". В результате далее решается вспомогательная задача, имеющая условия "$h \in \mathrm{Dom}(B)$",

"$h = i$", "$a(d, g) < l$", "$g \in A$". Последнее из этих условий сразу же отбрасывается, так как имеется в посылках. Условие "$h \in \mathrm{Dom}(B)$" преобразуется в "$i \in \mathrm{Dom}(B)$" и отбрасывается по той же причине.

Чтобы исключить "запрещенную" переменную g, далее используется неравенство "$a(d, g) < f$" из посылок. Вводится вспомогательная задача, в которой условие $a(d, g) < l$ заменено на "$0 < l - f$". Равенство для несущественной неизвестной h отбрасывается, и на задачу с целью "длялюбого" выдается ответ "$0 < l - f$", в котором переменная g исключена.

Далее возвращаемся к исходной задаче, имевшей кванторное условие. Это условие заменено на "$0 < l - f$". Остальные два условия суть "$0 < f$", "$f-$число". Единственная неизвестная - f, причем она несущественная. Данная задача без труда решается стандартными средствами элементарной алгебры, и выдается окончательный ответ "истина".

Глава 8

Приемы по конечнозначным логикам

Рассматривались простейшие задачи на упрощение выражений, решение уравнений, выразимость и полноту.

8.1 Логические символы, используемые решателем в конечнозначных логиках

8.1.1 Понятия, связанные с алгеброй логики

Утверждение "двоичное(a)" означает, что a равно 0 либо 1.

Выражение "отр(a)" обозначает отрицание двоичного значения a.

Выражение "кн($a_1, \dots, a_n$)" обозначает конъюнкцию двоичных значений $a_1, \dots, a_n$.

Выражение "дн($a_1, \dots, a_n$)" обозначает дизъюнкцию двоичных значений $a_1, \dots, a_n$.

Выражение "имп(a_1, a_2)" обозначает импликацию двоичных значений a_1, a_2.

Выражение "плс($a_1, \dots, a_n$)" обозначает двоичную сумму двоичных значений $a_1, \dots, a_n$.

Выражение "экв($a_1, \dots, a_n$)" обозначает двоичную эквивалентность двоичных значений $a_1, \dots, a_n$.

Выражение "штрихшеффера(a_1, a_2)" обозначает штрих Шеффера двоичных значений a_1, a_2.

Выражение "стрелкапирса(a_1, a_2)" обозначает стрелку Пирса двоичных значений a_1, a_2.

Заметим, что операции алгебры логики следует отличать от одноименных логических связок, используемых при работе с утверждениями. Формульный редактор прорисовывает их несколько иным способом, и для их набора используются другие сочетания клавиш. Операции "дн", "кн", "имп", "плс", "экв" прорисовываются стандартным инфиксным образом, остальные операции прорисовываются префиксным образом.

Выражение "дизъюнкциявсех(a)" обозначает дизъюнкцию всех значений конечного двоичного семейства a. Аналогично, "конъюнкциявсех(a)" - конъюнкция элементов конечного двоичного семейства a; "плсвсех(a)" - сумма по модулю 2 элементов конечного двоичного семейства a. Формульный редактор прорисовывает эти операции аналогично конечным суммам и произведениям:

$\bigvee_{i=1}^{n} a(i), \quad \bigwedge_{i=1}^{n} a(i), \quad \sum_{i=1}^{n} a(i), \quad \bigvee_{i,P(i)} a(i), \quad \bigwedge_{i,P(i)} a(i), \quad \sum_{i,P(i)} a(i)$

Утверждение "двнабор(a, n)" означает, что a есть набор из нулей и единиц, длина которого равна n.

Выражение "двкуб(n)" обозначает множество всех двоичных наборов длины n.

Выражение "дврасст(a, b)" обозначает расстояние по Хэммингу между двоичными наборами a и b.

Выражение "плсвект(a, b)" обозначает поразрядную сумму по модулю 2 булевых векторов a и b одинаковой длины.

Выражение "кнвект(a, b)" обозначает поразрядную конъюнкцию булевых векторов a и b одинаковой длины.

Выражение "днвект(a, b)" обозначает поразрядную дизъюнкцию булевых векторов a и b одинаковой длины.

Выражение "отрвект(a)" обозначает поразрядное отрицание булева вектора a.

Выражение "двнорма(a)" обозначает число единиц в двоичном наборе a.

Утверждение "двменьшеилиравно(a, b)" означает, что двоичный набор a поразрядно не превосходит двоичного набора b.

Утверждение "Фал(a)" означает, что a есть функция алгебры логики.

Формульный редактор прорисовывает выражение "$\lambda_{x_1 \ldots x_n}(t, x_1 - \text{boolean} \ \& \ \ldots \ \& \ x_n - \text{boolean})$" в виде "фал($t$)". При этом $x_1, \ldots, x_n$ - все свободные переменные терма t, упорядоченные лексикографически. Заметим, что здесь "фал" - не понятие предметной области, а лишь удобное соглашение интерфейса, ускоряющее ввод выражений. Во внутреннем (скобочном) представлении оно сразу же расшифровывается через описатель "отображение"

Выражение "фалы" обозначает множество всех функций алгебры логики.

Утверждение "линфал(a)" означает, что a есть линейная функция алгебры логики.

Выражение "двойствфал(a)" обозначает функцию алгебры логики, двойственную к функции a.

Утверждение "самодвфал(a)" означает, что a есть самодвойственная функция алгебры логики.

Утверждение "монотфал(a)" означает, что a есть монотонная функция алгебры логики.

Утверждение "сохр0(a)" означает, что a есть функция алгебры логики, сохраняющая ноль.

Утверждение "сохр1(a)" означает, что a есть функция алгебры логики, сохраняющая единицу.

Выражения "Сохр0", "Сохр1", "Линфал", "Самодвфал" и "Монотфал" обозначают, соответственно, множество всех сохраняющих ноль, сохраняющих единицу, линейных, самодвойственных и монотонных функций алгебры логики.

Выражения "Конст0", "Конст1", "Конст01" обозначают, соответственно, множества всех функций алгебры логики, тождественно равных нулю, единице, и всех тождественно константных функций алгебры логики.

Выражение "замыкфал(a)" обозначает замыкание множества a функций алгебры логики.

Утверждение "фалбазис(a)" означает, что a есть базис для множества всех функций алгебры логики.

Утверждение "шефферова(a)" означает, что a есть функция алгебры логики, образующая полную систему.

Приведем еще два символа, относящиеся к функциям произвольной природы, но используемым в данном разделе.

Выражение "суперпоз(f, n, g)" обозначает результат подстановки в функцию f функции g вместо переменной, имеющей номер n. Набор аргументов для новой функции получается конкатенацией набора аргументов функции f с пропущенным n-м элементом, и набора аргументов функции g.

Выражение "переименование(f, a)" обозначает функцию, получаемую из многоместной функции f при перестановке (возможно, с отождествлениями) ее переменных, определяемой набором a. Длина набора a равна числу переменных функции f, причем на i-м месте расположен тот новый номер, который получает i-я переменная функции f. При наличии отождествлений новая функция будет зависеть от меньшего числа переменных.

8.1.2 Понятия, связанные с многозначными логиками

Выражение "$E(k)$" обозначает множество целых неотрицательных чисел от 0 до $k-1$.

Утверждение "Фмл(f, k)" означает, что f есть функция k-значной логики.

Выражение "фмлы(k)" обозначает множество всех функций k-значной логики.

Выражение "инд(a, b, c)" имеет своим значением c, если значения a, b равны, иначе оно имеет значение 0.

Выражение "отрп(a, k)" имеет своим значением отрицание Поста значения a в k-значной логике (т.е. $(a+1)(\mathrm{mod}\ k)$).

Выражение "отрл(a, k)" имеет своим значением отрицание Лукасевича значения a в k-значной логике (т.е. $k-1-a$).

Выражение "усечразн(a, b)" имеет своим значением усеченную разность чисел a, b (обычная разность, если b не превосходит a, иначе 0).

Выражение "имплик(a, b, k)" имеет своим значением импликацию значений a, b в k-значной логике, т.е. отрицание Лукасевича усеченной разности a и b.

Выражение "вебб(a, b, k)" определяет значение функции Вебба в точке (a, b) для k-значной логики.

Выражение "замыкфмл(A, k)" обозначает замыкание множества A функций k-значной логики.

Выражение "сохрконст(A, k)" обозначает множество всех функций k-значной логики, сохраняющих множество констант A.

Выражение "фмл(a)" обозначает функцию k-значной логики, определяемую таблицей a. Эта таблица представляет собой древовидную структуру, в которой каждая вершина - набор длины k. Чтобы определить значение функции в точке $(x_1, \dots, x_n)$, требуется перемещаться по дереву, последовательно выбирая элементы наборов с номерами $x_1 + 1, \dots, x_n + 1$. Концевые значения принадлежат $E(k)$.

8.2 Приемы по алгебре логики

8.2.1 Простейшие свойства операций алгебры логики

Приемы, связанные с символом "двоичное"

1. Усмотрение двоичного значения.

   Теорема приема имеет вид "родобъекта(двоичное)" и заголовок "родобъекта". Прием обращается к справочнику "тип" для усмотрения двоичного значения выражения A, имеющего своим заголовком логический символ. В случае успеха утверждение "двоичное(A)" заменяется на константу "истина". Уровень срабатывания равен 0.

2. Усмотрение противоречивых указаний на тип объекта.

   Теорема приема имеет вид "родобъекта(двоичное)" и заголовок "различимы". Прием анализирует утверждение "двоичное(x)", где x - переменная. Если в контексте имеется утверждение вида $P(x)$, где P - указатель на тип объекта, несовместимый с типом "двоичное", то анализируемое утверждение заменяется на константу "ложь". Уровень срабатывания равен 1.

3. Разбор случаев для неизвестного двоичного значения.

   $\forall_a(a - \text{boolean} \leftrightarrow a = 0 \ \vee a = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей неизвестную a. Должно существовать еще хотя бы одно содержащее a условие, не имеющее вида "$x = t$", где t не содержит неизвестных. Если выбор неоднозначен, то предпочтение отдается той неизвестной a, которая имеет большее число вхождений в условия задачи. Прием блокируется на этапе редактирования ответа, а также в тех случаях, когда булева неизвестная a используется для указания типа конца числового промежутка (0 - конец отброшен, 1 - не отброшен). Преобразованное условие сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 1.

4. Разбор случаев для двоичного значения, встречающегося в посылках задачи на доказательство.

   $\forall_a(a - \text{boolean} \leftrightarrow a = 0 \ \vee a = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на доказательство либо задачи на исследование, имеющей цель "противоречие". Преобразованная посылка сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 4.

5. Обращение к оператору "усмдвоичное".

   $\forall_a(a - \text{boolean} \rightarrow a - \text{boolean})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Если утверждение - корневое, причем a - переменная, то его применение допускается лишь в случае, если a - неизвестная задачи на описание. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "новый" активирует попытки его применения на локальных циклах сканирования, реализуемых в моменты вывода утверждений из "теневой" в активную зону сканирования. Уровень срабатывания равен 2.

6. Устранение отрицания равенства.

   $\forall_{ab}(a - \text{boolean}\ \&\ b - \text{boolean} \to \neg(a = b) \leftrightarrow a = \neg b)$

   Заметим, что первое отрицание - логическая связка, а второе - операция алгебры логики. Формульный редактор логической системы прорисовывает эти отрицания немного по-разному; в книге прорисовки совпадают.

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Предварительно проверяется истинность ускоряющего фильтра, усматривающего признаки рассмотрения в задаче двоичных значений. Уровень срабатывания равен 1.

7. Исключение квантора.

   $\forall_a(\exists_a(a - \text{boolean}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_f(\exists_x(x - \text{boolean}\ \&\ f(x)) \leftrightarrow f(0)\ \vee\ f(1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

8. Множество двоичных значений.

   $\text{set}_a(a - \text{boolean} = \{0, 1\})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

9. Изменение двоичного параметра.

   $\forall_{Pz}(z - \text{boolean} \to \exists_{xy}(x - \text{boolean}\ \&\ P(x + z)) \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{boolean}\ \&\ P(x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "контекст" определяет предварительную идентификацию подвыражения текущего терма задачи, имеющего вид "$x+z+Y$", с непустым Y. Переменная x идентифицируется с отдельной переменной кванторной приставки, переменная z - с произвольным выражением. Переменная P функциональная. Она идентифицируется с помощью указателя "новаргумент", причем идентифицируемое выражение предварительно обрабатывается нормализатором "двизвлечение", которому передается входной комментарий (новаргумент x+z x). Переменная y идентифицируется со списком переменных произвольной длины. Допускается вхождение этих переменных в выражения $P(x + z)$ и z. Никакое вхождение переменной x в идентифицированное с $P(x + z)$ утверждение не расположено в области действия квантора либо описателя по переменной, свободной в z. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 1.

10. Условие на двоичные значения функции.

    $\forall_{af}(a = \text{Dom}(f) \to \forall_x(x \in A \to f(x) - \text{boolean}) \leftrightarrow \text{Val}(f) \subseteq \{0, 1\})$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

11. Нормализатор исключения двоичных констант "нормдвконст".

    (a) Отрицание константы.
    $\neg 1 = 0$
    $\neg 0 = 1$
    Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Конъюнкция с константой.
    $\forall_a(1 \cdot a = a)$
    $\forall_a(0 \cdot a = 0)$
    Точкой в данном разделе обозначается булева конъюнкция "кн". Уровень срабатывания приемов равен 1.

    (c) Дизъюнкция с константой.
    $\forall_a(1 \vee a = 1)$
    $\forall_a(0 \vee a = a)$
    Уровень срабатывания равен 1.

    (d) Импликация с константой.
    $\forall_a(0 \Rightarrow a = 1)$
    $\forall_a(1 \Rightarrow a = a)$
    $\forall_a(a \Rightarrow 0 = \neg a)$
    $\forall_a(a \Rightarrow 1 = 1)$
    Рассматривается символ "имп". Уровень срабатывания равен 1.

    (e) Сумма с константой.
    $\forall_a(1 + a = \neg a)$
    $\forall_a(0 + a = a)$
    Рассматривается операция "плс". Уровень срабатывания равен 1.

    (f) Эквивалентность с константой.
    $\forall_a(1 \Leftrightarrow a = a)$
    $\forall_a(0 \Leftrightarrow a = \neg a)$
    Рассматривается символ "экв". Уровень срабатывания равен 1.

    (g) Двойное отрицание.
    $\forall_a(\neg(\neg(a)) = \neg a)$
    Уровень срабатывания равен 2.

12. Нормализатор группировки "группдвоичное".

    Нормализатор используется для быстрой сжимающей переформулировки выражений алгебры логики. Все тождества применяются справа налево. Уровень срабатывания приемов равен 1.

    (a) Вынесение общего множителя за скобку.
    $\forall_{abc}(a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c)$

(b) Вынесение общего отрицания за скобку.

$\forall_{ab}(\neg(a \vee b) = \neg a \cdot \neg b)$

$\forall_{ab}(\neg(a \cdot b) = \neg a \vee \neg b)$

(c) Усмотрение импликации.

$\forall_{ab}(a \Rightarrow b = \neg a \vee b)$

(d) Усмотрение суммы по модулю 2.

$\forall_{ab}(a + b = a \cdot \neg b \vee b \cdot \neg a)$

Указатель "отрицание" допускает одновременный переход к отрицанию для всех вхождений одной и той же переменной.

(e) Усмотрение эквивалентности.

$\forall_{ab}(a \Rightarrow b = a \cdot b \vee \neg a \cdot \neg b)$

Аналогично предыдущему.

13. Нормализатор "двизвлечение".

Нормализатор используется для преобразования булевского выражения к виду, в котором заданная переменная x встречается только внутри вхождений заданного подтерма t. Он аналогичен нормализатору "извлечение", созданному для численных выражений. Пока в данном нормализаторе имеется лишь один прием, выделяющий сумму по модулю два:

$\forall_{abc}(c = a \to a + b = c + b)$

Входной комментарий "новаргумент" задает переменную x и подтерм a. Проверяется, что этот подтерм имеет заголовок "плс", а также что преобразуемая сумма не равна a и не имеет слагаемого, равного a. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Он введен, чтобы компилятор не сохранил исходное выражение в неизменном виде.

14. Проверочный оператор "усмдвоичное".

(a) Усмотрение из посылок.

$\forall_{a}(a = 0 \to a - \mathrm{boolean})$

$\forall_{a}(a = 1 \to a - \mathrm{boolean})$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 1.

(b) Элемент двоичного набора.

$\forall_{amn}(\text{двнабор}(a, n)\ \&\ m - \text{натуральное}\ \&\ 0 \leq n - m \to a(m) - \mathrm{boolean})$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{amn}(\text{двнабор}(a, n)\ \&\ m \in \{1, \ldots, n\} \to a(m) - \mathrm{boolean})$

Аналогично предыдущему.

(c) Константа.

$0 -$ boolean

$1 -$ boolean

Уровень срабатывания приемов равен 1.

(d) Значение функции алгебры логики.

$\forall_{Abf}(\text{Отображение}(f, A, \{0,1\})\ \&\ b \in A \rightarrow f(b) - \text{boolean})$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{af}(\text{Val}(f) \subseteq \{0,1\} \rightarrow f(a) - \text{boolean})$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

$\forall_{af}(\text{Фал}(f) \rightarrow f(a) - \text{boolean})$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Afnx}(A(n)\ \&\ \forall_m(A(m) \rightarrow \text{Фал}(f(m))) \rightarrow f(n)(x) - \text{boolean})$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой, истинность первого устанавливается вспомогательной задачей на доказательство. Переменная A функциональная. Введен сильный ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания равен 2.

(e) Условное выражение.

$\forall_{Pab}(a - \text{boolean}\ \&\ b - \text{boolean} \rightarrow (a \text{ при } P,\ \text{иначе } b) - \text{boolean})$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

15. Проверочный оператор "двединица".

Оператор проверяет тождественное равенство выражений единице. Обрабатываемое им утверждение "двединица(a)" означает, что a равно 1.

16. Константа.

двединица(1)

Уровень срабатывания равен 1.

17. Разбор случаев.

$\forall_f(\text{двединица}(f(0))\ \&\ \text{двединица}(f(1)) \rightarrow \text{двединица}(f(x)))$

Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию некоторой переменной x, имеющей наибольшее ненулевое числ вхождений в $f(x)$. Переменная f функциональная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "спуск" блокирует альтернативные рассмотрения. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "отр"

1. Общая стандартизация выражений.

   $\neg 0 = 1$

   $\neg 1 = 0$

   $\forall_a(\neg\neg a = a)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Равенство отрицаний.

   $\forall_{ab}(\neg a = \neg b \leftrightarrow a = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3. Равенство противоположных значений.

   $\forall_a(\neg(a = \neg a))$

   Внешнее отрицание - логическая связка, внутреннее - операция алгебры логики. Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

4. Разрешение относительно неизвестной.

   $\forall_{ax}(\neg x = a \leftrightarrow x = \neg a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Не имеет места этап редактирования ответа. Выражение x содержит неизвестные, а a - не содержит. Допускаются надоперации "и", "или", "существует", "длялюбого". В антецедентах кванторных импликаций прием блокируется. Он блокируется также внутри кванторов существования, не представляющих собой параметрическое описание. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, в которой x - переменная, связанная внешним квантором существования либо общности. Преобразуемое равенство - либо конъюнктивный член подкванторного утверждения в кванторе существования, либо антецедент кванторной импликации. В условии задачи на описание, представляющем собой параметрическое описание, прием блокируется, если a содержит неизвестные, а x не содержит. Уровень срабатывания данной версии равен 4.

5. Равенство отрицания константе.

   $\forall_a(a - \text{boolean} \to \neg a = 1 \leftrightarrow a = 0)$

   $\forall_a(a - \text{boolean} \to \neg a = 0 \leftrightarrow a = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

6. Попытка преобразования к д.н.ф. для упрощения выражения.

   $\forall_{ab}(b = \neg a \to \neg a = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Это подвыражение - максимальное булевское, т.е. оно не является операндом какой-либо другой операции алгебры логики ("имп", "плс", "экв", "отр", "кн", "дн"). Не имеет место этап завершающего сжатия выражения. В задаче не требуется преобразовать выражение к виду д.н.ф. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Сначала его правая часть обрабатывается нормализатором "standдн", обеспечивающим преобразование к виду д.н.ф. и упрощение д.н.ф. Затем она обрабатывается нормализатором "двгруппировки", предпринимающим попытку сжатия терма, и в конце - нормализатором "свертка", предназначенным для той же цели. Если результат b не короче исходного выражения, то преобразование не выполняется. Нормализатор "двгруппировки" будет описан в разделе, связанном с дизъюнкцией. Уровень срабатывания равен 3.

Аналог данного приема введен для каждой из операций алгебры логики - чтобы инициировать попытку использования д.н.ф. при любом корневом заголовке максимального булевского подтерма.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормотр".

   Все приемы нормализатора срабатывают на уровне 1.

   (a) Отрицание константы.
   $\neg 0 = 1$
   $\neg 1 = 0$

   (b) Двойное отрицание.
   $\forall_a(\neg\neg a = a)$

   (c) Отрицание конъюнкции с отрицанием.
   $\forall_{bc}(\neg(b \cdot \neg c) = c \ \vee \ \neg b)$

   (d) Отрицание дизъюнкции с отрицанием.
   $\forall_{bc}(\neg(b \vee \neg c) = c \ \cdot \ \neg b)$

   (e) Отрицание эквивалентности.
   $\forall_{ab}(\neg(a \Leftrightarrow b) = a + b)$

   (f) Отрицание суммы по модулю 2.
   $\forall_{ab}(\neg(a + b) = a \Leftrightarrow b)$

   (g) Отрицание импликации.
   $\forall_{cd}(\neg(c \Rightarrow d) = c \cdot \neg d)$

Приемы, связанные с символом "кн"

1. Устранение вложенных конъюнкций.

   Прием имеет теорему "коммутативно(кн)" и заголовок "спускоперандов". Уровень срабатывания равен 0.

2. Лексикографическое упорядочение операндов.

   Прием имеет теорему "коммутативно(кн)" и заголовок "лексупорядочение". Уровень срабатывания равен 0.

3. Подбор примера.

   $\forall_{ax}(x = 0 \to x \cdot a = 0)$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Отсутствует другое содержащее x условие, имеющее длину более 2 и не имеющее вида "$\neg(x = b)$", где b - не тождественный ноль. Антецедент выделен указателем "подборзначений". Указатель "новый" разрешает попытки применения приема в теневых циклах сканирования. Уровень срабатывания приема равен 1.

4. Общая стандартизация выражений.

   $\forall_a(a \cdot 0 = 0)$

   $\forall_a(a \cdot \neg a = 0)$

   $\forall_a(a \cdot a = a)$

   $\forall_a(a \cdot 1 = a)$

   $\forall_{ab}(b \cdot (a \vee b) = b)$

   $\forall_{abc}(b \cdot (a \vee b \cdot c) = b \cdot (a \vee c))$

   $\forall_{ab}(a \cdot \neg(a \cdot b) = a \cdot \neg b)$

   $\forall_{bc}(\neg(b \cdot \neg c) = \neg b \vee c)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{abc}(a \cdot (b \vee c \cdot \neg a) = a \cdot b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Указатель "отрицание" разрешает одновременный переход к отрицаниям при идентификации вхождений выражения a. Уровень срабатывания равен 0.

5. Равенство конъюнкции единице.

   $\forall_{ab}(a \cdot b = 1 \leftrightarrow a = 1 \ \& \ b = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

6. Равенство конъюнкции нулю, являющееся консеквентом кванторной импликации.

   $\forall_{Apq}(\forall_x(A(x) \to p(x) \cdot q(x) = 0) \leftrightarrow \forall_x(A(x) \ \& \ p(x) = 1 \to q(x) = 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A, p, q функциональные. Переменная x идентифицируется с кванторной приставкой произвольной длины. В качестве $p(x)$ берется первый конъюнктивный член. Уровень срабатывания равен 3.

7. Попытка преобразования к д.н.ф. для упрощения выражения.

   $\forall_{abc}(c = a \cdot b \to a \cdot b = c)$

   Аналогично случаю отрицания. Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Это подвыражение - максимальное булевское. Не имеет место этап завершающего сжатия выражения. В задаче не требуется преобразовать выражение к виду д.н.ф. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами "станддн", "двгруппировки" и "свертка". Если результат c не короче исходного выражения, то преобразование не выполняется. Уровень срабатывания равен 3.

8. Попытка упрощения отрицания конъюнкции с переходом к импликации.

   $\forall_{abc}(\neg b = c \rightarrow \neg(a \cdot b) = a \Rightarrow c)$

   Прием имеет заголовок "воройтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, решаемой в режиме усилителя. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что результат c короче выражения b. Уровень срабатывания равен 6.

9. Нормализатор общей стандартизации "нормкн".

   (a) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 2. Остальные приемы нормализатора имеют уровень срабатывания 1.

   (b) Устранение вложенных конъюнкций.

   (c) Множитель 0.
   $\forall_a(a \cdot 0 = 0)$

   (d) Множитель 1.
   $\forall_a(a \cdot 1 = a)$

   (e) Одинаковые множители.
   $\forall_a(a \cdot a = a)$

   (f) Противоположные множители.
   $\forall_a(a \cdot \neg a = 0)$

   (g) Произведение переменной на выражение, содержащее эту переменную.
   $\forall_{ab}(b \cdot (a \vee b) = b)$
   $\forall_{abc}(b \cdot (a \vee b \cdot c) = b \cdot (a \vee c))$
   $\forall_{abc}(c \cdot (b \cdot c \Rightarrow a) = c \cdot (b \Rightarrow a))$
   $\forall_{ab}(b \cdot (b \Rightarrow a) = a \cdot b)$
   $\forall_{abc}(c \cdot (b \Rightarrow a \cdot c) = c \cdot (b \Rightarrow a))$
   $\forall_{ab}((a \Rightarrow b) \cdot \neg a = \neg a)$
   Допускается одновременный переход к отрицаниям у всех вхождений a.
   $\forall_{abc}(b \cdot (a + b \cdot c) = b \cdot (a + c))$
   $\forall_{ab}(b \cdot (a \Leftrightarrow b) = a \cdot b)$
   $\forall_{abc}(b \cdot (c \vee (a \Rightarrow b)) = b)$
   Допускается обращение c в ноль.
   $\forall_{abc}(a \cdot (b \vee c \cdot \neg a) = a \cdot b)$
   Допускаются одновременный переход к отрицаниям у всех вхождений переменной a и обращение c в единицу.
   $\forall_{abc}(b \cdot (c \vee \neg(a \cdot b)) = b \cdot (c \vee \neg a))$
   Допускается обращение c в ноль.
   $\forall_{ab}(a \cdot (b + \neg a) = a \cdot b)$
   Допускается одновременный переход к отрицаниям у всех вхождений a.
   $\forall_{ab}(b \cdot (a + b) = b \cdot \neg a)$

10. Нормализатор сокращенной записи "упрощкн".

(a) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 2. Остальные приемы срабатывают на уровне 1.

(b) Устранение вложенных конъюнкций.

(c) Вынесение за скобку общего отрицания двух операндов.
$\forall_{ab}(\neg(a \vee b) = \neg a \cdot \neg b)$
Прием применяется справа налево.

(d) Выражение суммы по модулю 2 через конъюнкцию двух дизъюнкций.
$\forall_{ab}((a \vee b) \cdot (\neg a \vee \neg b) = a + b)$
При идентификации переменных a, b допускается одновременный переход к отрицаниям для всех вхождений переменной.
$\forall_{abc}((a \vee (b + c)) \cdot (a \Rightarrow (b \Leftrightarrow c)) = a + b + c)$
Допускается одновременный переход к отрицаниям для всех вхождений переменной a.

(e) Выражение эквивалентности через две импликации.
$\forall_{ab}((a \Rightarrow b) \cdot (b \Rightarrow a))$

(f) Выделение общего члена двух дизъюнктивных множителей.
$\forall_{abc}((a \vee c) \cdot (b \vee c) = (c \vee a \cdot b))$

(g) Выделение общего члена двух импликативных множителей.
$\forall_{abc}((b \Rightarrow a) \cdot (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow a \cdot c)$

11. Нормализатор вынесения за скобки общего множители "двмножители".

Нормализатор имеет единственный прием:

$\forall_{abc}(a \cdot b \vee a \cdot c = a \cdot (b \vee c))$

12. Проверочный оператор "поглощкн".

Утверждение "поглощкн(a, b)", проверяемое оператором, равносильно неравенству $a \leq b$. Оператор используется в тех случаях, когда a - элементарная конъюнкция, b - дизъюнктивная нормальная форма. В таких случаях говорят, что конъюнкция поглощается данной д.н.ф. Проверка поглощения нужна при отыскании тупиковых и минимальных д.н.ф.

(a) Простейшие случаи.
$\forall_{ab}(\text{поглощкн}(a, a \vee b))$
b может отсутствовать. Уровень срабатывания равен 1.
$\forall_{a}(\text{поглощкн}(a, 1))$
Уровень срабатывания равен 1.

(b) Подстановка констант.
$\forall_{ab}(\text{поглощкн}(b, f(1)) \rightarrow \text{поглощкн}(a \cdot b, f(a)))$
Переменная f функциональная. Переменная a идентифицируется с переменной. Антецедент реализует рекурсивное обращение. Его подвыражение $f(1)$ предварительно обрабатывается оператором "норм", реализующим полный цикл применений нормализаторов общей стандартизации. Уровень срабатывания равен 2.
$\forall_{ab}(\text{поглощкн}(b, f(0)) \rightarrow \text{поглощкн}(\neg a \cdot b, f(a)))$
Аналогично предыдущему.

(c) Остаточный случай.

$\forall_a(a = 1 \to \text{поглощкн}(1, a))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором приведения к сокращенной д.н.ф. "сокращднф". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "дн"

1. Устранение вложенных конъюнкций.

   Прием имеет теорему "коммутативно(дн)" и заголовок "спускоперандов". Уровень срабатывания равен 0.

2. Лексикографическое упорядочение операндов.

   Прием имеет теорему "коммутативно(дн)" и заголовок "лексупорядочение". Уровень срабатывания равен 0.

3. Подбор примера.

   $\forall_{ax}(x = 1 \to x \vee a = 1)$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Отсутствует другое содержащее x условие, не имеющее вида "двоичное(x)". Антецедент выделен указателем "подборзначений". Указатель "новый" разрешает попытки применения приема в теневых циклах сканирования. Уровень срабатывания приема равен 1.

4. Общая стандартизация выражений.

   $\forall_a(a \vee 1 = 1)$

   $\forall_a(a \vee \neg a = 1)$

   $\forall_a(a \vee 0 = a)$

   $\forall_a(a \vee a = a)$

   $\forall_{ab}(a \vee a \cdot b = a)$

   $\forall_{abc}(a \vee c \cdot (a \vee b) = a \vee b \cdot c)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ab}(\neg(a \vee \neg b) = b \cdot \neg a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

5. Отбрасывание избыточного множителя.

   $\forall_{ab}(a \vee b \cdot \neg a = a \vee b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Допускается одновременный переход к отрицаниям у всех вхождений переменной a. Уровень срабатывания равен 0.

6. Попытка преобразования к д.н.ф. для упрощения выражения.

   $\forall_{abc}(c = a \vee b \to a \vee b = c)$

   Аналогично случаю конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

7. Простейшие уравнения.

   $\forall_{ab}(a \vee b = \neg a \leftrightarrow a = 0 \;\&\; b = 1)$

   $\forall_{ab}(a \vee b = 0 \leftrightarrow a = 0 \;\&\; b = 0)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

8. Попытка упрощения с переходом к импликации.

   $\forall_{abc}(\neg b = c \to a \vee b = c \Rightarrow a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, решаемой в режиме усилителя. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что результат c короче выражения b. Уровень срабатывания равен 5.

9. Обращение к нормализатору "сокращднф".

   $\forall_{ab}(a = \neg b \to \neg b = a)$

   $\forall_{abc}(a = b \cdot c \to b \cdot c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b \vee c \to b \vee c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b \Rightarrow c \to b \Rightarrow c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b + c \to b + c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b \Leftrightarrow c \to b \Leftrightarrow c = a)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на преобразование, имеющей цель "сокращднф". Такая цель означает, что требуется преобразовать формулу алгебры логики к виду сокращенной дизъюнктивной формы. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором приведения к сокращенной д.н.ф. "сокращднф". Уровени срабатывания приемов равны 2.

10. Обращение к синтезатору "тупикднф" для получения минимальной д.н.ф.

    $\forall_{abcd}(a \vee b = c \;\&\; \text{тупикднф}(d, c) \to a \vee b = d)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование, имеющей цель "минднф". Такая цель указывает на необходимость преобразовать выражение к виду какой-либо из минимальных д.н.ф. Преобразуемое выражение не имеет других логических символов, кроме "дн", "кн", "плс", "имп", "экв", "отр", "0", "1". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "сокращднф". Второй антецедент выделен указателем "значения". Он обрабатывается синтезатором "тупикднф", перечисляющим тупиковые д.н.ф. d, определяемые по сокращенной д.н.ф. c. Указатель "минимум(2 число(входит(e, d)переменная(e)))" указывает, что перечисление проводится полностью, а в качестве результата d отбирается вариант с наименьшим числом вхождений переменных. Уровень срабатывания равен 3.

11. Нормализатор общей стандартизации "нормдн".

    (a) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 2. Остальные приемы срабатывают на уровне 1.

- (b) Устранение вложенных дизъюнкций.
- (c) Устранение констант.
  $\forall_a(a \vee 0 = a)$
  $\forall_a(a \vee 1 = 1)$
- (d) Одинаковые операнды.
  $\forall_a(a \vee a = a)$
- (e) Противоположные операнды.
  $\forall_a(a \vee \neg a = 1)$
  $\forall_{ab}(a \vee \neg(a \cdot b) = 1)$
- (f) Поглощение.
  $\forall_{ab}(a \vee a \cdot b = a)$
- (g) Дополнительные тождества типа поглощения.
  $\forall_{ab}(b \vee (a + b) = a \vee b)$
  $\forall_{abc}(a \vee c \cdot (a \vee b) = a \vee b \cdot c)$
- (h) Отбрасывание избыточного множителя.
  $\forall_{ab}(a \vee b \cdot \neg a = a \vee b)$
  Допускается одновременный переход к отрицаниям для всех вхождений a.

12. Нормализатор сокращенной записи "упрощдн".

- (a) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 3. Остальные приемы, кроме последнего, срабатывают на уровне 1.
- (b) Устранение вложенных дизъюнкций.
- (c) Усмотрение суммы по модулю 2.
  $\forall_{ab}(a \cdot \neg b \vee b \cdot \neg a = a + b)$
  $\forall_{abc}(a \cdot \neg b \vee b \cdot (\neg a \vee c) = (a + b) \vee b \cdot c)$
  $\forall_{abc}(c \cdot \neg a \cdot \neg b \vee (a \vee b) \cdot \neg c = (a \vee b) + c)$
  $\forall_{abc}(\neg a \cdot (b + c) \vee a \cdot (b \leftrightarrow c) = a + b + c)$
  $\forall_{ab}(a \cdot \neg b \vee \neg(a \vee \neg b) = a + b)$
  Переменные, входящие как под отрицанием, так и без него, идентифицируются с точностью до одновременного инвертирования всех своих вхождений.
- (d) Вынесение за скобку общего множителя двух операндов.
  $\forall_{abc}(a \cdot b \vee a \cdot c = a \cdot (b \vee c))$
- (e) Усмотрение импликации.
  $\forall_{ab}(b \vee \neg a = a \Rightarrow b)$
- (f) Усмотрение произведения эквивалентности на дизъюнкцию.
  $\forall_{abc}(a \cdot b \cdot c \vee \neg a \cdot \neg b = (c \vee \neg a) \cdot (a \Leftrightarrow b))$
  При идентификации a, b допускается одновременное инвертирование всех их вхождений.
- (g) Вынесение за скобку отрицания.
  $\forall_{ab}(\neg a \vee \neg b = \neg(a \cdot b))$

(h) Усмотрение общего множителя, занесенного под отрицание.
$\forall_{abcde}(\neg(a \vee b) \cdot c \vee \neg(a \vee d) \cdot e = \neg a \cdot (c \cdot \neg b \vee e \cdot \neg d))$

Допускаются нулевое значение d и единичные значения c, e. Прием срабатывает на уровне 2.

13. Нормализатор "станддн" приведения к дизъюнктивной нормальной форме.

Кроме приведения к виду д.н.ф., нормализатор также выполняет упрощение этой д.н.ф.

(a) Лексикографическое упорядочение операндов дизъюнкции и конъюнкции. Операнды конъюнкций упорядочиваются на уровне 3, дизъюнкций - на уровне 4.

(b) Устранение вложенных одинаковых операций. Созданы прием для дизъюнкций и прием для конъюнкций. Их уровни срабатывания равны 1.

(c) Приведение к стандартной форме.

Уровни срабатывания приемов этого подраздела равны 1.

i. Устранение импликации.
$\forall_{ab}(a \Leftrightarrow b = \neg a \vee b)$

ii. Устранение эквивалентности.
$\forall_{ab}(a \Leftrightarrow b = a \cdot b \vee \neg a \cdot \neg b)$

iii. Устранение суммы по модулю 2.
$\forall_{ab}(a + b = a \cdot \neg b \vee \neg b \cdot \neg a)$

iv. Спуск отрицания.
$\forall_{ab}(\neg(a \vee b) = \neg a \cdot \neg b)$
$\forall_{ab}(\neg(a \cdot b) = \neg a \vee \neg b)$

v. Раскрывание скобок.
$\forall_{abc}(a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c)$

(d) Простейшие упрощающие тождества.

Уровни срабатывания приемов этого раздела равны 1.

i. Тождества с константами.
$\neg 0 = 1$
$\neg 1 = 0$
$\forall_a(a \cdot 1 = a)$
$\forall_a(a \cdot 0 = 0)$
$\forall_a(a \vee 0 = a)$
$\forall_a(a \vee 1 = 1)$

ii. Одинаковые либо противоположные операнды.
$\forall_a(a \cdot a = a)$
$\forall_a(a \vee a = a)$
$\forall_a(a \cdot \neg a = 0)$
$\forall_a(a \vee \neg a = 1)$

iii. Двойное отрицание.
$\forall_a(\neg\neg a = a)$

(e) Поглощение.
$\forall_{ab}(a \vee a \cdot b = a)$

Уровень срабатывания равен 1.

Остальные приемы данного раздела обеспечивают усиленное упрощение дизъюнктивной нормальной формы. Они срабатывают только при отсутствии комментария "нормализация".

(f) Склеивание двух дизъюнктивных членов.

$\forall_{ab}(a \cdot b \vee a \cdot \neg b = a)$

Уровень срабатывания равен 1.

(g) Отбрасывание множителя у одного из двух дизъюнктивных членов.

$\forall_{ab}(b \vee a \cdot \neg b = a \vee b)$

Идентификация переменной b допускает одновременное инвертирование всех ее вхождений. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abc}(a \cdot c \cdot \neg b \vee b \cdot c = a \cdot c \vee b \cdot c)$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 2.

(h) Склеивание для трех дизъюнктивных членов.

$\forall_{abcd}(a \cdot d \vee b \cdot c \cdot d \vee b \cdot \neg a = a \cdot d \vee b \cdot \neg a)$

Идентификация переменной a - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcd}(a \cdot b \cdot d \vee a \cdot c \cdot d \vee b \cdot d \cdot \neg c = a \cdot c \cdot d \vee b \cdot d \cdot \neg c)$

Идентификация переменной c - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcd}(a \cdot b \cdot \neg c \vee a \cdot b \cdot \neg d \vee b \cdot c \cdot d = a \cdot b \vee b \cdot c \cdot d)$

Идентификация переменных c, d - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abc}(a \cdot b \vee b \cdot c \vee c \cdot \neg a = a \cdot b \vee c \cdot \neg a)$

Идентификация переменной a - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abc}(a \cdot \neg b \vee a \cdot \neg c \vee b \cdot c = a \vee b \cdot c)$

Идентификация переменных b, c - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

(i) Отбрасывание множителя у одного из трех дизъюнктивных членов.

$\forall_{abcd}(a \cdot \neg c \vee b \cdot d \vee c \cdot d = a \cdot \neg c \vee b \cdot d \cdot \neg a \vee c \cdot d)$

$\forall_{abcd}(a \cdot b \cdot \neg c \vee b \cdot d \vee c \cdot d = a \cdot b \cdot \neg c \vee b \cdot d \cdot \neg a \vee c \cdot d)$

Замены выполняются справа налево. Идентификация переменных a, c - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

(j) Склеивание для четырех дизъюнктивных членов.

$\forall_{abcd}(a \cdot b \vee a \cdot c \vee a \cdot d \vee b \cdot \neg c \cdot \neg d = a \cdot c \vee a \cdot d \vee b \cdot \neg c \cdot \neg d)$

Идентификация переменных c, d - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abcd}(a \cdot \neg b \vee a \cdot \neg c \vee a \cdot \neg d \vee b \cdot c \cdot d = a \vee b \cdot c \cdot d)$

Идентификация переменных b, c, d - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{abc}(a \cdot c \vee b \cdot \neg c \vee c \cdot \neg b \vee \neg a \cdot \neg c = a \cdot b \vee c \cdot \neg b \vee \neg a \cdot \neg c)$

Идентификация переменных a, b, c - с точностью до инвертирования. Уровень срабатывания равен 2.

14. Нормализатор "двгруппировки" упрощения формул с помощью группировок дизъюнктивных членов.

    Нормализатор используется для сокращенной перезаписи результатов упрощения дизъюнктивных нормальных форм.

    (a) Группировка двух конъюнкций.
    $\forall_{abc}(a \cdot b \vee a \cdot c = a \cdot (b \vee c))$
    Выполнено хотя бы одно из двух условий:

      i. Выражение a имеет заголовком дизъюнкцию. Каждое из выражений b, c либо не содержит дизъюнкции, либо имеет ее своим заголовком.
      ii. Преобразуемая дизъюнкция не имеет других дизъюнктивных членов и является операндом внешней конъюнкции.

    Кроме того, требуется, чтобы при наличии других дизъюнктивных членов преобразуемая дизъюнкция не являлась операндом внешней конъюнкции. Уровень срабатывания равен 1. Созданы еще три версии данного приема. Первая из этих версий срабатывает на уровне 4. В ней требуется, чтобы каждое из двух группируемых выражений не содержало дизъюнкции. Сохраняется требование на отсутствие внешней конъюнкции при наличии других дизъюнктивных членов. Это же требование сохраняется в версии, срабатывающей на уровне 5. Дополнительно требуется, чтобы каждое из выражений b, c либо не содержало дизъюнкции, либо имело ее своим заголовком. Наконец, в версии, срабатывающей на уровне 8, имеется единственное ограничение - чтобы каждое из выражений b, c либо не содержало дизъюнкции, либо имело ее своим заголовком.

    (b) Перегруппировка для дополнительной конъюнкции - один дизъюнктивный множитель.
    $\forall_{abcde}(a \cdot (b \cdot c \vee d) \vee b \cdot e = b \cdot (a \cdot c \vee e) \vee a \cdot d)$
    Выражения b, e не содержат дизъюнкции; выражение a не имеет дизъюнкцию своим заголовком. Число вхождений переменных в выражение a меньше числа вхождений переменных в выражение b. Допускается вырожденное единичное значение c. Уровень срабатывания равен 1.

    (c) Догруппировка.
    $\forall_{abc}(a \cdot b \vee a \cdot c = a \cdot (b \vee c))$
    Выражение a идентифицируется как сомножитель конъюнкции $a \cdot b$, имеющий своим заголовком дизъюнкцию. После этого выражение $a \cdot c$ идентифицируется путем группировки всех остальных членов, имеющих сомножитель a. Проверяется, что каждое из выражений b, c либо не содержит дизъюнкции, либо имеет ее своим заголовком. Уровень срабатывания равен 2.

    (d) Расширенная догруппировка.
    $\forall_{abcd}(\text{двединица}(c \cdot d \Rightarrow (a \vee b)) \rightarrow a \cdot (b \vee c) \vee b \cdot d = (a \vee d) \cdot (b \vee c))$
    Выражения a, d не содержат дизъюнкции. Антецедент обрабатывается проверочным оператором "двединица", усматривающим тождественное равенство выражения единице. Этот оператор был описан выше. Уровень срабатывания равен 3.

(e) Выравнивание дизъюнктивных множителей.

$\forall_{abcdep}(\text{двединица}(p\cdot a\cdot e\Rightarrow(b\vee c\vee d))\ \&\ \text{двединица}(p\cdot d\cdot b\Rightarrow(a\vee c\vee e))\to p\cdot a\cdot(b\vee c)\vee p\cdot d\cdot(c\vee e)=p\cdot(a\vee d)\cdot(b\vee c\vee e))$

Выражение p не содержит дизъюнкции и может отсутствовать (обращаться в единицу). Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 4.

(f) Перегруппировка для дополнительной конъюнкции - два дизъюнктивных множителя.

$\forall_{abcpqrsv}(\text{двединица}(r\cdot q\cdot c\Rightarrow(a\cdot g\vee v))\ \&\ r\cdot p\cdot c=a\cdot b\to r\cdot(p\vee q)\cdot(s\vee c)\vee a\cdot g\vee v=r\cdot(p\vee q)\cdot s\vee a\cdot(b\vee g)\vee v)$

Каждое из выражений a,g либо не содержит дизъюнкции, либо имеет ее своим заголовком. Выражения c,p идентифицируются с отдельными операндами дизъюнкций. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации. Выражение b имеет меньшее число вхождений переменных, чем выражение c. Указатель "модификатор" блокирует срабатывание приема при наличии дополнительных корневых дизъюнктивных членов. Уровень срабатывания равен 1.

(g) Группировка двух конъюнкций с раскрыванием внутренних скобок.

$\forall_{abcdep}(p=b\cdot c\vee b\cdot d\vee e\to a\cdot b\cdot(c\vee d)\vee a\cdot e=a\cdot p)$

Выражение e имеет не более двух символов дизъюнкции. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором приведения к дизъюнктивной нормальной форме "станддн", обеспечивающим также упрощение этой нормальной формы. Проверяется, что прием уменьшает число вхождений переменных. Уровень срабатывания равен 5.

(h) Поглощение.

$\forall_{ab}(\text{двединица}(a\Rightarrow b)\to a\vee b=b)$

Выражение a не содержит дизъюнкции. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{abcd}(\text{двединица}(a\cdot c\Rightarrow(d\vee b\cdot c))\to(a\vee b)\cdot c\vee d=b\cdot c\vee d)$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение c не содержит символа дизъюнкции. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{abcdpq}(\text{двединица}(t\cdot b\cdot q\Rightarrow d)\to t\cdot(a\vee b)\cdot(p\cdot q\vee c)\vee d=t\cdot(a\vee b)\cdot(q\vee c)\vee d)$

Выражение p идентифицируется с операндом конъюнкции, причем этот операнд является сомножителем каждого дизъюнктивного члена выражения a. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{abcdef}(\text{двединица}(a\cdot d\Rightarrow(e\vee b\vee f))\to(e\cdot a\vee b)\cdot(e\cdot c\vee d)\vee f=(a\vee b)\cdot(e\cdot c\vee d)\vee f)$

Выражение e идентифицируется с операндом конъюнкции. Выражение a имеет своим сомножителем некоторое выражение, отрицание которого является сомножителем дизъюнктивного члена выражения d. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

$\forall_{abcdef}(\text{двединица}(a\cdot c\cdot d\Rightarrow f)\to a\cdot(b\vee c\cdot d)\cdot(d\vee e)\vee f=a\cdot b\cdot(d\vee e)\vee f)$

Выражение d не содержит символа дизъюнкции. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 6.

(i) Упрощение дизъюнктивных нормальных форм, возникающих при группировках.

$\forall_{abc}(a \cdot b \vee a \cdot \neg b \cdot c = a \cdot b \vee a \cdot c)$

Идентификация переменной b - с точностью до инвертирования. Возможно обращение a в единицу. Преобразуемое вхождение - не корневое. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abcd}(a \cdot b \cdot d \vee c \cdot \neg b \cdot d \vee a \cdot c \cdot d = a \cdot b \cdot d \vee c \cdot \neg b \cdot d)$

Возможно обращение d в единицу. Преобразуемое вхождение - не корневое. Уровень срабатывания равен 1.

(j) Разгруппировка.

$\forall_{abcdepqrs}(a \cdot b = p \cdot q \ \& \ a \cdot c = r \cdot s \rightarrow a \cdot (b \vee c) \vee p \cdot d \vee r \cdot e = p \cdot (d \vee q) \vee r \cdot (e \vee s))$

Переменная b идентифицируется с операндом дизъюнкции. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором общей стандартизации "нормкн". Число вхождений переменных в терм $q \vee s$ меньше, чем в терм $b \vee c$. Уровень срабатывания приема равен 5.

(k) Перегруппировка для двух конъюнкций - с одним и двумя дизъюнктивными множителями.

$\forall_{abcdefpqx}(a \cdot b \cdot (c \cdot p \vee d \cdot q) \vee a \cdot (c \vee e \cdot x) \cdot (d \vee f \cdot \neg x) = a \cdot d(c \vee e \cdot x \vee b \cdot q) \vee a \cdot c \cdot (b \cdot p \vee f \cdot \neg x))$

Идентификация переменной x - с точностью до инвертирования. Допускается обращение переменных a, b, e, f, p, q в единицу. Число вхождений переменных в b меньше, чем в d. Уровень срабатывания равен 3.

(l) Догруппировка с двумя дизъюнктивными множителями.

$\forall_{abcdepr}(a \cdot p \cdot (b \vee c) \cdot (d \vee e) \vee a \cdot d \cdot r = a \cdot (p \cdot b \vee c \cdot p \vee d \cdot r) \cdot (d \vee e))$

Допускается обращение переменной p в единицу. Число вхождений переменных в выражение p меньше, чем в a. Уровень срабатывания равен 6.

(m) Догруппировка с разгруппировкой.

$\forall_{abcdegpq}(a \cdot d \cdot e \cdot (b \vee c) \vee g \cdot e \cdot (d \cdot p \vee q) = d \vee e \cdot (a \cdot b \vee a \cdot c \vee g \cdot p) \vee g \cdot e \cdot q)$

Допускается обращение переменных a, e, g, p в единицу. Общее число вхождений переменных в выражения a, g меньше, чем в d. Уровень срабатывания равен 2.

(n) Перегруппировка для двух конъюнкций - с одним дизъюнктивным множителем каждая.

$\forall_{abcdefpqrstu}(a \cdot b = p \cdot q \ \& \ d \cdot e = p \cdot r \ \& \ a \cdot c = s \cdot t \ \& \ d \cdot f = s \cdot u \rightarrow a \cdot (b \vee c) \vee d \cdot (e \vee f) = p \cdot (q \vee r) \vee s \cdot (t \vee u))$

Выражения a, d не содержат символа дизъюнкции. Преобразуемое выражение корневое. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Их левые части обрабатываются нормализатором "нормкн". Проверяется, что преобразование уменьшает число вхождений переменных. Уровень срабатывания равен 2.

(o) Симметричные множители.

$\forall_{abcdpqrs}(s \cdot (a \cdot b \vee c \cdot d) \cdot (a \cdot c \cdot p \vee b \cdot d \cdot q) \vee r = s \cdot (a \cdot d \vee b \cdot c) \cdot (a \cdot c \cdot p \vee b \cdot d \cdot q) \vee r)$

Допускается обращение переменных p, q, s в единицу. Выражение r не содержит подвыражений вида $X \vee a \cdot b$, $X \vee c \cdot d$. Однако, оно содержит либо подвыражение вида $X \vee a \cdot d$, либо подвыражение вида $X \vee b \cdot c$. Уровень срабатывания равен 5.

(p) Усиленная догруппировка с разгруппировкой.

$\forall_{abcdegpq}(d \cdot a \cdot e \cdot (b \vee c) \vee g \cdot e \cdot (d \cdot p \vee q) = d \cdot e \cdot (a \cdot (b \vee c) \vee g \cdot p) \vee g \cdot e \cdot q)$

Допускается обращение переменных a, e, g, p в единицу. Число вхождений переменных в выражение g меньше числа вхождений переменных в выражение d. Уровень срабатывания равен 7.

(q) Коррекция расширенной догруппировки.

$\forall_{abcdefhirx}(h \cdot i \cdot (a \vee b \cdot c \cdot x) \cdot (d \cdot \neg x \vee e \cdot f) \vee b \cdot e \cdot h \cdot r =$
$a \cdot h \cdot i \cdot (d \cdot \neg x \vee e \cdot f) \vee b \cdot h \cdot e \cdot (c \cdot f \cdot i \cdot x \vee r))$

Допускается обращение переменных b, c, d, f, h, i, r в единицу. Переменная x идентифицируется, с точностью до инвертирования, с переменной. Число вхождений переменных в выражение b меньше суммарного числа вхождений переменных в выражения f, i. Уровень срабатывания равен 2.

(r) Усиление расширенной догруппировки.

$\forall_{abcdekq}(q \cdot a \cdot (b \vee c \cdot k) \cdot (d \cdot k \vee e) \vee c \cdot d \cdot k \cdot q = q \cdot (a \cdot b \vee c \cdot k) \cdot (d \cdot k \vee a \cdot e))$

Допускается обращение переменных c, d, k, q в единицу. Число вхождений переменных в выражение a меньше суммарного числа вхождений переменных в выражения c, d, k. Уровень срабатывания равен 2.

(s) Тройная перегруппировка.

$\forall_{abcklmqrs}(a \cdot q \cdot r = k \cdot m \to a \cdot q \cdot (r \vee b \cdot s) \vee a \cdot b \cdot c \vee k \cdot l = a \cdot b \cdot (q \cdot s \vee c) \vee k \cdot (m \vee l))$

Допускается обращение переменных a, b, l, m, q, s в единицу. Выражение c имеет своим заголовком дизъюнкцию. Выражения k, l не содержат дизъюнкции. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкн". Подвыражение $q \cdot s$ в заменяющей части обрабатывается нормализатором "станддн". Число вхождений переменных в выражение m меньше суммарного числа вхождений переменных в выражения a, b, r. Уровень срабатывания равен 3.

(t) Перегруппировка со вклейкой.

$\forall_{abcdefklmnrx}(a \cdot b \cdot c = x \cdot k \cdot n \cdot r \to k \cdot l \cdot (\neg x \cdot m \vee n) \vee a \cdot b \cdot (c \vee d \cdot e) \vee a \cdot d \cdot f =$
$a \cdot d \cdot (b \cdot e \vee f) \cdot k \cdot (l \vee x \cdot r) \cdot (m \cdot \neg x \vee n))$

Допускается обращение переменных a, b, e, f, l, m, r в единицу. Переменная x идентифицируется с точностью до инвертирования. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкн". Выражения a, b, d, f, l, r не содержат символа дизъюнкции. При этом выражение r, с точностбю до отрицания, представляет собой переменную. Проверяется, что прием уменьшает число вхождений переменных. Уровень срабатывания равен 3.

(u) Завершающая догруппировка.

$\forall_{abcde}(a \cdot b \cdot c \vee a \cdot (b \vee d) \cdot e = a \cdot (b \vee d) \cdot (e \vee b \cdot c))$

Переменная e идентифицируется с операндом конъюнкции. Выражения a, b, c не содержат дизъюнкции. Выражение e либо не содержит дизъюнкции, либо имеет ее своим заголовком. Выражение $e \vee b \cdot c$ обрабатывается нормализатором "станддн". Уровень срабатывания равен 5.

(v) Свертка.
$\forall_{acdpr}(c \cdot (d \vee a) \cdot (r \vee p) \vee a \cdot r = (r \vee c \cdot p) \cdot (a \vee c \cdot d))$
Выражения a, d, p, r не содержат символа дизъюнкции. Число вхождений переменных в выражение c меньше суммарного числа вхождений переменных в выражения a, r. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 7. Для нее допускается вхождение дизъюнкций в выражения d, p.

15. Нормализатор "сокращднф" преобразования формулы алгебры логики к виду сокращенной дизъюнктивной нормальной формы.

    (a) Приведение к виду дизъюнктивной нормальной формы.
    Уровни срабатывания приемов данного подраздела равны 1.

      i. Устранение импликации.
      $\forall_{ab}(a \Rightarrow b = \neg a \vee b)$
      ii. Устранение эквивалентности.
      $\forall_{ab}(a \Leftrightarrow b = a \cdot b \vee \neg a \cdot \neg b)$
      iii. Устранение суммы по модулю 2.
      $\forall_{ab}(a + b = a \cdot \neg b \vee b \cdot \neg a)$
      iv. Спуск отрицания.
      $\forall_{ab}(\neg(a \cdot b) = \neg a \vee \neg b)$
      $\forall_{ab}(\neg(a \vee b) = \neg a \cdot \neg b)$
      $\forall_{a}(\neg\neg a = a)$
      $\neg 1 = 0$
      $\neg 0 = 1$
      v. Раскрывание скобок.
      $\forall_{abc}(a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c)$
      vi. Устранение вложенных конъюнкций и дизъюнкций.

    (b) Упрощение дизъюнктивной нормальной формы.

      i. Константы
      $\forall_{a}(a \cdot 1 = a)$
      $\forall_{a}(a \vee 1 = 1)$
      $\forall_{a}(a \cdot 0 = 0)$
      $\forall_{a}(a \vee 0 = a)$
      Уровень срабатывания равен 1.
      ii. Повторяющиеся операнды.
      $\forall_{a}(a \cdot a = a)$
      $\forall_{a}(a \vee a = a)$
      Уровень срабатывания равен 2.
      iii. Противоположные операнды.
      $\forall_{a}(a \cdot \neg a = 0)$
      $\forall_{a}(a \vee \neg a = 1)$
      Уровень срабатывания равен 2.
      iv. Поглощение.
      $\forall_{ab}(a \vee a \cdot b = a)$
      Уровень срабатывания равен 2.

(c) Обобщенное склеивание.

$\forall_{abc}(a \cdot b \vee c \cdot \neg b = a \cdot b \vee c \cdot \neg b \vee a \cdot c)$

Преобразование выполняется слева направо. Преобразуемое вхождение - корневое. Допускается обращение в единицы переменных a, c. Отсутствует такой дизъюнктивный член, который можно было бы разбить в произведение двух конъюнкций, первая из которых - делитель a, а вторая - делитель c. Выражение $a \cdot c$, после обработки его нормализатором "нормкн", не тождественно нулевое. Уровень срабатывания равен 3.

16. Перечисляющий синтезатор "тупикднф".

Синтезатор реализует утверждение "тупикднф(a, b)". Значением входной переменной b служит некоторая дизъюнктивная нормальная форма b. Выходная переменная a перечисляет всевозможные дизъюнктивные нормальные формы, тупиковые относительно b. Заметим, что во избежание излишней громоздкости в приемах синтезатора переменные a, b имеют своими значениями не сами формулы, а двоичные значения этих формул.

(a) Усмотрение непоглощаемой конъюнкции.

$\forall_{abc}(\text{тупикднф}(c, a \vee b) \rightarrow \text{тупикднф}(c, a \vee b))$

Переменная a идентифицируется с отдельным дизъюнктивным членом. Проверяется отсутствие комментариев (Ядро a) и (поглощкн a). При помощи оператора "поглощкн" проверяется, что этот дизъюнктивный член не полгощается остаточной дизъюнкцией b. После этого первый антецедент реализует рекурсивное обращение, причем в комментарии обращения добавляется элемент (Ядро a). Указатель "спуск" блокирует альтернативные попытки действий. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Отбрасывание поглощаемой конъюнкции.

$\forall_{abc}(\text{тупикднф}(c, b) \ \& \ \text{поглощкн}(a, b) \rightarrow \text{тупикднф}(c, a \vee b))$

Переменная a идентифицируется с отдельным дизъюнктивным членом. Проверяется отсутствие комментариев (Ядро a) и (поглощкн a). Проверяется также, что отсутствует комментарий (тупикднф X) при X, отличном от a. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. После этого первый антецедент реализует рекурсивное обращение. Из комментариев обращения удаляются все элементы с заголовком "тупикднф". В исходные комментарии заносится элемент (тупикднф a), который будет блокировать рассмотрение других поглощаемых операндов. Заметим, что случай сохранения операнда a обрабатывается приемом, приводимым ниже. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Закрепление поглощаемой конъюнкции.

$\forall_{abc}(\text{тупикднф}(c, a \vee b) \ \& \ \text{поглощкн}(a, b) \rightarrow \text{тупикднф}(c, a \vee b))$

Аналогично предыдущему. Дополнительно в комментарии обращения заносится элемент (поглощкн a).

(d) Выдача результата.

$\forall_{a}(\text{тупикднф}(a, a))$

Для каждого дизъюнктивного члена b выражения a имеется либо комментарий (Ядро b), либо комментарий (поглощкн b). В тех случаях, когда имеется комментарий (поглощкн b), проверочный оператор "поглощкн" не усматривает поглощения b остаточной дизъюнкцией. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "имп"

1. Общая стандартизация выражений.

   $\forall_a(0 \Rightarrow a = 1)$

   $\forall_a(1 \Rightarrow a = a)$

   $\forall_a(a \Rightarrow 1 = 1)$

   $\forall_a(a \Rightarrow 0 = \neg a)$

   $\forall_a(a \Rightarrow \neg a = \neg a)$

   $\forall_{ab}(a \Rightarrow (a \vee b) = 1)$

   $\forall_a(a \Rightarrow a = 1)$

   $\forall_{abc}(b \Rightarrow (c \Rightarrow a) = b \cdot c \Rightarrow a)$

   $\forall_{ab}(a \cdot b \Rightarrow a = 1)$

   $\forall_{ab}(b \cdot (b \Rightarrow a) = a \cdot b)$

   $\forall_{abc}(b \cdot (c \vee (a \Rightarrow b)) = b)$

   $\forall_{ab}(a \Rightarrow a \cdot b = a \Rightarrow b)$

   $\forall_{ab}((a \vee b) \Rightarrow a = b \Rightarrow a)$

   $\forall_{ab}(\neg(a \Rightarrow b) = a \cdot \neg b)$

   $\forall_{bc}(\neg c \Rightarrow b = b \vee c)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Подбор примера.

   $\forall_{ax}(x = 1 \rightarrow a \Rightarrow x = 1)$

   $\forall_{ax}(x = 0 \rightarrow x \Rightarrow a = 1)$

   Приемы имеют заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x идентифицируется с неизвестной, a - с выражением, не содержащим неизвестных. Переменная x не встречается в прочих условиях, за исключением, быть может, утверждения "двоичное(x)". Антецедент выделен указателем "подборзначений". Указатель "новый" обеспечивает постоянный контроль за возможностью срабатывания приема, отменяя создание оператора "новый" при компиляции. Уровень срабатывания равен 1.

3. Попытка преобразования к д.н.ф. для упрощения выражения.

   $\forall_{abc}(c = a \Rightarrow b \rightarrow a \Rightarrow b = c)$

   Аналогично случаю конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

4. Равенство импликации константе.

   $\forall_{ab}(a \Rightarrow b = 0 \leftrightarrow a = 1 \,\&\, b = 0)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные условию задачи на описание. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{ab}(a \Rightarrow b = 1 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 1)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные условию задачи на описание. Преобразованное условие снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

5. Попытка упрощения с переходом к отрицанию конъюнкции.

   $\forall_{abc}(\neg b = c \to a \Rightarrow b = \neg(a \cdot c))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "упростить" и решаемой в режиме усилителя. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что заменяющий терм не длиннее заменяемого. Уровень срабатывания равен 5.

6. Попытка упрощения отрицания импликации.

   $\forall_{abpq}(\neg(a \Rightarrow b) = p \cdot \neg q \to a \Rightarrow b = p \Rightarrow q)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на преобразование, имеющей цель "упростить" и решаемой в режиме усилителя. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 6.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормимп".

   Все приемы нормализатора срабатывают на уровне 1.

   (a) Устранение констант.
   $\forall_a(0 \Rightarrow a = 1)$
   $\forall_a(1 \Rightarrow a = a)$
   $\forall_a(a \Rightarrow 1 = 1)$
   $\forall_a(a \Rightarrow 0 = \neg a)$

   (b) Одинаковые операнды.
   $\forall_a(a \Rightarrow a = 1)$

   (c) Усмотрение константы 1.
   $\forall_{ab}(a \Rightarrow (a \vee b) = 1)$
   $\forall_{ab}(a \cdot b \Rightarrow a = 1)$

   (d) Исключение суммы по модулю 2 и эквивалентности.
   $\forall_{ab}((a + b) \Rightarrow b = a \Rightarrow b)$
   $\forall_{ab}(b \Rightarrow (a \Leftrightarrow b) = b \Rightarrow a)$

   (e) Отбрасывание избыточного подтерма.
   $\forall_{ab}((a \vee b) \Rightarrow b = a \Rightarrow b)$
   $\forall_{ab}(b \Rightarrow a \cdot b = b \Rightarrow a)$
   $\forall_{ab}((a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg b = \neg b)$
   $\forall_{ab}((a \vee b) \Rightarrow \neg b = \neg b)$
   $\forall_{ab}(a \Rightarrow \neg(a \cdot b) = a \Rightarrow \neg b)$
   $\forall_{ab}(a \Rightarrow \neg(a \Rightarrow b) = a \Rightarrow \neg b)$

   (f) Переход от двойной импликации к одиночной.
   $\forall_{abc}(b \Rightarrow (c \Rightarrow a) = b \cdot c \Rightarrow a)$
   (g) Отрицание в антецеденте.
   $\forall_{abc}(\neg c \Rightarrow b = b \vee c)$

8. Нормализатор сокращенной записи "упрощимп".

   В нормализаторе имеется единственный прием:

   $\forall_{ab}((a \vee b) \Rightarrow a \cdot b = a \Leftrightarrow b)$

Приемы, связанные с символом "плс"

1. Устранение вложенных сумм по модулю 2.

2. Лексикографическое упорядочение операндов.

3. Общая стандартизация выражений.

   $\forall_{a}(a + 0 = a)$

   $\forall_{a}(a + 1 = \neg a)$

   $\forall_{a}(a + a = 0)$

   $\forall_{ab}(\neg b \cdot (a + b) = a \cdot \neg b)$

   $\forall_{abc}(b \cdot (a + b \cdot c) = b \cdot (a + c))$

   $\forall_{ab}((a + b) \Rightarrow b = a \Rightarrow b)$

   $\forall_{ab}(b \vee (a + b) = a \vee b)$

   $\forall_{ab}(\neg a + \neg b = a + b)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Общая стандартизация утверждений.

   (a) Одинаковые слагаемые в противоположных частях равенства.
   $\forall_{abc}(a + b = a + c \leftrightarrow b = c)$
   $\forall_{abc}(\neg(a + b) = b + c \leftrightarrow \neg a = c)$
   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Допускается обращение c в 0. Уровень срабатывания равен 0.
   $\forall_{abc}(a + b = c \Leftrightarrow b \leftrightarrow a + c = 1)$
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Допускается обращение a в 0. Уровень срабатывания равен 1.
   $\forall_{abc}(a + b = \neg a + c \leftrightarrow b = \neg c)$
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Допускается обращение b, c в 0. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Исключение дизъюнкции.
   $\forall_{abcd}(c + d = 1 \ \& \ a + b = 1 \rightarrow a = c \ \vee \ b = d \leftrightarrow a = c)$
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором общей стандартизации.

   (c) Сложение двух равенств.

   $\forall_{abcd}(a+c=b \rightarrow a+d=b \leftrightarrow c=d)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Антецедент идентифицируется с другйо посылкой. Выражение a неконстантное. Уровень срабатывания равен 2.

   (d) Равенство суммы нулю.

   $\forall_{ab}(a+b=0 \leftrightarrow a=b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение a имеет параметры, не входящие в b. Уровень срабатывания равен 1.

   (e) Равенство суммы единице.

   $\forall_{ab}(\neg a+b=1 \leftrightarrow a=b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   (f) Контрапозиция.

   $\forall_{ABab}(\forall_x(a(x)+b(x)=1 \ \& \ A(x) \rightarrow B(x)) \leftrightarrow \forall_x(A(x) \ \& \ \neg B(x) \rightarrow a(x)=b(x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, b, A, B функциональные. Допускается связывающая приставка x произвольной длины. Если $B(x)$ - равенство, не имеющее вида $P=1$, где заголовок P - символ "плс", то прием блокируется. Он также блокируется в условии задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 1.

5. Подбор примера.

   $\forall_{ax}(x=a \rightarrow a+x=0)$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная, выражение a не содержит неизвестных. Отсутствуют другие условия, содержащие x, за исключением, быть может, условия "двоичное(x)". Антецедент выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 1.

6. Решение уравнений.

   $\forall_{abx}(a+x=b \leftrightarrow x=a+b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная x - неизвестная; выражения a, b не содержат неизвестных. Уровень срабатывания равен 0. Напомним, что начиная с уровня 1 применяется прием для разбора случаев по значениям неизвестных.

7. Попытка преобразования к дизъюнктивной нормальной форме для упрощения выражения.

   $\forall_{abc}(c=a+b \rightarrow a+b=c)$

   Аналогично случаю конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

8. Разбор случаев для равенства неизвестной суммы известному значению.

   $\forall_{abc}(a+b=c \leftrightarrow a=0 \ \& \ b=c \ \vee \ a=1 \ \& \ b=\neg c)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражения a, b содержат неизвестные, выражение c - не содержит. Преобразованное условие сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3. Прием применяется в тех случаях, когда неизвестной является функция алгебры логики, так как для разбора случаев по двоичной неизвестной на уровне 1 срабатывает другой прием.

9. Обращение к нормализатору "стандплс".

   $\forall_{abc}(a = b \vee c \to b \vee c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b \cdot c \to b \cdot c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b + c \to b + c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b \Leftrightarrow c \to b \Leftrightarrow c = a)$

   $\forall_{abc}(a = b \Rightarrow c \to b \Rightarrow c = a)$

   $\forall_{ab}(a = \neg b \to \neg b = a)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к условию задачи на преобразование, имеющей цель "стандплс", т.е. цель на преобразование выражения к виду полинома Жегалкина. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "стандплс". Для блокировки повторных срабатываний используется комментарий "стандплс". Уровень срабатывания равен 2.

10. Сумма двух вычетов по модулю 2.

    $\forall_{abc}(a + b = c \to a(\mathrm{mod}\ 2) + b(\mathrm{mod}\ 2) = c(\mathrm{mod}\ 2))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". В заменяемой части знаком $+$ обозначена операция алгебры логики, в антецеденте - обычное сложение вещественных чисел. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что результат c короче исходной суммы. Уровень срабатывания равен 1.

11. Нормализатор общей стандартизации "нормплс".

    (a) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания данного приема равен 2; остальные уровни срабатывания равны 1.

    (b) Устранение вложенных сумм по модулю 2.

    (c) Нулевое слагаемое.
    $\forall_a(a + 0 = a)$

    (d) Одинаковые слагаемые.
    $\forall_a(a + a = 0)$

    (e) Два отрицания.
    $\forall_{ab}(\neg a + \neg b = a + b)$

    (f) Противоположные слагаемые.
    $\forall_a(a + \neg a = 1)$

12. Нормализатор сокращенной записи "упрощплс".

    (a) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания данного приема равен 2; остальные уровни срабатывания равны 1.

    (b) Устранение вложенных сумм по модулю 2.

   (c) Устранение единичного слагаемого.
   $\forall_a(a + 1 = \neg a)$
   (d) Вынесение за скобку общего множителя двух слагаемых.
   $\forall_{abc}(a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c))$
   Допускается обращение b, c в единицу.
   (e) Устранение отрицания.
   $\forall_{ab}(b + \neg a = a \Leftrightarrow b)$

13. Нормализатор "стандплс" приведения к полиному Жегалкина.
   (a) Устранение вложенных конъюнкций и вложенных сумм по модулю 2.
   (b) Дизъюнкция.
   $\forall_{ab}(a \vee b = a \cdot b + a + b)$
   Уровень срабатывания равен 1.
   (c) Эквивалентность.
   $\forall_{ab}(a \Leftrightarrow b = a + b + 1)$
   Уровень срабатывания равен 1.
   (d) Импликация.
   $\forall_{ab}(a \Rightarrow b = a \cdot b + a + 1)$
   Уровень срабатывания равен 1.
   (e) Отрицание.
   $\forall_a(\neg a = a + 1)$
   Уровень срабатывания равен 1.
   (f) Раскрывание скобок.
   $\forall_{abc}(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$
   Указатель "набор(первыйтерм)" определяет одновременную обработку любого числа слагаемых. Уровень срабатывания равен 2.
   (g) Приведение подобных членов.
   $\forall_a(a + a = 0)$
   Уровень срабатывания равен 1.
   (h) Сложение с нулем.
   $\forall_a(a + 0 = a)$
   Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "экв"

1. Устранение вложенных эквивалентностей.
2. Лексикографическое упорядочение операндов.
3. Общая стандартизация выражений.
   $\forall_a(a \Leftrightarrow 1 = a)$
   $\forall_a(a \Leftrightarrow a = 1)$

$\forall_{ab}(b \cdot (a \Leftrightarrow b) = a \cdot b)$

$\forall_{ab}(b \Rightarrow (a \Leftrightarrow b) = b \Rightarrow a)$

$\forall_{ab}(\neg(a \Leftrightarrow \neg b) = a \Leftrightarrow b)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{a}(a \Leftrightarrow 0 = \neg a)$

$\forall_{abc}(a \Leftrightarrow (b + c) = a + b + c + 1)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

4. Общая стандартизация утверждений.

   (a) Равенство эквивалентности своему операнду.

   $\forall_{ab}(a \Leftrightarrow b = b \leftrightarrow a = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Равенство эквивалентности нулю.

   $\forall_{ab}(a \Leftrightarrow b = 0 \leftrightarrow a + b = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Равенство эквивалентности единице.

   $\forall_{ab}(a \Leftrightarrow b = 1 \leftrightarrow a = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

5. Подбор примера.

   $\forall_{ax}(x = a \rightarrow a \Leftrightarrow x = 1)$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная, выражение a не содержит неизвестных. Отсутствуют другие условия, содержащие x, за исключением, быть может, условия "двоичное(x)". Антецедент выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 1.

6. Попытка преобразования к дизъюнктивной нормальной форме для упрощения выражения.

   $\forall_{abc}(c = a \Leftrightarrow b \rightarrow a \Leftrightarrow b = c)$

   Аналогично случаю конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

7. Нормализатор общей стандартизации "нормэкв".

   (a) Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания данного приема равен 2; остальные уровни срабатывания равны 1.

   (b) Устранение вложенных эквивалентностей.

   (c) Одинаковые операнды.

   $\forall_{a}(a \Leftrightarrow a = 1)$

   (d) Устранение констант.

   $\forall_{a}(a \Leftrightarrow 0 = \neg a)$

   $\forall_{a}(a \Leftrightarrow 1 = a)$

   (e) Отрицание в одной из частей.
   $\forall_{cd}(c \Leftrightarrow \neg d = c + d)$
   (f) Эквивалентность с импликацией.
   $\forall_{cd}(c \Leftrightarrow (d \Rightarrow c) = c \cdot d)$

8. Нормализатор сокращенной записи "упрощэкв".
   (a) Лексикографическое упорядочение операндов.
   (b) Устранение вложенных эквивалентностей.
   (c) Устранение отрицания.
   $\forall_{ab}(a \Leftrightarrow \neg b = a + b)$

Приемы, связанные с символом "штрихшеффера"

1. Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 0.

