А.С.Подколзин

Компьютерное моделирование логических процессов

Том 8. Автоматическое создание приемов логической системы

База теорем. Характеризация теорем. Создание спецификаций приемов

2021г.

Введение

Понимание слов "искусственный интеллект" сильно зависит от того, как понимается слово "интеллект". Биологи любят приводить примеры наличия интеллекта у животных и даже насекомых. Впечатляет видео, где голубь с подрезанными крыльями учится придвигать кубик, чтобы, взобравшись на него, дотянутся до пищи. Разумеется, такой искусственный интеллект создать, вероятно, относительно несложно. С другой стороны, слово "интеллект" можно трактовать как способность делать научные открытия, создавать теории, развивать технологии и проектировать технические устройства. С этих позиций, можно и оспорить наличие интеллекта у животных, а создание искусственного интеллекта признать существенно более сложной задачей. Даже прохождение теста Тьюринга ее не решает. Само по себе наличие нейросети здесь недостаточно - гораздо более важной становится "программа", которую в нее закладывают при обучении. Соответственно, проблема искусственного интеллекта перемещается в область создания таких программ, иными словами, в изучение динамики развития знаний и умений, накапливаемых человечеством на протяжении веков. То-есть, в область изучения логических процессов. Роль нейросети здесь низводится до уровня обычного вычислительного устройства, хотя и дополненного возможностью самообучения при распознавании образов. Однако, мир логики имеет свои законы, и для логических вычислений, скорее всего, понадобится не нейросеть, а совсем иной логический процессор. По крайней мере, реализация обычных арифметических вычислений на традиционном арифметическом процессоре выглядит менее затратной, чем эмуляция этих же вычислений на нейросети. Весьма вероятно, что искусственный интеллект будущего - это мощные логические вычисления на логических процессорах.

В этой связи, представляется слишком поспешным отождествление искусственного интеллекта с современными искусственными нейросетями. Эффективное решение ими распознавательских задач использует лишь простейший вид логики, сводящейся к автоматическому формированию на огромном количестве примеров полезных признаков объектов. Безусловно, это привело к важному прорыву в создании прикладных программ. Их авторам кажется что эти программы уже являются искусственным интеллектом и они достаточно бесцеремонно присвоили термин "искусственный интеллект" вместо более адекватного "искусственная нейросеть". Впрочем, эти программы, как и полагается обычным прикладным программам, узко специализированы и представляют собой лишь гибрид нейросети и традиционной программы.

По этому поводу хочется восстановить некоторую справедливость. Все-таки, каждый нейросетевой "искусственный интеллект" является всего лишь компьютерной программой. С другой стороны, любая компьютерная программа, обрабатывая информацию, выполняет определенную интеллектуальную работу. Даже программа "Hello,World" носит некоторый отпечаток интеллектуальности - она осознает себя как личность и хочет познакомиться с миром. В конце концов, не проще ли признать, что слова "искусственный интеллект" и "компьютерная программа" - попросту синонимы. При этом, вместо споров о том, что такое искусственный интеллект, задаться вопросом: "какие задачи могут решать наши компьютерные программы и каких пока не могут?" Последними и заниматься.

Среди задач, далеко выходящих за рамки возможностей современных компьютерных программ, выделим одну, которая представляется ключевой для развития компьютерного интеллекта.

В компьютерной сети находится огромное количество знаний из самых разных областей. Но можно ли считать, что компьютер понимает эти знания? Ведь понять - это значит уметь использовать знания на практике, иными словами, преобразовывать их в приемы решения задач. Увы, такого рода алгоритмизация знаний пока компьютеру не по силам. Нет даже никакой науки, которая бы объясняла, как она должна происходить. Вместе с тем, если компьютер научить алгоритмизировать знания, то он получит творческие возможности, существенно перекрывающие возможности всей совокупности современных прикладных программ и открывающие путь к автоматизации развития самой копилки знаний. Это делает проблему алгоритмизации знаний, по существу, эквивалентной проблеме создания искусственного интеллекта в лучшем смысле этих слов.

Изучению проблемы алгоритмизации знаний и посвящена данная монография. В более точной формулировке, эта проблема состоит в том, чтобы понять, как от теорем переходить к алгоритмам, или, иными словами, как "управлять" теоремами при решении задач.

Математическая логика пыталась найти какие-то принципы такого управления, общие для всех теорем. Предпринимались попытки уменьшения перебора путем отсечения ветвей дерева поиска решения, попытки определения приоритетности в использовании теорем, и т.п. Решатель представлял собой использующую эти принципы универсальную оболочку, в которую загружались теоремы. Однако, во всех этих попытках переборный характер процесса решения задачи сохранялся, и решатели получались слабые. Причиной этого, по-видимому, было то, что каждая теорема требует своего, индивидуального управления. Если ее сопроводить таким управлением, то из теоремы она превращается в прием решения задач. Соответственно, проблема алгоритмизации знаний сводится к изучению того, как из теорем возникают приемы.

Однако, никаких теорий, объясняющих, как сопровождать теорему ее "собственным" управлением, пока нет. Единственным способом понять это оказался анализ реальных процессов решения задач при помощи компьютерного моделирования.

Решение задачи разбивалось на элементарные шаги, как правило, сводящиеся к применению некоторой теоремы. Для объяснения каждого шага составлялась небольшая программа (прием), которая в аналогичных ситуациях выполняла такой же шаг. После проработки одной задачи рассматривалась следующая. Если ранее созданные приемы делали в этой задаче заведомо бессмысленные шаги, то их решающие правила корректировались - вплоть до достижения стабилизации. Таким образом, постепенно формировалась база приемов - теорем, сопровожденных соответствующим управлением. В настоящее время база приемов насчитывает свыше 50000 приемов, ориентированных на решение задач из самых различных разделов элементарной и высшей математики, элементарных физики и химии, шахмат, текстового анализа и анализа рисунков. Всего было проработано свыше 13000 задач. Эта база приемов успешно справляется со стандартными задачи средней сложности. Иногда даже она набирала "проходные" баллы по вариантам вступительного письменного экзамена на механико-математический факультет МГУ. Впрочем, погоня за сложностью и разнообразием решаемых задач вовсе не была самоцелью: накапливался материал для анализа того, как приемы возникают из теорем.

Для задания программы приема был создан язык ЛОС (Логический Описатель Ситуаций), позволявший сводить такую программу к логическому условию на контекст, в котором прием должен срабатывать. Он существенно упростил обучение системы.

Процесс создания приема по теореме прослеживался в обратном порядке: от приема к теореме. Первым шагом на этом пути был переход от задания приема на ЛОСе к такому заданию, где теорема и ее управление формулировались отдельно друг от друга. Управление включало в себя: способ логического преобразования задачи с помощью теоремы, совокупность условий на целесообразность такого преобразования, а также множество указаний компилятору, создающему программу ЛОСа для приема. Возник язык более высокого уровня, чем ЛОС, который получил название ГЕНОЛОГ (Генетический язык логического программирования). Фактически, этот язык представлял собой коллекцию способов превращения теорем в приемы, собранную на указанном выше материале базы приемов. ГЕНОЛОГ позволил свести обучение решателя к выписыванию теорем и снабжению их алгоритмизирующей разметкой. Саму программу при этом удалось организовать по принципу оглавления теорем, аналогичного оглавлениям учебников. Фактически, почти все 50000 приемов решателя заданы именно на ГЕНОЛОГе.

Первый том данной монографии был посвящен описанию архитектуры решателя задач, а также описанию языков ЛОС и ГЕНОЛОГ. В последующих томах, со второго по шестой, приведены описания разделов базы приемов решателя в таких областях, как алгебра множеств и комбинаторика, элементарная алгебра, элементарная геометрия, математический анализ, аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория вероятностей, комплексный анализ, общая алгебра, дифференциальные и интегральные уравнения, элементарная физика, элементарная химия, текстовый анализ, шахматы, распознавание рукописных букв.

Описание приема на ГЕНОЛОГе объясняет компилятору, как по теореме создавать прием ЛОСа. Однако, оно ничего не говорит о цели применения приема. Поэтому следующим шагом на пути от приема к теореме стала классификация накопленных в системе приемов ГЕНОЛОГа по целевому принципу. Число типов приемов в этой классификации достигло примерно 1500. С ее помощью стало возможным задавать прием языком более высокого уровня, чем ГЕНОЛОГ. Теорема здесь сопровождается указанием типа приема и несколькими техническими параметрами, уточняющими целевую установку приема. Сам язык получил название логического ассемблера, а задание приема на нем - спецификацией приема.

Спецификация приема компилируется в его описание на ГЕНОЛОГе, однако результат компиляции не может быть сразу включен в базу приемов решателя - он требует предварительного анализа и коррекции. Во-первых, по спецификации приема генерируется тестовая задача, чтобы убедиться в том, что он не избыточен. Отбираются только те приемы, без которых тестовая задача не решается. Этот процесс называется примеркой. Во-вторых, проверяется, как повлияет добавление приема на решение старых задач, сохраненных в архиве системы. Если решение какой-либо задачи замедляется, портится вид ответа либо вообще задача перестает решаться, то предпринимается попытка так изменить параметры приема (в том числе, его тип), чтобы эти дефекты оказались устранены, а тестовый пример по-прежнему решался. Этот процесс называется доводкой приема. Лишь приемы, прошедшие примеру и доводку, заносятся в основную базу приемов решателя.

Логический ассемблер, компилятор спецификаций, а также процедуры примерки и доводки были описаны в седьмом томе монографии. Фактически, там был рассмотрен весь цикл создания приема, начиная с его спецификации.

Теорема приема представляет собой элемент алгоритмического языка - ГЕНОЛОГа либо логического ассемблера. Для упрощения процесса компиляции оказалось целесообразно несколько искажать эту "техническую" теорему по сравнению с исходной "логической" теоремой: отбрасывать некоторые антецеденты, проверка которых не нужны в осмысленных контекстах; вводить антецеденты, реализующие вспомогательные обращения к различным процедурам, и т.п. Как правило, эти искажения крайне незначительны. Тем не менее, имеет смысл различать "теорему приема" и "теорему", являющуюся ее источником.

Следующим шагом на пути от приема к теореме стало создание базы теорем - источников приемов, накопленных в решателе. База теорем первоначально была просто "проекцией" базы приемов. Для каждого приема указывалась ссылка на теорему - источник приема в базе теорем, причем этот источник был уже логически корректной, неискаженной теоремой. Таким образом возник своеобразный обучающий материал, позволивший проследить процесс создания спецификаций по теоремам.

Прежде всего, были выделены некоторые общие характеристики теорем, предположительно полезные при создании спецификаций, и создана процедура, сопровождающая теорему такими характеристиками. Анализ уже имевшихся пар "теорема из базы теорем - спецификация созданного по ней приема" позволил выявить принципы генерации спецификаций по теореме и ее характеристикам. Таким образом, был перекинут мостик от базы теорем к базе приемов. Хотя процедуры характеризации теорем и создания спецификаций и несложны, но исключительно важны, так как именно на этом участке и проходит граница между теоремами и приемами. Спецификация - это уже "почти прием", а теорема - это только пассивное знание.

Настоящий, восьмой том, посвящен описанию архитектуры и интерфейса базы теорем логической системы, а также описанию процедур характеризации теорем и создания по ним спецификаций.

Теорема - источник приема, хотя и является аккуратно оформленным на логическом языке истинным утверждением, обычно не является теоремой из учебника. Она получается либо техническим обобщением такой теоремы, содержащим множество вспомогательных параметров и расширяющим область применимости приема, либо несложной комбинацией нескольких теорем из учебника. Поэтому возникает еще один шаг на пути от приема к теореме - получение из базисных теорем учебника технических теорем, предназначенных для создания приемов. Такой переход получил название программирующего логического вывода. По существу, он завершает всю цепочку действий по алгоритмизации теоремы, проходимую в обратном направлении.

Для реализации данного шага в базу теорем были добавлены теоремы из учебников, необходимые для вывода теорем - источников приемов. Вся база теорем оказалась разбита на так называемые ячейки логического вывода - небольшие разделы, начинающиеся с одной либо нескольких теорем "из учебника", к которым добавлялись их следствия, являющиеся источниками приемов. Фактически, эти ячейки представляли собой задачи для развития аппарата программирующего логического вывода.

Подробному описанию системы программирующего логического вывода будет посвящен следующий, девятый том монографии. Представляется, что самый важный для понимания процесса алгоритмизации. Прием вывода теоремы отличается от правила вывода наличием целевой нагрузки. Он выводит не просто какую-то теорему, но теорему для создания приема специального типа и уже снабженную характеристиками. Для получения новых теорем приемы логического вывода широко используют возможности решателя. При этом оказалось, что граница между программирующим логическим выводом и исследовательским выводом весьма условна, и для объяснения того, как можно было бы "открыть" теорему Пифагора, формулу Кардано, формулу интегрирования по частям и т.п., существуют сравнительно несложные приемы, реализованные в системе. Это открывает перспективы для широкомасштабного изучения и компьютерного моделирования логики открытия в самых различных областях знания.

Впрочем, большинство представляющих интерес свойств рассматриваемых в учебниках понятий уже известны, и при некотором развитии именно программирующего логического вывода можно было бы перейти к обучению решателя не по задачникам, а непосредственно по учебникам, регистрируя в базе теорем соответствующие утверждения.

Вся цепочка синтеза приемов по теоремам собрана в виде так называемого генератора приемов. Получая на вход базисную теорему, он реализует цикл логического вывода; по каждой выведенной теореме создает всевозможные спецификации; компилирует спецификацию сначала в прием ГЕНОЛОГа, а затем - в прием ЛОСа; для каждого нового приема генерирует тестовый пример, проверяющий его на неизбыточность; для группы приемов, прошедших тестирование, выполняет прокрутку по задачнику системы и реализует их доводку. Такой цикл автоматического синтеза приемов, хотя пока и находится лишь на начальном этапе развития, уже доказал свою эффективность, сгенерировав свыше 2000 новых полезных приемов из различных разделов. Примеры этих приемов были приведены в седьмом томе монографии.

Напомним, что последнюю версию логической системы можно получить по адресу "www.intsys.msu.ru/invest/solver/logsyst.zip".

Автор выражает искреннюю благодарность В.Б.Кудрявцеву, поддержка которого сделала возможным проведение данного исследования.

Оглавление

Глава 1

Организация базы теорем

Логический ассемблер является следующим шагом в направлении к выявлению источников приемов после ГЕНОЛОГа. Он задает прием в виде теоремы, сопровожденной спецификацией. Однако, эта теорема в действительности не совсем теорема. Она является частью алгоритмического языка и поэтому допускает определенные искажения исходной "настоящей" теоремы. У нее могут быть отброшены антецеденты, проверка которых считается излишней ввиду стандартного контекста применения приема, добавлены какие-то чисто технические вставки, удобные для компиляции, и т.п. В ряде случаев теорема приема выглядит как что-то не только неверное, но даже бессмысленное - если не знать язык ГЕНОЛОГ. Чтобы понять, как теорема приема возникла, необходимо иметь в логической системе и базу "настоящих" теорем. Для каждого приема ГЕНОЛОГа в базе теорем должен быть указан его источник - теорема, из которой прием был получен.

Здесь мы переходим черту, отделяющую теоремы от приемов (или, иными словами, от алгоритмов). Выше логического ассемблера уже не будет никакого другого языка программирования - будут только база теорем и процедуры, обеспечивающие ее развитие и алгоритмизацию.

База теорем логической системы вначале возникала не путем логической формализации информации, извлеченной из учебников, а "обратным ходом" - от приемов к теоремам, являющимся их источниками. Попытки прямой формализации учебников приводили к теоремам, совершенно оторванным от приемов решателя. Лишь впоследствии, после того, как были изучены механизмы преобразования теорем в приемы, появилась возможность обучать решатель путем регистрации в его базе теорем фактов из учебников. Пока эта возможность может рассматриваться лишь как полуавтоматическое средство обучения, существенно помогающее учителю, но не отменяющее необходимости ручного синтеза и ручной коррекции приемов. Впрочем, начатая работа позволяет надеяться, что в итоге будет достигнута и полная автоматизация. Разумеется, при этом придется использовать эмпирическую адаптацию решателя к предметной области. Немного об этом будет рассказано ниже, хотя механизмы такой адаптации еще предстоит развивать.

1.0.1 Оглавление базы теорем

Вход в оглавление базы теорем возможен из главного меню системы по нажатию клавиши "б". Это оглавление напоминает оглавление базы приемов ГЕНОЛОГа и разбито на корневые разделы, соответствующие предметным областям, для которых выполнялось обучение системы. Впрочем, некоторые из разделов в базе теорем пока не представлены. По мере углубления в подразделы, соответствие оглавления базы теорем оглавлению базы приемов нарушается. Теоремы сгруппированы по несколько другому принципу. Оказалось выгодным размещать в общем подразделе теоремы, которые получаются друг из друга простыми переходами, даже если они содержат понятия из совершенно различных областей.

Вначале размещение теорем по разделам было сравнительно произвольным, в целом придерживающимся традиционного разбиения на разделы и подразделы. Однако, при обучении системы логическому выводу, ориентированному на получение полезных для решателя теорем, оказалось целесообразным постепенно переупорядочить материал - разбить его на так называемые "ячейки логического вывода".

Ячейка логического вывода представляет собой подраздел оглавления, все пункты которого - концевые, причем в первом пункте представлены "исходные" теоремы данной ячейки, а в остальных пунктах располагаются теоремы, которые система должна самостоятельно "открывать", зная только исходные. Фактически, это задачник, используемый при обучении системы программирующему и исследовательскому логическому выводу. Первый из них преобразует базисные теоремы предметной области в теоремы приемов, сопровождая их необходимыми обобщающими параметрами или комбинируя с другими теоремами. Второй - просто находит новые важные факты в предметной области.

Чтобы определить, является ли подраздел ячейкой логического вывода, уже вовлеченной в процесс обучения системы, нужно выделить первый его пункт и нажать "Ctr-и". Пункт оглавления пропадет, а вместо него в верхней части экрана появится некоторая техническая информация о логическом выводе. Подраздел является ячейкой вывода, если эта информация непустая. Постепенно, по мере обучения системы, вся база теорем должна быть разбита на ячейки вывода.

В концевом пункте базы теорем зарегистрированы одна или несколько теорем. К их просмотру можно перейти, нажав в данном пункте клавишу "курсор вправо". Переход от одной теоремы пункта к другой выполняется клавишами "курсор вверх" - "курсор вниз". Для возвращения в оглавление используется "курсор влево".

Редактирование оглавления базы теорем выполняется стандартными средствами, описанными еще в первом томе монографии.

1.0.2 Связь теорем с приемами

Теорема представляется двум окнами, отделенными друг от друга горизонтальной чертой. В верхнем окне прорисовывается сама теорема - формульным либо текстовым редактором. Для смены режима прорисовки служат клавиши "ф" (формульный режим) и "т" (текстовый режим). В нижнем окне приводится список характеристик теоремы - логических символов либо термов, указывающих на различные свойства теоремы либо способа ее получения. Подробнее типы таких характеристик будут описаны в главе, посвященной характеризатору. Пока лишь заметим, что создание приемов по теореме будет происходить в процессе сканирования ее списка характеристик.

Имеется оглавление типов характеристик, для перехода к которому следует из просмотра теоремы нажать "Ctr-к"(кир.). Как и для любого справочного оглавления, нажатие в нем "а" (кир.) приводит к просмотру всех логических символов, использованных в качестве заголовков характеристик, а нажатие "Ctr-а" - к просмотру всех неиспользованных символов. При переходе из концевого пункта оглавления типов характеристик по "курсор вправо" возникает экран, на котором в верхней части голубым цветом перерисован текст концевого пункта, а под ним текстовым редактором прорисована соответствующая характеристика. Ее можно редактировать: нажатие "Enter" переводит в текстовый редактор. Для сохранения новой (либо исходной) версии достаточно снова нажать "Enter".

Чтобы проследить происхождение приема ГЕНОЛОГа, он связывается с теоремой из базы теорем, называемой его источником. Для создания источника есть две возможности. Первая из них заключается в переходе от просмотра приема в базу теорем нажатием "Ctr-F9", выборе подходящего концевого пункта базы теорем либо создания нового концевого пункта, и копировании теоремы приема в этом пункте. Для этого нужно зайти в пункт и нажать "Й". Теорема приема окажется скопирована в базе теорем и зафиксирована как источник приема. При необходимости ее можно редактировать, сохраняя связь с приемом. Вторая возможность заключается в том, чтобы после перехода в базу теорем по "Ctr-F9" выбрать уже имеющуюся теорему и объявить ее источником приема. Для этого из просмотра теоремы нужно нажать "И". Вторая возможность обеспечивает и смену ранее выбранного источника. Теорема может быть источником нескольких приемов. Для просмотра их списка нажимается "п".

Если источник приема уже создан, для перехода к его просмотру достаточно нажать "Ctr-F9".

При автоматическом создании приемов по теоремам сразу регистрируется связь их с источниками.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих отличие теоремы приема от теоремы, находящейся в базе теорем. Теорема приема, преобразующего логарифм произведения в сумму логарифмов, имеет следующий вид:

$\forall_{abc}(0 \leq a \;\&\; 0 \leq b \rightarrow \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b)$

Источником приема служит следующая теорема:

$\forall_{abc}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; 0 < a \;\&\; \neg(a - 1 = 0) \;\&\; 0 < b \;\&\; 0 < c \rightarrow \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b)$

Как видим, здесь добавлены все необходимые условия по о.д.з. для логарифмов. В теореме приема строгие неравенства заменены на нестрогие просто потому, что их априори проще проверять. Однако, так как прием применяетя в логически корректном контексте, эти нестрогие неравенства будут влечь строгие.

В некоторых случаях теорема приема получается из своего источника менее тривиальными преобразованиями, чем отбрасывание условий на о.д.з. Эти преобразования выполняются процедурой спецификатора, создающей спецификации приемов в процессе анализа характеристик теоремы. Могут вводиться переменные для функций, появляться описатели "класс" и т.п. Например, следующая теорема приема, исключающего описатель "класс":

$\forall_{ab}(\mathrm{set}_c(a(c)) \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(a(c) \rightarrow c \in b))$

- имеет своим источником определение включения множеств:

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set} \ \& \ b - \mathrm{set} \to a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to c \in b))$

Помимо "настоящих" теорем, в базе теорем имеются термы другого рода. Они являются техническими характеристиками предметной области и решений, принятых относительно способов ее алгоритмизации и развития. Такие термы делятся на протоколы и квазипротоколы. По сути дела, отличие лишь в том, что протоколы набираются текстовым редактором и обычно не очень велики по размерам. Однако, если определяемая протоколом техническая информация слишком громоздка, ее чтение становится затруднительным. Тогда эта информация разделяется на две части. Одна из них вводится формульным редактором и внешне может быть похожа на теорему. Другая часть переносится в характеристики этой псевдотеоремы. Такая конструкция называется квазипротоколом.

В качестве простейшего примера можно привести протокол "нормализация(дробь нормдробь)", фиксирующий, что для логического символа "дробь" введен нормализатор общей стандартизации "нормдробь". Протокол инициализирует создание нормализатора.

Квазипротокол с теоремой

$(a + b)^n c/d + e$

и характеристиками "теоремаприема", "стандхаракт", "оператор(стандплюс)", "указатель(единица(1 x3 x4 x14)единица(0 x5))", "см(натуральное(x14) или(не(заголовок(x3 1)) не(заголовок(x4 1)) не(заголовок(x14 1))))" задает шаблон выражений, допускающих невырожденное преобразование к стандартной форме "стандплюс" (т.е. раскрывание скобок).

Иногда протокол играет роль установки на специальный цикл логического вывода. В этом случае он помещается в первый пункт ячейки логического вывода. Например, протокол "стандформа(станддн отр(1)кн(2)дн(2))" с характеристикой "число(20)" представляет собой установку на вывод первых 20 тождеств для упрощения дизъюнктивных нормальных форм. Цифры в скобках после логических операций указывают на их стоимость, относительно которой происходит упрощение.

Протоколы и квазипротоколы могут являться источниками теорем приемов. Например, протокол "развертка(суммавсех плюс)", означающий, что для двуместной коммутативно-ассоциативной операции "плюс" введено ее обобщение "суммавсех" на любое конечное число операндов, является источником целой серии теорем приемов, порождаемых спецификатором. Например, источником следующего приема, заносящего внешний член под знак операции над семейством:

$\forall_{abmn}(b = a(m-1) \to b + \sum_{i=m}^{n} a(i) = \sum_{i=m-1}^{n} a(i))$.

1.0.3 Интерфейс просмотра и редактирования теоремы

Приведем полный список возможностей интерфейса, связанного с теоремой, хотя многие из них прояснятся лишь в последующем изложении. Прежде всего, отметим действия мышью и курсорами. Левой кнопкой мыши можно выделять подтермы теоремы, при необходимости корректируя выделение клавишами курсора. Если после выделения подтерма нажать правую кнопку мыши, то под теоремой будет прорисовано пояснение к выделенному логическому символу. Если выделить левой кнопкой мыши характеристику теоремы, то снизу появится текст, поясняющий смысл этой характеристики.

Заметим, что в одном концевом пункте оглавления базы теорем может быть "спрятано" несколько теорем. Переходы между ними осуществляются клавишами "курсор вверх" - "курсор вниз".

Если нужно перенести теорему в другой пункт оглавления, то на ней нажимается "Insert", затем ищется тот концевой пункт оглавления, куда эту теорему нужно перенести, и на нем (без перехода к просмотру его теорем) снова нажимается "Insert". Эти же действия выполняются, чтобы перенести теорему в начало списка того же самого пункта.

Заметим, что цвет линии под характеристиками теоремы указывает на способность системы выводить ее из исходных теорем ячейки вывода. Черный цвет означает, что пока система не была обучена выводу этой теоремы. Зеленый цвет - что она выводит теорему. Красный цвет - что вывод имелся, но утерян. Синий цвет - что он утерян только что.

Контекстное меню просмотра теоремы вызывается нажатием клавиши F1. В нем имеются следующие пункты:

1. Переход к справочнику по системе (повторное нажатие F1).
2. Ввод либо изменение теоремы формульным редактором (Ctr-ф).
3. Ввод либо изменение теоремы текстовым редактором (Ctr-т).
4. Ввод либо редактирование чертежа, сопровождающего теорему (ч).
5. Редактирование характеристик теоремы (к).
6. Автоматическое добавление антецедентов, необходимых для сопровождения по о.д.з. (Ctr-о).

   Данный пункт полезен при перенесении теоремы из базы приемов. Такое перенесение выполняется в два этапа. Сначала из просмотра приема нажимается "Ctr-F9", которое переводит в базу теорем. В базе теорем создается новый либо выбирается старый концевой пункт. После захода в этот пункт нажимается "Й", и теорема приема копируется в базе теорем. Однако, в ней отброшены антецеденты, обеспечивающие сопровождение по о.д.з. Нажатие "Ctr-о" восстанавливает их. Иногда появляются избыточные антецеденты, которые далее исключаются вручную.

7. Создание копии теоремы (Ctr-д).

   При копировании теоремы в список ее характеристик добавляется ссылка "копия(s, N)" на исходную теорему. Здесь s - логический символ, N - номер узла этого символа, в котором хранится теорема (см. ниже структуры данных базы теорем).

   Копирование теоремы обычно служит для того, чтобы какое-то следствие одной ячейки логического вывода сделать исходной теоремой другой ячейки. Ограничители системы вывода часто вводят блокировку действий в зависимости от цепочки предыдущих выведенных теорем, а иногда и просто блокировку слишком длинных выводов. Создание новоя ячейки для получения следствий теоремы позволяет снять эти ограничения.

8. Формульный режим просмотра теоремы (ф).
9. Текстовый режим просмотра теоремы (т).
10. Вход в просмотр подтермов теоремы (Ctr-курсор вправо).

    Команды, связанные с просмотром подтермов, приводятся ниже.
11. Занесение теоремы в буфер для перенесения ее в другой раздел оглавления (Insert).

    Чтобы фактически ее перенести, нужно выбрать концевой пункт оглавления и нажать на нем "Insert".
12. Удаление теоремы (Ctr-Del).
13. Удаление чертежа теоремы (Ctr-ч).
14. Регистрация текущего чертежа в буфере (б).
15. Извлечение чертежа из буфера (Ч).

    Заметим, что при перенесении теоремы приема в базу теорем можно перенести и чертеж. Для этого в просмотре приема достаточно нажать "ч", сохранив его чертеж в буфере, а после извлечь из буфера данной командой.
16. Сброс буфера чертежа (Ctr-б).
17. Приемы, связанные с теоремой. Имеются следующие команды:

    (a) Просмотр списка приемов, источником которых служит теорема (п).

    Для смены приема в списке используются клавиши "курсор вверх - курсор вниз". Для возвращения к просмотру теоремы нажимается "курсор влево". Чтобы перейти от приема списка к его размещению в базе приемов, нажимается "Enter".

    (b) Выбор теоремы в качестве источника приема (И).

    Переход в базу теорем должен был состояться по "Ctr-F9" из просмотра приема.

    (c) Регистрация теоремы приема в базе теорем (Й).

    Аналогично предыдущему.

    (d) Создание спецификаций приемов по теореме (г).

    Если хотя бы одна спецификация создана, то она появляется на экране. Переходы между спецификациями - "курсор вверх - курсор вниз". Если для текущей спецификации нажать "б", то в буфере базы приемов по ней будет создан и откомпилирован прием ГЕНОЛОГа. При желании его можно будет перенести в любой раздел базы приемов. Если этого не сделать, то при расчистке буфера прием пропадет.

    (e) Трассировка создания спецификаций с выбором точки прерывания по оглавлению программ (Ctr-г).

    Используется при отладке и развитии спецификатора. После нажатия клавиши на экране появляется оглавление программ, в котором нужно найти подходящий концевой пункт и нажать "курсор вправо".

   (f) Трассировка моментов создания спецификаций (Г).

   При каждом обращении к оператору "ктс" (контрольная точка спецификатора) будет происходить выход в отладчик ЛОСа.

   (g) Синтез новых приемов по теореме и регистрация их в буфере базы приемов (с).

   Сначала работает спецификатор, затем по всем новым спецификациям создаются приемы.

18. Логический вывод, связанный с теоремой.

   (a) Характеризация теоремы - исходная либо повторная (Х - кир.).

   Если теорема снабжена одной из характеристик "пв", "теоремаприема", "блок", "протокол", "тожд", "станд", то данная команда блокируется. Это делается в тех случаях, когда характеризатор не компетентен изменять характеристику. Например, если теорема была выведена программирующим выводом для специальной цели и им же охарактеризована. Собственно, характеристика "пв" (сокращение от "программирующий вывод"), сопровождающая все теоремы ячеек вывода, кроме исходных, и указывает на такую ситуацию.

   При характеризации все старые характеристики удаляются, а вместо них вводятся новые.

   (b) Тестирование характеризации по шагам вывода характеристик (Ctr-x; кир.).

   После нажатия "Ctr-x" происходит выход в отладчик ЛОСа при получении первой характеристики. Она оказывается значением переменной x1 процедуры "характ", регистрирующей очередную характеристику в накопителе характеристик. К процедуре "характ" обращается внешняя процедура "характеризатор", и можно через отладчик ЛОСа посмотреть, как возникла текущая характеристика. Чтобы перейти к просмотру следующей характеристики, нажимаются "0" и "Enter". Для обрыва просмотра можно нажать Esc.

   (c) Запуск программирующего логического вывода (л).

   Команда работает только на теоремах, расположенных в первом пункте какой-либо ячейки логического вывода. Процесс вывода на экране не отображается. По завершении его выдается список полученных теорем. Чтобы просмотреть подробности вывода какой-либо теоремы, нужно на ней нажать "курсор вправо". Далее можно либо просмотреть всю цепочку вывода этой теоремы из исходных теорем ячейки вывода, либо перейти в отладчик ЛОСа на момент получения теоремы. Последнее достигается путем повторного запуска процедуры вывода (внутри интерфейса просмотра результатов вывода) и занимает некоторое время.

   (d) Запуск программирующего вывода с регистрацией в архиве хода получения теорем данной ячейки вывода (Л).

   Аналогично предыдущему, но в архиве базы теорем сохраняется полная информация о дереве вывода каждой из теорем ячейки вывода, для которых система смогла получить вывод. Просмотр этой информации - см. следующий пункт.

(e) Просмотр вывода теоремы по данным архива (д).

Клавиша "д"нажимается из просмотра теоремы. Появляется вершина дерева вывода. Для просмотра других вершин используются клавиши курсора. Возможен повторный запуск вывода текущей теоремы с выходом в отладчик ЛОСа либо на начальном этапе работы приема вывода, либо на завершающем этапе. Фактически снова запускается полная процедура вывода в ячейке, но посторонние выводы отсекаются, и данный вывод осуществляется быстро.

(f) Запуск сокращенного программирующего логического вывода по текущей теореме (Ctr-л).

Используется для проверки того, что ранее зарегистрированные в архиве выводы теорем сохранились. Блокируются действия, связанные с получением других теорем.

(g) Просмотр хэша текущей теоремы (Ctr-F3).

Для быстрой проверки того, что вновь выведенная теорема уже имелась, все теоремы базы теорем хэшируются. В качестве хэша выступает некоторый логический символ. При нажатии на клавишу происходит выход в отладчик ЛОСа, где переменной x8 присвоен хэш теоремы.

(h) Запуск цикла вывода теорем, создания приемов и их доводки (Ctr-ц).

Фактически, это кнопка запуска генератора приемов по теореме. Запускается на теоремах из первого пункта ячеек вывода. Сначала предпринимается цикл программирующего вывода. На экране отображается число выведенных теорем. Затем предпринимается создание приемов по этим теоремам. Далее для каждого приема предпринимается попытка создания тестового примера, где этот прием мог бы оказаться необходимым. Отбираются только те приемы, без которых тестовый пример решателем не делается. Эти приемы компилируются. Выполняется их расчистка: если новые тестовые примеры делаются другими новыми приемами, то данный новый прием удаляется. Выбирается раздел задачника, к которому естественно отнести созданные приемы, и происходит распараллеленная прокрутка решателя по этому разделу. В процессе прокрутки отбираются те задачи, которые замедлились, либо сильно ускорились, либо перестали решаться, либо изменили ответ. По этим задачам предпринимается доводка приемов: варьируются их уровни срабатывания, корректируются фильтры, меняются типы. Доводка распараллелена: приемы разбиваются на примерно равные группы, и каждая группа доводится на всем списке отобранных задач независимо от других групп. По окончании прокрутки результаты объединяются, выполняется небольшая дополнительная доводка (уже в последовательном режиме), и выдается результат. Он распределен по разделам "Архив" корневых меню оглавлений базы приемов, теорем и задачника. В базе приемов раздел "Архив" имеет подразделы "Нейтральные приемы", "Ускорения", "Отказы", "Изменившиеся ответы", "Большие замедления", "Конфликты с отказами", "Конфликты с замедлениями", "зацикливания". Приемы из первых двух разделов оказываются откомпилированы, из других разделов - зарегистрированы, но не откомпилированы. Раздел "Архив" базы теорем сохраняет новые теоремы, на которых основаны созданные приемы, раздел "Архив" задачника - тестовые примеры, обосновывающие пользу от новых приемов.

(i) Установка режима доводчика (Ctr-р).

Для целей отладки можно отказаться от распараллеливания доводки. Иначе отследить действия одного из параллельных процессов сложно.

19. Просмотр ссылки на теорему в базе теорем (Ctr-й).

    Такой ссылкой служит терм "теорема(s, N)", где s - логический символ, N - номер узла этого символа, являющегося узлом теоремы.

20. Переход от копии теоремы к оригиналу (о - кир.).

21. Просмотр оглавления типов характеристик теорем (Ctr - к; кир.).

22. Просмотр оглавления логического языка системы (Ctr-я).

23. Просмотр оглавления типов протоколов базы теорем (Ctr-a).

Знания интеллектуальной системы о реальном мире в значительной степени состоят из примеров логики устройства реальных объектов. Такого рода пример удобно представлять в виде кванторной импликации, у которой антецеденты характеризуют тип объекта, пример которого приводится, а консеквент имеет вид квантора существования, вводящего вспомогательные параметры, через которые выражается устройство объекта. Обычно эти кванторные импликации чрезвычайно громоздки, и для удобства работы с ними пришлось создать специальный интерфейс. В качестве примера можно указать описание устройства прямоугольного стола с четырьмя ножками, которое расположено в разделе "Словарь" - "С" - "Стол" - "Схемы" - "Четырехугольный стол с четырьмя ножками". Здесь антецеденты располагаются после строки "если", а конъюнктивные члены консеквента - после строки "то". Квантор существования отброшен, так как его переменные - все новые переменные утверждений консеквента. Характеристики теоремы помещаются сверху от вертикальной черты над строкой "если". В нашем случае это характеристика "прим(x1)", указывающая, что приведен пример устройства стола x1. Подробнее о данном интерфейсе предполагается рассказать в последующих томах монографии.

1.0.4 Структуры данных базы теорем

База теорем находится в 6-м информационном блоке. Корневой указатель этого блока - каталог. Ссылка из него по логическому символу s осуществляется на указатель - список, являющийся корнем статьи символа s. Как и в базе приемов, используется дерево номеров узлов статьи логического символа. Концевые вершины этого дерева суть узлы теорем. Ссылка на узел теоремы - терм "теорема(s, N)", где N - номер узла.

Узел теоремы представляет собой указатель-список, из которого имеют место переходы по следующим меткам:

1. "терм" - переход к логическому терминалу, хранящему теорему.

2. "оглавление" - переход к логическому терминалу, хранящему путь в оглавлении базы теорем к концевому терминалу, хранящему основную ссылку на теорему. Допускается (хотя практически не используется) наличие дополнительных ссылок на ту же самую теорему из других разделов оглавления базы теорем.

3. "примечание" - переход к текстовому терминалу, хранящему примечания к теореме. Заполняется при необходимости вручную. Практически не используется.

4. "комментарии" - переход к логическому терминалу, хранящему характеристики теоремы.

5. "приемы" - переход к логическому терминалу, хранящему ссылки "прием(A_1, A_2, A_3)" на те приемы, для которых данная теорема является источником. Из узла каждого такого приема по метке "теорема" - переход к логическому терминалу, хранящему обратную ссылку "теорема(B_1, B_2)" на узел теоремы.

6. "геомредактор" - переход к логическому терминалу, хранящему описание сопровождающего теорему чертежа.

7. "хэштеоремы" - переход к логическому терминалу, хранящему символьный хэш A данной теоремы. По меткам A, "хэштеоремы" от корневого каталога 6-го информационного блока - переход к логическому терминалу, хранящему ссылки "теорема(B_1, B_2)" на все теоремы, имеющие хэш A.

8. "пв" - переход к логическому терминалу, хранящему ссылку "теорема(A_1, A_2)" на ту исходную теорему ячейки логического вывода, из которой данная была выведена программирующим логическим выводом. В этом же терминале сохраняется терм "приемы($B_1 \dots B_m$)", где $B_1, \dots, B_m$ - термы "прием(C_1, C_2)", являющиеся ссылками на последовательно применявшиеся приемы вывода. Если на последнем цикл тестирования вывод был утерян, то в терминал добавляется символ "минус". Если вывод теоремы был утерян ранее, чем на последнем цикле, то вместо символа "минус" используется символ "Минус".

Из корневого каталога базы теорем имеется также ряд переходов к информационным логическим терминалам, используемым процедурами логического вывода и синтеза приемов.

Оглавление базы теорем имеет своим именем символ "теорема". В концевом логическом терминале этого оглавления хранятся термы "теорема(B_1, B_2)", ссылающиеся на отнесенные к нему теоремы. Заголовок "теорема" одного из таких термов может быть заменен на символ "нормуравн" для указания на текущую теорему пункта. Просмотр теорем этого пункта при возвращении к нему будет начинаться с данной теоремы. Терм "замечание($C_1, \dots, C_n$)" в концевом терминале хранит набор информационных элементов $C_1, \dots, C_n$, характеризующих принцип группировки в нем теорем. По метке "замечание" из указателя оглавления - переход к логическому терминалу, хранящему элементы таких же типов и характеризующих данную ветвь оглавления. Эти замечания позволяют системе искать нужные теоремы через оглавление.

Используются следующие типы элементов C_i:

1. "раздел(A)" - раздел с названием A. Названия разделов - те же, что в базе приемов.

2. "логсимвол(A)" - подраздел, соответствующий логическому символу A.

Имеется архив базы теорем, сохраняющий информацию о выводе теорем. Для каждой исходной теоремы ячейки логического вывода в нем сохраняется дерево следствий теоремы, указывающее траектории вывода прочих теорем данной ячейки. Фактически, это означает сохранение доказательств таких теорем.

Архив был создан для ускоренного тестирования процедуры программирующего логического вывода. Он позволяет быстро убедиться в том, что выводы не были утеряны в процессе обучения системы. Ускорение достигается за счет того, что отбрасываются любые попытки применения приемов вывода, не указанные в дереве следствий.

Хотя организация программирующего вывода будет подробно изложена лишь в последующих главах, устройство архива базы теорем можно описать уже сейчас.

Архив базы теорем хранится в 15-м информационном блоке. Если узел стартовой (расположенной в первом пункте ячейки логического вывода) теоремы T относится к логическому символу S и имеет номер $N = N_1 \dots N_k$, где N_i - цифры, то в 15-м информационном блоке из корня статьи символа S по цепочке ребер, помеченных цифрами $N_1, \dots, N_k$, вдет путь к указателю - списку U, называемому узлом вывода данной теоремы.