2. Выражение через конъюнкцию и отрицание.

   $\forall_{xy}(x|y = \neg(x \cdot y))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". При редактировании ответа задачи на описание он блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "стрелкапирса"

1. Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 0.

2. Выражение через дизъюнкцию и отрицание.

   $\forall_{xy}(x \downarrow y = \neg(x \vee y))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". При редактировании ответа задачи на описание он блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "дизъюнкциявсех"

1. Равенство дизъюнкции единице.

   $\forall_{AP}(\bigvee_{i,P(i)} A(i) = 1 \leftrightarrow \exists_i(P(i) \ \& \ A(i) = 1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A, P функциональные. Связывающая приставка имеет произвольную длину. Уровень срабатывания приема равен 1.

2. Равенство дизъюнкции нулю.

   $\forall_{AP}(\bigvee_{i,P(i)} A(i) = 0 \leftrightarrow \forall_i(P(i) \rightarrow A(i) = 0))$

   Аналогично предыдущему.

3. Попытка явного разрешения условия равенства дизъюнкции единице.

   $\forall_{ABCf}((A(x) \ \& \ f(x) = 1) = B(x) \ \& \ C = \exists_x B(x) \rightarrow$
   $\bigvee_{x,A(x)} f(x) = (1 \text{ при } C, \text{иначе } 0))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к содержащему неизвестные подвыражению условия задачи на описание. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них разрешается относительно x при помощи задачи на описание, причем x - несущественная неизвестная. Правая часть второго антецедента упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что результат C не содержит квантора существования. Переменные f, A, B функциональные; связывающая приставка - произвольной длины. Уровень срабатывания равен 5.

4. Единица под дизъюнкцией.

   $\forall_P(\bigvee_{i,P(i)} 1 = (1 \text{ при } \exists_i(P(i)), \text{иначе } 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

5. Ноль под дизъюнкцией.

   $\forall_P(\bigvee_{i,P(i)} 0 = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

6. Условное выражение под дизъюнкцией.

   $\forall_{BP}(\bigvee_{i,P(i)}(1 \text{ при } B(i), \text{ иначе } 0) = (1 \text{ при } \exists_i(P(i) \ \& \ B(i)), \text{иначе } 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные B, P функциональные, связывающая приставка - произвольной длины. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "конъюнкциявсех"

1. Равенство конъюнкции единице.

   $\forall_{AP}(\bigwedge_{i,P(i)} A(i) = 1 \leftrightarrow \forall_i(P(i) \to A(i) = 1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A, P функциональные, связывающая приставка - произвольной длины. Уровень срабатывания равен 1.

2. Единица под конъюнкцией.

   $\forall_f(\bigwedge_{i,f(i)} 1 = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

3. Усмотрение нулевого значения.

   $\forall_{anx}(\text{двнабор}(x,n) \ \& \ \text{card}(\text{слой}(x,0)) = a \ \& \ 0 < a \to \bigwedge_{i=1}^n x(i) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, причем точка привязки выбрана во втором из них. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

4. Усмотрение не тождественно единичного набора.

   $\forall_{nx}(\bigwedge_{i=1}^n x(i) = 0 \ \& \ \text{двнабор}(x,n) \to \neg(x = \text{констнабор}(1,n)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "плсвсех"

Конечные суммы по модулю 2 в этом разделе прорисовываются так же, как вещественнозначные конечные суммы - большой греческой сигмой.

1. Равенство однократной суммы единице.

   $\forall_x(\text{плсвсех}(x) = 1 \leftrightarrow \neg(\text{card}(\text{слой}(x,1)) - \text{even}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". В случае двойной суммы (т.е. если x - семейство, элементами которого служат конечные суммы по модулю 2) прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

2. Равенство двойной суммы единице.

   $\forall_{APQ}(\sum_{i,P(i)}\sum_{j,Q(i,j)} A(i,j) = 1 \leftrightarrow \neg(\text{card}(\text{set}_{ij}(P(i)\ \&\ Q(i,j)\ \&\ A(i,j) = 1)) - \text{even}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A, P, Q функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

3. Попытка преобразовать общий член к виду полинома Жегалкина.

   $\forall_{abn}(b = a(i) \to \sum_{i,P(i)} a(i) = \sum_{i,P(i)} b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, P функциональные. Общий член суммы имеет своим заголовком один из символов "дн", "кн", "отр", "имп". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором приведения к виду полинома Жегалкина "стандплс". Проверяется, что результат b имеет заголовок "плс". Уровень срабатывания равен 2.

4. Сумма под описателем.

   $\forall_{Pab}(\sum_{i,P(i)}(a(i) + b(i)) = \sum_{i,P(i)} a(i) + \sum_{i,P(i)} b(i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, b, P функциональные, причем $a(i)$ идентифицируется с первым операндом. Уровень срабатывания равен 1.

5. Отрицание под описателем.

   $\forall_{Pa}(\sum_{i,P(i)} \neg a(i) = \sum_{i,P(i)} a(i) + \text{card}(\text{set}_i P(i))(\text{mod}2))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, P функциональные. Уровень срабатывания равен 1.

6. Одинаковые слагаемые.

   $\forall_{Pan}(n = \text{card}(\text{set}_i P(i))\ \&\ n - \text{целое} \to \sum_{i,P(i)} a = n(\text{mod } 2) \cdot a)$

   Точкой обозначена операция "кн". Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

7. Изменение порядка суммирования.

   $\forall_{fn}(\sum_{i=1}^{n} f(i(\mathrm{mod}\ n)+1)=\sum_{i=1}^{n} f(i))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Указатель "новаргумент(f i извлечение)" обеспечивает преобразование общего члена к виду, в котором переменная i встречается только внутри подтермов "$i(\mathrm{mod}\ n)+1$", а вхождения этих подтермов дают шаблон для $f(\ldots)$. Указатель "альтернатива" распространяет действие приема также на операцию "дизъюнкциявсех". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{PQRan}(\exists_i(P(i)\ \&\ Q(i,j))=R(j)\ \&\ n=\mathrm{card}(\mathrm{set}_i(P(i)\ \&\ Q(i,j)))\to$
   $\sum_{i,P(i)}\sum_{j,Q(i,j)} a(j)=\sum_{j,R(j)}(a(j)\cdot n(\mathrm{mod}\ 2)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, P, Q, R функциональные. Антецеденты выделены указателем "идентификатор". Выражение под квантором существования разрешается относительно i при помощи задачи на описание, после чего левая часть первого антецедента упрощается задачей на преобразование. Правая часть второго антецедента упрощается задачей на преобразование. При формировании заменяющего выражения предпринимается разрешение $R(j)$ относительно j при помощи задачи на описание. Уровень срабатывания равен 2.

8. Подобные члены в двух суммах.

   $\forall_{abcdkmn}(b(i)+c(i)=d\,\&\,k\le m\to\sum_{i=k}^{n}(a(i)\cdot b(i))+\sum_{j=m}^{n}(a(j)\cdot c(j))=\sum_{i=k}^{m-1}(a(i)\cdot b(i))+(\sum_{i=m}^{n} a(i))\cdot d)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, b, c функциональные. Переменные k, m идентифицируются с целочисленными константами. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование, причем результат d не зависит от i. Второй антецедент выделен указателем "программа". Выражения $a(i)$, $a(j)$ идентифицируются с отдельными операндами конъюнкций. Уровень срабатывания приема равен 2.

9. Единственное слагаемое.

   $\forall_{an}(\sum_{i=n}^{n} a(i)=a(n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная a функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

10. Присоединение начального слагаемого к сумме.

    $\forall_{abckn}(c=a(k-1)\to b\cdot c+b\cdot\sum_{i=k}^{n} a(i)=b\cdot\sum_{i=k-1}^{n} a(i))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная k идентифицируется с целочисленной константой, переменная a функциональная. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 2.

11. Переход к условному выражению.

    $\forall_{nx}(\text{двнабор}(x,n)\to\sum_{i=1}^{n} x(i)=(0\ \text{при}\ \mathrm{card}(\text{слой}(x,1))-\mathrm{even},\ \text{иначе}\ 1))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная x идентифицируется с переменной. Уровень срабатывания равен 3.

12. Суммирование вычетов по модулю 2.

    $\forall_{Pab}(b = \sum_{i,P(i)} a(i) \rightarrow \sum_{i,P(i)} a(i)(\mathrm{mod}\ 2) = b(\mathrm{mod}\ 2))$

    Первая конечная сумма вещественная, вторая - двоичная. Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные a, P функциональные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Результат b не содержит символа "суммавсех". Уровень срабатывания равен 1.

13. Пустая сумма.

    $\forall_{amn}(0 < m - n \rightarrow \sum_{i=m}^{n} a(i) = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная a функциональная. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 1.

14. Существование решения уравнения.

    $\forall_{afn}(a - \mathrm{boolean}\ \&\ n -$ натуральное $\&\ 0 \leq n - 2\ \&\ \neg($линфал$($фал$(f(b,c)))) \rightarrow \exists_x(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f(x(i), x(j)) = a\ \&$ двнабор$(x,n)))$

    Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную x. Выражения a, n не содержат x. Переменная f функциональная. Указатель "новаргумент(f x фикс)" определяет проверку того, что общий член суммы содержит переменную x только внутри выражений $x(i)$, $x(j)$. По вхождениям выражений $x(i)$, $x(j)$ определяется шаблон идентификации $f(\ldots)$. Первые три антецедента обрабатываются проверочными операторами, истинность четвертого устанавливается при помощи задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 1.

15. Суммирование нуля.

    $\forall_P(\sum_{i,P(i)} 0 = 0)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "двменьшеилиравно"

Символ "двменьшеилиравно" прорисовывается далее как "$\leq$". Напомним, что неравенство относится к двоичным наборам равной длины. Поэтому соответствующие операции алгебры логики - векторные.

1. Дизъюнкция в левой части.

   $\forall_{abc}(a \vee b \leq c \leftrightarrow a \leq c\ \&\ b \leq c)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

2. Конъюнкция в правой части.

   $\forall_{abc}(a \leq b \cdot c \leftrightarrow a \leq b\ \&\ a \leq c)$

   Аналогично предыдущему.

3. Переход к отрицаниям наборов.

   $\forall_{ab}(a \leq b \rightarrow \neg b \leq \neg a)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче подвыражения "отрвект(a)". Уровень срабатывания равен 2.

4. Существование значения неизвестной.

   $\forall_{an}(\text{двнабор}(a,n) \rightarrow \exists_x(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ x \leq a\ \&\ \neg(x = a)) \leftrightarrow$
   $\neg(a = \text{констнабор}(0,n)))$

   Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную x. Эта неизвестная не входит в a, n. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a,n)\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ 0 \leq c - b \rightarrow$
   $\exists_x(x \subseteq \{1,\ldots,n\}\ \&\ \text{card}x + b = c\ \&\ \text{индикатор}(\{1,\ldots,n\},x,1) \leq a) \leftrightarrow$
   $c - b \leq \text{card}(\text{слой}(a,1)))$

   Неравенство под квантором - двоичное, остальные неравенства - вещественные. Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную x. Эта неизвестная не входит в выражения a, b, c, n. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

5. Набор, больший или равный единичному набору.

   $\forall_{nx}(\text{двнабор}(x,n) \rightarrow \text{констнабор}(1,n) \leq x \leftrightarrow x = \text{констнабор}(1,n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

6. Усмотрение истинности неравенства с помощью оператора "усмдвменьшеилиравно".

   $\forall_{ab}(a \leq b \rightarrow a \leq b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

7. Усмотрение избыточного условия на два неизвестных набора.

   $\forall_{abfnxy}(\text{двнабор}(a,n)\ \&\ \text{двнабор}(b,n)\ \&\ a \leq b\ \&\ \text{двнабор}(x,m)\ \&\ \text{двнабор}(y,m)\ \&\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow x(f(i)) = a(i))\ \&\ \forall_j(j \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow y(f(j)) = b(j)) \rightarrow x \leq y)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменные x, y суть несущественные неизвестные. Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста, причем прочие утверждения из контекста не содержат переменных x, y. Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 4.

8. Сравнение разрядов.

   $\forall_{abcdin}(\text{двнабор}(a,n)\ \&\ \text{двнабор}(b,n)\ \&\ a \leq b\ \&\ i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ c = a(i)\ \&\ d = b(i) \rightarrow c \leq d)$

Прием имеет заголовок "вывод". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором, остальные - идентифицируются с посылками задачи на исследование. Уровень срабатывания равен 2.

9. Проверочный оператор "усмдвменьшеилиравно".

   Оператор проверяет истинность утверждений вида "двменьшеилиравно(a, b)". Все приемы срабатывают на уровне 1.

   (a) Равные операнды.
   $\forall_a(a \leq a)$

   (b) Дизъюнкция.
   $\forall_{abc}(a \leq b \rightarrow a \leq b \vee c)$
   Антецедент реализует рекурсивное обращение.
   $\forall_{abc}(a \leq c \;\&\; b \leq c \rightarrow a \vee b \leq c)$
   Указатель "дистрибразвертка" определяет одновременную обработку всех дизъюнктивных членов. Антецеденты реализуют рекурсивные обращения.

   (c) Конъюнкция.
   $\forall_{abc}(a \leq c \rightarrow a \cdot b \leq c)$
   Антецедент реализует рекурсивное обращение.
   $\forall_{abc}(a \leq b \;\&\; a \leq c \rightarrow a \leq b \cdot c)$
   Указатель "дистрибразвертка" определяет одновременную обработку всех конъюнктивных членов. Антецеденты реализуют рекурсивные обращения.

   (d) Константы.
   $\forall_{an}(\text{констнабор}(0, n) \leq a)$
   $\forall_{an}(a \leq \text{констнабор}(1, n))$

Приемы, связанные с символом "отрвект"

1. Отрицание суммы по модулю 2.

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n) \;\&\; \text{двнабор}(b, n) \rightarrow \neg(a + b) = a + b + \text{констнабор}(1, n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "опрдвнабор", усматривающим двоичный набор a и определяющим его длину n. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Двойное отрицание.

   $\forall_a(\neg\neg a = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3. Отрицание константного набора.

   $\forall_{an}(\neg(\text{констнабор}(a, n)) = \text{констнабор}(\neg a, n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Равенство отрицаний.

   $\forall_{ab}(\neg a = \neg b \leftrightarrow a = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Параметрическое описание функций, значения которых на противоположных наборах связаны заданным образом.

   $\forall_{Afn}(n$ – натуральное $\to$ Отображение$(f,$ двкуб$(n), \{0,1\})$ &
   $\forall_x($двнабор$(x,n) \to f(\neg x) = A(f(x))) \leftrightarrow$
   $\exists_g($Отображение$(g,$ двкуб$(n-1), \{0,1\})$ & $f = \lambda_x((g($Исключение$(x,n))$ при $x(n)=0,$ иначе $A(g(\neg($Исключение$(x,n))))),$ двнабор$(x,n))))$

   Напомним, что "Исключение(x,n)" обозначает набор, полученный из двоичного набора x исключением n-го разряда. Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и применяется к группе условий задачи на описание. Переменная f идентифицируется с неизвестной. Переменная A функциональная. Указатель "новаргумент(A x фикс)" определяет проверку того, что переменная x входит в выражение, идентифицируемое с $A(f(x))$, только в виде $f(x)$. Соответственно, формируется шаблон $A(\ldots)$. Уровень срабатывания равен 3.

6. Переход к отрицанию двоичного вектора в описании класса.

   $\forall_{An}(\mathrm{set}_x(A(\neg x)$ & двнабор$(x,n)) = \mathrm{set}_y(\exists_x(A(x)$ & двнабор(x,n) & $y = \neg x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Указатель "новаргумент(A x фикс)" определяет проверку того, что переменная x входит в выражение, идентифицируемое с $A(\neg x)$, только в виде $\neg x$. Уровень срабатывания равен 2.

7. Решение уравнения.

   $\forall_{ax}(\neg x = a \leftrightarrow x = \neg a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные, а выражение a - не содержит. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "кнвект"

1. Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 0.

2. Устранение вложенных конъюнкций. Уровень срабатывания равен 0.

3. Усмотрение сравнимых наборов.

   $\forall_{abn}($двнабор(a,n) & двнабор$(b,n) \to a \cdot \neg b =$ констнабор$(0,n) \leftrightarrow a \leq b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 0.

4. Общая стандартизация выражений.

   $\forall_a(a \cdot a = a)$

   $\forall_a(a \cdot$ констнабор$(1,n) = a)$

   $\forall_a(a \cdot$ констнабор$(0,n) =$ констнабор$(0,n))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_a($двнабор$(a,n) \to a \cdot \neg a =$ констнабор$(0,n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "опрдвнабор". Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{ab}(a \leq b \to a \cdot b = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

5. Нормализатор общей стандартизации "нормкнвект".

   Нормализатор имеет приемы для лексикографического упорядочения операндов и устранения вложенных конъюнкций, а также прием, использующий посылку, дающую явное выражение для конъюнкции a:

   $\forall_{abn}(a = \text{констнабор}(b, n) \to a = \text{констнабор}(b, n))$

Приемы, связанные с символом "днвект"

1. Лексикографическое упорядочение операндов. Уровень срабатывания равен 0.

2. Устранение вложенных дизъюнкций. Уровень срабатывания равен 0.

3. Усмотрение сравнимых наборов.

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n)\ \&\ \text{двнабор}(b, n) \to \neg a \vee b = \text{констнабор}(1, n) \leftrightarrow b \leq a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 0.

4. Общая стандартизация выражений.

   $\forall_a(a \vee a = a)$

   $\forall_a(a \vee \text{констнабор}(0, n) = a)$

   $\forall_a(a \vee \text{констнабор}(1, n) = \text{констнабор}(1, n))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_a(\text{двнабор}(a, n) \to a \vee \neg a = \text{констнабор}(1, n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "опрдвнабор". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ab}(a \leq b \to a \vee b = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "плсвект"

1. Решение уравнения для наборов.

   $\forall_{abx}(a + x = b \leftrightarrow x = a + b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражения a, b не содержат неизвестных, выражение x - содержит. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение равенства наборов.

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n)\ \&\ \text{двнабор}(b, n) \to a + b = \text{констнабор}(0) \leftrightarrow a = b)$

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n)\ \&\ \text{двнабор}(b, n) \to a + b = \text{констнабор}(1) \leftrightarrow a = \neg b)$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

3. Одинаковые слагаемые.

   $\forall_{ab}(a+b+b=a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{an}(\text{двнабор}(a,n)\to a+a=\text{констнабор}(0,n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "опрдвнабор". Уровень срабатывания равен 0.

4. Исключение отрицания.

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a,n)\to b+\neg a=b+a+\text{констнабор}(1,n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "опрдвнабор". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "двнабор"

1. Усмотрение слова в двоичном наборе.

   $\forall_{an}(\text{двнабор}(a,n)\to a-\text{слово})$

   $\forall_{an}(\text{двнабор}(a,n)\to a-\text{функция})$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Если преобразуемое утверждение - условие задачи на описание, причем a - неизвестная, то второй прием блокируется. Уровень срабатывания равен 0.

2. Усмотрение двоичного значения.

   $\forall_{abin}(\text{двнабор}(b,n)\ \&\ i\in\{1,\dots,n\}\ \&\ a=b(i)\to a-\text{boolean})$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на исследование, второй - обрабатывается проверочным оператором. Переменная a идентифицируется с переменной. Уровень срабатывания равен 2.

3. Выражение числа нулей через число единиц.

   $\forall_{nx}(\text{двнабор}(x,n)\to\text{колич}(x,0)=n-\text{колич}(x,1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

4. Множество наборов с заданным числом единиц.

   $\forall_{Paimn}(P=\text{set}_x(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ x(i)=a)\to$
   $\text{set}_x(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ \text{колич}(x,a)=m)=$
   $P\cap\text{set}_x(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ \text{Колич}(x,a,\{i\})=m-1)\cup$
   $(\text{двкуб}(n)\setminus P)\cap\text{set}_x(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ \text{Колич}(x,a,\{i\})=m))$

   Выражение "колич(x,a)" обозначает число разрядов набора x, равных a. Выражение "Колич(x,a,b)" обозначает число разрядов набора x, равных a и не расположенных на позициях с номерами, перечисленными в множестве b.

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению посылки задачи на исследование, имеющей цель "известно". Переменная m идентифицируется с целочисленной константой, переменная n - с натуральной. Выражение P не содержит неизвестных и символа "класс". Антецедент идентифицируется с посылкой. Опиатели "класс" в заменяющем выражении обрабатываются нормализатором "двразложение", предпринимающим попытку выразить их через подкубы двоичного куба.

$\forall_{Paimn}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(i) = a) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{колич}(x, a)) =$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m - 1 \leq \text{Колич}(x, a, \{i\})) \cup$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{Колич}(x, a, \{i\})))$

$\forall_{Paimn}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(i) = a) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \text{колич}(x, a) \leq m) =$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \text{Колич}(x, a, \{i\}) \leq m - 1) \cup$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \text{Колич}(x, a, \{i\}) \leq m))$

Аналогично предыдущему приему.

$\forall_{Pabimn}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(i) = b)\ \&\ \neg(a = b) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{колич}(x, a)) =$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m - 1 \leq \text{Колич}(x, a, \{i\})) \cup$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{Колич}(x, a, \{i\})))$

$\forall_{Paimn}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(i) = b)\ \&\ \neg(a = b) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \text{колич}(x, a) \leq m) =$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \text{Колич}(x, a, \{i\}) \leq m - 1) \cup$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \text{Колич}(x, a, \{i\}) \leq m))$

Аналогично предыдущему, причем второй антецедент обрабатывается проверочным оператором "различимы".

5. Выдача ответа задачи на описание.

   $\text{двнабор}(x, n)$

   Прием имеет заголовок "ответзадачи". Предполагается, что теорема приема идентифицируется с единственным содержащим неизвестные условием задачи на описание, причем x - неизвестная, а выражение n не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 1.

6. Переход к нестрогому неравенству для числа разрядов.

   $\forall_{amx}(m - \text{целое} \to m < \text{колич}(x, a) \leftrightarrow m + 1 \leq \text{колич}(x, a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

7. Разряд векторной операции над двоичным набором.

   $\forall_{abn}((a + b)(n) = a(n) + b(n))$

   $\forall_{abn}((a \cdot b)(n) = a(n) \cdot b(n))$

   $\forall_{abn}((a \vee b)(n) = a(n) \vee b(n))$

   $\forall_{an}((\neg a)(n) = \neg a(n))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

8. Исключение квантора.

   $\forall_n(n$ – натуральное $\rightarrow \exists_x($двнабор$(x,n)))$

   $\forall_n(n$ – натуральное $\rightarrow \neg(\forall_a(\neg($двнабор$(a,n)))))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{PQbn}(\forall_{ax}($двнабор$(a,n)$ & $b(x) \leq a$ &
   $P(\mathrm{card}($слой$(a,1)),x) \rightarrow Q(\mathrm{card}($слой$(a,1)),x)) \leftrightarrow$
   $\forall_{mx}(m \in \{\mathrm{card}($слой$(b(x),1)),\ldots,n\}$ & $P(m,x) \rightarrow Q(m,x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные b,P,Q функциональные. Указатели "новаргумент(P,a, фикс)" и "новаргумент(Q,a, фикс)" определяют идентификацию шаблонов $P(\ldots)$, $Q(\ldots)$ с термами, у которых переменная a встречается только внутри выражений "card(слой($a,1$))". Кванторная приставка x - произвольной длины. Указатель "внешнийквантор" блокирует рассмотрение кванторов существования. Уровень срабатывания равен 1.

9. Перенесение условия "двнабор" в антецеденты.

   $\forall_{ABn}(\forall_{xy}(A(x,y)$ & $B(x,y) \rightarrow \neg($двнабор$(x,n))) \leftrightarrow$
   $\forall_{xy}(A(x,y)$ & двнабор$(x,n) \rightarrow \neg(B(x,y))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные A,B функциональные. Утверждение $B(x,y)$ идентифицируется с отдельным антецедентом, не имеющим заголовка "двнабор". При этом $A(x,y)$ идентифицируется с конъюнкцией остальных антецедентов. Переменная x идентифицируется с переменной, y - с остатком кванторной приставки, который может иметь произвольную длину (в том числе нулевую). Указатель "внешнийквантор" блокирует рассмотрение кванторов существования. Уровень срабатывания равен 1.

10. Условие существования единичного разряда.

    $\forall_{nx}($двнабор$(x,n) \rightarrow \exists_i(i-$натуральное & $i \leq n$ & $x(i)=1) \leftrightarrow \neg($слой$(x,1)=\emptyset))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

11. Усмотрение константного набора.

    $\forall_{nx}($двнабор$(x,n) \rightarrow \forall_i(i$ – натуральное & $i \leq n \rightarrow x(i)=a) \leftrightarrow$
    $x=$констнабор$(a,n))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

    $\forall_{anx}($двнабор(x,n) & $a -$ boolean $\rightarrow$ слой$(x,a)=\emptyset \leftrightarrow x=$констнабор$(\neg a,n))$

    $\forall_{anx}($двнабор(x,n) & $a -$ boolean $\rightarrow \neg(a \in \mathrm{Val}(x)) \leftrightarrow x=$констнабор$(\neg a,n))$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

12. Усмотрение двоичного набора.

    $\forall_{an}(\mathrm{Dom}(a)=\{1,\ldots,n\} \rightarrow \mathrm{Val}(a) \subseteq \{0,1\} \leftrightarrow$ двнабор$(a,n))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждение из контекста. Если n содержит неизвестные, то применение приема к подутверждению условия задачи на описание блокируется. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{an}(\text{двнабор}(a, n) \to \text{двнабор}(a, n))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

13. Упрощение антецедентов.

    $\forall_{PQan}(\forall_{xy}(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(n) = a\ \&\ P(x, y) \to Q(x, y)) \leftrightarrow$
    $\forall_{xy}(\text{двнабор}(x, n - 1)\ \&\ P(\text{суффикс}(x, a), y) \to Q(\text{суффикс}(x, a), y)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные P, Q функциональные. Переменная x идентифицируется с единственной переменной, при этом остаток y кванторной приставки имеет произвольную длину. Уровень срабатывания равен 2.

14. Усмотрение условия принадлежности заданного элемента набору.

    $\forall_{anx}(\text{двнабор}(x, n) \to \exists_i(x(i) = a\ \&\ i - \text{натуральное}\ \&\ i \le n) \leftrightarrow a \in \mathrm{Val}(x))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные, а выражение a - не содержит. Уровень срабатывания равен 2.

15. Связь между числом нулей и единиц.

    $\forall_{an}(\text{двнабор}(a, n) \to \mathrm{card}(\text{слой}(a, 0)) = n - \mathrm{card}(\text{слой}(a, 1)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". В задаче уже встречается выражение "слой$(a, 1)$". Уровень срабатывания равен 2.

16. Условие существования двоичного набора.

    $\forall_{mnk}(n - \text{натуральное} \to \exists_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ k < \mathrm{card}(\text{слой}(x, 1))\ \&$
    $\mathrm{card}(\text{слой}(x, 1)) < m) \leftrightarrow [k] + [-m] + 2 \le 0)$

    Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную x. Эта неизвестная не входит в выражения k, m, n. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

    $\forall_{mnk}(n - \text{натуральное} \to \exists_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \mathrm{card}(\text{слой}(x, 0)) \le k\ \&$
    $\mathrm{card}(\text{слой}(x, 1)) \le m) \leftrightarrow -[k - n] \le [m])$

    Аналогично предыдущему. Уровни срабатывания равны 1 и 8.

    $\forall_{Pn}(n - \text{натуральное} \to \exists_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ P(\mathrm{card}(\text{слой}(x, 1)))) \leftrightarrow$
    $\exists_i(i \in \{0, \ldots, n\}\ \&\ P(i)))$

    Прием имеет заголовок "связка". Переменная P функциональная. Для идентификации шаблона $P(\ldots)$ используется указатель "новаргумент(P x фикс)". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровни срабатывания равны 1 и 6.

    $\forall_{an}(n - \text{натуральное} \to \exists_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ \neg(x = a)))$

Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную x. Эта неизвестная не входит в выражения a, n. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{an}(n$ – натуральное & $\mathrm{card}\{;a\} = m \rightarrow$
$\exists_x($двнабор(x,n) & $\forall_i(i \in \{1,\dots,m\} \rightarrow \neg(x = a(i)))) \leftrightarrow m < 2^n)$

Прием имеет заголовок "связка". Переменная a функциональная. Указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности с группой условий задачи, имеющих вид отрицаний равенств. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "норммощность". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{anx}($двнабор$(x,n) \rightarrow \exists_{ij}(i$ – целое & j – целое & $0 \leq j - i - 1$ & $j \leq n$ &
$1 \leq i$ & $x(i) = a$ & $x(j) = a) \leftrightarrow 2 \leq \mathrm{card}($слой$(x,a)))$

$\forall_{anx}($двнабор$(x,n) \rightarrow \exists_{ij}(i$ – натуральное & j – целое & $1 \leq j - i$ & $j \leq n$ &
$x(i) = a$ & $x(j) = a) \leftrightarrow 2 \leq \mathrm{card}($слой$(x,a)))$

$\forall_{anx}($двнабор$(x,n) \rightarrow \exists_{ij}(i$ – натуральное & j – целое & $0 \leq j - i - 1$ & $j \leq n$ &
$x(i) = a$ & $x(j) = a) \leftrightarrow 2 \leq \mathrm{card}($слой$(x,a)))$

Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестные i, j. Эти неизвестные не входят в выражения a, n, x. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{fgmn}($двнабор(g,n) & кортеж$(f,n,\{1,\dots,m\}) \rightarrow$
$\exists_h($двнабор(h,m) & $\forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \rightarrow h(f(i)) = g(i))) \leftrightarrow$
подразбиение(слои(f), слои$(g)))$

Выражение "слои(f)" обозначает множество прообразов элементов, принадлежащих множеству значений функции f.

Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную h. Эта неизвестная не входят в выражения f, g, m, n. Все переменные обычные. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 4.

17. Усмотрение включения множества нулей либо единиц функции алгебры логики.

    $\forall_{Aafn}(\mathrm{Dom}(f) =$ двкуб$(n) \rightarrow \forall_x(f(x) = a$ & двнабор$(x,n) \rightarrow A(x)) \leftrightarrow$
    слой$(f,a) \subseteq \mathrm{set}_x($двнабор$(x,n)$ & $A(x)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная A функциональная. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормобласть". В контексте заменяемого утверждения встречается выражение "слой(f,a)". Уровень срабатывания равен 2.

18. Переход к условию принадлежности множеству нулей либо единиц функции алгебры логики.

    $\forall_{Aafn}(\mathrm{Dom}(f) =$ двкуб$(n) \rightarrow \exists_x(A(x)$ & $f(x) = a$ & двнабор$(x,n)) \leftrightarrow$
    $\exists_x(A(x)$ & $x \in$ слой$(f,a)))$

    Аналогично предыдущему.

19. Усмотрение слоя.

    $\forall_{an}(\text{двнабор}(a, n) \to \text{set}_m(a(m) = i \ \& \ m - \text{натуральное} \ \& \ m \leq n) = \text{слой}(a, i))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная i идентифицируется с двоичной константой. Уровень срабатывания равен 6.

20. Переход в описании множества двоичных наборов заданной длины к поразрядным переменным.

    $\forall_{Pn}(\text{set}_x(\text{двнабор}(x, n) \ \& \ P(x)) = \text{set}_y(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to y(i) - \text{boolean}) \ \& \ P(y)))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная P функциональная. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Внутри $P(x)$ встречается выражение вида "значение(F, x)". Указатель "переменные" определяет идентификацию y с набором новых переменных, имеющим длину n. Указатель "развертка" определяет выписывание квантора общности как конъюнкции. Уровень срабатывания равен 3.

21. Использование кванторной импликации для двоичных наборов.

    $\forall_{Pafn}(a - \text{boolean} \ \& \ \forall_x(\text{двнабор}(x, n) \to P(x)) \to P(\text{констнабор}(a, n)))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче выражения "значение$(f,$ констнабор$(a, n))$". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - обрабатывается проверочным оператором. Переменная P функциональная. Внутри $P(x)$ встречается выражение "значение(f, x)". Уровень срабатывания равен 3.

22. Переход к параметрическому описанию при усмотрении кванторной импликации, определяющей подмножество разрядов.

    $\forall_{APbnx}(\text{двнабор}(x, n) \ \& \ P = \text{set}_i(i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(A(i))) \to$
    $\forall_i(A(i) \to x(i) = b(i)) \leftrightarrow \exists_y(y - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(y) = P \ \& \ \text{Val}(y) \subseteq \{0, 1\} \ \&$
    $x = \lambda_i((b(i) \text{ при } A(i), \text{ иначе } y(i)), i \in \{1, \ldots, n\})))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная x идентифицируется с неизвестной, термы $A(i)$ и $b(i)$ не содержат неизвестных. Переменные A, b функциональные. Первый антецедент идентифицируется с другим условием задачи, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Результат P не содержит символов "класс" и отличен от символа пустого множества. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 3.

23. Переформулировка условия отличия набора от константного в терминах числа нулей либо единиц.

    $\forall_{anx}(\text{двнабор}(x, n) \to \neg(x = \text{констнабор}(a, n)) \leftrightarrow \text{card}(\text{слой}(x, a)) < n)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная x идентифицируется с неизвестной. Имеется условие, содержащее подвыражение вида "card(слой(x, d))". Уровень срабатывания приема равен 2.

24. Переход к параметрическому описанию, если условия на набор сводятся только к числу единиц.

$\forall_{nx}$(двнабор$(x, n) \leftrightarrow \exists_a(a \subseteq \{1, \dots, n\}$ & $a -$ set &
$x =$ индикатор$(\{1, \dots, n\}, a, 1)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная x идентифицируется с неизвестной. Имеется условие, содержащее выражение "card(слой$(x, 1)$)", причем каждое из оставшихся условий содержит переменную x только внутри вхождений данного выражения. Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 4.

25. Усмотрение тавтологичных утверждений, связанных с двоичным набором.

$\forall_{an}$(двнабор$(a, n) \rightarrow \mathrm{Val}(a) \subseteq \{0, 1\} \leftrightarrow$ истина)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{an}(b -$ boolean & двнабор$(a, n) \rightarrow$ слой$(a, b) \subseteq \{1, \dots, n\} \leftrightarrow$ истина)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 0.

$\forall_{an}$(двнабор$(a, n) \rightarrow \mathrm{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \leftrightarrow$ истина)

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

26. Усмотрение почти-константного набора.

$\forall_{jnx}$(двнабор$(x, n) \rightarrow \forall_i(\neg(i = j)$ & $i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow x(i) = a) \leftrightarrow$
$x =$ констнабор$(a, n) \ \vee$ card(слой$(x, \neg a)) = 1$ & $j \in$ слой$(x, \neg a))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Переменная j идентифицируется с неизвестной, переменная x - с переменной, не являющейся неизвестной. Преобразованное условие снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 2.

27. Описание двоичных наборов с единственным особым значением.

$\forall_{anx}(a -$ boolean $\rightarrow$ двнабор(x, n) & card(слой$(x, a)) = 1 \leftrightarrow$
$\exists_i(i \in \{1, \dots, n\}$ & $x = \lambda_j((a$ при $j = i,$ иначе $\neg a), j \in \{1, \dots, n\})))$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Заменяемые утверждения идентифицируются с условиями задачи на описание. Переменная x - неизвестная, выражение a не содержит неизвестных. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Заменяющее утверждение сопровождается комментарием "серия". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{acnx}$(двнабор(x, n) & $a -$ boolean & $\neg a = c \rightarrow$
$\exists_b(b -$ целое & $1 \leq b$ & $b \leq n$ & $\forall_i(i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow$
$x(i) = (a$ при $b - i = 0,$ иначе $c))) \leftrightarrow$ card(слой$(x, a)) = 1)$

Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиям задачи на описание, содержащими несущественную неизвестную b. Эта неизвестная не входит в a, n, x. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

28. Набор, больший или равный набору с единственным нулем.

    $\forall_{mnx}(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ m \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow$
    $\lambda_i((a \text{ при } i = m,\ \text{иначе } 1), i \in \{1,\ldots,n\}) \leq x \leftrightarrow$
    $x = \text{констнабор}(1,n)\ \vee\ x = \lambda_i((a \text{ при } i = m,\ \text{иначе } 1), i \in \{1,\ldots,n\}))$

    Знак неравенства - "двменьшеилиравно". Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение x содержит неизвестные. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - обрабатывается проверочным оператором. Преобразованное условие снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 2.

29. Проверочный оператор "усмдвнабор".

    (a) Поразрядное отрицание.
    $\forall_{an}(\text{двнабор}(a,n) \rightarrow \text{двнабор}(\neg a,n))$
    Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Поразрядная конъюнкция.
    $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a,n)\ \&\ \text{двнабор}(b,n) \rightarrow \text{двнабор}(a \cdot b,n))$
    Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 1.

    (c) Поразрядная дизъюнкция.
    $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a,n)\ \&\ \text{двнабор}(b,n) \rightarrow \text{двнабор}(a \vee b,n))$
    Антецеденты реализуют рекурсивные обращения. Уровень срабатывания равен 2.

    (d) Поразрядная сумма по модулю 2.
    $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a,n)\ \&\ \text{двнабор}(b,n) \rightarrow \text{двнабор}(a+b,n))$
    Аналогично предыдущему.

    (e) Константный набор.
    $\forall_{an}(a - \text{boolean}\ \&\ n -\ mbox \rightarrow \text{двнабор}(\text{констнабор}(a,n),n))$
    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

    (f) Конкретный набор.
    $\forall_{an}(l(a) = n\ \&\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow a(i) - \text{boolean}) \rightarrow \text{двнабор}(a,n))$
    Выражение a имеет заголовок "набор". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

    (g) Принадлежность булеву кубу.
    $\forall_{an}(a \in \text{двкуб}(n) \rightarrow \text{двнабор}(a,n))$
    Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 3.

    (h) Вставка двоичного значения в двоичный набор.
    $\forall_{abin}(\text{двнабор}(a,n-1)\ \&\ i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ b - \text{boolean} \rightarrow$
    $\text{двнабор}(\text{Вставка}(a,i,b),n))$
    Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

   (i) Набор, заданный описателем "отображение".
   $\forall_{an}(a(i) - \text{boolean} \rightarrow \text{двнабор}(\lambda_i(a(i), i \in \{1, \dots, n\}), n))$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором, причем используется дополнительная посылка "$i \in \{1, \dots, n\}$". Переменная a функциональная. Уровень срабатывания равен 2.

30. Синтезатор "опрдвнабор".

    Синтезатор реализует утверждение "двнабор(a, n)". Входным данным служит выражение a. Проверяется, что значением этого выражения служит двоичный набор, и выходной переменной n присваивается выражение для длины набора.

   (a) Усмотрение из посылок.
   $\forall_{an}(\text{двнабор}(a, n) \rightarrow \text{двнабор}(a, n))$
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Поразрядное отрицание.
   $\forall_{an}(\text{двнабор}(a, n) \rightarrow \text{двнабор}(\neg a, n))$
   Антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

   (c) Поразрядная конъюнкция.
   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n) \ \& \ \text{двнабор}(b, n) \rightarrow \text{двнабор}(a \cdot b, n))$
   Первый антецедент реализует рекурсивное обращение, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

   (d) Поразрядная дизъюнкция.
   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n) \ \& \ \text{двнабор}(b, n) \rightarrow \text{двнабор}(a \vee b, n))$
   Аналогично предыдущему.

   (e) Поразрядная сумма по модулю 2.
   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n) \ \& \ \text{двнабор}(b, n) \rightarrow \text{двнабор}(a + b, n))$
   Аналогично предыдущему.

Приемы, связанные с символом "двкуб"

1. Принадлежность двоичному кубу.

   $\forall_{nx}(n - \text{натуральное} \rightarrow x \in \text{двкуб}(n) \leftrightarrow \text{двнабор}(x, n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Непустота двоичного куба.

   $\forall_{n}(n - \text{натуральное} \rightarrow \neg(\text{двкуб}(n) = \emptyset))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

3. Равенство двоичных кубов.

   $\forall_{mn}(\text{двкуб}(m) = \text{двкуб}(n) \leftrightarrow m = n)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Одномерный куб.

   $двкуб(1) = \{0, 1\}$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

5. Усмотрение двоичного куба.

   $\forall_n(\mathrm{set}_x(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to x(i) - \mathrm{boolean})) = двкуб(n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Длина связывающей приставки x произвольная. Переменной n присваивается эта длина. Указатель "развертка" определяет идентификацию кантора общности как конъюнкции. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_n(n - целое \ \& \ 0 \leq n \to \mathrm{set}_x(двнабор(x, n)) = двкуб(n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

6. Нормализатор выражения подмножества двоичного куба через подкубы "дв разложение".

   (a) Усмотрение пустого множества для наборов с заданным числом единиц.

   $\forall_{amn}(0 < m - n \to \mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ колич(x, a) = m) = \emptyset)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{akmns}(l(s) = k \ \& \ 0 < k + m - n \to$
   $\mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ Колич(x, a, \{; s\}) = m) = \emptyset)$

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение s имеет заголовок "набор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{akmns}(l(s) = k \ \& \ 0 < k + m - n \to$
   $\mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ m \leq Колич(x, a, \{; s\})) = \emptyset)$

   Аналогично предыдущему.

   $\forall_{akmns}(m < 0 \to \mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ Колич(x, a, \{; s\}) = m) = \emptyset)$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Выражение s имеет заголовок "набор". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{akmns}(m < 0 \to \mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ Колич(x, a, \{; s\}) \leq m) = \emptyset)$

   Аналогично предыдущему.

   (b) Множество наборов с заданным числом единиц.

   $\forall_{Paimn}(P = \mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ x(i) = a) \to$
   $\mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ колич(x, a) = m) =$
   $P \cap \mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ Колич(x, a, \{i\}) = m - 1) \cup$
   $(двкуб(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(двнабор(x, n) \ \& \ Колич(x, a, \{i\}) = m))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменная m идентифицируется с целочисленной константой, а n - с натуральной. Выражение P не содержит символа "класс". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Paimns}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} x(i) = a) \mathbin{\&} \neg(i \in \{;s\}) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{;s\}) = m) =$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{i;s\}) = m-1) \cup$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{i;s\}) = m))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение s имеет заголовок "набор". Переменная m идентифицируется с целочисленной константой, переменная n - с натуральной. Выражение P не содержит символа "класс". Уровень срабатывания равен 2.

(c) Усмотрение двоичного куба.

$\forall_{abn}(l(b) = n \to \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{;b\}) = 0) = \text{двкуб}(n))$

Антецедент выделен указателем "идентификатор". Выражение b имеет заголовок "набор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abmn}(m \leq 0 \mathbin{\&} l(b) = n \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} m \leq \text{Колич}(x,a,\{;b\})) = \text{двкуб}(n))$

$\forall_{abmnp}(0 \leq m - n + p \mathbin{\&} l(b) = p \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{;b\}) \leq m) = \text{двкуб}(n))$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Выражение b имеет заголовок "набор". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Множество наборов, число единиц которых не больше заданного.

$\forall_{ans}(\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{;s\}) \leq 0) =$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{;s\}) = 0))$

Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Выражение s имеет заголовок "набор". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Paimns}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} x(i) = a) \mathbin{\&} \neg(i \in \{;s\}) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{;s\}) \leq m) =$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{i;s\}) \leq m-1) \cup$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{i;s\}) \leq m))$

Переменная m идентифицируется с целочисленной константой, переменная n - с натуральной. Выражение s имеет заголовок "набор". Выражение P не содержит символа "класс". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Pabimns}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} x(i) = b) \mathbin{\&} \neg(a = b) \mathbin{\&} \neg(i \in \{;s\}) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{;s\}) \leq m) =$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{i;s\}) \leq m-1) \cup$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} \text{Колич}(x,a,\{i;s\}) \leq m))$

Аналогично предыдущему. Проверочными операторами обрабатываются второй и третий антецеденты.

(e) Множество наборов, число единиц которых не меньше заданного.

$\forall_{Paimn}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} x(i) = a) \to$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} m \leq \text{колич}(x,a)) =$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} m - 1 \leq \text{Колич}(x,a,\{i\})) \cup$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x,n) \mathbin{\&} m \leq \text{Колич}(x,a,\{i\})))$

Антецедент идентифицируется с посылкой. Переменная m идентифицируется с целочисленной константой, переменная n - с натуральной. Выражение P не содержит символа "класс". Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Pabimn}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(i) = b)\ \&\ \neg(a = b) \rightarrow$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{колич}(x, a)) =$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m - 1 \leq \text{Колич}(x, a, \{i\})) \cup$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{Колич}(x, a, \{i\})))$

Аналогично предыдущему. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором.

$\forall_{Paimns}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(i) = a)\ \&\ \neg(i \in \{; s\}) \rightarrow$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{Колич}(x, a, \{; s\})) =$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m - 1 \leq \text{Колич}(x, a, \{i; s\})) \cup$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{Колич}(x, a, \{i; s\})))$

Переменная m идентифицируется с целочисленной константой, переменная n - с натуральной. Выражение s имеет заголовок "набор". Выражение P не содержит символа "класс". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{Pabimns}(P = \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ x(i) = b)\ \&\ \neg(a = b)\ \&\ \neg(i \in \{; s\}) \rightarrow$
$\mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{Колич}(x, a, \{; s\})) =$
$(\text{двкуб}(n) \setminus P) \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m - 1 \leq \text{Колич}(x, a, \{i; s\})) \cup$
$P \cap \mathrm{set}_x(\text{двнабор}(x, n)\ \&\ m \leq \text{Колич}(x, a, \{i; s\})))$

Аналогично предыдущему. Проверочными операторами обрабатываются второй и третий антецеденты.

Приемы, связанные с символом "двrасст"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n)\ \&\ \text{двнабор}(b, n) \rightarrow$
   $\text{дврасст}(a, b) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_i(i - \text{натуральное}\ \&\ i \leq n\ \&\ a(i) + b(i) = 1)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 6.

2. Параметрическое описание множества наборов, находящихся на заданном расстоянии от фиксированного набора.

   $\forall_{bckn}(\text{дврасст}(b, c) = k\ \&\ \text{дврасст}(c, n) \leftrightarrow$
   $\exists_d(\text{двнабор}(d, n)\ \&\ \text{двнорма}(d) = k\ \&\ c = b + d))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемая конъюнкция расположена внутри выражения "мощность(...)", но не является группой антецедентов кванторной импликации. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{bckn}(\text{дврасст}(b, c) < k\ \&\ \text{дврасст}(c, n) \leftrightarrow$
   $\exists_d(\text{двнабор}(d, n)\ \&\ \text{двнорма}(d) < k\ \&\ c = b + d))$

   $\forall_{bckn}(\text{дврасст}(b, c) \leq k\ \&\ \text{дврасст}(c, n) \leftrightarrow$
   $\exists_d(\text{двнабор}(d, n)\ \&\ \text{двнорма}(d) \leq k\ \&\ c = b + d))$

Аналогично предыдущему, но используется указатель "дробь", разрешающий одновременную перестановку частей неравенств.

3. Исключение символа "индикатор".

   $\forall_{abcn}(\text{двнабор}(a, b + \text{индикатор}(\{1, \ldots, n\}, c, 1)) = \mathrm{card}(\text{слой}(a + b, 1) \triangle c))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

4. Преобразование к виду симметрической разности.

   $\forall_{ab}(\text{слой}(a + b, 1) = \text{слой}(a, 1) \triangle \text{слой}(b, 1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение "слой$(a, 1)$" встречается в посылках. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abnp}(\text{двнабор}(a, n) \ \& \ \text{двнабор}(b, n) \ \& \ \text{дврасст}(a, b) = p \rightarrow \mathrm{card}(\text{слой}(a, 1) \triangle \text{слой}(b, 1)) = p)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Выражение p не имеет невырожденных числовых атомов. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{abn}(\text{двнабор}(a, n) \ \& \ \text{двнабор}(b, n) \rightarrow \text{дврасст}(a, b) = \mathrm{card}(\text{слой}(a, 1) \triangle \text{слой}(b, 1)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на описание. Выражение a содержит неизвестные. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

5. Вывод следствий с помощью неравенства треугольника.

   $\forall_{abckmn}(\text{двнабор}(a, n) \ \& \ \text{двнабор}(b, n) \ \& \ \text{двнабор}(c, n) \ \& \ 0 < m + \text{дврасст}(a, b) \ \& \ 0 < k + \text{дврасст}(a, c) \ \& \ m + k + n < 0 \rightarrow \text{дврасст}(b, c) < 2n + m + k)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые пять антецедентов идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, шестой - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

6. Выражение через нормы наборов и их конъюнкции.

   $\forall_{abn}(\text{дврасст}(a, b) = \text{двнорма}(a) + \text{двнорма}(b) - 2\text{двнорма}(a \cdot b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Каждое из выражений "двнорма(a)", "двнорма(b)" уже встречается в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

7. Усмотрение различия наборов.

   $\forall_{abn}(0 < n \ \& \ \text{дврасст}(a, b) = n \rightarrow \neg(a = b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "двнорма"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{abn}$(двнабор$(a, n) \rightarrow$ двнорма$(a) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_i(i$ – натуральное & $i \leq n$ & $a(i) = 1)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 6.

2. Параметрическое описание множества наборов с заданной нормой.

   $\forall_{knx}$(двнабор(x, n) & двнорма$(x) = k \leftrightarrow \exists_m(m \subseteq \{1, \ldots, n\}$ & $\mathrm{card} m = k$ & $x =$ индикатор$(\{1, \ldots, n\}, m, 1)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемая конъюнкция расположена внутри выражения с заголовком "мощность". Уровень срабатывания приема равен 3.

   $\forall_{knx}$(двнабор(x, n) & двнорма$(x) \leq k \leftrightarrow \exists_m(m \subseteq \{1, \ldots, n\}$ & $\mathrm{card} m \leq k$ & $x =$ индикатор$(\{1, \ldots, n\}, m, 1)))$

   Аналогично предыдущему. Допускается одновременная перестановка частей неравенств.

3. Усмотрение нулевого или единичного набора.

   $\forall_{an}$(двнабор$(a, n) \rightarrow$ двнабор$(a) = 0 \leftrightarrow a =$ констнабор$(0, n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{an}$(двнабор$(a, n) \rightarrow$ двнабор$(a) = n \leftrightarrow a =$ констнабор$(1, n))$

   Аналогично предыдущему, но антецедент обрабатывается проверочным оператором.

4. Константный набор.

   $\forall_n$(двнорма(констнабор$(0, n)) = 0)$

   $\forall_n$(двнорма(констнабор$(1, n)) = n)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

5. Норма суммы двух векторов.

   $\forall_{abn}$(двнабор(a, n) & двнабор$(b, n) \rightarrow$ двнорма$(a + b) =$ дврасст$(a, b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

6. Группировка суммы норм двух конъюнкций.

   $\forall_{abcdn}$(двнабор(a, n) & $a \cdot b \cdot c =$ констнабор$(0, n) \rightarrow$
   dдвнорма$(a \cdot b) + d$двнорма$(a \cdot c) = d$двнорма$(a \cdot (b + c)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, второй - выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормкнвект". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "Фал"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{fn}(\mathrm{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ f - \text{функция} \to \text{Фал}(f) \leftrightarrow \mathrm{Val}(f) \subseteq \{0,1\})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Неконстантная функция.

   $\forall_f(\text{Фал}(f) \to \neg(\text{Константа}(f)) \leftrightarrow$
   $\exists_x(x \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f(x) = 0)\ \&\ \exists_y(y \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f(y) = 1))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

3. Обращение к оператору "усмФал".

   $\forall_x(\text{Фал}(x) \to \text{Фал}(x))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на доказательство. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

4. Проверочный оператор "усмФал".

   (a) Тождественная функция.
   $\forall_x(x = \text{Тождфунк}(\{0,1\}) \to \text{Фал}(x))$
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 1.

   (b) Линейная функция.
   $\forall_f(\text{линфал}(f) \to \text{Фал}(f))$
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания приема равен 2.

   (c) Самодвойственная функция.
   $\forall_f(\text{самодвфал}(f) \to \text{Фал}(f))$
   Аналогично предыдущему.

   (d) Монотонная функция.
   $\forall_f(\text{монотфал}(f) \to \text{Фал}(f))$

   (e) Функция, заданная описателем.
   $\forall_{an}(a(x) - \mathrm{boolean} \to \text{Фал}(\lambda_x(a(x), \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to x(i) - \mathrm{boolean}))))$
   Указатель "контекст" определяет идентификацию переменной n с натуральной константой - длиной связывающей приставки x. Указатель "развертка" определяет идентификацию квантора общности с конъюнкцией. Переменная a функциональная. Антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому дополнительно передаются в качестве посылок все конъюнктивные члены утверждения, идентифицированного с квантором. Уровень срабатывания равен 2.
   $\forall_{an}(a(x) - \mathrm{boolean} \to \text{Фал}(\lambda_x(a(x), \text{двнабор}(x,n))))$
   Переменная a функциональная. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(f) Заданы область определения и область значений.

$\forall_{fn}(\mathrm{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq \{0, 1\} \rightarrow \text{Фал}(f))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

(g) Константная функция.

$\forall_{an}(a - \text{boolean} \rightarrow \text{Фал}(\text{конст}(\text{двкуб}(n), a)))$

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

(h) Элемент базиса.

$\forall_{af}(\text{фалбазис}(\{f; a\}) \rightarrow \text{Фал}(f))$

Уровень срабатывания равен 1.

(i) Функция, заданная через операцию "индикатор".

$\forall_{abn}(b - \text{boolean}\ \&\ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{Фал}(\text{индикатор}(\text{двкуб}(n), a, b)))$

Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

5. Проверочный оператор "разныефал".

Оператор введен для усмотрения различия двух функций алгебры логики. Напомним, что для разделения проверочных операторов, усматривающих отрицание равенства объектов заданного типа, вводятся вспомогательные символы (например, "разныеточки", "разныепрямые" и т.п.), которые и используются при обращении к соответствующей проверке. В операторе "разныефал" пока имеется единственный прием:

$\forall_{abP}(P(a)\ \&\ \neg(P(b)) \rightarrow \text{разныефал}(a, b))$

Оба антецедента идентифицируются с посылками. Указатель "символ" определяет идентификацию P с одноместным предикатным символом.

Приемы, связанные с символом "фалы"

Пока создан единственный прием:

$\forall_f(f \in \text{фалы} \leftrightarrow \text{Фал}(f))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "линфал"

1. Усмотрение линейности путем перехода к полиному Жегалкина.

$\forall_{Afp}(f(x) = p \rightarrow \text{линфал}(\lambda_x(f(x), A(x))))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, A функциональные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "стандплс", обеспечивающим преобразование формулы к виду полинома Жегалкина. Проверяется, что результат p есть либо 0, либо не имеет слагаемых, отличных от переменных и константы 1. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Afp}(f(x) = p \cdot y \cdot z + q \rightarrow \neg(\text{линфал}(\lambda_x(f(x), A(x)))))$

Прием имеет заголовок "воройтерм". Переменные f, A функциональные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "стандплс". Переменные y, z идентифицируются с переменными. Уровень срабатывания равен 1.

2. Усмотрение линейной функции из условия различия значений на соседних наборах.

   $\forall_{fn}(n -$ натуральное $\rightarrow$ Отображение$(f,$ двкуб$(n), \{0,1\})$ &
   $\forall_{xy}($двнабор(x,n) & двнабор(y,n) & дврасст$(x,y) = 1 \rightarrow f(x) = \neg f(y)) \leftrightarrow$
   $\exists_a(a -$ boolean & $f = \lambda_x(a +$ плсвсех$(x),$ двнабор$(x,n))))$

   Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Заменяемые утверждения идентифицируются с условиями задачи на описание. Выражение f содержит неизвестные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Определение множества линейных функций.

   Линфал $=$ set$_x($линфал$(x))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение - операнд условия принадлежности. Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. В ней требуется, чтобы преобразуемое выражение было операндом условия включения.

4. Параметрическое описание линейной функции через двоичный набор коэффициентов.

   $\forall_{fn}($Dom$(f) =$ двкуб$(n) \rightarrow$ линфал$(f) \leftrightarrow \exists_{ab}($двнабор$(a,n)$ & $b -$ boolean &
   $f = \lambda_x(\sum_{i=1}^{n}(a(i) \cdot x(i)) + b,$ двнабор$(x,n))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение расположено под описателем "класс", причем переменная f входит в связывающую приставку этого описателя. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормобласть". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_f($линфал$(f) \leftrightarrow \exists_{abn}(n -$ натуральное & двнабор(a,n) & $b -$ boolean &
   $f = \lambda_x(\sum_{i=1}^{n}(a(i) \cdot x(i)) + b,$ двнабор$(x,n))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на исследование, имеющей цель "противоречие". Уровень срабатывания равен 2. Созданы еще две версии приема, срабатывающие на уровне 5. Первая из них применяется к условию задачи на описание, имеющей неизвестную f. Должна отсутствовать цель "элемсвертка". Преобразованное условие сопровождается комментарием "серия". Вторая версия применяется к конъюнктивному члену подкванторного утверждения квантора существования, причем переменная f входит в кванторную приставку.

5. Определение неизвестных коэффициентов по известной функции.

   $\forall_{abfn}(n -$ натуральное & $a -$ boolean & двнабор$(b,n) \rightarrow$
   $f = \lambda_x(a + \sum_{i=1}^{n}(b(i) \cdot x(i)),$ двнабор$(x,n)) \leftrightarrow$ Фал(f) &
   Dom$(f) =$ двкуб(n) & линфал(f) & $a = f($констнабор$(0,n))$ &
   $b = \lambda_i(f(\lambda_j((1$ при $j = i,$ иначе $0), j \in \{1,\ldots,n\})), i \in \{1,\ldots,n\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение f не содержит неизвестных, а хотя бы одно из выражений a, b - содержит. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{bfn}(\forall_a(\text{двнабор}(a, n) \to \sum_{i=1}^n (a(i) \cdot b(i)) = f(a)) \to \text{двнабор}(b, n) \leftrightarrow$
$b = \lambda_i(f(\text{индикатор}(\{1, \ldots, n\}, \{i\}, 1)), i \in \{1, \ldots, n\}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание. Выражение b содержит неизвестные, выражения n и $f(a)$ - не содержат. Переменная f функциональная. Выражение $b(i)$ идентифицируется с конъюнктивным членом. Уровень срабатывания равен 3.

6. Множество линейных функций включается в объединение множеств функций, сохраняющих 0, сохраняющих 1, и самодвойственных.

   $\text{Линфал} \subseteq \text{Сохр0} \cup \text{Сохр1} \cup \text{Самодвфал}$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

7. Попытка подбора нелинейной функции как функции с неравным числом единиц и нулей, отличной от константы.

   $\forall_{fn}(\text{Фал}(f) \ \& \ \exists_{an}(a \subseteq \text{двкуб}(n) \ \& \ n-\text{натуральное} \ \& \ a-\text{set} \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ \text{card}a < 2^n \ \& \ \neg(\text{card}a = 2^{n-1}) \ \& \ f = \text{индикатор}(\text{двкуб}(n), a, 1)) \to \neg(\text{линфал}(f)))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f - неизвестная. Отсутствует условие с заголовком "фалбазис". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 5.

8. Усмотрение невключения в класс линейных функций.

   $\forall_{fg}(\neg(\text{линфал}(f)) \to \neg(\{f; g\} \subseteq \text{Линфал}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f идентифицируется с произвольным элементом набора. Уровень срабатывания равен 1.

9. Константная функция линейна.

   $\forall_{an}(a - \text{boolean} \ \& \ f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), a) \to \text{линфал}(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с утверждением из контекста. Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию выражения "двкуб(n)" через равенство в посылках. Прием блокируется, если утверждение расположено в посылках задачи на описание, имеющей условия "фалбазис(X)" и "$X \subseteq Y$", где f - подтерм Y. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, в которой второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания прежний.

   $\forall_{an}(a - \text{boolean} \ \& \ \neg(\text{линфал}(f)) \to \neg(f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), a)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с утверждением из контекста. Для идентификации терма "двкуб(n)" используется указатель "смравно". Уровень срабатывания равен 2.

10. Несамодвойственная линейная функция.

$\forall_f(\mathrm{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ \text{линфал}(f)\ \&\ \neg(\text{самодвфал}(f)) \rightarrow$
$f(\text{констнабор}(1, n)) = f(\text{констнабор}(0, n)))$

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в задачах на доказательство. Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "идентификатор".

11. Монотонность линейной функции.

$\forall_{an}(\text{монотфал}(\lambda_x(\neg \sum_{i=1}^{n}(a(i) \cdot x(i)), \text{двнабор}(x, n))) \leftrightarrow a = \text{констнабор}(0, n))$

Прием имеет заголовок "аторойтерм". Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{abn}(\text{двнабор}(b, n) \rightarrow \text{монотфал}(\lambda_x(a + \sum_{i=1}^{n}(b(i) \cdot x(i)), \text{двнабор}(x, n))) \leftrightarrow$
$b = \text{констнабор}(0, n)\ \vee\ a = 0\ \&\ \mathrm{card}(\text{слой}(b, 1)) = 1)$

Прием имеет заголовок "аторойтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

12. Равенство линейной функции константной.

$\forall_{abn}(\lambda_x(\neg \sum_{i=1}^{n}(a(i) \cdot x(i)), \text{двнабор}(x, n)) = \text{конст}(\text{двкуб}(n), b) \leftrightarrow$
$a = \text{констнабор}(0, n)\ \&\ b = 1)$

Прием имеет заголовок "аторойтерм". Уровень срабатывания равен 1.

13. Условие самодвойственности линейной функции.

$\forall_{abfn}(f = \lambda_x(a + \sum_{i=1}^{n}(x(i) \cdot b(i)), \text{двнабор}(x, n)) \rightarrow \text{самодвфал}(f) \leftrightarrow$
$\neg(\mathrm{card}(\text{слой}(b, 1)) - \mathrm{even}))$

Прием имеет заголовок "аторойтерм". Точка привязки выбрана в антецеденте. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_{bfn}(f = \lambda_x(\neg \sum_{i=1}^{n}(x(i) \cdot b(i)), \text{двнабор}(x, n)) \rightarrow \text{самодвфал}(f) \leftrightarrow$
$\neg(\mathrm{card}(\text{слой}(b, 1)) - \mathrm{even}))$

Аналогично предыдущему.

14. Отбрасывание отрицания.

$\forall_{Af}(\text{линфал}(\lambda_x(\neg f(x), A(x))) \leftrightarrow \text{линфал}(\lambda_x(f(x), A(x))))$

Прием имеет заголовок "аторойтерм". Переменные f, A функциональные. Уровень срабатывания равен 0.

15. Линейность двойной суммы.

$\forall_{fn}(n - \text{натуральное}\ \&\ 0 \leq n - 2 \rightarrow$
$\text{линфал}(\lambda_x(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} f(x(i), x(j)), \text{двнабор}(x, n))) \leftrightarrow \text{линфал}(\text{фал}(f(a, b))))$

Прием имеет заголовок "аторойтерм". Переменная f функциональная, а переменная x - обычная. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Указатель "новаргумент" определяет идентификацию шаблона "$f(\ldots)$" после проверки того, что переменная x встречается в общем члене суммы только в виде $x(i)$ и $x(j)$. Уровень срабатывания равен 1.

16. Усмотрение класса линейных функций.

    $\mathrm{set}_f(\exists_{abn}(n$ – натуральное & двнабор(a,n) & b – boolean &
    $f = \lambda_x(\sum_{i=1}^{n}(a(i)\cdot x(i)) + b,$ двнабор$(x,n)))) =$ Линфал

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "двойствфал"

1. Значение двойственной функции.

   $\forall_{fx}($двойствфал$(f)(x) = \neg f(\neg x))$

   Имеется в виду отрицание "отрвект". Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Прообраз в точке.

   $\forall_{af}($слой$($двойствфал$(f),a) = \mathrm{set}_x(\exists_y(y \in$ слой$(f,\neg a)$ & $x = \neg y)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

3. Функция, двойственная к функции, заданной описателем "отображение".

   $\forall_{fn}($двойствфал$(\lambda_x(f(x),$ двнабор$(x,n))) = \lambda_x(\neg f(\neg x),$ двнабор$(x,n)))$

   Первое отрицание скалярное, второе - векторное. Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "самодвфал"

1. Усмотрение самодвойственности.

   $\forall_{Afnp}(p = \exists_x(f(x) = f(\lambda_i(\neg x(i), i \in \{1,\ldots,n\}))$ & $A(x)) \rightarrow$
   самодвфал$(\lambda_x(f(x),A(x))) \leftrightarrow \neg p)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, A функциональные. Утверждение $A(x)$ не содержит символа "двнабор". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию переменной n с длиной связывающей приставки x. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "развертка" определяет выписывание терма "отображение" в его правой части как конечного набора. Конъюнкция подкванторных утверждений этой части разрешается относительно x с помощью задачи на описание. После этого сам квантор упрощается задачей на преобразование. Результат p не содержит символа "существует". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{fn}(\mathrm{Dom}(f) =$ двкуб(n) & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \{0,1\} \rightarrow$
   слой$(f,1) = \mathrm{set}_x(\exists_y(x = \neg y$ & $y \in$ слой$(f,0))) \leftrightarrow$ самодвфал$(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Расшифровка по определению.

   $\forall_{Af}($самодвфал$(\lambda_x(f(x),A(x))) \leftrightarrow \forall_x(A(x) \rightarrow \neg f(x) = f(\neg x)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, A функциональные. Уровень срабатывания равен 2.

3. Определение множества самодвойственных функций.

   $\text{Самодвфал} = \text{set}_x(\text{самодвфал}(x))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение является операндом символа "принадлежит". Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. В ней преобразуемое выражение является операндом символа "содержится".

4. Невключение в другие предполные классы.

   $\neg(\text{Самодвфал} \subseteq \text{Монотфал})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Допускается замена символа "Монотфал" на символы "Линфал", "Сохр0", "Сохр1". Уровень срабатывания приема равен 1.

5. Параметрическое описание множества самодвойственных функций через функции от набора длины $n-1$.

   $\forall_{fn}(\text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n) \to \text{самодвфал}(f) \leftrightarrow \exists_g(\text{Фал}(g)\ \&\ \text{Dom}(g) = \text{двкуб}(n-1)\ \&\ \forall_x(x \in \text{двкуб}(n) \to f(x) = (g(\text{Исключение}(x,1))\text{ при } x(1) = 0,\ \text{иначе } \neg g(\neg\text{Исключение}(x,1))))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Все переменные обычные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная f идентифицируется с переменной. Преобразуемое утверждение не расположено непосредственно под отрицанием. Оно находится внутри выражения "мощность(класс(...))", причем f - одна из переменных связывающей приставки класса. Уровень срабатывания равен 2.

6. Перечисление самодвойственных функций для подбора примера.

   $\forall_{ax}(\text{самодвфал}(a)\ \&\ x = a \to \text{самодвфал}(x))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Первый антецедент обрабатывается пакетнм синтезатором "самодвфалы", перечисляющим примеры самодвойственных функций. Этот синтезатор будет приведен ниже. Второй антецедент выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания приема равен 4.

7. Усмотрение невключения в класс самодвойственных функций.

   $\forall_{fg}(\neg(\text{самодвфал}(f)) \to \neg(\{f;g\} \subseteq \text{Самодвфал}))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

8. Усмотрение несамодвойственной функции.

   $\forall_{Aan}(\neg(\text{card}(A) - 2^{n-1} = 0) \to \neg(\text{самодвфал}(\text{индикатор}(\text{двкуб}(n), A, a))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Для преобразования выражения "card(A)" используется нормализатор "норммощность". Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{fn}(f(\text{констнабор}(0,n)) = f(\text{констнабор}(1,n)) \to \neg(\text{самодвфал}(f)))$

Точка привязки выбрана в антецеденте. В случае задачи на доказательство, имеющей посылку вида "фалбазис(...)", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 2.

$\forall_{fn}(f(a) = f(\neg a) \rightarrow \neg(\text{самодвфал}(f)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "равно". В случае задачи на доказательство, имеющей посылку вида "фалбазис(...)", прием блокируется. Уровень срабатывания равен 5.

9. Разбор случаев для функции, имеющей заданное значение на константном наборе.

   $\forall_{abfn}(\text{Фал}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ f(\text{констнабор}(a,n)) = b \rightarrow$ $\text{самодвфал}(f)\ \&\ f(\text{констнабор}(\neg a,n)) = \neg b\ \vee\ \neg(\text{самодвфал}(f)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Переменная f идентифицируется с переменной. Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, первый - обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Задача не имеет ни посылки "самодвфал(f)", ни посылки "¬самодвфал(f)". Имеется посылка вида "фалбазис(...)", в которой встречается f. Выражение b - константа 0 либо 1. Выводимое утверждение сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

10. Попытка подбора несамодвойственной функции как функции с неравным числом единиц и нулей, отличной от константы.

    $\forall_{fn}(\text{Фал}(f)\ \&\ \exists_{an}(a \subseteq \text{двкуб}(n)\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ a - \text{set}\ \&$ $\neg(\text{card}(a) = 2^{n-1})\ \&\ f = \text{индикатор}(\text{двкуб}(n), a, 1)) \rightarrow \neg(\text{самодвфал}(f)))$

    Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачаи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f идентифицируется с неизвестной. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 6.

11. Перечисляющий синтезатор "самодвфалы".

    Синтезатор реализует утверждение "самодвфал(a)". Входных данных нет; выходная переменная a перечисляет выражения для самодвойственных функций. Пока предусмотрен лишь конечный список вариантов.

    (a) Тождественная функция.
    самодвфал(фал(x))
    Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Отрицание.
    самодвфал(фал($\neg x$))
    Уровень срабатывания равен 2.

    (c) Линейная функция от трех переменных.
    самодвфал(фал($x + y + z$))
    Уровень срабатывания равен 3.

(d) Медиана.
самодвфал(фал($x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$))
Уровень срабатывания равен 3.

(e) Отрицание медианы.
самодвфал(фал($\neg(x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z)$))
Уровень срабатывания равен 4.

Приемы, связанные с символом "монотфал"

1. Усмотрение монотонности.

   $\forall_{Abfg}(g = f(x) \rightarrow$ монотфал$(\lambda_x(f(x), A(x))) \leftrightarrow b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные f, A функциональные. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "сокращднф" приведения к сокращенной дизъюнктивной нормальной форме. Указатель "контекст" определяет после этого значение b как константу "ложь", если результат g содержит символ "отр", и константу "истина" в противном случае. Перед преобразованиями проверяется, что выражение $f(x)$ не содержит символов, отличных от 0,1,"дн", "кн", "имп", "отр", "экв". "плс". Уровень срабатывания равен 1.

2. Определение множества монотонных функций.

   Монотфал $=$ set$_x$(монотфал(x))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение является операндом символа "принадлежит". Уровень срабатывания равен 1. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. В ней преобразуемое выражение является операндом символа "содержится".

3. Усмотрение невключения в класс монотонных функций.

   $\forall_{fg}(\neg($монотфал$(f)) \rightarrow \neg(\{f; g\} \subseteq$ Монотфал$))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f идентифицируется с произвольным элементом перечня. Уровень срабатывания равен 1.

4. Монотонность функции, обращающейся в единицу на нулевом наборе либо в ноль на единичном.

   $\forall_{fn}(f($констнабор$(0, n)) = 1 \rightarrow$ монотфал$(f) \leftrightarrow$
   $f =$ конст(двкуб(числперем(f))$, 1$))

   $\forall_{fn}(f($констнабор$(1, n)) = 0 \rightarrow$ монотфал$(f) \leftrightarrow$
   $f =$ конст(двкуб(числперем(f))$, 0$))

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Точка привязки выбрана в антецеденте. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_a($Монотфал $\setminus$ (Сохр0 $\cup\, a) =$ Конст1 $\setminus\, a))$

   $\forall_a($Монотфал $\setminus$ (Сохр1 $\cup\, a) =$ Конст0 $\setminus\, a))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Выражение a может отсутствовать. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_a($Монотфал $\setminus$ (Сохр0 $\cap$ Сохр1 $\cup\, a) =$ Конст01 $\setminus\, a))$

Аналогично предыдущему, но уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{fn}(f(\text{констнабор}(0,n)) = 1 \to \text{монотфал}(\lambda_x(f(x), \text{двнабор}(x,n))) \leftrightarrow$
$\forall_x(\text{двнабор}(x,n) \to f(x) = 1))$

$\forall_{fn}(f(\text{констнабор}(1,n)) = 0 \to \text{монотфал}(\lambda_x(f(x), \text{двнабор}(x,n))) \leftrightarrow$
$\forall_x(\text{двнабор}(x,n) \to f(x) = 0))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Переменная f функциональная. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть упрощается задачей на преобразование. Уровень срабатывания равен 3.

5. Сохранение констант монотонной нелинейной функцией.

   $\forall_{fn}(\text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ \neg\text{линфал}(f)\ \&\ \text{монотфал}(f) \to$
   $f(\text{констнабор}(0,n)) = 0)$

   $\forall_{fn}(\text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ \neg\text{линфал}(f)\ \&\ \text{монотфал}(f) \to$
   $f(\text{констнабор}(1,n)) = 1)$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 3.

6. Усмотрение немонотонной функции.

   $\forall_{afn}(\text{Фал}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ f(\text{констнабор}(1,n)) = 0\ \&\ f(a) = 1 \to$
   $\neg\text{монотфал}(f))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Два последних антецедента идентифицируются с посылками. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания приема равен 4.

7. Разбор случаев для монотонности функции, не сохраняющей единицу.

   $\forall_{abfn}(\text{Фал}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n)\ \&\ f(\text{констнабор}(1,n)) = 0 \to$
   $f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), 0)\ \vee\ \neg\text{монотфал}(f))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, имеющей также посылку "фалбазис(X)", где выражение X содержит переменную f. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор". Задача не имеет посылок "монотфал(f)" либо "$\neg$монотфал(f)". Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 6.

8. Монотонность константы.

   $\forall_{afn}(a - \text{boolean}\ \&\ f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), a) \to \text{монотфал}(f))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Точка привязки выбрана во втором антецеденте. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

9. Монотонность функции, обращающейся в единицу на единственном наборе.

   $\forall_{an}(\text{монотфал}(\text{индикатор}(\text{двкуб}(n), \{a\}, 1)) \leftrightarrow a = \text{констнабор}(1,n))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

10. Попытка подбора немонотонной функции как неконстантной функции, обращающейся в единицу на нулевом наборе.

    $\forall_{an}(a \subseteq \text{двкуб}(n)\ \&\ \text{констнабор}(0,n) \in a\ \&\ \text{card}a < 2^n \to$
    $\neg\text{монотфал}(\text{индикатор}(\text{двкуб}(n), a, 1)))$

    Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная a - неизвестная. Не усматривается непринадлежность набора из нулей длины n множеству a. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, два других - выделены указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 5.

11. Расшифровка по определению.

    $\forall_{fn}(n = \text{числперем}(f) \to \text{монотфал}(f) \leftrightarrow$
    $\forall_{xy}(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ \text{двнабор}(y,n)\ \&\ x \leq y \to f(x) \Rightarrow f(y) = 1))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 5.

    $\forall_{fn}(n = \text{числперем}(f) \to \neg\text{монотфал}(f) \leftrightarrow$
    $\exists_{xy}(\text{двнабор}(x,n)\ \&\ \text{двнабор}(y,n)\ \&\ x \leq y\ \&\ f(x) = 1\ \&\ f(y) = 0))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на описание, не имеющей цели "прямойответ". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 8. Создана также версия данного приема, применяемая к содержащему неизвестные условию задачи на описание. При этом каждая неизвестная, входящая в выражение f, должна быть несущественной. Уровень срабатывания этой версии равен 8.

12. Использование неравенства для двух наборов.

    $\forall_{abf}(\text{монотфал}(f)\ \&\ a \leq b \to f(a) \Rightarrow f(b) = 1)$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 2.

13. Явное разрешение условия равенства функции константе для переформулировки требования монотонности.

    $\forall_{aP}((a(x) = 1\ \&\ \text{двнабор}(x,n)) = P(x) \to \text{монотфал}(\lambda_x(a(x), \text{двнабор}(x,n))) \leftrightarrow$
    $\forall_{xy}(P(x)\ \&\ \text{двнабор}(y,n)\ \&\ x \leq y \to P(y)))$

    $\forall_{aP}((a(x) = 0\ \&\ \text{двнабор}(x,n)) = P(x) \to \text{монотфал}(\lambda_x(a(x), \text{двнабор}(x,n))) \leftrightarrow$
    $\forall_{xy}(P(x)\ \&\ \text{двнабор}(y,n)\ \&\ y \leq x \to P(y)))$

    Приемы имеют заголовок "второйтерм" и применяются к содержащему неизвестные условию задачи на описание. Второй антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, первый - выделен указателем "идентификатор". Переменные a, P функциональные. Уровень срабатывания равен 4.

14. Значения монотонной функции на нулевом и единичном наборах.

    $\forall_{afn}(\text{монотфал}(f)\ \&\ f(a) = 0 \to f(\text{констнабор}(0, \text{числперем}(f))) = 0)$

    $\forall_{afn}(\text{монотфал}(f)\ \&\ f(a) = 1 \to f(\text{констнабор}(1, \text{числперем}(f))) = 1)$

Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная f идентифицируется с переменной. Отсутствует посылка, явно выражающая f через описатель "отображение". Уровень срабатывания равен 6.

Приемы, связанные с символами "Сохр0", "Сохр1"

1. Определение класса функций, сохраняющих константу.

   $\text{Сохр0} = \text{set}_f(\exists_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \{0,1\} \ \& \ f(\text{констнабор}(0,n)) = 0))$

   $\text{Сохр1} = \text{set}_f(\exists_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{двкуб}(n) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \{0,1\} \ \& \ f(\text{констнабор}(1,n)) = 1))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Преобразуемое выражение является операндом символа "принадлежит". Уровень срабатывания равен 1. Созданы также версии приемов, у которых преобразуемое выражение является операндом символа "содержится", причем оно не расположено в условии задачи на описание. Уровень срабатывания этих версий равен 4.

2. Принадлежность булевой функции классу.

   $\forall_f(\text{Фал}(f) \rightarrow f \in \text{Сохр0} \leftrightarrow f(\text{констнабор}(0, \text{числперем}(f))) = 0)$

   $\forall_f(\text{Фал}(f) \rightarrow f \in \text{Сохр1} \leftrightarrow f(\text{констнабор}(1, \text{числперем}(f))) = 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

3. Расшифровка условия сохранения константы.

   $\forall_{fn}(\text{числперем}(f) = n \ \& \ f(\text{констнабор}(0,n)) = 1 \rightarrow \neg\text{сохр0}(f)))$

   $\forall_{fn}(\text{числперем}(f) = n \ \& \ f(\text{констнабор}(1,n)) = 0 \rightarrow \neg\text{сохр0}(f)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{fn}(\text{сохр0}(\lambda_x(p(x), q(x))) \leftrightarrow p(\lambda_i(0, i \in \{1, \ldots, n\})) = 0)$

   $\forall_{fn}(\text{сохр1}(\lambda_x(p(x), q(x))) \leftrightarrow p(\lambda_i(1, i \in \{1, \ldots, n\})) = 1)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Переменные p, q функциональные. Указатель "контекст" идентифицирует n с длиной связывающей приставки x. Утверждение $q(x)$ - конъюнкция утверждений вида "двоичное$(x(i))$". Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию первого описателя "отображение" через равенство в контексте. Указатель "развертка" определяет выписывание второго описателя "отображение" в виде набора. Уровень срабатывания приемов равен 1.

   $\forall_{fn}(\text{сохр0}(\lambda_x(p(x), \text{двнабор}(x,n))) \leftrightarrow p(\text{констнабор}(0,n)) = 0)$

   $\forall_{fn}(\text{сохр0}(\lambda_x(p(x), \text{двнабор}(x,n))) \leftrightarrow p(\text{констнабор}(1,n)) = 1)$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Переменные p, q функциональные. Указатель "смравно" разрешает косвенную идентификацию описателя "отображение" через равенство в контексте. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{an}(\text{сохр0}(\text{индикатор}(\text{двкуб}(n), a, 1)) \leftrightarrow \neg(\text{констнабор}(0,n) \in a))$

$\forall_{an}$(сохр1(индикатор(двкуб(n), a, 1)) $\leftrightarrow \neg$(констнабор(1, n) $\in a$))

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "замыкфал"

1. Пустое множество.

   замыкфал($\emptyset$) = $\emptyset$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Замкнутые классы.

   (a) Константы.
   замыкфал(Конст0) = Конст0
   замыкфал(Конст1) = Конст1
   замыкфал(Конст01) = Конст01
   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Предполные классы.
   замыкфал(Монотфал) = Монотфал
   замыкфал(Линфал) = Линфал
   замыкфал(Сохр0) = Сохр0
   замыкфал(Сохр1) = Сохр1
   замыкфал(Самодвфал) = Самодвфал
   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   (c) Множество всех функций алгебры логики.
   замыкфал(фалы) = фалы
   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3. Критерий полноты функций алгебры логики.

   $\forall_A$(замыкфал(A) = фалы $\leftrightarrow \neg$($A \subseteq$ Сохр0) & $\neg$($A \subseteq$ Сохр1) & $\neg$($A \subseteq$ Линфал) & $\neg$($A \subseteq$ Монотфал) & $\neg$($A \subseteq$ Самодвфал))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи. Уровень срабатывания равен 1.

4. Усмотрение непринадлежности функции замыканию множества функций.

   $\forall_{Af}$($A \subseteq$ Сохр0 & $\neg$($f \in$ Сохр0) $\rightarrow \neg$($f \in$ замыкфал(A)))

   $\forall_{Af}$($A \subseteq$ Сохр1 & $\neg$($f \in$ Сохр1) $\rightarrow \neg$($f \in$ замыкфал(A)))

   $\forall_{Af}$($A \subseteq$ Линфал & $\neg$($f \in$ Линфал) $\rightarrow \neg$($f \in$ замыкфал(A)))

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Истинность антецедентов устанавливается при помощи задач на доказательство, решаемых до максимального уровня 4. Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{Af}$($A \subseteq$ Самодвфал & $\neg$($f \in$ Самодвфал) $\rightarrow \neg$($f \in$ замыкфал(A)))

   $\forall_{Af}$($A \subseteq$ Монотфал & $\neg$($f \in$ Монотфал) $\rightarrow \neg$($f \in$ замыкфал(A)))

   Аналогично предыдущим приемам, но уровень срабатывания равен 3.

5. Усмотрение полноты множества функций алгебры логики при доказательстве выразимости.

   $\forall_A(\neg(A \subseteq \text{Сохр0}) \mathbin{\&} \neg(A \subseteq \text{Сохр1}) \mathbin{\&} \neg(A \subseteq \text{Линфал}) \mathbin{\&}$
   $\neg(A \subseteq \text{Монотфал}) \mathbin{\&} \neg(A \subseteq \text{Самодвфал}) \mathbin{\&} \text{Фал}(f) \to f \in \text{замыкфал}(A))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Истинность первых пяти антецедентов устанавливается при помощи задач на доказательство, решаемых до максимального уровня 4. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

6. Попытка усмотрения полноты множества функций алгебры логики при нахождении его замыкания.

   $\forall_A(\text{замыкфал}(A) = \text{фалы} \to \text{замыкфал}(A) = \text{фалы})$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на преобразование. Истинность антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство, решаемой до того же максимального уровня, что и текущая задача. Введен слабый ограничитель трудоемкости. Уровень срабатывания приема равен 4.

Приемы, связанные с символом "фалбазис"

1. Ввод вспомогательного обозначения для функции из исходной системы.

   $\forall_{dfp}(c = \{p; d\} \to p = f)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подутверждения "фалбазис(a)" в условии задачи на описание, где a - неизвестная. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию условия "$a \subseteq c$". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная p идентифицируется с произвольным не содержащим неизвестных, но содержащим описатель "отображение" элементом конечного списка. Проверяется отсутствие посылки вида "$p = x$", где x - переменная. В качестве обозначения для p прием выбирает новую переменную f. Эта переменная регистрируется как вспомогательный параметр, что гарантирует невключение ее в ответ задачи. Выведенная посылка сопровождается комментарием "фиксировано", блокирующим любые ее преобразования. Уровень срабатывания равен 1.

2. Анализ линейности.

   $\forall_{Aafpq}(A = \{f; a\} \mathbin{\&} f = \lambda_x(p(x), q(x)) \mathbin{\&} \text{линфал}(\lambda_x(p(x), q(x))) = m \to$
   $\text{линфал}(f) \leftrightarrow m)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подутверждения "фалбазис(b)" условия задачи на описание. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию условия "$b \subseteq A$". Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый и третий выделены указателем "идентификатор". Левая часть третьего антецедента упрощается задачей на преобразование. Проверяется, что результат m - логическая константа "истина" либо "ложь". Переменная f идентифицируется с произвольным элементом конечного списка. Перед преобразованиями проверяется отсутствие посылок "линфал(f)" и "не(линфал(f))". Уровень срабатывания равен 2.

3. Анализ монотонности.

   $\forall_{Aafpq}(A = \{f;a\}$ & $f = \lambda_x(p(x), q(x))$ & монотфал$(\lambda_x(p(x), q(x))) = m \to$ монотфал$(f) \leftrightarrow m)$

   Аналогично предыдущему.

4. Анализ самодвойственности.

   $\forall_{Aafpq}(A = \{f;a\}$ & $f = \lambda_x(p(x), q(x))$ & самодвфал$(\lambda_x(p(x), q(x))) = m \to$ самодвфал$(f) \leftrightarrow m)$

   Аналогично предыдущему.

5. Анализ сохранения констант.

   $\forall_{Aafpq}(A = \{f;a\}$ & $f = \lambda_x(p(x), q(x))$ & сохр0$(\lambda_x(p(x), q(x))) = m \to$ сохр0$(f) \leftrightarrow m)$

   $\forall_{Aafpq}(A = \{f;a\}$ & $f = \lambda_x(p(x), q(x))$ & сохр1$(\lambda_x(p(x), q(x))) = m \to$ сохр1$(f) \leftrightarrow m)$

   Аналогично предыдущему.

6. Разбор случаев.

   $\forall_{abx}$(фалбазис(x) & $x \subseteq \{a;b\} \to a \in x \ \vee \ x \subseteq \{;b\})$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Антецеденты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей неизвестную x. Переменная a идентифицируется с произвольным элементом конечного списка, представляющим собой переменную. Задача имеет посылку "$\neg P(a)$", где P - один из символов "линфал", "сохр0", "сохр1", "монотфал", "самодвфал". Задача не имеет ни условия "$a \in x$", ни условия вида "$\{a;c\} \subseteq x$". Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 4.

7. Отбрасывание случая избыточного элемента базиса.

   $\forall_{abx}(\{a;b\} \subseteq x \to$ фалбазис$(x) \leftrightarrow$ ложь)

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, имеющей неизвестную x. Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменная a идентифицируется с произвольным элементом конечного списка переменных Y. Для каждой переменной y списка Y и для каждого символа P из "линфал", "самодвфал", "монотфал", "сохр0", "сохр1" имеется либо посылка "$P(y)$", либо посылка "$\neg P(y)$". При этом для каждой посылки вида "$\neg P(a)$", где P - из прежнего перечня, имеется посылка вида"$\neg P(z)$" при некотором z из b. Уровень срабатывания равен 3.

   $\forall_{ab}$(фалбазис$(\{a;b\}) \leftrightarrow$ ложь)

   Аналогично предыдущему. Прием применяется к подутверждению условия задачи на описание, не содержащему неизвестных.

8. Отбрасывание неполной системы.

   $\forall_{a}$(фалбазис$(\{;a\}) \leftrightarrow$ ложь)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Все элементы конечного списка a - переменные. Существует такой символ P из списка "линфал", "самодвфал", "монотфал", "сохр0", "сохр1", что для каждой переменной x списка a имеется посылка $P(x)$. Уровень срабатывания равен 2.

9. Усмотрение базиса.

   $\forall_a$(фалбазис($\{;a\}$) $\leftrightarrow$ истина)

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание. Выражение a имеет вид "набор$(x_1, \ldots, x_n)$", где $x_1, \ldots, x_n$ - переменные. Для каждого символа P списка "линфал", "самодвфал", "монотфал", "сохр0", "сохр1" и каждой переменной x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, задача имеет либо посылку $P(x_i)$, либо посылку $\neg P(x_i)$. Для каждой переменной x_i существует символ P указанного списка, такой, что имеется посылка $\neg P(x_i)$, а посылка вида $\neg P(x_j)$ при $j \neq i$ отсутствует. Уровень срабатывания равен 2.

10. Пустая система.

    $\neg$фалбазис($\emptyset$)

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

11. Усмотрение избыточности базиса из мощностных соображений.

    $\forall_{af}(0 \leq \mathrm{card}(\{;a\}) - 3 \rightarrow \neg$фалбазис$(\{f;a\}))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменная f идентифицируется с произвольным элементом конечного списка, для которого усматривается его непринадлежность не менее чем трем различным классам "Линфал", "Самодвфал", "Монотфал", "Сохр0", "Сохр1". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 4.

    $\forall_{afg}(0 \leq \mathrm{card}(\{;a\}) - 2 \rightarrow \neg$фалбазис$(\{f,g;a\}))$

    Аналогично предыдущему, но вместо одного элемента f конечного списка рассматриваются два произвольных элемента f, g, для которых усматривается непринадлежность в совокупности не менее чем четырем предполным классам. Уровень срабатывания равен 4.

12. Разбор случаев для немонотонной функции.

    $\forall_{an}$(фалбазис$(\{;a\})$ & $l(a) = n \rightarrow \exists_i(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $\neg$(монотфал$(a(i))$))))

    Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство. Выражение a имеет заголовок "набор". Задача не имеет посылки вида "не(монотфал(f))", параметры которой пересекались бы с параметрами выражения a. Второй антецедент выделен указателем "развертка". Указатель "или" определяет выписывание выводимого утверждения в виде дизъюнкции отрицаний монотонности. Это утверждение сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 7.

13. Разбор случаев для нелинейной функции.

    $\forall_{an}$(фалбазис$(\{;a\})$ & $l(a) = n \rightarrow \exists_i(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $\neg$(линфал$(a(i))$))))

    Аналогично предыдущему.

14. Вывод о принадлежности функции предполному классу.

    $\forall_{abf}(0 \leq \mathrm{card}(\{;a\}) - 3\ \&\ \text{фалбазис}(\{f;a\}) \to f \in b)$

    Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, первый - обрабатывается проверочным оператором. Переменная f идентифицируется с произвольным элементом конечного списка. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию множества X всех предполных классов, для которых усматривается непринадлежность им функции f, проверку того, что это множество имеет ровно два элемента, и определяет переменную b как произвольный из оставшихся предполных классов. Уровень срабатывания равен 8.

15. Разбор случаев для условия задачи.

    $\forall_{Paf}(b = P(f)\ \&\ \text{фалбазис}(\{f;a\}) \to P(f)\ \vee\ \neg P(f))$

    Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент ижентифицируется посылкой задачи на доказательство. Указатель "контекст" определяет идентификацию переменной b с условием задачи. Переменная f идентифицируется с произвольным элементом конечного списка, входящим в b. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", причем переменная P - функциональнаяю. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "шефферова"

1. Расшифровка условия шефферовости.

   $\forall_f(\text{Фал}(f) \to \text{шефферова}(f) \leftrightarrow \neg(\text{сохр0}(f))\ \&\ \neg(\text{сохр1}(f))\ \&\ \neg(\text{самодвфал}(f)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

2. Существование шефферовой функции.

   $\exists_f(\text{Фал}(f)\ \&\ \neg(\text{линфал}(f))\ \&\ \neg(\text{самодвфал}(f))\ \&$
   $f(\text{констнабор}(0, \text{числперем}(f))) = 1\ \&\ f(\text{констнабор}(1, \text{числперем}(f))) = 0)$

   Прием имеет заголовок "связка". Подкванторные утверждения идентифицируются со всеми условиями задачи на описание, содержащими неизвестную f. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с константными функциями алгебры логики

$\forall_{fn}(\mathrm{Dom}(f) = \text{двкуб}(n) \to f \in \text{Конст0} \leftrightarrow f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), 0))$

$\forall_{fn}(\mathrm{Dom}(f) = \text{двкуб}(n) \to f \in \text{Конст1} \leftrightarrow f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), 1))$

$\forall_{fn}(\mathrm{Dom}(f) = \text{двкуб}(n) \to f \in \text{Конст01} \leftrightarrow$
$f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), 0)\ \vee\ f = \text{конст}(\text{двкуб}(n), 1))$

Приемы имеют заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

8.3 Приемы по многозначным логикам

Приемы, связанные с отрицанием Поста

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ak}(\text{отрп}(a,k) = (a+1)(\text{mod } k))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, k константные. Уровень срабатывания равен 0. Созданы еще две версии приема. Первая из них, срабатывающая на уровне 1, не имеет ограничений на a, k, но требует, чтобы преобразуемое выражение располагалось внутри подтерма с заголовком "вычет". Вторая, срабатывающая на уровне 4, применяется в условиях задач на доказательство и других ограничений не имеет.

2. Переход к сумме.

   $\forall_{kx}(x \in E(k) \mathbin{\&} \neg(x-k+1=0) \rightarrow \text{отрп}(x,k) = x+1)$

   Суммы - обычные. Прием имеет заголовок "второйтерм. Антецеденты обраюатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

3. Нулевое значение.

   $\forall_{k}(\text{отрп}(k-1,k) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

4. Нормализатор общей стандартизации "нормотрп".

   (a) Переход к сумме.
   $\forall_{ak}(a \in E(k) \mathbin{\&} 0 < k-1-a \rightarrow \text{отрп}(a,k) = a+1)$
   Антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

   (b) Нулевое значение.
   $\forall_{ak}(a-k+1=0 \rightarrow \text{отрп}(a,k) = 0)$
   Антецедент выделен указателем "идентификатор".

Приемы, связанные с отрицанием Лукасевича

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ak}(\text{отрл}(a,k) = (k-1-a)(\text{mod } k))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражение a константное. Уровень срабатывания равен 0. Создана еще одна версия, срабатывающая на уровне 4. Она применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Требование константности отброшено.

2. Значение в нуле.

   $\forall_{k}(\text{отрл}(0,k) = k-1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

3. Значение в максимальной точке.

   $\forall_{k}(\text{отрл}(k-1,k) = 0)$

   Аналогично предыдущему.

4. Переход к отрицанию Лукасевича.

   $\forall_{kx}(x \in E(k) \to k - 1 - x = \text{отрл}(x, k))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. К условиям задач на доказательство он не применяется. Уровень срабатывания равен 1.

5. Вложенные отрицания.

   $\forall_{kx}(\text{отрл}(\text{отрл}(x, k), k) = x)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

6. Нормализатор общей стандартизации "нормотрл".

   Нормализатор имеет единственный прием, выполняющий расшифровку по определению.

Приемы, связанные с сивмолом "усечразн"

1. Одинаковые операнды.

   $\forall_a(\text{усечразн}(a, a) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

2. Вычитание из нуля.

   $\forall_a(\text{усечразн}(0, a) = 0)$

   Аналогично предыдущему.

3. Вычитание нуля.

   $\forall_a(\text{усечразн}(a, 0) = a)$

   Аналогично предыдущему.

4. Вычитание разности.

   $\forall_{ab}(\text{усечразн}(a, \text{усечразн}(a, b)) = \min(a, b))$

   $\forall_{abk}(\text{усечразн}(\text{отрл}(a, k), \text{усечразн}(b, a)) = \text{отрл}(\max(a, b)))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

5. Усмотрение усеченной разности.

   $\forall_{ab}(a - \min(a, b) = \text{усчеразн}(a, b))$

   $\forall_{ab}(\max(a, b) - b = \text{усчеразн}(a, b))$

   Приемы имеют заголовок "второйтерм". Либо преобразуемое выражение содержит символ "усечразн", либо задача имеет посылку, содержащую символ "E". Уровень срабатывания равен 2.

6. Усеченная разность отрицаний Лукасевича.

   $\forall_{abk}(\text{усечразн}(\text{отрл}(a, k), \text{отрл}(b, k)) = \text{усечразн}(b, a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

7. Расшифровка по определению.

   $\forall_{ab}$(усечразн$(a, b) = (a - b$ при $b \leq a,$ иначе $0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, b константные. Уровень срабатывания равен 0. Создана также версия, срабатывающая на уровне 4. Она применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Требование константности отбрасывается.

8. Равенство усеченной разности нулю.

   $\forall_{kx}(x \in E(k) \rightarrow$ усечразн$(x, k - 1) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{ab}$(усечразн$(a, b) = 0 \leftrightarrow 0 \leq b - a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

9. Усмотрение отрицания Лукасевича.

   $\forall_{kx}(x \in E(k) \rightarrow$ усечразн$(k - 1, x) =$ отрл$(x, k))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

10. Усмотрение индикатора.

    $\forall_x(x -$ целое & $0 \leq x \rightarrow$ усечразн$(1, x) =$ инд$(x, 0, 1))$

    Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 0.

11. Нормализатор общей стандартизации "нормусечразн".

    (a) Одинаковые значения.
        $\forall_a$(усечразн$(a, a) = 0)$
        Уровень срабатывания равен 1.

    (b) Вычитаемое не меньше уменьшаемого.
        $\forall_{ab}(0 \leq b - a \rightarrow$ усечразн$(a, b) = 0)$
        Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

    (c) Уменьшаемое не меньше вычитаемого.
        $\forall_{ab}(0 \leq a - b \rightarrow$ усечразн$(a, b) = a - b)$
        Аналогично предыдущему.

Приемы, связанные с сивмолом "имплик"

1. Двойная импликация.

   $\forall_{abk}$(имплик(имплик$(a, b, k), b, k) = \max(a, b))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

2. Сумма импликации и отрицания Поста.

   $\forall_{abk}(($имплик$(a, b, k) +$ отрп$(a, k))(\mathrm{mod}\ k) = \min(a, b))$

   Аналогично предыдущему.

3. Расшифровка по определению.

   $\forall_{abk}(b = k - 1 \rightarrow \text{имплик}(a, b, k) = k - 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Переменные b, k идентифицируются с целочисленными константами. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{akp}(a = k - 1 \rightarrow \text{имплик}(a, b, k) = b)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{bk}(\text{имплик}(0, b, k) = k - 1)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{abk}(\text{имплик}(a, b, k) = \text{отрл}(\text{усечразн}(a, b), k))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, b, k константные. Уровень срабатывания равен 1. Создана также версия приема, срабатывающая на уровне 4. Она применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Требование константности отброшено.

Приемы, связанные с сивмолом "инд"

1. Расшифровка по определению.

   $\forall_{abc}(\text{инд}(a, b, c) = (c \text{ при } a = b, \text{ иначе } 0))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, b константные. Уровень срабатывания равен 0. Создана еще одна версия приема, срабатывающая на уровне 4. Она применяется к подвыражению условия задачи на доказательство. Требование константности отброшено.

2. Максимум.

   $\forall_{abc}(0 \leq a - c \rightarrow \max(a, \text{инд}(b, d, c)) = a)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Выражения a, b константные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 0.

3. Усмотрение нуля.

   $\forall_{ijk}(i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \neg(i - j = 0) \rightarrow \text{инд}(i, j, k) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Выражение i содержит только такие переменные n, что в контексте имеется выражение вида "$E(n)$". Уровень срабатывания равен 0.

   $\forall_{abx}(\neg(x = a) \rightarrow \text{инд}(x, a, b) = 0)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 0.

4. Разбор случаев при упрощении выражения с индикатором.

   $\forall_{akx}(x \in E(k) \rightarrow x = a \ \vee \ \neg(x = a))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении некорневого вхождения подвыражения "инд(x, a, b)" в условие задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Переменная x идентифицируется с переменной; выражения a, b - константные. Антецедент идентифицируется с посылкой. Условие задачи не имеет других переменных, кроме x, k. Выводимая посылка снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

5. Нормализатор общей стандартизации "норминд".
   (a) Равные значения.
   $\forall_{ab}(\text{инд}(a, a, b) = b)$
   (b) Различные значения.
   $\forall_{abc}(\neg(a - b = 0) \to \text{инд}(a, b, c) = 0)$
   Выражения a, b константные. Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

Приемы, связанные с функцией Вебба

Пока имеется единственный прием, выполняющий расшифровку по определению:

$\forall_{abk}(\text{вебб}(a, b, k) = (\max(a, b) + 1)(\text{mod } k))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "замыкфмл"

1. Ввод обозначения для исследуемой системы.
   $\forall_{ab}(\{; a\} = b)$
   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попыку его применения при усмотрении подвыражения "замыкфмл$(\{; a\}, c)$" в задаче на доказательство. Отсутствует посылка вида "$\{; a\} = x$", где x - переменная. Прием выбирает новую переменную b в качестве обозначения для исследуемой системы функций. Выводимое равенство сопровождается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 2.
2. Вывод условий принадлежности замыканию при доказательвте полноты.
   (a) Элементы исходной системы.
   $\forall_{abck}(\{a; b\} = c \to a \in \text{замыкфмл}(c, k))$
   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "замыкфмл(c, k)" в условии задачи на доказательство, имеющем вид равенства данного подвыражения выражению "фмлы(k)". Антецедент идентифицируется с посылкой, причем a - с произвольным элементом конечного списка. Уровень срабатывания равен 2.
   (b) Получение максимума из минимума и отрицания Лукасевича.
   $\forall_{Ak}(\lambda_x(\text{отрл}(x, k) \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k)\ \&$
   $\lambda_{yz}(\min(y, z), y \in E(k)\ \&\ z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k) \to$
   $\lambda_{yz}(\max(y, z), y \in E(k)\ \&\ z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k))$
   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Обращение к анализатору "фмлзамык". Основную работу по перечислению функций, которые можно получить суперпозициями из заданного списка функций многозначной логики, выполняет анализатор "фмлзамык". Он будет описан ниже; здесь же ограничимся приемом, выполняющим обращение к анализатору.

$\forall_{ck}(\text{замыкфмл}(c, k) = \text{фмлы}(k) \to \emptyset)$

Прием имеет заголовок "замечание". Антецедент идентифицируется с условием задачи на доказательство. Указатель "анализатор" реализует обращение к анализатору "фмлзамык" с максимальным уровнем 4. Введен средний ограничитель трудоемкости. Анализатор устанавливает принадлежность замыканию ряда новых функций. Он обирает и передает в текущую задачу на доказательство те утверждения о принадлежности замыканию, которые могут позволить непосредственно усмотреть полноту. Уровень срабатывания приема, обращающегося к анализатору, равен 3.

3. Усмотрение полной системы.

$\forall_{Ak}(\lambda_x((x+1)(\text{mod } k), x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k)$ &
$\lambda_{yz}(\max(y, z), y \in E(k)$ & $z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k) \to$
$\text{замыкфмл}(A, k) = \text{фмлы}(k))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана во втором из них. Уровень срабатывания равен 1.

$\forall_{Ak}(\lambda_{xv}(\min(x, v), x \in E(k)$ & $v \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k)$ &
$\lambda_{yz}(\max(y, z), y \in E(k)$ & $z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k)$ &
$\forall_a(a \in E(k) \to \lambda_w(a, w \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k))$ &
$\forall_c(c \in E(k) \to \lambda_u(\text{инд}(u, c, b), u \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k))$ & $b = k - 1 \to$
$\text{замыкфмл}(A, k) = \text{фмлы}(k))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана во втором. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания приема равен 1.

$\forall_{Abk}(\lambda_{xv}(\min(x, v), x \in E(k)$ & $v \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k)$ &
$\lambda_y((y+1)(\text{mod } k), y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k)$ &
$\forall_a(a \in E(k) \to \lambda_w(a, w \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k))$ &
$\lambda_u(\text{инд}(u, b, 1), u \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A, k) \to \text{замыкфмл}(A, k) = \text{фмлы}(k))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

4. Поиск класса сохранения констант при доказательстве неполноты.

(a) Определение значений, принимаемых функциями на нулевом наборе.

$\forall_{abcn}(a = \{;b\}$ & $l(b) = n$ & $\bigcup_{i=1}^{n} \text{огрзначения}(b(i), \{0\}) = \{;c\} \to$
$\text{огрзначения}(a, \{0\}) = \{;c\})$

Посредством "огрзначения(f, M)" обозначено множество значений функции многозначной логики f, принимаемых ею только на таких наборах значений аргументов, которые составлены из элементов множества M. Это же обозначение используется, если f - множество функций, причем тогда берется объединение указанных множеств значений по всем функциям из f.

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении условия задачи на доказательство, имеющего вид "не(равно(замыкфмл(a, d) фмлы(d)))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение b имеет заголовок "набор". Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Для обработки выражений "огрзначения" в третьем антецеденте используется нормализатор "нормогрзначения". Хотя он и относится к разделу "общие свойства функций", мы приведем его приемы ниже. Указатель "развертка" определяет выписывание конечного объединения как обычного. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Определение значений, принимаемых функциями на наборе, построенном по явно указанной среди функций константе.

$\forall_{abcn}(a = \{\lambda_x(d, x \in E(k)); b\}$ & $l(b) = n$ &
$\bigcup_{i=1}^{n}$ огрзначения$(b(i), \{d\}) = \{; c\} \to$ огрзначения$(a, \{d\}) = \{; c\})$

Аналогично предыдущему. Константная функция идентифицируется на произвольной позиции конечного списка.

(c) Шаг замыкания.

$\forall_{abcn}(a = \{; b\}$ & $l(b) = n$ & огрзначения$(a, d) = e$ & $d \cup e = \{; f\}$ &
$l(f) = m$ & $\bigcup_{i=1}^{n}$ огрзначения$(b(i), \{; f\}) = \{; c\} \to$
огрзначения$(a, \{; f\}) = \{; c\})$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, причем точка привязки выбрана в третьем. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор". Условие задачи имеет вид "$\neg$(замыкфмл(a, k) = фмлы(k))". Выражения b, f имеют заголовок "набор", выражения d, e - различны и имеют заголовок "перечень". Переменная m идентифицируется с натуральной константой, меньшей 3. Указатель "развертка" определяет выписывание конечного объединения как обычного. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Усмотрение множества функций k-значной логики, сохраняющих заданное множество констант.

$\forall_{abkm}($огрзначения$(a, \{; b\}) = \{; b\}$ & $a \subseteq$ фмлы(k) & $l(b) = m$ & $0 < k - m \to$
$a \subseteq$ сохрконст$(\{; b\}, k))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение "$E(k)$". Третий антецедент выделен указателем "идентификатор", второй и четвертый - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 1.

(e) Неполнота системы функций, сохраняющей невырожденное множество констант.

$\forall_{abkn}(a \subseteq$ сохрконст$(\{; b\}, k)$ & $l(b) = n$ & $0 < k - n \to$
$\neg($замыкфмл$(a, k) =$ фмлы$(k)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Точка привязки выбрана в первом антецеденте, идентифицируемом с посылкой. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор", третий - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "Фмл"

Утверждение "Фмл(f, k)" означает, что f есть функция k-значной логики. Для усмотрения его истинности создан проверочный оператор "усмФмл". Перечислим приемы этого оператора:

1. Переменная.

   $\forall_k(\text{Фмл}(\lambda_x(x, x - \text{число} \ \& \ x \in E(k)), k))$

   $\forall_k(\text{Фмл}(\lambda_x(x, x \in E(k)), k))$

   Уровень срабатывания приемов равен 1.

2. Константа.

   $\forall_{ak}(a \in E(k) \to \text{Фмл}(\lambda_x(a, x - \text{число} \ \& \ x \in E(k)), k))$

   $\forall_{ak}(a \in E(k) \to \text{Фмл}(\lambda_x(a, x \in E(k)), k))$

   Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

3. Отбрасывание несущественной переменной.

   $\forall_{fk}(\text{Фмл}(\lambda_y(f(y), P(y)), k) \to \text{Фмл}(\lambda_{xy}(f(y), P(y) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ x \in E(k)), k))$

   $\forall_{fk}(\text{Фмл}(\lambda_y(f(y), P(y)), k) \to \text{Фмл}(\lambda_{xy}(f(y), P(y) \ \& \ x \in E(k)), k))$

   Переменная x идентифицируется с произвольным элементом связывающей приставки; y - непустой остаток этой приставки. Антецедент реализует рекурсивное обращение. Переменные f, P - функциональные. Уровень срабатывания приемов равен 1.

4. Минимум.

   $\forall_{Pfgk}(\text{Фмл}(\lambda_x(f(x), P(x)), k) \ \& \ \text{Фмл}(\lambda_x(g(x), P(x)), k) \to$
   $\text{Фмл}(\lambda_x(\min(f(x), g(x)), P(x)), k))$

   Переменные f, g, P функциональные. Связывающая приставка x - произвольной длины. Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 2.

5. Максимум.

   $\forall_{Pfgk}(\text{Фмл}(\lambda_x(f(x), P(x)), k) \ \& \ \text{Фмл}(\lambda_x(g(x), P(x)), k) \to$
   $\text{Фмл}(\lambda_x(\max(f(x), g(x)), P(x)), k))$

   Аналогично предыдущему.

6. Отрицание Лукасевича.

   $\forall_{Pfk}(\text{Фмл}(\lambda_x(f(x), P(x)), k) \to \text{Фмл}(\lambda_x(\text{отрл}(f(x), k), P(x)), k))$

   Аналогично предыдущему.

7. Отрицание Поста.

   $\forall_{Pfk}(\text{Фмл}(\lambda_x(f(x), P(x)), k) \to \text{Фмл}(\lambda_x(\text{отрп}(f(x)), P(x)), k))$

   Аналогично предыдущему.

8. Произведение.

   $\forall_{Pfgk}($Фмл$(\lambda_x(f(x)(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k)$ & Фмл$(\lambda_x(g(x)(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k) \rightarrow$ Фмл$(\lambda_x((f(x) \cdot g(x))(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k))$

   Аналогично предыдущему.

9. Сумма.

   $\forall_{Pfgk}($Фмл$(\lambda_x(f(x)(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k)$ & Фмл$(\lambda_x(g(x)(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k) \rightarrow$ Фмл$(\lambda_x((f(x) + g(x))(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k))$

   Аналогично предыдущему.

10. Степень.

    $\forall_{Pfkn}(n -$ натуральное & Фмл$(\lambda_x(f(x)(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k) \rightarrow$ Фмл$(\lambda_x((f(x))^n(\mathrm{mod}\ k), P(x)), k))$

    Аналогично предыдущему.

11. Индикатор.

    $\forall_{Pabfk}(b \in E(k)$ & Фмл$(\lambda_x(f(x), P(x)), k) \rightarrow$ Фмл$(\lambda_x($инд$(f(x), a, b), P(x)), k))$

    Аналогично предыдущему.

12. Усеченная разность.

    $\forall_{Pfgk}($Фмл$(\lambda_x(f(x), P(x)), k)$ & Фмл$(\lambda_x(g(x), P(x)), k) \rightarrow$ Фмл$(\lambda_x($усечразн$(f(x), g(x)), P(x)), k))$

    Аналогично предыдущему.

Анализатор "фмлзамык"

Анализатор выводит следствия о принадлежности функций замыканию заданного множества функций многозначной логики. Наиболее интересные из них передаются во внешнюю задачу.

1. Подстановка константы.

   $\forall_{APafk}(\lambda_x(a, x \in E(k)) \in$ замыкфмл(A, k) &
   $\lambda_{yz}(f(y, z), y \in E(k)$ & $P(z)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow$
   $\lambda_z(f(a, z), P(z)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками, причем точка привязки выбрана в первом из них. Переменные f, P функциональные. Переменная y идентифицируется с переменной, z - с непустым остатком кванторной приставки. Выражение a не содержит символа "вычет". Уровень срабатывания равен 2.

   $\forall_{Aafk}(\lambda_x(a, x \in E(k)) \in$ замыкфмл(A, k) &
   $\lambda_y(f(y), y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow \lambda_y(f(a), y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

   Аналогично предыдущему.

2. Отождествление переменных.

   $\forall_{Afgk}(\lambda_{yz}(f(y, z), y \in E(k)$ & $z \in E(k)) \in$ замыкфмл(A, k) & $g = f(y, y) \rightarrow$ $\lambda_y(g, y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть упрощается задачей на преобразование. Результат g отличен от переменной y. Переменная f функциональная. Переменные y, z идентифицируются с переменными. Уровень срабатывания приема равен 3.

3. Изменение знака.

   $\forall_{Afk}(\lambda_x(-x(\text{mod } k), x \in E(k)) \in$ замыкфмл(A, k) &
   $\lambda_y(f(y), y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow$
   $\lambda_y(f(-y(\text{mod } k)), y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

   нтецеденты идентифицируются с посылками. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию внутри $f(y)$ вхождения переменной y, расположенного внутри подтерма с заголовком "минус". Переменная f функциональная. Уровень срабатывания равен 1.

4. Исключение повторов.

   $\forall_{APfk}(\lambda_x(f(x), P(x)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow$
   $\lambda_y(f(y), P(y)) \in$ замыкфмл$(A, k) \leftrightarrow$ истина)

   Указатель "внутрпреобр" означает, что прием реализует эквивалентную замену посылки на константу "истина". Антецедент идентифицируется с другой посылкой, отличающейся от текущей лишь переобозначением связанных переменных. Переменные f, P функциональные. Переменные x, y идентифицируются со связывающими приставками равных длин. Уровень срабатывания приема равен 1.

5. Усмотрение отрицания Лукасевича.

   $\forall_{Aak}(\lambda_x((a - x)(\text{mod } k), x \in E(k)) \in$ замыкфмл(A, k) &
   $\lambda_y((y + 1)(\text{mod } k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow$
   $\lambda_y($отрл$(y, k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

6. Усмотрение отрицания Поста.

   $\forall_{Aak}(\lambda_z(a, z \in E(k)) \in$ замыкфмл(A, k) & взаимнопросты(a, k) &
   $\lambda_{xy}((x + y)(\text{mod } k), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow$
   $\lambda_y((y + 1)(\text{mod } k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

   Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

7. Получение минимума из усеченной разности.

   $\forall_{Ak}(\lambda_{xy}($усечразн$(x, y), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow$
   $\lambda_{xy}(\min(x, y), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

8. Получение нуля из усеченной разности.

   $\forall_{Ak}(\lambda_{xy}($усечразн$(x, y), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k) \rightarrow$
   $\lambda_x(0, x \in E(k)) \in$ замыкфмл$(A, k))$

   Аналогично предыдущему.

9. Получение максимума из минимума и отрицания Лукасевича.

   $\forall_{Ak}(\lambda_z(\text{отрл}(z,k), z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)$ &
   $\lambda_{xy}(\min(x,y), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow$
   $\lambda_{xy}(\max(x,y), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k))$

   Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

10. Получение констант из $k-1$ и усеченного вычитания единицы.

    $\forall_{Ak}(\lambda_z(k-1, z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)$ &
    $\lambda_x(\text{усечразн}(x,1), x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow$
    $\forall_a(a \in E(k) \rightarrow \lambda_x(a, x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)))$

    Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 3.

11. Получение всех констант из одной константы и отрицания Поста.

    $\forall_{Abk}(\lambda_z(b, z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)$ &
    $\lambda_x((x+1)(\text{mod } k), x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow$
    $\forall_a(a \in E(k) \rightarrow \lambda_x(a, x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)))$

    Аналогично предыдущему.

12. Получение индикаторов J из констант и усеченной разности.

    $\forall_{Ak}(\forall_a(a \in E(k) \rightarrow \lambda_z(a, z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k))$ &
    $\lambda_{xy}(\text{усечразн}(x,y), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow$
    $\forall_a(a \in E(k) \rightarrow \lambda_x(\text{инд}(x,a,k-1), x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)))$

    Аналогично предыдущему.

13. Подстановка одноместной функции в себя.

    $\forall_{Afhk}(\lambda_x(f(x), x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)$ & $h = f(f(x)) \rightarrow$
    $\lambda_x(h, x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k))$

    Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Переменная f функциональная. Выражение $f(x)$ содержит x, но отлично от переменной. Правая часть второго антецедента упрощается задачей на преобразование; результат h отличен от переменной x. Уровень срабатывания равен 4.

14. Получение нуля из минимума и индикатора.

    $\forall_{Aabk}(\lambda_z(\text{инд}(z,a,b), z \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)$ &
    $\lambda_{xy}(\min(x,y), x \in E(k)$ & $y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)$ & $\neg(b-a=0) \rightarrow$
    $\lambda_x(0, x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k))$

    Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - обрабатывается проверочным оператором. Проверяется отсутствие посылки, отличающейся от выводимой переобозначением связанной переменной. Уровень срабатывания равен 3.

15. Отбор утверждений, передаваемых во внешнюю задачу.

    (a) Ноль.
    $\forall_{Ak}(\lambda_y(0, y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow \emptyset)$

Антецедент идентифицируется с посылкой, причем эта посылка снабжается комментарием "внешвывод". По окончании работы анализатора такие посылки будут автоматически перенесены в список посылок внешней задачи. Уровень срабатывания приема равен 1.

(b) Отрицание Поста.
$\forall_{Ak}(\lambda_y((y+1)(\mathrm{mod}\ k), y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow \emptyset)$
Аналогично предыдущему.

(c) Отрицание Лукасевича.
$\forall_{Ak}(\lambda_y(\text{отрл}(y,k), y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow \emptyset)$
Аналогично предыдущему.

(d) Минимум.
$\forall_{Ak}(\lambda_{xy}(\min(x,y), x \in E(k)\ \&\ y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow \emptyset)$
Аналогично предыдущему.

(e) Максимум.
$\forall_{Ak}(\lambda_{xy}(\max(x,y), x \in E(k)\ \&\ y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k) \rightarrow \emptyset)$
Аналогично предыдущему.

(f) Константы.
$\forall_{Ak}(\forall_a(a \in E(k) \rightarrow \lambda_x(a, x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)) \rightarrow \emptyset)$
Аналогично предыдущему.

(g) Индикаторы.
$\forall_{Abk}(\forall_a(a \in E(k) \rightarrow \lambda_x(\text{инд}(x,a,b), x \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)) \rightarrow \emptyset)$
$\forall_{Aabk}(\lambda_y(\text{инд}(y,a,b), y \in E(k)) \in \text{замыкфмл}(A,k)) \rightarrow \emptyset)$
Аналогично предыдущему.

8.4 Простые примеры решения задач на конечнозначные логики

Рассмотрим три несложных примера, иллюстрирующих поведение решателя на задачах по конечнозначным логикам.

Первый из них - выразить при помощи операций суперпозиции функцию "$x \vee y$" через функции "$x \Rightarrow y$" и "$\neg x$".Исходная задача имеет тип "описать". Ее посылки суть: "$f = \text{фал}(x \Rightarrow y)$", "$g = \text{фал}(\neg x)$". Условие задачи - "$h = \text{фал}(x \vee y)$". Здесь символ "фал" - сокращенная запись описателя "отображение", в котором на каждую переменную z связывающей приставки накладывается ограничение "двоичное(z)". Эта запись используется только для прорисовки формулы на экране. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "упростить", "суперпоз", "(неизвестные h)", "(известно f g)".

Как и для всех задач с целью "известно", начинается сканирование блока анализа, куда переносятся все посылки и условие задачи. Цели блока анализа - "(неизвестные h)", "известно", "суперпоз". Прежде всего, выполняется такая ориентация равенств для f, g, h, при которой переменные расположены справа. Это позволит ссылаться на функции через обозначающие их переменные.

Затем срабатывает прием вывода следствий, который рассматривает результат отождествления переменных в f. Этот прием расположен в разделе оглавления базы приемов, путь к которому проходит через пункты "Теория множеств" - "Раздел ФУНКЦИИ" - "Переименование" - "отождествление переменных при решении задачи выразимости". Он добавляет новые посылки "переименование$(f,(1,1)) = c$", "фал(1) $= c$". Таким образом, вводится в рассмотрение новая функция c - тождественная единица - и указывается способ ее получения из функции f.

Следующим шагом срабатывает прием, определяющий результат подстановки константы 1 в импликацию вместо первого аргумента. Он добавляет посылки: "суперпоз$(f,1,c) = j$", "фал$(b) = j$". Заметим, что тождественная функция j рассматривается от двух переменных b,d.

Аналогичным образом, после подстановки отрицания вместо первого аргумента импликации возникает дизъюнкция: "суперпоз$(f,1,g) = m$", "фал$(e \vee i) = m$".

Далее усматривается наличие двух дизъюнкций, отличающихся только связанными переменными, и выполняется переобозначение переменных. Переобозначение предпринимается в каждой из двух дизъюнкций. При этом получаются посылки "фал$(k \vee l) = m$", "фал$(k \vee l) = h$". Последняя сразу же заменяется на "$m = h$", и в остальных посылках m заменяется на h. Возникают посылки "фал$(k \vee l) = h$" и "суперпоз$(f,1,g) = h$".

Здесь срабатывает прием, усматривающий результат и заменяющий условия внешней задачи на описание на совокупность утверждений, определяющих искомые суперпозиции. В нашем случае это единственное утверждение "суперпоз$(f,1,g) = h$".

Второй пример - задача на нахождение всех базисов, содержащихся в заданной системе функций алгебры логики. Она имеет два условия: "фалбазис(x)", "$x \subseteq \{$фал$((x \vee y) \cdot (\neg x \vee \neg y))$, фал$(x \cdot y + z)$, фал$((x + y) \Leftrightarrow z)$, фал$(x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z)\}$". В задаче требуется получить полное описание значений неизвестной x.

Прежде всего, выражение $h \Leftrightarrow (f + g)$ заменяется на $f + g + h + 1$.

Далее, для функций исходной системы вводятся вспомогательные обозначения. Так появляются посылки "фал$(i \cdot j \vee i \cdot k \vee j \cdot k) = p$", "фал$(f + g + h + 1) = n$", "фал$(e + c \cdot d) = m$", "фал$((a \vee b) \cdot (\neg a \vee \neg b)) = l$".

Введенные обозначения преобразуют условие задачи: "$x \subseteq \{l, m, n, p\}$".

Затем начинают срабатывать приемы, характеризующие принадлежность либо непринадлежность рассматриваемых функций пяти предполным классам. Последовательно появляются посылки: "монотфал(p)", "$\neg$линфал(p)", "самодвфал(p)", "сохр0(p)", "сохр1(p)", "$\neg$монотфал(n)", "линфал(n)", "самодвфал(n)", "$\neg$сохр0(n)", "$\neg$сохр1(n)", "$\neg$монотфал(m)", "$\neg$линфал(m)", "$\neg$самодвфал(m)", "сохр0(m)", "$\neg$сохр1(m)", "$\neg$монотфал(l)", "линфал(l)", "$\neg$самодвфал(l)", "сохр0(l)", "$\neg$сохр1(l)".

Выводятся два утверждения о сохранении констант монотонной нелинейной функцией p: "$p($констнабор$(0,$ числперем$(p))) = 0$", "$p($констнабор$(1,$ числперем$(p))) = 1$".

Наконец, начинается разбор случаев, связанный с отнесением элементов к базису. Выводится условие "$l \in x \ \vee \ x \subseteq \{m, n, p\}$", и рассматривается подслучай $l \in x$.

Выводится условие "$m \in x \ \vee \ x \subseteq \{l, n, p\}$", и начинается разбор случая $m \in x$.

Условия "$m \in x$", "$l \in x$"объединяются в условие "$\{m, l\} \subseteq x$". После этого усматривается, что каждое условие непринадлежности предполному классу функции l

имеет своего аналога для m. Таким образом, система x имеет избыточный элемент и не является базисом. Условие "фалбазис(x)" заменяется на константу "ложь", и рассмотрение подслучая $m \in x$ завершается.

Начинается рассмотрение подслучая $x \subseteq \{l, n, p\}$. Отбрасывается более слабое включение $x \subseteq \{l, m, n, p\}$. Затем выводится условие "$n \in x \ \vee \ x \subseteq \{l, p\}$", и начинается рассмотрение подслучая $n \in x$.

Условия "$n \in x$", "$l \in x$" объединяются в одно условие "$\{n, l\} \subseteq x$". Выводится условие "$p \in x \ \vee \ x \subseteq \{l, n\}$". Оно сразу же преобразуется в условие "$\{l, n\} = x \ \vee \ p \in x$".

Начинается рассмотрение случая $x = \{l, n\}$. Значение неизвестной подставляется в оставшиеся условия задачи, и начинается их проверка (в рамках задачи на редактирование ответа). Так как обе функции l, n линейны, утверждение "фалбазис($\{l, n\}$)" заменяется на логическую константу "ложь", и рассмотрение подслучая завершается.

Начинается рассмотрение случая $p \in x$. Сразу же усматривается равенство $x = \{l, n, p\}$. При проверке устанавливается, что для каждой функции системы имеется единственный предполный класс, которому не принадлежит только она, и что для каждого предполного класса имеется не принадлежащая ему функция системы. После этого условие "фалбазис($\{l, n, p\}$)" заменяется на константу "истина", и определяется частичный ответ $x = \{l, n, p\}$.

Разбор случаев продолжается аналогично тому, как было описано выше. После обработки нормализатором "нормили" дизъюнкции частичных ответов, возникает окончательный ответ: "$x \in \{\{\text{фал}((a \vee b) \cdot (\neg a \vee \neg b)), \text{фал}(f + g + h + 1), \text{фал}(i \cdot j \vee i \cdot k \vee j \cdot k)\}, \{\text{фал}(e + c \cdot d), \text{фал}(f + g + h + 1)\}\}$".

Последний пример связан с доказательством полноты системы функций многозначной логики. Задача имеет посылки "k – натуральное" и "$3 \leq k$". Требуется доказать утверждение:

"замыкфмл($\{\lambda_x(1, x \in E(k)), \lambda_{xy}((x^2 - y)(\text{mod } k), x \in E(k) \ \& \ y \in E(k)),$
$\lambda_{xy}(\min(x, y), x \in E(k) \ \& \ y \in E(k))\}$) = фмлы($k$)".

Вводится обозначение для исследуемой системы - новая переменная a. Регистрируется посылка "$\{\lambda_x(1, x \in E(k)), \lambda_{xy}((x^2 - y)(\text{mod } k), x \in E(k) \ \& \ y \in E(k)),$
$\lambda_{xy}(\min(x, y), x \in E(k) \ \& \ y \in E(k))\} = a$", помечаемая комментарием "ориентация-равенства". Условие задачи преобразуется к виду "замыкфмл(a, k) = фмлы(k)".

Выводятся следствия о принадлежности замыканию элементов системы:
"$\lambda_x(1, x \in E(k)) \in$ замыкфмл(a, k)",
"$\lambda_{xy}((x^2 - y)(\text{mod } k), x \in E(k) \ \& \ y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a, k)",
"$\lambda_{xy}(\min(x, y), x \in E(k) \ \& \ y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a, k)".

Далее предпринимается обращение к анализатору "фмлзамык", который выводит следствия о принадлежности замыканию новых функций.

Сначала выполняются подстановки константы 1:
"$\lambda_y(\min(y, 1), y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a, k)",
"$\lambda_y((1 - y)(\text{mod } k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a, k)",
"$\lambda_x(0, x \in E(k)) \in$ замыкфмл(a, k)".

Подстановка константы 0 дает посылку "$\lambda_y(-y(\mathrm{mod}\,k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)". Последняя позволяет изменять знак:

"$\lambda_y((y+1)(\mathrm{mod}\ k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)".

Срабатывает прием, усматривающий возможность получить отрицание Лукасевича из функций $1-y$ и $y+1$:

"$\lambda_y($отрл$(y,k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)".

Усматривается возможность получить максимум из минимума и отрицания Лукасевича:

"$\lambda_{x,y}((\max(x,y), x \in E(k)\ \&\ y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)".

Выполняется подстановка нуля: "$\lambda_x(x^2(\mathrm{mod}\ k), x \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)".

Подстановка единицы в $y+1$ и в $-y$ дает:
"$\lambda_y(2, y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)",
"$\lambda_y(k-1, y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)".

Дальнейшая подстановка констант дает:
"$\lambda_y(y, y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)",
"$\lambda_x((x^2+1)(\mathrm{mod}\ k), x \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)",
"$\lambda_x((x^2-1)(\mathrm{mod}\ k), x \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)".

Срабатывает прием, усматривающий возможность получить все константы из одной константы, а также из отрицания Поста:

"$\forall_b(b \in E(k) \to \lambda_y(b, y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(a,k))$".

Выводятся еще несколько следствий, пока не оказываются исчерпаны возможности применения приемов анализатора. Заметим, что предусмотрен также обрыв работы анализатора по исчерпании отведенного для него лимита трудоемкости.

Далее происходит передача из анализатора в посылки внешней задачи на доказательство наиболее ценных следствий. Фактически, это те функции, которые встречаются в примерах полных систем, используемых решателем для непосредственного усмотрения полноты. Таким образом, передаются следствия:
"$\forall_b(b \in E(k) \to \lambda_y(b, y \in E(k)) \in$ замыкфмл$(a,k))$",
"$\lambda_{x,y}((\max(x,y), x \in E(k)\ \&\ y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)",
"$\lambda_y($отрл$(y,k), yinE(k)) \in$ замыкфмл(a,k)",
"$\lambda_y((y+1)(\mathrm{mod}\ k), y \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)",
"$\lambda_x(0, x \in E(k)) \in$ замыкфмл(a,k)".

Наконец, срабатыват прием, усматривающий полную систему по максимуму и отрицанию Поста.

Глава 9

Приемы по теории графов

Обучение решателя теории графов находится на самой начальной стадии. Проработано всего полтора десятка задач, причем наиболее интересными являются случаи вычислений на графах. При поиске примера графа, удовлетворяющего заданным условиям, решатель создает по условиям задачи вычислительный пакет и использует его для ускорения перебора. Для задач поиска кратчайшего пути в графе и поиска наибольшего потока в сети созданы вычислительные пакеты ГЕНОЛОГа. Однако, все это - пока лишь чисто иллюстративные примеры. Подробнее о них будет рассказано в главе, посвященной вычислениям на ГЕНОЛОГе. Остальные рассмотренные примеры с графами (их около десятка) - простейшие теоретические задачи. Однако, даже для них понадобилось ввести достаточно богатый запас понятий и связанных с ними приемов.

9.1 Логические символы, используемые решателем в теории графов

Утверждение "граф(a)" означает, что a есть неориентированный граф. Разрешаются параллельные ребра и петли. Не требуется, чтобы множества вершин и ребер были конечными.

Утверждение "орграф(a)" означает, что a есть ориентированный граф. Разрешаются параллельные ребра и петли. Не требуется, чтобы множества вершин и ребер были конечными.

Каждые вершина либо ребро a графа или орграфа имеют своей пометкой некоторый объект, который обозначается "об(a)".

Утверждение "простграф(a)" означает, что a есть неориентированный граф без параллельных ребер и петель.

Выражение "вершины(a)" обозначает множество вершин графа, либо орграфа, либо подмножества ребер a.

Выражение "ребра(a)" обозначает множество ребер графа либо орграфа a.

Утверждение "смежны(a, b, G)" означает, что вершины a, b неориентированного графа G соединены ребром.

Утверждение "ведет(a, b, c, G)" означает, что a есть ребро в графе либо орграфе G, ведущее от вершины b к вершине c.

Утверждение "конецребра(a, b, G)" означает, что вершина a является концом ребра в графе либо орграфе G. В первом случае ребро имеет два конца, во втором - один конец и одно начало.

Утверждение "началоребра(a, b, G)" означает, что вершина a является началом ребра b в орграфе G.

Выражение "смежнверш(a, G)" обозначает множество вершин неориентированного графа G, смежных с вершиной a.

Утверждение "маршрут(a, G)" означает, что a есть маршрут в графе либо орграфе G. Под машрутом понимается пара (A, B) конечных либо бесконечных последовательностей, соответственно, вершин и ребер G. i-й элемент последовательности B представляет собой ребро, ведущее из i-го элемента последовательности A в ее $i+1$-й элемент. В случае конечного маршрута длина последовательности A на единицу больше длины последовательности B. Длиной маршрута называется длина последовательности B.

Утверждение "вершмаршрут(a, G)" означает, что a есть конечная последовательность вершин графа либо орграфа G такая, что любые два ее соседних элемента соединены ребром (в случае орграфа, ведущим от предыдущей вершины к последующей).

Утверждение "цепь(a, G)" означает, что a есть маршрут в графе либо орграфе G, все ребра которого различны.

Утверждение "цикл$(a, G$" означает, что a есть замкнутая цепь в графе либо орграфе G.

Утверждение "простаяцепь(a, G)" означает, что a есть цепь в графе либо орграфе G, все вершины которой различны.

Утверждение "простойцикл(a, G)" означает, что a есть цикл в графе либо орграфе G, все вершины которого (кроме пары начало - конец) различны.

Утверждение "Простаяцепь(a, G)" означает, что a есть множество ребер графа или орграфа G, которое можно упорядочить так, что каждое последующее ребро выходит из вершины, к которой ведет предыдущее, и других инцидентностей между ребрами нет.

Выражение "концы(a)" обозначает (кроме случаев использования его в других предметных областях) множество концевых вершин цепи a в графе.

Выражение "исхвершина(a)" обозначает исходную вершину маршрута a.

Выражение "послвершина(a)" обозначает последнюю вершину маршрута a.

Утверждение "соединяет(a, b, G, c)" означает, что c есть простая цепь в графе либо орграфе G, начинающаяся в вершине множества a и кончающаяся в вершине множества b.

Утверждение "связный(G)" означает, что G есть связный граф либо сильно связный орграф.

Утверждение "подграф(a, b)" означает, что a есть подграф графа либо орграфа b.

Утверждение "порождподграф(a, b)" означает, что b есть подграф графа либо орграфа a, порожденный некоторым подмножеством его вершин.

Выражение "Порождподграф(a, b)" обозначает подграф графа либо орграфа a, порожденный подмножеством вершин b.

Утверждение "дополнграф(a, b)" означает, что граф либо орграф b является дополнением a. Вершины те же, а множество ребер - дополнение множества ребер a о полного множества ребер. Кратные ребра и петли в a, b не допускаются.

Выражение "степеньвершины(a, G)" обозначает степень вершины a в графе G.

Выражения "входнаястепень(a, G)" и "выходнаястепень(a, G)" обозначают, соответственно, входную и выходную степени вершины a орграфе G.

Выражение "расстояниевграфе(a, b, G)" обозначает наименьшее число ребер в маршрутах графа либо орграфа G, имеющих своим началом вершину a, а концом - вершину b.

Утверждение "ациклический(G)" означает, что G есть граф либо орграф без циклов (во втором случае - без ориентированных).

Утверждение "дерево(G)" означает, что G есть связный граф без циклов.

Утверждение "компоненты(G, a)" означает, что a есть множество компонент связности графа G (каждая компонента связности - множество вершин).

Утверждение "Компоненты(G, a)" означает, что a есть набор графов, порожденных компонентами связности графа G.

Выражение "цепи(a)" обозначает маршрут в графе либо орграфе, полученный последовательным прохождением маршрутов набора a.

Выражение "прохожд$(a_1, \ldots, a_n)$" обозначает маршрут в графе либо орграфе, получающийся последовательным прохождением маршрутов $a_1, \ldots, a_n$. Маршрут a_{i+1} начинается с вершины, которой заканчивается маршрут a_i; $i = 1, \ldots, n - 1$.

Для удобства идентификации операции "прохожд" введен фиктивный пустой маршрут "пустмарш" - единица данной операции. Он имеет чисто технический характер, так как реальные пустые маршруты отличаются своими единственными вершинами.

Выражение "обрцепь(a)" обозначает марщрут в графе, обратный конечному маршруту a.

Утверждение "кратчайшийпуть(G, a, b, c)" означает, что c есть простая цепь наименьшей длины в графе либо орграфе G, начинающаяся в вершине a и кончающаяся в вершине b.

Выражение "окрвершины(a, n, G)" обозначает множество вершин графа G, достижимых из вершины a по маршрутам длины не более чем n.

Утверждение "графбезтреуг(G)" означает, что G есть неориентированный граф без треугольников.

Утверждение "кубичграф(G)" означает, что G есть неориентированный граф, степени вершин которого равны 3.

Выражение "едграф(a)" обозначает неориентированный граф с единственной вершиной, имеющей пометку a.

Выражение "удалениеверш(G, a)" обозначает граф либо орграф, полученный из графа либо орграфа G удалением вершины a.

Утверждение "новребро(G, a, b, c, d, H)" означает, что H есть граф, полученный из графа G соединением вершин a, b новым ребром d, сопровождаемым отметкой c.

Утверждение "начмарш(a, b)" означает, что маршрут a является началом маршрута b.

Выражение "мверш(a, n)" обозначает n-ю вершину маршрута a.

Выражение "мребро(a, n)" обозначает n-е ребро маршрута a.

Выражение "отрмарш(a, m, n)" обозначает маршрут в графе либо орграфе, являющийся отрезком маршрута a, начинающимся в его m-й вершине и заканчивающимся в n-й. Допускается случай, когда m больше, чем n.

Утверждение "раздмарш(a, b, c)" означает, что маршруты a и b имеют единственную общую вершину c, причем каждый из них заходит в эту вершину лишь однажды.

Утверждение "циклпродолж(a, G, b)" означает, что простой цикл b является продолжением простой цепи a графа либо орграфа G через ее последнюю вершину.

Выражение "мвершины(a)" обозначает множество вершин маршрута a.

Выражение "мребра(a)" обозначает множество ребер маршрута a.

Выражение "мсуффикс(a, b, c)" обозначает результат присоединения к концу маршрута a ребра b ведущего к вершине c.

Утверждение "транспсеть(G)" означает, что G есть транспортная сеть, т.е. орграф, пометками вершин которого служат символ "пустоеслово" и переменные a, b, а пометками ребер - неотрицательные числа. Пометку a имеет единственная вершина - исток сети; пометку b - другая единственная вершина, называемая стоком сети. Пометка ребра называется его пропускной способностью.

Утверждение "потоквсети(a, G)" означает, что a есть допустимый поток в транпортной сети G - числовая функция, определенная на ребрах сети, не превосходящая пропускной способности ребер и удовлетворяющая требованиям согласованности в вершинах сети.

Утверждение "макспоток(a, G)" означает, что a есть максимальный поток в транспортной сети G.

Выражение "истоксети(G)" обозначает вершину транспортной сети G, выделенную в качестве истока.

Выражение "стоксети(G)" обозначает вершину транспортной сети G, выделенную в качестве стока.

Выражение "остаточнсеть(a, G)" обозначает транспортную сеть, возникающую из транспортной сети G при отбрасывании ребер, на которых функция a равна нулю.

9.2 Простейшие приемы, связанные с графами

Приемы, связанные с символом "граф"

1. Числа вершин изоморфных графов равны.

   $\forall_{AB}$(граф(A) & граф(B) & Изоморфны$(A, B) \rightarrow$
   card(вершины(A)) = card(вершины(B)))

Прием имеет заголовок "вывод". Первые два антецедента обрабатываются проверочными операторами, третий - идентифицируется с посылкой. В задаче рассматривается мощность множества вершин либо ребер какого-либо графа. Уровень срабатывания равен 2.

2. Доказательство индукцией по числу вершин графа.

   $\forall_{PQm}(m$ – натуральное &
   $\forall_G($граф(G) & card(вершины$(G)) = m$ & $P(G) \rightarrow Q(G))$ &
   $\forall_{nH}(n$ – натуральное & $0 \leq n - m$ &
   $\forall_G($граф(G) & card(вершины$(G)) \leq n$ & $P(G) \rightarrow Q(G))$ &
   граф(H) & card(вершины$(H)) = n + 1$ & $P(H) \rightarrow Q(H)) \rightarrow$
   $\forall_G($граф(G) & $0 \leq$ card(вершины$(G)) - m$ & $P(G) \rightarrow Q(G)))$

   Прием имеет заголовок "свертка". Кванторный консеквент разбивается на две части: антецеденты идентифицируются со всеми посылками задачи на доказательство, содержащими G, консеквент $Q(G)$ - с условием задачи. Переменная m идентифицируется с натуральной константой. Переменные P, Q функциональные. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, истинность двух других устанавливается с помощью вспомогательных задач на доказательство. Отсутствует посылка задачи, имеющая вид "card(вершины$(G)) = b$". Отсутствует комментарий (натуральное мощность(вершины(G))). Указатель "подстановка" разрешает отсутствие посылки "$0 \leq$ card(вершины) $- m$"; в этом случае m олагается равным 1. Задаче, обрабатывающей третий антецедент, передается комментарий (натуральное мощность(вершины(G))), а ее кванторной посылке - комментарий (целое мощность(вершины(G))). Уровень срабатывания равен 7.

   $\forall_{PQm}(m$ – натуральное &
   $\forall_G($простграф(G) & card(вершины$(G)) = m$ & $P(G) \rightarrow Q(G))$ &
   $\forall_{nH}(n$ – натуральное & $0 \leq n - m$ &
   $\forall_G($простграф(G) & card(вершины$(G)) \leq n$ & $P(G) \rightarrow Q(G))$ &
   простграф(H) & card(вершины$(H)) = n + 1$ & $P(H) \rightarrow Q(H)) \rightarrow$
   $\forall_G($простграф(G) & $0 \leq$ card(вершины$(G)) - m$ & $P(G) \rightarrow Q(G)))$

   Аналогично предыдущему.

3. Проверочный оператор "усмграф".

   (a) Граф без кратных ребер.
   $\forall_a($простграф$(a) \rightarrow$ граф$(a))$
   Антецедент идентифицируется с посылкой.

   (b) Дополнительный граф.
   $\forall_{ab}($граф(a) & дополнграф$(a, b) \rightarrow$ граф$(b))$
   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с посылкой.

Приемы, связанные с символом "простграф"

1. Если число вершин графа равно единице, то множество его ребер пусто.

   $\forall_G($простграф(G) & card(вершины$(G)) = 1 \rightarrow$ ребра$(G) = \emptyset)$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифируется с посылкой, второй - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 1.

2. Числа ребер изоморфных графов, не имеющих петель и кратных ребер.

   $\forall_{AB}$(простграф(A) & простграф(B) & Изоморфны(A, B) $\rightarrow$ card(ребра(A)) $=$ card(ребра(B)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Последний антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. В посылках задачи упоминается мощность множества вершин либо ребер некоторого графа. Уровень срабатывания равен 2.

3. Усмотрение графа.

   $\forall_a$(простграф(a) $\rightarrow$ граф(a))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

4. Усмотрение простого графа.

   $\forall_a$(простграф(a) $\rightarrow$ простграф(a))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

5. Отождествление ребер, соединяющих две заданные вершины.

   $\forall_{abcdG}$(простграф(G) & ведет(a, b, c, G) & ведет(d, b, c, G) $\rightarrow a = d$)

   $\forall_{abcdG}$(простграф(G) & ведет(a, b, c, G) & ведет(d, c, b, G) $\rightarrow a = d$)

   Приемы имеют заголовок "выводусловия". Два последних антецедента идентифицируются с условиями задачи на описание, первый - с утверждением из контекста. Переменная G - неизвестная. Уровень срабатывания равен 1.

6. Выдача ответа.

   вершины$(G) = \{; a\}$ & ребра$(G) = \{; b\}$ & простграф(G) & ведет(c, d, e, G)

   Прием имеет заголовок "ответзадачи". Теорема приема представляет собой конъюнкцию утверждений, идентифицируемых со всеми содержащими неизвестные условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Указатель "серия" разрешает идентификацию последнего конъюнктивного члена с произвольным числом условий. Указатель "смответ" определяет выбор точки привязки во втором конъюнктивном члене. Переменная G - неизвестная. Переменная b идентифицируется с набором, причем для каждого элемента r этого набора имеется условие вида "ведет(r, u, v, G)". Уровень срабатывания равен 1.

7. Проверочный оператор "усмпростграф".

   (a) Дерево.

   $\forall_a$(граф(a) & дерево(a) $\rightarrow$ простграф(a))

   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Дополнительный граф.

$\forall_{AB}$(простграф(A) & дополнграф$(A, B) \rightarrow$ простграф(B))

Аналогично предыдущему. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Результат удаления вершины в простом графе.

$\forall_{ab}$(простграф$(a) \rightarrow$ простграф(удалениеверш(a, b)))

Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "вершины"

1. Подразбиение множества вершин простой цепи.

   $\forall_{Gabc}$($a = b \cup c$ & Простаяцепь(a, G) & Простаяцепь(b, G) & Простаяцепь$(c, G) \rightarrow$ вершины$(a) =$ вершины$(b) \cup$ вершины(c))

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Уровень срабатывания равен 1.

2. Ориентация равенства.

   $\forall_{ab}$(вершины$(a) = b \leftrightarrow b =$ вершины(a))

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Выражение b не имеет заголовка "вершины". Перестановка частей равенства при идентификации не допускается. Преобразованная посылка снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

3. Использование кванторной посылки при доказательстве индукцией по числу вершин графа.

   $\forall_{ABGHmn}$(граф(G) & card(вершины$(G)) = m$ &
   $\forall_x$(card(вершины$(x)) = n$ & $A(x) \rightarrow B(x)$) &
   $m - n = 1$ & A(удалениеверш(G, v)) $\rightarrow$
   $v \in$ вершины(G) & удалениеверш$(G, v) = H$ & $B(H)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство. При этом посылка, идентифицированная с третьим антецедентом, имеет комментарий (целое n). Переменные A, B функциональные. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Истинность пятого антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство, которой передается дополнительная посылка "$v \in$ вершины(G)". Прием вводит новые переменные v, H. Здесь v - вершина графа G, при удалении которой возникает граф H, удовлетворяющий предположению индукции. Уровень срабатывания равен 3.

   Дальнейшие приемы этого раздела связаны с задачами на построение примера графа, удовлетворяющего заданным условиям. Они организуют перебор, вводя одну за другой новые вершины и анализируя возможные способы соединения их с ранее введенными вершинами. Заметим, что для задач указанного типа была исследована альтернативная возможность - вместо медленного перебора на уровне логических структур данных создавать каждый раз индивидуальную программу, выполняющую быстрый перебор в "технических" структурах данных, а после решения задачи данную программу удалять. Роль такой программы играет вычислительный пакет ГЕНОЛОГа, теоремы приемов которого получаются при анализе конкретных условий на граф. Сравнение обеих версий показало, что второй способ (подробнее о нем будет рассказано ниже, в главе, посвященной вычислениям на ГЕНОЛОГе) во много раз эффективнее. Имело место ускорение в сотни раз.

4. Ввод первой вершины при построении примера графа.

   $\forall_G(\text{граф}(G)\ \&\ \neg(\text{вершины}(G)=\emptyset)\rightarrow 1\in\text{вершины}(G))$

   $\forall_G(\text{простграф}(G)\ \&\ \neg(\text{вершины}(G)=\emptyset)\rightarrow 1\in\text{вершины}(G))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример" и неизвестную G. Второй - обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует условие вида "$X\in\text{вершины}(G)$". Уровень срабатывания равен 2.

5. Блокировка анализа кванторных импликаций, указывающих свойства вершин графа.

   $\forall_{GP}(\forall_x(x\in\text{вершины}(G)\rightarrow P(x))\rightarrow\emptyset)$

   Прием имеет заголовок "замечание". Антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример" и неизвестную G. Переменная P функциональная. Данное условие снабжается комментарием "смантецеденты", блокирующим попытку упрощения кванторной импликации путем явного разрешения относительно x. Такая попытка обычно бывает избыточной и приводит лишь к ненужным затратам времени. Уровень срабатывания равен 1.

6. Использование кванторного условия для вывода ограничения на вершину неизвестного графа.

   $\forall_{GPa}(a\in\text{вершины}(G)\ \&\ \forall_x(x\in\text{вершины}(G)\rightarrow P(x))\rightarrow P(a))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Антецеденты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей неизвестную G, причем точка привязки выбрана в первом из них. Переменная P функциональная. Выводимое утверждение содержит неизвестные. Уровень срабатывания равен 1.

7. Усмотрение различия вершин.

   $\forall_{Gabc}(\text{простграф}(G)\ \&\ \text{ведет}(a,b,c,G)\rightarrow\neg(b=c))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Антецеденты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей неизвестную G. Хотя бы одна из переменных b,c - неизвестная. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Gabcdmnpq}(\text{простграф}(G)\ \&\ \text{ведет}(p,a,b,G)\ \&\ \text{ведет}(q,c,d,G)\ \&$
   $(a=c\ \&\ m=b\ \&\ n=d\ \vee\ a=d\ \&\ m=b\ \&\ n=c\ \vee$
   $b=c\ \&\ m=a\ \&\ n=d\ \vee\ b=d\ \&\ m=a\ \&\ n=c)\ \&\ \neg(p=q)\rightarrow\neg(m=n))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Первые три антецедента идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей неизвестную G. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменная m, которая им доопределяется, является неизвестной. Последний антецедент идентифицируется с проверочным оператором. Прием усматривает два различных ребра, имеющих общий конец, и выводит следствие о различии противоположных концов. Уровень срабатывания равен 2.

8. Разбор случаев для равенства неизвестной вершины известной.

   $\forall_{Gax}(\text{простграф}(G)\ \&\ a \in \text{вершины}(G)\ \&\ x \in \text{вершины}(G) \to x = a \lor \neg(x = a))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Второй и третий антецеденты идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей неизвестную x. Выражение a не содержит неизвестных. Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует условие вида "$\neg(x = a)$". Выводимая дизъюнкция снабжается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

9. Ввод обозначения для новой вершины графа.

   $\forall_{Gacx}(\text{простграф}(G)\ \&\ x \in \text{вершины}(G)\ \&\ a \subseteq \text{вершины}(G)\ \&$
   $c = \text{новобъект}(a) \to x = c)$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Первые два антецедента идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей неизвестные G, x. Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "перечисл", определяющим максимальное подмножество заданного множества M, для фрагментов которого в контексте явно указаны принадлежность M или включение в M. Четвертый антецедент выделен указателем "программа". Он обращается к процедуре "новобъект", выбирающей первое не встречающееся в конечном множестве натуральное число. Это число будет использоваться как новая "известная" вершина графа G. Предварительно проверяется отсутствие такой известной вершины графа G, для которой не указано явное ее отличие от x и не указано наличие ребра, соединяющего ее с x. Уровень срабатывания равен 2.

10. Усмотрение множества всех вершин графа.