От узла вывода по метке "равно" - переход к корню поддерева D, ребра которого помечены символьными числами (начиная с 1). Вершины этого поддерева соответствуют теоремам, выведенным из T процедурой "прогрвывод" - тем, которые зарегистрированы в ячейке логического вывода либо промежуточным теоремам, использованным при выводе последних. Дерево D называется деревом следствий теоремы T. Каждая вершина дерева D представляет собой указатель - список.

Помимо ребер, связывающих между собой вершины дерева следствий, из каждой вершины этого дерева выходят ребра со следующими отметками:

1. "вход" - ведет к логическому терминалу, хранящему теорему. Стартовая теорема тоже продублирована в таком терминале.

2. "прием" - ведет к логическому терминалу, указывающему прием программирующего вывода, примененный при получении теоремы. В терминале хранится четверка A_1, A_2, A_3, A_4, где A_1 - логический символ, к программе которого относится прием (фактически - инициировавшая его срабатывание характеристика исходной теоремы); A_2 - уровень срабатывания приема (символьное число); A_3 - номер контрольной точки, с которой начинается собственно программа приема. A_4 - заголовок набора B либо логический символ B, извлеченные из элемента (источник B) блока вывода. Такие символы B закрепляются за приемами программирующего вывода в качестве их локальных (относительно символа A_1) имен.

3. "комментарии" - ведет к логическому терминалу, хранящему список характеристик теоремы, созданных процедурой вывода.

4. "второйтерм" - ребро имеется, если прием вывода использовал дополнительные теоремы, и ведет к логическому терминалу, содержащему эти теоремы.

5. "корень" - ребро имеется, если вершина дерева следствий соответствует не промежуточному результату, а теореме из ячейки логического вывода. Оно ведет к логическому терминалу, хранящему ссылку "теорема(...)" на узел теоремы в базе теорем.

6. "указатель" - переход к логическому терминалу, фиксирующему успех либо неуспех ускоренного тестирования вывода данной теоремы. При успешном выводе содержит символ "плюс", иначе - символ "минус".

7. "параметры" - используется только для корня дерева следствий. Ведет к логическому терминалу, хранящему термы "число(A_1)" и "число(A_2)". A_1 - трудоемкость последнего запуска ускоренного тестирования, A_2 - величина приращения трудоемкости по сравнению с предыдущим запуском. Если ячейка вывода имеет несколько стартовых теорем, то содержимое данного терминала продублировано во всех корнях их деревьев следствий.

1.0.5 Программа редактора базы теорем

Редактор базы теорем реализован в виде оператора ЛОСа "блоктеорем(x1)". Здесь x1 - ссылка на концевой терминал базы теорем либо набор термов "теорема(...)-ссылок на узлы теорем. Реализуется просмотр, изменение и удаление указанных в терминале либо в наборе теорем, а также (только в случае терминала) ввод новых теорем, регистрируемых в том же терминале.

Заметим, что для редактирования технических описаний примеров реальных объектов (см. выше пример про стол) создана отдельная процедура "блоксхемы(x1)". Здесь x1 - ссылка на концевой терминал базы теорем, расположенный в подразделе с заголовком "Схемы". Реализуется просмотр и редактирование схемы, определяемой данным концевым терминалом.

Точки обращения к базе теорем из главного меню - к первой либо второй из упомянутых двух процедур - можно найти через пункт "База теорем" - "Обращение к базе теорем из главного меню" оглавления программ.

Выйти на начало программы оператора "блоктеорем" можно через пункт оглавления программ "База теорем" - "Редактор базы теорем" - "Исходная точка". Прежде всего, переменной x2 присваивается содержимое логического терминала x1. Если x1 - не терминал, а набор термов, то x2 становится равно x1. В случае пустого набора x1 переменной x2 присваивается набор, состоящий из терма "фикс(0)". Переменной x3, которая будет играть роль указателя на вхождение текущего терма набора x2, присваивается левый край набора x2. Термы "замечание(...)", которые могут оказаться в наборе x2, пропускаются. Если в наборе x2 встречается терм "нормуравн(A_1, A_2)-ссылка на теорему, которая в последний раз рассматривалась в данном пункте, то x3 переустанавливается на вхождение этого терма, а сам терм заменяется в наборе x2 на терм "теорема(A_1, A_2)", т.е. на стандартную ссылку.

Активным становится шестой информационный блок (это блок базы теорем), и начинается заполнение накопителя x4 структуры данных, поддерживающей работу с текущей теоремой. В этой структуре данных используются следующие типы элементов:

1. (логсимвол A) - A есть логический символ, за которым закреплена теорема.

2. (число A) - A есть номер узла статьи текущего логического символа, содержащего теорему.

3. (адресузла A) - A есть ссылка на узел теоремы.

4. (терм A) - A есть теорема.
5. (видео B_1 B_2 B_3) - информация для отображения теоремы на экране: B_1 - теорема; B_2 - либо логический символ "терм" (при выдаче текстовым редактором), либо корень дерева указателей формульного редактора (при выдае в формульном виде); B_3 - либо 0, либо выделенное вхождение в теорему (отображается в розовом цвете).
6. (конец A) - A есть номер строки для нижней граничной линии под теоремой.
7. (геомредактор A_1 A_2) - A_1 есть описание чертежа, A_2 - строка для выдачи теоремы под чертежом.
8. (комментарии A) - A есть набор пар (характеристика теоремы, преобразованная к формату терма - пара (столбец - строка) для начала прорисовки этой характеристики). К формату терма преобразуются характеристики, представляющие собой логические символы.
9. (нижняястрока A) - A есть номер строки для нижней граничной линии под характеристиками теоремы.
10. (позиция A) - A есть пара (характеристика - (столбец - строка)) для текущей выделенной характеристики, если она есть.

Первоначально в набор x4 заносятся только элементы с заголовками "логсимвол", "число", "адресузла", "терм", "геомредактор".

После контрольной точки "прием(3)" начинается прорисовка теоремы. Если теорема сопровождена чертежом, то сначала прорисовывается он. Если элемент (видео ...) уже создан, то необходимые для прорисовки теоремы данные берутся из него, иначе - используется программа формульного редактора. Если формульным редактором теорему прорисовать не удалось либо имелось явное указание на текстовый режим, то теорема прорисовывается текстовым редактором.

После контрольной точки "прием(47)" прорисовываются характеристики теоремы. Они размещены под теоремой и отделены от нее горизонтальной чертой. Над чертой помещается переходник, связывающий встречающиеся в теореме формульные переменные с текстовыми переменными. Последние могут встречаться в характеристиках теоремы. Под списком характеристик прорисовывается еще одна горизонтальная черта.

После прорисовки предпринимается обращение к клавиатуре и мыши (контрольная точка "прием(4)"). В зависимости от логического символа x5, кодирующего полученный сигнал, происходит выполнение команд интерфейса. Так как редактор базы теорем, в основном, является упрощенной версией редактора приемов ГЕНОЛОГа, мы не будем приводить сколь-нибудь подробного описания программ, реализующих эти команды. Ограничимся тем, что приведем их список. Для сложных действий, связанных с программирующим логическим выводом и синтезом приемов, созданы специальные процедуры, которые будут описаны в последующих главах.

1. x5 = "Плюс" (клавиша Esc) либо x5 = "циклвариантов" (клавиша "курсор влево"). Возвращение в текущий пункт оглавления базы теорем.

2. x5 = "группировки" (клавиша End). Возвращение в главное меню.
3. x5 = "идентзадачи" (клавиша Ctr-п). Ввод бланка новой теоремы.
4. x5 = "транслвыражения" (клавиша Ctr-ф). Редактирование теоремы формульным редактором.
5. x5 = "стандменьше" (клавиша F1). Переход к контекстному меню просмотра теоремы.
6. x5 = "кортеж" (клавиша Ctr-т). Редактирование теоремы текстовым редактором.
7. x5 = "подобл" (клавиша ч). Редактирование чертежа.
8. x5 = "учеттеоремы" (клавиша "курсор вверх") либо x5 = "подстановка"(клавиша "курсор вниз"). Смена теоремы в списке теорем текущего концевого пункта оглавления.
9. x5 = "извлечениеварианта" (клавиша т) либо x5 = "нормпроизведениевсех" (клавиша ф). Выбор текстового либо формульного варианта прорисовки теоремы.
10. x5 = "модули" (клавиша Ctr-Del). Удаление теоремы.
11. x5 = "внешдизъюнкция" (клавиша Insert). Регистрация теоремы в буфере для перенесения в другой пункт оглавления.
12. x5 = "Стандплюс" (клавиша "к"). Редактирование характеристик теоремы.
13. x5 = "Обобщподст" (клавиша Ctr-к, кир.) либо x5 = "учетобоснований" (клавиша Ctr-я) либо x5 = "существпосылки" (клавиша Ctr-a. Переход в справочное оглавление, соответственно, для просмотра типов характеристик теоремы, либо просмотра сведений о логическом языке системы, либо просмотра типов протоколов базы теорем.
14. x5 = "заменагруппы" (клавиша б). Регистрация чертежа текущей теоремы в буфере.
15. x5 = "префикснаярекурсия" (клавиша Ctr-б). Сброс буфера чертежа.
16. x5 = "числзначение" (клавиша Ч). Регистрация в текущей теореме чертежа, извлеченного из буфера. На старом месте и в буфере чертеж сохраняется.
17. x5 = "схемаидентификации" (клавиша ш). Переход к просмотру очередной теоремы, извлекаемой из комментария (подборнеизвестных ...), перечисляющего теоремы, ранее отобранные по некоторому признаку.
18. x5 = "нижняяоценка" (клавиша x) либо x5 = "дробь" (клавиша X) либо x5 = "записьзадачи"(клавиша Ctr-x). Обращения к характеризации теоремы. В первом случае пополняется имеющийся список характеристик, во втором - он создается заново (но с сохранением характеристик, имеющих заголовки "блокраздела", "блокприемов", "аксиома", "копия", "посылки", "авт", "определение"), в третьем случае процесс создания характеристик прослеживается с прерыванием для каждой новой характеристики и выходом в отладчик ЛОСа.

19. x5 = "отборприемов" (клавиша п). Просмотр списка приемов, источником которых является теорема.

20. x5 = "дробнаявеличина" (клавиша Ctr-ч). Удаление чертежа, сопровождающего теорему.

21. x5 = "верхняягрань" (клавиша И). Выбор теоремы в качестве источника приема.

22. x5 = "внешнийквантор" (клавиша г) либо x5 = "сдвигпеременных" (клавиша Ctr-г) либо x5 = "функция"(клавиша Г). Создание спецификаций приемов по теореме. После создания их списка реализуется интерфейс просмотра созданных спецификаций и обращений к созданию либо коррекции приемов. В первом случае спецификации создаются без каких-либо прерываний. Во втором - предварительно выбирается точка прерывания по оглавлению программ, в третьем - на момент созданий каждой новой спецификации реализуется выход в отладчик ЛОСа.

23. x5 = "подфрагмент" (клавиша Ctr-й). Просмотр ссылки на теорему - терма "теорема(A_1, A_2)".

24. x5 = "мышь" (нажатие левой либо правой кнопки мыши). При нажатии левой кнопки мыши на характеристике теоремы происходит ее выделение и прорисовка снизу расшифровки этой характеристики. При нажатии левой кнопки на подтерме теоремы происходит его выделение.

25. x5 = "обл" (нажатие пробела). Сброс выделения подтерма теоремы либо характеристики.

26. x5 = "арксинус" (клавиша Ctr-о). Пополнение списка антецедентов теоремы утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з.

27. x5 = "перпендикпрямые" (клавиша Ctr-курсор вправо). Вход в просмотр подтермов теоремы с помощью клавиатуры. Сначала выделяется первый антецедент. Дальнейшие изменения выделения подтерма - с помощью курсоров.

28. x5 = "глуб" (клавиша Й). Запись теоремы приема, от которого имел место переход в базу теорем, в качестве нового элемента списка теорем текущего концевого пункта оглавления.

29. x5 = "область" (клавиша Л) либо x5 = "минимум" (клавиша л). Запуск программирующего вывода по текущей теореме. В первом случае данные о выводе регистрируются в архиве базы теорем, во втором - нет.

30. x5 = "арккосинус" (клавиша Ctr-л). Запуск сокращенного программирующего вывода по текущей теореме. Проверяется лишь сохранение выводов, зарегистрированных в архиве базы теорем.

31. x5 = "усмчисло" (клавиша с). Синтез в буфере базы приемов ранее не создававшихся приемов по текущей теореме.

32. x5 = "арктангенс" (клавиша Ctr-д). Создание копии теоремы. В характеристиках копии помещается терм "копия($A_1, A2$)", ссылающийся на оригинал.

33. x5 = "частичныйответ" (клавиша о). Переход к оригиналу теоремы от ее копии.

34. x5 = "посылки" (клавиша Ctr-с). Создание приемов по текущей теореме. Приемы сохраняются в буфере базы приемов, а в буфере задачника сохраняются задачи, на которых тестировалась неизбыточность приемов.

35. x5 = "попытка" (клавиша Ctr-F3). Просмотр хэша текущей теоремы.

36. x5 = "помощь" (клавиша Ctr-ц). Запуск цикла вывода теорем, создания приемов и их доводки. Кнопка запуска генератора приемов.

37. x5 = "замещение" (клавиша д). Просмотр дерева вывода теоремы по данным архива базы теорем.

38. x5 = "оператор" (клавиша Ctr-р, кир.). Выбор режима доводчика.

Глава 2

Характеристики теорем

Характеристики теорем нужны для их алгоритмизации. Одни из них констатируют самые общие свойства теоремы, другие - указывают на возможность создания по теореме приемов различных типов, третьи - фиксируют особенности этих приемов. Генератор приемов сканирует характеристики теоремы и запускает по текущей характеристике процедуру спецификатора, предлагающую различные версии спецификаций. Используются характеристики также при просмотре базы теорем процедурой логического вывода для отбора нужных утверждений.

Источники характеристик различны. Часть их типов создается процедурой характеризатора, которой сообщается только теорема, быть может, дополненная ранее имевшимися ее характеристиками. Другие характеристики вводятся процедурой логического вывода, которая знает, для чего была получена теорема, и регистрирует эту ее целевую направленность в виде характеристики. Наконец, многие типы характеристик на текущий момент вводятся вручную. Они были созданы лишь для того, чтобы спецификатор мог как-то связать источник приема с уже имеющимся приемом и представляют собой задания на дальнейшее обучение системы.

2.1 Типы характеристик теорем

Начнем с перечисления типов характеристик теорем, имеющихся на текущий момент. Перейти к оглавлению этих типов можно, войдя в просмотр любой теоремы из базы теорем и нажав клавишу "Ctr-к".

2.1.1 Общие характеристики

Определения

1. определение(t). Теорема представляет собой определение терма t. Пример:

   $\forall_n(n - \text{натуральное} \leftrightarrow n - \text{целое} \ \& \ 1 \leq n)$

   Характеристика - "определение(натуральное(n))".

   $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow \mathrm{sg}(a) = (1 \text{ при } 0 < a, \text{ иначе } -1))$

   Характеристика - "определение(сигнум(a))".

   $\forall_a(a - \mathrm{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \text{наибольший}(\inf(a),$ $\mathrm{set}_b(\text{нижняягрань}(b, a))))$

   Характеристика - "определение(инф(a))".

2. опр(x1). Теорема представляет собой определение функции, обозначенной символом x1. Пример:

   обрфункция$(\lambda_x(\sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2])) = \lambda_x(\arcsin x, x \in [-1, 1])$

   Характеристика - "опр(арксинус)".

3. принадлежит(x1). Эквивалентность может рассматриваться как определение принадлежности множеству. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abf}(f -$ функция $\&\ b -$ set $\&\ b \subseteq \mathrm{Dom}(f) \to a \in$ образ$(f, b) \leftrightarrow \exists_x(a = f(x)\ \&\ x \in b))$

   Характеристика - "принадлежит(второйтерм)".

Уточнение смысла теоремы

1. стандарт. Теорема представляет собой утверждение уровня текстового анализа, истинное в типичной ситуации. Такие "теоремы", конечно, никакими теоремами не являются. Они представляют собой утверждения, формулирующие наивные представления о понятиях толкового словаря. Например,

   "длялюбого(x1 если транспорт(x1) то существует(x2 x3 перевозит(x1 x2 x3)))".

2. посылки(x1). Теорема имеет смысл только в контекстах, предполагающих по умолчанию выполнение некоторых дополнительных утверждений, обозначаемых символом x1. Например,

   $\forall_{AB}(A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ \neg(A = B) \to$ окружность$(AB) = \mathrm{set}_C(C -$ точка $\&\ l(AC) = l(AB)))$

   Здесь характеристика "посылки(планиметрия)" указывает на планиметрическую ситуацию.

3. прим(x1). Теорема представляет собой конъюнкцию, дающую описание примера объекта x1. Пример описания четырехугольного стола можно найти в разделе "Словарь" - "С" - "Стол" - "Схемы" базы теорем. Ввиду громоздкости, мы его не приводим.

Цели вывода теоремы

1. сметеорема. Теорема выведена только для порождения справочников поиска теорем. Пример:

   $\forall_{ae}(\neg(e = 0)\ \&\ a -$ число $\&\ e -$ число $\to ae/e = a)$

   Имеется более общее тождество для сокращения дробей. Однако, при выводе теорем данное тождество оказывается более ценным.

2. подборзначений(x1). Импликация выведена для подбора значений. x1 - список реализуемых переменных. Пример:

   $\forall_{abxy}(a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ x = 0\ \&\ y = 0 \to ax + by = 0)$

   Характеристика "подборзначений(x23 x24)" указывает, что по теореме нужно будет создавать прием подбора нулевых значений неизвестных x, y для уравнения $ax + by = 0$.

3. Начало(x1). Теорема создана для приема, срабатывание которого инициируется усмотрением в задаче терма x1. Пример:

   $\forall_{abijk}(\neg(b-1=0)\ \&\ 0<b\ \&\ 0<i\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ k-\text{число} \rightarrow a+ki^j=0 \leftrightarrow a=0\ \&\ k=0\ \vee\ j\log_b i-\log_b a=-\log_b(-k)\ \&\ k<0\ \&\ 0<a\ \vee\ j\log_b i-\log_b(-a)=-\log_b k\ \&\ a<0\ \&\ 0<k)$

   Здесь характеристика "Начало(логарифм(b,c))" указывает, что перед попыткой применения приема логарифмирования показательного уравнения должен быть усмотрен какой-либо логарифм, основание b которого и будет использовано.

Информация о выводе теоремы

1. варпарам(x1 x2). Переменная x1 введена при обобщении и может принимать вырожденное значение x2. Пример:

   $\forall_{ade}(d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ e\leq 0\ \&\ 0\leq d-\sqrt{e+d^2}\ \&\ 0\leq e+d^2\ \&\ a-\text{число}\rightarrow a\sqrt{d-\sqrt{e+d^2}}=a\sqrt{d-\sqrt{e+d^2}}+a\sqrt{d+sqrte+d^2})$

   Характеристика - "варпарам(a 1)".

2. авт. Теорема была получена системой самостоятельно. Пример:

   $\forall_{defg}(\neg(d=f)\ \&\ \neg(e=g)\ \&\ \neg(f=g)\ \&\ \neg(\text{прямая}(df)=\text{прямая}(eg))\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(df)\parallel\text{прямая}(eg)\ \&\ \text{разныестороны}(d,e,\text{прямая}(fg))\rightarrow(l(df)l(eg)-l(fg)^2)(l(df)-l(eg))=l(dg)^2l(eg)-l(ef)^2l(df))$.

3. обобщзнак. Теорема получена программирующим выводом как обобщение другой теоремы. Пример:

   $\forall_{bcde}(\neg(b=0)\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ c-\text{комплексное}\ \&\ d-\text{комплексное}\ \&\ e-\text{комплексное}\rightarrow c(d-e)/b=-(c(e-d)/b))$

   Множители появились при обобщениях.

Блокировки, связанные с теоремой

1. блок. Блокировка рехарактеризации теоремы.

2. пв. Указание на то, что характеристики теоремы должны определяться процедурой программирующего вывода. Блокирует ее рехарактеризацию. Этой характеристикой (вручную) должны снабжаться все теоремы ячейки логического вывода, не являющиеся ее стартовыми теоремами. В противном случае система не "увидит", что они выведены, даже если это и произойдет.

3. блокраздела(x1 x2). Блокировка при выводе следствий данной стартовой теоремы всех приемов, источниками которых служат теоремы той ячейки вывода, к которой относится теорема по ссылке x1 - x2.

4. блокприемов(x1 x2). Блокировка при выводе следствий данной стартовой теоремы вывода всех приемов, источником которых служит теорема по ссылке x1 - x2.

Блокировки приемов бывают необходимы только для тестирования процедуры вывода теорем на обучающем материале, чтобы исключить случаи, когда теорема "уничтожает" саму себя при проверке избыточности. Для получения новых теорем они не нужны.

Информация для создания приемов

1. см(x1). Синтезируемым приемам передаются фильтры списка x1. Характеристика определяется процедурой логического вывода, если она заранее знает, для какого приема создана теорема.

2. указатель(x1). Синтезируемым приемам передаются указатели списка x1. Характеристика определяется процедурой логического вывода, если она заранее знает, для какого приема создана теорема.

3. внутрпреобр(x1). Теорема предназначена для приема анализатора x1, выполняющего тождественное либо эквивалентное преобразование. Характеристика определяется процедурой логического вывода.

4. сокращгрупп(x1). Тождество, выведенное для создания приема справочника поиска теорем "Сокращение". x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$

   Теорема самостоятельной ценности не имеет, так как для перемножения степеней с одинаковым основанием есть другая теорема. Однако, она используется программирующим выводом в качестве подсказки на возможность исключения степенного выражения.

2.1.2 Тождества или эквивалентности

В данном подразделе собраны характеристики, которые могут относиться к заменам любого типа - тождественным или эквивалентным.

1. группировки. Теорема представляет собой тождество либо эквивалентность, обе части которых - элементарные бесповторные термы, имеющие одно и то же множество переменных. Пример:

   $\forall_{ab}(-a < -b \leftrightarrow b < a)$

2. удаление(x1 x2). Теорема представляет собой тождество либо эквивалентность, применение которых в направлении x2 позволяет избавиться от логического символа x1, выразив его через символы с меньшей оценкой сложности. Пример:

   $\forall_{ax}(a - \text{целое} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow [x] \leq a \leftrightarrow x < a + 1)$

   Характеристика - "удаление(целаячасть второйтерм)".

3. вычпрог(x1 x2 x3). Теорема представляет собой тождество либо эквивалентность, которые в случае применения в направлении x1 обеспечивают упрощение относительно констант, использующее вычисления ГЕНОЛОГа. x2 - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (в нее включаются

указания на типы константных значений переменных), x3 - список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем непосредственных вычислений. Пример:

$\forall_{abcdef}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ d -$ число $\& \ e -$ число $\& \ f -$ число $\& \ \neg(c=0) \ \& \ neg(d=0) \ \& \ \neg(f=0) \to ab/(cd)+ae/(cf) = a(bf+de)/(cdf))$

Характеристика - "вычпрог(второйтерм и(десчисло(d)десчисло(e)десчисло(b) десчисло(f)), $bf+de$, df).

4. серия(x1 x2). Теорема представляет собой тождество либо эквивалентность, предназначенную для замены с разверткой операции над конечным семейством. x1 - указатель вхождения этой операции, x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{Aab}(a -$ целое $\& \ b -$ целое $\to \mathrm{set}_x(x -$ целое $\& \ a \le x \ \& \ x \le b \ \& \ x \in A) = \bigcup_{i=0}^{b-a}(\{a+i\}$ при $a+i \in A,$ иначе $\emptyset))$

   Характеристика "серия(фикс(0 2) второйтерм)" определяет развертку конечного объединения в обычное.

5. стандартизация(x1). Тождество либо эквивалентность определяет специальную стандартизацию в направлении x1. Характеристика указывает на теоремы, обладающие не проработанными типами приемов.

2.1.3 Тождества

Упрощающие тождества

1. нормализация(x1). Теорема представляет собой тождество, обеспечивающее общую стандартизацию. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_a(a -$ число $\to a+0=a)$

   Характеристика - "нормализация(второйтерм)".

2. косвактив(x1). Тождество общей стандартизации, использующее равенство из контекста. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(b =$ путь(префикс$(a,c)) \to$ началопути$(b) =$ началопути$(a))$

   Характеристика - "косвактив(второйтерм)".

3. норм(x1). Теорема используется как тождество общей стандартизации, однако обратное преобразование в пакетных нормализаторах приведения к заданным заголовкам тоже является допустимым. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abe}(a - \mathrm{set} \ \& \ b - \mathrm{set} \ \& \ e - \mathrm{set} \to (a \times b) \cup (a \times e) = a \times (b \cup e))$

   Характеристика - "норм(второйтерм)".

4. Специальные виды тождеств.

   (a) заменазнака(x1). Теорема представляет собой тождество вида $g(f(x)y) = f(g(xy))$. x1 - операция f.

   (b) отр(x1). Теорема представляет собой тождество вида $f(g(x)) = x$, не имеющее существенных посылок. x1 - символ g.
   (c) единица(x1). Теорема представляет собой тождество вида $f(x, a) = x$. x1 - символ f.
   (d) обращение. Тождество без существенных посылок, консеквент которого имеет вид $A(x) = x$, где выражение $A(x)$ отлично от переменной.
   (e) Измзнака. Тождество вида $f(x) = g(a, x)$, где f - операция типа "отрицание", g - ассоциативная и коммутативная операция, a - константное выражение.
   (f) поглощает. Тождество типа поглощения: "длялюбого(x y если $A(x)$ $A(y)$ $B(x, y)$ то $f(x, y) = y$)".
   (g) сократимо. Тождество, заменяемая часть которого имеет две переменные, причем одну - бесповторную, а другую - с двумя вхождениями; заменяющая часть имеет две переменные и бесповторна.
   (h) сокращение(x1). Тождество имеет в одной части ровно два вхождения одной и той же переменной, а в другой - константу. Заголовок неконстантной части есть x1.
   (i) простойоперанд(x1). Упрощающее тождество, заменяющее выражение которого представляет собой операцию, примененную к различным переменным. x1 - направление замены.
   (j) вычерк(x1). Теорема представляет собой тождество типа сокращения, используемое для выражений с заголовком x1.

5. Уменьшение оценки сложности.

   (a) упрощение(x1). Тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_a (a - \text{число} \to \cos(4 \operatorname{arctg} a) = (a^4 - 6a^2 + 1)/(1 + a^2)^2)$.

   (b) упрощкн(x1 x2). Тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка"термам, при условии, что заданные выражения не зависят от заданных параметров. x1 - список термов "конст(A1 A2)", где A1 - переменная, обозначающая выражение, которое не должно зависеть от переменных списка A2. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABijnp}(\text{верпространство}(B)\ \&\ A - \text{слово}\ \&\ \mathrm{Val}(A) \subseteq \text{события}(B)\ \&\ l(A) = n\ \&\ \text{незавсобытия}(A, B)\ \&\ j \in \{0, \ldots, n\}\ \&\ \forall_k (k \in \{1, \ldots, n\} \to \text{вероятность}(A(k), B) = p) \to \text{вероятность}(\text{слойсемейства}(A, \text{элемсобытия}(B), j), B) = C_n^j p^j (1 - p)^{n-j})$

   Характеристика - "упрощкн(конст(p k) второйтерм)".

   (c) варианты(x1). Тождество преобразует корневую сложную операцию в условное выражение с более простыми операциями. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \min(a, b) = (a \text{ при } a \leq b, \text{ иначе } b))$

   Характеристика - "варианты(второйтерм)".

   (d) упрощзнак(x1). Теорема представляет собой тождество, заголовок заменяемой части которого выделен справочником "Сокращение", причем наибольшая эвристическая оценка сложности символов в заменяющей части меньше, чем в заменяемой. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \rightarrow (a-|b|c)(a+|b|c) = (a-bc)(a+bc))$

   Характеристика - "упрощзнак(воройтерм)".

   (e) исклтерм(x1 x2). Тождество заменяет сложное выражение на выражение меньшей сложности, имеющее единственное подвыражение x1 наибольшей сложности. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABfc}(A-\text{set}\ \&\ f-\text{функция}\ \&\ \text{Val}(f) = A\ \&\ B = A\backslash\{c\} \rightarrow \text{прообраз}(f, B) = \text{Dom}(f) \setminus \text{слой}(f, c))$

   Характеристика - "исклтерм(слой(f c) второйтерм)".

   (f) извлечфунк(x1). Тождество исключает сложную операцию с помошью системы тождеств, усмотренных в посылках. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{knp}(n(\text{mod}k) + p = 0 \rightarrow [n/k] = (n+p)/k)$

   Характеристика - "извлечфунк(второйтерм)".

   (g) упрощМинус(x1). Тождество исключает сложную операцию, заключенную внутри идентифицированного с переменной терма. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcd}(d = a^2-b^2\ \&\ c-\text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c)-\text{even}) \rightarrow (a-b)^c(a+b)^c = d^c)$

   Основанный на теореме прием проверяет, что a либо b имеет своим множителем квадратный радикал, от которого можно будет избавиться при переходе к разности квадратов. Характеристика имеет предварительный характер и введена лишь, чтобы обозначить принцип использования тождеств. Для фактического использования ее нужно будет заменить, включив в нее фильтры, уточняющие требуемый вид идентифицируемых с переменными термов.

   (h) упрощпересечение(x1). Тождество, упрощающее операнды одной из имеющих наибольшую сложность операций заменяемого терма. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ {}_{-}\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < 1+\sqrt{c+1}\ \&\ 0 \leq c+1\ \&\ \neg(b-1=0)\ \&\ 0 < -1+\sqrt{c+1}\ \&\ 0 < b \rightarrow a\log_b(\sqrt{c+1}-1) - a\log_b(\sqrt{c+1}+1) = 2a\log_b(\sqrt{c+1}-1) - a\log_b c)$

6. Уменьшение числа подтермов наибольшей сложности.

   (a) группмножитель(x1). Тождество выполняет группировку сложных операций. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{adf}(a-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\ \&\ f-\text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f, a) \cup \text{прообраз}(f, d) = \text{прообраз}(f, a \cup d))$

   Характеристика - "группмножитель(второйтерм)".

(b) единствсущ(x1). Тождество преобразует терм с несколькими вхождениями операции максимальной сложности, хотя бы одно из которых содержит все переменные заменяемой части, в выражение с единственным вхождением этой операции максимальной сложности. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcdeg}(a-\text{число} \ \& \ c-\text{число} \ \& \ d-\text{число} \ \& \ e-\text{число} \ \& \ b-\text{комплексное} \ \& \ g-\text{комплексное} \rightarrow ab/(cg)+db/(eg)=(ae+cd)/(ce)\cdot b/g)$

Здесь уменьшается число комплексных дробей.

Характеристика - "единствсущ(второйтерм)".

(c) уменьшсложн(x1). Теорема одновременно уменьшает число выражений максимальной сложности и приводит к более простым (по числу переменных) таким выражениям. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ade}(d-\text{число} \ \& \ e-\text{число} \ \& \ 0 \leq e \ \& \ a-\text{число} \rightarrow a\sqrt{2\sqrt{e}+2\sqrt{e+d^2}} = a\sqrt{d+\sqrt{e+d^2}}+a\sqrt{-d+\sqrt{e+d^2}})$

Характеристика - "уменьшсложн(первыйтерм)".

(d) сокращ(x1). Тождество упрощает выражение под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей либо равной сложности. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{afd}(a-\text{set} \ \& \ d-\text{set} \ \& \ f-\text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f,a)\cup\text{прообраз}(f,d) = \text{прообраз}(f,a\cup d))$

Характеристика: сокращ(первыйтерм).

7. Тождества с описателями.

(a) описатель(x1). Теорема представляет собой тождество, которое используется для перехода к более простым описателям либо для исключения описателей. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Aa}(A-\text{set} \ \& \ a-\text{число} \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \sum_{x,x\in A} a = a\text{card}A)$

Характеристика - "описатель(второйтерм)".

(b) семействоэлементов(x1). Тождество преобразует параметрическое описание класса в операцию над семейством. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Agh}(A-\text{set} \ \& \ g-\text{функция} \ \& \ h-\text{функция} \ \& \ \text{Dom}(h)=A \ \& \ \text{Dom}(g)=A \ \& \ \text{Val}(h)\subseteq\mathbf{R} \ \& \ \text{Val}(g)\subseteq\mathbf{R} \rightarrow \text{set}_x(x-\text{число} \ \& \ \exists_n(n\in A \ \& \ g(n)<x \ \& \ x\leq h(n))) = \bigcup_{n,n\in A}(g(n),h(n)])$

Характеристика - "семействоэлементов(второйтерм)".

(c) исклпарам(x1). Тождество преобразует выражение с описателем по нескольким параметрам в выражение, описатели которого имеют строго меньшее число параметров. x1 - направление замены. Наиболее типичный пример - полное исключение описателя. Невырожденный пример единственный:

$\forall_{APafgmpq}(A-\text{set} \ \& \ \text{Отображение}(a,A,\mathbf{R}) \ \& \ \text{Отображение}(g,A,\mathbf{R}) \ \& \ \text{Отображение}(p,A,\mathbf{R}) \ \& \ \text{Отображение}(q,A,\mathbf{R}) \rightarrow \text{sum}_{i,j,i\leq g(j),0\leq i,j\in A}a(j)^i p(j)/(i!(g(j)-i)!q(j)) = \text{sum}_{j,j\in A,0\leq g(j)}p(j)(a(j)+1)^{g(j)}/(q(j)g(j)!))$

    Характеристика - "исклпарам(второйтерм)".

  (d) смописатель(x1). Тождество исключает описатель "отображение" и вводит описатель "класс". x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_f$(семействомножеств(f) & конечное$(\mathrm{Dom}(f))$ & конечные$(\mathrm{Val}(f)) \to \sum_{i,i\in\mathrm{Dom}(f)} \mathrm{card} f(i) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{ij}(i \in \mathrm{Dom}(f)$ & $j \in f(i))))$

    Характеристика - "смописатель(второйтерм)".

  (e) развязка(x1). Тождество выносит наружу операцию над семейством из-под сложного понятия. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_c(c -$ функция & семействомножеств(c) & конечное$(\mathrm{Dom}(c))$ & разделимы(c) & конечные$(\mathrm{Val}(c)) \to \mathrm{card} \bigcup(c) = \sum_{a,a\in\mathrm{Dom}(c)} \mathrm{card} c(a))$

    Характеристика - "развязка(второйтерм)". Сложным понятием считается "мощность".

  (f) парамописание(x1). Теорема представляет собой тождество, преобразующее параметрическое описание класса в его явное задание. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abcd}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $\neg((a,c) = (0,0)) \to \mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x = at + b$ & $y\ ct + d$ & $t -$ число$)) = \mathrm{set}_{xy}(cx - ay + ad - bc$ & $x -$ число & $y -$ число$))$

    Характеристика - "парамописание(второйтерм)".

  (g) кванторныйконтекст. Теорема для исключения описателя "отображение" с помощью кванторного тождества из контекста. Пример:

    $\forall_{ABCfq}(B - \mathrm{set}$ & конечное(B) & конечное(C) & $B \subseteq A$ & Отображение(f, A, C) & $\forall_i(i \in C \to \mathrm{card}($слой$($сужение$(f, B), i)) = q(i)) \to \mathrm{card} B = \sum_{i,i\in C} q(i))$

8. внешвхожд(x1 x2). Тождество, подготавливающее возможность упрощения. x1 - конъюнкция фильтров на контекст преобразования, x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdefgh}(d^2 = c^2 - a^2g^2h$ & $(2(-c-d) = he^2 \vee 2(-c+d) = he^2)$ & $fe = -2ag$ & $\sqrt{b} = g\sqrt{h} \to -(c + a\sqrt{b}) = (e\sqrt{h}/2 + f/2)^2)$

   Характеристика "внешвхожд(... второйтерм)" определяет своими фильтрами, что преобразуемое выражение расположено под радикалом четной степени.

9. Тождества с функциональными переменными.

  (a) значперем(x1). Тождество, исключающее функциональную переменную, аргумент которой не связан внешними кванторами и описателями. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{ABaij}$(правмногоугольник(a) & $A-$точка & $B-$точка & $\neg(A = B)$ & $l(a) = n$ & $i \in \{1,\ldots,n\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\}$ & окружность(AB)описана около фигура$(a) \to l(a(i)a(j)) = 2l(AB)\sin(\pi|i-j|/n))$

    Характеристика - "значпарам(второйтерм)".

(b) сравнтермов(x1). Тождество создано для синтеза приема общей стандартизации, усматривающего равенство двух объектов путем перегруппировки равенства в посылках. x1 - функциональная переменная, применяемая к сравниваемым объектам заменяющей части. Пример:

$\forall_{abcdf}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ a - b = 0 \to f(a)c/(f(b)d) = c/d)$

Характеристика - "сравнтермов(f)".

10. внешзнак(x1). Тождество сохраняет сложность самого сложного подвыражения, но уменьшает сложность его надвыражений.

    Пример:

    $\forall_{abf}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(b - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 9 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to f \log_b a = f / \log_a b)$

    Характеристика - "внешзнак(первыйтерм)".

11. натурстепень(x1). Тождество для уменьшения натурального параметра, связанного со сложным подвыражением. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abcdef}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{натуральное} \to d^{b + c(\log_d e)^f/a} = d^b e^{c(\log_d e)^{f-1}/a})$

    Характеристика - "натурстепень(второйтерм)".

Декомпозирующие тождества

1. декомпозиция(x1). Тождество для декомпозиции выражения со сложным заголовком. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$

   Характеристика - "декомпозиция(второйтерм)".

2. частичнпредст(x1). Тождество для декомпозиции сложного выражения, использующее равенство в посылках для значения самого сложного подвыражения одного из декомпозирующих термов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcfp}(c = a \setminus b \ \& \ \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, b)) = p \ \& \ b \subseteq a \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, a)) = p + \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, c)))$

   Прием используется в задачах на определение числа корней. Схема решения их такова, что выводятся посылки, определяющие число корней на отдельных промежутках, а данный прием постепенно сужает область, для которой число корней еще не найдено. Имеется другая версия приема, у которой в посылках находится равенство не для $\mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, b))$, а для $\mathrm{roots}(f, b)$).

   Характеристика - "частичнпредст(второйтерм)".

3. услнезавис(x1). Тождество для декомпозиции сложного выражения, использующее возможность вычислить вспомогательное выражение, связывающее разделяемые переменные. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABa}(\text{конечное}(A)\ \&\ \text{конечное}(B)\ \&\ a = \text{card}(A \cap B) \to \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - a)$

   Правая часть последнего антецедента обрабатывается вспомогательной задачей, после чего проверяется, что символ "мощность" устранен.

   Характеристика - "услнезавис(второйтерм)".

4. разбить. Тождество, выполняющее вычисление для подготовки декомпозиции сложной операции. Пример:

   $\forall_{abfg}(g(x) = f(x)\ \&\ p = \int_a^b g(x)dx \to \int_a^b f(x)dx = p)$

   Это - типичный квазипротокол, созданный для удобства компиляции некоторой последовательности вычислений. Предполагается, что $f(x)$ имеет вид $A(B + C)^n/D$, где n - натуральная константа, не превосходящая 4. Антецедент обращается к нормализатору раскрывания скобок "стандплюс", преобразуя подынтегральное выражение к виду суммы. Затем предпринимается попытка вычислить интеграл с $g(x)$. Если результат p не содержит символа "интеграл", то предпринимается замена.

   Характеристика "разбить" в данном случае, конечно, дает недостаточно информации генератору приемов. Она имеет предварительный характер.

Константные подвыражения

Теоремы с характеристиками, перечисляемыми в данном разделе, обычно создаются ради приемов заранее известного типа. По существу, это скорее схемы вычислений, чем теоремы. Их можно считать квазипротоколами.

1. константы(x1 x2 x3). Тождество обеспечивает стандартизацию константных подтермов неизвестных выражений. x1 - направление замены, x2 - набор термов "типданных($A\ x_1 \dots\ x_n$)", уточняющих тип A константных значений переменных $x_1, \dots, x_n$, x3 - терм "неизвестные($y_1\ \dots\ y_m$)", перечисляющий переменные для неизвестных выражений. Пример:

   $\forall_{abcde}(b = ac \to a^d b^e = a^{d+e} c^e)$

   Характеристика - "константы(второйтерм типданных(натуральное $a\ b$) неизвестные($d\ e$))".

2. нормконст(x1 x2). Тождество обеспечивает группировку константных подвыражений для упрощения с помощью нормализаторов общей стандартизации. x1 - направление замены, x2 - конъюнкция фильтров. Пример:

   $\forall_{abcdefgmn}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ m - \text{число}\ \&\ n - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ 0 < b\ \&\ \neg(d = 0) \to ea^{cn+f}/(db^{cm+g}) = e(a^n/b^m)^c \cdot a^f/(db^g))$

Характеристика - "нормконст(второйтерм и(натуральное(x1) натуральное(x2) не(равно(нод(x1 x2)1)) целое(x13)целое(x14)не(константа(x3))константа(x6)константа(x7)))". Группировка позволяет сократить a и b.

3. вычконст(x1 x2). Тождество позволяет проварьировать константное подвыражение к виду, для которого целесообразна попытка упрощения с помощью вспомогательной задачи. x1 - направление замены, x2 - конъюнкция фильтров. Пример:

   $\forall_{abcdep}(p = \log_a(dc^e) \rightarrow a^{b/(\log_c d + e)} = c^{b/p})$

   Характеристика - "вычконст(второйтерм и(константа(теквхожд)не(входит(логарифм p))))". Теорема представляет собой квазипротокол для создания приема. Правая часть антецедента будет обрабатываться этим приемом при помощи задачи на упрощение. Фильтры передаются приему без изменения, так что проверка невхождения символа "логарифм" в результат вычислений p будет происходить после решения задачи.

4. Выч(x1 x2 x3). Тождество позволяет выделить константный подтерм x1, для которого существует специальный упрощающий оператор x2. x3 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abe}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow e \cdot a/b = ae/b)$

   Характеристика - "Выч(дробь(a b) сокращдроби первыйтерм)".

5. вычисл(x1). Тождество, позволяющее использовать приближенное вычисление для константных подтермов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ a/b = e \rightarrow ad/(bc) = ed/c)$

   Характеристика - "вычисл(второйтерм)". Эта характеристика инициирует создание приема "Стандартизация ответа с помощью приближенных вычислений". В спецификацию автоматически заносится элемент "см(и(десчисло(a) десчисло(b)))". Прием используется в задачах по элементарных физике или химии для приведения ответа к естественному виду. Вычисления проводятся в формате с плавающей запятой и выдаются со многими знаками. Завершающее округление выполняется другим приемом.

6. предвумножение(x1 x2 x3). Тождество,позволяющее с помощью нормализаторов общей стандартизации свернуть константный терм, содержащий единственную сложную операцию, в терм, заголовком которого служит данная операция, а операндами - константы. x1 - направление замены, x2 - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (в нее включаются указания на типы константных значений переменных), x3 - список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем вычислений. Пример:

   $\forall_{abef}(\neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < b\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \& f - \text{число} \rightarrow \log_a(a^e b^f) = e + f \log_a b)$

   Характеристика - "предвумножение(первыйтерм и(дробнаявеличина(x1)целое(x5) дробнаявеличина(x2) целое(x6)) умножение(степень(x1 x5) степень(x2 x6)))".

Напомним, что тип "дробнаявеличина" объединяет десятичные константы и числовые дроби.

7. Константа(x1 x2). Теорема представляет собой тождество, в антецедентах которого проверяется с помощью непосредственных вычислений одно либо несколько соотношений для констант, причем тождество обеспечивает стандартизацию с упрощением константных подвыражений. x1 - направление замены, x2 - конъбнкция фильтров. Пример:

   $\forall_{abcmn}(b = ac \to ba^{n-m} = ca^{n-m+1})$

   Характеристика - "Константа(второйтерм и(натуральное(x1) натуральное(x2) натуральное(x13) не(константа(x14))))".

8. конствхожд(x1 x2). Теорема представляет собой упрощающее тождество, использующее проверочный оператор для усмотрения соотношения между константными подвыражениями. x1 - направление замены, x2 - список переменных, идентифицируемых с константными термами. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 \leq a - b \to \min(ac, bc) = bc)$

   Характеристика - "конствхожд(второйтерм x1 x2)".

Преобразование описателей

1. Операции над семействами.

   (a) нольмн(x1). Тождество исключает нулевые члены операции над семейством. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{Babpq}(B - \text{set}\ \&\ B \subseteq \mathbf{Z}\ \&\ p - \text{функция}\ \&\ q - \text{функция}\ \&\ \mathrm{Val}(p) \subseteq \mathbf{R}\ \&\ \mathrm{Val}(q) \subseteq \mathbf{R}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ a + b = 0 \to \sum_{i, i \in B}(a + b(-1)^i)p(i)/q(i) = \sum_{i, i \in B, \neg(i - \text{even})} 2ap(i)/q(i))$

   Харакеристика - "нольмн(второйтерм)".

   (b) заменапеременной(x1). Замена варьируемой переменной для упрощения общего члена при вычислении операции над семейством. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{fn}(\text{Отображение}(f, \{0, \ldots, n\}, \mathbf{R})\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n \sum_{i=0}^{n} f(n - i) = \sum_{i=0}^{n} f(i))$

   Характеристика - "заменапеременной(второйтерм)".

   (c) размер(x1). Тождество уменьшает размеры области определения операции над семейством. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{akmn}(a - \text{функция}\ \&\ m - \text{натуральное}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ 0 \leq m - 2\ \&\ \mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}\ \&\ \mathrm{Val}(a) \subseteq \mathbf{R}\ \&\ k\, in \{1, \ldots, m\}\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to a(k, i) = 0) \to \text{ранг}(a) = \text{ранг}(\lambda_{ij}((a(i, j)\ \text{при}\ i < k,\ \text{иначе}\ a(i + 1, j)), i \in \{1, \ldots, m - 1\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\})))$

   Происходит отбрасывание нулевой строки при вычислении ранга матрицы. Характеристика - "размер(второйтерм)".

(d) размеры(x1 x2). Тождество сводит вычисление операции над семейством к нескольким операциям над семействами, имеющими меньший размер области определения и формируемыми в режиме конечного перечисления. x1 - фильтр, уточняющий допустимые константные значения параметров. Пример:

$$\forall_{amn}(a-\text{функция}\ \&\ n-\text{натуральное}\ \&\ \mathrm{Dom}(a)=\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}\ \&\ \mathrm{Val}(a)\subseteq\mathbf{R}\ \&\ m\in\{1,\dots,n\}\rightarrow\det(a)=\sum_{k=1}^{n}(a(m,k)(-1)^{m+k}\det(\lambda_{ij}(((a(i,j)\ \text{при}\ j<k,\ \text{иначе}\ a(i,j+1))\ \text{при}\ i<m,\ \text{иначе}\ (a(i+1,j)\ \text{при}\ j<k,\ \text{иначе}\ a(i+1,j+1))),i\in\{1,\dots,n-1\}\ \&\ j\in\{1,\dots,n-1\}))))$$

Теорема определяет вычисление определителя путем разложения по строке. Характеристика - "размеры(натуральное(n) второйтерм)".

(e) разбиение(x1). Сведение вычисления операции над семейством к операциям над подсемействами, если область определения семейства представлена в виде объединения подобластей. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{PQfn}(P-\mathrm{set}\ \&\ f-\text{функция}\ \&\ n-\text{натуральное}\ \&\ \text{разделены}(Q)\ \&\ \text{непрерывно}(f,P)\ \&\ \text{семействомножеств}(Q)\ \&\ \mathrm{Dom}(Q)=\{1,\dots,n\}\ \&\ P=\bigcup_{i=1}^{n}Q(i)\rightarrow\iint_{P}f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}\iint_{Q(i)}f(x,y)dxdy)$$

Характеристика - "разбиение(второйтерм)".

(f) сокращмн(x1). Частичное сокращение двух операций над семействами. x1 - направление замены.

$$\forall_{amnpq}(a-\text{число}\ \&\ m-\text{натуральное}\ \&\ n-\text{натуральное}\ \&\ p-\text{натуральное}\ \&\ 0\le n-m\rightarrow 2a\sum_{i=m}^{n}1/(2i+1)-a\sum_{i=m}^{p}1/i=2a\sum_{i=2m}^{2n+1}(-1)^{i+1}/i+(a\sum_{i=p+1}^{n}1/i\ \text{при}\ 0<n-p,\ \text{иначе}\ -a\sum_{i=n+1}^{p}1/i))$$

Характеристика - "сокращмн(второйтерм)".

(g) вычМн(x1). Сведение операции над семействами к операциям, допускающим непосредственное вычисление. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{mnpq}(m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\ \&\ p-\text{целое}\ \&\ q-\text{целое}\ \&\ 0\le n\ \&\ 0\le q-p\rightarrow\sum_{i=p}^{q}(iC_{m+1}^{n})=(n+1)\sum_{i=p}^{q}C_{m+i+1}^{n+1}-(m+1)\sum_{i=p}^{q}C_{m+i}^{n})$$

Характеристика - "вычМн(второйтерм)".

(h) новоперанд. Попытка сведения вычисления операции над семейством к вычислению операции над другим семейством. Пример:

$$\forall_{PQabmnr}(\text{Отображение}(Q,\{a,\dots,b\},\mathbf{R}\setminus\{0\})\ \&\ \text{Отображение}(P,\{a,\dots,b\},\mathbf{R})\ \&\ m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\ \&\ a-\text{целое}\ \&\ b-\text{целое}\ \&\ 0\le n-b\ \&\ 0\le m-b\ \&\ 0\le b-a\ \&\ r=\sum_{i=a}^{b}P(i)C_{m-i}^{n-i}/Q(i)\rightarrow\sum_{i=a}^{b}P(i)(m-i)!/(Q(i)(n-i)!)=(m-n)!r)$$

(i) группы(x1). Группировка членов ассоциативно- коммутативной операции над семейством. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{APQ}(A-\mathrm{set}\ \&\ \text{семействомножеств}(P)\ \&\ \text{Отображение}(Q,\mathbf{N}+,\mathbf{R})\ \&\ \text{конечное}(A)\rightarrow\sum_{i,i\in P}Q(\mathrm{card}(A\setminus i))=\sum_{j=0}^{\mathrm{card}(A)}(Q(\mathrm{card}(A)-j)\mathrm{card}(\mathrm{set}_i(i\in P\ \&\ \mathrm{card}(A\cap i)=j))))$$

Характеристика - "группы(второйтерм)".

(j) упрощплс. Тождество, позволяющее перейти к более простой операции над семейством. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Paf}(P - \text{set} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \forall_i(i \in P \rightarrow 0 < f(i)) \ \& \ P \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \rightarrow \log_a \prod_{i, i \in P} f(i) = \sum_{i, i \in P} \log_a f(i))$.

(k) развернуть(x1). Тождество исключает операцию над семейством при развертке описателей в заменяющей части. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abm}(b - \text{целое} \ \& \ k - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ k \leq m \rightarrow \sum_{n=b}^{k} C_m^n = (2^m - \sum_{n=0}^{b-1} C_m^n - \sum_{n=k+1}^{m} C_m^n \ \text{при} \ 0 \leq k - b, \ \text{иначе} \ 0))$

Характеристика - "развернуть(второйтерм)".

(l) разблин(x1). Разбиение области изменения параметра для сближения операций над семействами. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcdefg}(g - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ f - \text{целое} \ \& \ 0 \leq f - e \ \& \ 0 \leq d - c \ \& \ 0 < e - c \rightarrow \sum_{n=c}^{d} g(n) + b \sum_{n=e}^{f} g(n) = a \sum_{n=e}^{d} g(n) + a \sum_{n=c}^{e-1} g(n) + b \sum_{n=e}^{f} g(n))$

Характеристика - "разблин(второйтерм)".

(m) квантспуск(x1). Бескванторная переформулировка операции над семейством с помощью вспомогательного обозначения, вводимого кванторным тождеством. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABabcmpq}(p - \text{функция} \ \& \ A - \text{функция} \ \& B - \text{функция} \ \& \ a - \text{натуральное} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ m - \text{натуральное} \ \& \ q - \text{целое} \ \& \ \forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \det(\lambda_{ij}(A(i,j,n), i \in \{1, \ldots, an+b\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, an+b\})) = p(n)) \ \& \ b - c = aq \ \& \ A(k,l,m-q) = B(k,l,m) \rightarrow \det(\lambda_{kl}(B(k,l,m), k \in \{1, \ldots, am+c\} \ \& \ l \in \{1, \ldots, am+c\})) = p(m-q))$

Теорема используется при вычислении определителя по индукции. Она заменяет определитель на введенное ранее для него обозначение $p(n)$, зависящее от параметра n, определяющего размер определителя. Характеристика - "квантспуск(второйтерм)".

(n) вычмн(x1). Сведение вычисления операции над семейством к операциям над другими семействами, допускающим более простое вычисление. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Pamn}(\neg(a-1=0) \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n - m \rightarrow \sum_{k=m}^{n}(P(k)a^k) = (a^{n+1}/(a-1)) \cdot P(n+1) - (a^m/(a-1)) \cdot P(m) - (a/(a-1)) \cdot \sum_{k=m}^{n}((P(k+1) - P(k))a^k))$

Теорема используется для понижения степени многочлена в комбинаторной сумме. Характеристика - "вычмн(второйтерм)".

(o) преобрфильтр(x1 x2). Сведение операции над семейством к операциям над подсемействами, на которых упрощается вид общего члена. x1 - вид упрощаемого подвыражения общего члена, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{MPfgmnpq}(M = \text{set}_a(\exists_{xy}(P(x,y) \ \& \ g(x,y) = a \ \& \ a - \text{число})) \ \& \ \text{огрмнож}(M) \ \& \ m = \inf(M) \ \& \ n = \sup(M) \ \& \ p = [m] \ \& \ q = [n] \rightarrow \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy = \sum_{i=0}^{q-p} \iint_{P(x,y) \ \& \ p+i \leq g(x,y) \ \& \ g(x,y) < p+i+1} f(x,y)dxdy)$

Характеристика "преобрфильтр(целаячасть($g(x, y)$) второйтерм)" указывает, что прием позволит избавиться от целой части.

(p) облфильтра(x1). Исключение описателя "отображение", используемого для задания области семейства. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{fmr}(\sum_{a,a\in\prod_{i=1}^{r} m(i)}(\prod_{i=1}^{r} f(a(i), i)) = \prod_{j=1}^{r} \sum_{j,j\in m(i)} f(j, i))$$

Характеристика - "облфильтра(второйтерм)".

(q) группоиды. Тождество, позволяющее получить повторное вхождение сложной операции при развертке операции над семейством. Пример:

$$\forall_{cdm}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d \ \& \ 0 \leq c \ \& \ m = c - d \ \& \ 0 < m \rightarrow c! = d! \prod_{n=d+1}^{c} n)$$

На теореме основан прием, позволяющий получить повторное вхождение факториала $d!$ в ситуациях, когда m - натуральное число и конечное произведение разворачивается в обычное. Дополнительно в приеме проверяется, что преобразование подготавливает группировку двух таких факториалов.

2. Определение характеристики класса.

(a) новпарам(x1). Декомпозирующая замена переменных при определении характеристики класса. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{BCP}(B - \text{set} \ \& \ C - \text{set} \ \& \ P - \text{set} \ \& \ B \subseteq C \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(x \subseteq C \ \& \ x \in P \ \& \ x - \text{set})) = \text{card}(\text{set}_{zv}(z \subseteq B \ \& \ v \subseteq C \backslash B \ \& \ z - \text{set} \ \& \ v - \text{set} \ \& \ z \cup v \in P)))$$

Характеристика - "новпарам(второйтерм)".

(b) упрощэкв(x1). Упрощающий переход к характеристикам других классов. Пример:

$$\forall_{APQ}(\text{card}(\text{set}_{xyz}(x - \text{set} \ \& \ x \subseteq A \ \& \ y - \text{set} \ \& \ y \subseteq A \ \& \ P(x \triangle y))) = \text{card}(\text{set}_x(x - \text{set} \ \& \ x \subseteq A \ \& \ P(x))) \cdot \text{card}(\text{set}_{yz}(y - \text{set} \ \& \ y \subseteq A \ \& \ Q(y, z))))$$

Характеристика - "упрощэкв(второйтерм)".

(c) мощности(x1). Попытка свести вычисление характеристики класса к вычислению характеристик других классов. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{fpq}(p = \inf(\text{set}_x(\exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ x = f(2n)))) \ \& \ q = \inf(\text{set}_x(\exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ x = f(2n - 1)))) \rightarrow \inf(\text{set}_x(\exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ x = f(n)))) = \min(p, q))$$

Прием, созданный по этой теореме, усматривает в выражении $f(n)$ степень минус единицы, показатель которой кратен n. В каждом из подслучаев эта степень пропадает. Антецеденты предпринимают попытку вычислить упрощенные выражения, и лишь в случае успеха реализуется замена.
Характеристика - "мощности(второйтерм)".

(d) группмножество(x1). Группировка характеристик классов. Пример:

$$\forall_{ABPmn}(m+n = 0 \ \& \ A \subseteq B \rightarrow m\text{card}(\text{set}_x(P(x) \ \& \ x \in A)) + n\text{card}(\text{set}_y(P(y) \ \& \ y \in B)) = n\text{card}(\text{set}_y(P(y) \ \& \ y \in B \setminus A)))$$

Характеристика - "группмножество(второйтерм)".

(e) исключотр(x1). Исключение внутреннего квантора существования в описании класса при определении его мощности. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{Bgh}(\mathrm{card}(\mathrm{set}_{fx}(\exists_A(g(f,A,x)\ \&\ \text{Отображение}(f,A,B(x)))\ \&\ h(f,x))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{fxA}(g(f,A,x)\ \&\ \text{отображение}(f,A,B(x))\ \&\ h(f,x))))$$

Характеристика - "исключотр(второйтерм)".

3. огрсвязок(x1). Тождество для сужения области варьирования параметров в параметрическом задании класса. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{AGf}(\text{группа}(A)\ \&\ a \in \text{носитель}(G)\ \&\ f = \text{операция}(G)\ \&\ \text{порядокэлемента}(a,G) - \text{число} \to \mathrm{set}_x(\exists_n(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n\ \&\ x = \text{алгстепень}(a,f,n))) = \mathrm{set}_x(\exists_n(n \in \{0,\ldots,\text{порядокэлемента}(a,G)-1\}\ \&\ x = \text{алгстепень}(a,f,n))))$$

Характеристика - "огрсвязок(второйтерм)".

4. Класс(x1). Группировка описателей "класс". x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{AB}(\mathrm{set}_x(A(x)) \cap \mathrm{set}_y(B(y)) = \mathrm{set}_x(A(x)\ \&\ B(x)))$$

Характеристика - "Класс(второйтерм)".

5. нормзнач(x1 x2). При истинности фильтров x1 возможно исключение описателей в заменяющем терме с помощью нормализаторов общей стандартизации. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABi}(B - \mathrm{set}\ \&\ A - \text{слово}\ \&\ \text{семействомножеств}(A)\ \&\ i \in \{0,\ldots,l(A)\} \to \text{слойсемейства}(A,B,i) = \bigcup_{m,m\subseteq\{1,\ldots,l(A)\},\mathrm{card}(m)=i}(\bigcap_{j,j\in m} A(j) \cap \bigcap_{j,j\in\{1,\ldots,l(A)\}\setminus m}(B\setminus A(j))))$$

Характеристика - "нормзнач(натуральное(длинанабора(A)) второйтерм)".

Тождества с условными выражениями

Напоним, что в разделе "Упрощающие тождества" уже рассматривалась связанная с условными выражениями характеристика "варианты".

1. вариант. Обе части тождества не содержат связанных переменных, причем в одну из них входит "вариант", а в другую - не входит. Пример:

$$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 \leq b + \pi\ \&\ 0 \leq \pi - b\ \&\ 0 < a \to \arg(a\sin b - (a\cos b)i) = (b - \pi/2 \text{ при } 0 < 2b + \pi,\ \text{ иначе } b + 3\pi/2))$$

2. упрощвариант(x1). Тождество, имеющее в заменяющей части условное выражение и позволяющее в каждом из подслучаев перейти к более простому в смысле справочника "оценка" терму. x1 - направление замены. Годится предыдущий пример, у которого характеристика - "упрощвариант(второйтерм)".

3. альтоперанд(x1). Тождество имеет в заменяемой части операцию от условного выражения, а в заменяющей - условное выражение. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{Pab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to (a \text{ при } P,\ \text{ иначе } 0)b = (ab \text{ при } P,\ \text{ иначе } 0))$$

Характеристика - "альтоперанд(второйтерм)".

Тождества свертки

1. свертка(x1). Теорема представляет собой тождество, обеспечивающее переход к более компактной записи. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

   Характеристика - "свертка(второйтерм)".

2. склейка(x1 x2). Тождество, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x1 к выражению с одним вхождением этой переменной. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \sqrt{3}a \sin b + a \cos b = 2a \sin(b + \pi/6))$

   Характеристика - "склейка(b второйтерм)".

3. свертки(x1). Свертка, позволяющая сгруппировать новый терм со старым. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdepq}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{натуральное}\ \&\ c - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ q - \text{натуральное}\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ p = \min(b, c) \to d(\sin a)^b(\operatorname{tg} a)^q/(\cos a)^c e = (\operatorname{tg} a)^{p+q}(\sin a)^{b-p}d/(\cos a)^{c-p}e)$

   Характеристика - "свертки(второйтерм)".

4. дистрибразвертка(x1). Тождество вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, h(y, z))$, где f, h - ассоциативны и коммутативны. x1 - направление замены от заголовка g к заголовку f. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

   Характеристика - "дистрибразвертка(первыйтерм)".

5. сокращдроби. Группировочное тождество, подготавливающее попытку сокращения. Пример:

   $\forall abcd(d = a^2 - b^2\ \&\ 0 \leq a - b\ \&\ 0 \leq a + b \to (a - b)^c(a + b)^c = d^c)$

   Предполагается, что характеристику "сокращдроби" передает теореме прием логического вывода в базе теорем, создавший данную вариацию тождества для разности квадратов, чтобы подготавливать возможность сокращения дробей. Преобразуемое выражение является множителем числителя, а знаменатель имеет своим сомножителем степень выражения d. Характеристика неполная, и в дальнейшем ее предстоит дорабатывать.

Изменение заголовка

1. заголовок(x1 x2). Тождество позволяет переходить от выражений с заголовком x1 к выражениям с заголовком x2 и не имеет существенных антецедентов. Пример:

   $\forall_a(a - \text{rational}\ \&\ \neg(a = 0) \to \text{числитель}(1/a) = \text{знаменатель}(a))/$

   Характеристика - "заголовок(числитель знаменатель)".

2. коммутативно(x1). Тождество преобразует некоммутативную двуместную операцию в операцию с коммутативно-ассоциативным заголовком и хотя бы двумя неконстантными операндами. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{bcf}(b - \text{set} \mathbin{\&} c - \text{set} \mathbin{\&} f - \text{set} \rightarrow b \setminus c \cup b \setminus f = b \setminus (c \cap f))$

   Характеристика - "коммутативно(первыйтерм)".

Выражение с неизвестными

1. нормглуб(x1 x2). Тождество уменьшает глубину вхождения переменной x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{cdefi}(c{-}\text{число} \mathbin{\&} d{-}\text{число} \mathbin{\&} e{-}\text{число} \mathbin{\&} f{-}\text{число} \mathbin{\&} i{-}\text{число} \mathbin{\&} \neg(f = 0) \mathbin{\&} \neg(c = 0) \mathbin{\&} i - \text{rational} \mathbin{\&} \neg(\text{знаменатель}(i) - \text{even}) \mathbin{\&} d - \text{rational} \mathbin{\&} \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \rightarrow e/(fc^{di}) = e(1/c^d)^i/f)$

   Характеристика - "нормглуб(i второйтерм)".

2. глубина(x1 x2). Тождество перестановочного типа уменьшает глубину переменной x1 до единицы. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \mathbin{\&} 0 < a \mathbin{\&} b - \text{число} \rightarrow (1/a)^b = 1/a^b)$

   Характеристика - "глубина(b первыйтерм)".

3. нормнеизв(x1 x2). Теорема представляет собой тождество, которое можно использовать для уменьшения числа вхождений неизвестной x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{acegh}(\neg(c = 0) \mathbin{\&} \neg(\text{знаменатель}(e) - \text{even}) \mathbin{\&} 0 < g \mathbin{\&} a - \text{число} \mathbin{\&} a - a - \text{число} \mathbin{\&} c - \text{число} \mathbin{\&} e - \text{число} \mathbin{\&} g - \text{число} \mathbin{\&} h - \text{число} \mathbin{\&} e - \text{rational} \rightarrow hg^{e-a}(-1)^e/c = h(-g)^e/(cg^a))$

   Характеристики - "нормнеизв(e второйтерм)", "нормнеизв(g первыйтерм)".

4. упростить(x1 x2). Тождество, исключающее сложную операцию над неизвестным выражением с помощью равенства из посылок. x1 - направление замены, x2 - результирующий подтерм с неизвестными. Пример:

   $\forall_{abcdepq}(a{-}\text{число} \mathbin{\&} b{-}\text{число} \mathbin{\&} c{-}\text{число} \mathbin{\&} d{-}\text{число} \mathbin{\&} m{-}\text{число} \mathbin{\&} p{-}\text{число} \mathbin{\&} 0 \leq a + b \mathbin{\&} \neg(c = 0) \mathbin{\&} e - d + bc = mp^2 \mathbin{\&} ac + d = e \rightarrow \sqrt{a + b} = \sqrt{m/c}|p|)$

   Характеристика - "упростить(второйтерм p)". В приеме, созданном по этой теореме, последний антецедент идентифицируется с равенством из посылок, предпоследний - выделен указателем "идентификатор", а его левая часть обрабатывается нормализатором разложения на множители. Теорема выведена специально для создания такого приема.

5. тригнеизв. Тождество для выражения одного неизвестного унифицируемого аргумента через другой. Пример:

   $\forall_{axy}(x - \text{число} \mathbin{\&} y - \text{число} \mathbin{\&} x + y = a \rightarrow \sin x = \sin a \cos y - \cos a \sin y)$

6. нормгрупп(x1 x2). Тождество группировки относительно сложного выражения с неизвестной, подготавливающей возможность применения эквивалентного преобразования, исключающего это выражение. x1 - список фильтров, уточняющих контекст; x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdefgh}(a = fg \ \& \ e = fh \to ab^{c/d} + eb^{c/d} = f(g+h)b^{c/d})$

   Фактически, это квазипротокол. Поэтому отсутствуют сопровождающие антецеденты. Характеристика - "нормгрупп(не(известно(b)) или(контекст(подтерм(равно(теквожд x9)) корень) и(тип(описать) контекст(операнд(x9 теквхожд) корень(x9) символ(x9 меньше меньшеилиравно) не(сопровождение(x9))))) меньше(оценканеизв(x7) 5) меньше(оценканеизв(x8)5) второйтерм)".

7. опрнеизв(x1). Тождество, позволяющее определить значение неизвестного выражения с помощью равенства из посылок. x1 - список номеров антецедентов, идентифицируемых с посылками. Пример:

   $\forall_{abp}(a - \text{число} \ \& \ p - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(p) - \text{even} \ \& \ |a| = b \to a^p = b^p)$

   Предполагается, что прием будет проверять наличие неизвестных в a и отсутствие их в b. Характеристика - "опрнеизв(4)".

8. исключнеизв(x1). Тождество, позволяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенств из посылок. x1 - список номеров антецедентов, идентифицируемых с посылками. Пример:

   $\forall_{abmnxy}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ \neg(y = 0) \ \& \ \neg(n = 0) \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ ax + by = 0 \to mx/(ny) = bm/(an))$

   Предполагается, что прием будет проверять наличие неизвестных в x, y и отсутствие их в a, b. Отличие от предыдущего пункта состоит в том, что здесь содержащих неизвестные исключаемых подвыражений несколкьо. Характеристика - "исключнеизв(десять)".

9. смнеизв(x1 x2 x3). Тождество, упрощающее относительно неизвестных заданный корневой операнд преобразуемого выражения. x1 - направление замены, x2 - номер корневого операнда, x3 - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст. Пример:

   $\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \ \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \to (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$

   Тождества данного типа используются при выводе теорем. В данном случае - с целью получения эквивалентности возведения обеих частей уравнения в степень для исключения дробных степеней. Характеристика - "смнеизв(второйтерм 1 и(тип(описать) условие известно(c) не(известно(a))натуральное(d) или(натуральное(c)известно(b))))".

10. значениепеременной. Тождество, у которого в одной части находится переменная, не входящая в противоположную часть. Пример:

    $\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \to [a] = n)$

11. вартеор(x1). Тождество для выражения вида $f(A\ldots)$, где $f(x\ldots)$ встречается в эквивалентностях разрешения относительно x утверждений с более чем одним вхождением неизвестной. Операция f некоммутативна. Подвыражение A имеет наибольшую оценку сложности в заменяемой части. Оно не входит в заменяющую часть, причем наибольшая оценка сложности подвыражений заменяющей части - такая же, как для заменяемой. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow (a^b)^c = a^{bc})$

    Характеристика - "вартеор(второйтерм)". Она инициирует срабатывание приема вывода теорем, варьирующего эквивалентности для разрешения уравнений.

12. компонента(x1). Тождество, выражающее неизвестную компоненту x1 известного объекта через этот объект и другие его параметры. Пример:

    $\forall_{Aabc}(A\text{—set} \ \& \ a\text{—слово} \ \& \ b\text{—слово} \ \& \ c\text{—слово} \ \& \ A = \{;a\} \ \& \ \{;b\} \subseteq \{;a\} \ \& \ \{;c\} = \{;a\} \setminus \{;b\} \rightarrow \{;b\} = \ A \setminus \{;c\})$

    Прием, основанный на данной теореме, применяется в задачах на исследование, имеющих цель "известно". Выражение A не содержит неизвестных, а выражение b - содержит. Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Он усматривает, что неизвестный список b является подмножеством известного списка a. После этого список b представляется как разность известного списка и своего дополнения до него, предварительно обработанного нормализатором.

    Характеристика - "компонента(перечень(b))".

Перегруппировочные тождества

1. перестановка. Теорема представляет собой тождество перестановочного типа. Пример:

    $\forall_{cde}(\neg(c-1=0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e\log_c d = \log_c(d^e))$

    Заметим, что это же самое тождество одновременно рассматривается и как тождество общей стандартизации в направлении справа налево.

2. ассоциативно(x1). Теорема представляет собой тождество, не изменяющее сложности терма, но обеспечивающее переход к ассоциативно-коммутативному заголовку. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abf}(\neg(a-1=0) \ \& \ \neg(b-1=0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow f\log_b a = f/\log_a b)$

    Характеристика - "ассоциативно(первыйтерм)".

3. замещение(x1). Теорема представляет собой тождество стандартизирующей разгруппировки для ассоциативно-коммутативных операций. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{ab}(a - \text{комплексное} \ \& \ b - \text{комплексное} \rightarrow \mathrm{Im}(a+b) = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b))$

    Характеристика - "замещение(второйтерм)".

4. группировки. Тождество с бесповторными частями, имеющими одинаковые множества переменных. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -ab = (-a)b)$

5. коммутвхождение(x1). Тождество переставляет некоторый подтерм на другое место (быть может, с изменением порядка операндов некоторой его операции), после чего этот подтерм становится возможным вынести наружу как операнд ассоциативно - коммутативной операции. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \sin((-1)^n a) = (-1)^n \sin a)$

   Наружу выносится степень минус единицы. Характеристика - "коммутвхождение(второйтерм)".

6. варьир(x1 x2 x3). Тождество для варьирования сложного терма. x1 - направление замены, x2 - исходная версия терма, x3 - новая версия. Пример:

   $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq \pi - a \rightarrow \sin a = \sqrt{1 - (\cos a)^2})$

   Характеристика - "варьир(второйтерм синус(a) косинус(a))".

7. вароценка(x1). Тождество для варьирования стандартного представления. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcpq}(p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \neg(\text{скалумнож}(a, c) = 0) \ \& \ \text{скалумнож}(b, c) = 0 \rightarrow p \cdot \text{вектумнож}(b, c) + qc = (p \cdot \text{скалумнож}(c, c)/\text{скалумнож}(a, c))\text{вектумнож}(b, a) + (q - \text{скалумнож}(a, \text{вектумнож}(c, b))p/\text{скалумнож}(a, c))c)$

   Переход от представления вектора в виде линейной комбинации векторов "вектумнож(a, c)" и "c" к его представлению в виде линейной комбинации векторов "вектумнож(b, a)" и "c". Характеристика - "вароценка(второйтерм)".

8. вхождперем(x1). Тождество для перенесения сложного выражения на более удобное место. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abdeghi}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e + hg^{i/2} = 0) \ \& \ \neg(hg^{i/2} - e = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ 0 \leq g \rightarrow d(hg^{i/2} - e)^b/(a(g^i h^2 - e^2)^b) = d/(a(e + hg^{i/2})^b))$

   Характеристика - "вхождперем(первыйтерм)". Радикал из знаменателя переносится в числитель. Числитель предпочтительнее знаменателя, так как при сложении дробных выражений подтермы знаменателей увеличивают число вхождений, а числителей - не увеличивают.

9. измзнака(x1). Тождество выражает одну двуместную операцию с зависимыми операндами через другую двуместную операцию от тех же операндов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_x(\sin x \cos x = ((\sin x + \cos x)^2 - 1)/2)$

   Характеристика - "измзнака(второйтерм)". Произведение синуса и косинуса выражается через их сумму.

10. функаргумент(x1). Тождество для группировки функциональных переменных вглубь. Пример:

    $\forall_{ABfpq}$(группоид(A) & группоид(B) & гомоморфизм(f, A, B) & $p \in$ носитель(A) & $q \in$ носитель$(A) \rightarrow f$(операция$(A)(p, q)) =$ операция$(B)(f(p), f(q)))$

    Характеристика - "функаргумент(второйтерм)".

11. варьиртерма(x1). Попытка варьирования выражения для преобразования надвыражения. x1 - фильтр, уточняющий контекст целесообразности попытки. Пример:

    $\forall_{apqr}(p \arcsin(a/\sqrt{1+a^2}) + q = r \rightarrow p \operatorname{arctg} a + q = r)$

    Характеристика - "варьиртерма(или(входит(арксинус q)входит(арккосинус q)))". Теорема представляет собой квазипротокол. На ней основан прием, обрабатывающий левую часть антецедента задачей на упрощение и проверяющий, что результат стал короче заменяемого выражения. Наличие арксинуса либо арккосинуса во втором слагаемом делает вероятной возможность использования формул сложения.

12. стандлогарифм(x1 x2 x3). Тождество для варьирования стандартизируемого операнда. x1, x2 - выражения для исходной и новой версий этого операнда, x3 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abc}(\neg(a-1=0)$ & $\neg(c-1=0)$ & $0<a$ & $0<b$ & $0<c$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число $\rightarrow \log_a b/\log_a c = \log_c b)$

    Характеристика - "стандлогарифм(c a первыйтерм)".

13. тригаргумент(x1). Тождество, преобразующее терм с двумя операциями от переменных, представляющих собой унифицируемые аргументы, в терм, имеющий два новых выражения с унифицируемыми аргументами, отличающимися от исходных. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow \sin a \cos b = (\sin(a-b) + \sin(a+b))/2)$

    Характеристика - "тригаргумент(второйтерм)".

Характеристики, связанные с использованием тождества в нормализаторах

1. Нормализатор общей стандартизации.

    (a) Исключприем(x1). Прием нормализатора общей стандартизации, исключающий с помощью равенства из посылок символы списка x1. Пример:

    $\forall_{ABCf}(A -$ set & $B -$ set & $f -$ функция & Отображение(f, A, B) & Val$(f) = C \rightarrow$ образ$(f, A) = C)$

    Характеристика - "Исключприем(значения образ область)".

(b) корнвхожд. Одновременная обработка всех корневых операндов нормализатора общей стандартизации. Пример:

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow -b - c = -(b + c))$$

(c) стандимплик(x1). Прием нормализатора общей стандартизации, использующий посылку. x1 - номер антецедента, идентифицируемый с посылкой. Пример:

$$\forall_{ac}(a - c = 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow c - a = 0)$$

Характеристика - "стандимплик(1)".

(d) допнеизв(x1). Прием нормализатора общей стандартизации, срабатывающий при наличии специальных комментариев. x1 - список комментариев, наличие хотя бы одного из которых необходимо дл срабатывания приема. Пример:

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d + (a + b)c = d + ac + bc)$$

Характеристика - "допнеизв(стандплюс)". Комментарий "стандплюс" передается нормализатору при преобразованиях определителей n-го порядка, а также при свертке термов.

(e) стандтаблица. Прием нормализатора общей стандартизации, использующий специальную стандартизацию подвыражения. Пример:

$$\forall_{abcdefgh}(h = (b + c)^g e/f + d \rightarrow a^{(b+c)^g e/f+d} = a^h)$$

Прием обрабатывает правую часть антецедента нормализатором "стандплюс", преобразуя показатель степени к виду суммы. Такое преобразование - стандартизация степеней, принятая практически на всех этапах решения задач.

(f) константа(x1 x2 x3). Стандартизация константного выражения в нормализаторе общей стандартизации. x1 - направление замены, x2 - название оператора, x3 - набор указателей "типданных(a xi)" типов констант. Обычно такая теорема является квазипротоколом. Пример:

$$\forall_{abcd}(c = a + b \rightarrow a + b + d = c + d)$$

Характеристика - "константа(servicecontext второйтерм нормплюс типданных(констдробь x1) типданных(десчисло x2))".

2. Нормализатор стандартной формы.

(a) станд(x1 x2). Теорема может быть использована для упрощения выражений в стандартной форме x1. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ \_\text{set} \ \& \ a \subseteq b \rightarrow a \cup b = b)$$

Характеристика - "станд(стандобъединение второйтерм)".

(b) стандформа(x1 x2). Теорема используется для приведения к виду стандартной формы x1. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b)$$

Характеристика - "стандформа(стандплюс второйтерм)".

(c) тожд(x1). Теорема представляет собой исходное тождество, используемое для получения упрощающих тождеств стандартной формы x1 в циклах логического вывода. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b \ \vee \ a \cdot \neg b = a)$

Характеристика - "тожд(станддн)".

(d) стандномера(x1 x2 x3). Вычисления с константами в нормализаторе x2 стандартной формы. x1 - направление замены. x3 - набор указателей "типданных(a xi)" типов констант. Пример:

$\forall_{abcd}(c = a + b \rightarrow a + b + d = c + d)$

Характеристика - "стандномера(второйтерм стандплюс типданных(десчисло x1) типданных(десчисло x2))".

(e) стандкомпл(x1 x2). Тождество специальной стандартизации в нормализаторе x1 стандартной формы. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{bde}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow (d \times b) \setminus (e \times b) = (d \setminus e) \times b)$

Характеристика - "стандкомпл(стандобъединение второйтерм)".

3. Нормализатор приведения к заданным заголовкам.

(a) факторизация(x1 x2). Теорема получена в цикле вывода тождеств приведения к заголовку x1. x2 - направление замены.

Характеристика используется лишь в самом цикле вывода и инициирует применение новых приемов вывода теорем. В базе теорем она не встречается.

(b) нормзаголовок(x1 x2). Теорема представляет собой тождество, которое можно использовать для нормализатора x1 преобразования к заданным заголовкам. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd)$

Характеристика - "нормзаголовок(видумножение первыйтерм)".

(c) цели(x1 x2). Усиленное приведение к заданным заголовкам в нормализаторе x1 при наличии специального комментария. x2 - элементы, образующие комментарий. Пример:

$\forall_{abx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow ax^3 + b = (\sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}x^2 - \sqrt[3]{a}x\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}))$

Характеристика - "цели(видумножение нормИнтеграл x)". В обычной ситуации может быть применена формула для суммы кубов, не приводящая к радикалам третьей степени. Однако, при интегрировании их возникновение несущественно, если только эти радикалы не содержат переменную интегрирования.

(d) нормплс(x1 x2 x3). Вычисления с константами в нормализаторе x2 приведения к заданным заголовкам. x1 - направление замены. x3 - набор указателей "типданных(a xi)" типов констант. Пример:

$\forall_{abcd}(c = a + b \rightarrow a + b + d = c + d)$

Характеристика - "нормплс(второйтерм видумножение типданных(десчисло a) типданных(десчисло b))".

(e) предоперанд(x1 x2). Преобразование в нормализаторе x1 приведения к заданным заголовкам, подготавливающее переход к этим заголовкам. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abc}(c\sqrt{3}\sin a + c\cos a + b = 2\sin(a + \pi/6) + b)$

Характеристика - "предоперанд(видумножение второйтерм)". Прием проверяет, что слагаемое b имеет вид $2c\sin(\ldots)$ либо $2c\cos(\ldots)$. Теорема представляет собой квазипротокол, созданный специально для данного преобразования. Характеристика не содержит всей необходимой для создания приема информации и требует последующего развития.

(f) корнимн(x1 x2). Корневая свертка в нормализаторе x1 приведения к заданным заголовкам. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b)$

Характеристика - "корнимн(видумножение первыйтерм)".

(g) выражения(x1 x2). Попытка варьирования выражения в нормализаторе x1 приведения к заданным заголовкам. Пример:

$\forall_{abcdempq}(p\sin b = \sin(3d) \ \& \ q = (-4a(\sin d)^3 + 3a\sin d)/p + c(\sin d)^m + e \rightarrow a\sin b + c(\sin d)^m + e = q)$

Теорема представляет собой квазипротокол, выведенный из формулы синуса тройного аргумента. Первый антецедент сравнивает два выражения, обработанных нормализаторами общей стандартизации. Множитель p учитывает возможность минуса. Левая часть второго антецедента обрабатывается сначала нормализаторами общей стандартизации, а затем - нормализатором "видумножение". Созданный по теореме прием выполняет замену, если q - произведение, степень либо дробь. Характеристика - "выражения(видумножение второйтерм)".

(h) преобразовать(x1). Обращение к вычислителному пакету в нормализаторе x1 приведения к заданным заголовкам. Пример:

$\forall_{abcfgnpxy}(a+b = f(x) \ \& \ f = \text{многочлен}(y, \text{Целые}, c) \ \& \ f = \text{произведениевсехмн}(g) \ \& \ l(g) = n \ \& \ p = \prod_{i=1}^{n} g(i)(x) \rightarrow a + b = p)$

Теорема представляет собой квазипротокол. По нему создан прием, использующего пакет продукций "множителимн" для разложения на множители многочлена с целыми коэффициентами от одной переменной. Характеристика - "преобразовать(видумножение)".

(i) Стандартизация(x1). Предварительная стандартизация в нормализаторе x1 приведения к заданным заголовкам. Примеры:

$\forall_{abcde}(ad/c+bd/c+e=(a+b)d/c+e)$

$\forall_{abcdef}(f = c$ & $d -$ rational & $\neg$(знаменатель(d) $-$ even) $\rightarrow a+bc^d/e = a+bf^d/e)$

Обе теоремы суть квазипротоколы. Во второй теореме правая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "видумножение". Характеристика - "Стандартизация(видумножение)".

4. Нормализатор сокращенной перезаписи.