    $\forall_{Gabn}(\text{простграф}(G)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to a(i) \in \text{вершины}(G))\ \&$
    $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{степеньвершины}(a(i), G) = b(i))\ \&$
    $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{card}(\text{смежнверш}(a(i), G)) = b(i)) \to \text{вершины}(G) = \{; a\})$

    Прием имеет заголовок "выводусловия". Первые три антецедента идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример" и неизвестную G. При этом второй и третий антецедент, выделенные указателем "развертка", идентифицируются с группами условий. Четвертый антецедент выделен указателями "идентификатор" и "развертка". Отсутствует условие вида "вершины$(G) = A$", где A не содержит неизвестных. Прием усматривает, что для всех упоминаемых в условиях задачи вершин графа G определены их окрестности, и принимает решение ограничиться этими вершинами. Уровень срабатывания равен 2.

11. Ограничение числа вершин неизвестного графа при переборе.

    $\forall_{Gmn}(\text{простграф}(G)\ \&\ n \leq \text{card}(\text{вершины}(G))\ \&\ n \leq m \to$
    $\text{card}(\text{вершины}(G)) = m)$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей неизвестную G. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Он определяет константу n - нижнюю оценку числа вершин неизвестного графа. Третий антецедент, выделенный указателем "программа", перечисляет целочисленные константы m, не меньшие n. Перед применением приема проверяется отсутствие условия вида "card(вершины(G)) $= b$". Указатель "попыткаогранич" сводит действие приема к решению серии вспомогательных задач, получаемых из текущей задачи добавлением условия card(вершины(G)) $= m$) для $m = n, n+1, \ldots$. Уровень срабатывания равен 0.

12. Усмотрение избыточного числа вершин неизвестного графа.

$\forall_{Gan}(\text{card}(\text{вершины}(G)) \leq n \ \& \ a \subseteq \text{вершины}(G) \ \& \ 0 < \text{card}(a) - n \rightarrow \text{ложь})$

$\forall_{Gan}(\text{card}(\text{вершины}(G)) = n \ \& \ a \subseteq \text{вершины}(G) \ \& \ 0 < \text{card}(a) - n \rightarrow \text{ложь})$

Приемы имеют заголовок "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющим неизвестную G. Переменная n идентифицируется с десятичной константой. Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "перечисл", определяющим множество a уже введенных в рассмотрение вершин графа. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

13. Нормализатор общей стандартизации "нормвершины".

Пока имеется единственный прием, связанный с подразбиением множества вершин простой цепи:

$\forall_{Gabc}(a = b \cup c \ \& \ \text{Простаяцепь}(a, G) \ \& \ \text{Простаяцепь}(b, G) \ \& \ \text{Простаяцепь}(c, G) \rightarrow$ $\text{вершины}(a) = \text{вершины}(b) \cup \text{вершины}(c))$

Антецеденты идентифицируются с посылками.

Приемы, связанные с символом "ребра"

Пока имеется единственный прием, усматривающий множество ребер неизвестного графа:

$\forall_{Gabcden}(\text{простграф}(G) \ \& \ \text{вершины}(G) = \{; a\} \ \& \ l(a) = n \ \&$
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \text{степеньвершины}(a(i), G) = b(i)) \ \&$
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \text{card}(\text{смежнверш}(a(i), G)) = b(i)) \ \&$
$\forall_j(j \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow \text{ведет}(c(j), d(j), e(j), G)) \rightarrow \text{ребра}(G) = \{; c\})$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Первые два антецедента, а также четвертый и шестой идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример" и неизвестную G. Четвертый и шестой антецеденты выделены указателем "развертка"; они идентифицируются с группами условий задачи. Третий и пятый антецеденты выделены указателем "идентификатор", причем пятый антецедент тоже выделен указателем "развертка". Переменные b, c, d, e функциональные. Переменная n дентифицируется с натуральной константой. Выражения a, c не содержат неизвестных. Отсутствует условие вида "ребра(G) $= A$", где A не содержит неизвестных. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "ведет"

Создан синтезатор "ведет", перечисляющий ребра, выходящие из вершины, а также их противоположные концы. Он реализует утверждение "ведет(a, b, c, d)". Входными данными служат исходная вершина b и граф G. Перечисляются ребра a и конечные вершины c.

Пока синтезатор имеет лишь два приема, связанные с рассмотрением смежных вершин маршрута:

$$\forall_{Gaij}(\text{граф}(G) \,\&\, j{-}i{+}1 = 0 \,\&\, A = \text{мверш}(a, i) \rightarrow \text{ведет}(\text{мребро}(a, j), A, \text{мверш}(a, j), G))$$

$$\forall_{Gaij}(\text{граф}(G) \,\&\, j{-}i{-}1 = 0 \,\&\, A = \text{мверш}(a, i) \rightarrow \text{ведет}(\text{мребро}(a, i), A, \text{мверш}(a, j), G))$$

Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - выделен указателем "идентификатор", третий - идентифицируется с посылкой. Указатель "возмравно" допускает случай отсутствия такой посылки; тогда левая часть равенства непосредственно идентифицируется с правой. Должна иметься посылка, содержащая подвыражение "мверш(a, j)".

Приемы, связанные с символом "смежны"

1. Перестановка операндов.

   $\forall_{abc}(\text{смежны}(a, b, c) \leftrightarrow \text{смежны}(b, a, c))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Операнды переставляются так, чтобы первый из них лексикографически предшествовал второму. Уровень срабатывания равен 0.

2. Ввод в рассмотрение множества вершин, смежных с данной, если имеется ограничение сверху на число несмежных вершин.

   $$\forall_{ABGakmn}(\text{set}_x(\neg(\text{смежны}(a, x, G)) \;\&\; x \in \text{вершины}(G) \setminus \{a\}) = A \;\&\; \\ 0 < m - \text{card}(A) \;\&\; \text{card}(\text{вершины}(G)) = n \;\&\; s = n - m \rightarrow \\ \text{set}_x(\text{смежны}(a, x, G) \;\&\; x \in \text{вершины}(G) \setminus \{a\}) = B \;\&\; 0 \leq \text{card}(B) - s)$$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей цель "пример". Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Задача имеет условие вида "смежны$(\ldots)$". Выражения m, n не содержат невырожденных числовых атомов. Прием вводит новую переменную B. Уровень срабатывания равен 3.

3. Ввод в рассмотрение вершин, смежных с данной, если имеется ограничение снизу на число таких вершин.

   $$\forall_{AGabm}(\text{set}_x(x \in \text{вершины}(G) \setminus \{a\} \;\&\; \text{смежны}(a, x, G)) = A \;\&\; 0 \leq \text{card}(A) - m \rightarrow \\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow b(i) \in \text{вершины}(G) \;\&\; \neg(b(i) = a) \;\&\; \text{смежны}(a, b(i), G)) \;\&\; \\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow \forall_j(j \in \{1, \ldots, i - 1\} \rightarrow \neg(b(i) = b(j))))))$$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная m при этом идентифицируется с натуральной константой, меньшей 6. Задача имеет условие с заголовком "смежны". Указатель "переменные" определяет идентификацию b с набором новых переменных, имеющим длину m. Кванторы общности в консеквенте выписываются как конъюнкции. Уровень срабатывания равен 4.

4. Ввод в рассмотрение вершин, не смежных с данной, если имеется ограничение синзу на число таких вершин.

   $\forall_{AGabm}(\mathrm{set}_x(x \in \text{вершины}(G) \setminus \{a\} \ \& \ \neg(\text{смежны}(a,x,G))) = A \ \&$
   $0 \leq \mathrm{card}(A) - m \rightarrow$
   $\forall_i(i \in \{1,\ldots,m\} \rightarrow b(i) \in \text{вершины}(G) \ \& \ \neg(b(i) = a) \ \& \ \neg(\text{смежны}(a,b(i),G))) \ \&$
   $\forall_i(i \in \{1,\ldots,m\} \rightarrow \forall_j(j \in \{1,\ldots,i-1\} \rightarrow \neg(b(i) = b(j))))))$

   Аналогично предыдущему, но вместо условия с заголовком "смежны" требуется кванторная посылка с антецедентом вида "не(смежны(u,v,G))".

5. Несмежность вершины с собой.

   $\forall_{Ga}(\text{простграф}(G) \rightarrow \neg(\text{смежны}(a,a,G)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Уровень срабатывания равен 1.

6. Нормализатор "нормсмежны".

   Нормализатор имеет единственный прием, выполняющий перестановку первых двух операндов в лексикографическом порядке.

Приемы, связанные с символом "смежнверш"

Создан нормализатор "смежнверш", определяющий множество вершин, для которых в посылках явно указана их смежность с данной вершиной. Пока в нем имеется единственный прием:

$\forall_{Gabcpq}(\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow \text{ведет}(p(i),a,b(i),G)) \ \&$
$\forall_j(j \in \{1,\ldots,m\} \rightarrow \text{ведет}(q(j),c(j),a,G)) \rightarrow \text{смежнверш}(a,G) = \{;b\} \cup \{;c\})$

Переменные b,c,p,q функциональные. Антецеденты выделены указателем "развертка" и идентифицируются с группами посылок.

Приемы, связанные с символом "степеньвершины"

1. Вывод определения.

   $\forall_{Ga}(\text{простграф}(G) \rightarrow \mathrm{card}(\mathrm{set}_x(\text{смежны}(a,x,G))) = \text{степеньвершины}(a,G))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении не связанного внешними кванторами и описателями подвыражения "степеньвершины(a,G)" в посылке задачи. Рассматриваемая посылка не является равенством, в левой части которого расположено данное подвыражение. Антецедент идентифицируется с посылкой. Выводимое утверждение снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 3.

2. Выражение через число ребер.

   $\forall_{Ga}(\text{граф}(G) \rightarrow \text{степеньвершины}(a,G) =$
   $\mathrm{card}(\mathrm{set}_x(x \in \text{ребра}(G) \ \& \ \text{конецребра}(a,x,G))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подвыражению условия задачи на доказательство, расположенному внутри описателя "отображение". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Указатель "попытказамены" определяет переход к вспомогательной задаче, в которой и осуществляется замена. Если эту задачу решить не удается, то продолжается решение текущей задачи, не измененной данным приемом. Уровень срабатывания приема равен 4.

3. Ввод в рассмотрение ребра, инцидентного вершине, при доказательстве неравенства для степени вершины.

   $\forall_{abcpq}$(простграф(b) & $p \leq 0$ & $0 \leq q \rightarrow c \in$ вершины(b) & $\neg(a = c)$ & смежны$(a, c, b))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в условия задачи на доказательство, имеющего вид "$0 \leq p$степеньвершины$(a, b) + q$". Антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Отсутствует посылка вида "смежны(a, x, b)". Прием вводит новую переменную c. Уровень срабатывания равен 2.

4. Ввод в рассмотрение ребер, необходимых для дополнения степени вершины неизвестного графа до заданного значения.

   $\forall_{Gabcdekmn}$(степеньвершины$(a, G) = m$ & простграф(G) &
   card(смежнверш$(a, G)) = k$ & $n = m - k$ & $0 < n$ & $c \subseteq$ ребра(G) &
   $d =$ новобъекты$(c, n) \rightarrow \{; d\} \subseteq$ ребра(G) &
   $\exists_x(\{; x\} \subseteq$ вершины(G) &
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ ведет$(d(i), a, x(i), G))$ & различны$(x)))$

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей неизвестную G. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, третий - выделен указателем "идентификатор". Переменные k, m идентифицируются, соответственно, с целочисленной и натуральной константами. Четвертый, пятый и седьмой антецеденты выделены указателем "программа". Шестой антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "перечисл", определяющим множество c уже введенных в рассмотрение ребер графа. Отсутствует условие вида "$X \in$ вершины(G)", где X - неизвестная. Оператор "новобъекты" выбирает для обозначения новых ребер первые n еще не встречающихся в c натуральных чисел. В качестве x выбирается набор новых переменных, имеющий длину n. Квантор общности в консеквенте выписывается как конъюнкция. Уровень срабатывания равен 3.

5. Усмотрение противоречия: степень вершины меньше числа смежных ребер.

   $\forall_{Gab}$(степеньвершины$(a, G) = b$ & $0 <$ card(смежнверш$(a, G)) - b \rightarrow$ ложь)

   Прием имеет заголовок "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей неизвестную G. Выражения a, b не содержат неизвестных. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 0.

6. Отбрасывание избыточного условия на степень вершины.

   $\forall_{Gabc}$(простграф(G) & ребра$(G) = \{; a\}$ & card(смежнверш$(b, G)) = c \rightarrow$ степеньвершины$(b, G) = c)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, имеющей неизвестную G. Указатель "эквивалентно" определяет замену равенства на логическую константу "истина". Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, третий - выделен указателем "идентификатор". Выражение a имеет заголовок "набор" и не содержит неизвестных. Для каждого элемента d этого набора имеется условие вида "ведет(d, e, f, G)". Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "порождподграф"

1. Ввод в рассмотрение порожденного подграфа, полученного при удалении одной вершины.

   $\forall_{Gn}$(граф(G) & card(вершины$(G)) = n+1 \rightarrow$
   $\exists_{vH}(v \in$ вершины(G) & порождподграф(G, H) &
   вершины$(H) =$ вершины$(G) \setminus \{v\}$ & card(вершины$(H)) = n$ & граф$(H)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, реализующей шаг индукции по числу вершин графа. Указанием на это служит комментарий (натуральное card(вершины(G))). Отсутствует посылка вида "порождподграф(H, X)". Указатель "вариант" разрешает замену в первом антецеденте символа "граф" на "простграф". Уровень срабатывания равен 2.

2. Число ребер графа равно сумме числа ребер порожденного подграфа, полученного удалением одной вершины, и степени этой вершины.

   $\forall_{ABb}$(порождподграф(A, B) & вершины$(B) =$ вершины$(A) \setminus \{b\}$ &
   $b \in$ вершины$(A) \rightarrow$ card(ребра$(A)) =$ card(ребра$(B)) +$ степеньвершины$(b, A))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в задаче подвыражения "card(ребра(A))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "равно" и идентифицируется с одной либо двумя посылками. Третий антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания приема равен 3.

3. Ввод в рассмотрение множества компонент связности порожденного подграфа, полученного при удалении одной вершины.

   $\forall_{ABCb}$(порождподграф(A, B) & вершины$(B) =$ вершины$(A) \setminus \{b\}$ &
   дерево(A) & $b \in$ вершины$(A) \rightarrow$
   Компоненты(B, C) & $l(C) =$ степеньвершины$(b, A))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый и третий антецеденты идентифицируются с посылками, второй - с одной либо двумя посылками. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутствует посылка вида "Компоненты(B, X)". Прием вводит новую переменную C. Уровень срабатывания равен 2.

4. Множество вершин порожденного подграфа - подмножество вершин исходного.

   $\forall_{AB}$(порождподграф$(A, B) \rightarrow$ вершины$(B) \subseteq$ вершины$(A))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. В задаче встречается подвыражение "вершины(B)". Уровень срабатывания приема равен 1.

5. Порожденный подграф является графом.

   $\forall_{ab}$(граф(a) & порождподграф$(a, b) \rightarrow$ граф$(b))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "дополнграф"

1. Учет смежности вершин.

   $\forall_{GHab}(\text{дополнграф}(G,H)\ \&\ \neg(\text{смежны}(a,b,G)) \to \text{смежны}(a,b,H))$

   $\forall_{GHab}(\text{дополнграф}(G,H)\ \&\ \text{смежны}(a,b,G) \to \neg\text{смежны}(a,b,H))$

   Приемы имеют заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

2. Связь между числом ребер в двух графах.

   $\forall_{AB}(\text{простграф}(A)\ \&\ \text{простграф}(B)\ \&\ \text{дополнграф}(A,B)\ \&$
   $n = \text{card}(\text{вершины}(A)) \to \text{card}(\text{ребра}(A)) + \text{card}(\text{ребра}(B)) = n(n-1)/2)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Третий антецедент идентифицируется с посылкой, первые два - обрабатываются проверочными операторами. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Задача имеет посылку, содержащую подвыражение вида "мощность(ребра(...))". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "вершмаршрут"

1. Разбор случаев по смежности вершин, которые нужно соединить маршрутом.

   $\forall_{Gab}(\text{граф}(G)\ \&\ a \in \text{вершины}(G)\ \&\ b \in \text{вершины}(G) \to$
   $\text{смежны}(a,b,G)\ \vee\ \neg\text{смежны}(a,b,G))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "вершмаршрут(c,G)" в условии задачи на описание. Переменная c идентифицируется с несущественной неизвестной. Указатели "контекст" определяют дополнительную идентификацию условий "начало$(c) = a$" и "конец$(c) = b$". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

2. Попытка доказательства существования маршрута, соединяющего две вершины, путем рассмотрения их компонент связности.

   $\forall_{Gab}(\text{простграф}(G)\ \&\ \forall_{pst}(\text{компоненты}(G,p)\ \&\ s \in p\ \&\ t \in p\ \&\ a \in s\ \&\ b \in t \to$
   $\exists_r(r \in s\ \&\ r \in t)) \to \exists_x(\text{начало}(x) = a\ \&\ \text{конец}(x) = b\ \&\ \text{вершмаршрут}(x,G)))$

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется условием задачи на доказательство. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - выделен указателем "подборзначений" и заменяет условие во вспомогательной задаче. Уровень срабатывания равен 5.

3. Использование синтезатора "соедвершины".

   $\forall_{Gabpx}(\text{соедвершины}(p,a,b,G)\ \&\ x = p \to$
   $\text{вершмаршрут}(x,G)\ \&\ \text{начало}(x) = a\ \&\ \text{конец}(x) = b)$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Конъюнктивные члены консеквента идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная; выражения a, b, G не содержат неизвестных. Первый антецедент обрабатывается пакетным сиетезатором "соедвершины", определяющим искомый вершинный маршрут p. Второй антецедент выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 5.

4. Синтезатор "соедвершины".

   Синтезатор реализует утверждение "соедвершины(x, a, b, G)". Входными данными служат вершины a, b и граф G. Выходной переменной x присваивается вершинный маршрут графа G, начинающийся в вершине a и заканчивающийся в вершине b.

   (a) Смежные вершины.
   $\forall_{Hbc}$(смежны$(b, c, H) \rightarrow$ соедвершины$((b, c), b, c, H)$)
   Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Переход по ребру.
   $\forall_{Habcd}$(смежны(a, b, H) & соедвершины$(d, a, c, H) \rightarrow$
   соедвершины(префикс$(b, d), b, c, H)$)
   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - реализует рекурсивное обращение. Для блокировки повторного рассмотрения вершины a используется комментарий (вершина a). Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символами "простаяцепь" и "Простаяцепь"

1. Ввод в рассмотрение простой цепи, соединяющей в связном графе два непересекающихся множества вершин.

   $\forall_{ABGabx}$(граф(G) & связный(G) & непересек(A, B) & $A \subseteq$ вершины(G) &
   $B \subseteq$ вершины(G) & $\neg(A = \emptyset)$ & $\neg(B = \emptyset) \rightarrow a \in A$ & $b \in B$ &
   Простаяцепь(x, G) & концы$(x) = \{a, b\}$ & непересек(вершины$(x), A \setminus \{a\}$) &
   $1 \leq \text{card}(x)$ & непересек(вершины$(x), B \setminus \{b\}$))

   Прием имеет заголовок "вывод". Первые три антецедента идентифицируются с посылками, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Пакетный синтезатор "соединяет" не усматривает простой цепи в графе G, соединяющей вершину множества A с вершиной множества B. Прием вводит новые переменные a, b, x. Уровень срабатывания равен 3.

2. Разбиение простой цепи, на которой выделена вершина, на две подцепи.

   $\forall_{Gabcdpq}$(граф(G) & $a \in$ вершины(b) & Простаяцепь$(b, G) \rightarrow$
   Простаяцепь(p, G) & Простаяцепь(q, G) & концы$(p) = \{c, a\}$ &
   концы$(q) = \{d, a\}$ & $p \cup q = b$ & концы$(b) = \{c, d\}$ & $2\text{card}(p) \leq \text{card}(b)$ &
   $\text{card}(b) \leq 2\text{card}(q)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Отсутствует посылка вида "$X \in$ вершины(b)", где X отлично от a. Отсутствует также посылка вида $b = X \cup Y$. Прием вводит новые переменные c, d, p, q. Уровень срабатывания равен 2.

3. Рассмотрение составной простой цепи.

   $\forall_{Gabcdemnprs}$(Простаяцепь(a, G) & Простаяцепь(d, G) & концы$(a) = \{b, c\}$ & концы$(d) = \{b, e\}$ & вершины$(a) \cap$ вершины$(d) \subseteq \{b\}$ & $0 \leq m\mathrm{card}(a) + n$ & $0 \leq r\mathrm{card}(d) + s$ & $0 < m$ & $0 < r \rightarrow a \cup d = p$ & Простаяцепь(p, G) & концы$(p) = \{c, e\}$ & $0 \leq nr + ms + m\mathrm{card}(p)$)

   Прием имеет заголовок "вывод". Пятый, восьмой и девятый антецеденты обраюатываются проверочными операторами, остальные - идентифицируются с посылками задачи на описание. Существует условие задачи, имеющее вид "Простаяцепь(x, G)", где x - неизвестная, входящая в другое условие - неравенство для мощности множества. В задаче отсутствуют посылки вида "$X = a \cup d \cup Y,$ Простаяцепь(X, G)". Кроме того, отсутствуют посылки вида "$X = u \cup Y,$ концы$(X) = Z$", где u - a либо b, а Z содержит b. Прием вводит новую переменную p. Уровень срабатывания равен 3.

4. Разбор случаев по смежности вершин, которые нужно соединить цепью.

   $\forall_{Gab}$(граф(G) & $a \in$ вершины(G) & $b \in$ вершины$(G) \rightarrow$ смежны(a, b, G) $\vee$ $\neg$(смежны(a, b, G)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подутверждения "простаяцепь(c, G)" в условии задачи на описание, имеющей несущественную неизвестную c. Указатели "контекст" определяют дополнительную идентификацию условий вида "исхвершина$(c) = a$", "послвершина$(c) = b$". Второй и третий антецеденты идентифицируются с посылками, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выводимая дизъюнкция сопровождается комментарием "разборслучаев". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "простойцикл"

1. Обращение к синтезатору "простойцикл".

   $\forall_{Gax}$(простойцикл(a, G) & $x = a \rightarrow$ простойцикл(x, G))

   Прием имеет заголовок "подборзначений". Консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Выражение G не содержит неизвестных, x - неизвестная. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "простойцикл", второй - выделен указателем "подборзначений". Уровень срабатывания равен 2.

2. Синтезатор "простойцикл".

   Синтезатор реализует утверждение "простойцикл(x, G)". Входное данное - граф G. Выходная переменная x перечисляет простые циклы данного графа. Пока синтезатор имеет единственный прием:

   $\forall_{Gabcd}$(простаяцепь(a, G) & циклпродолж(отрмарш$(a, b, c), G, d) \rightarrow$ простойцикл(d, G))

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию в некоторой другой посылке подвыражения "отрмарш(a, b, c)". Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "циклпродолж", перечисляющим продолжения данного отрезка простой цепи a до простого цикла.

3. Синтезатор "циклпродолж".

   Синтезатор реализует утверждение "циклпродолж(a, G, x)". Входные данные - простая цепь a в графе и сам этот граф G. Выходная переменная перечисляет простые циклы x, получающиеся путем продолжения простой цепи a через ее последнюю вершину.

   (a) Использование посылки "раздмарш".

   $\forall_{Gabcdx}$(раздмарш(b, c, d) & исхвершина$(c) = d$ & послвершина$(b) = d$ & непересек(мвершины(a), мвершины(c)) & циклпродолж(прохожд$(a, b, c), G, x) \rightarrow$ циклпродолж(прохожд$(a, b), G, x)$)

   Прием продолжает простую цепь, используя фрагмент c, начальная вершина которого совпадает с последней вершиной фрагмента b. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Четвертый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Пятый антецедент реализует рекурсивное обращение. Допускается вырождение a в пустой маршрут. Уровень срабатывания равен 1.

   $\forall_{Gabcdx}$(раздмарш(b, c, d) & послвершина$(c) = d$ & послвершина$(b) = d$ & непересек(мвершины(a), мвершины(c)) & циклпродолж(прохожд$(a, b,$ обрцепь$(c)), G, x) \rightarrow$ циклпродолж(прохожд$(a, b), G, x)$)

   Аналогично предыдущему, но цепь c примыкает к цепи b в своей последней вершине. Уровень срабатывания равен 2.

   (b) Добавление одного ребра.

   $\forall_{Gabcdx}$(послвершина$(a) = b$ & ведет(c, b, d, G) & $\neg(d \in$ мвершины$(a))$ & циклпродолж(мсуффикс$(a, c, d), G, x) \rightarrow$ циклпродолж(a, G, x))

   Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - пакетным сиетезатором, третий - проверочным оператором. Последний антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 3.

   (c) Усмотрение цикла.

   $\forall_{Gabcde}$(послвершина$(a) = b$ & исхвершина$(a) = c$ & ведет(d, b, e, G) & $e = c$ & $\neg(d \in$ мребра$(a)) \rightarrow$ циклпродолж$(a, G,$ прохожд$(a, ((b, c), (d)))))$

   Прием замыкает цикл, добавляя единственное ребро. Третий антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Первые два антецедента и четвертый антецедент выделены указателем "идентификатор". Пятый антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "соединяет"

1. Если две различных простых цепи соединяют заданные две вершины, то ни одна из них не является началом другой.

   $\forall_{Gabpq}$(соединяет$(\{a\}, \{b\}, G, p)$ & соединяет$(\{a\}, \{b\}, G, q)$ & $\neg(p = q) \rightarrow$ $\neg$(начмарш(p, q)) & $\neg$(начмарш(q, p)))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

2. Усмотрение простой цепи.

   $\forall_{abcd}$(соединяет$(a, b, c, d) \rightarrow$ простаяцепь$(d, c))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

3. Усмотрение исходной вершины.

   $\forall_{abcd}$(соединяет$(\{a\}, b, c, d) \rightarrow$ исхвершина$(d) = a)$

   Аналогично предыдущему. Выводимое утверждение сопровождается комментарием "ориентацияравенства".

4. Усмотрение последней вершины.

   $\forall_{abcd}$(соединяет$(a, \{b\}, c, d) \rightarrow$ послвершина$(d) = b)$

   Аналогично предыдущему.

5. Существование простой цепи, соединяющей две вершины связного графа.

   $\forall_{Gab}$(связный(G) & граф(G) & $a \subseteq$ вершины(G) & $b \subseteq$ вершины(G) & $\neg(a = \emptyset)$ & $\neg(b = \emptyset) \rightarrow \exists_x$(соединяет$(a, b, G, x)))$

   Прием имеет заголовок "связка". Подкванторное утверждение идентифицируется с условием задачи на описание, не имеющей других условий с неизвестной x. Задача не имеет цели "независит". Выражения a, b, G не содержат x. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, остальные - обрабатываются проверочными операторами. Уровень срабатывания равен 3.

6. Синтезатор "смсоединяет" перечисления простых цепей, соединяющих заданные множества вершин.

   Синтезатор реализует утверждение "соединяет(A, B, G, x)". Входные данные суть граф G и два множества его вершин A, B. Выходная переменная x перечисляет простые цепи, соединяющие эти множества. Пока синтезатор имеет единственный прием:

   $\forall_{ABGabx}$(Простаяцепь(x, G) & концы$(x) = \{a, b\}$ & $a \in A$ & $b \in B \rightarrow$ соединяет$(A, B, G, x))$

   Первые два антецедента идентифицируются с посылками, последние два - обрабатываются проверочными операторами.

Приемы, связанные с символом "ациклический"

1. Подграф ациклического графа - ациклический.

   $\forall_{ab}$(дерево(a) & порождподграф$(a, b) \rightarrow$ ациклический$(b))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Допускается изменение заголовка первого из них на "ациклический". Уровень срабатывания равен 2.

2. Расшифровка по определению.

   $\forall_G(\neg$(ациклический$(G)) \leftrightarrow \exists_x$(простойцикл$(x, G)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи. Уровень срабатывания равен 3.

$\forall_G(\text{ациклический}(G) \leftrightarrow \neg\exists_x(\text{простойцикл}(x, G)))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "противоречие". Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "связный"

1. Число компонент несвязного графа больше одной.

   $\forall_{ab}(\neg(\text{связный}(a)) \to \text{компоненты}(a, b) \;\&\; 1 < \text{card}(b))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство. Отсутствует посылка вида "компоненты(a, X)". Прием вводит новую переменную b. Уровень срабатывания равен 2.

2. Расшифровка условия связности графа.

   $\forall_G(\text{граф}(G) \to \text{связный}(G) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in \text{вершины}(G) \;\&\; y \in \text{вершины}(G) \;\&\; \neg(x = y) \to \exists_z(\text{вершмаршрут}(z, G) \;\&\; \text{начало}(z) = x \;\&\; \text{конец}(z) = y)))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на доказательство. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

3. Существование остовного дерева в связном графе.

   $\forall_a(\text{связный}(a) \;\&\; \text{граф}(a) \to \exists_x(\text{остовндерево}(a, x)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство либо задачи на исследование, имеющей цель "противоречие". Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором. Отсутвуют посылка "дерево(a)" и посылка вида "остовндерево(a, c)". Уровень срабатывания равен 4.

Приемы, связанные с символами "компоненты", "Компоненты"

1. Число вершин графа равно сумме чисел вершин его компонент связности.

   $\forall_{ABn}(\text{граф}(A) \;\&\; \text{Компоненты}(A, B) \;\&\; \text{конечное}(\text{вершины}(A)) \;\&\; l(B) = n \to \text{card}(\text{вершины}(A)) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(\text{вершины}(B(i))))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "card(вершины(A))" в посылке задачи. Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый и третий - обрабатываются проверочными операторами, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Уровень срабатывания равен 2.

2. Число ребер графа равно сумме чисел ребер его компонент связности.

   $\forall_{ABn}(\text{граф}(A) \;\&\; \text{Компоненты}(A, B) \;\&\; \text{конечное}(\text{вершины}(A)) \;\&\; l(B) = n \to \text{card}(\text{ребра}(A)) = \sum_{i=1}^{n} \text{card}(\text{ребра}(B(i))))$

   Аналогично предыдущему, но попытка применения приема инициируется подвыражением "card(ребра(A))".

3. Компонента связности графа - связный подграф, порожденный некоторым подмножеством вершин.

   $\forall_{AKn}$(Компоненты$(A, K) \rightarrow$ связный$(K(n))$ & порождподграф$(A, K(n)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "известно". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки, содержащей подвыражение $K(n)$, не связанное внешними кванторами и описателями. Уровень срабатывания равен 1.

4. Рассмотрение компоненты связности, содержащей смежные вершины.

   $\forall_{Gabp}$(компоненты(G, p) & смежны$(a, b, G) \rightarrow \exists_c(c \in p$ & $a \in c$ & $b \in c))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо задачи на описание, не имеющей цели "прямойответ". Отсутствуют посылки вида "$X \in p$", "$a \in X$". Уровень срабатывания равен 2.

5. Ввод в рассмотрение вершины, принадлежащей компоненте связности.

   $\forall_{Gabc}$(компоненты(G, a) & $b \in a \rightarrow c \in b)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство, либо задачи на описание, не имеющей цели "прямойответ" и имеющей цель "пример". Отсутствует посылка вида "$X \in b$". Прием вводит новую переменную c.

6. Усмотрение несмежности вершин, относящихся к различным компонентам связности.

   $\forall_{Gabcde}$(компоненты(G, a) & $b \in a$ & $c \in a$ & $d \in b$ & $e \in c$ & $\neg(b = c) \rightarrow \neg$(смежны$(d, e, G)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 4.

7. Включение в компоненту связности вершин, смежных с данной.

   $\forall_{Gab}$(граф(G) & компоненты(G, c) & $a \in c$ & $b \in a \rightarrow \mathrm{set}_x$(смежны$(b, x, G)) \subseteq a)$

   Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении в посылке задачи вхождения подвыражения "set_x(смежны$(b, x, G))$". Второй, третий и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, первый - обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

8. Включение компоненты в множество вершин графа.

   $\forall_{Gab}$(компоненты(G, a) & $b \in a \rightarrow b \subseteq$ вершины$(G))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 2.

Приемы, связанные с символом "дерево"

1. Ациклический связный граф - дерево.

   $\forall_a$(связный(a) & граф(a) & ациклический(a) $\rightarrow$ дерево(a))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Уровень срабатывания равен 1.

2. Дерево - простой граф.

   $\forall_a$(дерево(a) $\rightarrow$ простграф(a))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 2. Создана еще одна версия приема, имеющая заголовок "второйтерм" и применяемая к некорневым вхождениям. Уровень срабатывания тот же.

3. Дерево - ациклический граф.

   $\forall_a$(дерево(a) $\rightarrow$ ациклический(a))

   Аналогично предыдущему; созданы две версии приема.

4. Дерево - связный граф.

   $\forall_a$(дерево(a) $\rightarrow$ связный(a))

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентифицируется с посылкой. Уровень срабатывания равен 1.

Приемы, связанные с символом "цепи"

Пока имеется единственный прием, выполняющий ориентацию равенства:

$\forall_{ab}$($a =$ цепи(b) $\leftrightarrow$ цепи(b) $= a$)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке. Переменная a идентифицируется с переменной. Результат преобразования снабжается комментарием "ориентацияравенства". Уровень срабатывания равен 0.

Приемы, связанные с символом "исхвершина"

Создан нормализатор общей стандартизации "нормисхвершина":

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет заголовок "исхвершина", причем оно не является подтермом выражения b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается.

2. Отрезок маршрута.

   $\forall_{amn}$(исхвершина(отрмарш(a, m, n)) = мверш(a, m))

3. Последовательность фрагментов.

   $\forall_{ab}$(исхвершина(прохожд(a, b)) = исхвершина(a))

Приемы, связанные с символом "послвершина"

Создан нормализатор общей стандартизации "нормпослвершина":

1. Использование равенства из посылок.

   $\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

   Антецедент идентифицируется с посылкой. Выражение a имеет заголовок "послвершина" либо "мверш", причем оно не является подтермом выражения b. Перестановка частей равенства при идентификации не допускается.

2. Отрезок маршрута.

   $\forall_{amn}(\text{послвершина}(\text{отрмарш}(a, m, n)) = \text{мверш}(a, n))$

3. Последовательность фрагментов.

   $\forall_{ab}(\text{послвершина}(\text{прохожд}(a, b)) = \text{послвершина}(a))$

Приемы, связанные с символом "мверш"

1. Если два начинающихся в одной и той же вершине маршрута не являются началами друг друга, то существует точка разветвления.

   $\forall_{Gipq}(\text{простграф}(G)\ \&\ \text{маршрут}(p, G)\ \&\ \text{маршрут}(q, G)\ \&$
   $\text{исхвершина}(p) = \text{исхвершина}(q)\ \&\ \neg(\text{начмарш}(p, q))\ \&\ \neg(\text{начмарш}(q, p)) \to$
   $i - \text{натуральное}\ \&\ i \leq \text{длина}(p)\ \&\ i \leq \text{длина}(q)\ \&\ \text{мверш}(p, i) = \text{мверш}(q, i)\ \&$
   $\neg(\text{мверш}(p, i + 1) = \text{мверш}(q, i + 1)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем точка привязки выбрана в последнем из них. Четвертый антецедент, выделенный указателем "равно", может идентифицироваться с одним либо двумя равенствами. Указатели "вариант" разрешают замену символа "маршрут" во втором и третьем антецедентах на символы "цепь", "простаяцепь". Проверяется отсутствие посылок, указывающих на какую-либо точку разветвления маршрутов p, q при прохождении их в прямом порядке. Прием вводит новую переменную i. Уровень срабатывания равен 3.

2. Если два маршрута заканчиваются в одной и той же точке, и в них выбраны две различные вершины, то начиная с этих вершин выделяются подмаршруты до первого слияния.

   $\forall_{abcdijmn}(\neg(\text{мверш}(a, i) = \text{мверш}(b, j))\ \&\ \text{послвершина}(a) = \text{послвершина}(b) \to$
   $m - \text{натуральное}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ i \leq m\ \&\ j \leq n\ \&$
   $m \leq \text{длина}(a) + 1\ \&\ n \leq \text{длина}(b) + 1\ \&\ \text{мверш}(a, m) = \text{мверш}(b, n)\ \&$
   $c = \text{отрмарш}(a, i, m)\ \&\ d = \text{отрмарш}(b, j, n)\ \&\ \text{раздмарш}(c, d, \text{мверш}(a, m)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицирются с посылками задачи на доказательство либо на исследование, причем второй из них, выделенный указателем "равно", может идентифицироваться с одним либо двумя равенствами. Прием вводит новые переменные d, m, n. Уровень срабатывания равен 3.

Приемы, связанные с символом "мвершины"

Создан нормализатор общей стандартизации "нормвершины":

1. Пустой маршрут.

   мвершины(пустмарш) $= \emptyset$

2. Добавление ребра к маршруту.

   $\forall_{abc}$(мвершины(мсуффикс$((a, b, c))$) = мвершины$(a) \cup \{c\}$)

3. Последовательное прохождение маршрутов.

   $\forall_{ab}$(мвершины(прохожд(a, b)) = мвершины$(a) \cup$ мвершины(b))

Приемы, связанные с символом "мребра"

Создан нормализатор общей стандартизации "нормребра". Пока в нем имеется единственный прием:

$\forall_{ab}$(мребра(прохожд(a, b)) = мребра$(a) \cup$ мребра(b))

Приемы, связанные с символом "прохожд"

1. Устранение вложенных маршрутов.

   Теорема приема имеет вид "ассоциативно(прохожд)". Заголовок - "спускоперандов". Уровень срабатывания равен 1.

2. Нормализатор общей стандартизации "нормпрохожд".

   (a) Отбрасывание пустого маршрута.
   $\forall_a$(прохожд(пустмарш$, a) = a$)

   (b) Устранение вложенных маршрутов.

   (c) Продолжение фрагмента маршрута.
   $\forall_{mnk}(n - k = 1 \ \& \ 0 \leq m - n \rightarrow$
   прохожд(отрмарш(b, m, n), ((мверш(b, n), мверш(b, k)), (мребро(b, k)))) =
   отрмарш(b, m, k)).

   К отрезку маршрута добавляется маршрут, составленный из единственного ребра. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор", второй - обрабатывается проверочным оператором.

Приемы, связанные с символом "мсуффикс"

Создан нормализатор "нормсуффикс", имеющий единственный прием:

$\forall_{acde}$(послвершина$(a) = e \rightarrow$ мсуффикс(a, c, d) = прохожд$(a, ((e, d), (c)))$)

Выражение a имеет заголовок "прохожд". Антецедент выделен указателем "идентификатор".

Приемы, связанные с символом "обрцепь"

Создан нормализатор "нормобрцепь", имеющий единственный прием:

$\forall_{amn}(\text{обрцепь}(\text{отрмарш}(a, m, n)) = \text{отрмарш}(a, n, m))$

Приемы, связанные с символом "графбезтреуг"

1. Усмотрение графа без треугольников.

   $\forall_a(\text{графбезтреуг}(a) \to \text{графбезтреуг}(a))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 1.

2. Соотношение между степенями смежных вершин.

   $\forall_{abc}(\text{графбезтреуг}(c)\ \&\ \text{смежны}(a, b, c) \to$
   $\text{степеньвершины}(a, c) + \text{степеньвершины}(b, c) \leq \text{card}(\text{вершины}(c)))$

   Прием имеет заголовок "вывод". Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражение "степеньвершины(a, c)" уже встречается в задаче.

3. Расшифровка по определению.

   $\forall_a(\text{простграф}(a) \to \text{графбезтреуг}(a) \leftrightarrow$
   $\neg(\exists_{xyz}(x \in \text{вершины}(a)\ \&\ \text{смежны}(x, y, a)\ \&\ \text{смежны}(x, z, a)\ \&\ \text{смежны}(y, z, a))))$

   Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к подутверждению условия задачи на описание, имеющей цель "продукция". Такие цели возникают при программировании вычислительных пакетов ГЕНОЛОГа. Антецедент обрабатывается проверочным оператором. Уровень срабатывания равен 3.

4. Проверочный оператор "усмграфбезтреуг".

   (a) Результат отбрасывания вершины.
   $\forall_{ab}(\text{графбезтреуг}(a) \to \text{графбезтреуг}(\text{удалениеверш}(a, b)))$
   Антецедент обрабатывается проверочным оператором.

   (b) Подграф графа без треугольников.
   $\forall_{ab}(\text{графбезтреуг}(a)\ \&\ \text{подграф}(b, a) \to \text{графбезтреуг}(b))$
   Первый антецедент обрабатывается проверочным оператором, второй - идентифицируется с посылкой.

Приемы, связанные с символом "удалениеверш"

Создан единственный прием, устанавливающий связь между числом ребер исходного и результирующего графа:

$\forall_{abc}(\text{простграф}(a)\ \&\ \text{удалениеверш}(a, b) = c \to \text{card}(\text{ребра}(a)) = \text{card}(\text{ребра}(c)) + \text{степеньвершины}(b, a))$

Прием имеет заголовок "вывод". Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство, первый - обрабатывается проверочным оператором. Выражения "card(ребра(a))", "card(ребра(c))" уже рассматриваются в задаче. Уровень срабатывания равен 3.

Глава 10

Вычисления на ГЕНОЛОГе

Теоремы являются источником не только эвристических приемов решения задач, но и традиционных алгоритмических вычислительных процедур. Атомарный вычислительный цикл "обычной" программы представляет собой, по существу, многократное применение одной и той же цепочки теорем, иногда - единственной теоремы. Чтобы проследить, как именно тот или иной алгоритм возникает из теории, необходимо сначала поднять его формулировку до уровня, пограничного с базой теорем, т.е. до уровня ГЕНОЛОГа. Таким образом, этот язык оказывается необходимым компонентом интеллектуальных систем будущего: автоматическое создание любой новой программы должно проходить через пограничный уровень между теорией и алгоритмами.

В данной главе рассматриваются три направления, в которых проводилось обучение логической системы нелогическим вычислениям.

Во - первых, решатель обучался решению задач "на программирование". Формулировалась задача на описание, условия которой связывали входные данные с выходными. В процессе решения условия преобразовывались так, что становились понятными компилятору ГЕНОЛОГа. Далее они компилировались в программу ЛОСа, которая сохранялась в блоке программ логической системы. Эта программа определенным образом связывалась с задачей и рассматривалась как ее ответ. Если все входные данные были фиксированы, то программа запускалась, и под условием задачи в задачнике прорисовывался результат ее работы. Иначе - возникал диалог для выбора значений входных данных. После того, как задача на программмирование решена, через нее можно обращаться к синтезированной программе без повторного решения.

Во - вторых, решатель обучался программированию для ускорения вычислений при решении обычной "логической" задачи. В определенных ситуациях создавался новый либо корректировался старый вычислительный пакет, продукции которого задавались ответами вспомогательных задач на описание. Система обращалась к этому пакету, занося результат вычислений в текущий логический контекст и продолжая после этого обычный цикл решения задачи. При необходимости, созданный вычислительный пакет автоматически удалялся. Проводилось сравнение такого гибридного цикла вычислений с чисто логическими действиями, например, при переборе графов. Гибридный цикл уменьшал время решения задачи в сотни раз.

В - третьих, был создан сравнительно широкий класс вычислительных пакетов ГЕНОЛОГа, реализующих классические алгоритмы из различных разделов - матрицы, комплексные числа, многочлены, графы и т.д. Решатель мог обратиться к такому пакету при решении задачи логического уровня и занести полученные результаты в текущий логический контекст.

Естественным развитием данного направления представляется создание средств, позволяющих решателю писать программы для нелогических вычислений не на ЛОСе, а непосредственно на языке низкого уровня - СИ или даже ассемблере. Использование ассемблера представляется более предпочтительным, так как компилятор с него нетрудно реализовать средствами самой логической системы. Это избавит от необходимости использования внешней сложной программы компилятора для СИ.

10.1 Типы данных, используемые для вычислений на ГЕНОЛОГе

Начнем с описания типов данных, для которых предусмотрены вычисления на ГЕНОЛОГе. Эти типы перечислены в справочной информации символа "тип". Они представляют собой логические символы и термы, используемые в приемах справочников компилятора ГЕНОЛОГа. Подробнее о таких справочниках будет сказано ниже.

1. "объект" - общий неуточняемый тип данных, используемых при вычислениях.
2. "десчисло" - десятичное число в формате ЛОСа, т.е. набор цифр, в котором могут встречаться запятая и символ минус. Вместо набора длины 1 берется цифра.
3. "целое" - число в машинном формате "целое со знаком".
4. "Целое" - число в машинном формате "длинное целое со знаком".
5. "число" - число в машинном формате "с плавающей запятой".
6. "комплексное" - комплексное число в формате "с плавающей запятой".
7. "класс(A)" - конечное множество объектов типа A, представленное в виде набора своих элементов.
8. "набор(A)" - набор объектов типа A.
9. "логсимвол" - логический символ либо символ переменной.
10. "терм" - терм в обычном формате.
11. "вхождение" - вхождение в терм.
12. "многочлен(A)" - многочлен от одной переменной, представленный набором своих коэффициентов, упорядоченных по возрастанию степеней и заданных в формате A. Первая ячейка этого набора - служебная; в ней хранится указатель на кольцо многочлена - либо 0 (вещественные или комплексные числа), либо 1 (целые числа), либо простое число, задающее поле вычетов. Здесь ноль представлен как логический символ "0"; в прочих случаях число задается в формате "Целое". Допустимые значения A - "число", "Целое", "вычеты", "комплексное".

13. "массив(A)" - массив чисел в машинном формате A. Располагается вне зоны задач. Работать с ним можно через специальные ссылки, определяемые оператором "Выч(набор ...) при инициальзации массива.

14. "вектор(A)" - числовой вектор, элементы которого представлены в машинном формате A. Фактически задается парой (A_1, A_2), где A_1 - ссылка на числовой массив, A_2 - число элементов массива в формате "целое".

15. "матрица(A)" - прямоугольная числовая матрица, элементы которой представлены в машинном формате A ("число" либо "целое"). Фактически задается тройкой (A_1, A_2, A_3), где A_1 - ссылка на числовой массив; A_2 - число строк матрицы, представленное в формате "целое"; A_3 - число столбцов матрицы в том же формате.

16. "строки(A)" - прямоугольная матрица, элементы которой представлены в машинном формате A. Представляется в виде набора строк; каждая строка - набор элементов.

17. "кортеж($A_1, \ldots, A_n$)" - набор длины n, элементы которого имеют типы $A_1, \ldots, A_n$.

18. "таблица($A_1, \ldots, A_n$)" - набор наборов $(B_1, \ldots, B_n)$, где B_i представлено в формате A_i.

19. "подстановка" - набор длины n, элементы которого суть символьные номера, принадлежащие множеству $1, 2 \ldots, n$ (не обязательно различные).

20. "граф(A_1, A_2)" - неориентированный граф, вершины которого помечены объектами типа A_1, а ребра - объектами типа A_2. Представляется набором своих вершин.

21. "орграф(A_1, A_2)" - ориентированный граф, вершины которого помечены объектами типа A_1, а ребра - объектами типа A_2. Представляется набором своих вершин.

22. "вершина(A)" - вершина неориентированного графа, помеченная объектом типа A. Представляется тройкой (B_1, B_2, B_3), где B_1 - отметка вершины, B_2 - набор левых краев наборов, представляющих вершины графа, соединенные с данной вершиной ребром, B_3 - набор левых краев соответствующих ребер. Допускаются петли и параллельные ребра. В последнем случае набор B_2 имеет ссылки на одну и ту же вершину, а набор B_3 - на различные параллельные ребра.

23. "Вершина(A)" - вершина ориентированного графа, помеченная объектом типа A. Представляется пятеркой $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$, где B_1 - отметка вершины, B_2 - набор левых краев наборов, представляющих вершины графа, к которым от данной вершины ведет ребро, B_3 - набор левых краев соответствующих ребер. B_4 - набор левых краев наборов, представляющих вершины графа, от которых к данной вершине ведет ребро, B_5 - набор левых краев соответствующих ребер. Как и в случае неориентированных графов, допускаются петли и параллельные ребра.

24. "ребро(A)" - ребро графа либо орграфа, помеченное объетом типа A. Представляется тройкой (B_1, B_2, B_3), где B_1 - пометка ребра; B_2 и B_3 - вершины, соединяемые ребром. Для ориентированного графа B_2 - вершина, из которой ребро исходит, B_3 - вершина, к которой оно ведет.

25. "линия" - набор, представляющий линию при анализе рисунка. Подробнее - см. справочную информацию к символу "Линии".

26. "точка" - ссылка на точку из линии. Представляет собой вхождение в набор A комментария (пересечение A) к некоторому стандартному элементу линии. Подробнее - см. справочную информацию к символу "Линии", а также информацию к символу "элементы".

27. "Линия" - набор, представляющий граничную линию при анализе изображения. Подробнее - см. справочную информацию к символу "граничнлинии".

28. "Точка" - набор, представляющий узловую точка изображения. Подробнее - см. справочную информацию к символу "граничнлинии".

29. "Область" - набор, представляющий область при анализе изображения. Подробнее - см. справочную информацию к символу "рисобласти".

30. "шахматы" - представление шахматной позиции. Имеет вид тройки (A_1, A_2, A_3), где A_1 - матрица шахматной позиции, A_2 - 0 либо последний ход, после которого возникла позиция, A_3 - пара указателей на возможность рокировки. Каждый указатель - пара (B_1, B_2): B_1 - возможность рокировки в направлении первой вертикали, B_2 - возможность рокировки в направлении восьмой вертикали; 0 - рокировка возможна, 1 - нет. Сначала идет указатель для белых, затем - для черных. Матрица шахматной позиции - набор $(C_1, \ldots, C_8)$ наборов C_i, определяющих столбцы позиции. Каждое C_i - набор $(D_1, \ldots, D_8)$ элементов столбца. Если на j-й строке в i-м столбце находится фигура типа F и цвета R, то D_j - терм "$F(R,(i,j))$", иначе D_j есть 0. Белый цвет - 0, черный - 1.

31. "полефигуры" - координаты поля на шахматной доске (пара цифр от 1 до 8, указывающих номер столбца и строки на доске). Ход фигуры - пара координат исходного и последнего полей.

32. "шахлиния" - координаты линии на шахматной доске, т.е. пара (координаты поля линии - координаты направляющего вектора линии).

33. "напрлин" - координаты направляющего вектора линии на шахматной доске.

10.2 Операторы ЛОСа, предназначенные для работы с числами в машинных форматах

Основными форматами, в которых представляются числа на ЛОСе, служат символьные номера и десятичные числа. Первые суть просто номера логических символов, вторые - цифры и наборы цифр, имеющие произвольную длину. В этих наборах могут встречаться запятая и знак минуса. Операции над десятичными числами сравнительно медленные, и для ускорения вычислений дополнительно были введены так называемые "машинные форматы" - числа с плавающей запятой, обрабатываемые математическим сопроцессором; 32-битные целые числа со знаком; длинные целые со знаком, представляемые наборами 32-битных фрагментов и имеющие произвольную длину, а также комплексные числа в формате "с плавающей запятой".

Хотя числа машинных форматов и хранятся в зоне задач, их представление отличается от представления термов и обычных наборов. Поэтому даже для копирования или сравнения их между собой требуются специальные операторы. Уточним способы записи таких чисел:

1. Число "с плавающей запятой" представляется в зоне задач набором N длины 2. Элементы этого набора кодируются так, чтобы их можно было отличить от элементов обычных наборов. Иначе интерпретатор может спутать ссылку из набора на другой набор с фрагментом числа. 64 бита стандартного представления числа "с плавающей запятой" разбиваются на два идущих подряд 32-битных слова A_1, A_2. Каждый из двух элементов набора N представляет собой пару 32-битных слов. Первое из них имеет шестнадцатеричный код (40200001). Второе слово для первого набора равно A_1, а для второго - A_2.

2. Число "целое со знаком" представляется в зоне задач набором длины 1. Первые 32 бит единственного элемента этого набора имеют шестнадцатеричный код (60200001). Далее следуют 32 бита, образующие собственно запись целого числа со знаком в стандартном машинном формате.

3. Число "длинное целое со знаком" представляется в зоне задач набором переменной длины. Первые 32 бит каждого элемента набора хранят код (61200001); вторые 32 бит образут фрагменты $A_1, \ldots, A_n$ записи целого числа со знаком $A_1 \ldots A_n$. Старший бит набора A_1 - знаковый. При этом разряды как положительных, так и отрицательных чисел задаются в прямом коде.

4. Комплексное число "с плавающей запятой" представляется в зоне задач набором N длины 4. Первые два элемента набора кодируют вещественную часть; следующие два - мнимую часть. Каждый элемент набора - пара 32-битных слов, первое из которых имеет шестнадцатеричный код (41200001), а второе хнаит фрагмент записи числа.

5. В процессе вычислений могут вводиться массивы чисел, представленных в формате "с плавающей запятой" либо "целое со знаком". Ссылка на такой массив для дальнейшего манипулирования с ним хранится в виде набора длины 2 в зоне задач. Первые 32 бита каждого из двух элементов указывают формат элементов массива: шестнадцатеричный код (50200001) - "с плавающей запятой", код (70200001) - "целое со знаком". Вторые 32 бит первого элемента хранят указатель (в смысле WINAPI) на начало массива, вторые 32 бит второго элемента - handle массива. Заметим, что длина массива в такой ссылке не указывается и (если она нужна) должна быть сохранена независимо при создании массива. Удаление массива осуществляется автоматически: если при расчистке зоны задач удаляется ссылка на массив, то удаляется и сам массив.

Напомним операторы и операторные выражения, используемые для работы с числами машинных форматов. Все операторы имеют вид "Выч(A $B_1 \ldots B_n$)", где A - название оператора; $B_1, \ldots, B_n$ - входные и выходные данные. Все операторные выражения имеют вид "выч(A $B_1 \ldots B_n$)". Начнем с операторов:

1. Выч(набор x1 x2 x3). x1 - логический символ "число" либо "целое", определяющий тип элемента массива. x2 - натуральное число (в десятичной записи). Оператор выделяет память для хранения массива из x2 чисел формата x1. Переменной x3 присваивается ссылка на этот массив.

2. Выч(запись x1 x2 x3). x1 - ссылка на массив чисел в машинном формате; x2 - номер элемента этого массива в маинном формате "целое со знаком". Нумерация начинается с 0. x3 - число в формате элементов массива x1. Происходит регистрация значения x3 в x2-м элементе массива x1.

3. Выч(деление x1 x2 x3 x4). x1, x2 - представления чисел в машинном формате "целое со знаком" либо "длинное целое со знаком". Выполняется деление с остатком, причем переменной x3 присваивается неполное частное, а переменной x4 - остаток. Форматы x3 и x4 - такие же, как у x1 и x2.

4. Выч(меньше x1 x2). x1, x2 - числа в одинаковом вещественном машинном формате. Истинно, если x1 меньше, чем x2.

5. Выч(меньшеилиравно x1 x2). x1, x2 - числа в одинаковом вещественном машинном формате. Истинно, если x1 меньше или равно x2.

6. Выч(0 x1). x1 - число в машинном формате. Истинно, если оно не равно 0.

7. Выч(равно x1 x2). x1, x2 - числа в одинаковом машинном формате. Истинно, если x1 равно x2.

8. Выч(изменение x1 x2). x1, x2 - представления чисел в одинаковом машинном формате. Значение x2 передается в x1.

9. Выч(четное x1). x1 - целое. Истинно, если оно четное.

10. Выч(частноемн x1 x2 x3 x4). x1, x2 - многочлены, коэффициенты которых заданы в машинном формате "комплексное", "число" либо "Целое". Переменным x3 и x4 присваиваются неполное частное и остаток от деления x1 на x2. Если деление выполняется над кольцом целых чисел и старший коэффициент делителя отличен от единицы, то деление с остатком может оказаться невозможным, и тогда оператор ложен.

11. Выч(остатокмн x1 x2 x3). x1, x2 - многочлены над кольцом целых чисел. Выполняется деление с остатком x1 на x2; для обеспечения возможности деления многочлен x1 домножается на некоторое целое число. Переменной x3 присваивается остаток.

12. Выч(стандмн x1 x2 x3). x1 - многочлен над полем вещественных либо комплексных чисел. Выполняется дмножение его на такое число a, чтобы коэффициент при старшем члене был равен 1. Переменной x2 присваивается результат домножения.

13. Выч(программа x1 x2 x3). x1 - набор псевдокоманд, определяющий вычисления для набора вход-выходных данных с плавающей запятой x2 и набора вход-выходных данных в формате целого со знаком x3. Реализуется цикл этих вычислений. Вне о.д.з. оператор ложен. Каждая псевдокоманда представляет собой набор $(N\ n1 \ldots nk)$, где N - номер операции; $n_1, \ldots, n_k$ - номера операндов

(входных и выходных). Все числа $N, n_1, \ldots, n_k$ имеют символьный формат. Номера операндов берутся из набора x2 либо x3, соответствующего типу операнда. Этот тип однозначно определяется по номеру операции. Для промежуточных данных можно использовать номера, большие длины соответствующего набора. При этом номер не должен быть больше 200.

Данный оператор введен с целью ускорения вычислений. Он позволяет за один цикл работы интерпретатора ЛОСа выполнить длинную цепочку действий. В случае формата "с плавающей запятой" используются команды математического сопроцессора.

Перечислим элементарные операции, допустимые в наборах псведокоманд. Ниже номер пункта совпадает с номером операции:

1. Сложение в формате "с плавающей запятой". Первые два операнда - слагаемые, третий - сумма. Аналогичное размещение операндов используется и для других операций.
2. Сложение в формате "целое со знаком".
3. Изменение знака числа в формате "с плавающей запятой".
4. Изменение знака числа в формате "целое со знаком".
5. Умножение в формате "с плавающей запятой".
6. Умножение в формате "целое со знаком".
7. Деление в формате "с плавающей запятой".
8. Деление с остатком для формата "целое со знаком" (первые два операнда - делимое и делитель; затем неполное частное и остаток).
9. Возведение в степень в формате "с плавающей запятой".
10. Экспонента в формате "с плавающей запятой".
11. Возведение в натуральную степень для формата "целое со знаком".
12. Модуль в формате "с плавающей запятой".
13. Модуль в формате "целое со знаком".
14. Натуральный логарифм (здесь и далее все операции - в формате "с плавающей запятой").
15. Логарифм - общий случай.
16. Квадратный корень.
17. Синус.
18. Косинус.
19. Тангенс.

20. Котангенс.
21. Секанс.
22. Косеканс.
23. Арксинус.
24. Арккосинус.
25. Арктангенс.
26. Арккотангенс.
27. Гиперболический синус.
28. Гиперболический косинус.
29. Гиперболический тангенс.
30. Гиперболический котангенс.
31. Сигнум.
32. Тождественная операция. Используется для присвоения значения выходной переменной.
33. Нахождение целой части.

Переходим к операторным выражениям вида "выч(...)":

1. выч(число x1). x1 - десятичное число. Значением выражения служит представление данного числа в формате "с плавающей запятой".
2. выч(целое x1). x1 - целое десятичное число. Значением выражения служит представление данного числа в формате "целое со знаком".
3. выч(Целое x1). x1 - целое десятичное число. Значением выражения служит представление данного числа в формате "длинное целое со знаком".
4. выч(выход x1). x1 - представление числа в машинном формате формате. Если число представлено в формате "с плавающей запятой", то значением выражения служит пара десятичных чисел (A_1, A_2), такая, что данное число равно произведению A_1 на 10 в степени A_2. Для формата "комплексное" выдается пара таких пар. В прочих случаях значением выражения служит десятичное число, равное x1.
5. выч(значение x1 x2). x1 - ссылка на массив чисел в машинном формате, x2 - номер элемента массива в формате "целое со знаком". Нумерация начинается с 0. Значением выражения служит представление в машинном формате x2-го элемента массива.
6. выч(плюс x1 x2). x1,x2 - представления чисел в мащинном формате. Значением выражения служит представление в том же формате их суммы.

7. выч(минус x1). x1 - представление числа в машинном формате. Значением выражения служит представление в том же формате числа x1 с обратным знаком.
8. выч(вычитание x1 x2). Выражение для вычитания чисел в машинном формате.
9. выч(умножение x1 x2). Выражение для умножения чисел в машинном формате.
10. выч(дробь x1 x2). x1, x2 - представления чисел в машинном формате. Значением выражения служит представление в том же формате частного от деления x1 на x2. В случае целочисленного формата берется неполное частное.
11. выч(степень x1 x2). x1, x2 - представления чисел в машинном формате. Значением выражения служит результат возведения x1 в степень x2. Для формата целых чисел значение x2 должно быть неотрицательным. Если x1 - комплексное, то x2 - в машинном формате "целое со знаком".
12. выч(логарифм x1 x2). x1, x2 - представления чисел в формате "с плавающей запятой". Значением выражения служит представление в том же формате логарифма числа x2 по основанию x1.
13. выч(натурлог x1). x1 - представление числа в формате "с плавающей запятой". Значением выражения служит представление в том же формате натурального логарифма x1.
14. выч(синус x1). Выражение для вычисления синуса в формате "с плавающей запятой".
15. выч(косинус x1). Выражение для вычисления косинуса.
16. выч(тангенс x1). Выражение для вычисления тангенса.
17. выч(котангенс x1). Выражение для вычисления котангенса.
18. выч(арксинус x1). Выражение для вычисления арксинуса.
19. выч(арккосинус x1). Выражение для вычисления арккосинуса.
20. выч(арктангенс x1). Выражение для вычисления арктангенса.
21. выч(арккотангенс x1). Выражение для вычисления арккотангенса.
22. выч(модуль x1). Выражение для вычисления модуля числа x1, представленного в формате "с плавающей запятой" либо "целое со знаком".
23. выч(квадркорень x1). Выражение для вычисления квадратного корня в формате "с плавающей запятой".
24. выч(эксп x1). Выражение для вычисления экспоненты.
25. выч(гипсинус x1). Выражение для вычисления гиперболического синуса.
26. выч(гипкосинус x1). Выражение для вычисления гиперболического косинуса.
27. выч(гиптангенс x1). Выражение для вычисления гиперболического тангенса.

28. выч(гипкотангенс x1). Выражение для вычисления гиперболического котангенса.

29. выч(нет). Константа $1e99$, используемая при построении графиков в массивах значений для указания на пропуск точки.

30. выч(копия x1). x1 - представление числа в машинном формате. Значением выражения служит копия этого представления.

31. выч(плюсбеск). Константа $2e99$, используемая при построении графиков в массивах значений для указания плюс - бесконечности.

32. выч(минусбеск). Константа $-2e99$, используемая при построении графиков в массивах значений для указания минус - бесконечности.

33. выч(Плюс x1 x2 x3). Сумма целых неотрицательных чисел x1 и x2 по натуральному модулю x3. Здесь и далее в модулярных операциях формат чисел - "длинное целое со знаком".

34. выч(Минус x1 x2). Изменение знака целого неотрицательного числа x1 по натуральному модулю x2.

35. выч(Умножение x1 x2 x3). Произведение целых неотрицательных чисел x1, x2 по натуральному модулю x3.

36. выч(Дробь x1 x2 x3). Частное от деления целого неотрицательного числа x1 на натуральное число x2 по простому модулю x3.

37. выч(плюсмн x1 x2). Сумма многочленов x1 и x2. Здесь и далее коэффициенты многочлена задаются в одном из форматов "число", "комплексное", "Целое".

38. выч(умножениемн x1 x2). Произведение многочленов x1 и x2.

39. выч(домножмн x1 x2). Результат домножения коэффициентов многочлена x1 на число x2.

40. выч(степеньмн x1). Степень многочлена x1 в формате "целое со знаком".

41. выч(минусмн x1). Результат изменения знаков у коэффициентов многочлена x1.

42. выч(коэффициентмн x1 x2). Коэффициент многочлена x1 при члене степени x2. x2 - в формате "целое".

43. выч(Целые x1). x1 - число в машинном формате целого со знаком. Значением выражения становится результат перевода x1 в формат "длинное целое со знаком".

44. выч(нод x1 x2). x1, x2 - числа в формате "длинное целое со знаком". Значением выражения становится их наибольший общий делитель.

45. выч(вычет x1 x2). x1, x2 - числа в формате "длинное целое со знаком"; x2 - натуральное. Значением выражения является остаток от деления x1 на x2.

46. выч(вычетмн x1 x2). x1, x2 - многочлены, для которых возможно деление x1 на x2 с остатком. Значением выражения является данный остаток.

47. выч(коэфф x1 x2). Коэффициент многочлена x1 при члене степени x2. x2 - в формате символьного числа.

48. выч(целаячасть x1). Целая часть числа x1, представленного в формате "с плавающей запятой". Формат результата - тот же.

49. выч(сигнум x1). Сигнум числа x1, представленного в формате "с плавающей запятой". Результат представлен в формате "целое".

50. выч(логсимвол x1). Результат преобразования в символьный вид числа x1 в машинном формате "целое со знаком".

51. выч(номерсимв x1). Результат преобразования в формат "целое со знаком" символьного числа x1.

52. выч(символномер x1). Результат преобразования в формат "с плавающей запятой" символьного числа x1.

53. выч(комплексное x1 x2). Результат преобразования в формат "комплексное" комплексного числа, вещественная часть которого равна x1, а мнимая - x2. Данные x1, x2 представлены как десятичные числа.

54. выч(вещественнаячасть x1). Вещественная часть комплексного числа x1. Оба значения - в формате "с плавающей запятой".

55. выч(мнимаячасть x1). Мнимая часть комплексного числа x1. Оба значения - в формате "с плавающей запятой".

56. выч(Комплексное x1). Результат перевода в формат "комплексное" числа x1, представленного в формате "с плавающей запятой".

57. выч(Модуль x1). Модуль комплексного числа x1, представленный в формате "с плавающей запятой".

10.3 Программно реализуемые антецеденты теоремы приема

Антецеденты теоремы приема, реализуемые путем нелогических вычислений, выделяются указателем "программа". Они называются программно реализуемыми антецедентами. Для обработки подтермов такого антецедента обычно используются специальные операторы и операторные выражения ЛОСа, связываемые с подтермом при помощи справочника "вычисл". Этот справочник реализован на ГЕНОЛОГе. Теорема его приема имеет вид "вычисл(f F A_1 $\ldots$ A_m T)". Здесь F - вид обрабатываемого подтерма, f - выделенный внутри F логический символ, появление которого инициирует обращение к данному справочнику. Каждое A_i - либо вида "вход(x_i t_i)", либо вида "выход(x_i t_i)", либо вида "выход(t)", либо вида "условие(U)", либо вида "уровень(k)". В первых двух случаях указывается, рассматривается ли переменная x_i терма F как входная или как выходная, и фиксируется тип t_i ее значений. В третьем случае вычисляется значение выражения, и t - тип этого значения. U - дополнительное ограничение на значения входных переменных, при котором возможен предлагаемый способ вычисления. k - уровень, начиная с которого возможно использование компилятором данного способа вычислений. При компиляции выбирается допустимый способ с наименьшим уровнем. Терм T - оператор либо операторное выражение ЛОСа, используемые для вычисления. Переменные у них - те же, что у F.

При обращении к справочнику "вычисл" на символе f ему передается в качестве значения переменной x1 одноэлементый набор, состоящий из символа "пустоеслово". Справочник заменяет это "пустоеслово" на набор наборов ($F\ A_1\ \ldots\ A_n\ T$), определяющих различные допустимые способы реализации подтермов, содержащих символ f.

Заметим, что для обработки одного и того же утверждения F может понадобиться несколько различных операторов T - в зависимости от того, какие переменные считаются входными.

Использование справочника "вычисл" упрощает пополнение ГЕНОЛОГа новыми вычислительными возможностями. При появлении нового символа s отношения либо операции, требующих нелогических вычислений, создаются соответствующие программы ЛОСа, для которых вводятся подходящие названия. Затем вводится прием справочника "вычисл", связывающий данные программы с реализуемым термом F. Чтобы можно было пользоваться формульным редактором в теоремах приемов, содержащих символ s, для него создаются необходимые приемы справочников формульного редактора.

Кроме указанного способа компиляции через справочник "вычисл", имеются специальные случаи компиляции, непосредственно обрабатываемые компилятором ГЕНОЛОГа. Это различные операторы типа присвоения, а также логические связки и кванторы. С них мы и начнем рассмотрение типов программно реализуемых антецедентов.

10.3.1 Программно реализуемые утверждения, допускающие непосредственную компиляцию

Перечислим основные виды программно реализуемых утверждений, для которых в компиляторе предусмотрена специальная обработка.

1. Утверждение имеет вид $A_1 \vee \ldots\ A_n$. Требуется, чтобы все утверждения A_i были программно реализуемыми и имели одни и те же выходные переменные. Значения заданной выходной переменной после обработки различных A_i должны представляться в одном и том же формате. Иначе компиляция не выполняется.
2. Утверждение имеет вид $A_1\ \&\ldots\ A_n$, где утверждения A_i программно реализуемые. Такое утверждение, разумеется, не является антецедентом теоремы приема, но может являться, например, дизъюнктивным членом антецедента.
3. Утверждение вида $\neg A$, где A - программно реализуемое утверждение без выходных переменных.
4. Утверждение вида $\exists_{x_1 \ldots x_n}(A)$, где A - программно реализуемое утверждение, все выходные переменные которого содержатся среди переменных $x_1, \ldots, x_n$.

5. Утверждение вида $\forall_{x_1 \dots x_n}(A_1 \ \& \ \dots A_m \rightarrow A_0)$, где все утверждения $A_0, A_1, \dots, A_m$ программно реализуемые, причем все выходные переменные утверждений $A_1, \dots$, A_m содержатся среди $x_1, \dots, x_n$, а утверждение A_0 не имеет выходных переменных.

6. Оператор присвоения. Утверждение имеет вид $x = t$, где t - программно реализуемое выражение, все переменные которого уже определены. При этом значение переменной x пока не определено. Заметим, что сравнение двух уже определенных значений компилируется при помощи справочника "вычисл".

7. Перечисление делителей целого числа. Утверждение имеет вид "делит(x, t)", где t - программно реализуемое выражение, принимающее целочисленные значения. Все его свободные переменные уже определены, а x пока не определено. Если в фильтрах приема указано, что x имеет своим значением простое число, то в компилируемую программу вставляется оператор, перечисляющий все простые делители t, иначе - все целочисленные делители, включая отрицательные.

8. Утверждение вида "равно(Матрица(A, m, n) t)". Здесь A, m, n - переменные; t - программно реализуемое выражение, имеющее своим значением матрицу. Если A, m, n не определены, то переменной A присваивается ссылка на массив, перечисляющий элементы матрицы t, переменным m, n - числа строк и столбцов этой матрицы.

9. Утверждение вида "точкамакс$(\lambda_i(t(i), i \in \{m, \ \dots, \ n\}), x, y)$" либо вида "точкамин$(\lambda_i(t(i), i \in \{m, \ \dots, \ n\}), x, y)$". Происходит присвоение переменным x, y номера i и значения $t(i)$, соответственно, для наибольшего либо наименьшего элемента набора. Если таких i несколько, то создаваемый компилятором оператор выбирает первое из них.

10. Создание набора псевдокоманд для вычисления значения числовой функции. Утверждение имеет вид "$f = \lambda_{x_1 \dots x_n}(t, x_1 -$число $\& \ \dots \ x_n -$число)". Идентификация f заключается в определении при помощи процедуры "вычпрог" набора псевдокоманд, вычисляющего значение выражения t.

10.3.2 Программно реализуемые термы, компилируемые при помощи справочника "вычисл"

Справочник "вычисл" связывает шаблон реализуемых утверждений либо выражений с оператором ЛОСа. Часть таких операторов реализуются вычислительными пакетами ГЕНОЛОГа, и мы рассмотрим их в одном из последующих разделов. Другие операторы, количество которых весьма велико, запрограммированы на ЛОСе без участия ГЕНОЛОГа. Мы не будем приводить здесь полного их списка. Заметим лишь, что приемы справочника "вычисл", обслуживающие некоторое понятие, легко найти в подразделе "Справочники" того раздела оглавления ГЕНОЛОГа, который связан с данным понятием.

Перечислим лишь некоторые примеры термов, программно реализуемых при помощи справочника "вычисл".

Прежде всего, заметим, что приемы справочника "вычисл" созданы для многих базисных операторов ЛОСа. Хотя они пока практически не используются, но могут понадобиться для теорем приемов, работающих со структурами данных. Примерами таких операторов и операторных выражений служат "конкатенация", "вычеркивание", "символ", "операнд", "антецедент", "таблзначение", "корень", и т.п.

Особо рассмотрим несколько арифметических шаблонов:

1. $a + b$; $a - b$ - для случаев десятичных и символьных чисел используются различные операторы.

2. $ax^2 + bx = c$ - для десятичных чисел a, b, c проверяется, что дискриминант является полным квадратом, и если это так, то переменной x присваивается один из корней.

3. ab - для случаев десятичных чисел и чисел в формате "длинное целое со знаком" используются различные операторы.

4. $a = bc + d$ - деление a на b с остатком. Отдельно рассматриваются случаи десятичных чисел, чисел в формате "целое со знаком" и чисел в формате "длинное целое со знаком". Кроме того, рассматривается случай, когда a, b, d изначально определены. Тогда после деления с остатком a на b проверяется, что остаток равен d, и выдается неполное частное c.

5. $ab = c$ - проверка делимости c на a и присвоение переменной b частного. Числа - десятичные. Кроме того, рассматривается случай, когда задано лишь целое c, а переменные a, b - не определены. Тогда они перечисляют все возможности разложения c на множители. Рассматриваются форматы десятичных чисел и чисел "длинное целое со знаком". В последнем случае при компиляции теоремы проверяется, что делители должны быть натуральными, и перечисляются лишь натуральные значения.

6. $abc = d$ - заданы десятичные c, d. Проверяется, что d делится на c, и далее перечисляются все пары десятичных делителей a, b числа d/c.

7. a/b - для чисел в формате "целое со знаком" либо "длинное целое со знаком" определяется неполное частное.

8. a^b - возведение десятичного числа в целую неотрицательную степень.

9. $a^b = c$ - если из целого десятичного числа c извлекается корень натуральной степени b, то a перечисляет результаты извлечения корня, иначе - оператор ложен. Рассматривается также случай, когда a, c определены, и оператор ищет подходящее натуральное b.

10. $a^b \cdot c = d$ - Определены десятичные a, d. Оператор ищет наибольшее натуральное b, такое что d делится на a^b. Переменной c присваивается частное от деления. Рассматриваются также ситуации, когда определены a, c, d, либо b, c, d, либо b, d. В последнем случае перечисляются все делители d, из которых извлекается корень натуральной степени b.

10.3.3 Типы вычислительных пакетов ГЕНОЛОГа

Приведем общие сведения о вычислительных пакетах ГЕНОЛОГа, необходимые для понимания ближайших разделов. Перечень таких вычислительных пакетов, созданных при обучении решателя, будет приведен в последнем разделе данной главы.