   (a) сокращднф(x1 x2 x3). Вычисления с константами в нормализаторе x2 сокращенной перезаписи. x1 - направление замены. x3 - набор указателей "типданных(a xi)" типов констант. Пример:

   $\forall_{abcdepqr}(a=pr$ & $c=qr \rightarrow ab+cd=r(pb+qd))$

   Характеристика - "сокращднф(второйтерм упрощплюс типданных(натуральное a) типданных(натуральное c))".

5. Нормализатор вычисления.

   (a) Варотр(x1 x2). Попытка варьирования выражения в нормализаторе вычисления x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{afg}(\lim_{x\rightarrow b\backslash c}\ln(f(x)/g(x))=a \rightarrow \lim_{x\rightarrow b\backslash c}(\ln f(x)-\ln g(x))=a)$

   Характеристика - "Варотр(нормпредел второйтерм)". Предпринимается попытка вычислить предел логарифма дроби, и в случае успеха выдать его как результат.

   (b) откат(x1). Разбор случаев в нормализаторе вычисления x1. Пример:

   $\forall_{abcfx}(\lim_{x\rightarrow b\backslash a} f(x)=0 \rightarrow \lim_{x\rightarrow b\backslash a}(f(x)^c)=$ разборслучаев$(0<c \ \vee \ c<0 \ \vee \ c=0))$

   Характеристика - "откат(нормпредел)".

   (c) стандстепень(x1 x2). Стандартизация в нормализаторе вычисления x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(\mathrm{set}_{yx}(y=ax/b$ & $x -$ число$)=\mathrm{set}_{yx}(ax-by$ & $x -$ число & $y -$ число$))$

   Характеристика - "стандстепень(нормкоорд второйтерм)". Уравнение прямой преобразуется к стандартному виду.

   (d) отказ(x1). Выдача отказа в нормализаторе вычисления x1. Пример:

   "длялюбого(x1 равно(x1 отказ))".

   Характеристика - "отказ(асимптоценка)". Теорема представляет собой квазипротокол, необходимый для создания приема, осуществляющего выдачу отказа, если в процессе получения асимптотической оценки преобразования привели к терму, который нецелесообразно выдавать в качестве ответа (например, терм имеет вид "$O(t)$"). Характеристика не дает полной информации для создания приема и требует развития.

(e) комментарий(x1). Передача комментария внешнему процессу в нормализаторе вычисления x1. Пример:

$\forall_{abdefg}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ 0\leq b\ \&\ \lim_{c\to g\setminus f} d(c)=\infty\ \&\ (c\to g\setminus f)\to$ контекст$(ab^{d(c)}+e))$

Характеристика - "комментарий(асимптоценка)". Прием, получающий асимптотическую оценку для терма, содержащего подвыражение $ab^{d(c)}+e$, усматривает, что показатель степени стремится к бесконечности, и передает текущей задаче комментарий, который впоследствии (при получении отказа нормализаторов) может организовать необходимый разбор случаев по основанию степени. Характеристика неполна и требует развития.

Тождества, используемые при выводе теорем для обобщений

В этом разделе собраны типы тождеств, используемые приемами вывода теорем для обобщения промежуточных теорем, получаемых в циклах логического вывода. Сами приемы будут описаны в последующих томах монографии.

1. обобщмножитель. Тождество вида $f(g(x,y),z)=f(x,h(y,z))$, где коммутативная операция h имеет единицу по переменной y. Пример:

   $\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-$число $\&\ d-$число $\&\ e-$число $\to d/(ae)=(d/e)/a)$

2. обобщслагаемое. Тождество вида $f(x,g(y,z))=h(f(x,y),z)$, где операции g,h имеют общую единицу по переменной z. Пример:

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b\ \&\ e-$ число $\to e(a/b)=(ae)/b)$

Теоремы для вывода уравнений

Теоремы данного подраздела обычно представляют собой квазипротоколы, созданные специально для приема заданного типа. Сопровождающие их характеристики заведомо неполны и требуют доработки. Пока это лишь временные "заглушки".

1. Исключение. Вывод следствия из более чем двух уравнений для исключения неизвестных подвыражений. Пример:

   $\forall_{abcdefpqr}(a-b+d=p\ \&\ b-c+e=q\ \&\ c-a+f=r\to d+e+f=p+q+r)$

   В задаче на исследование выводится следствие из трех уравнений, в котором исключены содержащие неизвестные подвыражения a,b,c.

2. линейно. Вывод следствия из численных уравнений, более простого относительно некоторой неизвестной. Пример:

   $\forall_{abcdefgh}(ag+b=c\ \&\ ah+d=e\ \&\ f=bh-dg-ch+eg\to f=0)$

   Первые два антецедента идентифицируются с уравнениями задачи на исследование. Выражение a не линейно относительно некоторой неизвестной x, а выражения b,d - линейны. Выражения g,h этой неизвестной не содержат. Правая часть третьего антецедента упрощается. Результат f содерожит неизвестную x и линеен относительно нее.

3. сложный. Вывод следствия из численных уравнений для исключения сложного неизвестного подвыражения. Пример:

   $\forall_{abcdefghij}(i = gd \ \& \ h = ga \ \& \ h\sin j + b = c \ \& \ i\cos j + e = f \rightarrow a^2g^2d^2 - a^2(f - e)^2 - d^2(c - b)^2 = 0)$

   Два последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование либо на доказательство. Выражение j содержит неизвестные. Чтобы его исключить, используется тождество для суммы квадратов синуса и косинуса.

4. разделитель. Вывод следствия из нескольких численных уравнений для последующего разделения неизвестных. Пример:

   $\forall_{abcd}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ d -$ число $\& \ a + b = 0 \ \& \ c + d = 0 \rightarrow ac - bd = 0)$

   Данный пример единственный, причем фактически вся информация о цели вывода содержится не в самой теореме, а в фильтрах приема. Предполагается, что a имеет вид $A\varphi(p + q)$, а c - вид $B\psi(p - q)$, где каждый из символов φ, ψ - синус либо косинус, причем выражения p, q содержат неизвестные. В левой части выводимого равенства предпринимается раскрывание скобок с переходом от произведения тригонометрических функций к их суммам. При этом происходит разделение выражений p, q - они оказываются аргументами различных тригонометрических операций. Чтобы перенести эту информацию в теорему, существуют два пути: либо вместо одной теоремы создать четыре, для различных сочетаний "φ - ψ", либо оставить теорему без изменений, но существенно дополнить ее характеристику. Так как теорема должна быть создана программирующим логическим выводом для указанной цели (разделения p, q путем перехода от произведения тригонометрических функций к их сумме), то уже на момент ее создания вся дополнительная информация будет известна, и второй способ вполне допустим.

5. стандследствие(x1). Применение нормализатора стандартной формы для вывода следствия из уравнения. Пример:

   $\forall_{abcdep}(p = a(b + c) + d \ \& \ a(b + c) + d = e \rightarrow p = e)$

   Характеристика - "стандследствие(стандплюс)". Созданный по теореме прием выводит результат раскрывания скобок в уравнении - посылке задачи на исследование либо на доказательство. Предполагается, что сумма $b + c$ содержит неизвестные.

6. определитель(x1). Усмотрение значения неизвестной x1 из нескольких уравнений. Пример:

   $\forall_{abx}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ x -$ число $\& \ 0 < x + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - x \ \& \ \sin x = a \ \& \ \cos x = b \rightarrow x = \mathrm{Sg}(a)\arccos(b))$

   Оба уравнения - для синуса и для косинуса - позволяют уточнить знак аргумента. Характеристика - "определитель(x)".

Тождества с невырожденными числовыми атомами

Невырожденные числовые атомы - простейшие численные характеристики нечисловых объектов - $l(AB)$, $\angle(ABC)$, "масса(a)", и т.п. Для алгоритмизации теорем с такими атомами понадобились свои типы приемов.

1. числовойатом. Тождество для невырожденных числовых атомов. Пример:

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B) \to \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi)$

2. пропорция(x1 x2). Соотношение пропорциональности для числовых атомов x1,x2. Пример:

   $\forall_{ABCDE}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ c \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC)) \to l(AD)l(AC) = l(AE)l(AB))$

   Характеристики - "пропорция($lAD\ l(AE)$)", "пропорция($lAD\ l(AB)$)", "пропорция($lAC\ l(AE)$)", "пропорция($lAC\ l(AB)$)".

3. фикспарам. Тождество для невырожденных числовых атомов, один из численных параметров которого определяется равенством для числового атома в антецедентах. Пример:

   $\forall_{ABCa}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \angle(ABC) = a \to \sin(\angle(BAC) + a)l(AC) = \sin al(AB))$

   Теорема представляет собой квазипротокол и создана для приема, предпринимающего попытку вычислить значение угла ABC с помощью специального нормализатора. Результат a не содержит неизвестных.

4. пропорцатомы. Тождество для невырожденных числовых атомов, у которого два численных параметра определяются соотношением пропорциональности в антецедентах. Пример:

   $\forall_{ABCab}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ al(AC) = bl(BC) \to \sin(\angle(BAC))b = \sin(\angle(BAC) + \angle(ACB))a)$

   Теорема представляет собой квазипротокол и создана для приема, предпринимающего попытку усмотреть с помощью синтезатора "пропорциональны" не содержащие невырожденных числовых атомов коэффициенты пропорциональности a, b.

5. Упрощение либо исключение невырожденных числовых атомов.

   (a) числатом. Тождество выражает сложный числовой атом через более простые. Пример:

      $\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b)\ \&\ \text{непересек}(a, b) \to \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$

(b) числатомы(x1). Тождество, выражающее терм с невырожденными числовыми атомами через численные параметры. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCKabcdef}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (a, b, c)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (d, e, f) \to \cos(\angle(BAC)) = (ad+be+cf)/(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot\sqrt{d^2 + e^2 + f^2}))$

Характеристика - "числатомы(второйтерм)". Заметим, что данную характеристику имеют также многие "чисто геометрические" теоремы, у которых численные параметры появляются либо за счет вспомогательных вычислений в антецедентах, либо вследствие непосредственной идентификации с посылками, имеющими численные параметры (например, с соотношениями пропорциональности).

(c) числпарам(x1). Тождество, использующее равенство из контекста для выражения числового атома через численные параметры. x1 - номер антецедента, идентифицируемого с равенством, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{Kav}(\text{вправо}(v, K)\ \&\ \text{длина}(v) = a \to \text{крд}(v, K, 1) = a)$

Характеристика - "числпарам(2 второйтерм)".

(d) числперем. Тождество было выведено специально для выражения невырожденного числового атома через другие числовые атомы, если они выразимы через численные параметры. Пример:

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to l(BC) = \sqrt{l(AB)^2 + l(AC)^2 - 2l(AB)l(AC)\cos\angle(BAC)})$

(e) имплик. Кванторная импликация, консеквентом которой служит кванторное тождество, выражающее невырожденный числовой атом через численные параметры. Пример:

$\forall_{AQnp}(n - \text{целое}\ \&\ p - \text{функция}\ \&\ A - \text{функция}\ \&\ \mathrm{Dom}(A) = \{1, \ldots, n\}\ \&\ \text{верпространство}(Q)\ \&\ \mathrm{Val}(A) \subseteq \text{события}(Q)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{услвероятн}(A(i), \bigcap_{j=1}^{i-1} A(j), Q) = p(i)) \to \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{вероятность}(A(i), Q) = \prod_{j=1}^{i} p(j)))$

(f) опратом(x1). Тождество, позволяющее определить числовой атом x1 при помощи равенства в посылках, фиксирующего значение более сложного числового атома. Пример:

$\forall_{ABCDEa}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, D)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, E)\ \&\ \text{скалумнож}(\text{вектор}(AD), \text{вектор}(AE)) = a \to a = \cos(\angle(BAC))l(AD)l(AE))$

Характеристика - "опратом($\angle(BAC)$)". Последний антецедент идентифицируется с равенством в посылках, фиксирующим значение скалярного произведения. Теорема выводится программирующим выводом специально для такого приема.

(g) вычислениеугла(x1). Вычисление значения невырожденного числового равенства с помощью нормализатора x1 и вывод равенства для его значения. Пример:

$\forall_{ABCapq}(\text{актив}(S(\text{фигура}(ABC))) \mathbin{\&} S(\text{фигура}(ABC)) = a \mathbin{\&} S(\text{фигура}(ABC)) = p \mathbin{\&} p = q \to S(\text{фигура}(ABC)) = q)$

Теорема представляет собой квазипротокол, созданный специально для приема вывода следствий в посылках. Прием инициируется первым антецедентом. Далее идут подряд два антецедента, роль которых - обеспечить развязку для обработки площади ABC двумя различными нормализаторами. Сначала площадь передается переменной a, которая будет обрабатываться нормализатором общей стандартизации, и фильтры проверят, что результат содержит неизвестные. Затем площадь (неизмененная) передается переменной p, которая обрабатывается нормализатором вычисления площади "вычплощадь", а результат (см. последний антецедент) передается переменной q. После проверки того, что этот результат не содержит неизвестных, формируется выводимое равенство. Описанная схема применяется и в других приема, основанных на теоремах с данной характеристикой.

Характеристика - "вычислениеугла(вычплощадь)".

(h) числсвяз. Тождество, позволяющее связать невырожденный числовой атом с непосредственно идентифицируемыми численными параметрами. Пример:

$\forall_{ABCab}(a-\text{число} \mathbin{\&} b-\text{число} \mathbin{\&} A-\text{точка} \mathbin{\&} B-\text{точка} \mathbin{\&} C-\text{точка} \mathbin{\&} \neg(A = C) \mathbin{\&} \neg(A = B) \mathbin{\&} bl(AB) = al(AC) \mathbin{\&} \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to a = b\,\mathrm{tg}(\angle(ACB)))$

Соотношение пропорциональности идентифицируется с посылкой.

(i) числнеизв. Тождество, выражающее числовой атом из уравнения в посылках. Пример:

$\forall_{ABCabc}(\neg(a = 0) \mathbin{\&} a\angle(ABC) + b = c \to \angle(ABC) = (c - b)/a)$

(j) извлечпарам(x1). Тождество, выражающее невырожденный числовой атом с помощью явно указанных в антецедентах значений других числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDab}(A - \text{точка} \mathbin{\&} B - \text{точка} \mathbin{\&} C - \text{точка} \mathbin{\&} D - \text{точка} \mathbin{\&} \neg(A = D) \mathbin{\&} \neg(A = C) \mathbin{\&} \neg(A = B) \mathbin{\&} \angle(BAC) = a \mathbin{\&} \angle(CAD) = b \mathbin{\&} \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(AC)) \to \angle(BAD) = |a - b|)$

Характеристика - "извлечпарам(второйтерм)".

6. Вывод равенства с числовыми атомами.

(a) числовоеравенство. Вывод равенства для числовых параметров нечисловых объектов. Пример:

$\forall_{ABfg}(\text{плотнраспред}(A, B) = \lambda_t(f(t), g(t)) \mathbin{\&} \text{матожидание}(A, B) = a \to a = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt)$

(b) стандчисло(x1). Вывод стандартизирующего равенства, выражающего невырожденный числовой атом через однотипные атомы. Пример:

$\forall_{abcdpqxy}(a-\text{число} \mathbin{\&}_{-}\text{число} \mathbin{\&} c-\text{число} \mathbin{\&} x-\text{число} \mathbin{\&} [x+a, b] = p \mathbin{\&} [b, x+c] = q \to \text{длина}(q) = c - a - \text{длина}(p))$

Характеристика - "стандчисло(длина(q))".

(c) новатомы(x1). Вывод уравнения для новых числовых атомов с помощью уравнения для старых. x1 - номер антецедента, идентифицируемого со старым уравнением. Пример:

$\forall_{STapqr}(p -$ число & $q -$ число & $r -$ число & $T = [p, q]$ & $S = [r, q]$ & $r \in T$ & длина$([p, r]) = a \rightarrow$ длина$(S) =$ длина$(T) - a)$

Характеристика - "новатомы(7)".

(d) исключназвание(x1). Вывод комбинации двух уравнений с невырожденными числовыми атомами, исключающей некоторый атом первого уравнения. x1 - переменная для единственного остаточного терма, который может содержать невырожденные числовые атомы. Пример:

$\forall_{ABmnqrs}(m -$ число & $n -$ число & $r -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & $nl(AB)r = s$ & $m(l(AB))^2 r = q \rightarrow msl(AB) = nq)$

Характеристика - "исключназвание(s)". Теорема представляет собой квазипротокол. Основанный на нем прием проверяет, что r содержит отличный от $l(AB)$ и не входящий в s невырожденный числовой атом. Выражения m, n, q невырожденных числовых атомов не содержат.

(e) единстватом(x1 x2). Вывод комбинации уравнений с невырожденными числовыми атомами, устраняющей все такие атомы, кроме одного. x1 - переменная, идентифицируемая с термом, имеющим устраняемые атомы. x2 - список номеров антецедентов, идентифицируемых с уравнениями. Пример:

$\forall_{abcdefghjij}(i = gd$ & $h = ga$ & $h \sin j + b = c$ & $i \cos j + e = f \rightarrow a^2 g^2 d^2 - a^2(f - e)^2 - d^2(c - b)^2 = 0)$

Характеристика - "единстватом(j 3 4)". Теорема представляет собой квазипротокол, созданный специально для приема, выполняющего указанный вывод.

(f) числотобр. Вывод равенства, выражающего невырожденный числовой атом через численные параметры. Пример:

$\forall_{abx}($Вектор(a) & Вектор(b) & длина$(a) = x$ & $a + b =$ вектор0 $\rightarrow$ длина$(b) = x)$

Теорема является квазипротоколом. Два последних антецедента идентифицируются с посылками.

(g) выразить. Вывод соотношения для числовых атомов, которое можно выразить через координаты. Пример:

$\forall_{ab}($Вектор(a) & Вектор(b) & $a \perp b \rightarrow$ скалумнож$(a, b) = 0)$

(h) числа. Вывод комбинации уравнений с невырожденными числовыми атомами, дающей уравнение с численными параметрами. Пример:

$\forall_{abcdefpq}(a + b = de$ & $(a + b)f = c$ & $dp = q \rightarrow cp - qef = 0)$

Теорема является квазипротоколом, созданным для исключения невырожденного числового атома, входящего в выражение d. Предполагается, что выражения c, e, f, p, q таких атомов не содержат. С уравнениями идентифицируются два последних антецедента.

(i) исключатом. Тождество без невырожденных числовых атомов в консеквенте, имеющее в антецедентах несколько числовых равенств с невырожденными числовыми атомами. Пример:

$\forall_{ABabcd}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ al(AB) = b\ \&\ cl(AB) + d = 0 \rightarrow ad + bc = 0)$

7. Выражение одного числового атома через другие.

   (a) Числвыраз(x1). Тождество выражает численную характеристику операции над нечисловыми объектами через численные характеристики других операций над этими объектами. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABC}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ A \subseteq \text{элемсобытия}(C)\ \&\ B \subseteq \text{элемсобытия}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A \cup B, C) = \text{вероятность}(A, C) + \text{вероятность}(B, C) - \text{вероятность}(A \cap B, C))$

   Характеристика - "Числвыраз(второйтерм)".

   (b) числзнач. Тождество, в одной из частей которого расположен невырожденный числовой атом, не встречающийся в противоположной части, не являющейся числовым атомом, но содержащей невырожденные числовые атомы. Пример:

   $\forall_{ABCDE}(B{-}\text{точка}\ \&\ C{-}\text{точка}\ \&\ D{-}\text{точка}\ \&\ E{-}\text{точка}\ \&\ \text{центр}(A, \text{фигура}(BCDE))\ \&\ \text{квадрат}(BCDE) \rightarrow l(BC) = \sqrt{2}l(AB))$

   (c) варугол(x1). Тождество, позволяющее проварьировать способ задания числового атома. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCDE}(A{-}\text{точка}\ \&\ B{-}\text{точка}\ \&\ C{-}\text{точка}\ \&\ D{-}\text{точка}\ \&\ E{-}\text{точка}\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, C)\ \&\ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$

   Характеристики - "варугол(второйтерм)", "варугол(первыйтерм)".

   (d) функраспред(x1 x2). Тождество, выражающее невырожденный числовой атом через связанную с ним функциональную характеристику . x1 - выражение для функциональной характеристики H, такое, что в антецедентах имеется равенство вида $H = t$; x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABfab}(\text{верпространство}(B)\ \&\ \text{непрвеличина}(A, B)\ \&\ \text{плотнраспред}(A, B) = f\ \&\ a{-}\text{число}\ \&\ b{-}\text{число} \rightarrow \text{вероятность}(\text{прообраз}(A, [a, b]), B) = \int_a^b f(x)dx)$

   Характеристика - "функраспред(плотнраспред(A, B) второйтерм)".

8. Числпарам(x1). Тождество свертки в своей заменяемой части не имеет невырожденных числовых атомов, отличных от координатных, а в заменяющей - наоборот, имеет невырожденные числовые атомы, причем только некоординатные. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCKa}(a - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ A \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ \text{вправо}(\text{вектор}(BC), K)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow a \cdot \text{крд}(A, K, 1) - a \cdot \text{крд}(B, K, 1) = a \cdot l(AB))$

   Характеристика - "числпарам(второйтерм)".

9. Числзнач. Тождество, в одной части которого находится нечисловая переменная, а в другой - выражение ее через невырожденные числовые атомы. Пример:

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \to z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))))$

Нечисловые тождества

1. Равно. Нечисловое равенство. Пример:

   $\forall_{cef}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \to (c \cup f) \cap (e \cup f) = f \cup (c \cap e))$

2. текданные(x1). Нечисловое тождество, дающее выражение для заданного объекта x1. Пример:

   $\forall_{APfpq}(f = \text{функграфик}(A) \ \& \ \text{функционально}(A) \ \& \ A = \text{set}_x(\exists_y(x = (p(y), q(y)) \ \& \ P(y))) \to \text{Dom}(f) = \text{set}_x(\exists_y(x = p(y) \ \& \ P(y))))$

   Характеристика - "текданные(область(f))".

Тождества для атомарных выражений

Напомним, что выражение считается атомарным, если оно либо однобуквенное, либо тип его значения отличается от типов значений операндов.

1. равны. Равенство двух атомарных выражений. Пример:

   $\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ C \in \text{прямая}(DE) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \ \& \ F \in \text{прямая}(DE) \ \& \ \neg(C = F) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(DE))$

2. Атомарное(x1). Тождество для атомарных выражений типа x1. Пример:

   $\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \le a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \to a\cdot\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$

   Характеристика - "Атомарное(Вектор)".

3. равно. Равенство двух переменных либо конъюнкция таких равенств. Пример:

   $\forall_{ABE}(\text{эллипсоид}(E) \ \& \ \text{центр}(A, E) \ \& \ \text{центр}(B, E) \to A = B)$

Тождества с координатами

1. Координаты отдельных объектов.

   (a) систкоорд. Тождество для определения координат объекта. Пример:

   $\forall_{AEKabcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{парабола}(E) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{вершина}(A, E) \to \text{коорд}(A, K) = ((b^2 - 4ad)/(4ac), -b/(2a)))$

(b) коорд. Тождество для координат объектов. Сюда относятся тождества, в которых присутствуют переменные для каких-либо координат отдельных объектов, идентифицированные в антецедентах. В частности, допускаются тождества, выражающие координаты какого-либо объекта через координаты других объектов. Пример:

$\forall_{ABCDKabcd}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & прямкоорд(K) & $\neg(C=D)$ & $\neg(A=B)$ & коорд(вектор$(AB),K)=(a,b)$ & коорд(вектор$(CD),K)=(c,d)$ & прямая$(AB)\perp$ прямая$(CD)\rightarrow$ $ac+bd=0)$

(c) крд(x1). Тождество, в заменяемой части которого расположено выражение для отдельной координаты объекта. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABK}(A-$точка & $B-$точка & прямкоорд(K) & Трехмерн(K) & вперед(вектор$(AB),K)\rightarrow$ крд$(B,K,2)=$ крд$(A,K,2)+l(AB))$

Характеристика - "крд(второйтерм)".

(d) нормкрд. Равенство либо конъюнкция равенств, содержащих отдельные координаты. Пример:

$\forall_{AKabc}($Трехмерн(K) & $A-$точка & коорд$(A,K)=(a,b,c)\rightarrow$ крд$(A,K,1)=a$ & крд$(A,K,2)=b$ & крд$(A,K,3)=c)$

(e) новкадр. Тождество, выражающее координаты объекта в одной системе координат через его координаты в другой системе. Пример:

$\forall_{ABCDKQabcdefxy}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & сисккоорд(K) & сисккоорд(Q) & $K=(A,B,C)$ & коорд$(A,Q)=(a,b)$ & коорд(вектор$(AB),Q)=(c,d)$ & коорд(вектор$(AC),Q)=(e,f)$ & коорд$(D,K)=(x,y)\rightarrow$ коорд$(D,Q)=(a+xc+ye,b+xd+yf))$

(f) равнозначны. Вывод равенства для координат объекта, инициируемый равенством объектов. Пример:

$\forall ABKabc(c-$число & сисккоорд(K) & Вектор(B) & коорд$(B,K)=(a,b)$ & $A=cB\rightarrow$ коорд$(A,K)=(ac,bc))$

(g) компоненты(x1). Тождество, выражающее координаты сложного объекта через координаты его компонент. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABKi}(A-$ точка & $B-$ точка & Трехмерн(K) & $i\in\{1,2,3\}\rightarrow$ крд(вектор$(AB),K,i)=$ крд$(B,K,i)-$ крд$(A,K,i))$

Характеристика - "компоненты(второйтерм)".

2. Связь невырожденных числовых атомов с координатами.

(a) значпарам(x1). Тождество, выражающее невырожденный числовой атом через параметры координат. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Kabd}($прямкоорд(K) & Вектор(d) & коорд$(d,K)=(a,b)\rightarrow$ длина$(d)=\sqrt{a^2+b^2})$

Характеристика - "значпарам(второйтерм)".

(b) числкоэфф. Тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Пример:

$\forall_{ABCDK}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, D) & коорд(D, K) $= (a, b) \rightarrow l(AD) = al(AB)$)

3. Координаты множеств объектов.

(a) смлиния(x1). Тождество обеспечивает переход от координатного к бескоординатному заданию множества точек. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{AKabcdpr}$($a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & прямкоорд(K) & $\neg(a = 0)$ & $p = -d/a + (b^2 + c^2)/(4a^2)$ & $0 < p$ & $r = \sqrt{p} \rightarrow \mathrm{set}_A(A -$ точка & $\exists_{xy}(x -$ число & $y -$ число & коорд(A, K) $= (x, y)$ & $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$)) = окр(тчкоорд($K, (-b/(2a), -c/(2a))$)$, r$))

Характеристика - "смлиния(второйтерм)".

(b) сМлинии(x1). Тождество обеспечивает декомпозицию координатного задания множества точек. Пример:

$\forall_{KPQ}(P - \mathrm{set}$ & $Q - \mathrm{set}$ & прямкоорд(K) $\rightarrow \mathrm{set}_A(A -$ точка & $\exists_{xy}((x, y) =$ коорд(A, K) & $\neg((x, y) \in P)$ & $(x, y) \in Q$)) $= \mathrm{set}_A(A -$ точка & $\exists_{xy}((x, y) =$ коорд(A, K) & $(x, y) \in Q$)) $\setminus \mathrm{set}_A(A -$ точка & $\exists_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $(x, y) =$ коорд(A, K) & $(x, y) \in Q$)))

Характеристика - "сМлинии(второйтерм)".

(c) смточки(x1). Тождество для представления множества объектов с заданным условием на координаты через множество координат. x1 - направление замены.

$\forall_{KQpq}(Q - \mathrm{set}$ & $p -$ функция & $q -$ функция & систкоорд(K) $\rightarrow \mathrm{set}_a(\exists_t(A =$ тчкоорд($K, (p(t), q(t))$) & $t \in Q$)) = точки($\mathrm{set}_{xy}(\exists_t(t \in Q$ & $x = p(t)$ & $y = q(t))), K$))

Характеристика - "смточки(второйтерм)".

(d) уравнмножество. Тождество либо дизъюнкция тождеств, определяющих координаты заданного множества объектов.

$\forall_{ABEKabcp}(c -$ число & прямкоорд(K) & парабола(E) & вершина(A, E) & коорд(A, K) $= (a, b)$ & фокпараметр(E) $= p$ & направлпараболы(E, B) & коорд(B, K) $= (c, 0)$ & $\neg(c = 0) \rightarrow$ коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}((y - b)^2 - 2p\mathrm{sg}(c)(x - a) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

(e) числсвязь. Тождество без невырожденных числовых атомов, содержащее параметры уравнения для координат множества точек. Пример:

$\forall_{ABCDKabcdef}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & прямкоорд(K) & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = D)$ & коорд(прямая(AD)$, K$) $= \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & прямая(AD) $\perp$ прямая(BC) & коорд(прямая(BC)$, K$) $= \mathrm{set}_{uv}(du + ev + f = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) $\rightarrow ad + be = 0$)

(f) новконтекст. Тождество, выражающее координаты множества точек в одной системе координат через его координаты в другой системе. Пример:

$$\forall_{ABCKMTabcdefp}(A-\text{точка} \,\&\, B-\text{точка} \,\&\, C-\text{точка} \,\&\, \text{систкоорд}(K) \,\&\, \text{систкоорд}(T) \,\&\, T=(A,B,C) \,\&\, \text{коорд}(A,K)=(a,b) \,\&\, \text{коорд}(\text{вектор}(AB),K)=(c,d) \,\&\, \text{коорд}(\text{вектор}(AC),K)=(e,f) \,\&\, \text{коорд}(M,K)=\text{set}_{xy}(x-\text{число} \,\&\, y-\text{число} \,\&\, p(x,y)) \rightarrow \text{коорд}(M,T)=\text{set}_{xy}(x-\text{число} \,\&\, y-\text{число} \,\&\, p(a+cx+ey,b+dx+fy)))$$

(g) линии. Вывод дизъюнкции (возможно, вырожденой), каждый член которой дает уравнение для нескольких множеств объектов. Пример:

$$\forall_{ABCDEKabcdem}(a-\text{число} \,\&\, b-\text{число} \,\&\, c-\text{число} \,\&\, d-\text{число} \,\&\, e-\text{число} \,\&\, A-\text{точка} \,\&\, B-\text{точка} \,\&\, C-\text{точка} \,\&\, D-\text{точка} \,\&\, \text{прямкоорд}(K) \,\&\, \text{гипербола}(E) \,\&\, \neg(C=D) \,\&\, \neg(A=B) \,\&\, \text{асимптота}(\text{прямая}(AB),E) \,\&\, \text{асимптота}(\text{прямая}(CD),E) \,\&\, \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0 \,\&\, x-\text{число} \,\&\, y-\text{число}) \,\&\, m=\sqrt{-c/a} \,\&\, \neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(CD)) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{uv}(2acu+2acmv+ad+mbc=0 \,\&\, u-\text{число} \,\&\, v-\text{число}) \,\&\, \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uv}(2acu-2acmv+ad-mbc=0 \,\&\, u-\text{число} \,\&\, v-\text{число}) \vee \text{коорд}(\text{прямая}(AB),K)=\text{set}_{uv}(2acu-2acmv+ad-mbc=0 \,\&\, u-\text{число} \,\&\, v-\text{число}) \,\&\, \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K)=\text{set}_{uv}(2acu+2acmv+ad+mbc=0 \,\&\, u-\text{число} \,\&\, v-\text{число}))$$

(h) разбиения. Разбиение множества объектов, заданного уравнением, и вывод уравнений для подмножеств. Пример:

$$\forall_{ABEKfgh}(f(x,y,z)=gh \,\&\, \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xyz}(f(x,y,z)=0 \,\&\, x-\text{число} \,\&\, y-\text{число} \,\&\, z-\text{число}) \rightarrow A-\text{set} \,\&\, B-\text{set} \,\&\, A\cup B=E \,\&\, \text{коорд}(A,K)=\text{set}_{xyz}(g=0 \,\&\, x-\text{число} \,\&\, y-\text{число} \,\&\, z-\text{число}) \,\&\, \text{коорд}(B,K)=\text{set}_{xyz}(h=0 \,\&\, x-\text{число} \,\&\, y-\text{число} \,\&\, z-\text{число}))$$

(i) точки(x1). Тождество выражает операцию над множеством через множество координат элементов. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{KPQf}(Q-\text{set} \,\&\, f-\text{функция} \,\&\, \text{непрерывно}(f,Q) \,\&\, Q\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\&\, \text{квадрируемо}(Q) \,\&\, \text{прямкоорд}(K) \,\&\, P=\text{точки}(\text{set}_{xyz}(z=f(x,y) \,\&\, (x,y)\in Q),K) \rightarrow \iint_Q \sqrt{1+(df(x,y)/dx)^2+(df(x,y)/dy)^2}dxdy)$$

Характеристика - "точки(второйтерм)".

Тождества рекурсивного характера

1. рекурсия(x1 x2 x3). Тождество выражает сложную операцию через ее значения на наборах, характеризующихся меньшим значением численной характеристики. x1 - направление замены, x2 - рассматриваемая численная характеристика, x3 - конъюнкция фильтров, уточняющих целесообразность использования тождества. Пример:

$$\forall_k(k-\text{натуральное} \rightarrow \text{числобернулли}(k)=\textstyle\sum_{p=0}^{k-1}(\text{числобернулли}(p)C_{k+1}^{p}))$$

Характеристика - "рекурсия(второйтерм k и(натуральное(k) меньшеилиравно(10 k)))". Нижняя граница введена из-за наличия отдельных тождеств для чисел Бернулли с малыми номерами.

2. подмножества(x1). Тождество, выражающее сложную операцию над множеством через значения этой операции на подмножествах. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{AB}(A - \mathrm{set}\ \&\ B - \mathrm{set}\ \&\ \text{конечное}(A)\ \&\ \text{конечное}(B) \to \mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}A + \mathrm{card}B - \mathrm{card}(A \cap B))$

   Характеристика - "подмножества(второйтерм)".

3. Разбиение(x1 x2). Попытка разбиения класса и выражения его характеристики через характеристики подклассов. x1 - переменная для класса, x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{AKQn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{семействомножеств}(Q)\ \&\ \mathrm{Dom}(Q) = \{1, \ldots, n\}\ \&\ \text{разделены}(Q)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \mathrm{set}_{xyz}((x, y, z) \in A) = \bigcup_{i=1}^{n} Q(i) \to \text{объем}(\text{точки}(A, K)) = \sum_{i=1}^{n} \text{объем}(\text{точки}(Q(i), K)))$

   Характеристика - "Разбиение(A второйтерм)".

4. префикснаярекурсия(x1). Тождество позволяет перейти от сложной операции с подтермом "префикс(A B)" к такой же операции с подтермом B. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(b - \text{слово}\ \&\ \neg(a \in \{;b\}) \to \mathrm{card}\{(a;b)\} = \mathrm{card}\{;b\} + 1)$

   Напомним, что $\{a;b\}$ означает "перечень(префикс(a,b))", $\{;b\}$ - "перечень(b)".

   Характеристика - "префикснаярекурсия(второйтерм)".

5. натуральное(x1 x2). Тождество позволяет выразить сложную операцию с натуральным параметром x1 через такую же операцию, в которой переменная x1 заменена на выражение, имеющее натуральное значение, меньшее x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{Amn}(A - \text{функция}\ \&\ \mathrm{Val}(A) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ m - \text{натуральное}\ \&\ \mathrm{Dom}(A) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, m\}\ \&\ 0 \leq n - 2 \to A^n = A \cdot A^{n-1})$

   Характеристика - "натуральное(n второйтерм)".

6. длинанабора(x1 x2). Тождество позволяет выразить сложную операцию с параметром x1, значением которого служит набор, через такую же операцию, в которой переменная x1 заменена на выражение, имеющее своим значением набор меньшей длины. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABafgin}(a - \text{слово}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ l(a) = n\ \&\ \forall_x(x \in \mathrm{Val}(a) \to x - \text{функция})\ \&\ i \in \{1, \ldots, n-1\}\ \&\ f = a(i)\ \&\ g = a(i+1) \to \text{произведение}(a) = \text{произведение}(\lambda_j((a(j)\ \text{при}\ j < i,\ \text{иначе}\ (\lambda_y(f(g(y))), y \in \mathrm{Dom}(g)\ \&\ g(y) \in \mathrm{Dom}(f))\ \text{при}\ j = i,\ \text{иначе}\ a(j+1))), j \in \{1, \ldots, n-1\})))$

   Характеристика - "длинанабора(x1 второйтерм)".

Использование тождества для вычислений

1. вычислить. Тождество для сведения сложного вычисления к цепочке более простых вычислений. Пример:

   $\forall_{abmn}(m = \mathrm{card}(a)\ \&\ n = \mathrm{card}(b)\ \&\ m - \text{число}\ \&\ n - \text{число} \to \mathrm{card}(a \times b) = mn)$

2. функоперация(x1). Тождество, позволяющее вычислить операцию над функцией по кванторной посылке, накладывающей условия на ее значения. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abfgh}(df(t)/dt = a\ \&\ dg(t)/dt = b\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ \forall_v(h(v) \to y(f(v)) = g(v))\ \&\ e = f(t) \to dy(e)/de = b/a)$

   Теорема представляет собой квазипротокол, созданный для вычисления производной функции, заданной параметрически. Дифференцируемость обеспечивается тем фактом, что результаты обработки левых частей первых двух антецедентом нормализатором "нормпроизводная" не содержат символа "производная". Характеристика - "функоперация(второйтерм)".

3. функрасст. Тождество, позволяющее вычислить функциональную характеристику объекта. Пример:

   $\forall_{ABf}(\text{верпространство}(B)\ \&\ \text{непрвеличина}(A, B)\ \&\ \text{плотнраспред}(A, B) = f\ \&\ g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \to \text{функраспред}(A, B) = \lambda_t(g(t), t - \text{число}))$

   Теорема представляет собой квазипротокол, определяющий попытку интегрирования для перехода к функции распределения.

4. Функвых. Тождество, дающее явное выражение для функциональной характеристики объекта. Пример:

   $\forall_{PXa}(\text{веропространство}(P)\ \&\ \text{случвеличина}(X, P)\ \&\ a - \text{число}\ \&$
   $\text{Пуассон}(X, P, a) \to \text{рядраспред}(X, P) = \lambda_i(a^i/i! \exp(-a), i \in \mathbb{N}+))$

5. стандоперанды(x1 x2). Тождество стандартизации подвыражения, направленной на последующее вычисление всего выражения. x1 - фильтр, уточняющий контекст вхождения подвыражения. В нем "теквхожд", "корень" имеют обычный смысл. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{mp}(p - \text{слово}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(p)\ \&\ m = l(p) \to \text{циклперест}(p) =$
   $\text{таблица}(\{p(m) \mapsto p(1); \lambda_j(p(j) \mapsto p(j + 1), j \in \{1, \ldots, m - 1\})\}))$

   Чтобы вычислить произведение подстановок, циклическая перестановка p задается явной таблицей.

   Характеристика - "стандоперанды(контекст(подчинено(теквхожд x1) символ(x1 произведение)) второйтерм)".

6. вычислять(x1). Тождество, реализующее один шаг в вычислении сложного выражения. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDEF}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & ромб$(ABCD)$ & $E \in$ отрезок(AB) & $F \in$ отрезок$(AD) \to S($фигура$(AECF)) = S($фигура$(ABCD))-$ $S($фигура$(BEC)) - S($фигура$(CDF)))$

Характеристика - "вычислять(второйтерм)".

Тождества для специальной стандартизации

1. вспомпараметр(x1). Тождество исключает вспомогательный параметр в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABKabcpq}(A-$ точка & $B-$ точка & прямкоорд(K) & коорд$(A,K) = (a,b)$ & коорд$(B,K) = (p,q)$ & $c-$ число $\to cl(AB)^2 = c(a-p)^2 + c(b-q)^2)$

   Характеристика - "вспомпараметр(первыйтерм)". Предполагается, что хотя бы одно из выражений a, b, p, q содержит исключаемые вспомогательные параметры, а выражения A, B - не содержат.

2. стандцель(x1). Тождество, инициирующее попытку специальной стандартизации в условии задачи на доказательство. Пример:

   $\forall_{ABa}(a-$ число & $A-$ точка & $B-$ точка & $a = l(AB) \to a^2 =$ скалумнож(вектор(AB), вектор$(AB)))$

   Характеристика - "стандцель(второйтерм)". Тождество инициирует попытку доказательства геометрического утверждения с использованием скалярных произведений. Оно включает соответствующую стандартизацию условий и посылок задачи.

3. смцель(x1 x2). Тождество, выполняющее замену в соответствии со специальной целевой установкой задачи на преобразование. x1 - указатель "контекст(...)", идентифицирующий необходимую целевую установку. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{afn}(a \in \mathrm{set}_x($одз$(f(x)))$ & $x-$число $\to f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} d^i f(a)/da^i \cdot (x-a)^i/i!)$

   Характеристика - "смцель(контекст(цель(формулатейлора терм(x) терм(a) терм(n))) второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол для нахождения первых n членов разложения функции $f(x)$ в ряд тейлора в окрестности точки a.

4. Стандкомпл(x1). Тождество, преобразующее выражение к виду стандартного представления объектов данного типа. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a-$ число & $b-$ число $\to \exp(a+bi) = \exp(a)\cos b + i\exp(a)\sin b)$

   Комплексная экспонента преобразуется к стандартному виду комплексного числа. Характеристика - "Стандкомпл(второйтерм)".

Прочие характеристики тождеств

1. идентзадачи. Усмотрение совпадения параметров при контроле противоречивости подслучая. Пример:

   $\forall_{ABCDabcde}(0 < a \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ al(AB)/c = -dl(CD)/e \rightarrow$ $A = B \ \& \ C = D)$

2. однозначно. Тождество вида $A(y) \ \& \ P(x,y) \ \& \ P(z,y) \rightarrow x = z$, выражающее однозначную определимость объекта x по отношению $P(x,y)$. Пример:

   $\forall_{ABE}(\text{эллипсоид}(E) \ \& \ \text{центр}(A,E) \ \& \ \text{центр}(B,E) \rightarrow A = B)$

2.1.4 Эквивалентности

Упрощающие эквивалентности

1. Эквивалентности общей стандартизации.

   (a) общнорм(x1). Общая стандартизация утверждения, не имеющего вида дизъюнкции либо конъюнкции. Заменяющее утверждение - элементарное. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab = bc \leftrightarrow a = c)$

   Характеристика - "общнорм(второйтерм)".

   (b) Сокращение(x1). Теорема представляет собой эквивалентность без существенных посылок, переменные заменяющего утверждения которой образуют собственное подмножество переменных заменяемого. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < c \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 <$ $a \rightarrow \log_a b - \log_a c \leftrightarrow b - c = 0)$

   Характеристика - "Сокращение(второйтерм)".

   (c) вычеркивание(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемое утверждение которой содержит все переменные теоремы, а заменяющее - лишь собственное подмножество этих переменных. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ 0 < b \rightarrow a/b < c/b \leftrightarrow$ $0 < c - a)$

   Характеристика - "вычеркивание(второйтерм)".

   (d) нормзнака(x1). Общая стандартизация, использующая нормализатор приведения к заданным заголовкам. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdef}(a + b = de \ \& \ c = df \ \& \ \neg(d = 0) \rightarrow a + b = c \leftrightarrow e = f)$

   Характеристика - "нормзнака(второйтерм)".

   (e) исключение(x1 x2). Обе части эквивалентности - элементарные утверждения, причем одно из них получается из другого путем подстановки виесто переменной x1 выражения f(x1). x2 - символ f. Пример:

   $\forall_{ax}(x - \text{число}\ \&\ a - \text{целое} \to a \leq [x] \leftrightarrow a \leq x)$

   Характеристика - "исключение(x целаячасть)".

2. конечное(x1). Эквивалентность имеет в одной части одноместный предикат $P(x)$, а в другой - дизъюнкцию равенств вида $x = t$, где t - константное выражение. x1 - направление перехода к дизъюнкции. Пример:

   $\forall_a(a - \text{boolean} \leftrightarrow a = 0\ \vee\ a = 1)$

   Характеристика - "конечное(второйтерм)".

3. Эквивалентности с описателями.

   (a) нормсвязок(x1). Заменяемая часть эквивалентности содержит описатели, а заменяющая - не имеет связанных переменных. Ее сложность не превосходит сложности заменяемой части. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to \text{card}(\text{set}_x(x - \text{число}\ \&\ ax^2 + bx + c = 0)) = 1 \leftrightarrow \neg(a = 0)\ \&\ b^2 - 4ac = 0\ \vee\ a = 0\ \&\ \neg(b = 0))$

   Характеристика - "нормсвязок(второйтерм)".

   (b) смпреобр(x1). Квазипротокол, предназначенный для перехода от группы посылок с описателями "класс" к элементарной посылке. Антецедент введен для обращения к вспомогательной задаче, преобразующей утверждение под описателем "класс". x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{AKPQa}(\text{set}_x(P(x)\ \&\ Q(x)) = a \to A \in \text{точки}(\text{set}_x(P(x)), K)\ \&\ A \in \text{точки}(\text{set}_x(Q(x)), K) \leftrightarrow A \in \text{точки}(a, K))$

   Характеристика - "смпреобр(второйтерм)".

4. усиление(x1). Усиление элементарного утверждения. Пример:

   $\forall_{AB}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(B)\ \&\ 0 \leq \text{card}(A) - \text{card}(B) \to A \subseteq B \leftrightarrow A = B)$

   Характеристика - "усиление(второйтерм)".

5. Уменьшение оценки сложности.

   (a) уменьшение(x1). Эквивалентность исключает символы с наибольшей оценкой сложности. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ c - \text{число} \to c < a/b \leftrightarrow 0 < b\ \&\ bc < a\ \vee\ b < 0\ \&\ a < bc)$

   Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

(b) услрасст(x1). Сложность заменяющей части меньше сложности заменяемой, причем каждая из частей имеет переменные, не входящие в другую. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D \ \text{точка} \ \& \ E \ \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow E \in \text{окружность}(AB))$

Характеристика - "услрасст(второйтерм)".

(c) исключприем(x1). Эквивалентность для исключения сложного отношения. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{af}(\lim_{i\rightarrow\infty} f(i) = \infty \ \& \ \forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \rightarrow \lim_{i\rightarrow\infty} f(i)/i^b = 0) \rightarrow \text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i)/i^a, n - \text{натуральное})) \leftrightarrow 1 < a)$

Характеристика - "исключприем(второйтерм)".

(d) упрощдн(x1). Эквивалентность двух равенств с невырожденными числовыми атомами, уменьшающая наибольшую из сложностей этих атомов. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \triangle(ABC) \rightarrow l(AB) = l(BC) \leftrightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$

Характеристика - "упрощдн(первыйтерм)".

(e) упрощразность(x1). Сложности заменяемой и заменяющей частей одинаковы, но множество имеющих максимальную сложность подтермов заменяющей части является собственным подмножеством множества таких подтермов для заменяемой части. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(BC))$

Характеристика - "упрощразность(второйтерм)".

(f) упрощплюс(x1). Сложности заменяемой и заменяющей частей эквивалентности одинаковы, причем обе эти части элементарны. При переходе к заменяющей части уменьшается максимальная сложность собственных подтермов термов термов максимальной сложности. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abd}(d < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b \leq a \leftrightarrow ad \leq bd)$

Характеристика - "упрощплюс(первыйтерм)".

(g) частичныйответ(x1). Эквивалентность для частичного исключения сложного отношения. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abf}(\lim_{n\rightarrow\infty} |f(n+1)/f(n)| = a \rightarrow \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^m f(n), m - \text{натуральное})) \leftrightarrow a - 1 < 0 \ \vee \ a - 1 = 0 \ \& \ \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^m f(n), m - \text{натуральное})))$

Характеристика - "частичныйответ(второйтерм)".

(h) редукция(x1). Эквивалентность для рекурсивной расшифровки утверждения со сложным понятием. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABafnx}(x = \{;\lambda_i(a(i), i \in \{1,\dots,n\})\} \ \& \ B = \lambda_i(f(a(1),a(i)), i \in \{1,\dots,n\}) \to f([x,x]) \subseteq A \leftrightarrow \{;B\} \subseteq A \ \& \ f[\{;\lambda_i(a(i), i \in \{2,\dots,n\})\}, \{;\lambda_i(a(i), i \in \{2,\dots,n\})\}] \subseteq A)$$

Напомним, что $f[A,A]$ обозначает множество значений $f(a,b)$ при $a \in A, b \in A$. Характеристика - "редукция(второйтерм)".

6. Подготовка возможности упрощения.

(a) Преобр(x1). Эквивалентность, подготавливающая возможность тождественного преобразования для исключения сложной операции. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{abp}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \neg(a = \text{вектор0}) \ \& \ \neg(b = \text{вектор0}) \to \text{уголмежду}(a,b) = p \leftrightarrow \text{длина}(a)\text{длина}(b)\cos p = \text{скалумнож}(a,b) \ \& \ 0 \le p \ \& \ 0 \le \pi - p)$$

Прием, основанный на этой теореме, проверяет, что внутри выражения b встречается векторное произведение с сомножителем a. Характеристика - "Преобр(второйтерм)".

(b) предвкадр(x1). Эквивалентность, подготавливающая возможность эквивалентного преобразования для исключения сложной операции. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{abcde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \le b \ \& \ 0 \le d \ \& \ 0 \le a \ \& \ 0 \le c \ \& \ e \le 0 \to 0 < a\sqrt{b} + c\sqrt{d} + e \leftrightarrow 0 < a^2b + c^2d + 2ac\sqrt{b}\sqrt{d} - e^2)$$

Возведение неравенства с двумя радикалами в квадрат оставляет одно слагаемое с радикалом. Последующее возведение в квадрат позволит исключить радикалы. Характеристика - "предвкадр(второйтерм)".

7. сборка(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, используемую для сокращенной переформулировки утверждений. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to 0 < ab \leftrightarrow a < 0 \ \& \ b < 0 \ \vee \ 0 < a \ \& \ 0 < b)$$

Характеристика - "сборка(первыйтерм)".

8. коммутатор. Теорема преобразует бесповторное утверждение так, чтобы выявилась симметрия по переменным. Пример:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \to a/b \le 0 \leftrightarrow ab \le 0)$$

9. констнабор(x1 x2). Эквивалентность упрощает утверждение относительно неконстантных подвыражений. x1 - список переменных, идентифицируемых с константными выражениями, x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \le d \ \& \ 0 \le b \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < c \to a\sqrt{b} - c\sqrt{d} \leftrightarrow a^2b - c^2d = 0)$$

Характеристика - "констнабор(a c первыйтерм)". Неконстантные радикалы исключаются, а возникающие новые подтермы a^2, c^2 константные.

10. уменьшить(x1). Эквивалентность, использующая равенство из посылок для уменьшения числа параметров посылки задачи на исследование. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{acdef}(d - a = 0 \ \& \ c + d = e \ \& \ f = (0 < e) \to 0 < a + c \leftrightarrow f)$

    Теорема представляет собой квазипротокол. Первый антецедент должен идентифицироваться с посылкой, два других - выделены указателем "идентификатор". Заменяемое утверждение должно иметь более одного параметра, заменяющее - один параметр. Характеристика - "уменьшить(второйтерм)".

11. провменьше(x1). Эквивалентность, упрощающая проверку истинности сложного отношения. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{dfgh}(\text{последовательность}(f, \mathbb{N}) \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \ \& \ \text{последовательность}(h, \mathbb{R} \setminus \{0\}) \ \& \ \forall_i(i - \text{натуральное} \to 0 \leq \ln(f(i)!)g(i)/h(i)) \ \& \ \lim(f) = \infty \to$ $\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^n(\ln(f(i)!)g(i)/h(i)), n - \text{натуральное})) \leftrightarrow$
    $\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i)\ln(f(i))g(i)/h(i), n - \text{натуральное})))$

    Характеристика - "провменьше(второйтерм)". Используется асимптотика логарифма факториала.

Декомпозирующие эквивалентности

1. и(x1). Декомпозиция элементарного утверждения в конъюнкцию бескванторных утверждений. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to a \in (b, c) \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ b < a \ \& \ a < c)$

    Характеристика - "и(второйтерм)".

2. или(x1). Декомпозиция элементарного утверждения в дизънкцию бескванторных утверждений. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall ab(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

    Характеристика - "или(второйтерм)".

3. соединяет(x1). Эквивалентность имеет единственное вхождение самой сложной операции в заменяющем утверждении и несколько самых сложных операций в заменяемом, причем последние по своим переменным декомпозируют первую. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{fAB}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ f - \text{слово} \ \& \ \neg(\text{прообраз}(f, A) = \infty) \ \& \ \neg(\text{прообраз}(f, B) = \infty) \to \inf(\text{прообраз}(f, A)) < \inf(\text{прообраз}(f, B)) \leftrightarrow f(\inf(\text{прообраз}(f, A \cup B))) \in A \setminus B)$

    Характеристика - "соединяет(второйтерм)".

4. разбивает(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, обеспечивающую дизъюнктивно - конъюнктивную декомпозицию элементарного утверждения путем анализа экстремальных значений. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcde}(a-$число $\&$ $b-$число $\&$ $c-$число $\&$ $d-$число $\&$ $e-$число $\&$ $|a| \leq b$ $\&$ $|c| \leq d$ $\&$ $bd - e = 0 \rightarrow |a| = b$ $\&$ $|c| = d$ $\&$ $0 \leq ac)$

   Характеристика - "разбивает(второйтерм)".

Перегруппировочные эквивалентности

1. группировка(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, позволяющую группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{cde}(c-$ число $\&$ $d-$ число $\&$ $e-$ число $\rightarrow e = c + d \leftrightarrow c = e - d)$

   Характеристики - "группировка(первыйтерм)" и "группировка(второйтерм)".

2. разделение(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, позволяющую переносить в разные часи двуместного отношения две переменные, ранее расположенные в одной части. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ac}(a-$ число $\&$ $c-$ число $\rightarrow c = -a \leftrightarrow a + c = 0)$

   Характеристика - "разделение(первыйтерм)".

3. перемещение(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, позволяющую группировать в одной части бинарного отношения, причем под одной ассоциативно - коммутативной операцией x1, все переменные этого отношения. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a-$ число $\&$ $b-$ число $\rightarrow b < a \leftrightarrow 0 < a - b)$

   Характеристика - "перемещение(плюс второйтерм)".

4. раздпарам(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, в заменяющей части которой расположено такое равенство $A = B$, что некоторые два переменные имеются в A, но отсутствуют в B, и обратно, некоторые две переменные имеются в B, но отсутствуют в A. Заменяемая часть имеет вид равенства, содержащего все указанные переменные, причем обе части равенства неоднобуквенные. x1 - направление замены. Если в направлении x1 эквивалентность осуществляет общую стандартизацию, то характеристка "раздпарам(x1)" не используется. Это не мешает вводить ее для противоположного направления. Пример:

   $\forall_{abdf}(\neg(d = 0)$ $\&$ $\neg(f = 0)$ $\&$ $a-$ число $\&$ $b-$ число $\&$ $d-$ число $\&$ $f-$ число $\rightarrow af = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$

   Характеристика - "раздпарам(второйтерм)".

5. усмгруппа(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, преобразующую одно утверждение с помощью другого таким образом, что новое утверждение содержит параметры обоих исходных утверждений. x1 - номер антецедента, идентифицируемого с другим утверждением, x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcd}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ a=b\to c=d\leftrightarrow a{+}c=b{+}d)$

   Характеристика - "усмгруппа(5 второйтерм)".

6. объекты(x1). Эквивалентность группирует в одной части отношения все невырожденные объекты. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{Aabcf}(\text{группа}(A)\ \&\ f=\text{операция}(A)\to f(a)=b\leftrightarrow f(\text{суффикс}(a,\text{обрэлемент}(b,f)))=\text{единица}(f))$

   Характеристика - "объекты(второйтерм)".

7. Замена(x1 x2). Одна часть эквивалентности получается из другой заменой подвыражения x1 на подвыражение x2. Эти подвыражения содержат одни и те же переменные. Пример:

   $\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\to\neg(a+bi=0)\leftrightarrow\neg(a^2+b^2=0))$

   Характеристика - "Замена(a^2+b^2, $a+bi$)".

8. исклпараметр(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, имеющую существенные посылки. При применении ее в направлении x2 происходит исключение переменной x1. Заменяемая часть бесповторна, причем все операции на пути от корня заменяемой части к вхождению x1 имеют своими побочными операндами только переменные. Заменяющий терм содержит хотя бы одну переменную, не содержащуюся в заменяемом. Пример:

   $\forall_{abcmnx}(x-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\ \&\ b-\text{целое}\ \&\ c-\text{целое}\ \&\ m-\text{целое}\ \&\ ab-amn=0\ \&\ \neg(a=0)\to xn=bc\leftrightarrow x=cm)$

   Характеристика - "исклпараметр(m первыйтерм)".

Кванторные конструкции в эквивалентности

1. развертка(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность для кванторной расшифровки. x1 - тип возникающего при расшифровке квантора ("длялюбого", "существует"). x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ a\subseteq\mathbb{R}\to\text{Нижняягрань}(b,a)\leftrightarrow b-\text{число}\ \&\ \forall_c(c\in a\to b<c))$

   Характеристика - "развертка(длялюбого второйтерм)".

2. Параметрические описания.

   (a) параметризация. Теорема представляет собой эквивалентность с квантором существования в одной из своих частей, которую можно неизбыточным образом использовать для получения явного параметрического описания. Пример:

   $\forall_{ab}(b-\text{set}\ \&\ a-\text{set}\to b\subseteq a\leftrightarrow\exists_c(a=b\cup c\ \&\ c-\text{set}))$

(b) попыткапараметризации. Теорема представляет собой эквивалентность с квантором существования в одной из своих частей, которую можно неизбыточным образом использовать для получения неявного параметрического описания. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \to \exists_c(c \in a\ \&\ c \in b) \leftrightarrow \neg(\text{непересек}(a, b)))$

(c) связка. Теорема представляет собой эквивалентность с квантором существования в левой части, которую можно использовать для исключения несущественных неизвестных. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \exists_c(c < b\ \&\ a < c\ \&\ c - \text{число}) \leftrightarrow a < b)$

(d) обознач. Теорема представляет собой параметрическое описание объектов заданного типа,задающее стандартный вид обозначения таких объектов. Пример:

$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$A = \text{прямая}(BC)))$

(e) биекция. Теорема представляет собой такое явное параметрическое описание, у которого параметры однозначно определяются по параметризуемому объекту. Пример:

$\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ a - \text{set} \to b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c\ \&\ \text{непересек}(b, c)\ \&\ c - \text{set}))$

(f) взаимнооднозначно(x1). Теорема представляет собой эквивалентность для преобразования параметрического описания к взаимно-однозначному виду. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCfn}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ C - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ n - \text{число}\ \&\ \text{card}(B) = n\ \&\ \text{разбиение}(A, B) \to B = \text{set}_x(\exists_y(y \in C\ \&\ x = f(y))) \leftrightarrow \exists_{gD}(D \subseteq C\ \&\ \text{card}(D) = n\ \&\ \lambda_y(f(y), y \in D) = g\ \&\ \text{Val}(g) = B\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(g)\ \&\ \text{разделимы}(g)\ \&\ \text{семействомножеств}(g)\ \&\ \bigcup(g) = A))$

Теорема вводит взаимно-однозначное параметрическое описание разбиения B множества A. Характеристика - "взаимнооднозначно(второйтерм)".

(g) парамугол(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность для явного параметрического описания, позволяющую вводить вспомогательную неизвестную для встречающегося в задаче терма x1 с неизвестными. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABaf}(\text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ a \in A \to \text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow \exists_{bg}(b \in B\ \&\ \text{Отображение}(g, A \backslash \{a\}, B \backslash \{b\})\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(g)\ \&\ f = \text{доопределение}(g, \{a\}, b)))$

Характеристика - "парамугол($f(a)$ второйтерм)". При появлении в задаче неизвестного выражения $f(a)$ бывает полезно ввести обозначение b для значения функции f в точке a, а саму функцию сузить на $A \setminus \{a\}$.

(h) новпеременные. Упрощение параметрического описания путем перехода к новым переменным. Пример:

$\forall_{ABn}(n - \text{число}\ \&\ \neg(n = 0) \to \exists_{xy}(A(x^n)\ \&\ x - \text{число}\ \&\ 0 < x\ \&\ B(y)) \leftrightarrow \exists_{xy}(A(x)\ \&\ x - \text{число}\ \&\ 0 < x\ \&\ B(y)))$

3. Исключение квантора.

   (a) кванторнаясвертка(x1). Теорема представляет собой эквивалентность для кванторной свертки. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a-\mathrm{set}\ \&\ b-\mathrm{set}\to a\subseteq b\leftrightarrow\forall_{ac}(c\in a\to c\in b))$

   Характеристика - "кванторнаясвертка(первыйтерм)".

   (b) элемсвертка(x1). Заменяемая часть эквивалентности имеет своим заголовком квантор, а заменяющая - элементарна. Она имеет переменные, не входящие в заменяемую часть. Оценка сложности заменяющего терма не превосходит оценок сложности заменяемого терма и любого из антецедентов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{acfx}(a-\mathrm{set}\ \&\ a\subseteq\mathrm{Dom}(f)\ \&\ \mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ f-\text{функция}\ \&\ c-\text{число}\ \&$ $\text{убывает}(f,a)\ \&\ \text{наименьший}(x,a)\to\forall_y(y\in a\to f(y)<c)\leftrightarrow f(x)<c)$

   Характеристика - "элемсвертка(второйтерм)".

   (c) Существует(x1). Заменяемая часть эквивалентности представляет собой квантор, а заменяющая - бескванторная. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{amnx}(m{-}\text{целое}\ \&\ n{-}\text{целое}\ \&\ a{-}\mathrm{boolean}\ \&\ 0\le n\ \&\ 0\le m\to\text{двнабор}(x,n)\ \&$ $\text{колич}(x,a)=m\leftrightarrow\exists_b(b\subseteq\{1,\ldots,n\}\ \&\ \mathrm{card}(b)=m\ \&\ x=\lambda_i((a\ \text{при}\ i\in$ $b,\ \text{иначе}\ \neg a),i\in\{1,\ldots,n\})))$

   Характеристика - "Существует(первыйтерм)".

   (d) нормили(x1). Теорема имеет квантор существования в заменяемой части и дизъюнкцию элементарных утверждений - в заменяющей. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_f(\exists_x(x-\mathrm{boolean}\ \&\ f(x))\leftrightarrow f(0)\ \vee\ f(1))$

   Характеристика - "нормили(второйтерм)".

   (e) конъюнкциявсех(x1). Эквивалентность для развертки кванторной импликации в конъюнкцию. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABk}(\forall_{xy}(x\in E(k)\ \&\ A(x,y)\to B(x,y))\leftrightarrow\forall_i(i\in\{0,\ldots,k-1\}\to$ $\forall_y(A(i,y)\to B(i,y))))$

   Здесь $E(k)$ - обозначение множества E_k из дискретной математики. Характеристика - "конъюнкциявсех(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, позволяющий создать прием развертки кванторной импликации.

   (f) связпарам(x1). Заменяемая часть имеет связанные переменные, а заменяющая - нет. Сложность заменяющей части не более сложности заменяемой. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{mn}(m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\to\forall_k(k-\text{целое}\ \&\ m|k\to n|k)\leftrightarrow n|m)$

   Характеристика - "связпарам(второйтерм)".

4. Упрощение кванторов.

(a) связприставка(x1). Заменяемая часть эквивалентности представляет собой квантор. Кванторы в заменяющей части имеют более короткие связывающие приставки, причем сложность символов заменяющей части не более чем сложность заменяемой. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Pax}(\forall_z(P(z) \to a(z) - \text{rational} \,\&\, \neg(a(z) = 0)) \to \exists_{yz}(0 < y \,\&\, y - \text{rational} \,\&\, x = a(z)y \,\&\, P(z)) \leftrightarrow \exists_z(P(z) \,\&\, x - \text{rational} \,\&\, 0 < a(z)x))$

Характеристика - "связприставка(torойтерм)".

(b) подразбиение(x1). Эквивалентность разбивает кванторную импликацию в конъюнкцию нескольких импликаций и элементарных утверждений. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDa}(\forall_x(A(x) \to B(x, \text{индикатор}(C, D, a)(x))) \leftrightarrow \forall_x(A(x) \,\&\, x \in D \to B(x, a)) \,\&\, \forall_x(A(x) \,\&\, \neg(x \in D) \to B(x, 0)))$

Характеристика - "подразбиение(второйтерм)".

5. Кванторные эквивалентности с описателями.

(a) новзнач(x1). Заменяемая часть эквивалентности представляет собой кванторную импликацию без описателей, а заменяющая - результат подстановки некоторых описателей в элементарное утверждение. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Aab}(a - \text{число} \,\&\, \forall_x(A(x) \to b(x) - \text{число}) \to \forall_x(A(x) \to 0 \leq b(x) - a) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(a, \text{set}_y(\exists_x(A(x) \,\&\, y = b(x)))))$

Характеристика - "новзнач(второйтерм)".

(b) описание(x1). Заменяемая часть содержит описатели, а заменяющая - не содержит, но содержит кванторы. Сложность заменяющей части меньше сложности заменяемой. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Aaf}(A - \text{set} \,\&\, f - \text{функция} \,\&\, A \subseteq \text{Dom}(f) \,\&\, \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \,\&\, a \in A \to \inf(\text{set}_x(\exists_y(x = f(y) \,\&\, y \in A))) = f(a) \to \forall_y(y \in A \to f(a) \leq f(y)))$

Характеристика - "описание(второйтерм)".

(c) исключлин(x1). Кванторная расшифровка, исключающая описатель. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{PQ}(\text{set}_x(P(x)) = \text{set}_y(Q(y)) \leftrightarrow \forall_x(P(x) \to Q(x)) \,\&\, \forall_x(Q(x) \to P(x)))$

Характеристика - "исключлин(второйтерм)".

(d) перех(x1). Эквивалентность для перехода от квантора к описателю. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABNPQx}(B(i) = \text{set}_y(y \in A \,\&\, \forall_z(Q(y, i) \to P(y, i))) \to \text{кортеж}(x, N, A) \,\&\, \forall_{iz}(i \in \{1, \ldots, N\} \,\&\, Q(x(i), i) \to P(x(i), i)) \leftrightarrow x \in \prod_{i=1}^{N} B(i))$

Теорема является квазипротоколом. Антецедент выполняет вычисления, необходимые для перехода к прямому произведению. Характеристика - "перех(второйтерм)".

6. антецеденты(x1). Эквивалентность для отбрасывания реализуемой группы антецедентов. x1 - направление замены. Пример:

   $$\forall_{Pa}(\neg(a - \text{натуральное}) \to \forall_n(n - \text{натуральное} \ \&\ P(n) \to n = a) \leftrightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \to \neg(P(n))))$$

   Характеристика - "антецеденты(второйтерм)".

7. контрапозиция(x1). Стандартизирующая контрапозиция кванторной импликации. x1 - направление замены. Пример:

   $$\forall_{Pn}(n - \text{натуральное} \to \forall_k(P(k) \ \&\ k - \text{натуральное} \to \neg(k \leq n)) \leftrightarrow \forall_k(k \in \{1, \ldots, n\} \to \neg(P(k))))$$

   Характеристика - "контрапозиция(второйтерм)".

8. импликант(x1). Стандартизирующая контрапозиция кванторной импликации, являющейся условием задачи на доказательство. Пример:

   $$\forall_{ABfg}(\forall_x(A(x) \ \&\ f(x) < g(x) \to \neg(B(x))) \leftrightarrow \forall_x(A(x) \ \&\ B(x) \to g(x) \leq f(x)))$$

   Характеристика - "импликант(второйтерм)".

9. функграфик(x1 x2). Эквивалентность, разрешающая кванторную импликацию с неизвестной функцией x1 в виде кванторной импликации, определяющей значения этой функции. x2 - направление замены. Пример:

   $$\forall_{abnx}(\text{матр}(a, \mathbb{R}, n, n) \ \&\ \text{кортеж}(b, n, \mathbb{R}) \ \&\ \text{кортеж}(x, n, \mathbb{R}) \ \&\ \neg(\det(a) = 0) \to \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \sum_{j=1}^{n}(a(i,j)x(j)) = b(i)) \leftrightarrow \forall_j(j \in \{1, \ldots, n\} \to x(j) = \det(\lambda_{ik}((b(i) \text{ при } k = j, \text{ иначе } a(i,k)), i \in \{1, \ldots, n\} \ \&\ k \in \{1, \ldots, n\}))/\det(a)))$$

   Характеристика - "функграфик(x второйтерм)". Теорема представляет собой правило Крамера.

Дизъюнктивно-конъюнктивные члены эквивалентности

1. соединение. Теорема представляет собой эквивалентность, заменяющую конъюнкцию бесповторных элементарных утверждений на одно бесповторное элементарное утверждение, причем все указанные утверждения имеют одни и те же переменные. Пример:

   $$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \&\ b - \text{set} \to a = b \leftrightarrow a \subseteq b \ \&\ b \subseteq a)$$

2. нормуравнение(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, переформулирующую элементарное утверждение в виде дизъюнктивно-конъюнктивной конструкции относительно элементарных утверждений, для которых предусмотрены нормализаторы списка x2 решения уравнений, отличные от применимых к исходному утверждению. x1 - направление замены. Пример:

   $$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \&\ b - \text{число} \to \arg(a + bi) = \pi/2 \leftrightarrow a = 0 \ \&\ 0 < b)$$

   Характеристика - "нормуравнение(второйтерм уравнменьше)".

3. Непересек(x1 x2). Разделение неизвестных подвыражений x1,x2 в различных условиях задачи на описание. Пример:

   $\forall_{abcdefghpxy}(a$ – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & g – число & h – число & x – число & y – число & $p = af - be \rightarrow ax + by + c = d$ & $ex + fy + g = h \leftrightarrow \neg(p = 0)$ & $px - (d - c)f + (h - g)b = 0$ & $py - (h - g)a + (d - c)e = 0 \ \vee \ p = 0$ & $ax + by + c = d$ & $ex + fy + g = h)$

   Характеристика - "Непересек(x y)".

4. упрощобъединение(x1 x2). Эквивалентность для дизъюнктивно - конъюнктивной свертки, упрощающей относительно переменной x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{Aafx}(f(a)$ & a – целое & $A \rightarrow x = a$ & $A \vee a < x$ & x – целое & $f(x) \leftrightarrow -[-a] \leq x$ & x – целое & $f(x))$

   Характеристика - "упрощобъединение(x второйтерм)".

Эквивалентности для разрешения относительно переменной

1. Явное разрешение относительно неизвестной.

   (a) Уменьшение глубины вхождений неизвестной до единицы.

      i. глуб(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемая часть которой - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x1, глубина которых (с отбрасывание внешнего отрицания) более 1, а заменяющая часть построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x1, и притом глубины 1. x2 - указатель направления замены. Проверяется неизбыточность эквивалентности при решении уравнений с неизвестной x1. Все обычные формулы для решения уравнений (линейное уравнение, квадратное уравнение, показательное уравнение и т.п.) имеют такую характеристику. Исключение составляют формулы, определяющие серии решений. Пример:

      $\forall_{bcx}(b$ – число & c – число & x – число & $\neg(c = 0) \rightarrow bx = c \leftrightarrow x = c/b$ & $\neg(b = 0))$

      Характеристика - "глуб(x второйтерм)".

      ii. заменаусловия(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемая часть которой - конъюнкция элементарных утверждений, глубина вхождения в которые переменной x1 (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x1, глубина которого равна 1. x2 - указатель направления замены. Проверяется неизбыточность эквивалентности при решении уравнений с неизвестной x1. Характеристика указывает на возможность использования теоремы для группировки уже разрешенных относительно неизвестной условий. Пример:

      $\forall_{abc}(a$ – число & b – число & c – число $\rightarrow c \leq a$ & $c \leq b \leftrightarrow c \leq \min(a, b))$

      Характеристика - "заменаусловия(c второйтерм)".

iii. сокращнеизв(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемая часть которой есть дизъюнктивно - конюнктивная конструкция из элементарных утверждений, глубина вхождения в которые переменной x1 (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x1, глубина которого равна 1. x2 - указатель направления замены. Пример:

$\forall_{abc}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b\ \vee\ a \in c)$

Характеристика - "сокращнеизв(a первыйтерм)".

iv. нормотр(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемая часть которой есть элементарное утверждение с заголовком "не", заменяющая - элементарное утверждение без отрицания, причем глубина вхождения переменной x1 в заменяемое и заменяющее утверждения (без учета отрицания) равна 1, а число ее вхождений в каждое из этих утверждений равно 1. x2 - указатель направления замены. Пример:

$\forall_a(a - \text{число}\ \&\ a \leq 0 \rightarrow \neg(a = 0) \leftrightarrow a < 0)$

Характеристика - "нормотр(a второйтерм).

v. неизвперем(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемая часть которой - конъюнкция элементарных утверждений, глубина вхождения в которые переменной x1 (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - дизъюнкция конъюнкций, каждая из которых имеет единственный содержащий переменную x1 член, причем глубина вхождения x1 в этот член равна 1. x2 - указатель направления замены. Пример:

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \rightarrow a \leq c\ \&\ b \leq c \leftrightarrow 0 < a-b\ \&\ a \leq c\ \vee\ \neg(0 < a - b)\ \&\ b < c)$

Характеристика - "неизвперем(c второйтерм)".

(b) Получение параметрического описания неизвестных.

i. неизвпарам(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, дающую явное параметрическое описание значений неизвестной x1. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{ax}(a - \text{число}\ \&\ x - \text{число} \rightarrow \cos x = a \leftrightarrow |a| \leq 1\ \&\ \exists_n(n - \text{целое}\ \&\ (x = 2\pi n + \arccos a\ \vee\ x = 2\pi n - \arccos a)))$

Характеристика - "неизвпарам(x второйтерм)".

ii. Неизв(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, дающую явное параметрическое описание значений функциональной неизвестной x1. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{adkmprsy}(\neg(a(m+1) = 0)\ \&\ p = \sum_{j=1}^{m+1}(a(j)n^{j-1})\ \&\ \text{Базисрешений}(p, d)\ \&\ d = \{;r\}\ \&\ l(r) = k \rightarrow \forall_n(n - \text{натуральное}\ \&\ s \leq n \rightarrow \sum_{j=1}^{m+1}(a(j)y(n+j-1)) = 0) \leftrightarrow \exists_c(\forall_n(n-\text{натуральное}\ \&\ s \leq n \rightarrow y(n) = \sum_{i=1}^{k}(c(i)r(i)))\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow c(i) - \text{число})))$

Характеристика - "Неизв(y второйтерм)". Теорема дает общий вид решения линейного рекуррентного уравнения с постоянными коэффициентами.

iii. смпарам(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, преобразующую явно разрешенное относительно неизвестной x1 утверждение в явное параметрическое описание значений этой неизвестной. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABa}(A-\mathrm{set}\ \&\ B-\mathrm{set}\rightarrow a\in A\times B\leftrightarrow\exists_{xy}(x\in A\ \&\ y\in B\ \&\ a=(x,y)))$$

Характеристика - "смпарам(a второйтерм)".

(c) Упрощение явно разрешенного утверждения.

i. допусловие(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, преобразующую явно разрешенное относительно неизвестной x1 условие в конъюнкцию других явно разрешенных относительно этой неизвестной условий, более удобную для учета прочих ограничений на x1. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{abc}(b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\rightarrow a\in(b,c)\leftrightarrow a-\text{число}\ \&\ b<a\ \&\ a<c)$$

Характеристика - "допусловие(a второйтерм)".

ii. упрощпрог(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, сохраняющую разрешенность относительно неизвестной x1, но приводящую к более простым выражениям с известными параметрами. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{bce}(b-\mathrm{set}\ \&\ c-\mathrm{set}\ \&\ e-\mathrm{set}\rightarrow b\cup c\subseteq e\leftrightarrow b\subseteq e\ \&\ c\subseteq e)$$

Характеристика - "упрощпрог(e торойтерм)".

iii. редакторответа(x1 x2 x3). Теорема представляет собой эквивалентность, переформулирующую явно разрешенное относительно неизвестной x1 утверждение в другое, тоже явно разрешенное относительно x1, с учетом целевой установки. x2 - фильтр, определяющий целесообразность замены. x3 - направление замены. Пример:

$$\forall_{abx}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\rightarrow x\in[a,b]\leftrightarrow x-\text{число}\ \&\ a\leq x\ \&\ x\leq b)$$

Характеристика - "редакторответа(x или(цель(усмменьше) цель(неравенства) цель(областьграницы) цель(нормобласть)) второйтерм)".

(d) Кванторная импликация.

i. функразр(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, явно разрешающую кванторную импликацию относительно функциональной переменной. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{afk}(k-\text{целое}\rightarrow\forall_n(n-\text{натуральное}\ \&\ k\leq n\rightarrow f(n)=af(n-1))\leftrightarrow$$
$$\forall_n(n-\text{натуральное}\ \&\ k-1\leq n\rightarrow f(n)=f(k-1)a^{n-k+1}))$$

Характеристика - "функразр(второйтерм)".

ii. неизвмнож(x1 x2). Эквивалентность для разрешения кванторной импликации относитеьно неизвестной x1, использующая ввод новых описателей. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{AB}(\forall_x(A(x)\ \&\ \neg(x\in y)\rightarrow B(x))\leftrightarrow\mathrm{set}_x(A(x)\ \&\ \neg(B(x)))\subseteq y)$$

Характеристика - "неизвмнож(y второйтерм)".

(e) Неизвестные(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, полученную для разрешения группы утверждений относительно неизвестных списка x1. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{abcdxy}(c = a^2 - 4b \;\&\; d = \sqrt{c} \to x + y = a \;\&\; xy = b \leftrightarrow 0 \le c \;\&\; (x = (a-d)/2 \;\&\; y = (a+d)/2 \;\vee\; x = (a+d)/2 \;\&\; y = (a-d)/2))$$

Характеристика - "Неизвестные(x y второйтерм)".

(f) перечисление(x1 x2 x3). Теорема представляет собой эквивалентность, определяющую перечисление значений неизвестных при заданном виде константных параметров. x1 - список неизвестных, x2 - конъюнкция условий на параметры (фильтров), x3 - направление замены. Пример:

$$\forall_{nx}(x - \text{целое} \to x|n \leftrightarrow \exists_{mp}(n = mp \;\&\; x = m))$$

Характеристика - "перечисление(x целое(n) второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, определяющий перечисление разложений целочисленной константы n в произведение двух множителей m, p и формирование дизъюнкции равенств неизвестной x делителям m.

(g) вспомнеизв(x1). Теорема представляет собой эквивалентность, позволяющую реализовать условие задачи на описание путем решения вспомогательных задач для антецедентов. x1 - список термов "набор($N, x_1, \ldots, x_k$)", где N - символьный номер антецедента; $x_1, \ldots, x_k$ - вспомогательные неизвестные, определяемые при решении вспомогательной задачи для данного антецедента. Предполагается, что ответ задачи должен иметь вид конъюнкции равенств для переменных x_i. Пример:

$$\forall_{abcdfgmnpqrs}(\mathrm{Max}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a, m, n) \;\&\; \mathrm{Max}(\lambda_y(g(y), y - \text{число}), b, r, s) \to \mathrm{Max}(\lambda_{xy}(f(x) + g(y), p(x) \;\&\; q(y)), a \times b, c, d) \leftrightarrow c = m \times r \;\&\; d = n + s)$$

Характеристика - "вспомнеизв(набор(1 m n) набор(2 r s))".

(h) неизвоценки(x1 x2). Использование пакета продукций для явного разрешения группы условий задачи на описание относительно неизвестных. x1 - список неизвестных, x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{Aabmnx}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\}) \;\&\; \text{точность}(\text{собствзначения}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\})), b) = m \to \text{собствзначения}(A) = x \;\&\; \text{точность}(x, b) \leftrightarrow x = m)$$

Характеристика - "неизвоценки(x второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, организующий обращение к пакету продукций "собствзначения".

(i) неизвконтексты(x1 x2). Эквивалентность для разрешения относительно неизвестных списка x1, использующая утверждения из контекста. x2 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABxy}(x - \mathrm{set} \;\&\; y - \mathrm{set} \;\&\; A - \mathrm{set} \;\&\; B - \mathrm{set} \;\&\; x \subseteq A \;\&\; \text{непересек}(y, A) \to B = x \cup y \leftrightarrow x = A \cap B \;\&\; y = B \setminus A)$$

Характеристика - "неизвконтексты(x y второйтерм)".

(j) определ(x1 x2 x3). Эквивалентность для явного разрешения с помощью синтезаторов условия задачи на описание. x1 - терм "неизвестные(...)", перечисляющий неизвестные, x2 - список термов "значения($i_1 \ldots i_s$)", перечисляющих группы номеров антецедентов, обрабатываемых общим синтезатором. x3 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcfgmpqr}(f(x) \leq b \ \& \ c \leq g(x) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ r = \mathrm{set}_x(f(x) = b \ \& \ g(x) = c \ \& \ c \in m) \ \& \ \neg(r = \emptyset) \ \& \ a = \lambda_x(f(x)/g(x), x - \text{число}) \rightarrow \mathrm{Max}(a, m, p, q) \leftrightarrow q = b/c \ \& \ p = r)$

Характеристика - "определ(неизвестные(p q)значения(1) значения(2) второйтерм)".

2. Выражение одной неизвестной через другие.

(a) пропорцнеизв(x1 x2 x3). Теорема позволяет выразить неизвестную x1 через неизвестную x2. x3 - направление замены. Пример:

$\forall_{abxy}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow ax = ay + b \leftrightarrow x = y + b/a)$

Характеристика - "пропорцнеизв(x y второйтерм)".

(b) неизвестные(x1 x2 x3). Теорема представляет собой эквивалентность, полученную для выражения неизвестной x1 через неизвестные, входящие в выражения, идентифицируемые с переменными списка x2. x3 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcxy}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \rightarrow ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \leftrightarrow \neg(a = 0) \ \& \ 0 \leq b^2 - 4ac \ \& \ (x = y(\sqrt{b^2 - 4ac} - b)/(2a) \ \vee \ x = -y(\sqrt{b^2 - 4ac} + b)/(2a)) \ \vee \ a = 0 \ \& \ (y = 0 \ \vee \ bx + cy = 0) \ \vee \ b^2 - 4ac < 0 \ \& \ x = 0 \ \& \ y = 0)$

Характеристика - "неизвестные(x y второйтерм)".

3. Упрощение выражений с неизвестными.

(a) неизвоценка(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, применение которой в направлении x1 позволяет получить более простые выражения с неизвестными. x2 - фильтр, уточняющий контекст. Пример:

$\forall_{bdegh}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{натуральное} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow 2bh + d^g e^2 - b^2 = h^2 \ \& \ h - \text{число} \ \& \ 0 \leq e(h - b) \leftrightarrow h = b + e \cdot d^{g/2})$

Характеристика - "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(d)) натуральное(g) известно(h) смнеизв(b)))". Фильтр "смнеизв(b)" указывает, что если b ненулевое, то содержит неизвестные.