Формат вычислительного пакета определяется справочником "программа". Теорема приема этого справочника имеет вид "программа$(A, B_1, \ldots, B_n)$", где A - логический символ, являющийся названием пакета; $B_1, \ldots, B_n$ - указатели формата пакета. Эти указатели бывают следующих типов:

1. "уровень(k)" - k есть число уровней срабатывания приемов пакета. Нумерация уровней начинается с 1.
2. "перечисление" - оператор, реализуемый пакетом, является перечисляющим.
3. "вход$(x_i\ t_i)$" - x_i есть одна из входных переменных пакета, причем тип ее значений определяетя термом t_i. Допускаются ссылки на эту переменную из теорем приемов пакета. Номера входных переменных образуют начальный отрезок натурального ряда.
4. "выход$(x_i\ t_i)$" - x_i есть одна из выходных переменных пакета, причем тип ее значений определяетя термом t_i. Допускаются ссылки на эту переменную из теорем приемов пакета. Номера выходных переменных образуют отрезок натурального ряда, следующий за отрезком номеров входных переменных.
5. "параметр$(x_i\ t_i)$" - значением переменной x_i служит вспомогательный объект, вводимый пакетом в процессе вычислений. Его тип задается термом t_i. Вспомогательная переменная может инициироваться и изменяться теоремами приемов пакета. Номера вспомогательных переменных идут непосредственно после номеров входных и выходных переменных и образуют некоторый отрезок. Следующие за этим отрезком переменные ЛОСа для ссылок из теорем приемов пакета недоступны. Разумеется, каждая такая теорема может вводить любые дополнительные вспомогательные переменные, но их значения будут теряться по выходе из приема.

Из вышесказанного ясно, что входные, выходные и вспомогательные переменные пакета жестко фиксированы. Создавая теорему приема пакета, следут помнить об этом, чтобы не смешивать ее локальные вспомогательные переменные с указанными переменными. Заметим, что выходные переменные пакетного оператора, как и всякого оператора ЛОСа, в процессе вычислений не могут использоваться. Они лишь сохраняют ссылки на переменные внешнего оператора, которым должны быть переданы найденные значения. Вместе с тем, часто бывает удобно получать результирующее значение выходной переменной в процессе последовательных преобразований некоторого ее начального значения. Поэтому компилятор дублирует выходные переменные, инициируя нулями те их двойники, которые будут изменяться при вычислениях. По завершении работы полученные значения будут передаваться исходным выходным переменным с помощью операторов "результат". Все это приводит к тому, что номера выходных и вспомогательных переменных пакета при компиляции сдвигаются, и в программе ЛОСа они обычно не такие, как в теореме приема.

6. "цикл" - оператор использует цикл срабатываний приемов (продукций пакета). Если продукция не выдает ответ, то после ее срабатывания происходит откат к началу цикла с заменой текущего уровня на 1.

7. "выражение" - Пакет реализует не оператор, а операторное выражение. Его значение определяется единственной выходной переменной пакета.

8. "буфер" - оператор использует буфер результатов, откуда извлекает готовый результат, если он там уже имеется. Для хранения таких результатов используется комментарий (вычисл A) к посылкам исходной задачи. Набор A состоит из буферов результатов обращений к вычислительным пакетам. Каждый такой буфер - пара (B, C), где B - заголовок пакета; C - набор пар (D, E), где D - первый элемент входного набора обращения к пакету, E - набор аналогичных пар для вторых элементов входного набора, и т.д. вплоть до пар (P, Q), где P - последний элемент, Q - результат обращения.

9. "неопред" - возможна выдача выходного значения "неопред".

10. "условие(A)" - утверждение A накладывает дополнительные ограничения на значения входных переменных пакета. Оно передается компилятору ГЕНОЛОГа через информационный элемент программного блока (условие B); B - набор конъюнктивных членов утверждения A.

11. "продолжение" - в пакете с циклом после реализации очередного приема не предпринимается откат к началу сканирования, а продолжается текущий цикл. Таким образом, все приемы пакета будут рассмотрены ровно по одному разу.

12. "пересмотр" - в пакете с циклом, имеющем указатель формата "продолжение", введена специальная переменная - индикатор пересмотра. Если прием пакета устанавливает ее на единицу, то по исчерпании всех приемов текущего уровня организуется повторное сканирование.

13. "истина" - по исчерпании средств выполняется выход по значению "истина".

14. "внешзнак(x_i)" - текущий уровень сканирования задается извне, через входную переменную x_i. Это означает, что сама программа сканирования вынесена наружу, а пакет лишь обрабатывает один шаг сканирования.

Рассмотрим несколько простейших типов вычислительных пакетов. Указатель "уровень(...)", подразумеваемый по умолчанию, опускаем. Если имеется лишь один уровень срабатывания, то этот указатель вообще отсутствует.

1. Вычислительный пакет P проверяет истинность некоторого утверждения о входных данных. Тогда его формат задается термом вида "программа(P вход(x_1 t_1) ... вход(x_n t_n))".

2. Вычислительный пакет реализует программное выражение, вычисляемое непосредственно, за одно срабатывание приема. Тогда его формат задается термом вида "программа(P вход(x_1 t_1) ... вход(x_n t_n) выход(x_{n+1} t_{n+1}) выражение)".

3. Вычислительный пакет реализует программное выражение, вычисляемое путеме циклической обработки данных. После каждого их изменения происходит откат к началу цикла и повторный поиск применимого приема. Тогда его формат задается термом вида "программа(P вход(x_1 t_1) ... вход(x_n t_n) выход(x_{n+1} t_{n+1}) цикл выражение)".

4. Вычислительный пакет просматривает множество различных оценок ситуации (например, в шахматах)и выдает наибольшую либо наименьшую. Его формат задается термом вида "программа(P вход(x_1 t_1) ... вход(x_n t_n) выход(x_{n+1} десчисло) цикл продолжение буфер)".

5. Вычислительный пакет реализует оператор, используя циклическую обработку данных. Например, методом Гаусса решается система линейных уравнений. Тогда формат задается термом вида "программа(P вход(x_1 t_1) ... вход(x_n t_n) выход(x_{n+1} t_{n+1}) ... выход(x_{n+m} t_{n+m}) параметр(x_{n+m+1} t_{n+m+1}) ... параметр(x_{n+m+k} t_{n+m+k}) цикл)". Роль вспомогательного параметр здесь играет, например, число уже обработанных строк матрицы при приведении ее к диагональному виду.

Если пакет реализует циклическую обработку данных, то его вспомогательные переменные инициируются до цикла. Это выполняется специальными приемами, имеющими уровень срабатывания 0. Все остальные приемы пакеты имеют уровни срабатывания, большие 0. Чтобы компилятор правильно разместил фрагменты программ ЛОСа, соответствующие приемам пакета, компиляция должна выполняться в следующем порядке. Сначала компилируются инициирующие приемы пакета. Они имеют такой же заголовок "продукция(P)", как и прочие приемы. Затем компилируется переключатель уровня. Его теоремой служит терм "программа(...)", задающий формат оператора, а заголовком - символ "уровень". И лишь затем компилируются все остальные приемы пакета - уже в произвольном порядке. Если для скомпилированного пакета нужно поменять инициирующие приемы или переключатель уровня, то нужно сначала удалить все приемы этого пакета, используя клавишу F7, а затем скомпилировать их повторно в указанном порядке.

Более подробно вычислительные пакеты ГЕНОЛОГа будут рассмотрены ниже.

10.4 Задачи на программирование

Задача на программирование формализуется в виде задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Ее список условий определяет необходимые связи между входными и выходными данными. Выходные данные представлены неизвестными задачи, входные - известными параметрами $a_1, \ldots, a_m$, перечисленными в цели (известно $a_1 \ldots a_m$). При $m = 0$ последняя цель сводится к символу "известно". Все указания на точность вычислений и предпочтительные способы вычислений, если таковые есть, представляют собой служебные термы, включаемые в список условий задачи. Такие указания называются целевыми условиями задачи. Для распознавания целевых условий служит справочник "смвыч", выдающий единицу на их заголовках. Фактически пока используется единственное целевое условие - "точность(x, a)", определяющее уровень a точности вычислений при определении значения неизвестной x.

Для ввода задачи на программирование используется стандартный интерфейс создания задач на описание. В оглавлении целевых установок следует выбирать пункт

"Найти значения неизвестных" - "Вычислить значения неизвестных при заданных значениях параметров".

10.4.1 Вспомогательные процедуры задач на программирование, реализованные на ЛОСе

Решение задачи на вычисление состоит из двух этапов. На первом этапе определяется схема вычислений. Условия преобразуются таким образом, чтобы можно было связать неизвестные с известными параметрами через промежуточные объекты, для которых отслеживалась бы принципиальная их алгоритмическая выразимость через ранее найденные объекты. Всякий раз, когда усматривается возможность связать группу переменных X (неизвестных либо не выделенных целью "(известно ...)" параматров условий и посылок) с ранее определенными объектами через группу утверждений U, предоставляющих способ их алгоритмического нахождения, выполняются следующие действия:

1. Те переменные списка X, которые были неизвестными, исключаются из списка неизвестных задачи.
2. Все переменных списка X регистрируются в цели (известно ...).
3. Все условия задачи на описание, которые после указанных действий содержат только параметры, перечисленные в цели (известно ...), переносятся в список посылок.
4. Вводится комментарий (выразимо U) к текущей задаче.

Если перед данными преобразованиями задача не имела комментария (Неизвестная ...), то вводится комментарий (Неизвестная Y P A). Здесь Y - набор исходных неизвестных задачи, P - исходный список посылок, A - набор параметров, перечисленных в исходной цели (известно ...).

В тот момент, когда исключается последняя неизвестная задачи, дополнительно выполняются следующие преобразования:

1. Вводится цель "программа"; восстанавливаются исходные список неизвестных и цель (известно ...).
2. Все содержащие исходные неизвестные утверждения списков U комментариев (выразимо U), а также целевые условия задачи составляют новый список условий, а все прочие утверждения списков U - новый список посылок.
3. Веса условий и посылок заменяются на 0; комментарии к условиям и посылкам отбрасываются.

Перечисленные выше действия выполняются реализованной на ЛОСе процедурой "выразимо(x_1 x_2 x_3)". Здесь x1 - задача на описание, имеющая цель "вычисление"; x2 - набор переменных X, не входящих в цель (известно ...); x3 - набор комментариев (выводимо Q), перечисляющих в списках Q набор U условий и посылок задачи x1.

Для усмотрения алгоритмической выразимости новых переменных через старые используются приемы ГЕНОЛОГа, имеющие заголовок "выразимо". В антецеденте теоремы приема расположена конъюнкция утверждений U, консеквентом служит символ "$\emptyset$". Список переменных X определяется указателем "выразимо(X)". Обращение к процедуре "выразимо" вставляется в программу приема компилятором.

После того, как общий план вычислений выработан, задача преобразуется: вводится цель "программа"; содержащие неизвестные утверждения плана вычислений образуют список условий, а остальные утверждения - список посылок. На этом этапе будет выполняться постепенное преобразование плана вычислений в логическую программу вычислений, понятную компилятору ГЕНОЛОГа. Возможен ввод новых неизвестных и новых вспомогательных параметров.

Обрыв решения задачи происходит по достижении ее максимального уровня. Конъюнкция условий рассматривается как ответ, который должен быть преобразован компилятором ГЕНОЛОГа в программу. Точку выдачи ответа можно найти в оглавлении программ: "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на описание" - "Выдача ответа" - "Компиляция ответа задачи на вычисление".

Компиляция программы и регистрация ее в блоке программ выполняются процедурой "вычисление(x1 x2)". Здесь x1 - задача на описание, условия которой образуют входные данные компиляции. Выходной переменной x2 присваивается логический символ s, к которому относится синтезированная программа. Фактически она становится программой справочника "вычисление". При обращении к заданному справочнику долдна быть определена единственная входная переменная - набор значений входных параметров в том же порядке, в котором они перечислены в цели (известно ...). Результатом обращения становится набор значений неизвестных в том же порядке, в котором они перечислены в цели (неизвестные ...).

Рассмотрим работу процедуры "вычисление" подробнее. Выйти на ее программу можно либо через главное меню, либо через пункт "Приемы решателя" "Вычисления" - "Процедура ВЫЧИСЛЕНИЕ" оглавления программ.

Прежде всего, переменной x3 присваивается список условий задачи x1, из которого удалены все утверждения с заголовками "число", "функция", "целое", "рациональное", "исхточки", "точность", "особыезначения". Затем - переход через "ветвь 2".

Здесь предпринимается расчистка списка x3: удаляются все такие утверждения, что каждый их параметр x определен имеющимся в x3 равенством вида $x = c$; c - константное выражнение. Далее - переход через "ветвь 1".

Оператор "повторение" служит началом цикла пополнения списка x3 посылками вида "$f = \lambda_x(\ldots)$", где f - переменная, для которой хотя бы в одном из утверждений списка x3 имеется подвыражение вида $f(t)$. После добавления очередной такой посылки происходит откат к оператору "повторение", так как необходимо учесть возможность подключения новых переменных f. По завершении цикла - переход через "иначе 1".

Создается набор x4 установок на идентификацию. Каждая установка имеет вид (программа v), где v - вхождение левого края утверждения списка x3. Далее, вводится бланк x5 программного блока. В его накопителе программы имеется единственный фрагмент, состоящий из единственного оператора "обращение(вычисление)". В список информационных элементов занесена пара (внешнеизв Y), где Y - список всех неизвестных задачи, не являющихся вспомогательынми параметрами. Эти неизвестные соответствуют выходным объектам, определяемым программой.

Находится цель (известно $a_1 \dots a_m$) задачи x1. Если $m > 0$, то первой неиспользуемой переменной программного блока становится "x2", так как значением входной переменной "x1" будет набор значений параметров $a_1, \dots, a_m$. Для каждого параметра a_i в списке посылок определяется тип t_i его значения, и в соответствии с этим типом создается информационный элемент программного блока (транслвыражение a_i t_i r_i), где r_i - программное выражение для i-го элемента набора "x1". Далее - переход через "ветвь 1".

Определяется номер x6 первой не определенной переменной при обращении к синтезируемой программе, и добавляется оператор "метка(икс(x6))". После контрольной точки "прием(8)" - обращение к процедуре "идентификатор", создающей идентифицирующую часть программы. Фактически, в этой части уже реализованы все вычисления, определенные утверждениями списка x3. Находится информационный элемент (внешнеизв Y); $Y = (y_1, \dots, y_k)$. По информационным элементам (транслвыражения y_i t_i r_i)создается набор x10 программных выражений $r_1, \dots, r_k$, задающих результирующие объекты. Затем - переход через "иначе 2".

Здесь вводится завершающий оператор "ответ(набор($r_1, \dots, r_k$))". Выполняется завершающее редактирование созданной программы, и откат к внешнему фрагменту программы, из которого далее переход через "ветвь 1".

В задаче x1 находится комментарий (просмотрзадачи K), где K - координата данной задачи в задачнике, т.е. пара (логический символ - номер узла статьи этого символа, в котором хранится задача). Предстоит зарегистрировать созданную программу в блоке программ ЛОСа и связать эту программу с задачей x1. Для ссылки на программу из задачи служит логический терминал, достижимый из узла задачи по метке "вычисление". В терминале хранится набор, первый элемент которого - логический символ, на котором происходит обращение к справочнику "вычисление". Прочие элементы набора - термы вида "диапазон(y, t_1, t_2, h)"; y - переменная для вычисляемой в конечном числе точек функции; t_1, t_2 - выражения для левой и правой границ диапазона изменения аргумента; h - выражение для шага изменения аргумента.

После контрольной точки "прием(3)" предпринимается заполнение накопителя x9 термами вида "диапазон(...)". Для этого используются условия задачи x1, имеющие вид "$y = \lambda_x(F(x), \exists_i(i \in \{m, \dots, n\} \ \& \ x = t(i)))$", где $t(i)$ линейно относительно i. Затем - переход через оператор "ветвь 1", расположенный перед контрольной точкой "прием(3)".

Активируется второй информационный блок (блок задачника), и переменной x10 присваивается ссылка на узел задачи x1. Вводится накопитель x11 того логического символа, в программу которого будет вставлена откомпилированная ветвь. Если узел x10 уже имел логический терминал "вычисление", то переменной x11 переприсваивается старый символ. Проверяется совпадение x9 с оставшейся частью терминала; если имеется различие, то терминал корректируется по x9. Если терминала не было, то выбирается такой символ x11, в программе которого нет оператора "обращение(вычисление)". В качестве стартовой точки берется случайный символ x15 на интервале от 1 до 3001. Если не удалось найти подходящий символ от x15 до 3001, то поиск повторяется начиная с 1. После доопределения x11 - переход через оператор "ветвь 1".

Оператор "цепьобращений" предпринимает попытку найти в главном стволе программы символа x11 оператор "обращение(вычисление)". Главный ствол образован фрагментами, начинающимися с операторов проверки типа обращения - "решить", "программа", "обращение(...)". Если искомый оператор найден в некотором фрагменте, то переменным x12, x13 присваиваются ссылки на его непосредственный надфрагмент и на сам этот фрагмент. В случае корневого фрагмента переменной x12 присваивается символ x11. Если оператор не найден, то x12, x13 становятся равны ссылкам на предпоследний и последний фрагменты главного ствола программы символа x11. Переменная x14 - индикатор обнаружения оператора. При его наличии она становится равна 1, иначе - 0.

Переменной x15 присваивается считанный в зону задач фрагмент по ссылке x13, переменной x16 - первый оператор данного фрагмента. После контрольной точки "прием(5)" начинается раздельное рассмотрение случаев для значения x14. Если это значение равно 0, т.е. старой версии программы справочника "вычисление" для символа x11 не было, то после первого оператора фрагмента x13 вставляется переход "иначе" к откомпилированной ветви, и изменение регистрируется в программе символа x11 с помощью процедуры "записьпрограммы(...)". Если же x14 равно 1, то старая ветвь программы справочника "вычисление" заменяется на новую. Предварительно сохраняется ссылка по "иначе" на продолжение главного ствола, если она имелась. По завершении указанных действий - переход через оператор "ветвь 1", расположенный после оператора "цепьобращений".

Если узел задачи x1 еще не имел терминала "вычисление", то такой терминал создается. Затем выходной переменной x2 присваивается значение x11, и работа программы завершается.

10.4.2 Построение графика функции

Задача на построение графика вводится следующим образом. После создания пустого бланка задачи следует нажать "ц" для входа в оглавление целевых установок. Здесь выбирается пункт "Найти значения неизвестных" - "Вычислить значения неизвестных при заданных значениях параметров". После появления слова "Вычислить:" вводится переменная y, обозначающая функцию, график которой строится. Если выражение для функции имело параметры, то эти параметры перечисляются после слов "при заданных". При отсутствии параметров сразу нажимается "Enter". Допускается одновременное построение нескольких графиков.

Далее еще раз нажимается "Enter", и формульным редактором вводится утверждение "$y = \lambda_x(F(x), x \in [P, Q])$". Здесь P, Q - границы промежутка, на котором строится график, $F(x)$ - выражение для значения функции в точке x. После этого можно запускать решение задачи. Если параметров не было, то по окончании решения сразу будет прорисован график. Иначе - выход в интерфейс ввода значений параметров. В верхней полосе будут прорисованы эти параметры, в нижней - переменная y. Чтобы ввести значения, нажимается клавиша "в", и далее формульным редактором, через запятую, набираются равенства, указывающие значения параметров. По окончании ввода значений - прорисовка графика.

При запуске решения задачи сработает прием "выразимо", имеющий теорему $\forall_{ax}(x = a \to \emptyset)$. Прием находится в пункте "Логические приемы и структуры данных" - "Общие приемы" - "Равенство" - "Усмотрение выразимости переменной в задаче на вычисление". Антецедент идентифицируется с условием $y = \ldots$. При этом x идентифицируется с неизвестной y, а a - с правой частью, не содержащей неизвестных. Указатель "выразимо(x)" определяет обращение к процедуре "выразимо(...)", регистрирующей факт выражения неизвестной y с помощью рассматриваемого равенства. Так как других неизвестных после этого не остается, задача снабжается комментарием "программа".

Далее срабатывает прием "Переход к таблице для неизвестной функции при построении ее графика". Этот прием находится в разделе "Математический анализ" - "Общий свойства числовых функций" - "Вычисления". Теорема приема имеет следующий вид:

$\forall_{abfh}(y = \lambda_x(f(x), x \in [a, b]) \leftrightarrow h = (b - a)/592 \ \& \ y = \lambda_x(f(x), \exists_i(i \in \{0, \ldots, 592\} \ \& \ x = a + hi)))$

Прием заменяет функцию, определенную на отрезке $[a, b]$, на конечный набор значений в равноудаленных 593 точках. Заметим, что для прорисовки графика по данному набору будут использованы термы "диапазон(...)" из логического терминала "вычисление" текущей задачи. Они определят промежуток изменения аргумента и шаг изменения.

Заголовок приема - "второйтерм". Он применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "программа". Переменная y - неизвестная, правая часть равенства не содержит неизвестных. Переменная f функциональная. Прием вводит новую переменную h, регистрируя ее как дополнительную неизвестную задачи. Выбор константы 592 объясняется шириной экрана в пикселях. Уровень срабатывания приема равен 4.

После срабатывания данного приема условия задачи уже готовы к обработке компилятором ГЕНОЛОГа. Поэтому, по исчерпании отведенного для решения задачи максимального уровня, она выдает ответ, и далее - обращение к процедуре "вычисление" для компиляции программы. После того, как программа откомпилирована, выдается ответ "программа". Прорисовку графика либо вход в интерфейс выбора значений параметров обеспечивает процедура "смвыч", обращение к которой реализуется интерфейсом запуска решения задачи и просмотра ответа - процедурой "списокзадач". Процедура "смвыч" и другие элементы интерфейса, обслуживающего вычисления на ГЕНОЛОГе, будут рассмотрены в конце данной главы.

В качестве примера результата компиляции рассмотрим первую задачу раздела задачника, посвященного вычислениям. В ней требуется построить график функции $y = \lambda_x(x \sin x, x \in [0, 1])$. Компилятору для создания программы передавались утверждения "$y = \lambda_x(x \sin x, \exists_b(x = ab \ \& \ b \in \{0, \ldots, 592\})); a = 1/592$". Переход к синтезированной программе ЛОСа осуществляется нажатием клавиши "ъ".

Так как параметры отсутствуют, то программа справочника "вычисление" в данном случае не имеет входных переменных. Ее первый оператор "Выч(набор число набор(5 9 3)x1)" выделяет память для хранения массива из 593 чисел в формате "с плавающей запятой". Переменной x1 присваивается ссылка на этот массив. Далее инициируются нулями значения x2 (счетчик параметра b - номера шага) и x3 (текущее значение аргумента x). Первое значение - в формате "целое со знаком", второе - в формате "с плавающей запятой".

Переменной x4 присваивается набор псевдокоманд, используемый ниже для вычисления значения $x \sin x$. Подробнее об этих псведокомандах можно прочитать в справочной информации для символа "Выч" - в пункте, посвященном оператору "Выч(программа ...)". Каждая псевдокоманда имеет вид набора$(Na_1 \dots a_k)$, где N - номер операции; $a_1, \dots a_k$ - номера входных и выходных операндов. В нашем случае первая псевдокоманда (17 1 3) вычисляет значение синуса числа из первой вход-выходной ячейки оператора "Выч(программа ...)" и пересылает его в третью. Следующая псевдокоманда (5 1 3 2) перемножает числа из первой и третьей ячеек и пересылает результат во вторую ячейку.

Переменной x5 присваивается число 592, переменной x6 - число 1. Оба числа - в формате "целое со знаком". Переменной x7 присваивается число 1/592, представленное в формате "с плавающей запятой" своей округленной десятичной записью 0.00168918918918918919.

Далее идет оператор "повторение, начинающий цикл вычислений. Переменной x8 присваивается значение 0 в формате "с плавающей запятой". Эта переменная играет роль выходной переменной оператора "Выч(программа x4 набор(x3 x8)пустоеслово)". Данный оператор реализует вычисления согласно псевдокомандам набора x4 и переприсваивает значение переменной x8. Теперь оно равно $x \sin x$.

Оператор "Выч(запись x1 x2 x8)" записывает значение x8 в x2-й элемент массива x1. Если номер шага x2 меньше числа x5, то к x2 прибавляется единица а к x3 - 1/592. Оба приращения в требуемых форматах берутся как значения программных переменных x6, x7. Если номер шага равен 592, то выдается ответ - одноэлементный набор, образованный ссылкой x1 на массив значений.

Видно, что архитектура программы достаточно близка к традиционной архитектуре программ "с циклами". Компилятор можно было бы перестроить так, чтобы он создавал аналогичным образом не программу ЛОСа, а обычную СИ-программу.

10.4.3 Вычисление интегралов

Приводимые ниже приемы ГЕНОЛОГа можно найти в разделе "Математический анализ" "Интегралы" - "Вычисление определенных интегралов" - "Вычисления".

Как и выше, для создания программы численного интегрирования выбирается пункт "Вычислить значения неизвестных при заданных значениях параметров". В простейшем случае условие задачи на описание имеет вид "$y = \int_a^b f(x)dx$", причем выражения $a, b, f(x)$ могут зависеть от варьируемых параметров. Переменная y - единственная неизвестная.

При запуске решения задачи сначала срабатывает тот же прием "выразимо", что и при построении графика. Далее срабатывает прием, находящий те точки отрезка интегрирования, в которых подынтегральная функция не определена:

$\forall_{abfpy}(y = \int_a^b f(x)dx \ \& \ p = \mathrm{set}_x(\neg(\text{одз}(f(x))) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ a \leq x \ \& \ x \leq b) \to$ $\text{особыезначения}(y, p))$

Заголовок приема - "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "программа". Переменная y - неизвестная, переменная f функциональная. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Утверждение под описателем "класс" разрешается относительно x с помощью задачи на описание, после чего сам описатель обрабатывается нормализатором "нормкласс". Для блокировки повторных срабатывания вводится специальный комментарий задачи. Уровень срабатывания равен 2.

Условие "особыезначения" используется следующим приемом, заменяющим значение подынтегральной функции в особой точке на предельное значение:

$\forall_{abcdfpy}$(особыезначения$(y, \{c; d\})$ & $p = \lim_{x \to c} f(x)$ & p – число $\to y = \int_a^b f(x)dx \leftrightarrow$
$y = \int_a^b (p$ при $x = c,$ иначе $f(x))dx)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "программа". Переменная f функциональная. Первый антецедент идентифицируется с другим условием, второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Проверяется, что результат p не содержит символа "предел". Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Перед попыткой применения приема проверяется, что подынтегральное выражение $f(x)$ не содержит условного подвыражения с условием "$x = c$". Уровень срабатывания равен 3.

После учета особых точек срабатывает прием вычисления интеграла по формуле Симпсона. Число точек разбиения отрезка в нем выбрано равным 500 - как простейший иллюстративный вариант. Теорема приема такова:

$\forall_{abfhy}(y = \int_a^b f(x)dx \leftrightarrow h = (b - a)/500$ &
$y = ((b - a)(\sum_{i=0}^{499}(f(a + hi) + 2f(a + hi + h/2)) + (f(b) - f(a))/2)/1500))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Переменная y - неизвестная, выражение $f(x)$ не содержит неизвестных. Переменная f функциональная. Прием вводит новую переменную h, регистрируемую как вспомогательный параметр задачи. Уровень срабатывания равен 4.

Заметим, что решатель может составлять программу для вычисления более сложных выражений, имеющих своими подвыражениями один либо несколько определенных интегралов. В этом случае срабатывает прием, вводящий вспомогательные неизвестные для каждого интеграла:

$\forall_{abfy}(y = \int_a^b f(x)dx)$

Прием имеет заголовок "обозначение". Правая часть равенства идентифицируется с подвыражением условия задачи на описание, имеющей цель "программа". Это подвыражение не является одной из частей корневого равенства, в другой части которого расположена неизвестная. Прием выбирает новую переменную y, регистрируемую как неизвестная и одновременно как вспомогательный параметр. Все вхождения интеграла в условия задачи заменяются на y, причем обратные замены блокируются. Вводится новое условие - равенство y данному интегралу. Уровень срабатывания равен 3.

В качестве примера рассмотрим вторую задачу раздела "Вычислительные задачи". Она имеет условие $y = \int_0^1 \exp(-ax^2)dx$. Компилятору передаются утверждения
"$y = (\sum_{n=0}^{499}(2\exp(-a(b/2 + bn)^2) + \exp(-ab^2n^2)) + ((1/\exp a) - 1)/2)/1500$",
"особыезначения$(y, \emptyset)$",
"$b = 1/500$".

В результате возникает ЛОС-программа, имеющая единственную входную программную переменную x1. Ее значением служит набор длины 1, состоящий из величины a в формате "с плавающей запятой". Первые операторы программы инициируют переменные x2 (константа 1/500), x3 (накопитель суммы), x4 (параметр a), x5 (константа 2). Все эти значения берутся в формате "с плавающей запятой". Далее идет оператор "длялюбого(...)". Для каждого символьного x6 от 0 до 499 создается накопитель x7 очередного суммируемого значения. Чтобы определить такое значение, применяется оператор "Выч(программа ...)". Список его рабочих ячеек - x4, x2, результат n перевода x6 в формат "с плавающей запятой", x5, x7.

Набор псевдокоманд данного оператора в точности воспроизводит вычисления по формуле $2\exp(-a(b/2+bn)^2)+\exp(-ab^2n^2))$. При этом вводится достаточно большое количество дополнительных рабочих ячеек - с шестой по девятнадцатую. Использование оператора "Выч(программа ...)" ускоряет вычисления по сравнению с цепочкой операторных выражений "выч" для отдельных операций, так как устраняется цикл интерпретатора ЛОСа. Нетрудно было бы ввести в компилятор некоторую оптимизацию цепочек псевдокоманд, например, вынося за рамки цикла вычисление не изменяющихся в цикле подвыражений. Этого не было сделано, так как данная версия имеет лишь иллюстративный характер. Впрочем, на рассматривавшихся примерах ответы выдавались практически мгновенно.

Обращение к оператору "Выч(программа ...)" завершает список антецедентов оператора "длялюбого(...)". Консеквент этого оператора реализует прибавление к накопителю x3 очередного слагаемого x7. Чтобы получить окончательный результат, используется еще одно обращение к оператору "Выч(программа ...)". Предварительно инициируется нулем накопитель результата x6.

10.4.4 Составление программы вычислений в задаче по элементарной физике

Решатель можно использовать для составления программ, вычисляющих изменения тех или иных параметров физических или химических процессов. Условие задачи представляет собой логическое описание "сценария" процесса. Сначала решается обычная задача на нахождение аналитической зависимости, а затем составляется программа вычислений. В третьем пункте раздела задачника "Вычислительные задачи" содержится простой пример, иллюстрирующий такую схему действий. Речь идет о броске камня из заданной точки с заданной начальной скоростью. Требуется составить программу, вычисляющую зависимость высоты камня от времени. Хотя формализация задач по элементарной физике будет рассмотрена лишь в следующем томе монографии, понимание примера не вызывает затруднений.

Задача на описание имеет следующие посылки, определяющие процесс:

1. "бросок(a, T)". Тело a на протяжении промежутка времени T движется под действием только силы тяжести.
2. "$T = [t, t + p]$". Задание концов временного промежутка T.
3. "поверхнземли(K)". K есть прямоугольная трехмерная система координат, ось z которой направлена вертикально вверх, а начало расположено вблизи поверхности Земли либо некоторой планеты, рассматриваемой в задаче. Посылка неявно указывает на то, что процессы происходят вблизи такой поверхности.
4. "коорд(Место(a, t),K) = (м, 2м, 3м)". Координаты начальной точки тела a.
5. "коорд(Скорость(a, K, t),K) = (0, 10м/сек, 5м/сек)". Координаты начальной скорости тела.

6. "масса(a) $=$ 200г". Масса тела.
7. "$0 < p$". Невырожденность временного промежутка T.

Задача имеет единственное условие:

"$y = \lambda_x$(крд(Место$(a, x), K, 3), x \in [t, t+p]$)".

Здесь неизвестная функция y определяет высоту тела a в момент x. Требуется составить программу вычисления зависимости y при заданных параметрах p, t. Как и выше, используется цель "вычисление". Фактически, это просто задача на построение графика.

Сначала срабатывают приемы элементарной физики. Решение переносится в блок анализа, где выводятся посылки "Равноускоренное(a, K, T)", "прямкоорд(K)", "крд(Ускорение$(a, K, T), K, 3) = -9.8$м/сек^2". Кроме того, в равенстве для неизвестной y предпринимается расшифровка условия принадлежности промежутку:

$y = \lambda_x$(крд(Место$(a, x), K, 3), t \leq x$ & $x \leq p + t$)".

Далее срабатывает реализованный на ЛОСе прием, предпринимающий попытку выразить значение функции y через численные параметры. Этот прием можно найти в пункте оглавления программ "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Описатель ОТОБРАЖЕНИЕ" - "Задача на исследование с целью "вычисление": попытка вычислить неизвестное выражение, определяющее значение функции".

Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цели "известно" и "вычисление". Рассматривается описатель "$\lambda_x(f(x), P(x))$", где $P(x)$ не содержит неизвестных, а $f(x)$ - содержит. Переменная x идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Проверяется, что $f(x)$ принимает численные значения. Выбирается новая переменная z, и решается задача на описание Z', условиями которой являются утверждения "$z-$число" и "$z = f(x)$". Посылками служат конъюнктивные члены утверждения $P(x)$ и все посылки текущей задачи Z, отличные от текущей посылки. Единственная неизвестная - переменная z; цель "известно" перечисляет все отличные от неизвестных переменные посылок задачи Z, а также все переменные связывающей приставки x. Если на задачу Z' получен ответ, конъюнктивный член которого имеет вид $z = t$, то в текущей посылке описатель "$\lambda_x(f(x), P(x))$" заменяется на "$\lambda_x(t, P(x))$".

В нашем примере прием преобразует равенство для y следующим образом:

$\lambda_x(-4.9((x-t)/$сек$)^2$м $+ 5(x-t)$м/сек $+ 3$м$, x -$ число & $t \leq x$ & $x \leq p + t) = y$

Дальнейшие действия - как при построении графика. В итоге возникает задача на описание, имеющая следующие условия:

$y = \lambda_x(-4.9(x-t)^2$м/сек$^2 = 5(x-t)$м/сек $+ 3$м$, \exists_c(x = bc + t$ & $c \in \{0, \ldots, 592\}))$;

$b = p/592$.

Компилятор строит программу вычислений, отбрасывая единицы измерений.

10.4.5 Численное решение диференциальных уравнений

В посылках задачи перечисляются уравнения рассматриваемой системы, указываются начальные значения и ограничения на параметры. Условия задачи имеют вид

"$z = \lambda_x(y(x), x \in [a,b])$", где y - одна из неизвестных, фигурирующих в уравнениях; z - вспомогательная переменная для ее "функционального" представления. Неизвестными задачи считаются только переменные z. Как и ранее, задача имеет цель "вычисление", а также цель "известно ...", перечисляющую параметры системы уравнений и промежутка интегрирования.

Для иллюстрации действий решателя рассмотрим шестой пример из раздела "Вычислительные задачи".

Задача имеет следующие посылки:

$y(0) = a$

$dy(x)/dx = \sqrt{y(x)} + \sqrt{x}$

$0 \leq a$

Единственное условие - $z = \lambda_x(y(x), x \in [0,b])$.

Прежде всего, срабатывает прием "выразимо", расположенный в пункте "Дифференциальные уравнения" Уравнения первого порядка" - "Вычисления" - "Усмотрение выразимости переменной в задаче на вычисление". Его теорема имеет вид:

$\forall_{abcy}(y(a) = b \ \& \ dy(x)/dx = c \rightarrow \emptyset)$

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на описание, имеющей цель "вычисление" и не имеющей цели "программа". Здесь y - переменная, не упомянутая в цели "известно". Все переменные выражений a, b указаны в этой цели, а каждая переменная выражения c - либо указана в ней, либо является одной из переменных x, y. Прием регистрирует факт выразимости переменной y. После этого срабатывает прием, регистрирующий выразимость переменной z, и задача получает цель "программа".

Применяется прием, вводящий вспомогательную функцию для правой части уравнения:

$\forall_{fgy}(dy(x)/dx = f(y(x), x) \leftrightarrow dy(x)/dx = g(x, y(x)) \ \& \ g = \lambda_{xy}(f(y,x), x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к посылке задачи на описание, имеющей цель "программа". Правая часть уравнения не имеет заголовка "значение". В ней отсутствуют подтермы вида "значение(z, x)", где z отлично от y. Переменная f функциональная. При идентификации правой части уравнения используется указатель "новаргумент(f x фикс)". Прием вводит новую переменную g. Уровень срабатывания равен 1. В нашем примере уравнение заменяется на следующие две посылки:

$d = \lambda_{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}, x - \text{число} \ \& \ y - \text{число});$

$dy(x)/dx = d(x, y(x)).$

Далее срабатывает прием, вводящий схему решения уравнения методом Рунге-Кутта. Его теорема имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\forall_{abcdfhyz}(dy(x)/dx = f(x, y(x)) \ \& \ y(a) = c \rightarrow z = \lambda_w(y(w), w \in [a,b]) \leftrightarrow \\
&h = (b-a)/592 \ \& \ z = \lambda_w(d((w-a)/h), \exists_i(i \in \{0, \dots, 592\} \ \& \ w = a + hi)) \ \& \\
&d(0) = c \ \& \ \forall_{ikmns}(i \in \{0, \dots, 591\} \rightarrow f(a + ih, d(i))h = k \ \& \\
&f(a + ih + h/2, d(i) + k/2)h = m \ \& \ f(a + ih + h/2, d(i) + m/2)h = n \ \& \\
&f(a + ih + h, d(i) + n)h = s \ \& \ d(i+1) = d(i) + (k + 2m + 2n + s)/6))
\end{aligned}$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "программа". Антецеденты идентифицируются с посылками. Переменная z идентифицируется с неизвестной, переменная f - с переменной. Прием вводит новые переменные d, h, регистрируемые как вспомогательные параметры. При этом h становится дополнительной неизвестной. Уровень срабатывания равен 2. После применения данного приема наша задача приобретает следующие условия:

$g(0) = a;$

$z = \lambda_c(g(c/f), \exists_h(c = fh \ \& \ h \in \{0, \ldots, 592\}));$

$f = b/592;$

$\forall_{hijkl}(h \in \{0, \ldots, 591\} \rightarrow f \cdot d(fh + f, g(h) + k) = l \ \&$
$f \cdot d(f/2 + fh, g(h) + i/2) = j \ \& \ f \cdot d(f/2 + fh, g(h) + j/2) = k \ \&$
$f \cdot d(fh, g(h)) = i \ \& \ g(h + 1) = (i + l + 2j + 2k)/6 + g(h)).$

Далее работает компилятор ГЕНОЛОГа. Приведем краткое описание полученной программы. Прежде всего, вводится накопитель результата x2 - массив чисел в формате "с плавающей запятой", имеющий длину 593. Инициируются различные значения, которые будут изменяться в цикле вычислений: x3 - текущее значение $g(h)$, x4 - счетчик числа шагов h, x6 - увеличенное на 1 максимальное значение этого счетчика, x7 - указатель разряда накопителя x2 для занесения текущего значения, x8 - величина f, x9 - текущее значение $f + fh$, x10 - текущее значение $f/2 + fh$, x11 - текущее значение fh. Вводятся также используемые в вычислениях константы x12, x15, x16, x18, x19. Инициируются наборы псевдокоманд для вычисления встречающихся в цикле арифметических выражений: x13 - программа для вычисления $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, x14 - программа для вычисления $A/C + B$, x17 - программа для вычисления $(A + B + CD + EF)/G + H$. В первую ячейку массива x2 заносится значение a. После оператора "повторение" начинается шаг цикла. Сначала сравниваются значения x4 и x6. Если x4 оказалось равно x6, то выдается результат - одноэлементный набор, содержащий ссылку x2 на массив значений искомой функции. Иначе - x4 и x7 увеличиваются на единицу. Затем, с помощью программ x13, x14, последовательно вычисляются значения i, j, k, l. Наконец, с помощью программы x17 определяется значение $(i + l + 2j + 2k)/6 + g(h)$, которое регистрируется в массиве x2. Корректируются значения x3, x9, x10, x11, и откат к оператору "повторение".

При решении систем дифференциальных уравнений используются другие приемы. Проиллюстрируем их работу на восьмом примере из раздела "Вычислительные задачи". Задача имеет следующие посылки:

$y(c) = a$

$z(c) = b$

$dy(x)/dx = \sin(xz(x)) + 2z(x) + y(x)$

$dz(x)/dx = \cos(xy(x)) + 2y(x) - z(x)$

Условия задачи определяют неизвестные функции u, v:

$u = \lambda_x(y(x), x \in [c, d])$

$v = \lambda_x(z(x), x \in [c, d])$

Имеется цель (известно a b c d)

Прежде всего, срабатывает прием, усматривающий выразимость неизвестных y, z из системы дифференциальных уравнений. Его можно найти в пункте "Дифференциальные уравнения" - "Системы дифференциальных уравнений" - "Вычисления" - "Усмотрение выразимости переменных в задаче на вычисление". Теорема приема имеет следующий вид:

$$\forall_{abcny}(\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to y(i)(a) = b(i))\ \&\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to dy(i)(x)/dx = c(i)) \to \emptyset)$$

Заголовок приема - "выразимо". Указатель "контрольвывода инициирует попытку применения при усмотрении подвыражения "$dz(x)/dx$" в посылке задачи на описание, имеющей цель "вычисление" и не имеющей цели "программа". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию посылки вида "$z(a) = B$". Другой указатель "контекст" определяет набор переменных y, как содержащую z компоненту связности по переменным w, для которых в посылках имеется уравнение вида $dw(x)/dx = C$. При этом переменной n присваивается длина такого набора. Антецеденты выделены указателем "развертка" и идентифицируются с посылками. Переменные b, c, y функциональные. Выражения a, b не содержат неизвестных. Параметры выражения c включаются в список известных параметров (т.е. перечисленных в цели "известно"), пополненный переменными x, y. Ни одна из переменных списка y не является известным параметром. Прием регистрирует выразимость переменных y. Уровень срабатывания равен 0.

После применения указанного приема срабатывает рассмотренный ранее прием, усматривающий выразимость неизвестных u, v. При этом задача получает цель "программа".

Далее срабатывает прием, вводящий вспомогательные функции для правых частей уравнений. Его теорема имеет вид:

$$\forall_{fgny}(\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to dy(i)(x)/dx = f(i)(\text{суффикс}(\lambda_j(y(j)(x), j \in \{1,\ldots,n\}), x))) \leftrightarrow$$
$$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to dy(i)(x)/dx = g(i)(\text{префикс}(x, \lambda_j(y(j)(x), j \in \{1,\ldots,n\}))))\ \&$$
$$g(i) = \lambda_{xy}(f(i)(\text{суффикс}(y,x)), x - \text{число}\ \&\ \forall_j(j \in \{1,\ldots,n\} \to y(j) - \text{число}))))$$

Прием имеет заголовок "заменатермов(второйтерм)". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подвыражения "$dz(x)/dx$" в посылке задачи на описание, имеющей цель "программа". Посылка имеет вид равенства данного подвыражения некоторому терму, не имеющему заголовка "значение". Указатель "контекст" определяет набор переменных y, как содержащую z компоненту связности по переменным w, для которых в посылках имеется уравнение вида $dw(x)/dx = C$. При этом переменной n присваивается длина набора y. Все кванторы общности выделены указателем "развертка" и идентифицируются либо выписываются как конъюнкции. Описатели "отображение" тоже выделены указателем "развертка" и рассматриваются как конечные наборы. Исключение составляет описатель "$\lambda_{xy}(\ldots)$". При идентификации набора функций f используется указатель "новаргумент(f x фикс)". Прием выбирает набор g новых переменных, имеющий длину n. Вводится комментарий (наборпеременных функция y), перечисляющий переменные для введенных функций. Уровень срабатывания равен 1.

После срабатывания приема имеем следующий список посылок:

$$dz(x)/dx = g(x, y(x), z(x))$$

$$dy(x)/dx = f(x, y(x), z(x))$$

$$g = \lambda_{ehi}(\cos(eh) + 2h - i, e - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число})$$

$f = \lambda_{ehi}(\sin(eh) + h + 2i, e - \text{число } \& \ h - \text{число } \& \ i - \text{число})$

$z(x) - \text{число}$

$y(x) - \text{число}$

$y(c) = a$

$z(c) = b$

Далее срабатывает прием, выписывающий схему интегрирования данной системы методом Эйлера. Его теорема имеет следующий вид:

$\forall_{abcdfhyz}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow y(i)(a) = c(i))$ &
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow dy(i)(x)/dx = f(i)(\text{префикс}(x, \lambda_j(y(j)(x), j \in \{1, \ldots, n\})))) \rightarrow$
$(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow z(i) = \lambda_w(y(i)(w), w \in [a, b])) \leftrightarrow$
$h = (b - a)/592$ &
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow z(i) = \lambda_w(d(i)((w - a)/h), \exists_j(j \in \{0, \ldots, 592\} \ \& \ w = a + hj)))$ &
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow d(i)(0) = c(i)$ &
$\forall_j(j \in \{0, \ldots, 591\} \rightarrow d(i)(j + 1) =$
$d(i)(j) + hf(i)(\text{префикс}(a + jh, \lambda_k(d(k)(j), k \in \{1, \ldots, n\})))))))$

Заголовок приема - "заменаусловия(второйтерм)". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении условия "$g = \lambda_u(F(u), u \in [a, b])$" задачи на описание, имеющей цель "программа". Переменная g - неизвестная; выражения a, b не содержат неизвестных. Указатель "контекст"/ определяет дополнительную идентификацию комментария (наборпеременных функция y), введенного предыдущим приемом. Одновременно n идентифицируется с длиной набора y. Другой указатель "контекст" определяет идентификацию посылки "$dF(x)/dx = G$". Антецеденты идентифицируются с группами посылок. Все кванторы общности выделены указателем "развертка" и рассматриваются как конъюнкции. Описатели "$\lambda_j(\ldots)$" и "$\lambda_k(\ldots)$" тоже выделены указателем "развертка" и рассматриваются как конечные наборы. Переменная c функциональная. Приемы выбирает новую переменную h, добавляемую к списку неизвестных задачи, а также набор d овых переменных, имеющий длину n. Все новые переменные регистрируются как вспомогательные параметры. Уровень срабатывания равен 2.

После срабатывания данного приема и стандартизирующих преобразований возникает следующий список условий, передаваемый компилятору:

$l(0) = b$

$k(0) = a$

$v = \lambda_m(l((m - c)/j), \exists_n(m = jn + c \ \& \ n \in \{0, \ldots, 592\}))$

$u = \lambda_m(k((m - c)/j), \exists_n(m = jn + c \ \& \ n \in \{0, \ldots, 592\}))$

$j = (d - c)/592$

$\forall_m(m \in \{0, \ldots, 591\} \rightarrow l(m + 1) = jg(jm + c, k(m), l(m)) + l(m))$

$\forall_m(m \in \{0, \ldots, 591\} \rightarrow k(m + 1) = jf(jm + c, k(m), l(m)) + k(m))$

Результат компиляции выглядит аналогично программе предыдущего примера: после инициализации вспомогательных переменных идет цикл вычислений с шагом h.

10.4.6 Численное решение обыкновенных уравнений

Условия задачи имеют вид "$y = \mathrm{set}_x(F(x) = G(x)\ \&\ x \in [a,b])$", "точность$(y,p)$". Переменная y играет роль неизвестной. Константа p определяет порог уточнения корня. При этом округления ответа не происходит - число знаков определяется форматом машинных данных "с плавающей запятой". Выбрана простейшая схема действий: промежуток разбивается на 400 равноотстоящих точек; находятся пары соседних точек, в которых функция $F(x) - G(x)$ имеет значения противоположных знаков, и далее корни уточняются методом Ньютона. В качестве начальных точек берутся середины соответствующих промежутков.

Разумеется, такая схема не гарантирует нахождения всех корней, и при необходимости ее можно развивать. Например, дополнять начальные точки циклов уточнения корня серединами тех промежутков, в концах которых значения функции достаточно малы по модулю, и т.п. Для нахождения корней многочленов имеется альтернативная возможность - использование вычислительного пакета, гарантирующего получение всех корней. Этот пакет будет рассмотрен в третьей части данной главы. Заметим, что там речь пойдет не о задаче на программирование, а о применении уже имеющейся программы пакета к конкретному многочлену.

Аналогичным образом формулируются задачи на составление программы для решения системы уравнений. Они имеют условие вида "$y = \mathrm{set}_{x_1,\ldots,x_n}(F_1(x_1,\ldots,x_n) = G_1(x_1,\ldots,x_n)\ \&\ \ldots F_n(x_1,\ldots,x_n) = G_n(x_1,\ldots,x_n)\ \&\ x_1 \in [a_1,b_1]\ \&\ \ldots x_n \in [a_n,b_n])$". Пока рассмотрен лишь случай, в котором удается выразить аналитически все неизвестные через одну из них. После этого реализуется описанная выше схема разбиения промежутка. Заметим, что аналитическое исключение неизвестных позволяет почти-гарантированно найти все корни в заданном параллелепипеде. При этом громоздкий вид получаемых выражений не играет существенной роли.

Дополнительно реализована схема уточнения по методу Ньютона заданного начального значения. В этом случае задача ставится по-другому: в посылках перечисляются уравнения $F_i(x_1,\ldots,x_n) = G_i(x_1,\ldots,x_n)$, а условия суть утверждения "$y = (x_1,\ldots,x_n)$", "точность(y,p)", "уточнение$(y,(a_1,\ldots,a_n))$". При решении задачи составляется программа уточнения начального значения $(a_1,\ldots,a_n)$.

Приемы, реализующие указанные действия, рассмотрим на примерах. Начнем с девятого примера раздела "Вычислительные задачи". Условия суть утверждения "$y = \mathrm{set}_x(x^2 - \cos x = 0\ \&\ x \in [-5,5]$", "точность$(y, 0.00001)$".

Так как неизвестная явно задана через выражение без неизвестных, то сразу срабатывает прием "выразимо", вводящий цель "программа". Затем срабатывает прием, вводящий вспомогательное обозначение для функции. Его можно найти в пункте "Математический анализ" - "Общий свойства числовых функций" - "Вычисления" - "Отыскание корней функции на промежутке" - "Ввод вспомогательного обозначения для функции". Теорема приема имеет следующий вид:

$$\forall_{Pbcfy}(y = \mathrm{set}_x(f(x) = g(x)\ \&\ P(x)\ \&\ x \in [b,c]) \leftrightarrow$$
$$y = \mathrm{set}_x(F(x) = 0\ \&\ P(x)\ \&\ x \in [b,c]))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Переменная y - неизвестная. Переменные f, P функциональные, причем неверно, что одно из выражений $f(x), g(x)$ имеет заголовок "значение", а другое - нулевое. Прием выбирает новую переменную F и вводит дополнительную посылку "$\lambda_x(f(x)-g(x), x -$ число$) = F$". Переменная F регистрируется как вспомогательный параметр. Уровень срабатывания равен 1.

После срабатывания данного приема наша задача получает посылку "$\lambda_x(x^2-\cos x, x-$ число$) = a$" а условие ее приобретает вид "$y = \mathrm{set}_x(a(x) = 0$ & $x \in [-5,5]$ & $x -$ число$)$".

Далее срабатывает прием, разбивающий промежуток на малые интервалы и определяющий множество середин тех интервалов, для которых произведение значений функции в концах неположительно. Его теорема имеет следующий вид:

$\forall_{Abchm}(y = \mathrm{set}_x(F(x) = 0$ & $x \in [b,c]$ & $P(x)) \to h = (c-b)/400$ &
$m = \mathrm{set}_x(\exists_i(i \in \{0,\dots,399\}$ & $F(b+hi)F(b+hi+h) \leq 0$ & $x = b+hi+h/2$ &
$P(b+hi+h/2)))$ & исхточки$(y,m))$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "вычисление", причем y - неизвестная. Отсутствует условие вида "исхточки(y, M)", определяющее исходные точки для итерационных приближений к корням. Переменная P функциональная. Прием вводит новые переменные h, m, которые регистрируются одновременно как новые неизвестные и как вспомогательные параметры. Уровень срабатывания равен 2.

После применения приема наша задача получает дополнительные условия "$c = \mathrm{set}_x(\exists_d(x = b/2 + bd - 5$ & $d \in \{0,\dots,399\}$ & $a(bd+b-5)a(bd-5) \leq 0))$", "$b = 1/40$", "исхточки$(y,c)$".

Далее срабатывает прием, вычисляющий производную рассматриваемой функции. Его теорема имеет следующий вид:

$\forall_{afgh}(f = \lambda_x(g(x), x -$ число$)$ & $a = dg(x)/dx \to \lambda_x(a, x -$ число$) = h$ &
Производная$(f,h))$

Прием имеет заголовок "вывод". Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Задача имеет условие вида "$A = \mathrm{set}_y(f(y) = B$ & $C)$". Переменная g функциональная. Отсутствует посылка вида "Производная(f, X)". Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть сначала обрабатывается нормализатором "нормпроизводная", а затем - задачей на упрощение. Прием вводит новую переменную h. Уровень срабатывания равен 3.

После применения приема в нашем примере добавляются посылки "$\lambda_x(\sin x + 2x, x-$ число$) = f$", "Производная(a, f)".

Наконец, применяется прием, определяющий схему итерационных уточнений корней по методу Ньютона. Его теорема имеет следующий вид:

$\forall_{FGbcdm}($Производная(F,G) & исхточки(y,m) & точность$(y,d) \to y = \mathrm{set}_x(F(x) = 0$ & $x \in [b,c]$ & $P(x)) \leftrightarrow y = \mathrm{set}_x(\exists_{gn}(g(0) \in m$ & $\forall_i(i \in \{0,\dots,n\} \to g(i+1) = g(i) - F(g(i))/G(g(i)))$ & $|g(n+1) - g(n)| \leq d$ & $x = g(n+1))$ & $P(x)))$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Антецеденты идентифицируются с утверждениями из контекста. Переменная P функциональная. Уровень срабатывания равен 4.

После применения приема получаем следующий список условий:

исхточки(y,c)

$c = \mathrm{set}_x(\exists_d(x = b/2 + bd - 5 \ \& \ d \in \{0, \ldots, 399\} \ \& \ a(bd + b - 5)a(bd - 5) \leq 0))$

$b = 1/40$

точность$(y, 0.00001)$

$y = \mathrm{set}_x(\exists_{eg}(\forall_h(h \in \{0, \ldots, g\} \to e(h + 1) = -a(e(h))/f(e(h)) + e(h)) \ \& \ x = e(g + 1) \ \& \ e(0) \in c \ \& \ |e(g + 1) - e(g)| \leq 0.00001))$

Эти условия, за вычетом первого и четвертого, передаются компилятору. Ему же передаются посылки, определяющие функции a, f. Приведем краткое описание полученной программы. Сначала идет цепочка присвоений начальных значений и вычисления вспомогательных констант. Переменной x1 присваивается $b/2$, переменным x2 и x4 присваиваются значения $-(5 + b/2)$ и $-(5 + b)$, переменной x9 - набор псевдокоманд для вычисления $-\cos x + x^y$, и т.д. Вводится накопитель x13 середин тех промежутков, на которых функция меняет знак. Затем идет оператор "повторение" - цикл просмотра промежутков и заполнения накопителя x13. Как только текущее значение индекса x14 превосходит максимально допустимую величину 399, выполняется переход через "иначе 1". Здесь вводится пустой накопитель результата x16. Оператор "входит(x17 x13)" последовательно просматривает стартовые точки x17 уточнения корней. Инициируется ряд дополнительных параметров и констант. Переменной x20 присваивается набор псевдокоманд для вычисления $\sin x + 2x$, переменной x22 - набор псевдокоманд для вычисления $x - y/z$, переменной x23 - для вычисления $|x - y|$. Переменной x24 присваивается уровень точности 0.00001. Далее идет оператор "повторение" - цикл итерационных уточнений корня. Как только модуль разности между двумя последовательными значениями корня оказывается меньше или равен уровня точности, цикл обрывается. Происходит откат к "ветвь 2" и регистрация в накопителе x16 очередного корня x18. По окончании просмотра всех значений x17 - выдача ответа, представляющего собой одноэлементный набор, составленный из набора x16.

Рассмотрим пример решения системы уравнений путем сведения ее к единственному уравнению. Условия двенадцатой задачи из раздела "Вычислительные задачи" таковы:

$z = \mathrm{set}_{xy}(\cos x + xy = 0 \ \& \ -\sin x + x + y = 0 \ \& \ x -$ число $\& \ y -$ число $\& \ x \in [-5, 5] \ \& \ y \in [-5, 5])$

точность$(z, 0.0000001)$

После того, как задаче передается цель "программа", срабатывает прием, выражающий одну из неизвестных через другие. Его можно найти в пункте "Математический анализ" - "Общие свойства числовых функций" - "Вычисления" - "Численное решение систем уравнений" - "Выражение одной из неизвестных через остальные". Теорема приема имеет следующий вид:

$\forall_{ABCDafgisuz}((y -$ число $\& \ f(x, y) = a) = (y = g(x) \ \& \ D(x)) \to$
$z = \mathrm{set}_{xy}(A(x) \ \& \ B(x, y) \ \& \ C(y) \ \& \ f(x, y) = a) \ \&$ точность$(z, s) \leftrightarrow$
$u = \mathrm{set}_x(A(x) \ \& \ D(x) \ \& \ B(x, g(x))) \ \&$ точность$(u, s) \ \&$
$z = \mathrm{set}_t(\exists_{pq}(p \in u \ \& \ q = g(p) \ \& \ C(q) \ \& \ t =$ Вставка$(p, i, q))))$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Конъюнктивные члены заменяемой части эквивалентности идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей цель "программа". Переменные A, B, C, D, f, g функциональные. Переменная y идентифицируется с отдельной переменной связывающей приставки, переменная x - с непустым набором остальных переменных этой приставки. Проверяется, что

y входит в $f(x,y)$, причем это выражение линейно по y. Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию i с номером вхождения y в связывающую приставку. Нумерация начинается с единицы. Утверждение $A(x)$ идентифицируется с конъюнкцией всех членов, не содержащих y, а утверждение $C(y)$ - с конъюнкцией всех членов, не содержащих переменных набора x. Антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть разрешается задачей на описание относительно y. В качестве дополнительных посылок используются конъюнктивные члены $A(x)$. Прием вводит новую переменную u, которая регистрируется одновременно как новая неизвестная и как вспомогательный параметр.

После применения данного приема имеем следующий список условий:

$z = \mathrm{set}_b(\exists_{cd}(b = \text{Вставка}((c), 2, d) \ \& \ d = \sin c - c \ \& \ c \in a \ \& \ d \in [-5, 5]))$

$\text{точность}(a, 0.0000001)$

$a = \mathrm{set}_x(x(\sin x - x) + \cos x = 0 \ \& \ x \in [-5, 5] \ \& \ x - \text{число})$

Заметим, что "Вставка(A, i, B)" обозначает результат вставки в набор A элемента B, после которой этот элемент оказывается размещенным на i - м разряде; нумерация разрядов начинается с 1.

Дальнейшие действия - такие же, как в случае единственного уранения.

Для выражения одной из неизвестных через другие созданы еще два приема. Первый из них имеет ту же теорему, что и рассмотренный выше. Вместо линейности по y требуется, чтобы эта переменная имела единственное вхождение в $f(x,y)$. Уровень срабатывания здесь равен 3. Второй прием ориентирован на те случаи, когда выражение неизвестной допускает несколько вариантов (например, при решении квадратного уравнения). Теорема его имеет следующий вид:

$$\forall_{ABCDabfgijnuz}((y - \text{число} \ \& \ f(x,y) = a) = D \rightarrow$$
$$z = \mathrm{set}_{xy}(A(x) \ \& \ B(x,y) \ \& \ C(y) \ \& \ f(x,y) = a) \leftrightarrow$$
$$z = \mathrm{set}_{xy}(A(x) \ \& \ B(x,y) \ \& \ C(y) \ \& \ D))$$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "программа". Переменные A, B, C, f функциональные. Идентификация переменных x, y, A, C - такая же, как выше. Число вхождений переменной y в $f(x,y)$ не более двух. Антецедент обрабатывается так же, как и выше. Уровень срабатывания равен 4.

Метод сведения системы уравнений к одному уравнению позволяет усмотреть из графика единственной функции на промежутке все корни системы, расположенные в заданном параллелепипеде. Если такое сведение не удается, то можно из каких-то прочих соображений выбрать исходную точку, и составить программу на ее приближение к корню по методу Ньютона. В качестве примера рассмотрим задачу номер 29 из раздела "Вычислительные задачи". Ее посылки суть "$\sin(x+y) = \exp x$", "$\cos(x-y) = -\exp y$". Условия задачи суть "$z = (x,y)$", "точность$(z, 0.000001)$", "уточнение$(z, (-1, 2))$". Целевая установка - прежняя. Переменная z является неизвестной; имеются цели "вычисление", "известно".

Цель "программа" добавляется обычным образом. После этого срабатывает прием, вводящий вспомогательный векторный оператор. Он добавляет посылки:

$\lambda_{xy}((-\exp x + \sin(x+y), \exp y + \cos(x-y)), x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) = a,$

$a(x,y) = (0,0).$

Теорема приема имеет следующий вид:

$\forall_{Fabcnx}(c = \lambda_i(x(i), i \in \{1,\ldots,n\})\ \&\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to a(i) = b(i)) \to$
$\lambda_x(\lambda_i(a(i) - b(i), i \in \{1,\ldots,n\}), \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \to x(i) - \text{число})) = F\ \&\ F(c) =$
$\lambda_i(0, i \in \{1,\ldots,n\}))$

Прием имеет заголовок "вывод". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении утверждения "уточнение(z, f)" в условиях задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию условия вида "$z = c$", где z - неизвестная. Второй антецедент выделен указателем "развертка" и идентифицируется с группой посылок задачи. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Переменные a, b, x функциональные. Описатели "отображение" по переменной i рассматриваются как наборы, кванторы общности по этой переменной - как конъюнкции. Прием выбирает новую переменную F. Уровень срабатывания равен 1.

Далее срабатывает прием, вычисляющий матрицу частных производных. Он добавляет посылки:

$$\lambda_{bc}(\begin{pmatrix} -\exp b + \cos(b+c) & \cos(b+c) \\ -\sin(b-c) & \sin(b-c) + \exp c \end{pmatrix}, b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}) = d,$$

вектпроизводная(a, d).

Теорема приема имеет вид:

$\forall_{AFGPfn}(F = \lambda_x(\lambda_i(f(i), i \in \{1,\ldots,n\}), P(x))\ \&\ A = \lambda_{ij}(df(i)/dx(j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&$
$j \in \{1,\ldots,n\}) \to \lambda_x(A, P(x)) = G\ \&\ \text{вектпроизводная}(F, G))$

Прием имеет заголовок "вывод". Антецедент идентфицируется с посылкой задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Переменные f, P функциональные. Указатель "развертка" определяет идентификацию описателя "отображение" по переменной i с конечным набором. Переменная x идентифицируется со связывающей приставкой произвольной длины. Второй антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет рассмотрение описателя $\lambda_{ij}(\ldots)$ как прямоугольной матрицы, заданной термом "строки($\ldots$)". Производные вычисляются при помощи вспомогательных задач на преобразование. Прием вводит новую переменную G. Перед попыткой его применения проверяется отсутствие посылки вида "вектпроизводная(F, X)". Уровень срабатывания равен 3.

Наконец, применяется прием, вводящий схему итерационных уточнений по методу Ньютона для системы уравнений. Его теорема имеет следующий вид:

$\forall_{adfgx}(\text{вектпроизводная}(f, g)\ \&\ f(x) = \lambda_i(0, i \in \{1,\ldots,n\})\ \&\ \text{точность}(z, d)\ \&$
$n = l(x) \to z = x\ \&\ \text{уточнение}(z, a) \leftrightarrow \exists_{hm}(h(0) = a\ \&\ \forall_{iy}(i \in \{0,\ldots,m\} \to$
$\exists_y(g(h(i))y = f(h(i))\ \&\ h(i+1) = h(i) - y))\ \&\ \sum_{i=1}^{n} |h(m+1)(i) - h(m)(i)| \le d\ \&$
$z = h(m+1)))$

Умножение на y - символ "умножматр"; сложение и изменение знака для y - символы "плюсвект" и "минусвект". Остальные операции - обычные.

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Он применяется к паре условий задачи на описание, имеющей цель "вычисление". Выражение x имеет заголовок "набор". Первые три антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, четвертый - выделен указателем "идентификатор". Описатель "отображение"выделен указателем "развертка" и идентифицируется с набором. Уровень срабатывания равен 4.

В итоге компилятору передаются следующие два условия:

$$\exists_{fg}(\forall_h(h \in \{0,\ldots,g\} \to \exists_i(f(h+1) = f(h) - i \;\&\; e(f(h))i = b(f(h)))) \;\&\;$$
$$z = f(g+1) \;\&\; f(0) = (-1,2) \;\&\; \sum_{h=1}^{2} |f(g+1)(h) - f(g)(h)| \leq 0.000001)$$

точность$(z, 0.000001)$

Чтобы обеспечить решение относительно i матричного уравнения $e(f(h))i = b(f(h))$, компилятор вставляет обращение к вычислительному пакету ЛИНСИСТ решения систем линейных уравнений. Этот пакет, реализованный на ГЕНОЛОГе, будет описан ниже.

10.5 Программирование для ускоренного решения задачи

В принципе, любые вычислительные процедуры можно реализовать в решателе на уровне логических рассуждений, используя для этого задачу подходящего типа. Однако, при работе с нелогическими объектами, когда схема алгоритма известна, и для планирования действий рассуждения не требуются, такой подход может оказаться неоправданно трудоемким. Здесь целесообразнее использовать решатель лишь для выработки или уточнения схемы алгоритма, которая будет им же компилироваться в "обычную" программу, запускаемую для указанных в задаче исходных данных. Результат вычислений будет переведен на логический язык и использован для продолженния решения задачи. Ввиду того, что процесс программирования часто оказывается существенно менее трудоемким, чем процесс вычислений, по окончании решения задачи созданную программу можно удалить.

Указанный режим "локального программирования" был рассмотрен пока лишь на двух-трех простых примерах, однако уже на них он продемонстрировал высокую эффективность. Например, при решении задач на перебор графов ускорение достигалось в несколько сотен раз.

Заметим, что примером "локального программрования" можно было бы считать подробно разобранную в третьем томе монографии процедуру построения эскиза по условиям планиметрической задачи. Решатель анализировал эти условия и составлял по ним схему вычислений, позволявшую в итеративном цикле оптимизировать параметры чертежа, минимизируя некоторый функционал расхождения с требованиями задачи. Элементы схемы вычисляли различные стандартные операции, извлеченные из соотношений аналитической геометрии, а ее функционирование обеспечивалось специальной программой ЛОСа. Вычисления велись в формате "с плавающей запятой" с помощью математического сопроцессора. Однако, создаваемые таким образом "чертежи", хотя и давали в большинстве случаев хорошее приближение к условиям задачи, решателем совсем не использовались. Они создавались как элемент интерфейса обучения, чтобы можно было лучше понимать действия решателя при трассировке. По этой причине данный пример "локального программирования" не вполне укладывается в приведенную выше концепцию. Впрочем, его нетрудно доработать, чтобы решатель мог извлекать из чертежа полезные для продвижения к ответу гипотезы и пытаться их доказать.

Мы рассмотрим лишь два примера "локального программирования" в решателе - при переборе графов и при переборе таблиц алгебраических операций.

10.5.1 Локальное программирование при переборе графов

Будем рассматривать пример 10 из раздела задачника "Дискретная математика" - "Теория графов" - "Теоретические задачи". Это - упражнение из книги Ф.Харари "Теория графов", в котором нужно привести пример конечного графа без треугольников, степени вершин которого равны 3, причем число вершин четно и не менее 6. Оно представлено задачей на описание, имеющей цели "пример", "полный", "прямойответ", "одз", "упростить" и "неизвестные G". Условия задачи суть утверждения "простграф(G)", "графбезтреуг(G)", "конечное(вершины(G))", "card(вершины(G))$-$even", "$6 \leq$ card(вершины(G))", "$\forall_a(a \in$ вершины$(G) \rightarrow$ степеньвершины$(a, G) = 3)$".

Заметим, что для несколько более простой задачи - с отброшенным условием на отсутствие в графе треугольников - была предпринята попытка обучить решатель перебору графов на логическом уровне, без программирования вспомогательной процедуры перебора. На решение задачи в этом случае потребовалось 163787694 шага работы интерпретатора ЛОСа. На решение этой же задачи с программированием процедуры перебора оказалось достаточно всего 145455 шагов. Экономия трудоемкости составила более тысячи раз.

Но вернемся к нашему примеру. Прежде всего, срабатывает прием, фиксирующий число m вершин графа на период перебора. Предпринимается попытка найти нижнюю оценку n числа вершин, и далее последовательно рассматриваются случаи $m = n, n+1, \ldots$ - до тех пор, пока не будет найден нужный пример. Теорема приема имеет следующий вид:

$$\forall_{Gmn}(\text{простграф}(G)\ \&\ n \leq \text{card}(\text{вершины}(G))\ \&\ n \leq m \rightarrow \text{card}(\text{вершины}(G)) = m)$$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Первый антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей неизвестную G. Отсутствует условие вида "card(вершины(G)) $= A$)". Второй антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Результат n - десятичная константа. Третий антецедент выделен указателем "программа". Он последовательно перечисляет значения $m = n, n+1, \ldots$. Указатель "попыткаогранич" означает, что для каждого такого значения m будет создана своя вспомогательная задача, полученная из текущей задачи добавлением консеквента теоремы приема. Если она успешно решается, то выдается ее ответ, иначе - переход к следующему значению m. Уровень срабатывания приема равен 0.

В нашем примере прием добавляет условие "card(вершины(G)) $= 6$".

Прежде, чем описывать действия следующего приема, сделаем несколько общих замечаний о программировании перебора объектов заданного типа. Обычно такой перебор основан на индуктивном описании класса объектов: стартуем с простейших объектов, и рассматриваем различные варианты их доопределения. Саму схему перебора, связанную с классом объектов, можно считать фиксированной и используемой для различных конкретных задач перебора. Программированию подлежат лишь варьируемые от задачи к задаче дополнительные ограничения на объект, которые могут позволить отсекать заведомо непригодные варианты еще в процессе построения. Особую ценность имеют наследственные ограничения, невыполнение которых для построенной части гарантирует отсутствие их у всего объекта.

В рамках данной схемы, при переборе графов мы будем стартовать с одновершинного графа без ребер и последовательно вводить новые ребра. Разумеется, желательно иметь какие-то ограничения на число ребер, выходящих из вершины и на число вершин. В нашем примере рассматриваются регулярные графы, степени вершин которых фиксированы. При этом число вершин тоже фиксировано. Чтобы организовать перебор таких графов, был создан пакет продукций "регграфы". Он будет использован при поиске примеров регулярных графов, обладающих различными дополнительными свойствами. Локальное программирование здесь состоит в синтезе дополнительных приемов пакета, отсекающих непригодные промежуточные варианты.

Обращение к пакету имеет вид "регграфы(x1 x2 x3 x4)", где x1 и x2 - натуральные числа, x3 - неориентированный граф, степени вершин которого не превосходят x2, а число вершин не более x1. Выходная переменная x4 перечисляет регулярные графы степени x2, полученные добавлением к x3 новых ребер и вершин и имеющие ровно x1 вершин.

Формат пакета определяется термом "программа(регграфы вход(x1 десчисло) вход(x2 десчисло) вход(x3 граф(объект объект)) выход(x4 граф(объект объект)) параметр(x5 вершина(объект)) уровень(3) цикл перечисление продолжение)". Вспомогательный параметр x5 - опорная вершина, имеющая степень, меньшую x2. Из нее необходимо провести новое ребро, и приемы пакета рассматривают различные способы это сделать. Перечислим приемы пакета:

1. Инициализация параметра. Выбирается опорная вершина e:

   $\forall_{abcef}(f \in \text{вершины}(c)\ \&\ \text{степеньвершины}(f) < b \to e = f)$

   Уровень срабатывания равен 0.

   Заметим, что переменная f - локальная переменная приема, в то время как e - глобальная переменная пакета. Из технических соображений выходные и вспомогательные глобальные переменные еще до инициализации их приемами получают значение 0. Это значение переопределяется при инициализации. Равенства в консеквентах теорем приемов вычислительных пакетов, у которых в левой части находится выходная либо вспомогательная глобальная переменная, означают операторы присвоения.

2. Усмотрение результата.

   $\forall_{acde}(e = 0\ \&\ \text{card}(\text{вершины}(c)) = a \to d = c)$

   Первый антецедент означает, что опорная вершина e выбрана не была, так как степени всех вершин графа уже равны b. Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата. Уровень срабатывания равен 2.

3. Проведение ребра от опорной вершины к старой вершине.

   $\forall_{abcdefghi}(\neg(e = 0)\ \&\ f \in \text{вершины}(c)\ \&\ \neg(e = f)\ \&\ \neg(\text{смежны}(e, f, c))\ \&$ $\text{степеньвершины}(f) < b\ \&\ \text{новребро}(c, e, f, 0, g, h)\ \&\ \text{регграфы}(a, b, h, i) \to d = i)$

   После проверки того, что опорная вершина e выбрана, прием находит уже имеющуюся вершину f, отличную от e и не соединенную с ней ребром. Проверяется, что степень вершины f меньше b. Тогда проводится новое ребро g, соединяющее e с f и имеющее отметку 0. Переменной h присваивается новый граф. Однако, в действительности оператор "новребро" изменяет исходный граф, так что переменной h просто передается значение c. Чтобы восстановить испорченный граф c и продолжить рассмотрение других вариантов, компилятор вставляет после оператора "новребро" ветвь с обращением к оператору "исклребро", отбрасывающему при откате добавленное ребро. Для этого он использует справочник "восстановл", связывающий операторы "новребро" и "исклребро". Наконец, для измененного графа реализуется рекурсивное обращение к процедуре "регграфы". Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата. Уровень срабатывания равен 3.

4. Добавление вершины.

   $\forall_{abcdefghip}(\neg(e = 0)\ \&\ \mathrm{card}(\text{вершины}(c)) < a\ \&$
   $\text{новвершина}(c, \mathrm{card}(\text{вершины}(c)), f, g)\ \&\ \text{новребро}(g, e, f, 0, h, i)\ \&$
   $\text{регграфы}(a, b, i, p) \to d = p)$

   Если число вершин графа меньше заданного числа a, то вводится новая вершина f, имеющая своей отметкой номер этой вершины (нумерация начинается с 0). Переменной g присваивается полученный граф. При этом исходный граф c не портится. Далее оператор "новребро" проводит ребро h, соединяющее вершины e и f. Наконец, реализуется рекурсивное обращение к процедуре "регграфы". Как и выше, при откате ребро удаляется. Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата. Уровень срабатывания равен 3.

При переборе регулярных графов, удовлетворяющих дополнительным ограничениям, в пакет "регграфы" будут добавляться приемы, проверяющие выполнение этих ограничений. При усмотрении нарушения ограничения - выход из пакета по значению "ложь". Такие приемы создаются каждый раз заново, в процессе решения соответствующей задачи. Они помещаются в подпункт "фильтры", причем старые фильтры предварительно удаляются.

Прием, обращающийся к процедуре "регграфы" для перебора регулярных графов, имеет следующий вид:

$\forall_{AGPakmn}(n \leq \mathrm{card}(\text{вершины}(G))\ \&\ n \leq m\ \&\ P(\mathrm{card}(\text{вершины}(G)))\ \&\ P(m)\ \&$
$\text{регграфы}(m, k, \text{едграф}(0), a)\ \&\ A = \text{логграф}(a, G) \to \text{простграф}(G)\ \&$
$\forall_x(x \in \text{вершины}(G) \to \text{степеньвершины}(x, G) = k) \leftrightarrow A)$

Заголовок приема - "заменаусловия(второйтерм)". Заменяемая часть идентифицируется с парой условий задачи на описание, имеющей неизвестную G. Переменная k идентифицируется с натуральной константой. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором. Он определяет численную нижнюю оценку n мощности множества вершин искомого графа. Второй антецедент, выделенный указателем "программа", перечисляет натуральные m, не меньшие n. Фактически, здесь дублируется предыдущий прием, который создавался для перебора графов, не использующего локального программирования. Третий антецедент выделен указателем "огрзавис". Он идентифицируется с конъюнкцией всех условий задачи на описание, в которых неизвестная G встречается только внутри выражений "card(вершины(G))". Переменная P - функциональная. Истинность четвертого антецедента устанавливается при помощи вспомогательной задачи на доказательство. Пятый антецедент выделен указателем "программа". Он обращается к пакету продукций "регграфы" для перебора всех регулярных графов a степени k, имеющих m вершин и удовлетворяющих оставшимся условиям задачи. Предварительно проверяется, что все эти условия - наследственные, т.е. сохраняются при переходе от графа к подграфу. Перебор стартует с простейшего одновершинного графа, определяемого термом "едграф(0)". Указатель "допприемы" обеспечивает синтез дополнительных приемов пакета "регграфы" перед обращением к нему. Шестой антецедент тоже выделен указателем "программа". Он преобразует найденный граф a, представленный в вычислительном формате ГЕНОЛОГа, в его логическое описание A, где этот граф обозначен переменной G. Вершины и ребра графа отождествляются с начальными натуральными числами. В описании графа имеются: утверждение "простграф(G)", равенства для множеств вершин и ребер, а также утверждения "ведет(...)" для каждого ребра. Так как прием реализует эквивалентную замену для первого же подходящего графа a, то его применение оговаривается дополнительными требованиями, обеспечивающими приемлемость такой замены. Во-первых, требуется отсутствие посылок, отличных от константы "истина". Во-вторых, условия не должны содержать свободных переменных, отличных от G. В - третьих, каждое дополнительное условие, в котором переменная G встречается не под символом "вершины" либо "ребра", должно быть наследственным. Последнее проверяется при помощи оператора "наследств", решающего вспомогательную задачу на доказательство. Уровень срабатывания равен 0.

Процедура "допприемы", корректирующая фильтры перечисляющего вычислительного пакета

Перед обращением к процедуре "регграфы" предыдущий прием обращался к реализованной на ЛОСе процедуре "допприемы(x1 x2 x3 x4)". Значением ее входной переменной x1 служит текущая задача на описание. Предполагается, что данная задача имеет единственную неизвестную X и не имеет других переменных. Значением входной переменной x2 служит набор таких условий задачи x1, истинность которых обеспечена до обращения к процедуре "регграфы". Значением входной переменной x3 служит название корректируемого пакета - в нашем случае это символ "регграфы". Процедура "допприемы" анализирует отличные от x2 условия задачи x1, и для тех из них, которые являются "наследственными", т.е. из их выполнения для всего объекта X вытекает выполнение для подобъектов X, возникавших в процессе построения X, - создаются дополнительные приемы пакета x3, проверяющие данные условия. Старые дополнительные приемы, создававшиеся процедурой "допприемы"на предыдущих обращениях к ней, предварительно удаляются. Выходной переменной x4 присваивается список условий задачи, для проверки которых удалось создать новые приемы. Они будут автоматически отбрасываться при преобразовании задачи приемом, обращающимся к процедуре "регграфы".

Рассмотрим программу оператора "допприемы". Ее можно найти в пункте "Синтез приемов" - "Синтез приемов для пополнения пакетного оператора, используемого задачей (процедура ДОППРИЕМЫ)" оглавления программ.

Прежде всего, вводится пустой накопитель x5, в который будут пересылаться обработанные наследственные условия задачи x1. Затем переменной x6 присваивается результат обращения к справочнику "допприемы" на названии x3 пополняемого пакета. Этот справочник выдает четверку (A_1, A_2, A_3, A_4), где A_1 - утверждение с единственной переменной X, выделяющее общий класс объектов, синтезируемых пакетом x3; A_2 - утверждение с двумя переменными X, Y, определяющее отношение между результатом X и промежуточным объектом Y (подобъектом объекта X); A_3 - программная переменная пакета x3, значением которой служит текущий фрагмент синтезируемого объекта; A_4 - ссылка "прием(...)" на данный прием справочника "допприемы" в базе приемов ГЕНОЛОГа. Такой прием располагается в подпункте "Справочники" - "Допприемы" раздела оглавления ГЕНОЛОГа, занятого пакетом x3. Ссылка A_4 позволяет программе "допприемы" найти локализацию пакета в оглавлении.

В нашем случае A_1 - утверждение "простграф(a)", A_2 - утверждение "подграф(b, a)", A_3 - переменная x3.

После контрольной точки "прием(2)" расположена ветвь программы, находящая пункт "Фильтры" в корневом меню раздела пакета x3 и удаляющая все приемы этого пункта, а также сам пункт "Фильтры". Затем - переход через "ветвь 3" перед данной точкой. После перехода через "ветвь 2", после контрольной точки "прием(4)", снова вводится пустой пункт "Фильтры". Далее - переход через "ветвь 1". После контрольной точки "прием(5)" предпринимается просмотр условий x16 задачи x1, не входящих в список x2 и имеющих единственную свободную переменную x17 - неизвестную задачи.

Находится результат x19 приведения условия x16 к той переменной X, которая указана в утверждении A_1. Оператор "наследств" проверяет, что условие x19 - наследственное в контексте A_1, A_2. Затем решается задача на описание x20, имеющая своими посылками конъюнктивные члены утверждения A_1, а условием - отрицание утверждения x19. Задача имеет цель "продукция". Она преобразует свои условия к виду списка антецедентов теоремы приема пакета x3, усматривающего нарушение условия x19. Этот список S накапливается в комментарии (продукция S) к задаче x20.

В нашем примере будет обрабатываться только условие "графбезтреуг(G)". Его отрицание, после замены G на a и расшифровки по определениям, приобретает вид "$\exists_{bcd}(b \in$ вершины(a) & смежны(b, c, a) & смежны(b, d, a) & смежны$(c, d, a))$".

Далее происходит такое переобозначение переменных утверждений S, при котором они не совпадали бы с входными и выходными переменными пакета x3, а также с его глобальными параметрами. После этого переменная X переобозначается на A_3. Внешний квантор существования, если он есть, отбрасывается. После перехода через "ветвь 1" строится импликация x29 с антецедентами S и консеквентом "ложь". Это и есть теорема нового приема. Она регистрируется в пункте "Фильтры", прием компилируется, а условие x16 заносится в накопитель x5.

В нашем примере теорема приема имеет вид:
"$\forall_{cfgh}(f \in$ вершины(c) & смежны(f, g, c) & смежны(f, h, c) & смежны$(g, h, c) \rightarrow$ ложь)".

После срабатывания приема, обращающегося с процедуре "регграфы", условия задачи "$\forall_a(a \in$ вершины$(G) \rightarrow$ степеньвершины$(a, G) = 3)$", "простграф(G)", "card(вершины(G)) $= 6$", "card(вершины(G)) $-$ even", "$6 \leq$ card(вершины(G))", "графбезтреуг(G)" заменяются на утверждения "простграф(G)", "вершины$(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$", "ведет(1,1,2,$G$)", "ведет(2,4,1,$G$)", "ведет(3,6,1,$G$)", "ведет(4,2,3,$G$)", "ведет(5,5,2,$G$)", "ведет(6,3,4,$G$)", "ведет(7,6,3,$G$)", "ведет(8,4,5,$G$)", "ведет(9,5,6,$G$)", "ребра$(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$".

После отбрасывания условия конечности множества вершин графа срабатывает прием, усматривающий полученный ответ. Суммарная трудоемкость решения составляет 256177 шагов интерпретатора ЛОСа, что крайне мало. Для сравнения, решение квадратного уравнения $x^2 + 5x = 3$ занимает 351244 шага.

10.5.2 Локальное программирование при переборе таблиц алгебраических операций

Будем рассматривать пример 23 из раздела задачника "Общая алгебра" - "Группоиды" - "Основные свойства двуместных операций". В этом примере требуется найти все ассоциативные и коммутативные двуместные операции на множестве $E(3) = \{0, 1, 2\}$, множество значений которых равно $E(3)$. Задача на описание имеет условия: бинарноперация$(f, E(3))$, ассоциативно(f), коммутативно(f), $\mathrm{Val}(f) = E(3)$. Ее цели суть: "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "упростить", "бинарнаяоперация", "(неизвестные f)". Единственной посылкой служит константа "истина".

Здесь возникает новая цель - "бинарнаяоперация". Она означает, что в задаче требуется перечислить все наборы таблиц, определяющих бинарные операции, заданные на множестве $E(k)$ и удовлетворяющие дополнительным условиям. При перечислении отбрасываются изоморфные наборы таблиц. Таким образом, хотя в нашем примере рассматривается лишь одна неизвестная бинарная операция, созданные средства позволят работать и с группой неизвестных бинарных операций.

При трассировке решения сразу возникает ответ:

$$f \in \{\text{фмл}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}), \text{фмл}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}), \text{фмл}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}), \text{фмл}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}),$$

$$\text{фмл}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}), \text{фмл}(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix})\}$$

Здесь "фмл(a)" обозначает функцию k - значной логики, определяемую таблицей a. Эта таблица есть древовидная структура, в которой каждая вершина представлена набором длины k. Чтобы определить значение функции в точке $(x_1, \ldots, x_n)$, требуется перемещаться по дереву, последовательно выбирая элементы наборов с номерами $x_1 + 1, \ldots, x_n + 1$. Концевые значения принадлежат $E(k)$. В случае $n = 2$ таблица a - просто матрица, заданная набором строк.

Прием, выдающий ответ, реализован на ЛОСе. Для его рассмотрения перейдем в пункт "Приемы решателя" - "Общая алгебра" - "Обращение к процедуре "бинооперации" при нахождении таблиц операций на множестве $E(k)$, удовлетворяющих заданным требованиям".

Прием срабатывает на уровне 0, усматривая условие "бинарноперация$(x, E(k))$" задачи на описание, имеющей цель "бинарнаяоперация". Проверяется, что для каждой неизвестной y утверждение "бинарноперация$(y, E(k))$"является условием задачи. Затем предпринимается обращение к реализованной на ЛОСе процедуре "бинооперации(x1, x2, x3)", выполняющей всю работу по нахождению искомых наборов таблиц операций.

Здесь x1 - задача на описание, имеющая цель "бинарнаяоперация", x2 - набор дополнительных установок на перебор, по умолчанию пустой. Чтобы перечислить группы бинарных операций, удовлетворяющих условиям задачи x1, процедура "бинооперации" создает вспомогательный пакет продукций "доопред", доопределяющий текущую группу искомых операций в соответствии с тождествами задачи. Этот пакет реализуется на ГЕНОЛОГе и хранится в буфере базы приемов. Далее реализуется перебор всевозможных способов заполнения таблиц. Изоморфные группы таблиц отбрасываются. Выходной переменной x3 присваивается терм, значением которого служит множество найденных наборов таблиц. В каждом наборе таблицы упорядочены так же, как неизвестные задачи. Таблица представляется набором наборов. В i-м наборе на j-м месте располагается значение операции в точке (i, j). Нумерации начинаются с 0. Значения представлены целыми числами.

После того, как оператор "биноперации" определяет результат R, создается выражение X для набора неизвестных задачи, и прием выдает ответ задачи "$X \in R$". Предварительно из буфера базы приемов удаляются все приемы, включая пакет "доопред".

Перейдем к рассмотрению программы оператора "биноперации". Выйти на ее начальную точку можно через пункт "Приемы решателя" - "Общая алгебра" - "Оператор "биноперации", перечисляющий таблицы группы бинарных операций, удовлетворяющих условиям задачи" оглавления программ.

Прежде всего, переменной x4 присваивается набор неизвестных задачи x1, а переменной x6 - константа k, определяющая область $E(k)$. Переменной x8 присваивается набор входных переменных оператора "доопред". Их значениями будут служить частично заполненные таблицы операций списка x4. В пустых клетках располагаются символы "неопред".

Переменной x9 присваивается теорема справочника "программа", определяющая формат оператора "доопред". Она имеет вид "программа(доопред вход(x_1 строки(логсимвол)) $\ldots$ вход(x_n строки(логсимвол)) уровень(2) цикл продолжение истина пересмотр)". Оператор будет пытаться доопределять таблицы, выполняя однократный последовательный просмотр своих приемов. Если при этом доопределится хотя бы одна клетка, то индикатор пересмотра будет установлен на 1, и цикл доопределения возобновится сначала. По завершении указанных действий - выход по значению "истина". Выполняющие доопределение приемы контролируют отстутствие рассогласований с ранее найденными значениями, и при обнаружении таковых организуют выход по значению "ложь".

Далее операторы "Вводприема" создают на основе теоремы x9 прием справочника "программа" и переключатель уровней оператора "доопред".

Переменной x12 присваивается пустой накопитель условий задачи x1, для учета которых не удалось создать прием оператора "доопред"; переменной x13 - список всех условий "бинарноперация($x_i, E(k)$)". Затем начинается просмотр условий x14 задачи x1, не вошедших в список x13. Прежде всего, предпринимается попытка развернуть "по определениям" утверждение x14. Это выполняет вспомогательная задача на описание, и результат присваивается переменной x16. Затем - переход через "ветвь 3".

Здесь инициируется нулем индикатор тождества x17. После котрольной точки "прием(5)" предпринимается попытка усмотреть, что x16 есть кванторное тождество с консеквентом вида $x_i(A) = B$. Если это так, то x17 заменяется на 1. После контрольной точки "прием(7)" выполняется проверка симметричности тождества. Если усматривается симметрия, то прием будет создан только для применения его слева направо. Далее - переход через "ветвь 2" перед контрольной точкой "прием(7)".

Выбирается новая переменная y, и рассматривается набор N утверждений "$B = y$, консеквент$(x_i(A) = y), \neg(y =$ неопред$), C_1, \ldots, C_k$", где $C_1, \ldots, C_k$ - все антецеденты кванторного тождества x16. Этот набор при помощи вспомогательной задачи на описание, имеющей цель "продукция", трансформируется в набор антецедентов и консеквент теоремы приема. После переобозначения переменных, обеспечивающего согласование их со входными переменными пакета, по этой теореме создается прием. Его уровень срабатывания равен 1. В случае неудачи условие x14 заносится в список x12.

Проиллюстрируем указанные выше действия на нашем примере. Пусть в качестве условия x14 выступает утверждение "ассоциативно(f)". После решения задачи на описание, выполняющей расшифровку по определениям, получаем утверждение x16 вида: "$\forall_{abc}(a \in E(3)\ \&\ b \in E(3)\ \&\ c \in E(3) \to f(a, f(b,c)) = f(f(a,b),c))$". Симметрия не усматривается, так что по отдельности рассматриваются случаи, когда A есть $(a, f(b,c))$ и случай, когда A есть $(f(a,b),c)$. Ограничимся первым из них. Тогда набор N состоит из утверждений "$f(f(a,b),c) = d$", "консеквент$(f(a,f(b,c)) = d)$", "$\neg(d =$ неопред$)$", "$a \in E(3)$", "$b \in E(3)$", "$c \in E(3)$". Задача на описание, имеющая цель "продукция", формирует список антецедентов теоремы приема: "$a \in \{0,\ldots,2\}$", "$b \in \{0,\ldots,2\}$", "$e = f(a,b)$", "$\neg(e =$ неопред$)$", "$c \in \{0,\ldots,2\}$", "$g = f(b,c)$", "$\neg(g =$ неопред", "$d = f(e,c)$", "$\neg(d =$ неопред$)$". Как вивдим, она вводит вспомогательные переменные для промежуточных значений операции f и проверяет, что они уже определились. Консеквентом становится утверждение "$f(a,g) = d$". Оно будет доопределять значение f в точке (a,g) либо сравнивать d с ранеее определенным значением. Теперь требуется учесть, что f представлена набором наборов, а элементы наборов нумеруются начиная с 1. Поэтому предпринимается добавление единиц к аргументам f:

$\forall_{abcdefg}(a \in \{0,\ldots,2\}\ \&\ b \in \{0,\ldots,2\}\ \&\ e = f(a+1,b+1)\ \&\ \neg(e =$ неопред$)\ \&\ c \in \{0,\ldots,2\}\ \&\ g = f(b+1,c+1)\ \&\ \neg(g =$ неопред$)\ \&\ d = f(e+1,c+1)\ \&\ \neg(d =$ неопред$) \to f(a+1,g+1) = d)$

Наконец, заметим, что переменная a уже занята - в нашем примере это входная переменная оператора "доопред". После переобозначения переменных получаем следующую теорему приема:

$\forall_{abcdefh}(b \in \{0,\ldots,2\}\ \&\ c \in \{0,\ldots,2\}\ \&\ f = a(b+1,c+1)\ \&\ \neg(f =$ неопред$)\ \&\ d \in \{0,\ldots,2\}\ \&\ h = a(c+1,d+1)\ \&\ \neg(h =$ неопред$)\ \&\ e = a(f+1,d+1)\ \&\ \neg(e =$ неопред$) \to a(b+1,h+1) = e)$

Возвращаемся к программе оператора "бинoперации". Если задача имеет условия на неизвестные операции, отличные от тождеств для них, то такие условия проверяются по завершении заполнения таблиц операций. Перед контрольной точкой "прием(5)" расположен переход "ветвь 1" к той части программы, которая отвечает за создание соответствующих приемов. Здесь создается список x18 утверждений, которые будут преобразованы в антецеденты теоремы приема. Он состоит из утверждений "опртабл(...)" о полном доопределении таблиц и отрицания утверждения x16. Консеквентом теоремы является константа "ложь". Список x18 обрабатывается задачей на описание x19, имеющей цель "продукция". Дальнейшие действия аналогичны случаю приемов, основанных на тождествах. Однако, здесь уровень срабатывания приема равен 2.

В нашем примере создается прием, проверяющий, что после заполнения таблицы в ней встречаются все три значения.

После того, как цикл просмотра условий x14 завершен, выполняется переход через "иначе 2". Здесь проверяется, что список x12 пуст, т.е. все условия задачи учтены. Затем, после контрольной точки "прием(11)", оператор "бинoперации" начинает цикл заполнения таблиц. Переменной x14 присваивается набор бланков искомых таблиц, клетки которых заполнены символами "неопред". Далее проверяется наличие в списке посылок задачи служебной посылки "табл". Такая посылка указывает, что ответ задачи может оказаться очень большим, и каждый его дизъюнктивный член будет сохранен в отдельном логическом терминале задачника. В таком случае для просмотра ответа предусмотрен специальный интерфейс. Заполнение таблиц как при наличии посылки "табл", так и при ее отсутствии выполняется по одной и той же схеме, и мы рассмотрим лишь случай, когда ответ выдается в стандартном виде.

Вводится накопитель результатов x15, и для его заполнения предпринимается обращение к процедуре "опртаблиц". Этой процедуре передаются набор частично заполненных таблиц и уменьшенное на единицу символьное число элементов в носителе операции (т.е. $k-1$). Процедура перечисляет результаты полного доопределения таблиц. Она имеет рекурсивный характер и будет описана ниже. Каждый выдаваемый ею набор таблиц x16 обрабатывается процедурой "минопер", выполняющей всевозможные перестановки на $E(k)$ с целью поиска лексикографически наименьшего набора таблиц x17, получаемого указанными перестановками из x16. Если набор x17 отсутствует в накопителе x15, то он туда заносится. По окончании перечисления, реализуемого оператором "опртаблиц", набор x15 преобразуется к указанному в самом начале рассмотрения примера формату терма и выдается в качестве результата.

Вернемся к оператору "опртаблиц(x1 x2 x3)". Здесь x1 - набор частично заполненных таблиц, x2 - символьное число $k-1$, x3 - выходная переменная. Программа оператора реализует поиск в x1 первой не заполненной (т.е. содержащей символ "неопред") клетки K. Если все клетки заполнены, то выдается результат x1. Иначе - перечисляются всевозможные элементы $E(k)$, и для каждого такого элемента e создается копия x10 набора таблиц x1, в которой K содержит символ e. Далее следует обращение к пакету "доопред" и шаг рекурсии - обращение к оператору "опртаблиц", где вместо x1 берется x10.

В задачнике имеются еще два аналогичных примера, где требовалось перечислить ассоциативно-коммутативные операции на $E(4)$ и $E(5)$, принимающие все значения (с точностью до изоморфизма). В первом случае их количество оказалось равным 25, во втором - 117.

10.6 Вычислительные пакеты ГЕНОЛОГа

В этом разделе мы перечислим вычислительные пакеты ГЕНОЛОГа, созданные для математических разделов. Такие пакеты были созданы также для шахмат и обработки рисунков; про них будет рассказано в пятом томе монографии.

10.6.1 Работа с целыми числами

Создано всего два пакета для работы с целыми числами. Их можно найти в разделе оглавления ГЕНОЛОГа "Элементарная алгебра" - "Целые числа" - "Вычисления".

1. Пакет продукций "нодЦелое". Операторное выражение "нодЦелое(x1 x2)" имеет своим значением наибольший общий делитель двух целых чисел x1 и x2. Формат пакета задается термом "программа(нодЦелое вход(x1 Целое) вход(x2 Целое) выход(x3 Целое) цикл выражение уровень(1))".

   (a) Стандартизация аргументов.
   $\forall_a(a < 0 \to a = -a)$
   $\forall_b(b < 0 \to b = -b)$
   $\forall_{abd}(b < a \ \& \ d = a \to a = b \ \& \ b = d)$
   Уровни срабатывания приемов равны 0, т.е. они применяются однократно до входа в основной цикл. Первые два приема отбрасывают знаки минус, третий - выносит на первое место меньшее число.

   (b) Основной цикл.
   $\forall_{abde}(\neg(a = 0) \ \& \ b = ad + e \to b = a \ \& \ a = e)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Усмотрение результата.
   $\forall_{abc}(a = 0 \to c = b)$
   Прием имеет указатель "результат", определяющий обрыв вычислений. Уровень срабатывания равен 1.

2. Пакет продукций "Простые". Оператор "Простые(x1)" перечисляет последовательные простые числа x1. Формат пакета имеет вид "программа(Простые выход(x1 Целое) перечисление уровень(2))".

   (a) Первые простые числа.
   $\forall_b((b = 2 \ \lor \ b = 3 \ \lor \ b = 5 \ \lor \ b = 7) \to a = b)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Основной цикл.
   $\forall_{mn}(n -$ натуральное $\& \ m = 2n + 9 \ \&$
   $\forall_{kprs}(k -$ натуральное $\& \ p = 2k + 1 \ \& \ m = ps + r \ \& \ p \leq s \to \neg(r = 0)) \to a = m)$
   Четные числа пропускаются, рассмотрение нечетных начинается с 11. Указатель "окончание(фикс(3 9))" означает, что перечисление натуральных k обрывается, как только становится ложным антецедент $p \leq s$. Уровень срабатывания равен 2.

10.6.2 Вычисления с многочленами

Вычислительные пакеты, связанные с многочленами, можно найти в разделе оглавления ГЕНОЛОГа "Элементарная алгебра" - "Многочлены" - "Вычисления". В приемах этих пакетов используются следующие реализованные на ЛОСе операторы и операторные выражения:

1. коэффициентмн(x1 x2) - коэффициент многочлена x1 при степени x2. Компилятором переводится в выражение "выч(коэффициентмн x1 x2)".

2. многочлен(x1 x2 x3) - многочлен от x1 переменных над кольцом x2, коэффициенты которого задаются набором x3. Компилируется процедурой "прогрвыражение". Обычно x1 = 1.

3. deg(a) - степень многочлена a. Компилятором переводится в выражение "выч(степеньмн a)".

4. старшкоэфф(x1) - коэффициент многочлена x1 при старшем члене. Компилятором переводится в выражение "конец(x1)".

5. минусмн(x1) - результат изменения знаков коэффициентов многочлена x1. Компилятором переводится в выражение "выч(минусмн x1)".

6. кольцомн(x1) - кольцо, над которым рассматривается многочлен x1. Компилятором переводится в выражение "начало(x1)".

Простейшие действия с многочленами

1. Пакет продукций "делкоэфф". Операторное выражение "делкоэфф(x1 x2)" имеет своим значением результат сокращения коэффициентов многочлена x2, имеющего целочисленные коэффициенты, на целое число x1. Формат пакета задается термом "программа(делкоэфф вход(x1 Целое) вход(x2 многочлен(Целое)) выход(x3 многочлен(Целое)) выражение)". Единственный прием пакета выполняет требуемое сокращение:

   $\forall_{abcn}(\deg(b) = n \rightarrow c =$
   $\text{многочлен}(1, \text{Целые}, \lambda_i(\text{коэффициентмн}(b, i)/a, i \in \{0, \dots, n\})))$

2. Пакет продукций "сокращмнЦелое". Оператор "сокращмнЦелое"(x1 x2 x3)" вычисляет наибольший общий делитель x2 коэффициентов целочисленного многочлена x1, а также результат x3 сокращения коэффициентов многочлена x1 на x2. Формат пакета - "программа(сокращмнЦелое вход(x1 многочлен(Целое)) выход(x2 Целое) выход(x3 многочлен(Целое)))".

   (a) Случай взаимно простых коэффициентов.
   $\forall_{abcnp}(\deg(a) = n \,\&\, p = \text{нодвсех}(\{; \lambda_i(\text{коэффициентмн}(a, i), i \in \{0, \dots, n\})\})$
   $\&\ (p = 0\ \vee\ p = 1) \rightarrow b = p \,\&\, c = (a \text{ при } 0 < \text{старшкоэфф}(a),\ \text{иначе}\ -a))$
   Знак минус обозначает логический символ "минусмн". Вычисление наибольшего общего делителя конечного множества чисел обеспечивается общей схемой компиляции (см. процедуру компилятора "прогрвыражение") для распространения двуместной ассоциативно-коммутативной операции на группу операндов. Здесь используется справочник "перечисление", определяющий по символу "нодцелое" символ "нод". Результатом компиляции служит кванторная импликация, просматривающая элементы группы чисел и обращающаяся на каждом шаге к процедуре "нодЦелое".

   (b) Общий случай.
   $\forall_{abcgnp}(\deg(a) = n \,\&\, p = \text{нодвсех}(\{; \lambda_i(\text{коэффициентмн}(a, i), i \in \{0, \dots, n\})\})$
   $\&\ \neg(p = 1)\ \&\ \neg(p = 0)\ \&\ g =$
   $\text{многочлен}(1, \text{Целые}, \lambda_i(\text{коэффициентмн}(a, i)/p, i \in \{0, \dots, n\})) \rightarrow$
   $b = p \,\&\, c = (g \text{ при } 0 < \text{старшкоэфф}(g),\ \text{иначе}\ -g))$

3. Пакет продукций "сокращмод". Оператор "сокращмод(x1 x2 x3)" домножает все коэффициенты многочлена x1 с коэффициентами над полем вычетов по простому модулю на некоторую константу k таким образом, чтобы старший коэффициент стал равен единице. Выходной переменной x2 присваивается k, а выходной переменной x3 - результат домножения. Формат пакета задается термом "программа(сокращмод вход(x1 многочлен(вычеты)) выход(x2 Целое) выход(x3 многочлен(вычеты)))".

(a) Старший коэффициент не равен 1.

$\forall_{abcnprs}(\text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p)\ \&\ \deg(a) = n\ \&$
$\text{коэффициентмн}(a, n) = r\ \&\ \neg(r = 0)\ \&\ \neg(r = 1)\ \&$
$(rs)(\text{mod}\ p) = 1 \rightarrow b = s\ \&$
$c = \text{многочлен}(1, \text{mod}(p), \lambda_i((\text{коэффициентмн}(a, i)s)(\text{mod}\, p), i \in \{0, \ldots, n\})))$

Указатель "смпрог(простое(p))" сообщает компилятору, что значением p служит простое число.

(b) Старший коэффициент равен 1.

$\forall_{abcnp}(\text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p)\ \&\ \deg(a) = n\ \&\ \text{коэффициентмн}(a, n) = 1 \rightarrow$
$b = 1\ \&\ c = a)$

(c) Нулевой многочлен.

$\forall_{abcnp}(\text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p)\ \&\ \deg(a) = n\ \&\ \text{коэффициентмн}(a, n) = 0 \rightarrow$
$b = 1\ \&\ c = a)$

4. Пакет продукций "типмнвычеты". Значением выражения "типмнвычеты(x1 x2)" служит результат преобразования многочлена x1 с целыми коэффициентами к виду многочлена с коэффициентами из кольца вычетов по модулю x2. Формат пакета задается термом "программа(типмнвычеты вход(x1 многочлен(Целое)) вход(x2 Целое) выход(x3 многочлен(вычеты)) выражение)".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcn}(\deg(a) = n \rightarrow$
   $c = \text{многочлен}(1, \text{mod}(b), \lambda_i(\text{коэффициентмн}(a, i)(\text{mod}\ b), i \in \{0, \ldots, n\})))$

5. Пакет продукций "значениемн". Значением выражения "значениемн(x1 x2)" служит значение многочлена x1 в точке x2. Формат пакета задается термом "программа(значениемн вход(x1 многочлен(число)) вход(x2 число) выход(x3 число) уровень(1) выражение)". Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{afn}(\deg(a) = n \rightarrow c = \text{старшкоэфф}(a)\ \&$
   $\forall_i(i \in \{0, \ldots, n-1\} \rightarrow c = \text{коэффициентмн}(a, n-i-1) + cb))$

Наибольший общий делитель многочленов

1. Пакет продукций "НОДЦелое". Значением выражения "НОДЦелое(x1 x2)" служит наибольший общий делитель двух многочленов x1 и x2 с целыми коэффициентами, представленными как "длинное целое". Формат пакета задается термом "программа(НОДЦелое вход(x1 многочлен(Целое)) вход(x2 многочлен(Целое)) выход(x3 многочлен(Целое)) цикл выражение уровень(2))".

   (a) Стандартизация данных.

   $\forall_{ade}(\text{сокращмн}(a, d, e) \rightarrow a = e)$

   $\forall_{ade}(\text{сокращмн}(b, d, e) \rightarrow b = e)$

   $\forall_{abd}(\deg(b) < \deg(a)\ \&\ d = a \rightarrow a = b\ \&\ b = d)$

   Первые два приема используют оператор "сокращмнЦелое" для сокращения коэффициентов многочленов на их наибольший общий делитель. Третий прием переставляет многочлены так, чтобы степень первого была не больше степени второго. Уровень срабатывания приемов равен 0, т.е. они применяются до основного цикла.

(b) Усмотрение результата.

$\forall_{abc}(a = \text{Нольмн}(x, \text{Целые}) \to c = b)$

$\forall_{abc}(b = \text{Нольмн}(x, \text{Целые}) \to c = a)$

Указатель "результат" определяет обрыв цикла вычислений и выход из пакета. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Деление с остатком.

$\forall_{abmpq}(\text{остатокмн}(b, a, p)\ \&\ \text{сокращмн}(p, m, q) \to b = a\ \&\ a = q)$

Первый антецедент обрабатывается оператором "Выч(остатокмн ...)". Уровень срабатывания равен 2.

2. Пакет продукций "НОДЦелоемод". Значением выражения "НОДЦелоемод(x1 x2)" служит наибольший общий делитель двух многочленов x1 и x2 с коэффициентами из общего поля вычетов, представленными как "длинное целое". Формат пакета задается термом "программа(НОДЦелое вход(x1 многочлен(вычеты)) вход(x2 многочлен(вычеты)) выход(x3 многочлен(вычеты)) цикл выражение уровень(2))".

   (a) Стандартизация данных.

   $\forall_{abd}(\deg(b) < \deg(a)\ \&\ d = a \to a = b\ \&\ b = d)$

   Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Усмотрение результата. Приемы в точности те же, что для предыдущего пакета.

   (c) Деление с остатком.

   $\forall_{abpq}(\text{частноемн}(b, a, p, q) \to b = a\ \&\ a = q)$

   Антецедент обрабатывается оператором "Выч(частноемн ...)". Уровень срабатывания равен 2.

3. Пакет продукций "Частноерешмн". Оператор "Частноерешмн(x1 x2 x3 x4 x5)" по заданным многочленам x1, x3, x5 над полем вычетов находит такие многочлены x2 и x4, для которых выполнено соотношение x1x2 + x3x4 = x5. Формат пакета определяется термом "программа(Частноерешмн вход(x1 многочлен(вычеты)) вход(x3 многочлен(вычеты)) вход(x5 многочлен(вычеты)) выход(x2 многочлен(вычеты)) выход(x4 многочлен(вычеты)))". Отсутствие цикла означает, что результат выдается сразу при срабатывании любого приема.

   (a) Понижение степени многочлена.

   $\forall_{abcdepqrs}(\deg(c) < \deg(a)\ \&\ \text{частноемн}(a, c, p, q)\ \&\ \neg(\text{старшкоэфф}(q) = 0)\ \&\ qr + cs = e \to b = r\ \&\ d = s - pr)$

   $\forall_{abcdepqrs}(\deg(a) \leq \deg(c)\ \&\ \text{частноемн}(c, a, p, q)\ \&\ \neg(\text{старшкоэфф}(q) = 0)\ \&\ ar + qs = e \to b = r - ps\ \&\ d = s)$

   Последний антецедент реализует рекурсивное обращение.

   (b) Один многочлен делится на другой.

   $\forall_{abcdepqrs}(\deg(c) < \deg(a)\ \&\ \text{частноемн}(a, c, p, q)\ \&\ \text{старшкоэфф}(q) = 0\ \&\ \text{частноемн}(e, c, r, s)\ \&\ \text{старшкоэфф}(s) = 0 \to b = s\ \&\ d = r)$

   $\forall_{abcdepqrs}(\deg(a) \leq \deg(c)\ \&\ \text{частноемн}(c, a, p, q)\ \&\ \text{старшкоэфф}(q) = 0\ \&\ \text{частноемн}(e, a, r, s)\ \&\ \text{старшкоэфф}(s) = 0 \to b = r\ \&\ d = s)$

Производные многочленов

1. Пакет продукций "производнМн". Значением выражения "производнМн(x1)" служит производная многочлена x1 с целыми коэффициентами, представленными как "длинное целое". Формат пакета задается термом "программа(производнМн вход(x1 многочлен(Целое)) выход(x2 многочлен(Целое)) выражение)".

   (a) Производная неконстантного многочлена.
   $\forall_{abn}(\deg(a) = n \ \& \ \neg(n = 0) \to$
   $b = \text{многочлен}(1, \text{Целые}, \lambda_i((i + 1)\text{коэффициентмн}(a, i + 1),$
   $i \in \{0, \dots, n - 1\})))$

   (b) Производная константного многочлена.
   $\forall_{ab}(\deg(a) = 0 \to b = \mu_x(0, \text{Целые}))$

2. Пакет продукций "производнМнмод". Значением выражения "производнМнмод(x1)" служит производная многочлена x1 с коэффициентами из кольца вычетов по натуральному модулю, представленными как "длинное целое". Формат пакета задается термом "программа(производнМнмод вход(x1 многочлен(вычеты)) выход(x2 многочлен(вычеты)) выражение)".

   (a) Производная неконстантного многочлена.
   $\forall_{abnp}(\text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p) \ \& \ \deg(a) = n \ \& \ \neg(n = 0) \to$
   $b = \text{многочлен}(1, \text{mod}(p), \lambda_i(((i + 1)\text{коэффициентмн}(a, i + 1))(\text{mod}\ p),$
   $i \in \{0, \dots, n - 1\})))$

   (b) Производная константного многочлена.
   $\forall_{abp}(\deg(a) = 0 \ \& \ \text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p) \to b = \mu_x(0, \text{mod}(p)))$

3. Пакет продукций "производнмн". Значением выражения "производнмн(x1)" служит производная многочлена x1 с вещественными коэффициентами, представленными в виде "число с плавающей запятой". Формат пакета задается термом "программа(производнмн вход(x1 многочлен(число)) выход(x2 многочлен(число)) выражение)".

   (a) Производная неконстантного многочлена.
   $\forall_{abn}(\deg(a) = n \ \& \ \neg(n = 0) \to$
   $b = \text{многочлен}(1, \text{веществполе}, \lambda_i((i + 1)\text{коэффициентмн}(a, i + 1),$
   $i \in \{0, \dots, n - 1\})))$

   (b) Производная константного многочлена.
   $\forall_{ab}(\deg(a) = 0 \to b = \mu_x(0))$

   Напомним, что в случае вещественного поля второй операнд задающего многочлен выражения $\mu(\dots)$ формульным редактором не прорисовывается.

4. Пакет продукций "комплпроизвмн". Значением выражения "комплпроизвмн(x1)" служит производная многочлена x1 с комплексными коэффициентами. Формат пакета задается термом "программа(производнмн вход(x1 многочлен(комплексное)) выход(x2 многочлен(комплексное)) выражение)".

   (a) Производная неконстантного многочлена.
   $\forall_{abn}(\deg(a) = n \ \& \ \neg(n = 0) \rightarrow$
   $b =$ многочлен$(1,$ комплексное поле$, \lambda_i((i + 1)$коэффициентмн$(a, i + 1),$
   $i \in \{0, \ldots, n - 1\})))$

   (b) Производная константного многочлена.
   $\forall_{ab}(\deg(a) = 0 \rightarrow b = \mu_x(0,$ комплекснполе$))$

Корни многочленов

1. Обращение к пакету продукций "корнимн" для приближенного нахождения вещественных корней многочлена.

   $\forall_{abcfmx}(a - b = f(x) \ \&$ точность(корнимн$(f), c) = m \rightarrow a = b \ \&$ точность$(x, c) \leftrightarrow x \in m)$

   Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Конъюнктивные члены заменяемой части идентифицируются с условиями задачи на описание, имеющей неизвестную x. Переменные b, c идентифицируются с десятичными константами. Выражение a - сумма, содержащая переменную x. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором "нормплюс", правая - имеет вид "значениемн(f, x)". Указатель "значениемн(f)" определяет идентификацию f с многочленом. По мере возможности, этот многочлен берется над кольцом целых чисел, иначе - над полем вещественных. Второй антецедент, выделенный указателем "программа", реализует обращение к пакету "корнимн". Входными данными здесь служат многочлен f и уровень точности вычислений c. Предварительно компилятор обеспечивает преобразование коэффициентов многочлена в формат "с плавающей запятой". Уровень срабатывания равен 1.

2. Пакет продукций "корнимн". Значением выражения "корнимн(x1 x2)" служит множество корней многочлена x1 от одной вещественной переменной, найденных с помощью вычислений, предпринимавшихся с уровнем точности x3. Формат пакета задается термом "программа(корнимн вход(x1 многочлен(число)) вход(x2 число) выход(x3 класс(число)) выражение)".

   Пакет имеет прием, определяющий последовательность обращений к вспомогательным пакетам. Эти пакеты выполняют следующие действия:

   (a) Определяется интервал, на котором расположены корни многочлена.
   (b) Находится система Штурма - последовательность взятых со знаком минус остатков, получаемых при нахождении наибольшего общего делителя многочлена и его производной по алгоритму Евклида.
   (c) При помощи системы Штурма выполняется отделение корней - определяются интервалы, на каждом из которых имеется ровно один корень.
   (d) Выполняется уточнение корней.

   Теорема приема имеет следующий вид:

   $\forall_{abcdef}(\neg(\deg(a) = 0) \ \&$ интервалкорней$(a, d) \ \&$ остаткимн$(a,$ производнаямн$(a), e) \ \&$ отделениекорней$(a, d, e, f) \rightarrow c = \mathrm{set}_x(\exists_i(i \in f \ \&$ уточнениекорня$(a, i, b, x))))$

Для вырожденного случая - константного многочлена с ненулевым свободным членом - создан отдельный прием:

$\forall_{abc}(\deg(a) = 0 \ \& \ \neg(\text{старшкоэфф}(a) = 0) \to c = 0)$

3. Пакет продукций "интервалкорней". Оператор "интервалкорней(x1 x2)" определяет промежуток x2, на котором расположены все корни многочлена x1. Формат пакета задается термом "программа(интервалкорней вход(x1 многочлен(число)) выход(x2 набор(число)) уровень(1))".

   (a) Переход к многочлену с положительным старшим коэффициентом.
   $\forall_{af}(\text{старшкоэфф}(a) \leq 0 \ \& \ \text{интервалкорней}(-a, c) \to b = c)$

   (b) Определение интервала корней с помощью оператора "граньkорней".
   $\forall_{abcdn}(0 < \text{старшкоэфф}(a) \ \& \ \deg(a) = n \ \& \ \text{граньkорней}(a, c) \ \&$
   $\text{граньkорней}(\text{многочлен}(1, \text{веществполе}, \lambda_i((\text{коэффициентмн}(a, i) \text{ при}$
   $n - i - \text{even}, \text{иначе } - (\text{коэффициентмн}(a, i))), i \in \{0, \dots, n\})), d) \to$
   $b = (-d - 0.0001, c + 0.0001))$

4. Пакет продукций "граньkорней". Оператор "граньkорней(x1 x2)" определяет такое число x2, что все корни многочлена x1 с положительным старшим коэффициентом меньше этого числа. Формат пакета определяется термом "программа(граньkорней вход(x1 многочлен(число)) выход(x2 число) уровень(2))".

   (a) Определение верхней грани корней при наличии отрицательного коэффициента.
   $\forall_{abcdkn}(\deg(a) = n \ \& \ c = \text{старшкоэфф}(a) \ \&$
   $\text{наибольший}(k, \text{set}_i(i \in \{0, \dots, n\} \ \& \ \text{коэффициентмн}(a, i) < 0)) \ \&$
   $\text{наибольший}(d, \text{set}_x(\exists_i(i \in \{0, \dots, n\} \ \& \ \text{коэффициентмн}(a, i) < 0 \ \&$
   $x = -(\text{коэффициентмн}(a, i))))) \to b = 1 + (d/c)^{1/(n-k)})$

   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Выбор нуля в качестве верхней грани корней многочлена с неотрицательными коэффициентами.
   $\forall_b(b = 0)$

   Уровень срабатывания равен 2, что и гарантирует отсутствие отрицательных коэффициентов.

5. Пакет продукций "Остаткимн". Утверждение "остаткимн(x1 x2 x3)" реализуется вычислительным пакетом "Остаткимн(x1 x2 x3)". Входными данными служат многочлены x1 и x2. Выходной переменной x3 присваивается последовательность взятых со знаком "минус"остатков, полученных при нахождении наибольшего общего делителя многочленов x1 и x2 по алгоритму Евклида. Такая последовательность дает систему Штурма для многочлена x1, если в качестве x2 берется производная x1. Формат пакета определяется термом "программа(Остаткимн вход(x1 многочлен(число)) вход(x2 многочлен(число)) выход(x3 набор(многочлен(число))))".

   (a) Степень остатка деления многочленов больше нуля.
   $\forall_{abhp}(a (\text{mod } b) = h \ \& \ \neg(\text{старшкоэфф}(h) = 0) \ \& \ \text{остаткимн}(b, -h, p) \to c = \text{префикс}(a, p))$

В первом антецеденте используется символ "вычетмн". Компилятор преобразует его в оператор "выч(вычетмн ...)". Последний антецедент реализует рекурсивное обращение.

(b) Многочлены делятся друг на друга.

$\forall_{abh}(a(\mathrm{mod}\ b) = h\ \&\ \text{старшкоэфф}(h) = 0 \to c = (a, b))$

6. Пакет продукций "отделениекорней". Оператор "отделениекорней(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными многочлен x1, интервал x2 и набор x3 многочленов, образующий систему Штурма для x1. Выходной переменной x4 присваивается множество непересекающихся подинтервалов интервала x2, каждый из которых содержит ровно один корень. Формат пакета определяется термом "программа(отделениекорней вход(x1 многочлен(число)) вход(x2 набор(число)) вход(x3 набор(многочлен(число))) выход(x4 класс(набор(число))) параметр(x5 целое) цикл уровень(2))".

(a) Инициализация параметров.

$\forall_{bce}(e = \text{числокорней}(c, b(1), b(2)))$

Прием присваивает параметру e число корней многочлена на интервале x2. Для этого описываемый ниже оператор "числокорней" использует систему Штурма x3. Уровень срабатывания приема равен 0.

(b) Число корней на интервале равно 0.

$\forall_{de}(e = 0 \to d = \emptyset)$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Число корней на интервале равно 1.

$\forall_{bde}(e = 1 \to d = \{b\})$

Имеется указатель "результат". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Число корней на интервале более одного.

Здесь предпринимается деление отрезка пополам:

$\forall_{abcdefpq}(1 < e\ \&\ f = (b(1) + b(2))/2\ \&\ 0.000000001 < |a(f)|\ \&$ $\text{отделениекорней}(a, (b(1), f), c, p)\ \&\ \text{отделениекорней}(a, (f, b(2)), c, q) \to$ $d = p \cup q)$

Как и выше, используется указатель "результат", а уровень срабатывания равен 1. Недостатком приема является то, что середина отрезка может оказаться корнем. Для такого случая добавлены еще два приема, подразбивающие отрезок на две неравны части. Теоретически возможен случай, когда все три приема попадут на точки корней, и при желании усовершенствование пакета можно продолжить.

$\forall_{abcdfpq}(f = (b(1) + 2b(2))/3\ \&\ 0.000000001 < |a(f)|\ \&$ $\text{отделениекорней}(a, (b(1), f), c, p)\ \&\ \text{отделениекорней}(a, (f, b(2)), c, q) \to$ $d = p \cup q)$

$\forall_{abcdefpq}(f = (2b(1) + b(2))/3\ \&\ 0.000000001 < |a(f)|\ \&$ $\text{отделениекорней}(a, (b(1), f), c, p)\ \&\ \text{отделениекорней}(a, (f, b(2)), c, q) \to$ $d = p \cup q)$

Уровни срабатывания последних приемов равны 2.

7. Пакет продукций "числокорней". Значением выражения "числокорней(x1 x2 x3)" служит число корней многочлена, имеющего систему Штурма x1, на интервале от x2 до x3. Формат пакета задается термом "программа(числокорней вход(x1 набор(многочлен(число))) вход(x2 число) вход(x3 число) выход(x4 целое) выражение)".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcdkmnpq}(l(a) = n \ \& \ p = \text{список}(\lambda_i(\text{sg}(a(i)(b)), i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ \neg(a(i)(b) = 0))) \ \&$
   $q = \text{список}(\lambda_i(\text{sg}(a(i)(c)), i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ \neg(a(i)(c) = 0))) \ \& \ l(p) = m \ \&$
   $l(q) = k \rightarrow d = \text{card}(\text{set}_i(i \in \{1, \dots, m-1\} \ \& \ \neg(p(i+1) = p(i)))) -$
   $\text{card}(\text{set}_i(i \in \{1, \dots, k-1\} \ \& \ \neg(q(i+1) = q(i)))))$

   Здесь "список(F)" - набор значений определенной на конечном множестве чисел функции F, расположенных в порядке возрастания аргументов.

8. Пакет продукций "уточнениекорня". Оператор "уточнениекорня(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными многочлен x1; интервал x2, содержащий единственный корень этого многочлена, и число x3 - точность определения корня. Выходной переменной x4 присваивается значение, приближающее корень интервала x2 с точностью x3. Формат пакета определяется термом "программа(уточнениекорня вход(x1 многочлен(число)) вход(x2 набор(число)) вход(x3 число) выход(x4 число) параметр(x5 число) параметр(x6 число) параметр(x7 число) цикл уровень(2))".

   (a) Инициализация параметров.
   $\forall_{abefg}(e = (b(1) + b(2))/2 \ \& \ f = a(b(1)) \ \& \ g = a(e))$
   Значением параметра e является середина интервала b, параметра f - значение многочлена в левом конце интервала b, значением параметра g - значение многочлена в середине интервала. В процессе подразбиений интервала это соответствие будет сохраняться. Уровень срабатывания приема равен 0.

   (b) Усмотрение результата.
   $\forall_{deg}(g = 0 \rightarrow d = e)$
   $\forall_{bcd}(|b(1) - b(2)| < c \rightarrow d = e)$
   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа. Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Разбиение отрезка.
   $\forall_{abef}(0 < fg \rightarrow b = (e, b(2)) \ \& \ e = (b(2) + e)/2 \ \& \ f = g \ \& \ g = a(e))$
   $\forall_{abef}(fg < 0 \rightarrow b = (b(1), e) \ \& \ e = (b(1) + e)/2 \ \& \ g = a(e))$
   Уровень срабатывания равен 2.

Разложение многочлена на множители

Для быстрого разложения на множители многочлена с целыми коэффициентами был создан вычислительный пакет "множителимн". В основе пакета лежит известный алгоритм Берлекэмпа-Гензеля. Подробное описание его можно найти, например, в книге Прасолова В.В. "Многочлены"(2003г.). Здесь нас будет интересовать не сам этот алгоритм, а лишь возможность записи его на уровне, приближенном к уровню теорем. Таким образом создается обучающий материал, необходимый для прослеживания истоков вычислительных программ в теоретическом логическом выводе. При этом компилятор ГЕНОЛОГа обеспечивает вполне эффективный перевод алгоритма в ЛОС-программу. Так как последняя, в основном, манипулирует с многоразрядными целыми числами и использует для этого реализованные на СИ подпрограммы, то неизбежные при использовании интерпретатора ЛОСа потери на пересылки данных, сравнительно с трудоемкостью указанных подпрограмм, оказываются небольшими. Тестовые задачи на разложение многочленов степеней от 7 до 13 решались системой практически мгновенно.

Прием, обращающийся к данному пакету, относится к нормализатору "видумножение". Его теорема имеет следующий вид:

$\forall_{abcfgnxy}(a+b=f(x)$ & $f=\text{многочлен}(y,\text{Целые},c)$ & $f=\text{произведениевсехмн}(g)$ & $l(g)=n$ & $p=\prod_{i=1}^{n} g(i)(x) \rightarrow a+b=p)$

Заголовок приема - "замена(второйтерм видумножение)". Указатель "контекст(входит(переменная(x23)параметры(корень)))" определяет выбор переменной x среди переменных преобразуемого выражения. Первые два антецедента и пятый антецедент выделены указателем "идентификатор". При этом указатель "значениемн(x6)" определяет идентификацию f как многочлена, значение которого в точке x задается выражением $a+b$. Второй антецедент проверяет, что многочлен был сформирован над кольцом целых чисел. Третий антецедент, выделенный указателем "программа", обращается к пакету "множителимн". Переменная g идентифицируется с набором полученных сомножителей. Четвертый антецедент тоже выделен указателем "программа"; он находит длину n набора g. Наконец, пятый антецедент формирует результат - произведение множителей g. Его конечное произведение выписывается как обычное произведение. Перед вычислениями проверяется, что преобразуемое выражение имеет единственную переменную и содержит степень этой переменной, большую 4. Последнее ограничение блокирует применение "тяжелой артиллерии" там, где достаточно простых средств. В этом же направлении работает ряд других ограничений на целевую установку задачи. Наконец, проверяется, что n отлично от 1. Уровень срабатывания приема в пакете "видумножение" равен 3.

1. Пакет продукций "множителимн". Оператор "множителимн(x1 x2)" имеет своим входным данным многочлен x1 над кольцом целых чисел, коэффициенты которого представлены в формате "длинное целое". Выходной переменной x2 присваивается набор многочленов в том же формате, произведение которых равно x1. Вообще говоря, элементы набора x2 не являются неприводимыми. Чтобы выполнить их "доразложение" на множители, решатель повторно применяет прием, обращающийся к оператору "множителимн". Формат пакета задается термом "программа(множителимн вход(x1 многочлен(Целое)) выход(x2 набор(многочлен(Целое))) уровень(2))".

   (a) Определение наибольшего общего делителя многочлена и его производной.

   $\forall_{abghpqrst}(\text{кольцомн}(a)=\text{Целые}$ & $g=\text{производнаямн}(a)$ &
   $h=\text{НОД}(a,g)$ & $1\leq \deg(h)$ & $\text{частноемн}(a,h,p,q)$ & $r=\text{НОД}(h,p)$ &
   $\text{частноемн}(p,r,s,t)\rightarrow b=(h,r,s))$

   Прием результативен, если многочлен имеет кратные корни - тогда наибольший общий делитель его и производной невырожденный. Повторное нахождение наибольшего общего делителя позволяет вычленить произведение простых корней. Если прием срабатывает, то сразу же выдается ответ. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Разложение многочлена над кольцом целых чисел, использующее алгоритм Берлекэмпа и лемму Гензеля.

$\forall_{ABCDabcgmnpst}(\deg(a) = n\ \&\ \text{кольцомн}(a) = \text{Целые}\ \&\ \text{модульмн}(a, p, g)\ \&$
$g = \text{произведениевсехмн}(A)\ \&\ \neg(l(A) = 1)\ \&$
$c = \sum_{i=0}^{n}(\text{коэффициентмн}(a, i))^2\ \&\ m = [(n/2 + 1)\log_p 2 + \log_p c]\ \&$
$\text{Коэффподнятия}(A, B, C, D)\ \&\ \text{Поднразлож}(A, a, m, A, B, C, D, s)\ \&$
$\text{Разложмн}(a, s, t) \to b = t)$

Антецеденты реализуют последовательные этапы алгоритма Берлекэмпа-Гензеля. Подробнее эти этапы будут рассмотрены ниже, по мере ввода соответствующих пакетов. Уровень срабатывания приема равен 2, т.е. применяется он к многочлену, заведомо не имеющему кратных корней.

2. Пакет продукций "модульМн". Утверждение "модульмн(x1 x2 x3)" реализуется оператором "модульМн(x1 x2 x3)". Его входным данным является многочлен с целыми коэффициентами, представленными в формате "длинное целое", причем предполагается, что этот многочлен не имеет кратных корней и общего отличного от 1 натурального делителя своих коэффициентов. Выходной переменной x2 присваивается наименьшее простое число, такое, что над кольцом вычетов по модулю 2 многочлен x1 взаимно прост со своей производной, и при этом его старший коэффициент взаимно прост с x2. Выходной переменной x3 присваивается результат приведения x1 к виду многочлена над кольцом вычетов по модулю x2. Формат пакета задается термом "программа(модульМн вход(x1 многочлен(Целое)) выход(x2 Целое) выход(x3 многочлен(вычеты)))".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcpghs}(\text{простое}(p)\ \&\ g = \text{типмн}(a, \mathrm{mod}(p))\ \&\ h = \text{производнаямн}(g)\ \&$
   $s = \text{НОД}(g, h)\ \&\ \deg(s) = 0\ \&\ \neg(p|\text{старшкоэфф}(a)) \to b = p\ \&\ c = g)$

   Реализуется перебор последовательных простых чисел до первого, удовлетворяющего перечисленным выше условиям.

3. Пакет продукций "множителимнмод". После того, как было выбрано подходящее простое число p и найден результат g преобразования исходного многочлена a к виду многочлена над полем вычетов по модулю p, предпринимается попытка разложить на множители многочлен g. Это выполняется антецедентом "g = произведениевсехмн(A)", обрабатываемым оператором "множителимнмод(x1 x2)". Входным данным служит многочлен x1 над полем вычетов по простому модулю, причем коэффициенты представлены в формате "длинное целое". Выходной переменной x2 присваивается набор многочленов над тем же полем, произведение которых равно x1. Пакет реализует известный алгоритм Берлекэмпа, описание которого приводить не будем. Формат пакета определяется термом "программа(множителимнмод вход(x1 многочлен(вычеты)) выход(x2 набор(многочлен(вычеты))) параметр(x3 многочлен(вычеты)) параметр(x4 многочлен(вычеты)) параметр(x5 набор(многочлен(вычеты))) параметр(x6 логсимвол) цикл уровень(1))".

   (a) Инициализация параметров.

$\forall_{acdefp}(\text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p) \to$
$c = \text{многочлен}(1, \text{mod}(p), \text{таблица}(\{p \to 1\}))\ \&\ d = \mu_x(1, \text{mod}(p))\ \&$
$e = (d)\ \&\ f = 1)$ Уровень срабатывания равен 0.

(b) Шаг цикла построения набора многочленов.

$\forall_{adefn}(\deg(a) = n\ \&\ f < n \to d = dc(\text{mod}\ a)\ \&\ e = \text{суффикс}(e, d)\ \&\ f = f{+}1)$
Уровень срабатывания равен 1.

(c) Разложение многочлена над полем вычетов по простому модулю с помощью алгоритма Берлекэмпа.

$\forall_{abefnpxy}(\text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p)\ \&\ \deg(a) = n\ \&\ f = n\ \&$
$\text{базис}(\text{Ядро}(\text{преобрстолбцов}(\lambda_{ij}((\text{коэффициентмн}(e(i), j-1) -$
$((1\ \text{при}\ i = j,\ \text{иначе}\ 0)))(\text{mod}\ p), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}), \text{mod}(p))), x)$
$\&\ \text{Разложмод}((a), n, \{; x\}, y) \to b = y)$

Уровень срабатывания равен 1, причем сразу после срабатывания приема выдается результат. Антецедент "базис(...)" реализуется вычислительным пакетом "базисядра"который будет описан ниже, в связи с матричными вычислениями. Фактически, данный прием лишь определяет необходимый базис ядра x, а само разложение выполняется оператором "Разложмод" (см. далее).

4. Пакет продукций "разложмод". Оператор "разложмод(x1 x2 x3 x4)" имеет входными данными набор x1 многочленов над полем вычетов по простому модулю, степень x2 произведения этих многочленов и собственный базис x3, определяемый согласно алгоритму Берлекэмпа разложения многочлена на множители. Выходной переменной x4 присваивается набор неприводимых множителей, на которые разлагается произведение многочленов x1. Формат пакета задается термом "программа(Разложмод вход(x1 набор(многочлен(вычеты))) вход(x2 целое) вход(x3 класс(набор(Целое))) выход(x4 набор(многочлен(вычеты))) цикл уровень(2))".

(a) Инициализация накопителя результата.

$\forall_d(d = \text{пустоеслово})$

Уровень срабатывания равен 0.

(b) Шаг доразложения.

$\forall_{abcdefghpqrstuv}(a = \text{префикс}(g, h)\ \&\ 1 < \deg(g)\ \&\ \text{кольцомн}(g) = \text{mod}(p)\ \&$
$q \in \{0, \ldots, p-1\}\ \&\ e \in c\ \&\ f = \text{многочлен}(1, \text{mod}(p), \lambda_j(((e(j+1) -$
$q)(\text{mod}\ p)\ \text{при}\ j = 0,\ \text{иначе}\ e(j+1)), j \in \{0, \ldots, b-1\}))\ \&\ 0 < \deg(f)\ \&$
$r = \text{НОД}(g, f)\ \&\ 0 < \deg(r)\ \&\ \deg(r) < \deg(g)\ \&\ \text{сокращмод}(r, u, v)\ \&$
$\text{частноемод}(g, v, s, t) \to a = (v, s; h))$

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Пополнение списка неприводимых множителей.

$\forall_{adfgh}(a = \text{префикс}(g, h) \to d = \text{префикс}(g, d)\ \&\ a = h)$

Уровень срабатывания равен 2.

(d) Завершение разложения.

$\forall_a(a = \text{пустоеслово} \to \text{истина})$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 1.

5. Пакет продукций "Коэффподнятия". Оператор "Коэффподнятия(x1 x2 x3 x4)" имеет своим входным данным набор x1 попарно взаимно простых многочленов $f_1, \ldots, f_n$ над полем вычетов по простому модулю. Он определяет такие многочлены $u_1, v_1, \ldots, u_{n-1}, v_{n-1}$ что $u_i f_i + v_i f_{i+1} \ldots f_n = 1$ при всех $i = 1, \ldots, n-1$. Выходной переменной x2 присваивается набор $u_1, \ldots, u_{n-1}$; выходной переменной x3 - набор $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Выходной переменной x4 присваивается набор произведений $f_2 \ldots f_n, f_3 \ldots f_n, \ldots, f_n$. Формат пакета определяется термом "программа(Коэффподнятия вход(x1 набор(многочлен(вычеты))) выход(x2 набор(многочлен(вычеты))) выход(x3 набор(многочлен(вычеты))) выход(x4 набор(многочлен(вычеты))) параметр(x5 многочлен(вычеты)) параметр(x6 логсимвол) цикл)".

   (a) Инициализация значений.

   $\forall_{abcdefn}(l(a) = n \to b = \text{пустоеслово} \ \& \ c = \text{пустоеслово} \ \& \ d = \text{пустоеслово} \ \& \ e = a(n) \ \& \ f = n - 1)$

   Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Шаг цикла вычислений.

   $\forall_{abcdefpxy}(0 < f \ \& \ \text{кольцомн}(a(1)) = \text{mod}(p) \ \& \ a(f)x + ey = \mu_x(1, \text{mod}(p)) \to d = \text{префикс}(e, d) \ \& \ e = (e \text{ при } f = 1, \text{ иначе } a(f)e) \ \& \ b = \text{префикс}(x, b) \ \& \ c = \text{префикс}(y, c) \ \& \ f = f - 1)$

   Третий антецедент обрабатывается пакетом "Частноерешмн". Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Выдача результата.

   $\forall_f(f = 0 \to \text{истина})$

   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа. Уровень срабатывания равен 1.

6. Пакет продукций "Поднразлож". Оператор "Поднразлож(x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8)" имеет следующие входные данные. x1 - набор многочленов над кольцом вычетов по модулю p^n, где p - простое, n - натуральное. x2 - многочлен над кольцом целых чисел, причем результат приведения x2 к кольцу вычетов по модулю p^n равен произведению многочленов набора x1. x3 - целое неотрицательное число m. x4 - набор многочленов, определявших разложение x2 для случая $n = 1$. x5, x6, x7 - вспомогательные наборы, используемые при поднятии разложения до $n + m$-й степени числа p. Эти наборы суть выходные данные оператора "Коэффподнятия". Выходной переменной x8 присваивается набор многочленов над кольцом вычетов по модулю p^{n+m}, произведение которых равно результату приведения x2 к кольцу вычетов по тому же модулю. Формат оператора задается термом "программа(Поднразлож вход(x1 набор(многочлен(вычеты))) вход(x2 многочлен(Целое)) вход(x3 Целое) вход(x4 набор(многочлен(вычеты))) вход(x5 набор(многочлен(вычеты))) вход(x6 набор(многочлен(вычеты))) вход(x7 набор(многочлен(вычеты))) выход(x8 набор(многочлен(вычеты))) цикл)".

   (a) Шаг поднятия степени.

   $\forall_{abcdefghnpqrs}(l(a) = n \ \& \ \text{кольцомн}(a(1)) = \text{mod}(q) \ \& \ \neg(c = 0) \ \&$
   $\text{кольцомн}(d(1)) = \text{mod}(p) \ \&$
   $t = \text{типмн}(1/q(b - \prod_{i=1}^{n} \text{типмн}(a(i), \text{Целые})), \text{mod}(p)) \ \&$
   $\text{Шагподнятия}(t, a, d, e, f, g, r) \to a = r \ \& \ c = c - 1)$

(b) Завершение цикла.

$\forall_{acf}(c = 0 \to h = a)$

Сразу же после срабатывания приема выдается результат.

7. Пакет продукций "Шагподнятия". Оператор "Шагподнятия(x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7)" имеет следующие входные данные. x1 - частное от деления на текущую степень q простого числа p расхождения между исходным многочленом и его разложением по текущей степени q. x2 - набор множителей разложения для текущей степени q. x3 - набор множителей разложения для первой степени числа p. x4, x5, x6 - наборы многочленов, определенных оператором "Коэфф-поднятия". Выходной переменной x7 присваивается набор множителей разложения для следующей после q степени простого числа p. Формат пакета задается термом "программа(Шагподнятия вход(x1 многочлен(вычеты)) вход(x2 набор(многочлен(вычеты))) вход(x3 набор(многочлен(вычеты))) вход(x4 набор(многочлен(вычеты))) вход(x5 набор(многочлен(вычеты))) вход(x6 набор(многочлен(вычеты))) выход(x7 набор(многочлен(вычеты))) цикл)".

   (a) Инициализация накопителя.

   $\forall_{g}(g = \text{пустоеслово})$

   Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Шаг рекурсии.

   $\forall_{abcdefghinpqrtuv}(l(g) = i\ \&\ l(d) = n\ \&\ \neg(i = n)\ \&\ \text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p)\ \&$
   $r = b(i+1)\ \&\ \text{кольцомн}(r) = \text{mod}(q)\ \&\ \text{частноемн}(ae(i+1), c(i+1), h, v)$
   $\&\ t = ad(i+1) + hf(i+1)\ \&$
   $u = \text{суффикс}(g, \text{типмн}(r, \text{mod}(pq)) + q\text{типмн}(v, \text{mod}(pq))) \to$
   $a = t\ \&\ g = u)$

   Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Завершение цикла.

   $\forall_{abdginpqr}(l(g) = i\ \&\ l(d) = n\ \&\ i = n\ \&\ \text{кольцомн}(a) = \text{mod}(p)\ \&$
   $r = b(i+1)\ \&\ \text{кольцомн}(r) = \text{mod}(q) \to$
   $g = \text{суффикс}(g, \text{типмн}(r, \text{mod}(pq)) + q\text{типмн}(a, \text{mod}(pq))))$

   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа после срабатывания приема. Уровень срабатывания равен 1.

8. Пакет продукций "Разложмн". Оператор "Разложмн(x1 x2 x3)" реализует завершающий шаг разложения многочлена на множители по алгоритму Берлекэмпа-Гензеля. Значением входной переменной x1 служит множество многочленов, возникающих после поднятия степени разложения, значением переменной x2 - исходный многочлен над кольцом целых чисел. Переменной x3 присваивается набор многочленов над кольцом целых чисел, образующих разложение многочлена x2 на множители. Чтобы найти такие многочлены, реализуется перебор подмножеств множества x1, произведение которых, после ввода отрицательных коэффициентов, дает делитель многочлена x2 над кольцом цельых чисел. Формат пакета определяется термом "программа(Разложмн вход(x1 набор(многочлен(вычеты))) вход(x2 многочлен(Целое)) выход(x3 набор(многочлен(Целое))) уровень(3))".

(a) Выделение константного многочлена.

$\forall_{abcdegint}(n = l(a) \,\&\, i \in \{1, \ldots, n\} \,\&\, \text{старшкоэфф}(a(i)) = d \,\&\, 0 < \deg(a(i)) \,\&$
$\neg(d = 1) \;\&\; \text{сокращмод}(a(i), e, g) \;\&$
$\text{Разложмн}(g, \mu_x(d, \text{кольцомн}(a(i))); \text{Исключение}(a, \{i\}), b, t) \to c = t)$

Уровень срабатывания равен 1.

(b) Шаг рекурсии.

$\forall_{abcimnpqrs}(n = l(a) \;\&\; \text{Pmax}(\lambda_j(\deg(a(j)), j \in \{1, \ldots, n\}), i, m) \;\&$
$\text{Извлечмнож}(a(i), \text{Исключение}(a, \{i\}), b, 0, p, q, r) \;\&\; \text{Разложмн}(p, r, s) \to$
$c = \text{префикс}(q, s))$

Посредством Pmax обозначен логический символ "точкамакс". При этом утверждение "точкамакс(x1 x2 x3)" означает, что x2 есть точка, в которой вещественнозначная функция x1 принимает наибольшее значение x3 на своей области определения. Уровень срабатывания равен 2.

(c) Завершение цикла.

$\forall_{abc}(a = \text{пустоеслово} \to c = (b))$

$\forall_{abckn}(n = \deg(b) \;\&\; k = \text{старшкоэфф}(b) \;\&\; n = 0 \;\&\; k = 1 \to c = \text{пустоеслово})$

Уровни срабатывания равны 1.

$\forall_{abckn}(n = \deg(b) \;\&\; k = \text{старшкоэфф}(b) \;\&\; (\neg(n = 0) \vee \neg(k = 1)) \to c = (b))$

Уровень срабатывания равен 3.

9. Пакет продукций "Извлечмнож". Оператор "Извлечмнож(x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7)" является вспомогательным блоком оператора "Разложмн". Его входные данные таковы. x1 - выделенный множитель группы A множителей разложения целочисленного многочлена x3 над кольцом вычетов по модулю, представляющему достаточно высокую степень простого числа. x2 - набор остальных множителей этой группы. x4 - указатель блокировки использования всех элементов группы A: 0 - есть блокировка, 1 - нет блокировки. На основе x1 находится делитель многочлена x3. Этот делитель присваивается выходной переменной x6. При этом выходной переменной x5 присваивается набор оставшихся неиспользованными элементов группы A, возможно, пополненный константным многочленом, а выходной переменной x7 = частное от деления x3 на x6. Формат пакета определяется термом "программа(Извлечмнож вход(x1 многочлен(вычеты)) вход(x2 набор(многочлен(вычеты))) вход(x3 многочлен(Целое)) вход(x4 логсимвол) выход(x5 набор(многочлен(вычеты))) выход(x6 многочлен(Целое)) выход(x7 многочлен(Целое)) уровень(3))".

(a) Домножение на константный многочлен из списка.

$\forall_{abcdefgkmnpqrt}(l(b) = t \;\&\; i \in \{1, \ldots, t\} \;\&\; \deg(b(i)) = 0 \;\&$
$\text{старшкоэфф}(b(i)) = m \;\&\; m = nk \;\&$
$\text{Извлечмнож}(na, \text{Исключение}(b, \{i\}), c, d, p, q, r) \to$
$e = (p \text{ при } k = 1, \text{ иначе префикс}(\mu_x(k, \text{кольцомн}(b(i))), p)) \;\&\; f = q \;\&\; g = r)$

Указатель "смпрог(натуральное(n)натуральное(k))" сообщает компилятору, что переменные n, k имеют натуральные значения. Уровень срабатывания равен 1.

(b) Усмотрение делителя.

$\forall_{abcfghknsuv}(\deg(a) = n \;\&\; \text{кольцомн}(a) = \text{mod}(s) \;\&$
$q = \text{многочлен}(1, \text{Целые}, \lambda_i((\text{коэффициентмн}(a, i) \text{ при}$

2·коэффициентмн$(a, i) < s$, иначе коэффициентмн$(a, i) - s), i \in \{0, \ldots, n\}))$ & сокращмн(q, k, v) & частноемн(c, v, h, u) & старшкоэфф$(u) = 0 \to$ $e = b$ & $f = v$ & $g = h)$

Уровень срабатывания равен 2.

(c) Выбор дополнительного множителя.

Здесь реализован шаг перебора: отдельно рассматриваются случаи, когда первый элемент набора x2 включается либо не включается в произведение.

$\forall_{abfmpqr}(m = l(b)$ & $\neg(m = 0)$ & $\neg(l(b) = 0)$ & $(1 < m \ \vee \ d = 1)$ &
Извлечмнож$(ab(1),$ Исключение$(b, \{1\}), c, d, p, q, r) \to$
$e = p$ & $f = q$ & $g = r)$

$\forall_{abcefgpqr}(\neg(l(b) = 0)$ &
Извлечмнож$(a,$ Исключение$(b, \{1\}), c, 1, p, q, r) \to$
$e =$ префикс$(b(1), p)$ & $f = q$ & $g = r)$

Уровень срабатывания равен 3.

10.6.3 Нахождение системы различных представителей

Для нахождения системы различных представителей конечного семейства конечных множеств создан пакет продукций "смпредст". Его можно найти в разделе "Теория множеств" - "Семействамножеств" - "Вычисления" оглавления базы приемов. Оператор "смпредст(x1 x2 x3 x4)" имеет входную переменную x1, значением которой является набор конечных множеств $A_1, \ldots, A_n$. Если существует система различных представителей данных множеств, то выходной переменной x4 присваивается 0, а переменной x2 - набор попарно различных элементов $a_1, \ldots, a_n$ множеств $A_1, \ldots, A_n$. Если же системы различных представителей не существует, то x4 присваивается 1, выходной переменной x3 - набор номеров множеств A_i, имеющих в совокупности меньше элементов, чем число данных множеств, а переменной x2 - набор всех элементов этих множеств. Формат пакета задается термом "программа(смпредст вход(x1 набор(класс(объект))) выход(x2 набор(объект)) выход(x3 набор(логсимвол)) выход(x4 логсимвол) параметр(x5 набор(объект)) параметр(x6 логсимвол) цикл уровень(3))".

1. Инициализация параметров.

   $\forall_{ef}(e =$ пустоеслово & $f = 0)$

   Уровень срабатывания равен 0.

2. Попытка выбора очередного элемента.

   $\forall_{aefgn}(l(a) = n$ & $f < n$ & $g \in a(f + 1) \setminus \{; e\} \to e =$ суффикс(e, g) & $f = f + 1)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Усмотрение найденной системы представителей.

   $\forall_{abcdef}(l(a) = f \to b = e$ & $c =$ пустоеслово & $d = 0)$

   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата после срабатывания приема. Уровень срабатывания равен 1.

4. Перегруппировка представителей.

   Если для очередного множества не удается найти представителя, то предпринимается попытка коррекции ранее выбранных представителей:

$\forall_{aefjqsx}($цепьмножеств$(a, e, (f+1), j, x)$ & $l(j) = s$ & $q =$ заменанабора$(e, \lambda_k(j(k+1), k \in \{1, \ldots, s-1\}), \lambda_k((e(j(k+2))$ при $k \leq s-2,$ иначе $x), k \in \{1, \ldots, s-1\})) \rightarrow e =$ суффикс$(q, e(j(2)))$ & $f = f+1)$

Пакет продукций "цепьмножеств" будет описан ниже. Уровень срабатывания равен 2.

5. Усмотрение подсистемы множеств, не имеющей представителя.

   $\forall_{abcdefxy}($блокмножеств$(a, e, (f+1), a(f+1), x, y) \rightarrow b = y$ & $c = x$ & $d = 1)$

   Пакет продукций "блокмножеств" будет описан ниже. Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 3.

Приведем вспомогательные пакеты "цепьмножеств" и "блокмножеств", использованные при нахождении системы различных представителей.

Оператор "цепьмножеств(x1 x2 x3 x4 x5)" имеет следующие входные данные. x1 - набор $(A_1, \ldots, A_n)$ конечных наборов; x2 - набор $(a_1, \ldots, a_m)$ различных элементов этих наборов; $m < n$. x3 - набор $(j_1 \ldots j_k)$ различных номеров наборов A_{j_i}, таких,что $a_{j_{i+1}}$ - элемент набора A_{j_i}; $i = 1, \ldots, k-1; k > 0$. Выходная переменная x4 перечисляет максимальные продолжения $(j_1 \ldots j_s)$ набора x3, у которых набор A_{j_s} имеет элемент x, отличный от элементов списка x2. При этом x5 становится равно некоторому такому элементу x. Формат пакета определяется термом "программа(цепьмножеств вход(x1 набор(класс(объект))) вход(x2 набор(объект)) вход(x3 набор(логсимвол)) выход(x4 набор(логсимвол)) выход(x5 объект) перечисление уровень(2))".

1. Завершение цепочки.

   $\forall_{abcdefk}(l(c) = k$ & $f \in a(c(k))\{; b\} \rightarrow d = c$ & $e = f)$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Продолжение цепочки.

   $\forall_{abcdefikmxy}(l(c) = k$ & $f \in a(c(k))$ & $l(b) = m$ & $i \in \{1, \ldots, m\}$ & $f = b(i)$ & $\neg(i \in \{; c\})$ & цепьмножеств$(a, b,$ суффикс$(c, i), x, y) \rightarrow d = x$ & $e = y)$

   Уровень срабатывания равен 2.