(b) упрощнеизв(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, применение которой в направлении x1 позволяет перейти к утверждению, для которого имеются средства перехода к более простым выражениям с неизвестными. x2 - фильтр, уточняющий контекст. Пример:

$\forall_{cdefghi}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \ \& \ 0 \leq e \rightarrow gi2d^{f/2}e^{h/2} + d^f g^2 + e^h i^2 = c^2 \ \& \ 0 \leq c(gd^{f/2} + ie^{h/2}) \leftrightarrow c = gd^{f/2} + ie^{h/2})$

Характеристика - "упрощнеизв(первыйтерм степень(x1 дробь(x3 2)) степень(x2 дробь(x5 2)) и(не(известно(x1)) не(известно(x2)) десчисло(x3) десчисло(x5)))". Вместо уравнения с двумя слагаемыми, имеющими радикалы, получается уравнение с одним таким слагаемым, а для него ранее был найден способ устранения радикалов.

(c) косвнеизв(x1 x2). Теорема преобразует утверждение со сложной неизвестной операцией в утверждение, имеющее ту же самую неизвестную операцию, но с более простым операндом. x1 - неизвестная, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow \text{дробнаячасть}(a + x) = b \leftrightarrow \text{дробнаячасть}(x) = \text{дробнаячасть}(b - a) \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 < 1 - b)$

Характеристика - "косвнеизв(x второйтерм)".

(d) группнеизв(x1 x2). Теорема определяет группировку всех содержащих неизвестные членов в одном операнде консеквента кванторного условия задачи на описание. x1 - направление замены, x2 - фильтр, определяющий целесообразность замены. Пример:

$\forall_{fg}(f(n) - \text{число} \rightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow f(n) = g(n)) \leftrightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow f(n) - g(n) = 0))$

Характеристика - "группнеизв(второйтерм и(не(известно(фикс(0 1 5 1))) не(известно(фикс(0 1 5 2))) входит(n фикс(0 1 5 1)) входит(n фикс(0 1 5 2)) не(контекст(вид(фикс(0 1 5 1) значение(x1 n))неизвестная(x1))) не(контекст(вид(фикс(0 1 5 2) значение(x1 n)) неизвестная(x1)))))". Здесь "фикс(0 1 5 1)", "фикс(0 1 5 2)" - указатели вхождений выражений $f(n), g(n)$.

(e) новыенеизвестные(x1 x2 x3). Теорема определяет переход к новым неизвестным - связанным переменным квантора существования заменяющей части - обеспечивающий упрощение утверждения относительно неизвестных. x1 - список переменных, рассматриваемых в качестве неизвестных, x2 - направление замены, x3 - фильтр, уточняющий контекст. Пример:

$\forall_{axy}(a - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow x^2 + y^2 = a \leftrightarrow \exists_z(x = \sqrt{a}\sin z \ \& \ y = \sqrt{a}\cos z \ \& \ 0 \leq z \ \& \ z < 2\pi \ \& \ z - \text{число}))$

Характеристика - "новыенеизвестные(x y второйтерм контекст(новоеусловие(x2) не(линейноеуравнение(x2 неизвестные))))".

(f) подобныечлены(x1 x2 x3). Теорема определяет перегруппировку содержащих неизвестные членов между операндами неодноместного отношения для приведения подобных членов относительно неизвестных. x1 - направление замены, x2 - неизвестная, x3 - фильтр, уточняющий контекст. Пример:

$\forall_{abcx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow ax + b = cx \leftrightarrow b = (c - a)x)$

Характеристика - "подобныечлены(второйтерм x и(десчисло(a) десчисло(c)))".

(g) нормминус(x1). Внесение внешней одноместной операции под знак ассоциативно- коммутативной операции для последующей группировки неизвестных членов уравнения. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -(a+b) = c \leftrightarrow -a - b = c)$

Характеристика - "нормминус(второйтерм)".

(h) упрощПлюс(x1 x2). Переход к более прстому описателю в условии задачи на описание, явное разрешение этого условия и получение параметрического описания. x1 - список неизвестных, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{Aafuvw}(A - \mathrm{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ A = \mathrm{Dom}(f) \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ u \in A \rightarrow \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x) + a, x \in A), u, v, w) \leftrightarrow \exists_c(\mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x), x \in A), u, c, w) \ \& \ v = c + a))$

Характеристика - "упрощПлюс(u v w второйтерм)".

(i) сокращплюс(x1 x2). Эквивалентность преобразует посылку задачи на исследование с помощью другой посылки для упрощения относительно неизвестных подвыражений. x1 - список термов "неизвестные(A)" для групп переменных A, хотя бы одна из которых идентифицируется с содержащим неизвестные подвыражением. Пример:

$\forall_{abcdxy}(ax = bc \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow ay = bd \leftrightarrow dx = cy)$

Характеристика - "сокращплюс(неизвестные(x) неизвестные(y) неизвестные(a) неизвестные(b))". Исключается произведение пары содержащих неизвестные подвыражений (предполагается, что c, d неизвестных не содержат).

4. Подготовка возможности явного разрешения.

(a) неизвтермы(x1 x2 x3 x4). Теорема представляет собой эквивалентность, подготавливающую возможность разрешения относительно заданного подвыражения x1 с неизвестными при помощи нормализатора уравнений x2. x3 - список переменных, идентифицируемых с содержащими неизвестные подтермами, x4 - направление замены. Если заменяющий терм устойчив к общей стандартизации, то ссылка на нормализатор x2 может отсутствовать. Пример:

$\forall_{abcdefghijk}(0 < a \ \& \ b - 2c = f \ \& \ d = ae \ \& \ g - 2c = h \rightarrow ie^b + jd^c + ka^g = 0 \leftrightarrow ie^f((e/a)^c)^2 + j(e/a)^c = -ka^h)$

Характеристика - "неизвтермы($(e/a)^c$ квадруравн b c g второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, преобразующий показательное уравнение к виду квадратного уравнения и разрешающие последнее нормализатором "квадруравн".

(b) Неизвестная(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, подготавливающую возможность разрешения относительно неизвестной x1. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a\cos c - a\sin c \leq b \leftrightarrow a\sqrt{2}\cos(c + \pi/4) \leq b)$

Характеристика - "Неизвестная(c второйтерм)".

(c) группреш(x1 x2). Теорема представляет собой эквивалентность, преобразующую группу утверждений с неизвестными в другую группу, для которой возможно явное разрешение относительно операндов сложных операций. x1 - переменные, рассматриваемые в качестве неизвестных; x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcd}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \rightarrow \sin a \cos b = c\ \&\ \cos a \sin b = d \leftrightarrow \sin(a+b) = c + d\ \&\ \sin(a-b) = c - d)$

Характеристика - "группреш(a b второйтерм)".

(d) сокращмод(x1 x2). Теорема преобразует конъюнкцию утверждений в дизъюнкцию конъюнкций, каждая из которых пока не разрешена относительно заданной неизвестной, но допускает такое разрешение. В заменяющем терме дизъюнкции и конъюнкции могут быть вырожденными. x1 - неизвестная, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ a + d/e < 0\ \&\ 0 < b + d/e\ \&\ neg(e = 0) \rightarrow a \leq \sin c\ \&\ \sin c \leq b\ \&\ \neg(e \sin c + d = 0) \leftrightarrow a \leq \sin c\ \&\ \sin c < -d/e\ \vee\ -d/e < \sin c\ \&\ \sin c \leq b)$

Характеристика - "сокращмод(c второйтерм)".

(e) нормкн(x1). Теорема преобразует элементарное утверждение с неизвестными в конъюнкцию элементарных утверждений, причем целесообразна попытка применения нормализатора уравнений к каждому конъюнктивному члену заменяющего утверждения. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set} \rightarrow a = b \leftrightarrow a \subseteq b\ \&\ b \subseteq a)$

Характеристика - "нормкн(второйтерм)".

(f) связнеизв(x1 x2 x3). Теорема представляет собой эквивалентность, преобразующую кванторную импликацию с неизвестными в бескванторное утверждение с помощью вспомогательной задачи на описание. x1 - номер антецедента теоремы, обрабатываемого задачей на описание, x2 - список неизвестных, относительно которых он разрешается, x3 - направление замены. Пример:

$\forall_{afgyz}(\mathrm{Max}(\lambda_x(g(x), x - \text{число}), \mathrm{set}_x(x - \text{число}\ \&\ f(x)), y, z)\ \&\ \neg(y = \emptyset) \rightarrow \forall_x(x - \text{число}\ \&\ f(x) \rightarrow g(x) < a) \leftrightarrow z < a)$

Характеристика - "связнеизв(1 y z второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, определяющий решение вспомогательной задачи на нахождение максимума.

(g) упрощимп(x1 x2). Переход к более простому описателю в условии задачи на описание и попытка явного разрешения этого условия. x1 - список неизвестных, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{Aafghpqrs}(a = \lambda_{xy}(f(x,y), g(x,y))\ \&\ \mathrm{Max}(\lambda_y(f(h(y),y), g(h(y),y)), \mathrm{set}_v(A(v)), p, q) = (p = r\ \&\ q = s) \rightarrow \mathrm{Max}(a, \mathrm{set}_{zv}(z = h(v)\ \&\ A(v)), p, q) \leftrightarrow q = s\ \&\ p = \mathrm{set}_{zv}(z = h(v)\ \&\ v \in r))$

Характеристика - "упрощимп(p q второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, усматривающий возможность перейти от двумерной к одномерной задаче отыскания максимума, если одна координата явно выражена через другую.

(h) дизъюнктблок(x1 x2). Свертка дизъюнктивного условия, приводящая к разрешимому относительно неизвестной x1 утверждению. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin a = 0 \ \vee \ \cos a = 0 \leftrightarrow \sin(2a) = 0)$

Характеристика - "дизъюнктблок(a второйтерм)".

(i) повтор(x1 x2). Эквивалентность преобразует условие задачи на описание для получения повторного вхождения выражения x1 с неизвестными списка x2. Пример:

$\forall_{abn}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \text{card}(b) = n \rightarrow \neg(a = b) \leftrightarrow \text{card}(a) < n)$

Характеристика - "повтор(мощность(a)a)".

5. Декомпозиция утверждений с неизвестными.

(a) уравнвариант(x1 x2). Теорема преобразует уравнение к виду, допускающему декомпозицию. x1 - конъюнкция фильтров, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcde}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow ab + ac + bd = e \leftrightarrow (a + d)(b + c) = e + cd)$

Характеристика - "уравнвариант(и(не(известно(a))не(известно(b)) целое(c) целое(d) целое(e) не(заголовок(терм($e + cd$)0))) второйтерм)".

(b) группнеотл(x1). Эквивалентность для попытки одновременной декомпозиции группы условий задачи на описание с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcde}(ab = c \ \& \ ad = e \rightarrow c = 0 \ \& \ e = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ \neg(a = 0) \ \& \ b = 0 \ \& \ d = 0)$

Характеристика - "группнеотл(второйтерм)".

(c) группконденс(x1). Эквивалентность для декомпозиции группы условий задачи на описание с целью перехода к более простым условиям. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \rightarrow ae + bf = 0 \ \& \ ce + df = 0 \leftrightarrow e = 0 \ \& \ f = 0 \ \vee \ ae + bf = 0 \ \& \ ad - bc = 0)$

Характеристика - "группконденс(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, созданный для упрощения уравнения путем его линейной комбинации с другим уравнением. Фильтры соответствующего приема перечисляют варианты такого упрощения: уменьшение числа неизвестных, исключение сложных операций, получение линейного уравнения и т.п. Характеристика предполагает сопровождение другими характеристиками, определяющими такие фильтры.

(d) разложмод(x1). Эквивалентность для преобразования группы условий задачи на описание, обеспечивающего их декомпозицию. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcdefghijkpq}(h = ag \ \& \ i = dg \ \& \ \neg(h = 0) \ \& \ \neg(i = 0) \ \& \ p = gad\sin(k - j) + ae - db - fa + dc \ \& \ q = gad\sin(j + k) + ae + db - fa - dc \to h\sin j\cos k + b = c \ \& \ i\cos j\sin k + e = f \leftrightarrow p = 0 \ \& \ q = 0)$

Характеристика - "разложмод(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол для приема, находящего линейные комбинации уравнений с последующим разложением на несколько неизвестных множителей их левых частей p, q.

6. Упрощение одного утверждения с неизвестными при помощи другого.

   (a) внешперем(x1 x2 x3). Теорема представляет собой эквивалентность, позволяющую преобразовать одну посылку задачи на исследование с помощью другой посылки к виду, в котором все неизвестные относятся к внешней задаче. x1 - номер антецедента, идентифицируемого с другой посылкой, x2 - направление замены, x3 - список неизвестных заменяющего утверждения. Пример:

   $\forall_{abpqrsnx}(a/b = x \to pa^n/q = rb^n/s \leftrightarrow psx^n = qr)$

   Характеристика - "внешперем(1 второйтерм x)". Теорема представляет собой квазипротокол для приема, преобразующего уравнение задачи на исследование, имеющей цель "известно", к такому виду, в котором остаются только неизвестные внешней задачи на описание. Здесь выражения p, q, r, s не содержат неизвестных, n - натуральная константа, x - неизвестная внешней задачи на описание. Хотя бы одно из выражений a, b содержит неизвестные, не являющиеся неизвестными внешней задачи.

   (b) повторение(x1 x2 x3 x4). Теорема представляет собой эквивалентность, позволяющую преобразовать одну посылку задачи на исследование с помощью другой посылки к виду, в котором определяется значение некоторого уже встречающегося в посылках неизвестного выражения A. x1 - номер антецедента, идентифицируемого с другой посылкой, x2 - направление замены, x3 - выражение A, x4 - терм "неизвестные(...)", перечисляющий все переменные терма A, идентифицируемые с неизвестными выражениями. Пример:

   $\forall_{abxy}(x + y = a \to x^2 + y^2 = b \leftrightarrow 2xy = a^2 - b)$

   Характеристика - "повторение(1 второйтерм xy неизвестные(x, y))".

   (c) исклповтор(x1 x2 x3 x4). Теорема представляет собой эквивалентность, преобразующую некоторое утверждение задачи с помощью утверждения из контекста. x1 - номер антецедента, идентифицируемого со вторым утверждением, x2 - направление замены, x3 - общая переменная двух утверждений, исключаемая при замене и идентифицируемая с неизвестным подтермом, x4 - терм "известно(...)", перечисляющий все переменные, идентифицируемые с термами без неизвестных. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \cos(2a) = b \to \neg(\sin a = 0) \leftrightarrow \neg(1 - b = 0))$

   Характеристика - "исклповтор(2 второйтерм a известно(b))".

(d) Сокращ(x1 x2). Эквивалентность преобразует посылку задачи на исследование с помощью другой посылки для исключения неизвестных подвыражений. x1 - номер антецедента, идентифицируемого с другой посылкой, x2 - список переменных, идентифицируемых с исключаемыми подвыражениями. Пример:

$$\forall_{abcdnpq}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ ab=cd\rightarrow pa^n=qc^n\leftrightarrow pd^n=qb^n)$$

Характеристика - "Сокращ(3 a c)".

(e) числинт(x1). Эквивалентность преобразует одно уравнение задачи на исследование с помощью другого для упрощения относительно невырожденных числовых атомов. x1 - список переменных, идентифицируемых с выражениями, имеющими такие атомы. Предполагается, что прочие переменные идентифицируются с выражениями без невырожденных числовых атомов. Пример:

$$\forall_{abcdx}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ x - \text{число}\ \&\ ax=b\ \&\ \neg(a=0)\rightarrow cx=d\leftrightarrow bc=ad)$$

Характеристика - "числинт(a c x)".

(f) сокращПлюс(x1). Эквивалентность преобразует одно уравнение задачи на исследование с помощью другого, исключая неизвестное подвыражение. x1 - список всех переменных заменяющей части, которые могут содержать неизвестные. Пример:

$$\forall_{abcxy}(ax=b\ \&\ \neg(c=0)\rightarrow ac=y\leftrightarrow xy=bc)$$

Характеристика - "сокращПлюс(x y)". Исключено было содержащее неизвестные подвыражение a.

(g) неизвмножители(x1). Эквивалентность преобразует одно условие задачи на описание с помощью другого для обеспечения возможности декомпозиции. x1 - номер антецедента, идентифицируемого со вторым условием. Пример:

$$\forall_{abcdxy}(\neg(a=0)\ \&\ ax+b=0\ \&\ ad-bc=yp\rightarrow cx+d=0\leftrightarrow y=0\ \vee\ p=0)$$

Характеристика - "неизвмножители(2)".

(h) смрешение(x1 x2 x3 x4). Эквивалентность преобразует одно условие задачи на описание с помощью другого для попытки разрешения результата относительно неизвестных. x1 - номер антецедента, идентифицируемого со вторым условием задачи, x2 - номер антецедента, обращающегося к вспомогательной задаче на описание, x3 - переменная, идентифицируемая с содержащим неизвестные выражением, x4 - терм "известно(...)", перечисляющий все известные параметры. Пример:

$$\forall_{Aabcdpqr}(\neg(a=0)\ \&\ ab+c=d\ \&\ (aq-cp=ar-dp)=A\rightarrow pb+q=r\leftrightarrow A)$$

Характеристика - "смрешение(2 3 b известно(a d p r))". Теорема представляет собой квазипротокол, обеспечивающий создание приема, рассматривающего линейную комбинацию двух уравнений с одной неизвестной для получения более простого уравнения.

(i) извлечпараметр(x1 x2). Эквивалентность преобразует одно условие задачи на описание с помощью другого для исключения известного параметра. x1 - переменная, идентифицируемая с выражением, содержащим исключаемый параметр, x2 - список переменных, идентифицируемых с выражениями, содержащими неизвестные. Пример:

$\forall_{ABbcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ B - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ A = bc \to B = cd \leftrightarrow Ad - bB = 0)$

Характеристика - "извлечпараметр(c A B)".

(j) упрощумножение(x1). Эквивалентность упрощает условие задачи на описание с помощью другого условия. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcdefg}(\neg(bg = 0) \ \& \ ad = bg \ \& \ f = be - cd \to ae = cg \leftrightarrow f = 0)$

Характеристика - "упрощумножение(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол для создания приема, выполняющего деление уравнений, левые части которых имеют общий неизвестный множитель. Предполагается, что d, e - неизвестные, a содержит неизвестные, b и c известны.

(k) уравнминус(x1). Эквивалентность преобразует одно уравнение задачи на исследование с помощью другого к виду, допускающему декомпозицию. x1 - номер антецедента, идентифицируемого со вторым уравнением. Пример:

$\forall_{abcd}(c = a \ \& \ c - d = b \ \& \ a - \text{число} \to d = a \leftrightarrow b = 0)$

Характеристика - "уравнминус(1)". Теорема представляет собой квазипротокол. Основанный на ней прием предпринимает попытку разложить на множители разность левых частей уравнений с совпадающими ненулевыми правыми частями.

(l) исклфикс(x1 x2 x3). Эквивалентность преобразует одно условие задачи на описание с помощью другого для исключения заданной неизвестной x2. x3 - список переменных, которые тоже могут идентифицироваться с неизвестными. x1 - номер антецедента, идентифицируемого со вторым условием. Пример:

$\forall_{abcdefgx}(agx + b = c \ \& \ \neg(a = 0) \to dgx + e = f \leftrightarrow ae - bd = af - cd)$

Характеристика - "исклфикс(1 x b e)". Теорема представляет собой квазипротокол. Основанный на ней прием вычитает уравнения для устранения неизвестной x, относительно которой оба они линейны.

7. альтзначения(x1). Теорема преобразует утверждение к альтернативным сложным подвыражениям с неизвестными. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 < a \to ba^c + d = 0 \leftrightarrow 0 < b \ \& \ d < 0 \ \& \ \log_2 a \cdot c - \log_2(-d) = -\log_2 b \ \vee \ b < 0 \ \& \ 0 < d \ \& \ \log_2 a \cdot c - \log_2 d = -\log_2(-b) \ \vee \ b = 0 \ \& \ d = 0)$

Характеристика - "альтзначения(второйтерм)". Теорема позволяет перейти от показательных выражений к логарифмическим.

8. обобщантецедент(x1). Антецедент x1 - единственный существенный антецедент теоремы, для которого имеет смысл предпринимать попытку его ослабления. Пример:

   $\forall_{ab}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < b \leftrightarrow 0 < ab)$

   Характеристика - "обобщантецедент(меньше(0 a))". Она используется системой вывода теорем как подсказка для попытки рассмотреть нестрогие неравенства.

9. сложнреш. Эквивалентность для решения уравнения приводит к чрезмерно громоздким выражениям без неизвестных. Пример:

   $\forall_{abcdpqrx}(\neg(a = 0) \ \& \ p = (3ac - b^2)/(3a^2) \ \& \ q = (2b^3 - 9abc - 27a^2d)/(27a^3) \ \& \ r = q^2/4 + p^3/27 \ \& \ 0 < r \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx = d \leftrightarrow x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{r}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{r}} - b/(3a))$

   Характеристика указывает, что прием для формулы Кардано должен применяться лишь в крайних случаях (например, если все коэффициенты - константы).

10. функционально(x1 x2). Эквивалентность для разрешения относительно неизвестных списка x1, применяемая только в задачах на описание, имеющих цель "функционально". x2 - направление замены. Пример:

    $\forall_{Afx}(A - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \neg(A = \emptyset) \rightarrow f = \text{конст}(A, x) \leftrightarrow x = f(\text{элемент}(A)))$

    Характеристика - "функционально(x второйтерм)". Напомним, что цель "функционально" указывает на необходимость установить лишь факт однозначного определения значений неизвестных по значениям известных параметров задачи, без явного получения соответствующих выражений.

11. независит(x1). Теорема указывает способ подбора корней, не зависящих от заданных параметров. x1 - список исключаемых переменных, идентифицируемых с выражениями, имеющими запрещенные параметры. Пример:

    $\forall_{abdef}(a - b = de + f \ \& \ e = 0 \ \& \ f = 0 \rightarrow a = b)$

    Характеристика - "независит(d)". Теорема представляет собой квазипротокол, преобразуемый в следующую теорему приема:

    $\forall_{abcdef}(a - b = c \ \& \ c = de + f \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a = b \leftrightarrow e = 0 \ \& = f = 0)$

    После упрощения разности частей уравнения в результирующей сумме c усматривается слагаемое, имеющее сомножители с исключаемыми параметрами. Чтобы избавиться от этих сомножителей, остаток произведения приравнивается к нулю. Нулю полагается равным и остаток слагаемых выражения c.

12. нормвид(x1). Создан специальный нормализатор x1 для решения уравнений, основанного на данной эквивалентности. Пример:

    $\forall_{acde}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e = ad + cd^2 \leftrightarrow \neg(c = 0) \ \& \ (d = -(a + \sqrt{4ce + a^2})/(2c) \vee d = (-a + \sqrt{4ce + a^2})/(2c)) \ \& \ 0 \leq 4ce + a^2 \vee c = 0 \ \& \ e = ad)$

Характеристика - "нормвид(квадруравн)". Такого рода характеристика указывает на целесообразность создания приемов, сводящих уравнения к виду, обрабатываемому рассматриваемой эквивалентностью, и далее разрешающих их при помощи нормализатора.

13. следтеорема(x1 x2). Дополнение к характеристике "неизвтермы": терм "теорема(x1,x2)" ссылается на эквивалентность в базе теорем, которая будет далее использоваться для разрешения относительно неизвестных. Пример:

    $\forall_{abcx}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; x - \text{число} \to a\cos x + b\cos(2x) = c \leftrightarrow a\cos x + 2b(\cos x)^2 = b + c)$

    Характеристика - "следтеорема(путьвхождения 1)". Она ссылается на эквивалентность для решения квадратного уравнения. Имеется также характеристика "неизвтермы(косинус(x) квадруравн x второйтерм)".

14. замещениеусловий. Эквивалентность для преобразования условия задачи на описание, имеющей цель "замещение". Пример:

    $\forall_{ABKabcd}(\text{систкоорд}(K) \;\&\; \text{коорд}(A, K) = (a, b) \;\&\; \text{коорд}(B, K) = (c, d) \to A = B \leftrightarrow a = c \;\&\; b = d)$

    Характеристика - "замещениеусловий". Теорема представляет собой квазипротокол. В задаче на описание с целью "замещение" нужно переформулировать условия так, чтобы они не содержали неизвестных. Заметим, что здесь допускается появление неизвестных в посылках. Прием, основанный на теореме, проверяет, что равенство $A = B$ содержит неизвестные, а выражения a, b, c, d - не содержат.

15. известные(x1). Эквивалентность для преобразования известного подвыражения условия задачи на описание, упрощающая его разрешение относительно неизвестных. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abcdx}(d = ab + ac \to \sin x = ab + ac \leftrightarrow \sin x = d)$

    Характеристика - "известные(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол. Прием, созданный по нему, проверяет, что каждое из выражений b, c, с точностью до знака, является синусом либо косинусом. После попытки разложения на множители правой части антецедента проверяется, что d - синус либо косинус.

16. решение(x1 x2). Эквивалентность для разрешения утверждения относительно известного параметра x1. x2 - направление замены. Пример:

    $\forall_{abcx}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; x - \text{число} \;\&\; \neg(a = 0) \to ax + b = c \leftrightarrow x = (c - b)/a)$

    Характеристика - "решение(x второйтерм)". Заметим, что процедура вывода теорем получает эту теорему именно для данной характеристики. Решение линейного уравнения относительно неизвестных предпринимается двумя другими приемами: один группирует известные члены в правой части, другой - делит на коэффициент. В случае известного параметра нужно сразу усматривать возможность получить сравнительно простой результат при разрешении посылки, и оба указанных приема объединены в один.

17. подслучаи(x1 x2). Разбор случаев для группы условий задачи на описание, с попыткой явного разрешения для каждого подслучая. x1 - неизвестная, x2 - направление замены. Пример:

    $\forall_{APQabx}(a \subseteq A \ \& \ (\text{разбиение}(A \setminus a, y) \ \& \ y \subseteq \{; b\}) = P(y) \ \& \ (\text{разбиение}(A, x) \ \& \ x \subseteq \{; b\}) = Q(x) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \to \text{разбиение}(A, x) \ \& \ x \subseteq \{a; b\} \leftrightarrow Q(x) \ \vee \ \exists_y(P(y) \ \& \ x = y \cup \{a\}))$

    Характеристика - "подслучаи(x второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, предназначенный для последовательного отбора тех элементов конечного перечня множеств подмножеств множества A, которые образуют его разбиение. Левые части второго и третьего антецедентов обрабатываются вспомонательными задачами на описание.

Эквивалентности с описателями

1. эквменьше(x1). Эквивалентность упрощает описатель. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdef}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{boolean} \ \& \ e - \text{boolean} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \to \text{образ}(\lambda_x(-f(x), x - \text{число}), a) \subseteq [b, c] \leftrightarrow \text{образ}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), a) \subseteq [-c, -b])$

   Характеристика - "эквменьше(второйтерм)". Двоичные параметры b, d уточняют статус концов промежутка.

2. эквменьшеилиравно(x1). Эквивалентность упрощает описатель путем перехода к параметрическому описанию. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{afgx}(a = \lim\{f(n)\} \ \& \ a - \text{число} \to \text{частичнпредел}(x, \lambda_x(f(n) + g(n), n - \text{натуральное})) \leftrightarrow \exists_y(\text{частичнпредел}(y, \lambda_n(g(n), n - \text{натуральное})) \ \& \ x = a + y))$

   Характеристика - "эквменьшеилиравно(второйтерм)".

3. исклпрог. Эквивалентность для исключения описателя, использующая вспомогательные вычисления. Пример:

   $\forall_{abx}(b = \lim_{n\to\infty}\{a(n)\} \ \& \ b{-}\text{число} \to \text{частичнпредел}(x, \lambda_n(a(n), n{-}\text{натуральное})) \leftrightarrow x = b)$

   Характеристика - "исклпрог". Теорема представляет собой квазипротокол, усматривающий, что последовательность имеет предел и за счет этого определяющий все ее частичные пределы.

4. классобъекта. Эквивалентность для перехода от описателя "отображение" к описателю "класс". Пример:

   $\forall_{ABa}(\forall_i(A(i) \to \text{числотр}(B(i))) \to a \in \bigcap_{i,A(i)} B(i) \leftrightarrow$
   $\text{верхняягрань}(a, \text{set}_x(\exists_i(A(i) \ \& \ x = \inf(B(i))))) \ \&$
   $\text{нижняягрань}(a, \text{set}_x(\exists_i(A(i) \ \& \ x = \sup(B(i))))))$

Числовые атомы

1. Разрешение уравнений относительно невырожденных числовых атомов.

   Хотя приемы данного раздела относятся скорее к элементарной алгебре, нежели к тем разделам, в которых встречаются невырожденные числовые атомы, они имеют существенную специфику. Разрешение уравнения с невырожденными числовыми атомами даже в простейших случаях, не приводящих к сложным выражениям, может разрушить ход решения задачи, заставив решатель делать множество ненужных вещей. Поэтому обычно разрешающие приемы имеют достаточно большой уровень срабатывания и проверяют различные дополнительные условия. При их создании приходится учитывать, какие уравнения и группы уравнений типичны для рассматриваемых числовых атомов.

   Следует учитывать, что вывод соотношений для числовых атомов обычно нужен лишь для усмотрения цепочки связей между старыми числовыми атомами через вспомогательные числовые атомы. Отвлекаться на обработку этих соотношений, даже простейшую, целесообразно лишь в особых случаях.

   (a) числ(x1). Эквивалентность, разрешающая уравнение относительно невырожденного числового атома. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABabc}(\neg(a=0)\rightarrow al(AB)/c=b\leftrightarrow l(AB)=bc/a)$

   Характеристика - "числ(второйтерм)".

   (b) числзначение(x1). Эквивалентность, разрешающая уравнение относительно невырожденного числового атома для последующего вывода численного уравнения. Пример:

   $\forall_{ABCDabcdkmnpqrs}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ pl(AB)+ql(CD)=r\ \&\ (ml(CD)^2+n)/k=s\rightarrow(al(AB)^2+b)/c=d\leftrightarrow l(AB)=\sqrt{(cd-b)/a})$

   Характеристика - "числзначение(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол, на котором основан прием, усматривающий возможность извлечения уравнения для численных параметров из трех уравнений для невырожденных числовых атомов. Обозначенные маленькими буквами переменные идентифицируются с выражениями, не имеющими невырожденных числовых атомов.

   (c) числотр(x1). Эквивалентность, частично разрешающая уравнение относительно невырожденного числового атома. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABabcdpq}(\neg(a=0)\rightarrow a(pl(AB)+q)^2/c+d=b\leftrightarrow|pl(AB)+q|=\sqrt{(b-d)c/a}\ \&\ 0\leq ac(b-d))$

   Характеристика - "числотр(второйтерм)".

   (d) выражение(x1). Эквивалентность, позволяющая выразить один невырожденный числовой атом через другие. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCDab}(\neg(a=0)\rightarrow al(AB)=bl(CD)\leftrightarrow l(AB)=bl(CD)/a)$

   Характеристика - "выражение(второйтерм)".

(e) числтабл(x1). Эквивалентность для разрешения системы уравнений относительно невырожденных числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDapq}(0 < p + q \to l(AB) + l(CD) = a \ \& \ pl(AB) = ql(CD) \leftrightarrow l(AB) = aq/(p + q) \ \& \ l(CD) = ap/(p + q))$

Характеристика - "числтабл(воройтерм)".

(f) Эквивалентность, использующая пакетный синтезатор для выражения значения неизвестной x1 через используемые в задаче невырожденные числовые атомы. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abpx}(\text{отрезки}([b, a], p) \to x = a - b \leftrightarrow x = p)$

Характеристика - "знач(x второйтерм)". Синтезатор "отрезки" пытается выразить длину промежутка $[b, a]$ через рассматриваемые в задаче длины промежутков.

(g) исключтеор(x1). Эквивалентность, использующая соотношение пропорциональности двух числовых атомов для исключения одного из них. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDabcpq}(pl(AB) = ql(CD) \ \& \ \neg(q = 0) \to al(AB) + c = bl(CD) \leftrightarrow (aq - bp)l(AB) + cq = 0)$

Характеристика - "исключтеор(второйтерм)".

2. стандчастнреш(x1). Эквивалентность для подготовки разрешения равенства относительно невырожденных числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABabcde}((al(AB) + b)(cl(AB) + d) = e \leftrightarrow acl(AB)^2 + (bc + ad)l(AB) + bd = e)$

Характеристика - "стандчастнреш(второйтерм)".

3. Комбинирование нескольких уравнений с числовыми атомами.

(a) уравнумножение(x1). Эквивалентность, преобразующая уравнение с невырожденными числовыми атомами при помощи группы других уравнений в группу уравнений, каждое из которых проще, чем некоторое исходное. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDEFabcdmnpq}(\text{разныеточки}(A, B) \ \& \ \text{разныеточки}(C, D) \ \& \ \text{разныеточки}(E, F) \ \& \ \neg(p = 0) \ \& \ cl(EF) = al(AB)^n \ \& \ cl(CD) = bl(AB)^m \ \& \ d = al(AB)^{n-1} + bl(AB)^{m-1} + c \ \& \ d = p \to l(AB) + l(CD) + l(EF) = q \leftrightarrow cq = pl(AB) \ \& \ aql(AB)^{n-1} = pl(EF) \ \& \ bql(AB)^{m-1} = pl(CD))$

Характеристика - "уравнумножение(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол для приема, выполняющего декомпозицию уравнения относительно числовых атомов. Пятый, шестой и восьмой антецеденты идентифицируются с другими уравнениями. Седьмой антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Выражения p, q не содержат неизвестных.

(b) пропорцисключ(x1). Эквивалентность, использующая два соотношения пропорциональности для исключения невырожденных числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABCDabcd}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(l(AB)=0)\ \&\ al(AB)=bl(CD)\rightarrow cl(AB)=dl(CD)\leftrightarrow ad=bc)$$

Характеристика - "пропорцисключ(второйтерм)".

(c) пропорцнаборы(x1). Эквивалентность, комбинирующая два уравнения для получения соотношения пропорциональности для числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{Kabcdei}(a\cdot\text{крд}(b,K,i)+c=0\rightarrow d\cdot\text{крд}(e,K,i)+c=0\leftrightarrow a\cdot\text{крд}(b,K,i)=-d\text{крд}(e,K,i))$$

Характеристика - "пропорцнаборы(второйтерм)".

(d) степеньмн(x1). Эквивалентность, комбинирующая уравнения для понижения степени числового атома. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABabcde}(a+(b+l(AB))^2=c\rightarrow a+(d-l(AB))^2=e\leftrightarrow 2(b+d)l(AB)=c-e-b^2+d^2)$$

Характеристика - "степеньмн(второйтерм)".

(e) численныйатом(x1). Эквивалентность, комбинирующая уравнения для получения равенства двух числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABCDac}(al(AB)=c\ \&\ \neg(a=0)\rightarrow al(CD)=c\leftrightarrow l(AB)=l(CD))$$

Характеристика - "численныйатом(второйтерм)".

(f) сокращтеор(x1). Эквивалентность, использующая комбинацию уравнений и сокращение для исключения невырожденных числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABCDabcdp}(\neg(l(CD)=0)\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ a=bl(CD)^2\ \&\ (bc-ad=0)=(p=0)\rightarrow c=dl(CD)^2\leftrightarrow p=0)$$

Характеристика - "сокращтеор(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол для приема, выполняющего следующие действия. В предположении, что a,b,c,d не содержат символа "расстояние", левая часть четвертого антецедента разлагается на множители. После сокращений получается равенство нулю выражения p, имеющего единственный числовой атом с неизвестными. При этом исходное уравнение имело более одного такого атома.

(g) уравнменьше. Эквивалентность для исключения невырожденных числовых атомов в уравнении путем комбинации с другими уравнениями. x1 - направление замены. Пример:

$$\forall_{ABCDabcdp}(l(AB)l(CD)=d\ \&\ l(AB)+l(CD)+b=c\ \&\ p=(c-b)^2-a-2d\rightarrow l(AB)^2+l(CD)^2=a\leftrightarrow p=0)$$

Характеристика - "уравнменьше(второйтерм)".

(h) пропорцрасст(x1). Эквивалентность, выводящая соотношение пропорциональности путем деления двух соотношений с невырожденными числовыми атомами. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{ABCDabc}(\neg(a=0)\ \&\ al(AB)=b \to al(CD)=c \leftrightarrow bl(CD)=cl(AB))$

Характеристика - "пропорцрасст(второйтерм)".

4. упрощУмножение(x1). Эквивалентность для упрощения равенства относительно невырожденных числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABabcd}(0 \le a\ \&\ 0 \le b\ \&\ 0 \le d\ \&\ c=d^2 \to al(AB)^2=bc \leftrightarrow \sqrt{a}l(AB)=\sqrt{b}d)$

   Характеристика - "упрощУмножение(второйтерм)".

5. исклант(x1). Эквивалентность для исключения части вхождений числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCDabcpqr}(\neg(a=0)\ \&\ al(AB)l(CD)/b=c \to pl(AB)l(CD)+q=r \leftrightarrow pbc/a+q=r)$

   Характеристика "исклант(второйтерм)". Теорема является квазипротоколом. По ней создан прием, в котором проверяется, что a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Выражения p, q, r их содержать могут.

6. эквуглы. Эквивалентность двух равенств невырожденных числовых атомов. Пример:

   $\forall_{ABC}(A$ – точка & B – точка & C – точка & $\triangle(ABC) \to l(AB)=l(BC) \leftrightarrow \angle(BAC)=\angle(BCA))$

7. пропорцуравн(x1). Эквивалентность для перехода к соотношению пропорциональности двух числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCDab}(al(AB)-bl(CD)=0 \leftrightarrow al(AB)=bl(CD))$

   Характеристика - "пропорцуравн(второйтерм)".

8. неравенства. Эквивалентность для двух неравенств с невырожденными числовыми атомами. Пример:

   $\forall_{ABC}(A$ – точка & B – точка & C – точка & $\neg(A=B)\ \&\ \neg(B=C)\ \&$
   $\neg(A=C) \to l(AB)<l(BC) \leftrightarrow \angle(ACB)<\angle(BAC))$

9. числвыраз(x1). Переформулировка нечислового отношения через отношение для числовых атомов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCD}(A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $\neg($прямая$(AB)=$ прямая$(AC))\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ D\in$ прямая$(BC) \to$
   биссектриса$(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD)=\angle(DAB))$

   Характеристика - "числвыраз(второйтерм)".

Нечисловые атомы

1. атом(x1). Эквивалентность для выражения нечислового атома через атомарные параметры. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABabc}(\neg(a=0)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(c)\rightarrow a\cdot\text{вектор}(AB)+b=c\leftrightarrow \text{вектор}(AB)=1/a(c-b))$

   Характеристика - "атом(воройтерм)".

Нормализаторы

1. уравнмодуль(x1 x2 x3). Преобразование в нормализаторе уравнений x1 к виду, допускающему стандартный разрешающий прием. x2 - направление замены, x3 - неизвестная. Пример:

   $\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\rightarrow\sqrt{3}\sin a-\cos a<b\leftrightarrow 2\sin(a-\pi/6)<b)$

   Характеристика - "уравнмодуль(уравнменьше воройтерм x1)".

2. группа(x1 x2). Группировка в нормализаторе уравнений x1 относительно сложного выражения с неизвестными. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdefghpq}(a=fg\ \&\ e=fh\rightarrow ab^{c/d}+eb^{c/d}+p<q\leftrightarrow f(g+h)b^{c/d}+p<q)$

   Характеристика - "группа(уравнменьше воройтерм)".

3. исключслова(x1 x2). Исключение сложных выражений в нормализаторе уравнений x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0<a\rightarrow 0\leq a^b-a^c\leftrightarrow 0\leq 1-a\ \&\ 0\leq c-b\ \vee\ 1-a\leq 0\ \&\ c-b\leq 0)$

   Характеристика - "исключслова(уравнменьшеилиравно воройтерм)".

4. вычтерм(x1 x2). Стандартная схема вычислений в нормализаторе уравнений x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abkmnrx}(a-\text{функция}\ \&\ b-\text{функция}\ \&\ k-\text{натуральное}\ \&\ m-\text{натуральное}\ \&\ n-\text{натуральное}\ \&\ \mathrm{Dom}(a)=\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}\ \&\ \mathrm{Dom}(b)=\{1,\ldots,k\}\times\{1,\ldots,n\}\ \&\ \mathrm{Val}(a)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(b)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ r\in\{1,\ldots,\min(m,n)\}\ \&\ \neg(a(r,r)=0)\rightarrow xa=b\leftrightarrow x\cdot\lambda_{ij}(((a(i,j)a(r,r)-a(i,r)a(r,j))/a(r,r)\ \text{при}\ \neg(g=r),\ \text{иначе}\ a(i,j)),i\in\{1,\ldots,m\}\ \&\ j\in\{1,\ldots,n\})=\lambda_{pq}(((b(p,q)a(r,r)-a(r,q)b(p,r))/a(r,r)\ \text{при}\ \neg(q=r),\ \text{иначе}\ b(p,q)),p\in\{1,\ldots,k\}\ \&\ q\in\{1,\ldots,n\}))$

   Характеристика - "вычтерм(уравнматр воройтерм x)". Теорема осуществляет вычитание кратных заданного столбца при решении матричного уравнения.

5. разложмн(x1 x2). Эквивалентность может использоваться для попытки декомпозиции с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам. x1 - название нормализатора, x2 - указатель вхождения подвыражения заменяющего утверждения, к которому применяется нормализатор. Пример:

   $\forall_{bc}(b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\rightarrow b=c\leftrightarrow c-b=0)$

   Характеристика - "разложмн(видумножение фикс(0 2 1))".

6. вычрасст(x1). Эквивалентность, использующая нормализатор вычисления x1 для преобразования условия задачи на доказательство. Пример:

   $\forall_{abcf}(a = \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) \to \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) \leftrightarrow a)$

   Характеристика - "вычрасст(нормнижняягрань)". Теорема представляет собой квазипротокол, используемый на завершающем этапе доказательства неравенства с помощью производной. Начинается это доказательство с замены неравенства на утверждение "нижняягрань(0, образ(f,...))" про некоторую вспомогательную функцию. Yf Прием срабатывает после вычисления производной и анализа ее свойств. Нормализатор "нормнижняягрань" сводит исходную область к множеству корней производной и особым точкам. Перейдя к конечным множествам, этот же нормализатор возвращает запись условия задачи в виде неравенств.

7. нормдн. Эквивалентность нормализатора дизъюнкций. Пример:

   $\forall_{abcdefgh}(a - \text{число} \; \& \; b - \text{число} \to (a < b \; \& \; c \; \vee \; b < a \; \& \; d \; \vee \; a = b \; \& \; e) \; \& \; (a < b \; \& \; f \vee b < a \; \& \; g \vee a = b \; \& \; h) \leftrightarrow a < b \; \& \; c \; \& \; f \vee b < a \; \& \; d \; \& \; g \vee a = b \; \& \; e \; \& \; h)$

8. станднабор(x1). Эквивалентность, использующая нормализатор приведения к заданным заголовкам для контекстной стандартизации не содержащего неизвестных подвыражения условия задачи на описание. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdefg}(g = a + b \to (a + b)^c d + e = f \leftrightarrow g^c d + e = f)$

   Характеристика - "станднабор(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол для разложения на множители известного коэффициента уравнения, имеющего вид суммы.

Координаты

1. Точки(x1). Эквивалентность преобразует равенство для множества точек с заданными координатами в равенство для множества координат этих точек. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABK}(A = \text{точки}(B, K) \leftrightarrow \text{коорд}(A, K) = B)$

   Характеристика - "Точки(второйтерм)".

2. числопред(x1). Эквивалентность выражает утверждение через параметры координат. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCKabcdxy}(A - \text{точка} \; \& \; B - \text{точка} \; \& \; C - \text{точка} \; \& \; \text{систкоорд}(K) \; \& \; \neg(A = B) \; \& \; \text{коорд}(A, K) = (a, b) \; \& \; \text{коорд}(B, K) = (c, d) \; \& \; \text{коорд}(C, K) = (x, y) \to C \in \text{прямая}(AB) \leftrightarrow (c - a)(y - b) = (d - b)(x - a))$

   Характеристика - "числопред(второйтерм)".

3. числитель(x1). Эквивалентность переформулирует утверждение через отдельные координаты объектов. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Kpqr}$(Вектор(p) & Вектор(q) & одномерный(p, K) & одномерный(q, K) & одномерный(r, K) & Трехмерн(K) $\to$ $p + q = r$ $\leftrightarrow$ крд$(p, K, 1)$ + крд$(q, K, 1)$ = крд$(r, K, 1)$)

Характеристика - "числитель(второйтерм)".

4. уравнкрив. Эквивалентность определяет общий вид уравнения для координат точек множества заданного типа. Пример:

   $\forall_{ABCKP}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $P \subseteq$ плоскость(ABC) $\to$ Прямая(P) $\leftrightarrow$ $\exists_{abc}$(a – число & b – число & c – число & $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ & коорд(P, K) = set$_{xy}$(x – число & y – число & $ax + by + c = 0$)))

5. уравнпринадлежит(x1). Эквивалентность вводит уравнение для множества точек, рассматриваемого в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCKP}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ $\to$ $\exists_{xy}$(Прямая(x) & $P(x, y)$) $\leftrightarrow$ $\exists_{abcxy}$(коорд(x, K) = set$_{uv}$($au + bv + c = 0$ & u – число & v – число) & a – число & b – число & c – число & Прямая(x) & $P(x, y)$))

   Характеристика - "уравнпринадлежит(второйтерм)". В задачах на преобразование, имеющих цель "класс", требуется исключить описатели, втречающиеся в условиях. В аналитической геометрии они решаются путем выражения точек и множеств через координаты, упрощения полученных утверждений и перехода к бескоординатному заданию множества.

6. числкоэффициент(x1). Эквивалентность переформулирует утверждение, вводя координаты множества объектов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{AEKabcdefpq}$(a – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & коорд(E, K) = set$_{xy}$($ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ & x – число & y – число) $\to$ A – касательная кE $\leftrightarrow$ $\exists_{gh}$(g – число & h – число & коорд(A, K) = set$_{uv}$($(2ag + ch + d)u + (2bh + cg + e)v + dg + eh + 2f = 0$ & u–число & v–число) & $ag^2 + bh^2 + cgh + dg + eh + f = 0$))

   Характеристика - "числкоэффициент(второйтерм)".

7. Переобознач(x1). Эквивалентность переформулирует утверждение в терминах, позволяющих далее использовать координаты объектов. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCDEKa}$(прямкоорд(K) & ориентация$(K$, (вектор(AB), вектор(AC), вектор(AD))) = a $\to$ $E \in$ трехгранугол$(ABCD)$ $\leftrightarrow$ a = ориентация$(K$, (вектор(AE), вектор(AC), вектор(AD))) & a = ориентация$(K$, (вектор(AB), вектор(AE), вектор(AD))) & a = ориентация$(K$, (вектор(AB), вектор(AC), вектор(AE)))))

   Характеристика - "Переобознач(второйтерм)".

8. упрощплюсвект(x1). Эквивалентность преобразует утверждение с переходом к координатам более простого объекта. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{Kabcdegiq}$(коорд$(a, K) = (g, i, q)$ & $b-$число & $d-$число & $e-$число & систкоорд(K) & Вектор(a) & Вектор$(c) \rightarrow$ коорд$(a+c, K) = (b, d, e) \leftrightarrow$ коорд$(c, K) = (b-g, d-i, e-q)$)

Характеристика - "упрощплюсвект(второйтерм)".

9. вспомописание(x1). Эквивалентность исключает вспомогательные параметры в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Пример:

   $\forall_{ABCDEKabc}(A -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & прямкоорд(K) & $\neg(A = E)$ & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & коорд$(E, K) = (c, 0)$ & $0 < c$ & $\neg(A = D) \rightarrow a < 0 \leftrightarrow 0 < \angle(DAE) - \pi/2)$

   Характеристика - "вспомописание(второйтерм)".

10. существкоорд(x1). Эквивалентность переформулирует условие существования объекта в условие существования его координат. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{AKPQ}(\exists_{xy}(x -$ точка & $x \in A$ & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{uv}(P(u, v))$ & $Q(x, y)) \leftrightarrow \exists_{aby}(Q($тчкоорд$(K, (a, b)), y)$ & $P(a, b)$ & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{uv}(P(u, v))$ & $a -$ число & $b -$ число))

    Характеристика - "существкоорд(второйтерм)".

11. опредкоорд(x1). Эквивалентность для явного задания объекта через координаты в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{AKabcdpq}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & систкоорд(K) &
    Двумерн(K) & $p -$ число & $q -$ число & $\neg(p + q = 0) \rightarrow$
    $A \in$ отрезок(тчкоорд$(K, (a, b))$тчкоорд$(K, (c, d))$) & $pl(A$тчкоорд$(K, (a, b))) = ql(A$тчкоорд$(K, (c, d))) \leftrightarrow A =$ тчкоорд$(K, ((cq + pa)/(p + q), (dq + pb)/(p + q))))$

    Характеристика - "опредкоорд(второйтерм)".

12. определить(x1). Эквивалентность переформулирует утверждение через параметры координат множества объектов. x1 - направление замены. Пример:

    $\forall_{AKMNPabc}(a-$число & $b-$число & $c-$число & Прямая(A) & систкоорд(K) & $K = (M, N, P)$ & коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$) \rightarrow$ $A \parallel$ прямая$(MN) \leftrightarrow a = 0)$

    Характеристика - "определить(второйтерм)".

Специальная стандартизация

Большей частью, характеристики данного раздела имеют временный характер. Они содержат лишь неполную информацию о целевой ситуации, на которую рассчитан соответствующий прием, и будут дорабатываться по мере развития генератора приемов.

1. Стандартизация посылок.

   (a) стандпосылки(x1). Эквивалентность для специальной стандартизации посылки задачи на исследование. x1 - направление замены. Пример:

       $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a + b = 0 \rightarrow \sin a = \sin b)$

       Характеристика - "стандпосылки(второйтерм)". Теорема представляет собой квазипротокол. Последний антецедент идентифицируется с другой посылкой, причем выражение a имеет своим заголовком символ "плюс", а b - не имеет заголовка "плюс".

   (b) СтандПлюс(x1). Эквивалентность для специальной группировки посылок задачи на исследование. x1 - направление замены. Пример:

       $\forall_{abc}(b\text{—set} \ \& \ c\text{—set} \rightarrow \text{непрерывно}(a, b) \ \& \ \text{непрерывно}(a, c) \leftrightarrow \text{непрерывно}(a, b \cup c))$

       Характеристика - "СтандПлюс(второйтерм)". Прием, созданный по теореме, проверяет, что a - неизвестная, причем задача имеет цель "непрерывно".

   (c) преобр(x1). Эквивалентность для специальной стандартизации посылки задачи на преобразование. x1 - направление замены. Пример:

       $\forall_{ab}(a \leq b \leftrightarrow a < b)$

       Характеристика - "преобр(второйтерм)". Характеристика представляет собой квазипротокол. Прием, созданный по теореме, усматривает цель "нормИнтеграл", указывающую на преобразование подынтегрального выражения. Проверяется, что неравенство содержит переменную интегрирования. После этого происходит усиление посылки, так как подынтегральное выражение достаточно преобразовать для внутренности области интегрирования.

   (d) стандплс(x1). Эквивалентность для специальной стандартизации посылки задачи на описание. x1 - направление замены. Пример:

       $\forall_{abcdefg}(\text{диффлагранжа}(f, a, \lambda_{xy}(bx^2/c + dx^2/e + g(y), h(y))) \leftrightarrow \text{диффлагранжа}(f, a\lambda_{xy}((b/c + d/e)x^2 + g(y), h(y))))$

       Характеристика - "стандплс(второйтерм)". Предпринимается стандартизация выражения для дифференциала Лагранжа, необходимая для возможности срабатывания последующих приемов.

2. Стандартизация условий.

   (a) преобразование(x1). Эквивалентность для специальной стандартизации условия задачи на преобразование. x1 - направление замены. Пример:

       $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \ \& \ 0 \leq c \rightarrow a\sqrt{c} + b\sqrt{d} = 0 \leftrightarrow a^2c - b^2d = 0 \ \& \ ab \leq 0)$

       Характеристика - "преобразование(второйтерм)". Основанный на теореме прием стандартизирует равенство под квантором существования в условии задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Каждое из выражений c, d содержит переменные связывающей приставки этого квантора.

(b) стандПлюс(x1). Эквивалентность для специальной стандартизации условия задачи на доказательство. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to a \in [b, c] \leftrightarrow a - \text{число}\ \&\ b \leq a\ \&\ a \leq c)$

Характеристика - "стандПлюс(второйтерм)". Основанный на теореме прием стандартизирует условие принадлежности промежутку при составлении программы для реализации некоторого численного метода.

(c) опркласс(x1 x2). Эквивалентность для стандартизации параметрического описания в условиях задачи на описание. x1 - неизвестная, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcdex}(ad < 0 \to \forall_n(n - \text{целое} \to \neg(x = an/d + e)) \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое}\ \&\ (-an + a)/d + e < x\ \&\ x < -an/d + e))$

Характеристика - "опркласс(x второйтерм)". Соответствующий прием стандартизирует ответ, переходя от серии исключаемых точек к серии промежутков.

(d) Конст1(x1). Эквивалентность для стандартизации условия задачи на описание относительно константных подвыражений. Пример:

$\forall_{abcdnpq}(c - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n\ \&\ b = pq\ \&\ p|c\ \&\ d = c/p\ \&\ \text{нод}(a, p) = 1 \to ap^{n-1} = q + d\ \&\ 0 \leq n - 1)$

Характеристика - "Конст1(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что a, b - целочисленные константы, p - натуральная константа. Четвертый и седьмой антецеденты выделены указателем "программа", пятый - обрабатывается проверочным оператором. Правая часть шестого антецедента обрабатывается задачей на упрощение, причем проверяется, что дробь исчезает. Выражение n содержит целочисленную неизвестную.

(e) независят(x1). Стандартизация условия задачи на описание, ориентированная на учет цели "независит". x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \to a + b/c = d \leftrightarrow ac + b = cd)$

Характеристика - "независят(второйтерм)". Соответствующий прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "независит ...". Выражение c не содержит неизвестных и не содержит тех переменных, которые упомянуты в данной цели. Если d - неизвестная, не входящая в a, b, то прием блокируется.

(f) стандподбор(x1). Эквивалентность для стандартизации условия задачи на описание с помощью синтезатора. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{AGpqry}(\text{квадрканоничвид}(x, p(x), y, q, r)\ \&\ G = \text{числфунк}(y, q) \to \text{положитопред}(\lambda_x(p(x), A(x))) \leftrightarrow \text{положитопред}(G))$

Характеристика - "стандподбор(второйтерм)". Соответствующий прием обращается к синтезатору "квадрканоничвид" для приведения рассматриваемой квадратичной формы к каноническому виду.

3. Стандартизация описателей.

   (a) стандобъединение(x1). Эквивалентность для специальной стандартизации под описателем "класс". Пример:

   $\forall_{abc}(c - \text{число} \rightarrow \text{card}(a) + \text{card}(b) = c \leftrightarrow \text{card}(a) = c - \text{card}(b))$

   Характеристика - "стандобъединение(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что преобразуемое равенство расположено внутри описателя "класс", причем a - одна из его связанных переменных, а непосредственной надопераций описателя служит символ "мощность".

   (b) стандсумма(x1). Эквивалентность для специальной стандартизации под описателем "отображение". x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ax}(0 \leq a + x \leftrightarrow -a \leq x)$

   Характеристика - "стандсумма(второйтерм)". Соответствующий прием стандартизирует неравенство в условном выражении под интегралом, чтобы обеспечить возможность срабатывания приемов, разбивающих область интегрирования на подобласти.

4. общтермы(x1 x2). Эквивалентность преобразует утверждение для получения подтерма заданного вида x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(c) \rightarrow \text{компланарны}(a, b, c) \leftrightarrow \text{скалумнож}(a, \text{вектумнож}(b, c)) = 0)$

   Характеристика - "общтермы(вектумнож(b, c) второйтерм)". Соответствующий прием преобразует условие задачи на доказательство, если в ее посылках встречается выражение "вектумнож(b, c)".

5. атомарное(x1 x2). Эквивалентность, переформулирующая элементарное утверждение через атомарные объекты заданного типа x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A\text{—точка}\ \&\ B\text{—точка}\ \&\ C\text{—точка}\ \&\ D\text{—точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) \perp \text{вектор}(CD) \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD))$

   Характеристика - "атомарное(Вектор первыйтерм)". Теорема используется системой вывода теорем как дополнительное утверждение. На ней основан прием справочника поиска теорем, реагирующий на символ "перпендикулярно".

Прочие характеристики эквивалентностей

1. функция. Эквивалентность вводит вспомогательное обозначение для функции. Пример:

   $\forall_{abcfuv}(\text{Extr}(\lambda_x(u(x), v(x)), a, b, c) \leftrightarrow \text{Extr}(f, a, b, c))$

   Соответствующий прием вводит обозначение f для исследуемой на экстремум функции. В посылки задачи заносится определяющее функцию равенство.

2. одз. Теорема используется для создания приема, выполняющего контекстную расшифровку символа "одз". Пример:

   $\forall_{bcdfgh}(d = \text{set}_x(g(x)\ \&\ \text{одз}(h(x)))\ \&\ f = \lambda_x(h(x), g(x)) \rightarrow \text{Max}(f, \text{одз}, b, c) \leftrightarrow \text{Max}(f, d, b, c))$

2.1.5 Кванторные импликации

Вид консеквента

1. Заголовок консеквента - символ отношения.

   (a) элементарно. Теорема представляет собой кванторную импликацию без существенных посылок, имеющую элементарный консеквент. Примеры:

   $\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$

   $\forall_{bc}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set} \to b \subseteq b \cup c)$

   (b) свойство. Теорема представляет собой простую импликацию, консеквентом которой служит одноместное отношение от переменной. Пример:

   $\forall_{Af}(A - \mathrm{set}\ \&\ \text{конечное}(A)\ \&\ \text{перестановка}(f, A) \to \text{взаимнооднозначно}(f))$

   (c) пример. Теорема представляет собой кванторную импликацию без существенных посылок, консеквент которой - элементарное утверждение $f(A_1 \ldots A_n)$ либо отрицание такого утверждения. Все A_i, кроме одного, суть попарно различные переменные. Пример:

   $\forall_{bc}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set} \to \text{непересек}(c, b \setminus c))$

   (d) опредзначение(x1). Консеквент импликации имеет вид $P(t_1 \ldots t_n)$, причем значение t_i, если вообще существует, однозначно определено значениями $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$. x1 - номер i. Пример:

   $\forall_a(a - \mathrm{set}\ \&\ \neg(a = \emptyset)\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{огрсверху}(a) \to \text{наименьший}(\sup(a), \mathrm{set}_b(\text{верхняягрань}(b, a))))$

   Характеристика - "опредзначение(1)". Теорема является определением точной верхней грани.

   (e) свойства(x1). Простая импликация, выражающая свойства "сложного" объекта x1. Пример:

   $\forall_a(a - \text{число} \to \cos a \leq 1)$

   Характеристика - "свойства(косинус(a))".

   (f) числоценка. Простая импликация, дающая неравенство для невырожденных числовых атомов. Пример:

   $\forall_{ABCD}(A\text{—точка}\ \&\ B\text{—точка}\ \&\ C\text{—точка}\ \&\ D\text{—точка}\ \&\ \text{трапеция}(ABCD) \to 0 \leq \angle(ABC) - \pi/2)$

   (g) принадл. Кванторная импликация, консеквент которой имеет вид "принадлежит(x t)", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t. Пример:

   $\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ \text{трапеция}(ABCD)\ \&\ E \in \text{фигура}(ABCD)\ \&\ F \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(AD) \to F \in \text{отрезок}(AD))$

   (h) реализация. Кванторная импликация, корневое отношение консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Пример:

   $\forall_{ABCf}(A - \mathrm{set}\ \&\ B - \mathrm{set}\ \&\ \text{Отображение}(f, A, B)\ \&\ C - \mathrm{set}\ \&\ C \subseteq A \to \text{разбиение}(C, \mathrm{set}_x(\exists_y(y \in B\ \&\ x = \text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)))))$

(i) варопер(x1). Кванторная импликация обеспечивает развязку переменных списка x1. Пример:

$\forall_{acfghij}(\neg(b = f)$ & $\neg(c = f)$ & $\neg(f = g)$ & $\neg(f = h)$ & $\neg(f = i)$ & $\neg(f = j)$ & биссектриса$(ifbg)$ & $b-$точка & $c-$точка & $f-$точка & $g-$точка & $h-$точка & $i-$ точка & $j-$ точка & точкалуча(f, b, c) & точкалуча(f, g, h) & точкалуча$(f, i, j) \to$ биссектриса$(jfch))$

Характеристика - "варопер(c, h, j)". Теорема вводит для обозначения биссектрисы новые направляющие точки j, h, c вместо старых i, g, b.

2. Квантор существования в консеквенте.

(a) допконтекст. Теорема представляет собой кванторную импликацию, консеквент которой - квантор существования от конъюнкции элементарных утверждений. Пример:

$\forall_z(z-$ комплексное $\to \exists_{ab}(z = a \cdot \cos(b) + (a \cdot \sin(b))i$ & $a-$ число & $b-$ число & $0 \leq a$ & $-\pi < b$ & $b \leq \pi))$

(b) нормсуществует. Теорема представляет собой кванторную импликацию (возможно, вырожденную) без существенных посылок с квантором существования в консеквенте. Пример:

$\forall_a(a-$ число $\to \exists_b(b-$ число & $b < a))$

(c) существует(x1). Теорема представляет собой кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, которую можно применять для вывода следствий в посылках задачи на доказательство, с привязкой по x1-му антецеденту. Пример:

$\forall_{ABCDE}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $E-$точка & $\neg(A = E)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(A = B)$ & биссектриса$(BACE) \to \exists_D(D \in$ прямая(AE) & $D \in$ отрезок(BC) & точкалуча$(A, E, D)))$

Характеристика - "существует(8)".

(d) общий. Кванторная импликация с квантором существования в консеквенте была получена из эквивалентности, дающей общее параметрическое описание объектов заданного типа. Пример:

$\forall_{ABCKMN}(\neg(M = N)$ & $K = (A, B, C)$ & $M \in$ плоскость(ABC) & $N \in$ плоскость(ABC) & $M-$ точка & $N-$ точка & систкоорд$(K) \to \exists_{abc}(\neg(a^2 + b^2 = 0)$ & коорд(прямая$(MN), K) = \mathrm{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ & $x-$ число & $y-$ число) & $a-$ число & $b-$ число & $c-$ число))

Характеристика создается процедурой вывода теорем.

(e) выписка(x1). Квантор существования в консеквенте разворачивается в конечную дизъюнкцию для разбора случаев. Если указано x1, то оно определяет терм инициализации приема. Примеры:

$\forall_{nx}(x-$ натуральное & $n-$ целое & $x \leq n \to \exists_m(m \in \{1, \ldots, n\}$ & $x = m))$

$\forall_{kn}(k-$натуральное & $n-$целое $\to \exists_i(i \in \{0, \ldots, k-1\}$ & $n(\mathrm{mod}\ k) - i = 0))$

В первом случае x1 отсутствует, во втором - имеет вид "целаячасть(дробь(n k))".

   (f) перем. Разбор случаев в условиях задачи на описание, позволяющий установить связь между вспомогательными параметрами. Пример:

   $\forall_{abcdefghijkmn}(m-\text{целое} \mathbin{\&} n-\text{целое} \mathbin{\&} amb/c+d \leq i \mathbin{\&} i \leq amb/c+e \mathbin{\&} anb/c+g \leq i \mathbin{\&} i \leq anb/c+h \mathbin{\&} j=[(h-d)c/(ab)] \mathbin{\&} k=[(e-g)c/(ab)] \rightarrow \exists_f(f \in \{0,\ldots,j+k\} \mathbin{\&} n=m-j+f))$

   Прием устанавливает связь между параметрами m, n.

3. Дизъюнкция в консеквенте.

   (a) дизъюнкция. Консеквент имеет вид дизъюнкции. Пример:

   $\forall_{ab}(a-\text{число} \mathbin{\&} b-\text{число} \mathbin{\&} 0<ab \rightarrow a<0 \ \vee\ 0<b)$

   (b) альтернатива. Консеквент имеет вид дизъюнкции попарно несовместных утверждений. Пример:

   $\forall_{ab}(a-\text{число} \mathbin{\&} b-\text{число} \rightarrow a<b \ \vee\ b<a \ \vee\ a=b)$

   (c) числнабор(x1). Импликация с дизъюнкцией в консеквенте определяет разбор случаев для явного выражения числового атома x1 через другой числовой атом. Пример:

   $\forall_{ABCD}(A-\text{точка} \mathbin{\&} B-\text{точка} \mathbin{\&} C-\text{точка} \mathbin{\&} D-\text{точка} \mathbin{\&} \neg(B=D) \mathbin{\&} \neg(A=B) \mathbin{\&} \neg(B=C) \mathbin{\&} D \in \text{прямая}(BC) \rightarrow B \in \text{отрезок}(CD) \mathbin{\&} \angle(ABC)=\pi-\angle(ABD) \ \vee\ \text{точкалуча}(B,C,D) \mathbin{\&} \angle(ABC)=\angle(ABD))$

   Характеристика - "числнабор($\angle(ABC)$)".

   (d) Альтернатива(x1). Импликация для разбора случаев по параметрическим описаниям неизвестной x1.

   $\forall_{abcn}(a-\text{целое} \mathbin{\&} b-\text{целое} \mathbin{\&} c-\text{целое} \mathbin{\&} x-\text{целое} \mathbin{\&} \neg(a-\text{even}) \mathbin{\&} (ax^n+b)c/d-\text{even} \rightarrow \exists_k(k-\text{целое} \mathbin{\&} x=2k) \ \vee\ \exists_k(k-\text{целое} \mathbin{\&} x=2k+1))$

   Характеристика - "Альтернатива(x)".

   (e) Случай(x1). Квазипротокол для разбора случаев с целью исключения сложного подвыражения x1. Пример:

   $\forall_{abcd}(a|b|+c=d \rightarrow 0 \leq b \ \vee b<0)$

   Характеристика - "Случай(модуль(b))".

   (f) смцели. Специальный разбор случаев в условиях задачи на описание. Пример:

   $\forall_{abmnpq}(a-\text{целое} \mathbin{\&} b-\text{целое} \mathbin{\&} m-\text{целое} \mathbin{\&} n-\text{целое} \mathbin{\&} q-\text{целое} \mathbin{\&} 0 \leq m \mathbin{\&} 0 \leq n \mathbin{\&} ap^m=bp^n+q \rightarrow n=0 \ \vee\ 0 \leq n-1)$

   Соответствующий прием выводит дизъюнктивное условие. Исходное уравнение, идентифицируемое с последним антецедентом, содержит целочисленную неизвестную. Выражение n не константное и не усматривается, что оно положительное. Разбор случаев позволяет воспользоваться соображениями делимости на p.

4. Квантор общности в консеквенте.

(a) тождвывод. Вывод кванторного тождества для преобразования в рекуррентное соотношение. Пример:

$$\forall_{ABCabm}(\forall_n(n - \text{натуральное} \to \det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1,\dots,an+b\} \ \& \ j \in \{1,\dots,an+b\})) = B(n)) \ \& \ \text{set}_i(i \in \{1,\dots,an+b\} \ \& \ \neg(A(1,i) = 0)) = \{;C\} \ \& \ l(C) = m \to \forall_n(n - \text{натуральное} \ \& \ 2 \le n \to B(n) = \sum_{k=1}^{m}(A(1,C(k))(-1)^{C(k)+1}\det(\lambda_{ij}((A(i{+}1,j) \text{ при } j < C(k), \text{ иначе } A(i{+}1,j{+}1)), i \in \{1,\dots,an+b-1\} \ \& \ j \in \{1,\dots,an+b-1\})))))$$

Теорема выводит кванторную импликаацию для разложения определителя по строке, из которой будет выводиться рекуррентное соотношение для определителя.

(b) квантимплик. Кванторная импликация с кванторной импликацией в консеквенте, представляющей собой расшифровку антецедента. Пример:

$$\forall_a(\text{убывмножества}(a) \to \forall_{ij}(i \in \mathbb{N} \ \& \ j \in \mathbb{N} \ \& \ i < j \to a(j) \subseteq a(i)))$$

(c) обобщ. Вывод обобщения кванторной импликации. Пример:

$$\forall_f(\forall_n(n - \text{натуральное} \to 0 \le f(n)) \ \& \ \forall_{mn}(m - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \to f(m+n) \le f(m) + f(n)) \to \forall_{mn}(m - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \to f(m) \le [m/n]f(n) + (0 \text{ при } m|n, \text{ иначе } f(m(\text{mod } n)))))$$

(d) импликация(x1). Обратный вывод для исключения кванторной импликации. x1 - список номеров заменяющих антецедентов. Пример:

$$\forall_{ab}(0 < a \ \& \ 0 \le b - 1 \ \& \ a < b \to \forall_n(n - \text{натуральное} \to \neg(a = b^n)))$$

Характеристика - "импликация(3)".

5. Конъюнкция в консеквенте.

Это редкий случай в базе теорем, причем приводимые ниже характеристики большей частью одноразовые - относятся к единственной теореме.

(a) конъюнкция. Теорема представляет собой кванторную импликацию с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции элементарных утверждений. Пример:

$$\forall_{abcdefghjrK}(\text{коорд}(a,K) = (h,j,r) \ \& \ g - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ b = ga \ \& \ \text{коорд}(b,K) = (c,d,e) \to c = gh \ \& \ d = gj \ \& \ e = gr)$$

(b) конечно. Вывод группы посылок задачи на исследование, ограничивающих значения неизвестных конечным множеством вариантов. Пример:

$$\forall_{GH}(\text{подгруппа}(H, \text{перестановки}(n)) \ \& \ \{;b\} = \text{set}_y(\text{перестановка}(y, \{1,\dots, n\})) \to \text{носитель}(\text{перестановки}(n)) = \{;b\} \ \& \ H \subseteq \{;b\})$$

(c) следствия. Упрощающий вывод группы утверждений в посылках задачи на доказательство. Пример:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \le a^2 - b^2 \ \& \ 0 \le a \to 0 \le a - b \ \& \ 0 \le a + b)$$

(d) теквхожд(x1). Использование известного текущего числового атома x1 для составления системы численных уравнений. Пример:

$$\forall_{ABKabcdmnp}(m - \text{число} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{Вектор}(B) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{оруголмежду}(A,B,K) = p \ \& \ m{\cdot}\text{длина}(A) = n{\cdot}\text{длина}(B) \ \&$$

$\text{коорд}(A,K)=(a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(c,d)\to m(a\cos p-b\sin p)=cn\ \&\ m(a\sin p+b\cos p)=dn)$

Характеристика - "теквхожд(оруголмежду(A,B,K))".

(e) допсвязь(x1). Вывод двух тождеств, одно из которых связывает числовой атом x1 с другими атомами, а другое - дополняет первое, указывая связь некоторого отличного от x1 атома первого тождества с другими атомами. Пример:

$\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ l(AB)=l(BC)\ \&\ \text{прямая}(BD)\perp\text{прямая}(AC)\ \&\ D\in\text{прямая}(AC)\to\angle(ABD)=\angle(DBC)\ \&\ 2\angle(ABD)=\angle(ABC))$

Характеристика - "допсвязь($\angle(ABC)$)".

(f) равнчисл. Теорема представляет собой кванторную импликацию с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции равенств для невырожденных числовых атомов. Пример:

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ l(AB)=l(AC)\ \&\ \text{прямая}(AB)\perp\text{прямая}(AC)\to\angle(ABC)=\pi/4\ \&\ \angle(ACB)=\pi/4)$

6. Описатели в консеквенте.

(a) отображение. Кванторная импликация имеет элементарные антецеденты и бескванторный консеквент с описателем "отображение". Пример:

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{натуральное}\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ c-\text{целое}\ \&\ |a|<1\ \&\ 0\le bc+d\to\sum_{i=c}^{\infty}a^{bi+d}=a^d/(1-a^b)-\sum_{i=0}^{c-1}a^{bi+d})$

(b) упрощстанд(x1). Кванторная импликация с консеквентом "эквсемейства(...)" обеспечивает замену переменной описателя "отображение" с конечной областью определения, упрощающую задание этой области. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abck}(c-\text{функция}\ \&\ a-\text{натуральное}\ \&\ b-\text{натуральное}\ \&\ k-\text{натуральное}\to\text{эквсемейства}(\lambda_m(c(m),m-\text{целое}\ \&\ k|m\ \&\ a\le m\ \&\ m\le b),\lambda_m(c(km),m-\text{целое}\ \&\ -[-a/k]\le m\ \&\ m\le[b/k])))$

Характеристика - "упрощстанд(втоpойтерм)".

(c) числфунк. Переход в определении функции от невырожденного числового атома к численному параметру. Пример:

$\forall_{abfyz}(\text{Max}(\lambda_x(f(x),x-\text{число}),[0,b-a],y,z)\to\text{Max}(\lambda_x(f(\text{длина}([a,x])),x-\text{число}),[a,b],\text{set}_v(\exists_w(w\in y\ \&\ v=a+w)),z))$

(d) функперех(x1). Теорема представляет собой частный случай определения функциональной характеристики. x1 - номер операнда консеквента, на котором расположена характеризуемая функция. Пример:

$\text{первообразная}(\lambda_x(1/(1+x^2),x-\text{число}),\lambda_y(\text{arctg}\,y,y-\text{число}))$

Характеристика - "функперех(1)".

(e) функ. Импликация, полученная из определения отношения путем явного выражения функции через прочие параметры. Пример:

$\forall_g(\forall_x(x \in \mathrm{Dom}(g) \to \text{дифференцируема}(g,x))\ \&\ \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ g - \text{функция} \to \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(g,x), x \in \mathrm{Dom}(g)), g))$

Вид антецедентов

1. антецедент. Теорема представляет собой простую импликацию, некоторый существенный антецедент которой содержит все переменные связывающей приставки. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < ab \to 0 < a/b)$

Связь консеквента с антецедентами

1. вывод. Теорема представляет собой простую импликацию, у которой каждое выражение консеквента встречается в антецедентах и которая может представлять интерес для создания приема вывода. Пример:

   $\forall_{abcd}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ a \in d\ \&\ d \subseteq b \cup c\ \&\ \neg(a \in b) \to a \in c)$

2. исключ. Теорема представляет собой простую импликацию с существенными посылками, у которой консеквент содержит не все параметры антецедентов, но каждый параметр консеквента встречается в антецедентах. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ a < b\ \&\ b + c \leq 0 \to a + c < 0)$

3. обобщение(x1 x2). Консеквент импликации получается из x1-го антецедента подстановкой вместо переменной x2 выражения $f(\mathrm{x}2, y)$, имеющего единицу по переменной y. Пример:

   $\forall_{bce}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ b \subseteq e\ \&\ c \subseteq e \to b \cup c \subseteq e)$

   Характеристики - "обобщение(4 b)" и "обобщение(5 c)".

4. проверка. Кванторная импликация с элементарным консеквентом, отличным от тождества, у которой антецеденты имеют переменные, не входящие в консеквент, причем каждая такая новая переменная возникает из равенства в антецеденте, одна из частей которого содержит только старые переменные. Пример:

   $\forall_{abc}(b - \text{целое}\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ ab = c \to a|c)$

5. опрзнач(x1). Кванторная импликация однозначно определяет (быть может, в сочетании с рядом антецедентов) своим консеквентом значение переменной x1, которая независимо от этого определяется некоторой другой группой антецедентов. Пример:

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AB) = l(CB)\ \&\ l(AD) = l(DB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \neg(A = B) \to \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AB))$

   Характеристика - "опрзнач(D)".

6. Специальные типы импликаций.

   (a) транзитивно. Теорема представляет собой свойство транзитивности некоторого двуместного отношения. Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c)$

   (b) транзитоперанд. Теорема имеет вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных существенных антецедентов. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ c \in a \rightarrow c \in b)$

   (c) транзитпереход. Теорема представляет собой обобщенную транзитивность относительно части переменных: имеются два существенных антецедента A_1, A_2 и консеквент A_3. Вне непустого пересечения параметров всех этих трех утверждений остаются ровно три переменные x, y, z. При этом x, y входят в A_1; y, z - в A_2; x, z - в A_3. Пример:

   $\forall_{ABCDE}(A-$точка $\& \ B-$точка $\& \ C-$точка $\& \ D-$точка $\& \ E-$точка $\& \ \neg(D = E) \ \&$ непересек(отрезок(AB), прямая(DE)) $\&$ непересек(отрезок(BC), прямая(DE)) $\rightarrow$ непересек(отрезок(AC), прямая(DE)))

   (d) монотонно. Теорема имеет единственный существенный антецедент $P(x, y)$ и консеквент вида $P(f(x, z), f(y, z))$, где x, y, z - переменные. Пример:

   $\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq d \rightarrow b \cap c \subseteq d \cap c)$

   (e) Отрицание. Теорема представляет собой импликацию с единственным существенным антецедентом A и консеквентом "не(B)". Каждое из утверждений A, B - либо двуместное отношение для различных переменных, либо двуместное отношение для константы и выражения $f(p(x), q(y))$, где $p(x), q(y)$ - одноместные операции от переменных либо переменные. Утверждения A, B бесповторны и содержат одни и те же переменные. Отрицание отношений с тем же заголовком, что у B, устраняется при общей стандартизации. Пример:

   $\forall_{ab}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ 0 < a - b \rightarrow \neg(0 < b - a))$

Прямой вывод

1. Вывод безотносительно к неизвестным.

   (a) Вывод. Вывод следствий в посылках задачи на доказательство. Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ 0 < a + b \ \& \ 0 \leq c - b \rightarrow 0 < a + c)$

   Решение о том, что данную импликацию целесообразно использовать в отдельном приеме, связанном только с задачами на доказательство, принимается еще на этапе рассмотрения теорем. На ней могут быть основаны и другие приемы вывода, но их лучше оптимизировать отдельно.

   (b) выводусловия(x1). Вывод в посылках задачи на доказательство следствия, содержащего заданное выражение x1 из условия. Пример:

$\forall_{bdfx}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{образ}(f, b) \subseteq d \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ x \in b \ \& \ f -$ функция $\rightarrow f(x) \in d)$

Характеристика - "выводусловия($f(x)$)".

(c) равнтекст(x1). Вывод в посылках задачи на доказательство для сближения с текущим подвыражением x1 условия этой задачи. Пример:

$\forall_{abcfG}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $c =$ обрэлемент(a, f) $\rightarrow f(a, b, c,$ обрэлемент(b, f)) $\in$ коммутант(G))

Характеристика - "равнтекст($f(a, b, c)$)".

(d) ближе. Вывод в посылках задачи на доказательство, ориентированный на сближение с подвыражением ее условия. Пример:

$\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $0 \leq c$ & $a^2 + b^2 = c$ & $0 \leq a + b \rightarrow 0 \leq a + b - \sqrt{c})$

Характеристика неполна. Фактически теорема создана, чтобы реагировать на наличие в условии задачи радикалов от a и b, понижая их степени в посылках.

(e) независимы(x1). Вывод посылки, подготавливающей исключение подвыражения x1 условия задачи на описание для устранения зависимости от заданных переменных. Пример:

$\forall_{abcdef}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $0 < a + bc$ & $0 \leq d + ef$ & $0 < b$ & $0 < e \rightarrow 0 < bec + bef + ae + bd)$

Характеристика - "независимы($c + f$)". После группировки и вынесения за скобки be появляется возможность исключить $c + f$, занулив be.

(f) менее. Вывод неравенства для численных параметров при контроле подслучая в задаче на исследование. Пример:

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число & $\cos a = b$ & $0 \leq b$ & $0 < pi/2 - b \rightarrow 0 < a)$.

(g) меньше. Вывод неравенства для численных параметров в задаче на исследование, имеющей цель "известно". Пример:

$\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $ab/d = c$ & $0 < b$ & $0 \leq c$ & $0 < d \rightarrow 0 \leq a)$

В данном квазипротоколе предполагается, что a - неизвестная.

(h) меньшеилиравно. Вывод неравенства для численных параметров в задаче на исследование, не имеющей цели "известно". Пример:

$\forall_{abcdex}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $x -$ число & $d = b^2 - 4a(c - e)$ & $ax^2 + bx + c = e \rightarrow 0 \leq d)$

(i) объект(x1). Вывод многоместного отношения, характеризующего объект x1. Пример:

$\forall_{ABCDEFGH}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$точка & $G -$точка & $H -$точка & $\neg(G = E)$ & трапеция($ABCD$) & $E \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(AE) & прямая(EF) $\parallel$ прямая(AD) & прямая(GH) $\parallel$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(CD) & $H \in$ прямая(CD) $\rightarrow$ трапеция($GEFH$))

Характеристика - "объект(фигура($GEFH$))".

(j) исключзадачи(x1). Вывод в посылках задачи на доказательство, ориентированный на исключение заданной переменной x1. Пример:

$\forall_{abcdx}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $x -$ число & $0 < a$ & $c < 0$ & $0 < ax + b$ & $0 < cx + d \to 0 < ad - bc)$

Характеристика - "исключзадачи(x)".

(k) группоид(x1 x2 x3 x4). Кванторная импликация выводит следствие из двух утверждений, позволяющее группировать их подвыражения, идентифицированные с переменными x, y. x1,x2 - номера антецедентов, идентифицируемых с утверждениями; x3 и x4 - переменные x, y. Пример:

$\forall_{abcdefijpxy}(a = pi$ & $d = pj$ & $ax + b = c$ & $dy + e = f \to pij(x + y) + bj + ei = cj + fi)$

Характеристика - "группоид(3 4 x y)". Теорема используется в качестве дополнительной при выводе теорем.

(l) стандоператор(x1). Вывод результата группировки в левой части всех членов двуместного отношения и обработки его нормализатором стандартной формы x1. Пример:

$\forall_{abcdepq}(p = a(b + c)^d + e - q$ & $a(b + c)^d + e = q \to p = 0)$

Характеристика - "стандоператор(стандплюс)".

(m) текобъект(x1). Вывод одноместного предиката, характеризующего текущий объект x1. Пример:

$\forall_{ABC}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(C \in$ прямая$(AB))$ $\to$ эллипс(Окружность$(ABC)))$

Характеристика - "текобъект(Окружность(ABC))".

(n) отношение. Теорема выводит отличный от равенства нечисловой двуместный предикат без новых объектов. Пример:

$\forall_{ABC}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $\neg(A = B)$ & $A \in$ отрезок$(BC) \to$ $C \in$ прямая$(AB))$

(o) констнорм. Теорема выводит равенство переменной константному выражению. Пример:

$\forall_{ABCDKab}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & коорд$(D, K) = (a, b) \to a = 0)$

2. Вывод с учетом неизвестных.