Оператор "блокмножеств(x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7)" имеет следующие входные данные. x1 - набор $(A_1, \ldots, A_n)$ конечных наборов A_i; x2 - набор $(a_1, \ldots, a_m)$ различных элементов этих наборов; $m < n$. x3 - набор $(j_1, \ldots, j_k)$номеров наборов A_{j_i}; x4 - набор элементов всех этих A_{j_i}. x5 - поднабор набора x4, образованный всеми a_k, для которых A_k еще не занесено в x3. Реализуется цикл пополнения наборов x3, x4 за счет множеств A_k, определяемых набором x5. Элементы этих множеств, не занесенные ранее в x4, регистрируются одновременно в x4 и x5; обработанные элементы исключаются из x5. Выходным переменным x6 и x7 присваиваются пополненные наборы x3 и x4. Формат пакета определяется термом "программа(блокмножеств вход(x1 набор(класс(объект))) вход(x2 набор(объект)) вход(x3 набор(логсимвол)) вход(x4 класс(объект)) вход(x5 класс(объект)) выход(x6 набор(логсимвол)) выход(x7 класс(объект)) цикл уровень(2))".

1. Шаг пополнения наборов.

   $\forall_{abcdeinp}(p \in e \ \& \ l(b) = n \ \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ b(i) = p \to c = \text{префикс}(i, c) \ \& \ d = d \cup a(i) \ \& \ e = e \setminus \{p\} \cup a(i) \setminus d)$

   Уровень срабатывания равен 1.

2. Выдача результата.

   $\forall_{cdefg}(e = \emptyset \to f = c \ \& \ g = d)$

   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 2.

10.6.4 Вычисления с подстановками

Вычислительные пакеты, созданные для работы с подстановками, можно найти в разделе "Линейная алгебра" - "Перестановки" - "Вычисления" оглавления базы приемов. Фактически рассматривался только случай взаимно-однозначных подстановок, т.е. перестановок. Напомним, что вычислительный тип "подстановка" соответствует наборам длины n, элементы которых суть символьные числа, принадлежащие множеству $\{1, \ldots, n\}$ (не обязательно различные).

1. Пакет продукций "числоинверсий". Операторное выражение "числоинверсий(x1)" имеет своим значением число инверсий в перестановке x1. Формат пакета определяется термом "программа(числоинверсий вход(x1 подстановка) выход(x2 целое) выражение)". Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{an}(l(a) = n \to b = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (1 \text{ при } a(j) < a(i), \text{ иначе } 0))$

2. Пакет продукций "назначения". Пакет предназначен для решения известной задачи о назначениях. Оператор "назначения(x1 x2)" имеет своим входным данным квадратную числовую матрицу x1. Выходной переменной x2 присваивается перестановка, выбирающая в каждой строке элемент матрицы x1 так, чтобы сумма выбранных элементов была наибольшей. Формат пакета определяется термом "программа(назначения вход(x1 строки(целое)) выход(x2 набор(логсимвол)) параметр(x3 набор(целое)) параметр(x4 набор(целое)) цикл уровень(1))".

   (a) Инициализация параметров.
   $\forall_{an}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to$
   $c = \lambda_i(\max(\lambda_j(a(i, j), j \in \{1, \ldots, n\})), i \in \{1, \ldots, n\}) \ \&$
   $d = \lambda_i(0, i \in \{1, \ldots, n\}))$

   Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Коррекция весов при отсутствии системы различных представителей.
   $\forall_{acdnpqr}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \ \&$
   $\text{смпредст}(\lambda_i(\mathrm{set}_j(j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ c(i) + d(j) = a(i, j)), i \in \{1, \ldots, n\}), p, q, r)$
   $\& \ r = 1 \to c = \lambda_i((c(i) - 1 \text{ при } i \in \{; q\}, \text{ иначе } c(i)), i \in \{1, \ldots, n\}) \ \&$
   $d = \lambda_i((d(i) + 1 \text{ при } i \in \{; p\}, \text{ иначе } d(i)), i \in \{1, \ldots, n\}))$

   Уровень срабатывания равен 1.

(c) Усмотрение системы различных представителей.
$\forall_{acdnpqr}(\mathrm{Dom}(a)\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$ & смпредст$(\lambda_i(\mathrm{set}_j(j\in\{1,\ldots,n\}$ & $c(i)+d(j)=a(i,j)),i\in\{1,\ldots,n\}),p,q,r)$ & $r=0\to b=p)$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 1.

Для обращения к пакету "назначения" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{abfnxy}($матр$(a,\mathbb{R},n,n)$ & $f=\lambda_j(\sum_{j=1}^{n}a(i,j(i)),$ перестановка$(j,\{1,\ldots,n\}))$ & назначения(a,b) & $p=\sum_{k=1}^{n}a(k,b(k))$ & $x=b$ & $y=p\to \mathrm{Pmax}(f,x,y))$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Его консеквент идентифицируется с условием задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменные x,y - неизвестные задачи. Переменная n идентифицируется с натуральной константой. Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, причем указатель "объект(x1)" определяет идентификацию переменной a с матрицей A, извлекаемой из комментария (текобъект a A ...)к посылкам задачи. Третий и четвертый антецеденты выделены указателем "программа". Пятый и шестой антецеденты, выделенные указателем "подборзначений", замещают исходное условие во вспомогательной задаче.

10.6.5 Вычисления с матрицами

В приводимых ниже пакетах матрицы представляются в формате "строки(число)", т.е. как наборы строк, где каждая строка - набор чисел в формате "с плавающей запятой".

Операции над матрицами

1. Пакет продукций "плюсматр". Операторное выражение "плюсматр(x1 x2)" имеет своим значением сумму вещественных матриц x1 и x2. Заметим, что компилятор вставляет в программу приема обращение к этому операторному выражению при обработке встретившегося в теореме приема выражения "плюсфунк(x1 x2)". Формат пакета задается термом "программа(плюсматр вход(x1 строки(число)) вход(x2 строки(число)) выход(x3 строки(число)) уровень(1) выражение)".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcmn}(\mathrm{Dom}(a)=\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}$ & $\mathrm{Dom}(b)=\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}\to c=\lambda_{ij}(a(i,j)+b(i,j),i\in\{1,\ldots,n\}$ & $j\in\{1,\ldots,m\}))$

2. Пакет продукций "умножматр". Операторное выражение "умножматр(x1 x2)" имеет своим значением произведение двух вещественных матриц x1 и x2. Формат пакета задается термом "программа(умножматр вход(x1 строки(число)) вход(x2 строки(число)) выход(x3 строки(число)) уровень(1) выражение)".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abckmn}(\mathrm{Dom}(a)=\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}$ & $\mathrm{Dom}(b)=\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,k\}\to c=\lambda_{ij}(\sum_{s=1}^{m}(a(i,s)b(s,j)),i\in\{1,\ldots,n\}$ & $j\in\{1,\ldots,k\}))$

Для обращения к пакету "умножматр" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{ABCabkmn}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})\ \&$
$B = \lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\dots,n\}\ \&\ q \in \{1,\dots,k\})\ \&$
$C = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\}) \cdot$
$\lambda_{pq}(b(p,q), p \in \{1,\dots,n\}\ \&\ q \in \{1,\dots,k\}) \to AB = C)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Заменяемая часть идентифицируется с подвыражением условия задачи. Эта задача - либо на преобразование и имеет цель "выч", либо на описание и либо имеет цель "вычисление", либо в ее условия входит терм "точность(...)". Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет идентификацию термов "отображение" в этих антецедентах как прямоугольных матриц, заданных термами "строки(...)". Переменные a, b функциональные. Выражения A, B константные. Третий антецедент выделен указателем "программа". При обработке его матрицы конвертируются в формат "строки(число)". Уровень срабатывания равен 1.

3. Пакет продукций "числкоэфф". Выражение "числкоэфф(x1 x2)" имеет своим значением произведение числовой функции x2 на число x1. Пакет создан для случая, когда эта функция - матрица. Формат пакета задается термом "программа(числкоэфф вход(x1 число) вход(x2 строки(число)) выход(x3 строки(число)) выражение уровень(1))".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcmn}(\mathrm{Dom}(b) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\} \to$
   $c = \lambda_{ij}(ab(i,j), i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,m\}))$

   Для обращения к пакету "числкоэфф" из сканирования задачи создан следующий прием:

   $\forall_{ABabmn}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})\ \&$
   $B = b\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\}) \to bA = B)$

   Прием имеет заголовок "второйтерм". Заменяемая часть идентифицируется с подвыражением условия задачи. Эта задача - либо на преобразование и имеет цель "выч", либо на описание и либо имеет цель "вычисление", либо в ее условия входит терм "точность(...)". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет идентификацию терма "отображение" в этом антецеденте как прямоугольной матрицы, заданной термом "строки(...)". Переменная a функциональная. Выражение A константные; b - десятичная константа. Второй антецедент выделен указателем "программа". Уровень срабатывания равен 1.

4. Пакет продукций "обрматрица". Оператор "обрматрица(x1 x2)" имеет входную переменную x1, значением которой служит квадратная вещественная матрица. Если она обратима, то переменной x2 присваивается обратная матрица. Иначе выдается символ "неопред". Чтобы компилятор вставил в программу приема обращение к данному оператору, теорема приема должна содержать выражение "A^{-1}", где знаком степени обозначен символ "степеньматр". Формат пакета задается термом "программа(обрматрица вход(x1 строки(число)) выход(x2 строки(число)) параметр(x3 строки(число)) параметр(x4 логсимвол) параметр(x5 логсимвол) цикл уровень(3) неопред)".

(a) Инициализация вспомогательных объектов.

$\forall_{abcdn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \to$
$b = \lambda_{ij}((1 \text{ при } i = j, \text{ иначе } 0), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,n\}) \ \&$
$c = \text{Копия}(a) \ \& \ d = 1 \ \& \ e = 0)$

Чтобы приведение к диагональному виду не испортило исходную матрицу a, она копируется в матрицу c, которая и будет изменяться. Переменная e - индикатор максимальности модуля диагонального элемента в его столбце, переменная d - счетчик обработанных столбцов. Уровень срабатывания приема равен 0.

(b) Усмотрение максимальности модуля диагонального элемента.

$\forall_{cdenp}(\mathrm{Dom}(c) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \ \& \ e = 0 \ \& \ d \leq n \ \&$
$\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|c(i,d)|, i \in \{d,\ldots,n\}), d, p) \to e = 1)$

Посредством Pmax обозначен символ "точкамакс". Заметим, что сохраняется первое из максимальных значений, так что если под максимальным диагональным элементом найдутся равные ему, будет выдано указание на диагональный элемент. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Перестановка строк для перевода максимального по модулю элемента на диагональ.

$\forall_{bcdeknp}(\mathrm{Dom}(c) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \ \& \ e = 0 \ \& \ d \leq n \ \&$
$\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|c(i,d)|, i \in \{d,\ldots,n\}), k, p) \ \& \ \neg(k = d) \to$
$\forall_{if}(i \in \{d,\ldots,n\} \ \& \ f = c(k,i) \to c(k,i) = c(d,i) \ \& \ c(d,i) = f) \ \&$
$\forall_{if}(i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ f = b(k,i) \to b(k,i) = b(d,i) \ \& \ b(d,i) = f) \ \& \ e = 1)$

Равенства в консеквентах компилируются как операторы изменения значения. Уровень срабатывания равен 1.

(d) Вычитание кратных текущей строки.

$\forall_{bcden}(\mathrm{Dom}(c) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \ \& \ e = 1 \ \& \ d \leq n \ \& \ \neg(c(d,d) = 0) \to$
$\forall_{if}(i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ \neg(i = d) \ \& \ f = c(i,d)/c(d,d) \to$
$\forall_j(j \in \{d,\ldots,n\} \to c(i,j) = (0 \text{ при } j = d, \text{ иначе } c(i,j) - fc(d,j))) \ \&$
$\forall_j(j \in \{1,\ldots,n\} \to b(i,j) = b(i,j) - fb(d,j))) \ \& \ d = d + 1 \ \& \ e = 0)$

Уровень срабатывания равен 2.

(e) Выдача результата.

$\forall_{bcde}(\mathrm{Dom}(c) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \ \& \ e = 0 \ \& \ d = n + 1 \to \forall_{if}(i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ f = 1/c(i,i) \to \forall_j(j \in \{1,\ldots,n\} \to b(i,j) = fb(i,j))))$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа. Уровень срабатывания равен 1.

(f) Выдача отказа.

$\forall_b(b = \text{неопред})$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа. Уровень срабатывания равен 3.

Для обращения к оператору "обрматрица" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{Aabn}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,n\}) \ \&$
$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,n\}))^{-1} = b \to A^{-1} = b)$

Знаком возведения в степень обозначен символ "степеньматр". Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к константному подвыражению условия задачи. Эта задача - либо на преобразование и имеет цель "выч", либо на описание и либо имеет цель "вычисление", либо в ее условия входит терм "точность(...)". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет идентификацию терма "отображение" в его правой части как матрицы, заданной термом "строки(...)". Второй антецедент, выделенный указателем "программа", реализует обращение к оператору "обрматрица". Уровень срабатывания равен 1.

5. Пакет продукций "степеньматрицы". Операторное выражение "степеньматрицы(x1 x2)" имеет своим значением результат возведения квадратной вещественной матрицы x1 в натуральную степень x2. Компилятор вставляет в программу приема обращение к этому выражению, если в теореме приема присутствует выражение "степеньматр(x1 x2)". Формат пакета задается термом "программа(степеньматрицы вход(x1 строки(число)) вход(x2 целое) выход(x3 строки(число)) выражение уровень(2))".

   (a) Степень 1.
   $\forall_{abc}(b = 1 \to c = a)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (b) Степень 2.
   $\forall_{abc}(b = 2 \to c = a \cdot a)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Степень 3.
   $\forall_{abc}(b = 3 \to c = (a \cdot a) \cdot a)$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (d) Нечетная степень, большая 3.
   $\forall_{abcdmn}(b = 2m + n \;\&\; n = 1 \;\&\; d = a^m \to c = (d \cdot d) \cdot a)$
   Уровень срабатывания равен 2.

   (e) Четная степень, большая 2.
   $\forall_{abcdmn}(b = 2m + n \;\&\; n = 0 \;\&\; d = a^m \to c = (d \cdot d))$
   Уровень срабатывания равен 2.

   Для обращения к процедуре "степеньматрицы" из сканирования задачи создан следующий прием:
   $\forall_{Aabmn}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\}) \;\&$
   $(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\}))^m = b \to A^m = b)$
   Знаком возведения в степень обозначен символ "степеньматр". Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к константному подвыражению условия задачи. Эта задача - либо на преобразование и имеет цель "выч", либо на описание и либо имеет цель "вычисление", либо в ее условия входит терм "точность(...)". Показатель степени m идентифицируется с натуральной константой. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет идентификацию терма "отображение" в его правой части как матрицы, заданной термом "строки(...)".

Второй антецедент, выделенный указателем "программа", реализует обращение к оператору "степеньматрицы". Уровень срабатывания равен 1.

6. Пакет продукций "экспматр". Операторное выражение "экспматр(x1 x2)" имеет своим значением экспоненту квадратной вещественной матрицы x1, вычисленную с точностью x2. Компилятор вставляет в программу приема обращение к этому выражению, если в теореме приема присутствует терм "точность(экспматр(x1)x2)". Формат пакета задается термом "программа(экспматр вход(x1 строки(число)) вход(x2 число) выход(x3 строки(число)) параметр(x4 строки(число)) параметр(x5 число) выражение цикл уровень(2))".

   (a) Инициализация вспомогательных объектов.
   $\forall_{acden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \rightarrow$
   $c = \lambda_{ij}((1 \text{ при } i = j, \text{ иначе } 0), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\}) \ \&$
   $d = \lambda_{ij}((1 \text{ при } i = j, \text{ иначе } 0), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\}) \ \& \ e = 0)$

   c - накопитель суммы, d - текущий член суммы, e - номер члена суммы. Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Усмотрение результата.
   $\forall_{abdn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \ \& \ \forall_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow |d(i, j)| < b) \rightarrow \text{истина})$

   Консеквент "истина" определяет выдачу результата после срабатывания приема. Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Шаг суммирования.
   $\forall_{acde}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \rightarrow d = (1/(e + 1))(da) \ \& \ c = c + d \ \& \ e = e + 1)$

   В теореме используются символы "числкоэфф" и "умножматр". Уровень срабатывания равен 2.

   Для обращения к процедуре "экспматр" из сканирования задачи создан следующий прием:
   $\forall_{Aabn}(A = \lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\}) \ \&$
   $\text{точность}(\exp(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\})), c) = b \ \&$
   $\text{точность}(c) \rightarrow \exp A = b)$

   Знаком экспоненты обозначен логический символ "экспматр". Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к константному подвыражению условия задачи. Эта задача - либо на преобразование и имеет цель "выч", либо на описание и либо имеет цель "вычисление", либо в ее условия входит терм "точность(...)". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет идентификацию терма "отображение" в его правой части как матрицы, заданной термом "строки(...)". Второй антецедент, выделенный указателем "программа", реализует обращение к оператору "экспматр". Последний антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Уровень срабатывания приема равен 1.

7. Пакет продукций "следматрицы". Значением операторного выражения "следматрицы(x1)" служит след вещественной квадратной матрицы x1. Формат пакета служит терм "программа(следматрицы вход(x1 строки(число)) выход(x2 число) выражение уровень(1))".

Пакет имеет единственный прием:

$\forall_{an}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \to b = \sum_{i=1}^{n} a(i,i))$

Системы линейных уравнений

Для решения систем линейных уравнений создан пакет продукций "линсист". Входными данными оператора "линсист(x1 x2 x3)" служат квадратная вещественная матрица x1 коэффициентов системы линейных уравнений и вектор x2 свободных членов. Выходной переменной x3 присваивается вектор решения. Если система несовместна, то оператор ложен. Если пространство решений бесконечно, то берется какое-то одно из решений. Формат пакета задается термом "программа(линсист вход(x1 строки(число)) вход(x2 набор(число)) выход(x3 набор(число)) параметр(x4 логсимвол) параметр(x5 логсимвол) цикл уровень(2))".

1. Инициализация вспомогательных объектов.

   $\forall_{acden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} \to d = 1\ \&\ e = 0\ \&$
   $c = \lambda_i(0, i \in \{1,\ldots,n\}))$

   Переменная e играет роль индикатора максимальности диагонального элемента в строке, переменная d - счетчик обработанных столбцов. Уровень срабатывания равен 0.

2. Усмотрение максимальности диагонального элемента.

   $\forall_{adenp}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e = 0\ \&\ d \leq n\ \&$
   $\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|a(i,d)|, i \in \{d,\ldots,n\}), d, p) \to e = 1)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Перестановка строк для перевода максимального по модулю элемента на диагональ.

   $\forall_{abdegknp}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e = 0\ \&\ d \leq n\ \&$
   $\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|a(i,d)|, i \in \{d,\ldots,n\}), k, p)\ \&\ \neg(k = d)\ \&\ g = b(k) \to$
   $\forall_{if}(i \in \{d,\ldots,n\}\ \&\ f = a(k,i) \to a(k,i) = a(d,i)\ \&\ a(d,i) = f)\ \&$
   $b(k) = b(d)\ \&\ b(d) = g\ \&\ e = 1)$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Вычитание кратных текущей строки.

   $\forall_{abden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e = 1\ \&\neg(a(d,d) = 0) \to$
   $\forall_{if}(i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(i = d)\ \&\ f = a(i,d)/a(d,d) \to$
   $\forall_j(j \in \{d,\ldots,n\} \to a(i,j) = (0 \text{ при } j = d, \text{ иначе } a(i,j) - fa(d,j)))\ \&$
   $b(i) = b(i) - fb(d))\ \&\ d = d + 1\ \&\ e = 0)$

   Уровень срабатывания равен 2.

5. Пропуск нулевого столбца.

   $\forall_{aden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e = 1\ \&\ a(d,d) = 0 \to$
   $d = d + 1\ \&\ e = 0)$

   Уровень срабатывания равен 2.

6. Определение результата.

   $\forall_{abcden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \ \& \ d = n + 1 \ \& \ e = 0 \rightarrow$
   $\forall_j(j \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$
   $c(j) = (0 \text{ при } a(j, j) = 0, \text{ иначе } (b(j) - \sum_{i=j+1}^{n}(c(i)a(j, i)))/a(j, j))) \ \&$
   $\forall_j(j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ a(j, j) = 0 \rightarrow \sum_{i=j+1}^{n}(c(i)a(j, i)) = b(j)))$

   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата после срабатывания приема. Уровень срабатывания равен 1.

   Для обращения к оператору "линсист" из сканирования задачи создан следующий прием:

   $\forall_{abnxy}(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\})y = \lambda_i(b(i), i \in \{1, \ldots, n\}) \rightarrow$
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow \sum_{j=1}^{n}(a(i, j)x(j)) = b(i)) \leftrightarrow \forall_j(j \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow x(j) = y(j)))$

   Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)". Указатель "контрольвывода" инициирует попытку его применения при усмотрении подутверждения "$cd + e = f$" в условии задачи на описание, имеющей цель "вычислить". Здесь сумма и умножение обычные; d - неизвестная; выражение c не содержит неизвестных. Проверяется, что каждое слагаемое остаточной суммы e имеет вид произведения неизвестной на выражение без неизвестных. Указатели "контекст" определяют идентификацию x с набором всех неизвестных, входящих в уравнения задачи, а n - с количеством этих неизвестных. Затем, согласно указателям "развертка" и "коэфф(x1)", квантор общности в заменяемой части консеквента идентифицируется с группой условий задачи. Конечные суммы идентифицируются как обычные, причем нулевые коэффициенты восстанавливаются автоматически. Переменная a идентифицируется с квадратной матрицей размера $n \times n$. Проверяется, что все элементы этой матрицы и все элементы набора b - константные выражения. Антецедент, выделенный указателем "программа", обрабатывается оператором "линсист". Квантор общности в заменяющей части разворачивается в конъюнкцию. Уровень срабатывания равен 1.

Определители

Для вычисления определителя вещественной квадратной матрицы создан пакет "вычопределитель". Операторное выражение имеет вид "вычопределитель(x1)". Компилятор вставляет его в программу приема вместо выражения "определитель(x1)", имеющегося в теореме приема. Формат пакета имеет вид "программа(вычопределитель вход(x1 строки(число)) выход(x2 число) параметр(x3 логсимвол) параметр(x4 логсимвол) цикл выражение уровень(2))".

1. Инициализация вспомогательных объектов.

   $\forall_{bcd}(b = 1 \ \& \ c = 1 \ \& \ d = 0)$

   Как и выше, параметр d является индикатором максимальности диагонального элемента в столбце, c - счетчиком обработанных столбцов. Уровень срабатывания равен 0.

2. Усмотрение максимальности диагонального элемента.

   $\forall_{acdnp}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \ \& \ d = 0 \ \& \ c \leq n \ \&$
   $\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|a(i, c)|, i \in \{c, \ldots, n\}), c, p) \rightarrow d = 1)$

   Уровень срабатывания равен 1.

3. Перестановка строк для перевода максимального по модулю элемента на диагональ.

   $\forall_{abcdknp}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ d = 0\ \&\ c \leq n\ \&$
   $\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|a(i,c)|, i \in \{c,\ldots,n\}), k, p)\ \&\ \neg(k = c) \rightarrow$
   $\forall_{if}(i \in \{c,\ldots,n\}\ \&\ f = a(k,i) \rightarrow a(k,i) = a(c,i)\ \&\ a(c,i) = f)\ \&\ b = -b\ \&\ d = 1)$

   Уровень срабатывания равен 1.

4. Вычитание кратных текущей строки.

   $\forall_{acdn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ d = 1\ \& \neg(a(c,c) = 0) \rightarrow$
   $\forall_{if}(i \in \{c+1,\ldots,n\}\ \&\ f = a(i,c)/a(c,c) \rightarrow$
   $\forall_j(j \in \{c,\ldots,n\} \rightarrow a(i,j) = (0 \text{ при } j = c, \text{ иначе } a(i,j) - fa(c,j))))\ \&$
   $c = c + 1\ \&\ d = 0)$

   Уровень срабатывания равен 2.

5. Усмотрение нулевого столбца.

   $\forall_{abcdn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ d = 1\ \&\ a(c,c) = 0 \rightarrow b = 0)$

   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 2.

6. Определение результата.

   $\forall_{abcdn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ d = 0\ \&\ c = n + 1 \rightarrow b = b \prod_{i=1}^{n} a(i,i))$

   Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 1.

Для обращения к оператору "вычопределитель" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{Aabmx}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})\ \&$
$\det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})) = b \rightarrow \det(A) = b)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к константному подвыражению условия задачи. Эта задача - либо на преобразование и имеет цель "выч", либо на описание и либо имеет цель "вычисление", либо в ее условия входит терм "точность(...)". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет идентификацию терма "отображение" в его правой части как матрицы, заданной термом "строки(...)". Второй антецедент, выделенный указателем "программа", реализует обращение к операторному выражению "вычопределитель". Уровень срабатывания равен 1.

Собственные значения и собственные векторы

1. Пакет продукций "характмн". Оператор "характмн(x1 x2)" имеет своим входным данным вещественную квадратную матрицу x1. Выходной переменной x2 присваивается характеристический многочлен этой матрицы. Формат пакета задается термом "программа(характмн вход(x1 строки(число)) выход(x2 многочлен(число)) параметр(x3 строки(число)) параметр(x4 набор(число)) параметр(x5 логсимвол) цикл уровень(1))".

(a) Инициализация вспомогательных объектов.

$\forall_{acde}(c = a \ \& \ e = 1 \ \& \ d = (1))$

Переменная d играет роль накопителя коэффициентов многочлена, e - счетчик номера шага. Уровень срабатывания равен 0.

(b) Шаг цикла вычисления.

$\forall_{acdefn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \ \& \ e \leq n \ \&$
$f = -\text{следматрицы}(c)/e \rightarrow$
$c = a\lambda_{jk}((c(j, j) + f \text{ при } j = k, \text{ иначе } c(j, k)), j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ k \in \{1, \ldots, n\})$
$\& \ d = \text{префикс}(f, d) \ \& \ e = e + 1)$

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Выдача результата.

$\forall_{abden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \ \& \ e = n + 1 \rightarrow$
$b = \text{многочлен}(\text{икс}(1), \text{веществполе}, d))$

Указатель "результат" определяет выдачу результата сразу после срабатывания приема. Уровень срабатывания равен 1.

Для обращения к оператору "характмн" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{Aanpx}(A = \lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\}) \ \&$
$\text{характмн}(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\}), p) \rightarrow$
$\text{характмн}(A, x) \leftrightarrow x = p)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Он применяется к подутверждению условия задачи на описание. Переменная x - неизвестная. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "матрица" определяет идентификацию терма "отображение" в его правой части как матрицы, заданной термом "строки(...)". Второй антецедент, выделенный указателем "программа", реализует обращение к оператору "характмн". Уровень срабатывания равен 2.

2. Пакет продукций "собствзнач". Операторное выражение "собствзнач(x1 x2)" имеет своим значением множество собственных значений вещественной квадратной матрицы x1, вычисленных с точностью x2. Компилятор вставляет обращение к этому операторному выражению в программу приема, если теорема приема содержит терм "точность(собствзначения(x1)x2)". Формат пакета определяется термом "программа(собствзнач вход(x1 строки(число)) вход(x2 число) выход(x3 класс(число)) выражение)".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcdf}(\text{характмн}(a, f) \ \& \ \text{точность}(\text{корнимн}(f), b) = d \rightarrow c = d)$

   Для обращения к операторному выражению "собствзнач" из сканирования задачи созданы следующие приемы:

   $\forall_{Aabmnx}(A = \lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\}) \ \&$
   $\text{точность}(\text{собствзначения}(\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\})), b) = m \rightarrow$
   $\text{собствзначения}(A) = x \ \& \ \text{точность}(x, b) \leftrightarrow x = m)$

   Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и применяется к паре условий задачи на описание. Переменная x - неизвестная. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". При идентификации его правой части используется указатель "матрица". Второй антецедент выделен указателем "программа". Он реализует обращение к операторному выражению "собствзнач". Указатель "округл(m, b)" определяет округление величины m при переводе ее в десятичную запись до точности b. Напомним, что изначально эта величина имеет столько знаков, сколько задает представление числа в машинном формате "с плавающей запятой". Уровень срабатывания приема равен 1.

$\forall_{Aabcmnx}(A = \lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})$ & $c = b \cdot 0.0001$ & точность(собствзначения($\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})), c) = m$ & собстовекторы(A, x, y) & точность$(y, b) \leftrightarrow x \in m)$

Прием имеет заголовок "выводусловия". Два последних антецедента идентифицируются с условиями задачи на описание, причем выражение x содержит неизвестные. Первые два антецедента выделены указателем "идентификатор", третий - указателем "программа". выводимое условие обрабатывается нормализатором "нормпринадлежит". Так как при этом может возникать дизъюнкция, то оно сопровождается комментарием "разборслучаев". Используется указатель "округл(m, c)". Уровень срабатывания равен 3.

3. Пакет продукций "вещбазисядра". Оператор "вещбазисядра(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными вещественную квадратную матрицу x1 и число x2 - точность вычислений (порог усмотрения нулевого значения). Выходной переменной присваивается множество векторов, образующих базис ядра линейного преобразования, задаваемого матрицей x1. Компилятор вставляет обращение к этому оператору в программу приема, если теорема приема содержит терм "точность(базис(Ядро(преобрстолбцов(x1 веществполе))x3)x2)". Формат пакета определяется термом "программа(вещбазисядра вход(x1 строки(число)) вход(x2 число) выход(x3 класс(набор(число))) параметр(x4 подстановка) параметр(x5 логсимвол) параметр(x6 логсимвол) цикл уровень(4))".

   (a) Инициализация вспомогательных объектов.

   $\forall_{abefn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to d = \lambda_i(i \in \{1, \ldots, n\})$ & $e = 1$ & $f = 0)$

   Перестановка d будет использоваться для окончательного переупорядочения разрядов векторов базиса ядра. e - счетчик обработанных столбцов, f - индикатор максимальности диагонального элемента в столбце. Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Усмотрение максимальности диагонального элемента.

   $\forall_{adenp}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ & $f = 0$ & $e \leq n$ & $\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|a(i, e)|, i \in \{e, \ldots, n\}), e, p) \to f = 1)$

   Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Перестановка строк для перевода максимального по модулю ненулевого элемента на диагональ.

   $\forall_{aefknp}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ & $f = 0$ & $e \leq n$ & $\mathrm{Pmax}(\lambda_i(|a(i, e)|, i \in \{e, \ldots, n\}), k, p)$ & $\neg(k = e) \to$ $\forall_{ig}(i \in \{e, \ldots, n\}$ & $g = a(k, i) \to a(k, i) = a(e, i)$ & $a(e, i) = g)$ & $f = 1)$

   Уровень срабатывания равен 1.

(d) Вычитание кратных текущей строки.

$\forall_{abefn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ f = 1\ \&\ b < |a(e,e)| \to$
$\forall_{igh}(i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ g = a(i,e)/a(e,e)\ \&\ h = a(e,e) \to \forall_j(j \in \{e,\ldots,n\} \to$
$a(i,j) = (a(e,j)/h$ при $i = e,$ иначе$(0$ при $j = e,$ иначе $a(i,j) - ga(e,j))))) \ \&$
$e = e+1\ \&\ f = 0)$

Уровень срабатывания равен 2.

(e) Перестановка столбцов для перевода ненулевого элемента в текущий столбец.

$\forall_{abdekq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \le n\ \&\ |a(e,e)| \le b\ \&$
$k \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ b < |a(q,k)| \to$
$\forall_{ig}(i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ g = a(i,k) \to a(i,k) = a(i,e)\ \&\ a(i,e) = g)\ \&$
$d =$ произведение(транспозиция$(k,e,n),d))$

Преобразование перестановки d выполняется с помощью реализованного на ЛОСе оператора. Уровень срабатывания равен 3.

(f) Выдача результата.

$\forall_{acdegn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&$
$g = \mathrm{set}_x(\exists_j(j \in \{0,\ldots,n-e\}\ \&$
$x = \lambda_i((-a(i,e+j)$ при $i < e,$ иначе $(1$ при $i = e+j,$ иначе $0)),$
$i \in \{1,\ldots,n\}))) \to c =$ Произведение$(g,d))$

Посредством "Произведение(A)" обозначается множество функций, представляющих собой произведение конечных наборов функций, принадлежащих элементам набора множеств A. Допускается использование в наборе A вместо одноэлементного множества составляющей его функции. Компилятор преобразует это выражение в реализованное на ЛОСе операторное выражение "произвподст".

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 4.

Оператор "вещбазисядра" используется для определения собственных векторов, соответствующих заданному собственному значению. Это обеспечивается следующим приемом сканирования задачи:

$\forall_{Aabmnx}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})\ \&$
точность(базис(Ядро(преобрстолбцов$(\lambda_{ij}((a(i,j) - c$ при $i = j,$ иначе $a(i,j)),$
$i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}),$ веществполе$)), m), b) \to$
собствекторы$(A,c,x)\ \&$ точность$(x,b) \leftrightarrow x = m)$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и применяется к паре условий задачи на описание. Переменная c идентифицируется с десятичной константой, переменная x - с неизвестной. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". При идентификации его правой части используется указатель "матрица". Второй антецедент выделен указателем "программа". Он реализует обращение к оператору "вещбазисядра". Используется указатель "округл(m,b)". Уровень срабатывания равен 1.

4. Пакет продукций "базисядра". Оператор "базисядра(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными матрицу x1 над полем вычетов по простому модулю

и сам этот простой модуль x2. Выходной переменной x3 присваивается множество векторов, образующих базис ядра линейного преобразования, заданного матрицей x1. Данный оператор использовался выше при разложении на множители многочлена по методу Берлекэмпа. Компилятор вставляет обращение к оператору в программу приема, если теорема приема содержит терм "базис(Ядро(преобрстолбцов(x1 вычеты(x2)))x3)". Формат пакета определяется термом "программа(базисядра вход(x1 строки(Целое)) вход(x2 Целое) выход(x3 класс(набор(Целое))) параметр(x4 подстановка) параметр(x5 логсимвол) цикл условие(простое(x2))уровень(3))".

(a) Инициализация вспомогательных объектов.

$\forall_{aden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \rightarrow d = \lambda_i(i \in \{1,\dots,n\})$ & $e = 1)$

Перестановка d будет использоваться для окончательного переупорядочения разрядов векторов базиса ядра. e - счетчик обработанных столбцов. Уровень срабатывания равен 0.

(b) Вычитание кратных текущей строки.

$\forall_{abent}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ & $e \leq n$ & $\neg(a(e,e) = 0)$ & $(ta(e,e))(\mathrm{mod}\ b) = 1 \rightarrow \forall_{if}(i \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(i = e)$ & $f = (ta(i,e))(\mathrm{mod}\ b) \rightarrow\ \forall_j(j \in \{e,\dots,n\} \rightarrow$ $a(i,j) = (0 \text{ при } j = e,\ \text{иначе } (a(i,j) - fa(e,j))(\mathrm{mod}\ b))))$ & $\forall_j(j \in \{e,\dots,n\} \rightarrow a(e,j) = (ta(e,j))(\mathrm{mod}\ b))$ & $e = e + 1)$

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Перестановка строк для перевода ненулевого элемента на диагональ.

$\forall_{aefkn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ & $e \leq n$ & $a(e,e) = 0$ & $k \in \{e+1,\dots,n\}$ & $\neg(a(k,e) = 0) \rightarrow$ $\forall_{jf}(j \in \{e,\dots,n\}$ & $f = a(k,j) \rightarrow a(k,j) = a(e,j)$ & $a(e,j) = f))$

Уровень срабатывания равен 1.

(d) Перестановка столбцов для перевода ненулевого элемента в текущий столбец.

$\forall_{adeknq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ & $e \leq n$ & $a(e,e) = 0$ & $k \in \{e+1,\dots,n\}$ & $q \in \{e+1,\dots,n\}$ & $\neg(a(q,k) = 0) \rightarrow$ $\forall_{if}(i \in \{1,\dots,n\}$ & $f = a(i,k) \rightarrow a(i,k) = a(i,e)$ & $a(i,e) = f)$ & $d = \text{произведение}(\text{транспозиция}(k,e,n),d))$

Уровень срабатывания равен 2.

(e) Выдача результата.

$\forall_{abcdefn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ & $f = \mathrm{set}_x(\exists_j(j \in \{0,\dots,n-e\}$ & $x = \lambda_i((-a(i,e+j) \text{ при } i < e,\ \text{иначе } (1 \text{ при } i = e+j,\ \text{иначе } 0)),$ $i \in \{1,\dots,n\}))) \rightarrow c = \text{Произведение}(f,d))$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу ответа при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 3.

Жорданова нормальная форма

Алгоритм приведения матрицы к жордановой форме реализован лишь частично: созданы пакеты для приведения вещественной и комплексной многочленных матриц к каноническому виду. Завершить программирование на ГЕНОЛОГе данного алгоритма рекомендуется читателю в качестве упражнения. Напомним, что независимо от вычислительных пакетов, этот алгоритм был реализован выше с помощью пакетных синтезаторов.

1. Пакет продукций "вычканматр". Оператор "вычканматр(x1 x2 x3 x4)" имеет своим входным данным вещественную многочленную квадратную матрицу x1. Выходной переменной x2 присваивается результат A приведения x1 к каноническому виду. При этом переменным x3 и x4 присваиваются такие матрицы B и C, что x1 равно $B^{-1}AC^{-1}$. Исходная матрица x1 портится - фактически, она преобразуется в x2. Компилятор вставляет обращение к оператору в программу приема, если теорема приема содержит терм "канпредставл(x1 x3 x2 x4)". Формат пакета определяется термом "программа(вычканматр вход(x1 строки(многочлен(число))) выход(x2 строки(многочлен(число))) выход(x3 строки(многочлен(число))) выход(x4 строки(многочлен(число))) цикл параметр(x5 логсимвол) уровень(5))".

    (a) Инициализация вспомогательных объектов.
    $\forall_{acden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \to$
    $c = \lambda_{ij}((\text{единицамн при } i = j, \text{ иначе нольмн}), i \in \{1,\dots,n\} \,\&\, j \in \{1,\dots,n\})$
    $\& \; d = \lambda_{ij}((\text{единицамн при } i = j, \text{ иначе нольмн}), i \in \{1,\dots,n\} \;\&$
    $j \in \{1,\dots,n\}) \;\&\; e = 1)$
    Уровень срабатывания равен 0.

    (b) Перестановка столбцов для понижения степени.
    $\forall_{adekmn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \;\&\; e \leq n \;\&\; k \in \{e,\dots,n\} \;\&$
    $m \in \{k+1,\dots,n\} \;\&\; \neg(a(k,m) = \text{нольмн}) \;\&\; \deg(a(k,m)) < \deg(a(k,k)) \to$
    $\forall_{if}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; f = a(i,m) \to a(i,m) = a(i,k) \;\&\; a(i,k) = f) \;\&$
    $\forall_{if}(i \in \{1,\dots,n\} \;\&\; f = d(i,m) \to d(i,m) = d(i,k) \;\&\; d(i,k) = f))$
    Уровень срабатывания равен 1.

    (c) Перестановка строк для понижения степени.
    $\forall_{acekmn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \;\&\; e \leq n \;\&\; k \in \{e,\dots,n\} \;\&$
    $m \in \{k+1,\dots,n\} \;\&\; \neg(a(m,k) = \text{нольмн}) \;\&\; \deg(a(m,k)) < \deg(a(k,k)) \to$
    $\forall_{jf}(j \in \{1,\dots,n\} \;\&\; f = a(m,j) \to a(m,j) = a(k,j) \;\&\; a(k,j) = f) \;\&$
    $\forall_{jf}(j \in \{1,\dots,n\} \;\&\; f = c(m,j) \to c(m,j) = c(k,j) \;\&\; c(k,j) = f))$
    Уровень срабатывания равен 1.

    (d) Вычитание кратного строки.
    $\forall_{acemnpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \;\&\; e \leq n \;\&\; \neg(a(e,e) = \text{нольмн}) \;\&$
    $m \in \{e+1,\dots,n\} \;\&\; \neg(a(m,e) = \text{нольмн}) \;\&\; a(m,e) = a(e,e)p + q \to$
    $\forall_j(j \in \{1,\dots,n\} \to a(m,j) = (q \text{ при } j = e, \text{ иначе } a(m,j) - p \cdot a(e,j))) \;\&$
    $\forall_j(j \in \{1,\dots,n\} \to c(m,j) = c(m,j) - p \cdot c(e,j)))$
    Уровень срабатывания равен 2.

    (e) Вычитание кратного столбца.
    $\forall_{ademnpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \;\&\; e \leq n \;\&\; \neg(a(e,e) = \text{нольмн}) \;\&$
    $m \in \{e+1,\dots,n\} \;\&\; \neg(a(e,m) = \text{нольмн}) \;\&\; a(e,m) = a(e,e)p + q \to$
    $\forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to a(i,m) = (q \text{ при } i = e, \text{ иначе } a(i,m) - p \cdot a(i,e))) \;\&$
    $\forall_i(i \in \{1,\dots,n\} \to d(i,m) = d(i,m) - p \cdot d(i,e)))$
    Уровень срабатывания равен 2.

(f) Перестановка строк и столбцов для получения на главной диагонали ненулевого элемента.

$\forall_{acdenpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \le n\ \&\ a(e,e) = \text{нольмн}\ \&$
$p \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ q \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(a(p,q) = \text{нольмн})\ \&$
$\forall_{ij}(i \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(a(i,j) = \text{нольмн}) \rightarrow$
$\deg(a(p,q)) \le \deg(a(i,j)))\ \&\ f = a(p,e)\ \&\ g = a(p,q) \rightarrow$
$\forall_{jh}(j \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ h = a(p,j) \rightarrow$
$a(p,j) = (a(e,e) \text{ при } j = q, \text{ иначе } (a(e,q) \text{ при } j = e, \text{ иначе } a(e,j)))\ \&$
$a(e,j) = (f \text{ при } j = q, \text{ иначе } (g \text{ при} j = e, \text{ иначе } h)))\ \&$
$\forall_{ih}(i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(i = p)\ \&\ \neg(i = e)\ \&\ h = a(i,q) \rightarrow$
$a(i,q) = a(i,p)\ \&\ a(i,p) = h)\ \&$
$\forall_{jh}(j \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ h = c(p,j) \rightarrow c(p,j) = c(e,j)\ \&\ c(e,j) = h)\ \&$
$\forall_{ih}(i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ h = d(i,q) \rightarrow d(i,q) = d(i,e)\ \&\ d(i,e) = h))$

Уровень срабатывания равен 2.

(g) Деление с остатком для двух последовательных элементов главной диагонали - случай ненулевого остатка.

$\forall_{acdenpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \le n\ \&\ 2 \le e\ \&$
$\neg(a(e,e) = \text{нольмн})\ \&\ \neg(a(e-1,e-1) = \text{нольмн})\ \&$
$a(e,e) = a(e-1,e-1)p + q\ \&\ \neg(q = \text{нольмн}) \rightarrow a(e-1,e) = q\ \&$
$\forall_j(j \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow c(e-1,j) = c(e-1,j) + c(e,j))\ \&$
$\forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow d(i,e) = d(i,e) - pd(i,e-1))\ \&\ e = e-1)$

Уровень срабатывания равен 3.

(h) Деление многочлена, расположенного на главной диагонали, на его старший коэффициент.

$\forall_{acefghn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \le n\ \&\ \neg(a(e,e) = \text{нольмн})\ \&$
$\text{старшкоэфф}(a(e,e)) = f\ \&\ \neg(f-1 = 0)\ \&\ \text{стандмн}(a(e,e),g,h) \rightarrow$
$a(e,e) = g\ \&\ \forall_j(j \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow c(e,j) = hc(e,j)))$

Уровень срабатывания равен 4.

(i) Увеличение на единицу счетчика обработанных столбцов.

$\forall_{aen}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \le n \rightarrow e = e+1)$

Уровень срабатывания равен 5.

(j) Выдача результата.

$\forall_{aben}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e = n+1 \rightarrow b = a)$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 1.

Для обращения к операторному выражению "вычканматр" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{ABCDanxy}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})\ \&$
$\text{канпредставл}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}), B, C, D) \rightarrow$
$\text{каноничматрица}(A,x,y) \leftrightarrow y = C)$

Прием имеет заголовок "второйтерм". Заменяемая часть идентифицируется с подутверждением условия задачи на описание, либо имеющей цель "вычислить", либо имеющей условие вида "точность(...)". Переменная y - неизвестная. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". При идентификации его правой части используется указатель "Матрица", преобразующий элементы матрицы в термы для многочленов от x. Второй антецедент выделен указателем "программа". Он реализует обращение к оператору "вычканматр". Уровень срабатывания равен 2.

2. Пакет продукций "вычэлемделители". Оператор "вычэлемделители(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными вещественную квадратную многочленную матрицу, приведенную к каноническому виду, и число x2, определяющее точность вычислений. Выходной переменной x3 присваивается набор комплексных корней, соответствующих элементарным делителям, а переменной x4 - набор кратностей этих корней. Формат пакета задается термом "программа(вычэлемделители вход(x1 строки(многочлен(число))) вход(x2 число) выход(x3 набор(комплексное)) выход(x4 набор(целое)) параметр(x5 логсимвол) цикл)".

    (a) Инициализация вспомогательных объектов.
    $\forall_{cde}(c = \text{пустоеслово}\ \&\ d = \text{пустослово}\ \&\ e = 1)$

    Параметр e - счетчик обработанных столбцов. Уровень срабатывания равен 0.

    (b) Пропуск нулевого элемента.
    $\forall_{aen}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}\ \&\ e \le n\ \&\ \deg(a(e,e)) = 0 \to e = e+1)$
    Уровень срабатывания равен 1.

    (c) Обработка ненулевого элемента.
    $\forall_{abenpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}\ \&\ e \le n\ \&\ \neg(\deg(a(e,e)) = 0)\ \&$
    комплкорни$(a(e,e),b,p,q) \to c = (c;p)\ \&\ d = (d;q)\ \&\ e = e+1)$

    Пакет продукций "комплкорни", определяющий набор корней комплексного многочлена вместе с их кратностями, будет приведен в подразделе, связанном с комплексными вычислениями. Уровень срабатывания приема равен 1.

    (d) Выдача результата.
    $\forall_{aen}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}\ \&\ e = n+1 \to \text{истина})$

    Консеквент "истина" указывает на немедленную выдачу результата. Уровень срабатывания равен 1.

3. Пакет продукций "вычжордматр". Оператор "вычжордматр(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными набор x1 элементарных делителей и набор x2 их кратностей. Выходной переменной x3 присваивается соответствующая жорданова матрица. Формат пакета определяется термом "программа(вычжордматр вход(x1 набор(комплексное)) вход(x2 набор(целое)) выход(x3 строки(комплексное)) параметр(x4 целое) параметр(x5 целое) параметр(x6 логсимвол) цикл)".

    (a) Инициализация вспомогательных объектов.
    $\forall_{abcden}(l(a) = n \to c = \text{пустоеслово}\ \&\ d = 0\ \&\ e = \sum_{i=1}^{n} b(i)\ \&\ f = 1)$
    Уровень срабатывания равен 0.

    (b) Добавление группы строк.
    $\forall_{abcdef}(l(a) = n\ \&\ f \le n \to c = (c; \lambda_{jk}((a(f)\ \text{при}\ k = d+j,\ \text{иначе}$
    $(1\ \text{при}\ k = d+j+1\ \&\ \neg(j = b(f)),\ \text{иначе}\ 0)), j \in \{1,\dots,b(f)\}\ \&$
    $k \in \{1,\dots,e\}))\ \&\ d = d + b(f)\ \&\ f = f+1)$
    Уровень срабатывания равен 1.

(c) Выдача результата.
$\forall_{afn}(l(a) = n \ \& \ f = n + 1 \to \text{истина})$
Уровень срабатывания равен 1.

4. Пакет продукций "комплканматр". Оператор "комплканматр(x1 x2 x3 x4)" имеет своим входным данным комплексную многочленную квадратную матрицу x1. Выходной переменной x2 присваивается результат A приведения x1 к каноническому виду. При этом переменным x3 и x4 присваиваются такие матрицы B и C, что x1 равно $B^{-1}AC^{-1}$. Исходная матрица x1 портится. Формат пакета определяется термом "программа(комплканматр вход(x1 строки(многочлен(комплексное))) выход(x2 строки(многочлен(комплексное))) выход(x3 строки(многочлен(комплексное))) выход(x4 строки(многочлен(комплексное))) цикл параметр(x5 логсимвол) уровень(5))".

   Приемы пакета аналогичны приемам пакета "вычканматр".

   (a) Инициализация вспомогательных объектов.
   $\forall_{acden}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \to$
   $c = \lambda_{ij}((\text{единицаМн при } i = j, \text{ иначе нольМн}), i \in \{1, \dots, n\} \ \&$
   $j \in \{1, \dots, n\}) \ \& \ d = \lambda_{ij}((\text{единицаМн при } i = j, \text{ иначе нольМн}),$
   $i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\}) \ \& \ e = 1)$
   Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Перестановка столбцов для понижения степени.
   $\forall_{adekmn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \ \& \ e \leq n \ \& \ k \in \{e, \dots, n\} \ \&$
   $m \in \{k + 1, \dots, n\} \ \& \ \neg(a(k, m) = \text{нольМн}) \ \& \ \deg(a(k, m)) < \deg(a(k, k)) \to$
   $\forall_{if}(i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ f = a(i, m) \to a(i, m) = a(i, k) \ \& \ a(i, k) = f) \ \&$
   $\forall_{if}(i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ f = d(i, m) \to d(i, m) = d(i, k) \ \& \ d(i, k) = f))$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (c) Перестановка строк для понижения степени.
   $\forall_{acekmn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \ \& \ e \leq n \ \& \ k \in \{e, \dots, n\} \ \&$
   $m \in \{k + 1, \dots, n\} \ \& \ \neg(a(m, k) = \text{нольМн}) \ \& \ \deg(a(m, k)) < \deg(a(k, k)) \to$
   $\forall_{jf}(j \in \{1, \dots, n\} \ \& \ f = a(m, j) \to a(m, j) = a(k, j) \ \& \ a(k, j) = f) \ \&$
   $\forall_{jf}(j \in \{1, \dots, n\} \ \& \ f = c(m, j) \to c(m, j) = c(k, j) \ \& \ c(k, j) = f))$
   Уровень срабатывания равен 1.

   (d) Вычитание кратного строки.
   $\forall_{acemnpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \ \& \ e \leq n \ \& \ \neg(a(e, e) = \text{нольМн}) \ \&$
   $m \in \{e + 1, \dots, n\} \ \& \ \neg(a(m, e) = \text{нольМн}) \ \& \ a(m, e) = a(e, e)p + q \to$
   $\forall_{j}(j \in \{1, \dots, n\} \to a(m, j) = (q \text{ при } j = e, \text{ иначе } a(m, j) - p \cdot a(e, j))) \ \&$
   $\forall_{j}(j \in \{1, \dots, n\} \to c(m, j) = c(m, j) - p \cdot c(e, j)))$
   Заметим, что арифметические операции как над комплексными, так и над вещественными многочленами реализуются одними и теми же операторными выражениями ЛОСа. Уровень срабатывания равен 2.

   (e) Вычитание кратного столбца.
   $\forall_{ademnpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \ \& \ e \leq n \ \& \ \neg(a(e, e) = \text{нольМн}) \ \&$
   $m \in \{e + 1, \dots, n\} \ \& \ \neg(a(e, m) = \text{нольМн}) \ \& \ a(e, m) = a(e, e)p + q \to$
   $\forall_{i}(i \in \{1, \dots, n\} \to a(i, m) = (q \text{ при } i = e, \text{ иначе } a(i, m) - p \cdot a(i, e))) \ \&$
   $\forall_{i}(i \in \{1, \dots, n\} \to d(i, m) = d(i, m) - p \cdot d(i, e)))$
   Уровень срабатывания равен 2.

(f) Перестановка строк и столбцов для получения на главной диагонали ненулевого элемента.

$\forall_{acdenpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \leq n\ \&\ a(e,e) = \text{нольМн}\ \&$
$p \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ q \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(a(p,q) = \text{нольмн})\ \&$
$\forall_{ij}(i \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{e+1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(a(i,j) = \text{нольмн}) \rightarrow$
$\deg(a(p,q)) \leq \deg(a(i,j)))\ \&\ f = a(p,e)\ \&\ g = a(p,q) \rightarrow$
$\forall_{jh}(j \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ h = a(p,j) \rightarrow$
$a(p,j) = (a(e,e) \text{ при } j = q,\ \text{иначе } (a(e,q) \text{ при } j = e,\ \text{иначе } a(e,j)))\ \&$
$a(e,j) = (f \text{ при } j = q,\ \text{иначе } (g \text{ при} j = e,\ \text{иначе } h)))\ \&$
$\forall_{ih}(i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ \neg(i = p)\ \&\ \neg(i = e)\ \&\ h = a(i,q) \rightarrow$
$a(i,q) = a(i,p)\ \&\ a(i,p) = h)\ \&$
$\forall_{jh}(j \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ h = c(p,j) \rightarrow c(p,j) = c(e,j)\ \&\ c(e,j) = h)\ \&$
$\forall_{ih}(i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ h = d(i,q) \rightarrow d(i,q) = d(i,e)\ \&\ d(i,e) = h))$

Уровень срабатывания равен 2.

(g) Деление с остатком для двух последовательных элементов главной диагонали - случай ненулевого остатка.

$\forall_{acdenpq}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \leq n\ \&\ 2 \leq e\ \&$
$\neg(a(e,e) = \text{нольМн})\ \&\ \neg(a(e-1,e-1) = \text{нольМн})\ \&$
$a(e,e) = a(e-1,e-1)p + q\ \&\ \neg(q = \text{нольМн}) \rightarrow a(e-1,e) = q\ \&$
$\forall_{j}(j \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow c(e-1,j) = c(e-1,j) + c(e,j))\ \&$
$\forall_{i}(i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow d(i,e) = d(i,e) - pd(i,e-1))\ \&\ e = e-1)$

Уровень срабатывания равен 3.

(h) Деление многочлена, расположенного на главной диагонали, на его старший коэффициент.

$\forall_{acefghn}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \leq n\ \&\ \neg(a(e,e) = \text{нольМн})\ \&$
$\text{старшкоэфф}(a(e,e)) = f\ \&\ \neg(f - 1 = 0)\ \&\ \text{стандмн}(a(e,e),g,h) \rightarrow$
$a(e,e) = g\ \&\ \forall_{j}(j \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow c(e,j) = hc(e,j)))$

Операции в выражении $f-1$ - комплексные. Уровень срабатывания приема равен 4.

(i) Увеличение на единицу счетчика обработанных столбцов.

$\forall_{aen}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e \leq n \rightarrow e = e+1)$

Уровень срабатывания равен 5.

(j) Выдача результата.

$\forall_{aben}(\mathrm{Dom}(a) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&\ e = n+1 \rightarrow b = a)$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата при срабатывании приема. Уровень срабатывания равен 1.

10.6.6 Вычисления с комплексными числами

Для комплексных вычислений рассматривались лишь несколько задач, связанных с многочленами.

1. Пакет продукций "Производнмн". Операторное выражение "Производнмн(x1)" имеет своим значением производную многочлена с комплексными коэффициентами x1. Компилятор вставляет обращение к этому операторному выражению в программу приема, если теорема приема содержит выражение "производнаямн(x1)". Формат пакета определяется термом "программа(Производнмн

вход(x1 многочлен(комплексное)) выход(x2 многочлен(комплексное)) выражение)".

(a) Производная неконстантного многочлена.

$\forall_{abn}(\deg(a) = n\ \&\ \neg(n = 0) \rightarrow b =$ многочлен(1, комплексnúmполе, $\lambda_i((i + 1)$коэффициентмн$(a, i + 1), i \in \{0, \ldots, n - 1\})))$

Умножение комплексное.

(b) Производная константного многочлена.

$\forall_{abn}(\deg(a) = 0 \rightarrow \mu_x(0,$ комплекснполе$))$

Уровни срабатывания приемов равны 1.

2. Пакет продукций "комплзначмн". Операторное выражение "комплзначмн(x1 x2)" имеет своим значением значение комплексного многочлена x1 в точке x2. Компилятор вставляет обращение к этому операторному выражению в программу приема, если теорема приема содержит выражение "значениемн(x1)". Формат пакета определяется термом "программа(комплзначмн вход(x1 многочлен(комплексное)) вход(x2 комплексное) выход(x3 комплексное) выражение)".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcn}(\deg(a) = n \rightarrow c =$ старшкоэфф$(a)\ \&\ \forall_i(i \in \{0, \ldots, n - 1\} \rightarrow$ $c =$ коэффициентмн$(a, n - i - 1) + cb))$

Приближенное вычисление корней многочленов с комплексными коэффициентами

1. Пакет продукций "Корнимн". Операторное выражение "Корнимн(x1 x2)" имеет своим значением множество комплексных корней комплексного многочлена x1, при вычислении которых выдерживался уровень точности x2. Компилятор вставляет обращение к этому операторному выражению в программу приема, если теорема приема содержит терм "точность(Корнимн(x1)x2)". Формат пакета определяется термом "программа(Корнимн вход(x1 многочлен(комплексное)) вход(x2 число) выход(x3 класс(комплексное)) выражение уровень(2))".

(a) Многочлен степени 1.

$\forall_{abcde}(\deg(a) = 1\ \&\ d =$ коэффициентмн$(a, 0)\ \&\ e =$ коэффициентмн$(a, 1)$ $\&\ \neg(e = 0) \rightarrow c = \{-(d/e)\})$

Уровень срабатывания равен 1.

(b) Шаг понижения степени.

$\forall_{abcghmpq}($Кореньмн$(a, b, p)\ \&\ g = \mu_x(-p + x,$ комплекснполе$)\ \&$ частноемн$(a, g, h, q)\ \&$ точность(Корнимн$(h), b) = m \rightarrow c = m \cup \{p\})$

Пакет "Кореньмн", определяющий единственный корень многочлена, приводится ниже. Четвертый антецедент реализует рекурсивное обращение. Уровень срабатывания равен 2.

Для обращения к операторному выражению "Корнимн" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{abcfmx}(a - b = f(x)$ & точность(Корнимн$(f), c/2) = m \rightarrow$
$a = b$ & точность$(x, c) \leftrightarrow x \in m)$

Прием имеет заголовок "заменаусловия(второйтерм)" и применяется к паре условий задачи на описание. Переменная x - неизвестная, c - десятичная константа. Выражение a содержит переменную x имеет заголовок "Плюс". Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Указатель "значениемн" определяет идентификацию его правой части с суммой, которую можно представить как значение комплексного многочлена f. Второй антецедент, выделенный указателем "программа", реализует обращение к оператору "Корнимн". Используется указатель "округл(m, c)". Уровень срабатывания приема равен 1.

2. Пакет продукций "Кореньмн". Оператор "Кореньмн(x1 x2 x3)" имеет своими входными данными комплексный многочлен x1 и уровень точности вычислений x2 (вещественное число). Выходной переменной x3 присваивается некоторый корень этого многочлена. Формат оператора определяется термом "программа(Кореньмн вход(x1 многочлен(комплексное)) вход(x2 число) выход(x3 комплексное))".

   Пакет имеет единственный прием, задающий последовательность обращений к вспомогательным операторам:

   $\forall_{Rabcdp}($Гранькорней(a, R) & случкомпл$(0, R, d)$ & Уточнкорня$(a, d, b, p) \rightarrow$
   $c = p)$

   Сначала определяется радиус круга, в котором содержится корень, затем в круге выбирается случайное значение, и наконец происходит уточнение корня. Прием обращается к реализованному на ЛОСе оператору "случкомпл(x1 x2 x3)". Его входными данными служат комплексное число x1 и число x2. Выходная переменная x3 перечисляет случайные комплексные числа в круге с центром x1 и радиусом x2.

3. Пакет продукций "Гранькорней". Оператор "Гранькорней(x1 x2)" имеет своим входным данным комплексный многочлен x1. Выходной переменной x2 присваивается такое вещественное число, что все корни многочлена x1 лежат внутри круга радиуса x2 с центром в нуле. Формат оператора определяется термом "программа(Гранькорней вход(x1 многочлен(комплексное)) выход(x2 число))".

   Пакет имеет единственный прием:

   $\forall_{abcn}(\deg(a) = n$ & наибольший$(c, \mathrm{set}_x(\exists_i(i \in \{0, \ldots, n\}$ &
   $x = |$коэффициентмн$(a, i)|))) \rightarrow b = 1 + (c/|$старшкоэфф$(a)|))$

4. Пакет продукций "Уточнкорня". Оператор "Уточнкорня(x1 x2 x3 x4)" имеет входными данными комплексный многочлен x1, комплексное число x2 и вещественное число x3. Выходной переменной x4 присваивается результат уточнения корня x2 с точностью x3. Уточнение выполняется по методу Ньютона. Формат оператора определяется термом "программа(Уточнкорня вход(x1 многочлен(комплексное)) вход(x2 комплексное) вход(x3 число) выход(x4 комплексное) параметр(x5 многочлен(комплексное)) параметр(x6 комплексное) цикл уровень(1))".

   (a) Инициализация параметров.

$\forall_{abef}(e = \text{производная}(a)\ \&\ f = a(b))$

Уровень срабатывания равен 0.

(b) Шаг уточнения.

$\forall_{abcefghpr}(g = e(b)\ \&\ \neg(g = 0)\ \&\ p = f/g\ \&\ c < |p|\ \&\ h = b - p\ \&$
$r = a(h)\ \&\ 2|r| < |f| \to b = h\ \&\ f = r)$

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Выдача результата.

$\forall_{bcdefgp}(g = e(b)\ \&\ \neg(g = 0)\ \&\ p = f/g\ \&\ \neg(c < |p|) \to d = b - p)$

Указатель "результат" определяет немедленную выдачу результата после срабатывания приема. Уровень срабатывания равен 1.

5. Пакет продукций "комплкорни". Оператор "комплкорни(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными комплексный многочлен x1 и вещественное число x2. Выходной переменной x3 присваивается набор корней многочлена x1, определенных с точностью x2, а переменной x4 - набор кратностей этих корней. Формат пакета определяется термом "программа(комплкорни вход(x1 многочлен(комплексное)) вход(x2 число) выход(x3 набор(комплексное)) выход(x4 набор(целое)) уровень(2))".

(a) Многочлен степени 1.

$\forall_{acdef}(\deg(a) = 1\ \&\ e = \text{коэффициентмн}(a, 0)\ \&\ f = \text{коэффициентмн}(a, 1)\ \&$
$\neg(f = 0) \to c = -(e/f)\ \&\ d = 1)$

Уровень срабатывания равен 1.

(b) Шаг понижения степени (случай кратного корня).

$\forall_{abcdghinpqrs}(\text{Кореньмн}(a, b/100, p)\ \&\ g = \mu_x(-p + x, \text{комплекснполе})\ \&$
$\text{частноемн}(a, g, h, q)\ \&\ \text{комплкорни}(h, b, r, s)\ \&\ l(r) = n\ \&\ i \in \{1, \ldots, n\}\ \&$
$r(i) = p \to c = r\ \&\ d = \lambda_j((s(i) + 1 \text{ при } j = i, \text{ иначе } s(j)), j \in \{1, \ldots, n\}))$

Уровень срабатывания равен 2.

(c) Шаг понижения степени (сдучай простого корня).

$\forall_{abcdghpqrs}(\text{Кореньмн}(a, b/100, p)\ \&\ g = \mu_x(-p + x, \text{комплекснполе})\ \&$
$\text{частноемн}(a, g, h, q)\ \&\ \text{комплкорни}(h, b, r, s) \to c = \text{суффикс}(r, p)\ \&$
$d = \text{суффикс}(s, 1))$

Уровень срабатывания равен 2. Заметим, что данный прием срабатывает лишь в тех ситуациях, когда не сработал предыдущий. Одинаковый уровень срабатывания обоих приемов позволяет вынести за скобку общую часть вычислений и выполнять ее лишь однократно. Однако, при этом критическим становится порядок компиляции приемов: второй прием должен быть откомпилирован после первого, иначе программа будет ошибочной.

10.6.7 Вычисления с графами

Пакеты продукций, работающие с графами, можно найти в разделе "Дискретная математика" - "Теория графов" - "Вычисления" оглавления базы приемов. Фактически были рассмотрены всего две задачи - поиск кратчайшего пути в графе и построение максимального потока в транспортной сети.

Для ввода и прорисовки графов в условии задачи создан специальный интерфейс. Граф прорисовывается сразу после посылки, указывающей на него ("граф(G)", "орграф(G)", "транспсеть(G)", и т.п.). Если выделить эту посылку и нажать клавишу"д", то реализуется редактирование графа, в частности, ввод нового графа.

Поиск кратчайшего пути в графе

1. Пакет продукций "кратчайшийпуть". Оператор "кратчайшийпуть(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными неориентированный граф x1 и две его вершины x2, x3. Выходной переменной x4 присваивается простая цепь наименьшей длины, соединяющая в графе x1, начинающаяся в вершине x2 и кончающаяся в вершине x3. Напомним, что маршрут в графе - пара наборов (A_1, A_2), где A_1 - последовательность проходимых вершин, A_2 - соответствующая последовательность проходимых ребер. Формат пакета определяется термом "программа(кратчайшийпуть вход(x1 граф(объект объект)) вход(x2 вершина(объект)) вход(x3 вершина(объект)) выход(x4 набор(набор(объект))) параметр(x5 граф(набор(объект)объект)) параметр(x6 набор(вершина(объект))) параметр(x7 набор(вершина(объект))) цикл продолжение пересмотр уровень(2))".

   (a) Инициализация параметров.

   $\forall_{abcefg}(e = \text{копияграфа}(a, 2, 0)\ \&\ b = \text{таблзначение}(a, e, b)\ \&$
   $c = \text{таблзначение}(a, e, c)\ \&\ f = (b)\ \&\ g = \text{пустоеслово})$

   Жесткая фиксация формата отметок вершины или ребра графа удобна для быстрого извлечения связанной с ними информации, однако создает существенные трудности, если вершину либо ребро нужно сопроводить какой-либо дополнительной информацией. Для размещения этой информации просто не предусмотрено места. В таких случаях приходится копировать граф и закреплять информацию за копиями вершин и ребер исходного графа. Для быстрого доступа к информации исходного графа предусматриваются ссылки из копий вершин и ребер на их оригиналы.

   Создание копии графа обеспечивается операторным выражением "копияграфа(x1 x2 x3)". Здесь x1 - исходный граф либо орграф, x2 и x3 - неотрицательные символьные числа. Значением выражения служит копия графа x1, в которой пометкой каждой вершины служит набор из x2 символов "неопред", после которых идет ссылка на оригинал вершины. Пометкой каждого ребра служит набор из x3 символов "неопред", после которых идет ссылка на оригинал ребра. Роль ссылок играют не левые края наборов, представляющих вершины и ребра оригинала, а сами эти наборы.

   Возвращаясь к приему, замечаем, что переменной e присваивается копия исходного графа, в которой предусмотрена пара новых элементов разметки вершины и ни одного элемента для разметки ребра. Переменным b, c переприсваиваются копии исходной и последней вершин искомого маршрута. Поиск кратчайшего пути будет происходить путем последовательного рассмотрения ярусов остовного дерева с корнем b. На каждом шаге значением переменной f будет служить набор вершин предыдущего яруса, значением переменной g - накопитель вершин следующего яруса. Первым элементом дополнительной отметки вершины будет служить смежная с ней вершина предыдущего яруса, вторым элементом - соединяющее обе вершины ребро.

Работа будет вестись с вершинами и ребрами графа e. Уровень срабатывания приема, инициализирующего перечисленные значения, равен 0.

(b) Шаг расширения слоя.

$\forall_{efghuv}$(входит(u, f) & ведет(h, u, v, e) & об$(v)(1) =$ неопред & $\neg(v = c)$ & $\neg(v = b) \rightarrow$ об$(v)(1) = u$ & об$(v)(2) = h$ & $g =$ суффикс(g, v))

Выражение "об(v)" обозначает отметку вершины v. Прием находит вершину u текущего яруса и просматривает такие выходящие из нее ребра h, которые ведут к еще не учтенным в предыдущих ярусах вершинам v, отличным от исходной и последней вершин искомого маршрута. Формируется пометка (u, h) вершины v, и она регистрируется в накопителе g. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Усмотрение результата.

$\forall_{efghuv}$(входит(u, f) & ведет(h, u, v, e) & $v = c$ & извлечмаршрут$(u, p, q) \rightarrow$ $d =$ (оригиналы(суффикс(p, v)), оригиналы(суффикс(q, h)))))

Если в процессе построения ярусов дерева попадается последняя вершина маршрута c, то предпринимается обращение к оператору "извлечмаршрут", который выдает наборы p и q, соответственно, вершин и ребер от корня дерева b до предпоследней вершины u. Добавляется последний переход от u к c, и выдается маршрут в исходном графе. Используется указатель "результат". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Переход к очередному слою.

$\forall_{fg}(\neg(g =$ пустоеслово$) \rightarrow f = g$ & $g =$ пустоеслово$)$

Так как пакет имеет указатель "продолжение", то после срабатывания его приемов не происходит отката к началу сканирования. Это позволяет сформировать следующий ярус при однократном просмотре текущего яруса. Однако, по завершении создания яруса такой откат нужен. Он обеспечивается данным приемом, имеющим указатель "пересмотр" и срабатывающим на уровне 2.

Для обращения к операторному выражению "кратчайшийпуть" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{Gabcx}$(кратчайшийпуть$(G, a, b, c) \rightarrow$ кратчайшийпуть$(G, a, b, x) \leftrightarrow x = c$)

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Указатели "объект" определяют идентификацию G, a, b с графом и парой его вершин, заданными в вычислительном формате и связанными с задачей через комментарии (текобъект ...). Антецедент, выделенный указателем "программа", обращается к оператору "кратчайшийпуть". Выходное данное c - маршрут в графе - обозначается новой переменной C, причем создаются комментарий к посылкам (маршрут C G) и посылка "машрут(C, G)". Указатель "объект(c)" определяет также создание комментария (текобъект C c набор(объект объект)). Уровень срабатывания равен 2.

2. Пакет продукций "извлечмаршрут". Оператор "извлечмаршрут(x1 x2 x3)" имеет своим входным данным вершину x1 графа либо орграфа, размеченного для анализа окрестности некоторой вершины A. Отметками вершин, расположенных в уже рассмотренной окрестности, служат наборы, у которых первый эле-

мент - предыдущая вершина маршрута от A к данной вершине, а второй элемент - последнее ребро данного маршрута. Переменным x2 и x3 присваиваются, соответственно, набор вершин и набор ребер маршрута от A к x1. Формат пакета определяется термом "программа(извлечмаршурт вход(x1 вершина(набор(объект))) выход(x2 набор(вершина(объект))) выход(x3 набор(ребро(объект))))".

(a) Шаг рекурсии.
$\forall_{abcde}(\neg(\text{об}(a)(1) = \text{неопред}) \ \& \ \text{извлечмаршрут}(\text{об}(a)(1), d, e) \rightarrow$
$b = \text{суффикс}(d, a) \ \& \ c = \text{суффикс}(e, \text{об}(a)(2)))$

(b) Начальная точка.
$\forall_{abc}(\text{об}(a)(1) = \text{неопред} \rightarrow b = (a) \ \& \ c = \text{пустоеслово})$

Нахождение максимального потока в транспортной сети

Напомним, что транспортная сеть - ориентированный граф, пометками вершин которого служат символ "неопред" и символы переменных "a" (входной полюс) и "b" (выходной полюс). Пометкой каждого ребра служит неотрицательное число - пропускная способность ребра (вес ребра).

1. Пакет продукций "макспоток". Оператор "макспоток(x1 x2)" имеет своим входным данным транспортную сеть x2. Выходной переменной x1 присваивается максимальный поток в x2. Он задается графом, полученным при копировании графа x2 и расстановкой на ребрах численных пометок - значений потока. Из вершин и ребер данной копии, как и выше, имеются ссылки на их оригиналы. Формат пакета задается термом "программа(макспоток вход(x2 орграф(логсимвол десчисло)) выход(x1 орграф(объект набор(объект))) параметр(x3 орграф(набор(объект)объект)) параметр(x4 Вершина(объект)) параметр(x5 Вершина(объект)) цикл уровень(2))".

   (a) Инициализация значений.
   $\forall_{abcde}(a = \text{копияграфа}(b, 0, 1) \ \& \ \forall_x(x \in \text{ребра}(a) \rightarrow \text{об}(x)(1) = 0) \ \&$
   $c = \text{копияграфа}(a, 2, 0) \ \&$
   $\forall_x(x \in \text{вершины}(c) \ \& \ \text{об}(\text{оригинал}(\text{оригинал}(x))) = \text{икс}(1) \rightarrow d = x) \ \&$
   $\forall_x(x \in \text{вершины}(c) \ \& \ \text{об}(\text{оригинал}(\text{оригинал}(x))) = \text{икс}(2) \rightarrow e = x))$

   Вводится накопитель результата a, у которого величины потока равны 0. Для нахождения кратчайших маршрутов в остаточной сети создается копия c орграфа a. Как и в предыдущем разделе, для прокладки машрута вершины этой копии будут размечаться парами (предыдущая вершина - ребро). Переменным d, e присваиваются начальная и конечная вершины маршрута в c. Уровень срабатывания равен 0.

   (b) Шаг оптимизации.
   $\forall_{cdemp}(\text{остаточнпуть}(c, d, e, p) \ \&$
   $\text{наименьший}(m, \text{set}_x(\exists_y(\text{входит}(y, p(2)) \ \& \ x = \text{об}(\text{оригинал}(y)) - \text{об}(y)(1)))) \rightarrow$
   $\forall_z(\text{входит}(z, p(2)) \rightarrow \text{об}(z)(1) = \text{об}(z)(1) + m))$

   Оператор "остаточнпуть", описываемый ниже, находит некоторый кратчайший путь p в остаточной сети. По нему вычисляется величина m, на которую можно увеличить значения потока вдоль пути. Уровень срабатывания равен 1.

(c) Выдача результата.

Теоремой этого приема служит константа "истина", что означает выдачу результата. Уровень срабатывания равен 2.

Для обращения к оператору "макспоток" из сканирования задачи создан следующий прием:

$\forall_{Gax}$(транспсеть(G) & макспоток$(a, G) \to$ макспоток$(x, G) \leftrightarrow x = a)$

Прием имеет заголовок "второйтерм" и применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "пример". Переменная x - неизвестная. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - выделен указателем "программа". Указатель "объект(G)" определяет идентификацию транспортной сети с орграфом в вычислительном формате ГЕНОЛОГа через комментарий (текобъект ...). Указатель "объект(a)" определяет ввод новой переменной для обозначения результата a и регистрацию его в комментарии (текобъект ...). При срабатывании приема создается посылка "потоквсети(a, G)". Вводится комментарий (пометка a G). Уровень срабатывания равен 2.

Пометки вершин и ребер графов хранятся в информационных блоках системы в формате термов и логических символов. После того, как они считаны в зону задач, их необходимо переводить в тот формат, которого требует тип сетевых объектов. Для этого нужно создавать дополнительные приемы, срабатывающие на уровне 0. В нашем случае создан следующий прием:

$\forall_G$(транспсеть$(G) \to \emptyset)$

Он имеет заголовок "замечание". Антецедент идентифицируется с посылкой. Указатель "коррект(G орграф(логсимвол десчисло))" обеспечивает необходимую коррекцию данных: термы для пропускных способностей ребер переводятся в десятичные числа.

2. Пакет продукций "остаточнпуть". Оператор "остаточнпуть(x1 x2 x3 x4)" имеет своими входными данными копию x1 сети, хранящей значения текущего потока и являющейся копией исходной транспортной сети, а также исток x2 и сток x3 сети x1. Выходной переменной x4 присваивается кратчайшая цепь в оригинале сети x1. Формта пакета задается термом "программа(остаточнпуть вход(x1 орграф(набор(объект)объект)) вход(x2 Вершина(объект)) вход(x3 Вершина(объект)) выход(x4 набор(набор(объект))) параметр(x5 набор(Вершина(объект))) параметр(x6 набор(Вершина(объект))) цикл продолжение пересмотр уровень(2))".

(a) Инициализация параметров.

$\forall_{abef}(\forall_x(x \in$ вершины$(a) \to$ об$(x)(1) =$ неопред$)$ & $e = (b)$ &
$f =$ пустоеслово$)$

Первые компоненты отметок вершин орграфа x1 расчищаются, так как этот орграф используется для поиска кратчайших маршрутов неоднократно. Параметры e, f аналогичны параметрам f, g пакета "кратчайшийпуть". Уровень срабатывания равен 0.

(b) Шаг расширения окрестности.

$\forall_{abcefhuv}$(входит(u, e) & ведет(h, u, v, a) & об$(v)(1) =$ неопред & $\neg(v = c)$ & $\neg(v = b)$ & об(оригинал(оригинал(h))) > об(оригинал(h))(1) $\rightarrow$ об$(v)(1) = u$ & об$(v)(2) = h$ & $f =$ суффикс(f, v))

Уровень срабатывания равен 1.

(c) Усмотрение результата.

$\forall_{abcefhuv}$(входит(u, e) & ведет(h, u, v, a) & $v = c$ & об(оригинал(оригинал(h))) > об(оригинал(h))(1) & извлечмаршрут$(u, p, q) \rightarrow d =$ (оригиналы(суффикс(p, v)), оригиналы(суффикс(q, h))))

Используется указатель "результат". Уровень срабатывания равен 1.

(d) Переход к очередному слою.

$\forall_{ef}(\neg(f =$ пустоеслово$) \rightarrow e = f$ & $f =$ пустоеслово)

Используется указатель "пересмотр". Уровень срабатывания равен 2.

Глава 11

Анализатор решений

Пошаговый просмотр действий решателя дает картину поиска им решения задачи. В этой картине многие шаги могут оказаться ненужными, а сам ход решения - далеко не оптимальным. Вероятно, при решении задачи человеком ситуация аналогичная. Сначала находится хоть какое-то решение, а затем уже оно расчищается и оптимизируется. Поэтому, чтобы сделать решатель более доступным для пользователя, необходимо иметь в нем какую-то систему протоколирования решения и последующей оптимизации протокола.

В настоящее время созданы базисные блоки такой системы, позволяющие сохранять протокол и выполнять простейшую его расчистку. В основном, все сводится к отбрасыванию шагов вывода следствий в планиметрических задачах, не использованных при получении ответа. Сама система получила название анализатора решений.

11.1 Организация протокола решения задачи

Протокол решения задачи имеет древовидный характер: при каждом обращении к вспомогательной задаче либо вспомогательному пакетному оператору создается новая ветвь дерева, в которой и описывается их решение. Чтобы учесть случаи пакетных операторов, здесь используется уже вводившееся ранее понятие обобщенной задачи (см. том 1, описание просмотра цепи задач при трассировке). Напомним типы таких задач:

1. Обычные задачи на преобразование, доказательство, описание и исследование.
2. Задача нормализатора - набор (нормализатор A_1 A_2 A_3 A_4), где A_1 - название нормализатора, A_2 - список посылок, A_3 - обрабатываемый нормализатором терм, A_4 - список комментариев.
3. Задача проверочного оператора - набор (легковидеть A_1 A_2 A_3 A_4), где A_1 - название проверочного оператора, A_2 - список посылок, A_3 - проверяемое утверждение, A_4 - список комментариев.
4. Задача синтезатора - набор (синтезатор A_1 A_2 A_3 A_4), где A_1 - название синтезатора, A_2 - список посылок, A_3 - реализуемое утверждение, A_4 - список комментариев.
5. Задача анализатора - набор (анализатор A_1 A_2 A_3 A_4), где A_1 - название анализатора, A_2 - либо задача, для посылок которой реализуется вспомогательный

вывод (в момент обращения к анализатору), либо (в процессе работы анализатора) внутренняя задача анализатора; A_3 - уровень обращения к анализатору, A_4 - целевая установка обращения.

Фактически под протоколом решения задачи мы будем понимать лишь одну вершину древовидной конструкции, описывающей ход решения. Для каждой вспомогательной обобщенной задачи здесь будет иметься свой протокол ее решения. Этот протокол представляет собой набор информационных элементов следующих типов:

1. (задача A) - A есть исходная версия обобщенной задачи, решение которой зафиксировано в протоколе.
2. (исхмомент A) - A есть число на счетчике шагов работы интерпретатора в момент обращения к решению обобщенной задачи.
3. (смкадр A) - A есть набор $(A_1, \dots, A_n)$ наборов A_i кадров, описывающих попытки применения приемов - оборванные либо завершенные. Фактическая последовательность попыток определяется конкатенацией наборов $A_1, \dots, A_n$. Эта последовательность разрезана на фрагменты A_i, чтобы избежать появления в зоне задач слишком длинных наборов. Длина каждого A_i не превосходит 40. Каждый кадр набора A_i представляет собой набор информационных элементов, типы которых будут приведены ниже.
4. (текзадача A) - A есть копия той версии обобщенной задачи, которая возникла при выполнении последнего зарегистрированного в протоколе преобразования.
5. (надзадача A) - A есть вхождение кадра внешнего протокола, из которого произошло обращение к решению текущей обобщенной задачи.
6. (прогфайл A_1 A_2) - (A_1, A_2) есть ссылка на фрагмент обращения (тот фрагмент программы в блоке программ, из которого произошло обращение к обобщенной задаче).
7. (логсимвол A) - A есть тот логический символ, к программе которого относится фрагмент обращения.
8. (оператор A) - A есть смещение в фрагменте обращения оператора, обратившегося к задаче (символьное число).
9. (просмотрзадачи A) - ссылка на задачу в задачнике, если протокол - корневой. Здесь A - пара (логический символ - десятичный номер узла задачника).

Каждый кадр, описывающий попытку применения приема, состоит из информационных элементов следующих типов:

1. (обращение A) - A есть протокол решения вспомогательной обобщенной задачи, обращение к которому произошло в течение попытки применения приема. Данные информационные элементы размещаются в кадре слева направо в том порядке, в котором происходили обращения. Между ними могут встречаться элементы других типов.

2. (прием A_1 A_2 A_3) - (A_1, A_2, A_3 есть стандартная ссылка на реализованный прием ГЕНОЛОГа. Здесь A_1 - логический символ, A_2 - номер узла в базе приемов, A_3 - заголовок приема.
3. (прием A_1 A_2) - ссылка на реализованный прием ЛОСа: A_1 - логический символ, A_2 - номер контрольной точки "прием(...)", предшествовавшей срабатыванию.
4. (заменавхождения A_1 A_2 A_3) - прием выполнил замену вхождения A_1 подтерма задачи (условия при $A_2 = 1$ либо посылки при $A_2 = 0$)на терм A_3.
5. (вывод A) - прием выполнил вывод в посылках утверждения A.
6. (выводусловия A) - прием выполнил вывод в условиях утверждения A.
7. (ответ A) - прием выдал ответ A обобщенной задачи.
8. (изменение A) - A есть набор информационных элементов, описывающих все изменения обобщенной задачи, произошедшие после протоколирования предыдущего шага ее решения по момент завершения ее текущего шага. Типы таких элементов следующие:
   (a) (посылка A_1 A_2 A_3) - A_1 есть список символьных номеров исключаемых посылок; A_2 - список пар (номер старой позиции - номер новой позиции), определяющий последовательность перестановок в сохраняющихся посылках; A_3 - список пар (номер позиции в списке посылок измененной задачи - посылка, расположенная на этой позиции), перечисляющий все новые посылки. Нумерация посылок начинается с 1.
   (b) (условие A_1 A_2 A_3) - A_1 есть список символьных номеров исключаемых условий; A_2 - список пар (номер старой позиции - номер новой позиции), определяющий последовательность перестановок в сохраняющихся условиях; A_3 - список пар (номер позиции в списке условий измененной задачи - условие, расположенное на этой позиции), перечисляющий все новые условия. Нумерация условий начинается с 1. В случае задачи на преобразование либо доказательство, либо пакетного оператора $A_1 = 1$, $A_2 =$ "пустоеслово", A_3 - измененное условие.
   (c) (комментарии A_1 A_2 A_3 A_4) - A_1 есть указатель на посылки (0) либо условия (1); A_2 - символьный номер терма задачи, для которого рассматривается список комментариев, либо 0 (для списка общих комментариев). A_3 - список комментариев, исключаемых из рассматриваемого списка комментариев; A_4 - набор новых комментариев, заносимых в список. В случае пакетного оператора $A_1 = 0$, $A_2 = 0$.
   (d) (цели A_1 A_2) - A_1 есть список исключаемых целей, A_2 - список новых целей.
   (e) (число A_1 A_2) - A_2 есть набор весов посылок (при $A_1 = 0$ либо условий (при $A_1 = 1$) в измененной задаче. Если несколько идущих подряд термов задачи имеют один и тот же вес, то вместо него в наборе A_2 помещается пара (B_1, B_2), где B_1 - количество термов (символьное число); B_2 - их общий вес. В случае задач на преобразование и доказательство при $A_1 = 1$ значение A_2 - новый вес условия.
9. (число A) - A есть момент срабатывания приема.

10. "стоп" - преобразователь заблокировал выполнение приема.
11. (разборслучаев A_1 A_2) - прием выполнил разбор случаев по утверждению A_2 - посылке при $A_1 = 0$ и условию при $A_1 = 1$.
12. "известно" - прием выдал ответ задачи на описание, условия которой не содержат неизвестных.
13. "редакция" - выдача ответа задачи на описание, имеющей цель "редакция".
14. (известны A) - выдача ответа блока анализа, имеющего цель "известно". A - набор использованных посылок блока анализа.
15. (замена A_1 A_2) - прием нормализатора выполнил замену терма A_1 на терм A_2.
16. (выводимо A) - A есть список всех использованных приемом утверждений из контекста срабатывания.
17. "легковидеть" - прием выдал ответ проверочного оператора.
18. (синтезатор A) - прием выдал набор A значений выходных переменных пакетного синтезатора.
19. (внутрвывод A) - прием анализатора выполнил вывод утверждения A.
20. (перем A) - A есть набор объектов, с которыми идентифицированы переменные связывающей приставки теоремы приема (с сохранением порядка). Тип данных объектов - вхождение либо терм. Значение 0 означает, что объект при составлении протокола определить не удалось.
21. (равно A_1 A_2 A_3) - прием выполнил замену подтерма с помощью равенства, координата вхождения которого в задачу есть (A_1, A_2, A_3).
22. (перестановка A_1 A_2 A_3) - прием выполнил перестановку частей равенства, координата вхождения которого в задачу есть (A_1, A_2, A_3).
23. "исследовать" - прием вывода следствий в блоке анализа задачи на описание.
24. (протокол A) - A есть вхождение в некоторый набор того протокола, к которому относится данный кадр.
25. (вход A_1 A_2) - A_1 есть вхождение того кадра протокола, который используется данным кадром. A_2 - информационный элемент, уточняющий тип использования (см. ниже). Элементы "вход" возникают уже после решения задачи, при завершающей обработке составленного протокола. Они создаются только для тех кадров, которые фактически использованы при получении итогового ответа.

    Рассматриваются следующие типы использования одного кадра протокола в другом:

    (a) (выводимо B) - в элементе "изменение ..." первого кадра упомянуто утверждение B, используемое для обоснования действия второго кадра.
    (b) "ответ" - первый кадр передает ответ второму.

   (c) "заменавхождения" - второй кадр преобразует терм, полученный в первом кадре.
   (d) (известны x) - в первом кадре завершается предварительное упрощение выражения для неизвестной x, во втором - выдается ответ блока анализа, имеющего цель "известно".
   (e) (учетрезультата x) - в первом кадре завершается окончательное упрощение выражения для неизвестной x, во втором - выдается ответ блока анализа, имеющего цель "известно".
   (f) "редакция" - первый кадр завершает редактирование ответа задачи на описание, выдаваемого вторым кадром.
   (g) (вариант B) - первый кадр инициирует разбор случаев, в результате которого возникает утверждение B, используемое во втором кадре.
   (h) (исследовать B) - перенесение в список условий задачи на описание утверждения B, выведенного в блоке анализа.
   (i) (разборслучаев B) - в первом кадре выводится дизъюнкция B, по которой второй кадр выполняет разбор случаев.
   (j) (заменагруппы B) - второй кадр преобразует группу утверждений, одно из которых - утверждение A, полученное в первом кадре.
   (k) "следствия" - второй кадр использует результаты вывода в блоке анализа, предпринятого в первом кадре.
   (l) "анализатор" - второй кадр отбирает группу посылок, выведенных пакетным анализатором.
   (m) "истина" - первый кадр усматривает тождественно истинное условие задачи на описание, второй - выдает ответ этой задачи.

26. (выход A_1 A_2) - A_1 есть вхождение одного из кадров протокола, использующих данный кадр. A_2 - информационный элемент, уточняющий тип использования (такой же, как выше). Учитываются лишь те случаи использования одним кадром другого, которые необходимы для получения итогового ответа.

27. (нормуравн A) - прием решает систему уравнений A, извлеченных из посылок задачи на исследование, и заносит результаты обратно в этот список посылок.

28. (параметр A) - прием исключает параметр задачи на описание, выраженный равенством A через другие параметры.

29. (существует A) - прием редактирования параметрического описания A.

30. (исключнеизв A) - прием исключает неизвестную задачи на описание, выраженную равенством A через другие неизвестные.

31. "одз" - прием вводит условия на область допустимых значений.

32. (заменагруппы A_1 A_2 A_3) - прием выполнил замену группы A_1 посылок (при $A_2 = 0$) либо условий (при $A_2 = 1$) на утверждение A_3.

33. (и A_1 A_2) - A_1 есть конъюнктивная посылка при $A_2 = 0$ либо конъюнктивное условие при $A_2 = 1$, заменяемая на группу своих конъюнктивных членов.

34. (текзадача A) - A есть текущая задача перед выполнением данного кадра, либо 0. Элемент вводится в первых кадрах наборов - фргаментов полной последовательности кадров. Он является опорным для прослеживания текущих задач вдоль всего набора. Сначала A полагается равным 0, а фактическая текущая задача A вычисляется по мере надобности и затем сохраняется.

35. (вспомнеизвестная x) - прием ввел вспомогательную неизвестную x.

36. (новыенеизвестные A_1 A_2 A_3) - прием перехода к новым неизвестным в задаче на описание. A_1 - набор выделяемых условий; A_2 - набор выражений со старыми неизвестными; A_3 - набор обозначающих их новых неизвестных.

37. "анализатор" - прием выполнил обращение к анализатору.

38. (уровень A) - A есть текущий уровень срабатывания приема.

39. (точкапривязки A_1 A_2 A_3) - A_1 есть номер посылки либо условия, в которых находится точка привязки приема; A_2 - указатель посылки либо условия (0 либо 1); A_3 - логический символ привязки приема.

40. "конец" - выделение завершающего кадра корневого протокола.

41. (внешответ A) - A есть набор утверждений, образующий ответ внешней задачи на описание, найденный в блоке анализа.

42. (транзитоперанд A_1 A_2 A_3) - A_1, A_2 суть два использованных оператором "транзитоперанд" утверждения из контекста срабатывания были нужны приему только для усмотрения утверждения A_3.

43. (числатомы A) - A есть набор пар (числовой атом - результат его общей стандартизации) для числовых атомов, встречавшихся в кадрах вывода, достижимых из текущего кадра по цепочкам переходов через элементы "вход".

44. (теорема A_1 A_2) - (A_1, A_2) есть ссылка на теорему в базе теорем, которая была занесена приемом в список посылок задачи.

45. (замещениеусловий A) - A есть набор посылок задачи на исследование, переносимых во внешнюю задачу на описание.

Лишь часть перечисленных информационных элементов возникают непосредственно в процессе протоколирования решения. Остальные появляются при обработке уже созданного "первичного" протокола.

11.2 Создание первичного протокола решения

Для запуска решения задачи с составлением протокола нужно войти в просмотр этой задачи и нажать клавишу "у" (кириллица). Процесс поиска решения не отображается, но после того, как задача решена, на экране отображается корневой кадр протокола решения. Интерфейс просмотра протокола будет описан в конце раздела, а пока займемся описанием программ, обеспечивающих составление протокола.

Программа, реагирующая на нажатие клавиши "у", может быть найдена через оглавление программ: в разделе "Анализатор решений" выбираем первый пункт - "Запуск анализатора решений". После контрольной точки "прием(70)" на счетчике шагов работы интерпертатора ЛОСа устанавливается 0 и вводится комментарий (трассировка ...), инициирующий выдачу номера текущего шага при работе с отладчиком ЛОСа.

После оператора "ветвь 2" находится логический терминал, достижимый из корня задачника по меткам "трассировка", "решение". Этот терминал содержит установку на составление протокола. Приведем типы элементов, которые могут содержаться в данной установке:

1. (максимальныйуровень A) - A есть максимальный уровень, до которого будет решаться задача.
2. (лимит A) - A есть число шагов, после которых попытка решения обрывается.
3. "быстрпреобр" - в протокол включаются обращения к нормализаторам.
4. "легковидеть" - в протокол включаются обращения к проверочным операторам.
5. "синтезатор" - в протокол включаются обращения к пакетным синтезаторам.
6. "анализатор" - в протокол включаются обращения к пакетным анализаторам.

Заметим, что установка на составление протокола создается заблаговременно. Для входа в ее редактирования нужно, находясь в просмотре задачи, нажать "Ctr-у" (кириллица). Рекомендуется не включать в протокол обращения к проверочным операторам и синтезаторам, так как этих обращений оказывается чрезмерно много.

Найденная установка пересылается в x16, и переход через "ветвь 2". Здесь запускается процедура "решение(x11 x16 x17)", которая, собственно, и составляет первичный протокол A решения задачи x11. Выходной переменной x17 присваивается пара (протокол A). Далее к протоколу A добавляется информационный элемент (просмотрзадачи B), содержащий ссылку B на решавшуюся задачу в задачнике. Наконец, предпринимается обращение к процедуре "смрешение(x17)", выполняющей завершающую обработку протокола и реализующей интерфейс просмотра протокола. По завершении просмотра - внутренний перезапуск с возвращением в исходную точку задачника.

Программа процедуры "решение" невелика и может быть найдена через пункт "Анализатор решений" - "Процедура РЕШЕНИЕ" оглавления программ. Прежде всего, удаляется старая версия комментария (решение A) к исходной задаче и вводится его новая версия. Здесь A - установка на составление протокола. Далее переменной x6 присваивается заготовка ответа - пара (протокол B). В накопитель протокола B заносятся: элемент (задача Z), ссылающийся на полную копию Z решаемой задачи, элемент (исхмомент t) и пустой накопитель кадров (смкадр набор(набор(пустоеслово))). Переменной x8 присваивается требуемый максимальный уровень решения задачи (по умолчанию - 16). Этот уровень заносится в регистр уровня, и оператор "трассировка(протокол 0)" устанавливает специальный режим прерываний интерпретатора ЛОСа, необходимый для получения протокола. Об этом режиме мы расскажем немного ниже, а пока продолжим прохождение программы оператора "решение". После установки режима размещается обычное обращение к решению задачи. Заметим, что совместная работа интерпретатора ЛОСа, отладчика ЛОСа и некоторых служебных блоков программ приемов обеспечивают постепенное заполнение накопителя протокола x6, так что к концу решения задачи там уже находится его первичная версия. Подробнее мы рассмотрим этот процесс ниже.

Далее происходит сброс всех установок на прерывания интерпретатора ЛОСа. Оператор "протоколы(правыйкрай(x6)x10)" перечисляет вхождения x10 всех подпротоколов корневого протокола x6. В каждый кадр x14 протокола x10 заносится ссылка (протокол x10) на внешний протокол, а в каждый протокол x15 вспомогательной задачи (решенной либо оборванной), упомянутый в кадре x14, заносится ссылка "надзадача" на кадр x14. По завершении этих действий выдается результат x6.

Как уже было сказано, установка режима прерываний интерпретатора ЛОСа для создания протокола выполняется при помощи оператора "трассировка(протокол 0)". При этом в массиве интерпретатора PR создается кадр прерывания, у которого первая ячейка хранит число 19 - тип установки на прерывание при составлении протокола решения. Интерпретатор будет выполнять выход в отладчик ЛОСа при выполнении одного из следующих условий:

1. Непосредственно в начале реализации оператора "ответ".
2. При реализации операторного выражения "ответзадачи". Прерывание происходит непосредственно перед началом сканирования новой задачи.
3. При реализации оператора "ктп" (контрольная точка прерывания). Этот фиктивный оператор помещается в конце процедур, реализующих преобразования приемов. Он инициирует закрытие текущего кадра протокола решения. После данного оператора должен идти либо оператор "стоп", либо оператор "выход". Оператор "ктп" устанавливает специальный флаг (переменная istprer), равный 0, если после оператора идет "стоп", и 1, если идет "выход". Для получения значения x1 этого флага служит оператор "трассировка(ктп x1)".
4. При обращении к программе одного из следующих операторов: "заменавхождения", "вывод", "выводусловия", "заменагруппы", "внутрвывод", "контрользамены", "контрольнормализации", "контрольбуфера", "учетвбуфере", "анализатор", "внутрпреобр".

Тип обращения к программе "прерывание" в перечисленных случаях равен 11.

Чтобы отладчик ЛОСа, обрабатывая прерывание типа 11, мог получить все необходимую информацию, создан дополнительный массив SD глобального стэка S. Его размеры в точности совпадают с размерами глобального стэка. Массив сопровождающих данных кадра K глобального стэка расположен в SD по тому же смещению, что сам кадр K в S. Используются следующие ячейки этого массива:

1. 1-я ячейка (смещение 0) хранит номер N последнего сработавшего в данном кадре оператора "прием(N)" либо "контрольприема(s N r)".
2. 2-я ячейка, если последним сработал оператор "прием(...)", хранит 0. Иначе она хранит номер символа s.
3. 3-я ячейка хранит либо 0, либо смещение в зоне задач пары (протокол A) - накопителя протокола A решения обобщенной задачи кадра K.

4. 4-я ячейка используется, если 2-я ячейка ненулевая. Тогда она хранит номер символа, являющегося заголовком терма r (т.е. заголовка приема).

Первая, вторая и четвертая ячейки заполняются интерпретатором ЛОСа, третья - изначально содержит 0, а впоследствии корректируется отладчиком ЛОСа. Для работы с дополнительным массивом SD созданы операторы "трассировка(смприем x1 x2 x3)" и "трассировка(решение x1 x2 x3)". Входным данным x1 первого из них служит смещение некоторого кадра глобального стэка S. Оператор выдает информацию о последнем пройденном при реализации программы данного кадра операторе "прием(...)" либо "контрольприема(...)". Если последним был пройден оператор "прием(N)", то значением выходной переменной x2 становится 0, а переменной x3 - число N. Если же последним был пройден оператор "контрольприема(s N r)", то переменной x2 присваивается пара логических символов (s - заголовок терма r), а переменной x3 - число N. Если операторы указанного вида в данном кадре еще не выполнялись, то x2 и x3 равны 0.

Входным данным x1 оператора "трассировка(решение x1 x2 x3)" служит смещение кадра глобального стэка S. Если входное данное x2 равно 0, то выходной переменной x3 присваивается пара (протокол A), используемая для сохранения связанного с кадром x1 протокола решения A. Она извлекается из третьей ячейки соответствующего кадра массива SD. Если же x2 равно 1, то переменная x3 является входной, причем ее значением должна служить пара вида (протокол A). Эта пара регистрируется в третьей ячейке соответствующего кадра массива SD.

Основную работу по составлению протокола выполняет отладчик ЛОСа. Чтобы выйти на соответствующую ветвь его программы, служит раздел "Анализатор решений" - "Составление протокола решения" - "Обработка прерывания анализатора решений" оглавления программ. Перейдем к программе через первый пункт этого раздела и будем прослеживать ход ее выполнения.

Прежде всего, сориентируемся в программе символа "прерывание" - нажмем "курсор вверх" и выйдем в надфрагмент. Это - корневой фрагмент программы. Видно, что отладчик успел лишь присвоить переменной x1 тип обращения к оператору "прерывание" и убедиться, что он равен 11, т.е. указывает на режим составления протокола.

Вернемся к отправной точке через переход "иначе 2". Здесь переменной x2 присваивается набор $(A_1, \ldots, A_7)$ сохраненных перед входом в прерывание значений глобальных переменных. A_1 - логический символ "нет" либо содержимое переменной "ответ"; A_2 - текущий логический символ (чья программа исполняется); A_3 - уровень обращения; A_4 - смещение текущего кадра глобального стэка; A_5 - смещение вершины стэка выражений; A_6 - регистр истинности; A_7 - заголовок текущего оператора либо операторного выражения.

После контрольной точки "прием(17)" идет оператор, присваивающий переменной x3 ссылку на последний кадр оператора "прерывание", т.е. логический символ, номер которого равен смещению начала кадра (не путать с символьным числом). Последний кадр оператора "прерывание" - это как раз кадр исполняемой программы отладчика.

Далее предпринимается поиск смещения x4 стэкового кадра обобщенной задачи, в рамках решения которой выполняется действие. Если текущие оператор либо операторное выражение A_7 не являются оператором "ответ", то переменной x4 присваивается смещение кадра непосредственно предшествующего последнему кадру x3, иначе x4 равно x3. Затем - переход через "ветвь 1".

Если A_2 - один из символов "контрольнормализации", "синтезатор", "контрольбуфера", "анализатор", то переменной x4 переприсваивается смещение кадра, предшествующего кадру x4. Далее - переход через "ветвь 1".

После оператора "повторение" находятся смещение x6 источника кадра x4 и тип x7 этого источника. Если таковых не было (для исходного кадра стэка), то переход через "иначе 1", и выход из отладчика. Иначе - переменной x4 переприсваивается значение x6. Проверяется, что кадр x4 является кадром задачи, либо оператора, либо операторного выражения. Иначе - откат к оператору "повторение". В случае положительного исхода - кадр x4 уже является искомым кадром обобщенной задачи. Тогда переменной x8 присваивается набор $(a_1, \ldots, a_p)$, содержащий полную информацию об этом кадре. Здесь a_1 - тип кадра (1 - задача, 2 - оператор, 3 - операторное выражение).

Если $a_1 = 2$, то a_7 - заголовок оператора. Если этим заголовком служит символ "решение", а текущее операторное выражение A_7 - "ответзадачи", то имеет место стартовый момент составления протокола. Здесь предпринимается регистрация накопителя протокола (протокол A), являющегося значением переменной x6 оператора "решение", в соответствующем каде массива SD. После регистрации - выход из отладчика. Если же указанная ситуация не имела места, то - переход через "ветвь 2" и продолжение обработки прерывания.

Вводится накопитель x9 левого края (т.е. вхождения первого элемента) набора, представляющего текущую обобщенную задачу. Далее, в зависимости от типа x7 кадра x4, предпринимается присвоение x9 нужного значения. Если x7 равно 1, т.е. x4 - кадр задачи, то этим значением становится левый край ее набора. Иначе - вводится набор для обобщенной задачи подходящего типа, и x9 становится равно его левому краю. Случай задачи анализатора рассматривается целиком внутри данной ветви; для него x9 не корректируется. Здесь выделяются два подслучая: текущий оператор "ктп" расположен внутри программы "анализатор" (контрольная точка "прием(98)", либо внутри программы "внешвывод" (контрольная точка "прием(99)". Оба эти подслучая будут подробнее рассмотрены ниже; они аналогичны другим задачам пакетных операторов. Если не имел место случай анализатора, то далее - переход через оператор "ветвь 1", расположенный после оператора, инициализирующего x9.

Если обобщенная задача не была сформирована, то выход из отладчика. Иначе - после контрольной точки "прием(18)" переменной x10 присваивается эта обобщенная задача, определяемая по x9. Переменной x11 присваивается пара (протокол A) для заготовки протокола решения задачи x10, ссылка на которую извлекается из SD. Если такой пары нет, то выход из отладчика. Находится комментарий (решение ...) к посылкам исходной задачи, из которого извлекается набор x14 установок на составление протокола. С учетом типа x7 кадра x4, определяется заголовок x15 программы, реализуемой в этом кадре. Далее - переход через оператор "ветвь 3".

Здесь начинается рассмотрение серии подслучаев, в каждом из которых либо фиксируется вид текущего оператора или операторного выражения A_7, либо заголовок A_2 оператора, при обращении к программе которого произошло прерывание:

1. Текущий оператор имеет вид "ктп". Анализируется программа P, в которой встретился этот оператор. Рассматриваются следующие подслучаи:
    (a) P - программа оператора "одз". Случай рассматривается после контрольной точки "прием(56)". Предварительно переменной x16 присваивается

ссылка на стэковый кадр программы P, а переменной x18 - набор, содержащий полную информацию об этом кадре. С помощью оператора "трассировка(смприем ...)" находится номер N последнего пройденного оператора "прием(N)", который присваивается переменной x20. Определяется номер x21 текущего шага работы интерпретатора. Находится последний кадр K протокола A - он является последним элементом набора x23. Создается результат x24 добавления к кадру K элементов (прием x15 x20), (число x21), "одз". Извлекается та версия x26 обрабатываемой в протоколе задачи, которая имелась непосредственно до текущего прерывания. Она сравнивается с текущей версией x10 оператором "сравнениезадач". По итогам сравнения к набору x24 добавляется элемент (изменение ...). Корректируется ссылка на текущую задачу из протокола A. Наконец, последний элемент набора x23 заменяется на x24. Теперь этот кадр считается "закрытым", и к списку кадров протокола A добавляется новый пустой кадр. Затем - выход из отладчика.

(b) P - программа оператора "замещениеусловий". Действия аналогичны предыдущему случаю, и описание их мы опускаем.

(c) P - программа символа "описать", причем последней была пройдена одна из контрольных точек "прием(49)", "прием(51)" программы этого символа. Это означает, что прерывание произошло сразу после вывода следствий в блоке анализа задачи на описание. Рассмотрение данного случая начинается после контрольной точки "прием(41)". Определяется номер x18 текущего шага работы интерпретатора ЛОСа. Формируется результат x21 присоединения к последнему кадру протокола A элементов "исследовать" и (число x18). Далее действия аналогичны описанным выше: извлекается та версия x23 обрабатываемой в протоколе задачи, которая имелась непосредственно до текущего прерывания. Она сравнивается с текущей версией x10 оператором "сравнениезадач". По итогам сравнения к набору x21 добавляется элемент (изменение ...). Корректируется ссылка на текущую задачу из протокола A. Наконец, содержимое последнего кадра протокола A заменяется на x21, и добавляется новый пустой кадр. Затем - выход из отладчика.

(d) P - программа символа "равно", причем последней была пройдена одна из контрольных точек "прием(56)", "прием(16)", "прием(12)", "прием(58)". В этих ситуациях происходило разрешение одного либо нескольких уравнений задачи на исследование относительно их численных неизвестных. Рассмотрение данного случая начинается после контрольной точки "прием(42)". Значением переменной x17 здесь уже служит номер последней пройденной контрольной точки программы "равно". Формируется результат x21 присоединения к последнему кадру протокола A элементов (прием равно x17), (число ...) и (нормуравн ...). Дальнейшие действия аналогичны предыдущему случаю.

(e) P - программа символа "равно", причем последней была пройдена контрольная точка "прием(26)". Это означает применение приема перехода к новым неизвестным в уравнениях задачи на описание. Рассмотрение случая начинается после контрольной точки "прием(90)". Формируется результат x21 присоединения к последнему кадру протокола A элементов (прием равно x17), (число ...) и (новыенеизвестные ...). Дальнейшие действия аналогичны разобранным выше.

(f) P - программа символа "равно", причем последней была пройдена контрольная точка "прием(47)". Это означает применение приема перехода к новым неизвестным в уравнениях задачи на исследование. Рассмотрение случая начинается после контрольной точки "прием(102)". Действия аналогичны предыдущему случаю.

(g) P - программа символа "и", причем последней была пройдена одна из контрольных точек "прием(4)", "прием(5)". Это означает применение приема замены конъюнктивной посылки либо конъюнктивного условия на группу утверждений. Рассмотрение случая начинается после контрольной точки "прием(69)". Отличие от предыдущего случая заключаются только в том, что вместо элемента (новыенеизвестные ...) набор x21 содержит элемент (и ...).

(h) Рассматриваемое вхождение оператора "ктп последнее в процедуре преобразователя, завершающей действия приема. Обработка таких случаев начинается после контрольной точки "прием(22)". Предпринимается "закрытие" последнего кадра протокола A. В частности, из него удаляется элемент "обрыв", который помещался в каждый открываемый непустой кадр. Если действие преобразователя оказалось заблокировано, то вместо него в кадр помещается элемент "стоп". Создается элемент (изменение ...); корректируются данные о текущей задаче.

2. Текущий оператор имеет вид "ответ(t)". После контрольной точки "прием(24)" переменной x16 присваивается смещение первого предшествующего кадру прерывания x3 кадра задачи, оператора либо операторного выражения. Затем - переход через "ветвь 2", где проверяется, что кадр x16 совпадает с кадром x4 рассматриваемой обобщенной задачи. Переменной x17 присваивается значение выражения t, хранящееся в последней заполненной ячейке стэка выражений. Оператор "трассировка(смприем x4 x18 x19)" определяет ссылку (x18,x19) на последний пройденный оператор "прием(...)" либо "контрольприема(...)". Находится число x20 на счетчике шагов работы интерпретатора. Вводится накопитель x21 дополнительных элементов последнего кадра протокола A, в который заносятся пары (ответ x17) и (число x20). Переменной x22 присваивается набор значений программных переменных реализуемой программы обработки обобщенной задачи x4.

   Если x18 отлично от 0, то реализуется прием ГЕНОЛОГа. В этом случае к набору x21 добавляется ссылка на данный прием, и переход через "ветвь 1". Если же x18 равно 0, то реализуется прием ЛОСа. После того, как ссылка на него добавляется к набору x21, начинается разбор случаев по заголовку x15 реализуемой программы. Здесь рассматриваются следующие варианты:

   (a) x15 - символ "или". Если x19 равно 35 либо 37, то происходит разбор случаев по дизъюнктивному условию задачи на описание. Если x19 равно 24 либо 14, то происходит разбор случаев по дизъюнктивной посылке задачи на описание. Если x19 равно 29, то имеет место разбор случаев по посылке задачи на доказательство либо преобразование. Во всех случайх к набору x21 добавляется соответствующий элемент (разборслучаев ...).

(b) x15 - символ "описать". Если x19 равно 12, то происходит выдача ответа задачи на описание, условия которой не зависят от неизвестных. Тогда к x21 добавляется элемент "известно". Если x19 равно 9, то происходит выдача ответа задачи на описание, имеющей цель "редакция". В этом случае к x21 добавляется элемент "редакция".

(c) x15 - символ "равно". Если x19 равно 43, то происходит выдача ответа внешней задачи на описание, имеющей цель "известно". В этом случае к x21 присоединяются элементы (известны ...) и (усмподгруппа ...). Если x19 равно 23, то происходит исключение параметра задачи на описание, явно выраженного через другие параметры. Тогда к x21 добавляется элемент (параметр ...). Если x19 равно 5, то происходит исключение неизвестной задачи на описание, явно выраженной через другие неизвестные. К набору x21 добавляется элемент (исключнеизв ...). Если x19 равно 14, то происходит передача во внешнюю задачу на описание равенства блока анализа, выражающего одну неизвестную через другие. Тогда к x21 добавляется элемент (замещениеусловий ...).

(d) x15 - символ "существует". Если x19 равно 27, то происходит редактирование параметрического описания. Тогда к набору x21 добавляется элемент (существует ...).

(e) x15 - символ "доказать". Если x19 равно 4, то происходит выдача ответа задачи на доказательство, у которой условие содержится в посылках. Если x19 равно 3, то происходит выдача ответа задачи на доказательство, имеющей две противоположные посылки. В обоих случаях к x21 добавляется элемент (выводимо ...), ссылающийся на используемые посылки.

(f) x15 - символ "исследовать". Если x19 равно 8, то происходит выдача ответа задачи на исследование, среди посылок которой усматривается ответ внешней задачи на описание. К x21 добавляется элемент (выводимо ...), ссылающийся на эту посылку.

После того, как набор x21 сформирован (при любом x18), его элементы заносятся в последний кадр протокола A. Если предпоследний кадр был незавершен, то он удаляется. Затем - выход из отладчика ЛОСа.

3. Текущее операторное выражение имеет вид "ответзадачи(...)". Обработка этого случая начинается после контрольной точки "прием(19)". Прежде всего, определяется смещение x16 кадра глобального стэка, предшествующего текущему кадру прерывания. Это - кадр решения новой задачи. По нему определяется сама эта задача x19. Переменной x20 присваивается полная копия задачи x19. Она будет указывать исходную версию задачи x19 в ее протоколе решения. Из комментариев к посылкам задачи x20 удаляются все элементы с заголовками "выражение", "списокпосылок", "отр", "Буфер", "коррекцияпосылок". После перехода через "ветвь 2" находится номер x21 текущего шага работы интерпретатора. Создается заготовка x22 протокола решения задачи x19, содержащая элементы (задача x20), (исхмомент x21), (смкадр набор(набор(пустоеслово))). По информационному набору x18, описывающему содержимое стэкового кадра x16, определяются элементы (прогфайл ...), (логсимвол ...) и (оператор ...) протокола x22. Эти элементы адресуют фрагмент программы и оператор, обратившиеся к задаче x19. Наконец, оператор "трассировка(решение ...) регистрирует ссылку на пару (протокол x22) в массиве SD. Элемент (обращение

x22) заносится в последний кадр протокола A. Если предпоследний кадр был незавершен (содержал элемент "обрыв"), то он удаляется. Затем - выход из отладчика ЛОСа.

4. Произошло обращение к программе "заменавхождения(...)". Обработка начинается после контрольной точки "прием(20)". Прежде всего, предпринимается проверка того, что обращение к данному оператору не произошло из него самого. Если это так, то выход из отладчика. Иначе - переход через "ветвь 2". Переменной x18 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре оператора "заменавхождения". Затем переменной x19 присваивается набор информационных элементов, сопровождающих обращение к оператору (т.е. его собственная переменная "x6"), а переменной x20 - заменяющий терм. Вводится накопитель x21 элементов кадра протокола, характеризующего срабатывание приема. В этот накопитель сразу помещаются элементы (заменавхождения ...), (уровень ...) и "обрыв". Если в x19 имеется элемент (прием ...), то он передается в x21. Иначе такой элемент создается с помощью анализа последнего пройденного оператора "прием(N)". Далее - переход через оператор "ветвь 1", расположенный перед оператором "ключ(x19 прием x22)".

   Обращение к оператору "заменавхождения" может происходить либо из сканирования задачи (тогда первый элемент набора x8 равен 1), либо из пакетного анализатора (тогда этот элемент равен 2). В каждом из этих случаев создается элемент (точкапривязки ...), добавляемый к набору x21. Затем - переход через оператор "ветвь 1", расположенный перед оператором "заголовок(x8 1)".

   Если в x19 содержится элемент (перем ...), то он передается в набор x21. Затем - переход через "ветвь 1".

   Содержимое элементов (выводимо ...) набора x19 группируется в одном новом элементе (выводимо ...), который регистрируется в накопителе x21. Затем - переход через "ветвь 1".

   Предпринимается стандартная регистрация набора x21 в протоколе: его элементы заносятся в последний кадр протокола; если предпоследний кадр был незавершен, то он удаляется; в конце протокола вводится новый пустой кадр. Затем - выход из отладчика ЛОСа.

5. Произошло обращение к программе "вывод(...)" либо "выводусловия(...)". Обработка этого случая начинается после контрольной точки "прием(21)". Если обращение к данному оператору произошло из него самого, то выход из отладчика. Иначе - переход через "ветвь 2". Переменной x18 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре рассматриваемого оператора. Затем переменной x19 присваивается выводимое утверждение. Если имелись информационные элементы (вывод ...) обращения к оператору, то указываемые в них утверждения присоединяются к x19 через конъюнкцию. Затем - переход через "ветвь 1", где переменной x20 присваивается набор всех информационных элеменов обращения к оператору. Здесь же создается накопитель x21 элементов кадра протокола, характеризующих срабатывание приема. В него заносятся элементы (вывод x19) либо (выводусловия x19), уровень(...) и "обрыв". Дальнейшие действия аналогичны случаю оператора "заменавхождения": в x21 последовательно добавляются элементы (прием ...), (точкапривязки ...), (перем ...), (выводимо ...). Если в x20 имелся элемент (вспомпеременная ...), то

он тоже заносится в набор x21. В конец - стандартная регистрация элементов накопителя x21 в протоколе, и выход из отладчика.

6. Произошло обращение к программе "заменагруппы(...)". Обработка этого случая начинается после контрольной точки "прием(57)". Переменной x18 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре рассматриваемого оператора. Затем переменной x19 присваивается набрр информационных элементов, сопровождающих обращение к оператору, а переменной x20 - заменяющее утверждение. Вводится накопитель x21 элементов кадра протокола, куда сразу заносятся элементы (заменагруппы ...) и "обрыв". Если в x19 имелись элементы (прием ...) и (перем ...), то они переносятся в x21. Как и выше, на основе x19 создается элемент (выводимо ...). Далее - стандартная регистрация x21 в протоколе, и выход из отладчика.

7. В наборе установок на составление протокола имеется элемент "быстрпреобр", указывающий на отображение работы нормализаторов. При этом произошло обращение к программе оператора "контрольнормализации(...)".

   Такие операторы располагаются в начале программ нормализаторов. Исключение составляют нормализаторы общей стандартизации, у которых, из соображений ускорения работы, такие операторы отсутствуют. Соответственно, включение их работы в протоколы не предусмотрено. Впрочем, поток обращений к нормализаторам общей стандартизации столь велик, что включение их в протокол привело бы к непомерно большим размерам последнего. Если возникает необходимость, работая с протоколом, уточнить процесс общей стандартизации, то проще промоделировать ее заново, в каждом конкретном кадре протокола.

   Обработка указанного случая начинается после контрольной точки "прием(31)". Переменной x19 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре рассматриваемого оператора. Переменной x20 присваивается обобщенная задача того нормализатора, из которого произошло обращение к оператору "контрольнормализации". Вводится накопитель x22 протокола решения этой задачи, куда заносятся элементы (задача x20), (исхмомент ...) и (смкадр набор(набор(пустоеслово))). Переменной x25 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре нормализатора. После этого к накопителю x22 присоединяются элементы (прогфайл ...), (логсимвол ...) и (оператор ...). Наконец, оператор "трассировка(решение ...) регистрирует ссылку на пару (протокол x22) в массиве SD. Элемент (обращение x22) заносится в последний кадр протокола A. Если предпоследний кадр был незавершен (содержал элемент "обрыв"), то он удаляется. Затем - выход из отладчика ЛОСа.

8. В наборе установок на составление протокола имеется элемент "быстрпреобр", указывающий на отображение работы нормализаторов. При этом произошло обращение к программе оператора "контрользамены(...)".

   Такие операторы располагаются в концах программ приемов нормализаторов, непосредственно перед заменой преобразуемого терма. В том числе, они имеются в нормализаторах общей стандартизации.

   Обработка указанного случая начинается после контрольной точки "прием(32)". Переменной x19 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре рассматриваемого оператора. Переменной x20 присваивается набор ("прием" - логический символ - номер узла статьи этого символа - указатель направления замены), ссылающийся на примененный прием. Затем вводится накопитель x21 элементов кадра протокола, куда сразу заносятся элементы (замена ...), (прием ...) и "обрыв". При помощи оператора "трассировка(перем ...)" к накопителю x21 присоединяется элемент (перем ...). Затем - стандартная регистрация набора x21 в протоколе и выход из отладчика.

9. В наборе установок на составление протокола имеется элемент "легковидеть", указывающий на отображение работы проверочных операторов. Заметим, что обычно он не включается в установку, так как проверочные операторы применяются чрезвычайно часто.

   Сначала рассмотрим случай, когда произошло обращение к программе оператора "контрольбуфера(...)". Этот оператор размещается в самом начале программы проверочного оператора.

   Обработка указанного случая начинается после контрольной точки "прием(33)". Переменной x19 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре рассматриваемого оператора. Переменной x24 присваивается обобщенная задача того проверочного оператора, из которого произошло обращение к оператору "контрольбуфера". Вводится накопитель x26 протокола решения этой задачи. Дальнейшие действия аналогичны случаю оператора "контрольнормализации".

10. В наборе установок на составление протокола имеется элемент "легковидеть", причем произошло обращение к программе оператора "учетвбуфере(...)". Такие операторы располагаются в концах программ приемов проверочных операторов, непосредственно перед выдачей ответа.

    Обработка указанного случая начинается после контрольной точки "прием(34)". Переменной x19 присваивается набор, содержащий полную информацию о стэковом кадре рассматриваемого оператора. Вводится накопитель x24 элементов кадра протокола, куда заносятся элементы "легковидеть", (прием ...), (выводимо ...), (перем ...). Затем - стандартная регистрация набора x24 в протоколе и выход из отладчика.

11. В наборе установок на составление протокола имеется элемент "синтезатор", указывающий на отображение работы пакетных синтезаторов. Обычно этот элемент не включается в установку, по тем же соображениям, что и элемент "легковидеть". Рассматриваются два случая - когда произошло обращение к программе оператора "контрольбуфера", и к программе оператора "учетвбуфере". Обработка первого из них начинается после контрольной точки "прием(35)", второго - после контрольной точки "прием(36)". Действия аналогичны случаю проверочных операторов.

12. Случай входа в программу пакетного анализатора рассматривается после контрольной точки "прием(98)". Здесь текущий оператор, по которому произошло прерывание, - оператор "ктп", расположенный внутри программы оператора "анализатор(...)". Последний оператор - первый в программе любого пакетного анализатора.

    Переменной x18 присваивается обобщенная задача анализатора. Вводится накопитель x20 протокола решения этой задачи. Дальнейшие действия аналогичны случаю оператора "контрольнормализации".

13. Случай завершения работы пакетного анализатора рассматривается после контрольной точки "прием(99)". Здесь текущий оператор "ктп" расположен в конце программы оператора "внешвывод". Вводится накопитель x24 элементов кадра протокола, куда заносятся элементы "анализатор", (прием ...), (число ...). Затем - стандартная регистрация набора x24 в протоколе и выход из отладчика.

11.3 Предварительная обработка протокола решения

Указанные в предыдущем разделе действия отладчика ЛОСа обеспечивают составление древовидной структуры данных, хранящих информацию о траектории решения задачи. Первичная обработка этой структуры данных выполняется оператором "смрешение(x1)". Значением входной переменной x1 служит пара (протокол A), где A - протокол решения задачи, созданный процедурой "решение". Чтобы проследить действия программы "смрешение", следует войти в ее просмотр, например, через пункт "Анализатор решений" - "Предварительная обработка протокола решения" - "Исходная точка".

Первая из проблем, с которой приходится сталкиваться при обработке первичной версии протокола - неполнота ссылок на использованные утверждения. Она объясняется тем, что ряд средств решателя, созданных для ускоренной идентификации, игнорируют учет таких утверждений. Например, это относится к идентифицирующим операторам, интенсивно используемым в геометрии. Сюда же следует отнести указатель "равно", позволяющий усматривать равенство по транзитивности из двух равенств в посылках. Такого рода экономия действительно нужна, ибо подавляющее большинство попыток идентификации отбрасываются, а поток их весьма интенсивен. Однако, платой за нее становится усложнение процедуры составления протокола решения. Заметим, что дальнейшая обработка протокола предусматривает отбрасывание действий, которые не были нужны для получения ответа. В этой ситуации недоучет использования утверждений грозит потерей существенно важных фрагментов решения задачи.

После контрольной точки "прием(10)" располагается ветвь, обеспечивающая пополнение информационных элементов (выводимо ...), расположенных в кадрах протоколов. Оператор "Шагизадачи" последовательно просматривает все кадры протокола и его подпротоколов - в том же порядке, в каком они создавались при решении задачи. Переменной x3 присваивается текущая версия подзадачи, переменной x4 - вхождение протокола, к которому относится подзадача, переменной x5 - вхождение кадра этого протокола, перед реализацией которого имели данную подзадачу. Далее проверяется, что был реализован прием ГЕНОЛОГа, и переменной x11 присваивается теорема приема, а переменной x15 - описание приема. Из текущего кадра протокола извлекается элемент (перем ...), определяющий связь переменных теоремы приема с программными переменными ЛОСа.

Собственно уточнение списка использованных приемом утверждений обеспечивается процедурой "допвыводимо(x11 x15 x16 x3 x17 x18)". Первые четыре аргумента - входные данные: теорема приема, описание приема, информационный элемент (перем ...) и задача, в которой применен прием. Переменной x17 присваивается дополнение к списку использованных приемом посылок задачи, необходимое для учета антецедентов теоремы, выделенных указателями "усм" и "равно". Переменной x18 присваивается набор информационных элементов, уточняющих использование посылок и переносимых в кадр протокола. Процедура "допвыводимо" использует реализованный на ГЕНОЛОГе проверочный оператор "усмидент". Его можно найти в разделе "Логические приемы и структуры данных" - "Анализатор решений" - "Проверочный оператор УСМИДЕНТ" оглавления приемов. Этот оператор реализует перепроверку утверждений (выделенных указателями "усм", "равно" антецедентов теоремы), не используя средств ускоренной идентификации.

После применения оператора "допвыводимо" корректируется кадр протокола: утверждения списка x17 регистрируются в его элементе (выводимо ...); элементы списка x18 передаются в кадр. По окончании цикла оператора "Шагизадачи" - откат к переходу через оператор "ветвь 2", расположенный после контрольной точки "прием(1)".

Прежде, чем оптимизировать решение задачи, представленное в протоколе, необходимо придать ему характер дерева логического вывода: для каждого преобразования создать явные ссылки на те предшествующие преобразования, результаты которых обеспечивают его логическую допустимость. При этом, разумеется, будут выявлены и отброшены все побочные кадры протокола. Для указанной цели в кадре протокола создаются информационные элементы (вход ...), каждый из которых ссылается на какой-либо один из источников текущего кадра и уточняет тип использования данного источника. Одновременно создаются встречные ссылки (выход ...). Элементы "вход", "выход" в побочных кадрах протоколов, не лежащих на пути к окончательному ответу, не создаются.

Чтобы начать анализ структуры дерева источников, переменной x2 присваивается протокол решения задачи, а переменной x3 - вхождение последнего кадра протокола x2. Проверяется, что этот кадр содержит элемент (ответ ...). Переменной x4 присваивается накопитель обрабатываемых кадров дерева - для каждого из них будут искаться источники. В исходной ситуации этот накопитель состоит из единственного кадра x3.

После контрольной точки "прием(42)" начинается цикл обработки накопителя x4. Переменной x5 присваивается его первый элемент, причем этот элемент сразу же исключается из x4. Переменной x6 присваивается тот кадр, вхождением которого служит x5. Если он уже имеет элемент (вход ...), то откат к обработке следующего элемента накопителя x4. Иначе - рассматриваются следующие случаи:

1. Кадр x6 содержит элемент (ответ ...), т.е. в нем реализуется выдача ответа обобщенной задачи. Обработка этого случая начинается после контрольной точки "прием(2)". Прежде всего, переменной x8 присваивается тот протокол, к которому относится кадр x6 и проверяется, не имеет ли задача этого протокола типа "описать". Если это так, то находятся все кадры протокола x8, в которых реализуется замена условия задачи на константу "истина". Все они объявляются источниками кадра x6, т.е. создаются необходимые элементы "вход", "выход". Типы источников - "истина". Кроме того, указанные кадры добавляются к началу накопителя x4. Не оговаривая каждый раз далее, считаем, что дублирующие элементы в накопитель x4 не заносятся. Далее - переход через "ветвь 5", где переменной x7 присваивается информационный элемент (прием ...) кадра x6, указывающий на примененный в кадре прием. В зависимости от типа приема, рассматриваются следующие подслучаи:

(a) Был применен прием разбора случаев. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(3)". Переменной x8 присваивается информационный элемент (разборслучаев p A) кадра x6, где A - дизъюнкция, являющаяся посылкой при $p = 0$ и условием при $p = 1$. Переменной x9 присваивается число операндов дизъюнкции A. Находятся x9 последних элементов (обращение Q) кадра x6. Они ссылаются на протоколы Q решения обобщенных задач, соответствующих подслучаям. Последние кадры этих протоколов объявляются источниками кадра x6 и заносятся в начало накопителя x4. Типы источников - "ответ". Далее - переход через "иначе 4", где предпринимается поиск вхождения x11 того кадра, в котором была получена дизъюнкция A. Этот кадр объявляется источником кадра x6, имеющим тип (разборслучаев A). Он заносится в начало накопителя x4. Если кадр x11 относится к выводу следствий в блоке анализа внешней задачи на описание Z, то тот кадр K решения задачи Z, который обратился к данному выводу следствий, тоже объявляется источником кадра x6. Его тип - "следствия". В накопитель x4 кадр K не заносится.

(b) Выдача ответа задачи на описание, полученного в блоке анализа. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(4)". Переменной x8 присваивается вхождение того кадра текущего подпротокола, который предшествует кадру x6. Если кадр x6 располагался в начале одного из фрагментов цепочки кадров протокола, то x8 становится равно вхождению последнего кадра предыдущего фрагмента. Переменной x9 присваивается кадр по вхождению x8. Проверяется, что этот кадр относится к приему вывода следствий в блоке анализа. Далее находится последний элемент (обращение $\ldots$) кадра x9. Этот элемент ссылается на протокол P вывода следствий в блоке анализа. Последний кадр K протокола P и кадр x9 объявляются источниками кадра x6. Первый из них имеет тип "ответ", второй - "следствия". Кадр K заносится в начало накопителя x4.

(c) Выдача ответа задачи на описание, решаемой с целью редактирования ответа. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(9)". В кадре x6 находится элемент (ответ A). Переменной x9 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения A. Для каждого из них находится тот кадр протокола, в котором это утверждение возникло в условиях задачи. Этот кадр объявляется источником кадра x6 и присоединяется к началу накопителя x4. Тип источника - "ответ".

(d) Выдача ответа задачи на описание, условия которой не зависят от неизвестных, либо имеющей единственное условие, указывающее на тип значений неизвестной. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(98)". В кадре x6 находится последний элемент (обращение $\ldots$). Он ссылается на протокол x10 решения задачи на редактирование ответа. Переменной x12 присваивается список условий исходной версии данной задачи. Для каждого утверждения списка x12 находится тот кадр протокола, в котором оно впервые возникло в условиях. Этот кадр объявляется источником (типа "ответ") кадра x6 и присоединяется к началу накопителя x4. После обработки списка x12 находится последний кадр x13 протокола x10. Он объявляется источником кадра x6 (тип "редакция") и присоединяется к началу накопителя x4. Особо рассматривается случай, когда кадр x6 не имел элементов (обращение $\ldots$). Тогда в нем находится элемент (ответ A), и для каждого конъюнктивного члена x10 утверждения A ищется тот кадр, в котором x10 возникло в условиях. Этот кадр объявляется источником (тип "ответ") и присоединяется к началу накопителя x4.

(e) Решение задачи с несколькими неизвестными, имеющей цель "полный", путем выражения одной из неизвестных через остальные. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(11)". Находится последний элемент (обращение ...) кадра x6. Он ссылается на протокол x10 вспомогательной задачи на описание. Последний кадр этого протокола объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и присоединяется к началу накопителя x4.

(f) Разбиение условий задачи на описание на независимые группы. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(12)". Просматриваются все элементы (обращение ...) кадра x6, ссылающиеся на протоколы x9 решения вспомогательных задач на описание. Последние кадры этих протоколов объявляются источниками кадра x6 (тип "ответ") и присоединяются к началу накопителя x4.

(g) Выдача ответа блока анализа, имеющего цель "известно". Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(5)". В кадре x6 находится элемент (известны A), ссылающийся на набор A использованных приемом посылок блока анализа, т.е. равенств, указывающих значения неизвестных. Кадры, в которых были получены эти равенства, объявляются источниками кадра x6. Они присоединяются к началу накопителя x4. Далее равенства набора A просматриваются в обратном порядке. Для каждого из них в кадре x6 находятся элементы (обращение ...), ссылающиеся на протоколы решения двух задач на преобразование, использованных для упрощения правой части равенства. Эти задачи имеют, соответственно, цели "упростить", "известны" и "длина", "учетрезультата". Последние кадры указанных протоколов объявляются источниками кадра x6. Они присоединяются к началу накопителя x4.

(h) Выдача ответа задачи на описание, единственное неизвестное условие которой имеет вид $x = t$. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(8)". В кадре x6 находится элемент (обращение ...), ссылающийся на протокол x10 вспомогательной задачи редактирования ответа. Для каждого условия этой задачи ищется кадр, в котором данное условие возникло. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и присоединяется к началу накопителя x4. После просмотра всех условий находится последний кадр протокола x10 , который тоже объявляется источником кадра x6 (тип "редакция") и заносится в начало накопителя x4. Если элемента (обращение ...) не было, то в x6 находится элемент (ответ A). Для каждого конъюнктивного члена утверждения A ищется кадр, в котором он возник. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и присоединяется к началу накопителя x4.

(i) Выдача ответа задачи на описание, если все ее условия суть равенства, определяющие численные значения неизвестных. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(13)". В кадре x6 находится элемент (ответ A). Для каждого конъюнктивного члена утверждения A ищется кадр, в котором он возник. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и присоединяется к началу накопителя x4.

(j) Исключение неизвестной задачи, явно выраженной через остальные неизвестные, либо исключение параметра задачи на описание с помощью равенства в условиях, выражающего его через другие параметры. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(14)". В кадре x6 находится элемент (параметр A) либо (исключнеизв A). Ищется тот кадр, в котором утверждение A было получено. Он обявляется источником кадра x6 (тип (выводимо A)) и заносится в начало накопителя x4. Затем в кадре x6 находится последний элемент вида (обращение ...). Он ссылается на протокол вспомогательной задачи, возникшей после исключения переменной. Последний кадр данного протокола объявляется источником кадра x6 и заносится в начало накопителя x4.

(k) Перенесение во внешнюю задачу равенства блока анализа, выражающего одну неизвестную через другие. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(99)". В кадре x6 находится элемент (замещениеусловий A). Для каждой посылки списка A (она будет переносится во внешнюю задачу на описание) ищется кадр, в котором эта посылка была получена. Данный кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

(l) Выдача ответа задачи на преобразование. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(6)". В кадре x6 находится элемент (ответ A). Ищется кадр, в котором возникло условие A. Он объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

(m) Выдача ответа задачи на описание, имеющей условие "ложь". Рассмотрение этой ситации начинается после контрольной точки "прием(102)". Оно аналогично предыдущему случаю.

(n) Выдача ответа при обнаружении в блоке анализа константы "ложь". Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(63)". Ищется кадр, в котором возникла посылка "ложь". Он объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

(o) Выдача ответа задачи на описание, имеющей ложную посылку.

Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(62)". Оно аналогично предыдущему случаю.

(p) Обращение к задаче на редактирование параметрического описания. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(101)". В кадре x6 находится элемент (существует A), уаазывающий на редактируемое параметрическое описание A. Ищется кадр, в котором возникло условие A. Он объявляется источником кадра x6 (тип (выводимо A))и заносится в начало накопителя x4. Затем в кадре x6 находится последний элемент (обращение ...). Он ссылается на протокол решения задачи редактирования параметрического описания A. Последний кадр этого протокола объявляется источником кадра x6 (тип "ответ")и заносится в начало накопителя x4.

(q) Выдача ответа задачи при усмотрении параметрического описания. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(100)".

В кадре x6 находится элемент (ответ A). Для каждого конъюнктивного члена утверждения A находится кадр протокола, в котором он возник в условиях задачи. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

(r) Выдача ответа задачи на доказательство, у которой условие содержится в посылках, либо имеются две противоположные посылки. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(49)". В кадре x6 находится элемент (выводимо A). Для каждого утверждения из списка A ищется кадр протокола, где оно возникло в посылках задачи. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ")и заносится в начало накопителя x4.

(s) Выдача ответа задачи на доказательство, имеющей условие "истина". Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(50)". Ищется тот кадр протокола, в котором появилось условие "истина". Он объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

(t) Выдача ответа внешней задачи на описание при определении всех ее неизвестных в блоке анализа. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(61)". В кадре x6 находится элемент (выводимо A). Для каждого утверждения из списка A ищется тот кадр протокола, где оно возникло в посылках задачи. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ")и заносится в начало накопителя x4.

(u) Выдача ответа задачи на описание приемом ГЕНОЛОГа, имеющим заголовок "ответ" либо "ответзадачи". Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(103)". В кадре x6 находится последний элемент (обращение ...). Он ссылается на протокол x10 решения задачи Z, редактирующей найденный ответ. Для каждого из условий исходной версии задачи Z ищется кадр протокола, в котором оно возникло. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4. Затем последний кадр протокола x10 объявляется источником кадра x6 (тип "редакция"). Он тоже заносится в начало накопителя x4.

(v) Выдача результата пакетного нормализатора. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(15)". Проверяется, что кадр x6 - не первый. Затем предыдущий кадр протокола объявляется источником кадра x6 (тип "ответ"). Он заносится в начало накопителя x4.

(w) Передача результатов исследования во внешнюю задачу на описание. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(104)". Находится тот протокол x9, к которому относится кадр x6. В нем ищется кадр x13, содержащий элемент (замещениеусловий A). Для каждого утверждения P списка A ищется кадр, в котором возникла посылка P. Он объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

2. Кадр x6 содержит элемент (заменавхождения A_1 A_2 A_3), т.е. в нем реализуется замена вхождения A_1 подтерма задачи на терм A_3. При $A_2 = 0$ замена относится к посылке, при $A_1 = 1$ - к условию. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(7)". Переменной x8 присваивается тот терм

задачи, в котором выполняется замена, переменной x9 - указатель A_2. Ищется кадр, в котором возник терм x8 (посылка при $x9 = 0$ либо условие при $x9 = 1$). Он объявляется источником кадра x6 (тип "заменавхождения")и заносится в начало накопителя x4. Для каждого утверждения P, упомянутого в элементе (выводимо ...) кадра x6 и не имеющего заголовка "актив", ищется кадр, в котором оно возникло (с учетом x9). Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип (выводимо P)) и заносится в начало накопителя x4. Рассматриваются все имеющиеся в кадре x6 обращения к вспомогательным задачам пакетных нормализаторов, выполнившим невырожденное преобразование. Последние кадры их протоколов объявляются источниками кадра x6 (тип "ответ") и заносятся в начало накопителя x4.

3. Кадр x6 содержит элемент (замена A_1 A_2), т.е. в нем реализуется замена нормализатором терма A_1 на терм A_2. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(92)". Сначала последовательно просматриваются предшественники кадра x6 - до первого кадра, содержащего элемент (замена ...). Он объявляется источником кадра x6 (тип "заменавхождения") и заносится в начало накопителя x4. Далее - те же действия с элементами (выводимо ...), (обращение ...), что и в предыдущем случае.

4. Кадр x6 содержит элемент (вывод A), т.е. в нем реализован вывод новой посылки A. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(16)". Случай, когда в кадре имеется также элемент "анализатор", обрабатывается отдельной процедурой, описанной ниже. Берется элемент (выводимо P) кадра x6, и для каждого утверждения B списка P, не имеющего заголовка "актив", ищется тот кадр, в котором оно возникло в посылках задачи. Найденный кадр объявляется источником кадра x6 (тип (выводимо B)) и заносится в начало накопителя x4.

5. Кадр x6 содержит элемент (выводусловия A), т.е. в нем реализован вывод нового условия A. Этот случай аналогичен предыдущему. Отличие состоит лишь в том, что утверждение B могло возникнуть как в условиях, так и в посылках.

6. Кадр x6 содержит элемент (заменагруппы A_1 A_2 A_3), т.е. в нем реализуется замена группы A_1 посылок при $A_2 = 0$ либо условий при $A_2 = 1$ на утверждение A_3. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(20)". Для каждого утверждения B списка A_1 ищется кадр, в котором оно возникло в посылках при $A_2 = 0$ либо в условиях при $A_2 = 1$. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип (заменагруппы B)) и заносится в начало накопителя x4. Далее берется элемент (выводимо C) кадра x6, и для каждого утверждения B списка C повторяется аналогичная процедура. Отличие сотсоит лишь в том, что здесь тип источника - (выводимо B).

7. Кадр x6 содержит элемент "исследовать", т.е. реализует обращение к выводу следствий в блоке анализа задачи на описание. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(17)". Берется элемент (изменение A) кадра x6 и проверяется, что в наборе A имеется элемент (условие ...) т.е. имело место изменение списка условий задачи. Затем находится последний элемент (обращение ...) кадра x6. Он ссылается на протокол обработки блока анализа. Берется последний кадр x10 этого протокола. Для каждого нового условия B текущей задачи на описание ищется такой предшествующий кадру

x10 кадр, в котором возникла посылка B блока анализа. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип (исследовать B)) и заносится в начало накопителя x4. После просмотра условий B - кадр x10 объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

8. Кадр x6 содержит элемент "анализатор", т.е. реализует обращение к пакетному анализатору. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(60)". Сначала находится последний элемент (обращение ...) кадра x6. Он ссылается на протокол P решения вспомогательной задачи анализатора. Затем находится элемент (вывод A) кадра x6, указывающий на конъюнкцию A утверждений, перенесенных в текущую задачу из посылок вспомогательной задачи анализатора. Для каждого конъюнктивного члена B утверждения A ищется кадр протокола P, в котором появилась посылка B. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип "анализатор") и заносится в начало накопителя x4.

9. Кадр x6 содержит элемент (и A_1 A_2), т.е. заменяет имеющее вид конъюнкции утверждение A_1 - посылку при $A_2 = 0$ либо условие при $A_2 = 1$ на группу своих конъюнктивных членов. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(39)". Ищется кадр, в котором была сформирована посылка либо условие A_1. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип (выводимо A_1)) и заносится в начало накопителя x4.

10. Кадр x6 содержит элемент (новыенеизвестные A_1 A_2 A_3), т.е. реализует переход к новым неизвестным в задаче на описание. Здесь A_1 - набор выделяемых условий, A_2 - набор выражений со старыми неизвестными, A_3 - набор обозначающих их новых неизвестных. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(43)". Сначала для каждого элемента B списка A_1 ищется кадр, в котором возникла посылка B. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип (выводимо B)) и заносится в начало накопителя x4. Затем берется последний элемент (обращение ...) кадра x6. Он ссылается на протокол решения вспомогательной задачи на описание, разрешающей условия A_1 относительно новых неизвестных. Последний кадр данного протокола объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

11. Кадр x6 содержит элемент (нормуравн A), т.е решает систему уравнений A, извлеченных из посылок задачи на исследование, и заносит результаты обратно в список посылок этой задачи. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(40)". Для каждого утверждения B списка A ищется кадр протокола текущей задачи на исследование, в котором оно возникло. Этот кадр объявляется источником кадра x6 (тип (выводимо B)) и заносится в начало накопителя x4.

12. Кадр x6 содержит элемент "одз", т.е. в нем регистрируются условия на область допустимых значений. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(41)". Здесь никаких действий не предпринимается - переход к очередному элементу накопителя x4.

13. В кадре x6 предпринимается обращение к вспомогательной задачи на описание, разрешающей посылку задачи на исследование относительно ее единственной

> неизвестной. Рассмотрение этой ситуации начинается после контрольной точки "прием(18)". Берется последний элемент (обращение ...) кадра x6, ссылающийся на протокол решения указанной задачи на описание. Последний кадр данного протокола объявляется источником кадра x6 (тип "ответ") и заносится в начало накопителя x4.

По завершении обработки накопителя x4 последний кадр протокола x2 снабжается пометкой "конец". На этом предварительная обработка протокола завершается.

11.4 Интерфейс просмотра протокола решения

После того, как процедура "смрешение" завершила предварительную обработку протокола решения задачи, эта же процедура реализует интерфейс просмотра протокола. Программа интерфейса начинается после контрольной точки "прием(21)". Она не содержит каких-либо принципиальных моментов, и вместо ее рассмотрения мы ограничимся кратким описанием самого интерфейса.

Напомним, что запуск решения задачи с составлением и просмотром протокола осуществляется нажатием клавиши "y". Процесс решения в этом случае занимает немного больше времени, и по его завершении на экране отображается первый кадр протокола решения задачи. Логика прорисовки кадра аналогична прорисовке кадра при обычной трассировке: в верхней части экрана содержится описание текущего действия, над ним - выявляемое при прокрутке вверх описание текущей задачи до выполнения действия, под ним - последовательность вспомогательных обобщенных задач, решавшихся в данном кадре. Над описанием текущего действия расположены: указание номера текущего момента (в шагах работы интерпретатора ЛОСа); число моментов, прошедших после предыдущего действия; уровень срабатывания приема.

Чтобы перейти к следующему кадру, нажимается Enter; чтобы вернуться к предыдущему - Backspace. Если в кадре решалась вспомогательная задача и нужно войти в протокол ее решения, то нажимается "курсор вправо". Если таких задач несколько, то предварительно следует добиться, чтобы верхняя отделяющая линия нужной задачи пошла по верхней кромке экрана. Для возвращения из трассировки подзадачи в трассировку надзадачи нажимается "курсор влево".

Перечисленные действия можно выполнять с помощью мыши, выбирая пункты меню "вперед" (Enter), "назад" (Backspace), "наружу" (курсор влево), "внутрь" (курсор вправо), "вниз" (вниз к очередной вспомогательной задаче), "вверх" (вверх к предыдущей задаче либо к описанию текущего действия).

Если требуется перейти к одному из источников текущего кадра, выбирается пункт меню "источники"; если нужны все его преемники - пункт "преемники". В обоих случаях на экран выводятся списки утверждений - использованных в кадре либо таких, для получения которых был использован кадр. Выбирая нужный пункт списка и нажимая "курсор вправо", переходим к соответствующему источнику либо преемнику.

В пункте меню "Просмотр" перечислены дополнительные возможности. При нажатии клавиши "б" переходим в просмотр описания примененного приема ГЕНОЛОГа (возвращение - "курсор влево"). Для быстрого возвращения к просмотру описания текущего действия служит клавиша "р". Для выбора режима просмотра нажимается

"Ctr-p"(кириллица). Здесь можно удалить из просмотра неиспользуемые кадры протокола, фиктивные посылки и кадры простейшей стандартизации. По умолчанию, все они в просмотр не включаются.

11.5 Об использовании протокола решения

Чтобы оптимизировать сохраненное в протоколе решение задачи, нужно перейти от него к несколько упрощенной записи решения, к которой легко было бы применять различные эквивалентные преобразования. В этом направлении были сделаны лишь первые шаги - введена структура данных так называемой схемы решения, близкой к структуре протокола, и создана процедура "схемарешения", выполняющая преобразование протокола в схему. Для спрямления траектории решения предполагается использовать обращение к вспомогательным задачам, постановка которых подсказывается имеющимся протоколом. Например, если в протоколе решения планиметрической задачи в некоторый момент вычисляется какое-либо расстояние, необходимое для получения ответа, то можно попытаться сразу же объявить его неизвестной вспомогательной задачи и попробовать вычислить напрямую, более коротким путем.

Другое направление использования протокола - попытка применить его для обучения решателя новым приемам. Он может подсказать те шаги логического вывода в базе теорем, которые приведут к полезным новым приемам.

Оба этих направления находятся лишь в начальной стадии развития. Для развития механизмов самообучения, по крайней мере на начальной стадии, более перспективным оказалось направление, не использующее протоколов решения задач. Подробнее о нем будет рассказано в шестом томе данной монографии.

Список литературы

1. А.Черч. Введение в математическую логику. Том 1. М.: ИЛ, 1960, с.484.
2. С.К.Клини. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. 526с.
3. С.К.Клини. Математическая логика. М.: Мир, 1973, 480с.
4. Ч.Чень, Р.Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1983, 360 с.
5. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971, с.320.
6. Г.Метакидес, А Нероуд. Принципы логики и логического программирования. М.: Факториал, 1998, 288с.
7. И.Братко. Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. М.: Мир, 1990, 560 с.
8. Дж.Малпас. Реляционный язык Пролог и его применение. М.: Наука, 1990, 464 с.
9. Э.Хант. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1978, 558с.
10. Ж.-Л. Лорьер. Системы искусственного интеллекта. М.: Мир, 1991, 568с.

11. E.A.Bender. Mathematical methods in artificial intelligence. Los Alamitos, IEEE, Comp.Society Press, 1996, 638p.
12. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975, 463с.
13. Д. Пойа. Математическое открытие. М.: Наука, 1976, 448с.
14. Лавров И.А., Максимова Л.Л., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., "Наука", 1975, 232 с.
15. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И.. Сборник задач по элементарной математике, М., "Наука", 1964, 528 с.
16. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. М., "Наука", 1988, 431 с.
17. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., "Наука", 1988, 237 с.
18. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике. М., "Наука", 1992, 478 с.
19. Сканави М.И. Сборник задач по математике. М., "Высшая школа", 1988, 431 с.
20. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике. М., "Наука", 1971, 360 с.
21. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И., Федосов Б.В. Задачи по элементарной математике. М., 1973, 415 с.
22. Сергеев И.Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. М., "Высшая школа", 2003, 336 с.
23. Шарыгин И.Ф. Геометрия, 9-11 классы. М., "Дрофа", 1997, 396 с.
24. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. М., Астрель, 2001, 396 с.
25. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., "Наука", 1969, 544 с.
26. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. т.1. М., "Высшая школа", 2000, 722 с.
27. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., "Наука", 1976, 384 с.
28. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., "Наука", 1965, 100 с.
29. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М., "Высшая школа", 2000, 364 с.
30. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М., "Высшая школа", 2001, 445 с.

31. Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями. М., Книжный дом "Университет", 2001, 335.

32. Подколзин А.С. Об организации баз знаний, ориентированных на автоматическое решение задач. "Дискретная математика", 1990, т.2., вып.1., с. 13-30.

33. Подколзин А.С. Система автоматического решения задач по элементарной алгебре. "Дискретная математика", 1994, т.6., вып.4., с. 35-57.

34. Подколзин А.С. Компьютерный решатель математических задач. ДАН РФ, 1994, т.335, № 4.

35. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование процессов решения математических задач. Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2001. 235 с.

36. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 1. Архитектура и языки решателя задач. М., "Физматлит", 2008. 1022 с.

37. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 2. Опыт обучения компьютерного решателя задач: логические приемы, алгебра множеств, комбинаторика и элементарная алгебра. МГУ. - М., 2015. 1153 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 09.11.2015, № 184-B2015.

38. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия. МГУ. - М., 2015. 1320 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 09.11.2015, № 185-B2015.

39. Подколзин А.С. О самообучении интеллектуальной системы. "Интеллектуальные системы", 2014, том 18, выпуск 2, с. 197 - 266.