(a) исклтангенс. Вывод следствия условия задачи на описание, в котором исключено сложное понятие. Пример:

$\forall_{abc}(\arcsin a + b = c \to a - \sin(c - b) = 0)$

(b) Группоид(x1 x2). Кванторная импликация выводит следствие из двух утверждений, позволяющее применить тождество свертки после группировки неизвестных подвыражений. x1, x2 - номера группируемых антецедентов. Пример:

$\forall_{abcdefghijk}(h = ba \ \& \ i = ea \ \& \ h \sin j \cos k + c = d \ \& \ i \cos j \sin k + f = g \to abe \sin(j - k) + ce - bf = de - bg)$

Характеристика - "Группоид(3 4)".

(c) сближение. Кванторная импликация для вывода следствий в посылках задачи на исследование, ориентированная на сближение подвыражений с неизвестными. Пример:

$\forall_{abcde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(b - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < b \ \& \ a \log_b c + d = e \rightharpoonup c^a b^d = b^e)$

Основанный на квазипротоколе прием выводит следствие в задаче на иследоване, если в ней уже встречается содержащая неизвестные степень с основанием b.

(d) слож. Вывод условия, подготавливающий возможность исключения сложного выражения с неизвестными. Пример:

$\forall_{abcdef}(a\sqrt[3]{d} + b\sqrt[3]{e} + c\sqrt[3]{f} = 0 \to a^3 d + b^3 e + c^3 f - 3abc\sqrt[3]{d}\sqrt[3]{e}\sqrt[3]{f} = 0)$

Здесь подготавливается возможность исключения кубических радикалов.

(e) конечнпересек(x1). Вывод условия, ограничивающего значения неизвестных списка x1 конечным множеством. Пример:

$\forall_{abcx}(x - \text{натуральное} \ \& \ ax + b = 0 \ \& \ -b/x \le c \ \& \ a - \text{натуральное} \to a \le c)$

Характеристика - "конечнпересек(a)".

(f) конечнпересечения. Вывод условия, подготавливающего возможность ограничения значений неизвестных конечным множеством. Пример:

$\forall_{abcd}(d = (a^2 - b^2)/c^2 \ \& \ (a - b)/c - \text{целое} \ \& \ (a + b)/c - \text{целое} \to d - \text{целое})$

Квазипротокол позволяет создать прием, идентифицирующий второй и третий антецеденты с содержащими неизвестные квадратные радикалы условиями задачи на описание. Правая часть первого антецедента обрабатывается нормализаторами "нормдробь" и "стандплюс".

(g) бинарноеотношение(x1). Вывод двуместного отношения, связывающего неизвестный объект x1 с известными. Пример:

$\forall_{Afmnpyz}(\mathrm{Max}(f, \{m, \dots, n\}, y, z) \ \& \ f = \lambda_x(p(x), A(x)) \ \& \ \forall_i(i \in \{m, \dots, n\} \to A(i)) \to y \subseteq \mathrm{set}_i(i \in \{m, \dots, n\} \ \& \ (i = m \ \vee \ 0 \le p(i) - p(i - 1)) \ \& \ (i = n \ \vee \ 0 \le p(i) - p(i + 1))))$

Характеристика - "бинарноеотношение(y)". Теорема ограничивает поиск максимума теми элементами конечного отрезка целых чисел, которые либо являются его концами, либо дают значения, не меньше двух соседних.

3. альтоперанды(x1). Вывод дизъюнкции для разбора случаев при усмотрении подвыражения x1. Пример:

$\forall_n(n - \text{целое} \to n - \mathrm{even} \ \vee \ \neg(n - \mathrm{even}))$

Характеристика - "альтоперанды($(-1)^n$)".

4. функвых(x1). Из кванторной импликации для значения функции выводится соотношение, связывающее некоторый описатель (вообще говоря, пока в задаче не рассматриваемый) с выражением x1, уже рассматриваемым в задаче. Пример:

   $$\forall_{Abf}(\forall_x(A(x) \to f(x) = b) \to \mathrm{set}_x(A(x) \;\&\; x \in \mathrm{Dom}(f)) \subseteq \text{слой}(f, b))$$

   Характеристика - "функвых(слой(f, b))".

5. имп. Вывод результата развертки - свертки кванторной импликации, возникающей при расшифровке по определению посылки задачи на доказательство. Пример:

   $$\forall_{Aaf}(\text{группа}(A) \;\&\; f = \text{операция}(A) \;\&\; \text{подгруппа}(a, A) \;\&\; \\ \forall_x(x \in a \to \text{обрэлемент}(x, f) \in a) = b \to b)$$

   Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство. Левая часть четвертого антецедента сначала обрабатывается задачей на преобразование с целью "развертка", затем - задачей на преобразование с целью "свертка". Проверяется, что результат b бескванторный.

6. инд. Вывод при доказательстве шага индукции. Пример:

   $$\forall_{abcdempq}(0 < a \;\&\; 0 < c \;\&\; 0 < c - a \;\&\; 0 < d \;\&\; e - a - m + c = 0 \;\&\; 0 < m - c \;\&\; \\ 0 < pa^b + qc^b \;\&\; q < 0 \to pa^{b-d}e^d + qm^d)$$

   Прием срабатывает при усмотрении выражения $Ae^M + Bm^N$ в условии задачи на доказательство. Предпоследний антецедент идентифицируется с посылкой, сопровожденной комментарием (целое i). Этот комментарий означает, что доказывается шаг индукции по целочисленному параметру i. Каждое из выражений b, d, M, N содержит переменную i, а выражение $b-d$, после обработки нормализаторами общей стандартизации, не содержит. Смысл вывода следствия состоит в переходе к основаниям степеней, встречающимся в условии.

Обратный вывод

1. неизвестная(x1). Теорема представляет собой кванторную импликацию, которая может быть использована для подбора значения неизвестной x1. Пример:

   $$\forall_{abcdefhi}(0 \leq 4d^3 + 27a^2 \;\&\; \neg(3bh - i^2 = 0) \;\&\; \neg(h = 0) \;\&\; h - \text{число} \;\&\; i - \\ \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; f = \sqrt{4d^3 + 27a^2} \;\&\; c = -i/(3h) + (\sqrt[3]{f + 3\sqrt{3}a} + \\ \sqrt[3]{-f + 3\sqrt{3}a})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \;\&\; d = b/h - i^2/(3h^2) \;\&\; a = e/h + i(9bh - 2i^2)/(27h^3) \to \\ hc^3 + ic^2 + bc = e)$$

   Характеристика - "неизвестная(c)". Теорема представляет собой формулу Кардано для случая единственного вещественного корня.

2. попыткаспуска. Теорема представляет собой простую импликацию с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменая антецедентов встречается в консеквенте. Пример:

   $$\forall_{ab}(0 < a \;\&\; 0 < b \;\&\; a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \to 0 < ab)$$

3. подбор(x1 x2). Теорема представляет собой кванторную импликацию, обеспечивающую попытку обратного вывода с переходом к более простым понятиям. x1 - неизвестная либо терм, перечисляющий неизвестные; x2 - набор номеров заменяющих антецедентов. Пример:

   $\forall_f$(последовательность$(f, \mathbb{R})$ & $\exists_a(a -$ число & $f = \lambda_n(a, n -$ натуральное$)) \rightarrow$ сходится$(f))$

   Характеристика - "подбор(f 2)".

4. разделить(x1). Обратный вывод для декомпозиции условия. x1 - набор номеров заменяющих антецедентов. Пример:

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число & $0 < a$ & $0 < b \rightarrow \neg(a + b = 0))$

   Характеристика - "разделить(3 4)".

5. незавсерия(x1). Обратный вывод в задаче с целью "длялюбого". x1 - набор номеров заменяющих антецедентов. Пример:

   $\forall_{kmnx}(n -$ целое & $k -$ целое & $m = kn$ & $x = n \rightarrow x|m)$

   Характеристика - "незавсерия(4)". Предполагается, что третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Выражение n не содержит переменных, выделенных целью "независит".

6. длялюбого(x1). Обратный вывод в задаче на описание, использующий кванторную импликацию из контекста. x1 - набор номеров заменяющих антецедентов. Пример:

   $\forall_{Aabcft}(A(t)$ & $\forall_x(A(x) \rightarrow 0 \leq a + f(x))$ & $0 \leq b - ac$ & $0 < c \rightarrow 0 \leq b + cf(t))$

   Характеристика - "длялюбого(3)".

7. незавгруппы(x1). Подбор примера значения неизвестной x1, устраняющий зависимость от запрещенных переменных. Пример:

   $\forall_{abc}(a \leq a - b$ & $c = a \rightarrow b \leq c)$

   Характеристика - "незавгруппы(c)". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменная c - неизвестная, выражение a не содержит запрещенных переменных, а b - содержит.

8. подборнеизвестных(x1). Кванторная импликация выведена для приема подбора значений неизвестных. x1 - список подвыражений консеквента, замещающих неизвестные. Пример:

   $\forall_{abcd}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ boolean & $d -$ boolean & $0 < b - a \rightarrow$ $(a + b)/2 \in [a, b])$

   Характеристика - "подборнеизвестных($(a+b)/2$)". Заметим, что c, d - двоичные указатели типов концов промежутка.

9. Подборзначений(x1). Подбор значений неизвестных списка x1 с помощью вычислений. Пример:

   $\forall_{AGHfghpqry}(f = \lambda_x(p(x), A(x))$ & квадрканоничвид$(x, p(x), y, q, r)$ &
   $G =$ числотобр(x, y, r) & $H =$ числфунк(y, q) & $g = F$ & $h = H \rightarrow$
   каноничвид$(f, g, h))$

   Характеристика - "Подборзначений(g, h)". Второй антецедент обращается к синтезатору "квадрканоничвид", выполняющему приведение квадратичной формы к каноническому виду. Третий и четвертый антецеденты обеспечивают переход от численных выражений к выражениям для функций. Наконец, последние два антецедента заменяют консеквент при обратном выводе.

Проверочные операторы

1. спуск(x1). Теорема представляет собой простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком x1, причем все ее антецеденты также обрабатываются проверочными операторами. Пример:

   $\forall_{bef}(b - \mathrm{set}$ & $e - \mathrm{set}$ & $f - \mathrm{set}$ & непересек(b, e) & непересек$(b, f) \rightarrow$
   непересек$(b, e \cup f))$

   Характеристика - "спуск(усмнепересек)".

2. легковидеть(x1 x2). Теорема представляет собой простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком x1, причем ее x2-й антецедент - непосредственно идентифицируемый, а остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами. Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $a < b$ & $b + c \leq 0 \rightarrow a + c < 0)$

   Характеристики - "легковидеть(усмменьше 4)" и "легковидеть(усмменьше 5)".

3. Спуск. Теорема представляет собой такую простую импликацию, что конъюнкция ее существенных посылок эквивалентна консеквенту, причем замена консеквента на данную конъюнкцию является преобразованием общей стандартизации либо конъюнктивной декомпозицией. Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $0 < a - b$ & $0 < c - a \rightarrow a \in (b, c))$

4. Спуск(x1). Теорема представляет собой такую простую импликацию, что конъюнкция ее существенных посылок, за вычетом существенных посылок с номерами из списка x1, эквивалентна консеквенту, причем замена консеквента на данную конъюнкцию является преобразованием общей стандартизации либо конъюнктивной декомпозицией. Пример:

   $\forall_{abc}(a{-}\mathrm{set}$ & $b{-}\mathrm{set}$ & $c{-}\mathrm{set}$ & $c \subseteq a$ & $\neg($непересек$(b, c)) \rightarrow \neg($непересек$(c, a{\cap}b)))$

   Характеристика - "Спуск(4)".

5. блокпроверок(x1). Теорема представляет собой простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком x1, причем более одного ее антецедента будут непосредственно идентифицируемыми. Пример:

   $\forall_{ABCDKa}(D - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (0, a) \rightarrow D \in \text{прямая}(AC))$

   Характеристика - "блокпроверок(усмпринадлежит)".

6. провменьшеилиравно(x1). Усмотрение истинности с помощью усиленного проверочного оператора x1. Пример:

   $\forall_{abcx}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ x - \text{число}\ \&\ 0 \leq c\ \&\ b^2 - 4ac \leq 0 \rightarrow 0 \leq ax^2 + bx + c)$

   Характеристика - "провменьшеилиравно(провменьшеилиравно)".

Прочие пакетные операторы

1. уравнцелое(x1).Непосредственное усмотрение истинности или ложности в нормализаторе уравнений x1. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c < a\ \&\ 0 \leq b - a \rightarrow \neg(b \leq c))$

   Характеристика - "уравнцелое(уравнменьшеилиравно)".

2. синтезатор(x1). Прием синтезатора x1. Пример:

   $\forall_{abcd}(b - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ a \in b\ \&\ c \in d \rightarrow (a, c) \in b \times d)$

   Характеристика - "синтезатор(выборточки)". Для выбора элемента прямого произведения выбираются элементы в сомножителях.

Усмотрение истинности либо ложности с помощью кванторной импликации

1. стандменьше(x1). Кванторная импликация используется для усмотрения истинности утверждения путем идентификации одного антецедента с посылкой и обработки другого проверочным оператором. x1 - номер антецедента, обрабатываемого проверочным оператором. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < b - c\ \&\ b < a \rightarrow c < a)$

   Характеристика - "стандменьше(4)".

2. оценкаперем(x1). Использование пакетного синтезатора для усмотрения истинности. x1 - номер антецедента, обрабатываемого пакетным синтезатором. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c \leq |b|\ \&\ 0 < c - 1 \rightarrow \neg(\sin a = b))$

   Характеристика - "оценкаперем(4)". Четвертый антецедент определяет нижнюю оценку c модуля b.

3. прогинф. Усмотрение истинности с помощью непосредственных вычислений. Пример:

   $\forall_{abcdmn}(a = mc \ \& \ d = \text{нод}(m,n) \ \& \ \neg(d|b) \to \neg(a(\text{mod } n) = b))$

   Прием усматривает целочисленный множитель m выражения a, вычисляет наибольший общий делитель d целых чисел m, n и устанавливает, что d не является делителем целого числа b.

4. Норм. Усмотрение истинности с помощью нормализатора вычислений. Пример:

   $\forall_{abf}(\text{последовательность}(f,[0,\infty)) \ \& \ \lim(\lambda_n((f(n))^{1/n}, n - \text{натуральное})) = a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ 0 < 1 - a \ \& \ b - \text{натуральное} \to \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m - \text{натуральное})))$

   Второй антецедент вычисляет предел при помощи нормализатора вычислений "нормпредел", после чего проверяется неравенство $0 < 1 - a$.

5. доказать. Усмотрение истинности с помощью вспомогательных задач на доказательство. Пример:

   $\forall_{ABn}(A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(i) \to 0 \leq \sum_{i=1}^{n} \text{card}(B(i)) - \text{card}(A))$

   Истинность антецедента устанавливается при помощи задачи на доказательство.

6. индуктпарам(x1). Доказательство шага индукции с помощью вспомогательной задачи. x1 - номер антецедента, обрабатываемого задачей. Пример:

   $\forall_{abcf}(0 \leq \sum_{n=1}^{c} f(n) + a \ \& \ 0 \leq f(c+1) + b - a \to 0 \leq \sum_{n=1}^{c+1} f(n) + b)$

   Характеристика - "индуктпарам(2)".

7. усмвхожд. Усмотрение истинности либо ложности условия задачи на описание с помощью вспомогательной задачи на доказательство. Пример:

   $\forall fgx(0 < g(0) - f(0) \ \& \ f(x) < g(x) \to \neg(f(x) = g(x)))$

   Теорема представляет собой квазипротокол, используемый в задаче на описание, решаемой для отыскания корней производной. Прием усматривает, что таких корней нет. Переменная x - неизвестная. Из контекста не усматривается, что она строго меньше 0, либо строго больше 0, либо просто не равна нулю. Таким образом, можно предположить, что 0 - внутренняя точка рассматриваемого промежутка для значений x. Чтобы вместо двух попыток доказательства неравенств $f(x) < g(x)$ и $g(x) < f(x)$ использовать только одну, предварительно сравниваются значения выражений f, g в нуле. Вспомогательная задача, предпринимающая попытку доказательства неравенства, сопровождается комментарием, указывающим, что ее следует решать путем дифференцирования по переменной x.

8. усмнорм. Усмотрение истинности либо ложности утверждения с помощью задачи на преобразование. Пример:

   $\forall_{AB}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(B) \ \& \ A \subseteq B \ \& \ 0 \leq \text{card}(A) - \text{card}(B) \to A = B)$

Разность мощностей вычисляется с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Прием применяется к условию задачи на доказательство, посылки которой содержат символ "мощность".

9. квантор. Усмотрение истинности либо ложности кванторной импликации. Пример:

   $\forall_a(\text{убывмножества}(a) \to \forall_{ij}(i \in \mathbb{N} \,\&\, j \in \mathbb{N} \,\&\, i < j \to a(j) \subseteq a(i)))$

10. контроль. Кванторная импликация с консеквентом "ложь" используется для усмотрения нереализуемых подслучаев. Пример:

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, 0 < b \,\&\, a^2 = -b \to \text{ложь})$

11. отрл(x1). Усмотрение ложности утверждения с помощью утверждения из контекста. x1 - номер антецедента, идентифицируемого с утверждением из контекста. Пример:

    $\forall_{abc}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, c - \text{число} \,\&\, a \leq c \,\&\, 0 \leq a - b \to \neg(c < b))$

    Характеристика - "отрл(4)".

Координаты

1. Точка. Вывод соотношения для координат объекта, использующий уравнение для координат множества объектов. Пример:

   $\forall_{ABKPab}(A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, \text{систкоорд}(K) \,\&\, \neg(A = B) \,\&\, \text{коорд}(A, K) = (a, b) \,\&\, \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(P(x, y)) \to P(a, b))$

2. характмн(x1). Характеризация исследуемого множества объектов через параметры уравнения для его координат. x1 - цель задачи. Пример:

   $\forall_{AEKPabcdefghpq}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, c - \text{число} \,\&\, d - \text{число} \,\&\, e - \text{число} \,\&\, f - \text{число} \,\&\, g - \text{число} \,\&\, h - \text{число} \,\&\, p - \text{число} \,\&\, q - \text{число} \,\&\, \text{прямкоорд}(K) \,\&\, \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + pz + q = 0 \,\&\, x - \text{число} \,\&\, y - \text{число} \,\&\, z - \text{число}) \,\&\, (\text{собствзначение}(A, u, v) \,\&\, \text{собстввектор}(A, u, w)) = P \to \forall_{uvw}(P \to \text{собствектпов}(E, u, K, w)))$

   Характеристика - "характмн(эллипосид)". Теорема представляет собой квазипротокол, обращающийся к вспомогательной задаче на описание для определения собственных значений и собственных векторов поверхности второго порядка.

3. множнабор(x1). Характеризация связанного с термом x1 множества объектов с помощью уравнения для его координат. Пример:

   $\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}(p - \text{число} \,\&\, q - \text{число} \,\&\, r - \text{число} \,\&\, s - \text{число} \,\&\, A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, C - \text{точка} \,\&\, D - \text{точка} \,\&\, E - \text{точка} \,\&\, \text{систкоорд}(K) \,\&\, \neg(D = E) \,\&\, \neg(C = E) \,\&\, \neg(C = D) \,\&\, \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE), K) = \text{set}_{xyz}(px + qy + rz + s = 0 \,\&\, x - \text{число} \,\&\, y - \text{число} \,\&\, z - \text{число}) \,\&\, \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \,\&\, \text{коорд}(B, K) = (d, e, f) \,\&\, (ap + bq + cr + s)(dp + eq + fr + s) \leq 0 \to \text{разныестороны}(A, B, \text{плоскость}(CDE)))$

   Характеристика - "множнабор(классточки(A X))".

4. системыкоординат(x1). Усмотрение специальной связи системы координат с исследуемым множеством объектов. x1 - цель задачи либо список допустимых целей. Пример:

   $\forall_{EKab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Цилиндр}(E)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xyz}(ax^2+by = 0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}) \rightarrow \text{каноничкоорд}(K,E))$

   Характеристика - "системыкоординат(эллипсоид)".

5. Стандравно(x1). Ввод вспомогательной системы координат, в которой уравнение для исследуемого множества объектов имеет снадартный вид. x1 - цель задачи либо допустимый список целей. Пример:

   $\forall_{EKabcdpq}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(ay^2 + by + cx + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ ac < 0\ \&\ p = (b^2 - 4ad)/(4ac)\ \&\ q = -b/(2a) \rightarrow \exists_{ABCQ}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ (A,B,C) = Q\ \&\ \text{прямкоорд}(Q)\ \&\ \text{каноничкоорд}(Q,E)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (p,q)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (p+1,q)\ \&\ \text{коорд}(C,K) = (p,q+1)\ \&\ \text{коорд}(E,Q) = \text{set}_{uv}(v^2 + cu/a\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ \text{фокпараметр}(E) = -c/2a))$

   Характеристика - "Стандравно(точки линия)".

6. спецпреобр(x1). Ввод системы координат, связанной с объектом x1. Пример:

   $\forall_{ABCDEKQ}(Q = (A,B,C)\ \&\ \text{вектор}(AB) \perp \text{вектор}(AC) \rightarrow D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ K = (A,D,E)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (l(AB),0)\ \&\ \text{коорд}(C,K) = (0,l(AC)))$

   Характеристика - "спецпреобр(оруголмежду(a,b,Q))". Квазипротокол вводит прямоугольную систему координат K, если уже имелась система координат Q с ортогональными координатными осями, но неединичными базисным векторами. Поводом для этого служит необходимость рассмотрения ориентированного угла между некоторыми векторами в системе координт Q.

7. видобъекта. Кванторная импликация определяет вид объекта по уравнению для координат его точек. Пример:

   $\forall_{EKabcdefgm}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xyz}(ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число})\ \&\ m = bcd^2 + ace^2 + abf^2 - 4abcg\ \&\ 0 < ab\ \&\ 0 < ac\ \&\ 0 < m \rightarrow \text{эллипсоид}(E))$

8. характ. Кванторная импликация определяет связи объекта, заданного уравнением для координат его точек, с другими объектами. Пример:

   $\forall_{AEKabcdemn}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ \text{гипербола}(E)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ A \in E\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (m,n)\ \&\ (2am + b = 0 \vee 2cn + d = 0) \rightarrow \text{вершина}(A,E))$

9. стандмн. Кванторная импликация дает стандартное представление для множества точек, координаты которого приводятся в антецедентах. Пример:

   $\forall_{EKabcdefp}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; f - \text{число} \;\&\; A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; \text{прямкоорд}(K) \;\&\; \neg(A = B) \;\&\; \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0 \;\&\; x - \text{число} \;\&\; y - \text{число}) \;\&\; b^2-4ac = 0 \;\&\; 2cd-be = 0 \;\&\; e^2-4cf = 0 \;\&\; \neg(c = 0) \to \exists_{AB}(A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; \text{прямая}(AB) = E \;\&\; \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{uv}(bu + 2cv + e = 0 \;\&\; u - \text{число} \;\&\; v - \text{число})))$

10. Крд. Кванторная импликация, консеквент которой - конъюнкция неравенств либо отрицаний равенств для параметров координат. Пример:

    $\forall_{ABCDKabcdefghp}(A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; \text{систкоорд}(K) \;\&\; \neg(A = B) \;\&\; \text{коорд}(A, K) = (a, b) \;\&\; \text{коорд}(B, K) = (c, d) \;\&\; \text{коорд}(C, K) = (e, f) \;\&\; \text{коорд}(D, K) = (g, h) \;\&\; p = ad - bc \;\&\; \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)) \to 0 \leq ((b - d)e + (c - a)f + p)((b - d)g + (c - a)h + p))$

11. новпараметры. Выражение координат объекта при помощи вспомогательных параметров. Пример:

    $\forall_{ABCDKabcdefpqr}(A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; C - \text{точка} \;\&\; D - \text{точка} \;\&\; \text{систкоорд}(K) \;\&\; \neg(C = D) \;\&\; \neg(B = C) \;\&\; A \in \text{Угол}(BCD) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(CA), K) = (a, b, c) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(CB), K) = (d, e, f) \;\&\; \text{коорд}(\text{вектор}(CD), K) = (p, q, r) \to \exists_{mn}(m - \text{число} \;\&\; n - \text{число} \;\&\; 0 \leq m \;\&\; 0 \leq n \;\&\; a = md+np \;\&\; b = me+nq \;\&\; c = mf + nr))$

    Соответствующий прием переформулирует в терминах координат условие принадлежности точки плоскому углу, вводя вспомогательные параметры m, n.

12. координаты. Теорема представляет собой кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, дающим общий вид уравнения для координат множества объектов. Пример:

    $\forall_{EKabcdef}(\text{прямкоорд}(K) \;\&\; \text{парабола}(E) \to \exists_{abcdef}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; f - \text{число} \;\&\; \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \;\&\; x - \text{число} \;\&\; y - \text{число}) \;\&\; b^2 - 4ac = 0 \;\&\; \neg(4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2 = 0)))$

13. каноничкоорд. Теорема представляет собой кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, вводящую новую систему координат и определяющую вид уравнения для координат множества объектов относительно этой системы. Пример:

    $\forall_{ABEKabcdpqr}(A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; \text{прямкоорд}(K) \;\&\; \text{эллипс}(E) \;\&\; \text{фокус}(A, E) \;\&\; \text{фокус}(B, E) \;\&\; \text{коорд}(A, K) = (a, b) \;\&\; \text{коорд}(B, K) = (c, d) \;\&\; p = (a + c)/2 \;\&\; q = (b+d)/2 \;\&\; r = (c-a)^2+(d-b)^2 \;\&\; \neg(r = 0) \to \exists_{FGHQm}(F - \text{точка} \;\&\; G - \text{точка} \;\&\; H - \text{точка} \;\&\; (F, G, H) = Q \;\&\; \text{коорд}(F, K) = (p, q) \;\&\; \text{коорд}(G, K) = (p + (c - a)/\sqrt{r}, q + (d - b)/\sqrt{r}) \;\&\; \text{коорд}(H, K) = (p - (d - b)/\sqrt{r}, q + (c - a)/\sqrt{r}) \;\&\; \text{прямкоорд}(Q) \;\&\; m - \text{число} \;\&\; 0 < m \;\&\; \text{коорд}(E, Q) = \text{set}_{xy}(4mx^2 + (4m + r)y^2 - m(4m + r) = 0 \;\&\; x - \text{число} \;\&\; y - \text{число})))$

14. стандчисл. Теорема представляет собой кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, вводящую новую систему координат, в которой исходное уравнение для координат множества объектов приобретает более простой вид. Пример:

    $$\forall_{EKabcde}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ \neg(a=0)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xy}(ax^2+cy^2+bx+dy+e=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\rightarrow\exists_{ABCQ}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ (A,B,C)=Q\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(-b/(2a),-d/(2c))\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(-b/(2a)+1,-d/(2c))\ \&\ \text{коорд}(C,K)=(-b/(2a),-d/(2c)+1)\ \&\ \text{коорд}(E,Q)=\text{set}_{uv}(4a^2cu^2+4ac^2v^2-b^2c-d^2a+4ace=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число})))$$

15. каноничвид. Теорема представляет собой кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, выполняющую первичный ввод канонической системы координат и определяющую общий вид уравнения для координат множества объектов. Пример:

    $$\forall_E(\text{эллипс}(E)\rightarrow\exists_{Kab}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ 0<b\ \&\ 0\le a-b\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xy}(x^2/a^2+y^2/b^2-1=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})))$$

16. нормкоорд. Теорема представляет собой кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, вводящую новую систему координат, в которой исходное уравнение для координат множества объектов приобретает стандартный вид. Пример - та же теорема, что приведенная выше для характеристики "стандчисл".

17. Числатомы. Вывод группы равенств, связывающих невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Пример:

    $$\forall_{ABCDKa}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ K=(A,B,C)\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(D=A)\ \&\ \angle(BAD)=a\ \&\ \text{однасторона}(C,D,\text{прямая}(AB))\ \&\ \text{коорд}(D,K)=(b,c)\rightarrow b=l(AD)\cos a\ \&\ c=l(AD)\sin a)$$

18. новобъект. Ввод нового объекта и выражение его через координаты в задаче на исследование, имеющей цель "исследовать". Пример:

    $$\forall_{ABCDEHKabcdmnpq}(H=\text{внутренность}(\text{круг}(AB))\cap\text{внутренность}(\text{Угол}(CAD))\ \&\ A=\text{тчкоорд}(K,(a,b))\ \&\ B=\text{тчкоорд}(K,(c,d))\ \&\ C=\text{тчкоорд}(K,(p,q))\ \&\ m=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\ \&\ n=\sqrt{(a-p)^2+(b-q)^2}\rightarrow E-\text{точка}\ \&\ E\in\text{прямая}(AC)\ \&\ E\in\text{окружность}(AB)\ \&\ E=\text{тчкоорд}(K,(a+(p-a)m/n,b+(q-b)m/n))\ \&\ \neg(A\in\text{отрезок}(CE)))$$

    Прием используется в комплексном анализе для определения вида множества точек комплексной плскости, заданного некоторым условием.

19. точкитела. Переход от координатного к бескоординатному описанию множества точек. Пример:

    $$\forall_{AKab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(A,K)=\text{set}_{yx}(x=a\ \&\ b<y\ \&\ y-\text{число})\rightarrow\exists_{BC}(B=\text{тчкоорд}(K,(b,a))\ \&\ C=\text{тчкоорд}(K,(b+1,a))\ \&\ A=\text{луч}(BC)))$$

2.1.6 Утверждение без переменных

Утверждение без переменных имеет характеристику "конст". Пример - $\operatorname{ctg} \pi/6 = \sqrt{3}$

2.1.7 Копия теоремы

Если теорема является копией теоремы по ссылке "x1 - x2", где x1 - логический символ, x2 - номер узла статьи этого символа, то она снабжается характеристикой "копия(x1 x2)". Обычно теорема копируется в тех случаях, когда она получается в одной ячейке вывода, а затем становится заглавной теоремой другой ячейки. Обычно вывод в некоторой ячейке базы теорем обрывается из-за того, что предыстория получения текущей теоремы блокирует дальнейшие применения к ней приемов вывода. В новой ячейке предыстория отсутствует, и получение следствий может быть продолжено на бóльшую глубину.

2.1.8 Характеризация антецедентов

1. Одз(x1). Антецеденты с номерами списка x1 представляют собой условия на о.д.з. определяемого терма. Возможны другие определения того же терма, с непересекающимися о.д.з. Пример:

   $\forall_A(A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R} \to \text{предельнточки}(A) = \text{set}_x(\text{предельнточка}(x, A)))$

   Характеристика - Одз(1 2). Альтернативный случай - множество точек многомерного пространства.

2. идентпосылка(x1 x2). Истинность антецедента с номером x1 предпочтительно обеспечивать, используя указатель идентификации либо фильтр x2. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ b - \text{натуральное}\ \&\ |c| \leq 1 \to (\sin a)^b c = 1 \leftrightarrow (\sin a)^b = 1\ \&\ c = 1\ \vee\ (\sin a)^b = -1\ \&\ c = -1)$

   Характеристика - "идентпосылка(5 не(контекст(вид(c умножение(x4 x5)) единица(1 x4) заменазнака(минус x4) не(контекст(вид(x5 степень(x6 x7)) единица(1 x7) символ(x6 синус косинус) легковидеть(меньше(0 x7)))))))". Проверяется, что все сомножители c - степени синусов и косинусов с положительными (возможно, равными единице) показателями.

3. консеквент(x1 x2). x1-й антецедент представляет собой кванторное равенство, определяющее свою правую часть (переменную) как результат обработки левой части нормализаторами списка x2 (в том числе, возможно, задачами). Антецеденты кванторного равенства передаются нормализаторам в качестве дополнительных посылок. Пример:

   $\forall_{ABPmn}(m - \text{целое}\ \&\ \forall_x(P(x) \to \text{card}(B(x)) = m)\ \&\ \forall_x(P(x) \to \text{card}(A(x)) = n)\ \&\ n \leq m \to \text{card}(\text{set}_{fx}(\text{Отображение}(f, A(x), B(x))\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ P(x))) = m!\text{card}(\text{set}_x P(x))/(m-n)!)$

   Характеристики - "консеквент(2 задача(4 упростить))", "консеквент(3 задача(4 упростить))". Имеется также характеристика "см", уточняющая, что m, n не зависят от x.

4. Консеквент(x1 x2). x1-й антецедент представляет собой кванторную импликацию, которую следует обрабатывать проверочным оператором либо вспомогательной задачей на доказательство. Антецеденты импликации при этом рассматриваются как дополнительные посылки. x2 - либо символ "блокпроверок" (случай проверочного оператора), либо один из символов "легковидеть", "усматривается", "доказать", "следствие". Пример:

   $\forall_{bdf}(\forall_e(d(a,e) \rightarrow b(e) \subseteq f(e))\ \&\ \forall_e(d(a,e) \rightarrow b(e) - \mathrm{set})\ \&\ \forall_e(d(a,e) \rightarrow f(e) - \mathrm{set}) \rightarrow \mathrm{card}(\mathrm{set}_{ae}(a - \mathrm{set}\ \&\ b(e) \subseteq a\ \&\ a \subseteq f(e)\ \&\ d(a,e))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{ce}(c \subseteq f(e) \setminus b(e)\ \&\ c - \mathrm{set}\ \&\ d(b(e) \cup c, e))))$

   Характеристики - "Консеквент(1 блокпроверок)", "Консеквент(2 блокпроверок)", "Консеквент(3 блокпроверок)".

5. уравндробь. Среди антецедентов теоремы имеется равенство для координат множества объектов. Пример:

   $\forall_{AKabc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(A)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \rightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$

6. смпропорц(x1 x2 x3). x1-й антецедент представляет собой соотношение пропорциональности для невырожденных числовых атомов x2 и x3. Пример:

   $\forall_{ABCDab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(DBC)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ al(AB) = bl(AD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow al(BC) = bl(CD))$

   Характеристика - "смпропорц(одиннадцать $l(AB)$ $l(AD)$)".

7. главнчлен(x1). Наиболее сложный терм антецедентов - выражение, причем он единственный и имеет единственное вхождение. Глубина этого выражения больше 1, а оценка сложности больше 4. x1 - заголовок данного выражения. Пример:

   $\forall_{abcf}(f - \text{функция}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ (a,b) \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ 0 < c - a\ \&\ 0 < b - c\ \&\ f(c) = \inf(\text{образ}(f,(a,b)))\ \&\ \text{дифференцируема}(f,c) \rightarrow \text{производная}(f,c) = 0)$

   Характеристика - "главнчлен(инф)".

8. тождфунк. Имеется антецедент - равенство, содержащее функциональные переменные, причем каждая такая переменная f входит в него только как $f(\ldots)$. Пример:

   $\forall_{abf}(f - \text{функция}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ a < b\ \&\ [a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{непрерывно}(f,[a,b])\ \&\ \forall_c(c \in (a,b) \rightarrow \text{дифференцируема}(f,c))\ \&\ f(a) = f(b) \rightarrow \exists_c(c \in (a,b)\ \&\ \text{производная}(f,c) = 0))$

2.1.9 Протоколы

Протоколы определяют различные особенности алгоритмизации того или иного раздела или конкретного понятия. Они оформляются в виде термов специального вида, сопровожденных характеристикой "протокол". Типы таких термов будут приведены в следующей главе.

Некоторые протоколы представляют собой установки на цикл логического вывода теорем. Такая установка является заглавной "теоремой" ячейки логического вывода. Она может сопровождаться характеристикой "раздел(x1)", уточняющей разде x1, в котором предпринимается вывод.

2.1.10 Квазипротоколы

Квазипротоколы получаются из протоколов, у которых существенная часть текста представляет собой терм предметной области. Чтобы облегчить восприятие таких протоколов, их терм оформляется как теорема, а оставшаяся часть размещается в виде набора характеристик. Это и называется квазипротоколом. Иногда указанный терм и в самом деле представляет собой что-то вроде теоремы, но все же является лишь теоремой приема. Вывод следствий из него не осуществляется, хотя он (как, впрочем, и "обычные" протоколы) может создаваться процедурой программирующего логического вывода.

1. теоремаприема. Эта характеристика явно указывает на квазипротокол. Она блокирует попытки автоматического пересоздания его характеристик по теореме.

   Пример:

   $\forall_{abf}(b = \sum_{i=a}^{\infty} f(i) = \sum_{i=a}^{\infty} f(i) = b)$

   Квазипротокол представляет собой теорему приема, обращающегося к нормализатору "суммаряда" для вычисления суммы ряда. Дополнительные характеристики уточняют это обстоятельство.

2. Разбор случаев.

   (a) разборслучаев(x1). Импликация для разбора случаев в посылках. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация разбора случаев осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)".

   Пример:

   $\forall_{EKabcdefp}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xy}$(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f $=$ 0 & x – число & y – число) & $p = b^2 - 4ac \to 0 < p \;\vee\; p = 0 \;\vee\; p < 0$)

   Характеристика - "разборслучаев(тип(исследовать)цель(линия) не(контекст(посылка(x7) заголовок(x7 гипербола парабола эллипс) равно(первыйтерм(x7)E))) не(легковидеть($0 < p$)) не(легковидеть($p < 0$)) не(заголовок(p 0)) не(контекст(посылка(x7) вид(x7 равно(E x8)))))". Соответствующий прием инициирует разбор случаев при анализе свойств заданной уравнением линии второго порядка, чтобы различить случаи эллипса, гиперболы и параболы.

   (b) Подслучаи(x1). Импликация для разбора случаев в условиях. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация разбора случаев осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". Пример:

   $\forall_n(n - \text{целое} \to n - \text{even} \ \vee \ \neg(n - \text{even}))$

   Характеристика - "Подслучаи(контрольвывода($(-1)^n$) не(цель(редакция)) не(известно(n)))".

   (c) фиксконст(x1 x2). Импликация выводит дизъюнкцию для разбора случаев по значениям неизвестных подтермов. x1 - список переменных, хотя бы одна из которых идентифицируемых с неизвестным подтермом. x2 - конъюнкция уточняющих контекст фильтров (может отсутствовать). Пример:

   $\forall_{mnp}(0 < p - 1 \ \& \ p - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \text{простое}(p^m + p^n) \to m = 0 \ \vee \ n = 0 \ \vee \ m < 0 \ \& \ n < 0)$

   Характеристика - "фиксконст(m, n)".

3. Ввод новых объектов.

   (a) актив(x1). Импликация, консеквент которой представляет собой конъюнкцию термов вида "актив(...)", вводящая в рассмотрение новые объекты. x1 - список уточняющих контекст фильтров. При отсутствии таких фильтров вместо "актив(x1)" берется характеристика "актив". Если инициализация ввода объектов осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". Пример:

   $\forall_{ABCPQ}(\text{окружность}(PQ)\text{вписана в фигура}(ABC) \ \& \ \text{актив}(\angle(ACB)) \to \text{актив}(l(AB)))$

   Характеристика - "актив(неизв(терм($\angle(ACB)$)))".

   (b) вспомобъекты(x1). Импликация, вводящая в рассмотрение новые объекты для использования определения некоторого объекта x1. Пример:

   $\forall_{ABCDEK}(D{-}\text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(AC)) \to E{-}\text{точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB))$

   Характеристика - "вспомобъекты(коорд(D, K))".

   (c) коордввода(x1). Импликация, вводящая в рассмотрение новые объекты и одновременно задающая их координатные наборы. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация приема осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". Пример:

   $\forall_{ABCDEKPabcdef}(\text{вершина}(A, E) \ \& \ \text{вершина}(B, E) \ \& \ \text{эллипсоид}(E) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (d, e, f) \ \& \ \text{осьсимметрии}(\text{прямая}(CD), E) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{разныеточки}(A, B) \to \text{центр}(P, E) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = ((a + d)/2, (b + e)/2, (c + f)/2))$

   Характеристика - "коордввода(не(контекст(посылка(x7) вид(x7 центр(x8 E)))))".

   (d) параметр(x1). Тождество для ввода вспомогательного параметра. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если вспомогательный параметр вводится для текущего выражения A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". Если A отсутствует, то по умолчанию привязка приема - по обозначаемому выражению. Пример:

$\forall_{ABCab}(\angle(ABC) = a$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \to b = l(AB))$

Характеристика - "параметр(посылка или(тип(доказать)тип(исследовать)) контекст(посылка(x3) заголовок(x3 равно) вхождениетерма(x3 терм($l(AB)$) x4) не(контекст(операнд(x5 x4) символ(x5 равно)))) внешнеизв(a) усм(актив(прямая(AB))) усм(актив(прямая(AC))) не(Входит(вспомпараметр комментариипосылок)) контекст(равно(x5 терм($l(AB)$))) не(известно(x5)) не(внешнеизв(x5))))". Прием вводит обозначение для длины перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

(e) прямкоорд(x1). Импликация вводит в рассмотрение систему координат. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". Если фильтр B вида "контекст(...)" переброшен в указатели приема, то он регистрируется в списке x1 как "указатель(B)". Пример:

$\forall_{ABCDEFGKa}($куб(a) & ребро(отрезок$(AB), a)$ & ребро(отрезок$(AC), a)$ & ребро(отрезок$(AD), a)$ & разныеточки(B, C) & разныеточки(B, D) & разныеточки$(C, D) \to E -$ точка & $F -$ точка & $G -$ точка & $K = (A, E, F, G)$ & прямкоорд(K) & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, B, E) & точкалуча(A, C, F) & точкалуча$(A, D, G))$

Характеристика - "прямкоорд(не(Входит(прямкоорд списокпосылок)) контекст(посылка(x5) вид(x5 актив(вектор(AX))))не(равно(B C)) не(равно(B D)) не(равно(C D)))".

(f) коордплоск(x1). Импликация вводит в рассмотрение координаты множества объектов. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". При пустом списке x1 вместо терма "коордплоск(x1)" берется логический символ "коордплоск". Если фильтр B вида "контекст(...)" переброшен в указатели, то он регистрируется в списке x1 как "указатель(B)". Пример:

$\forall_{ABEK}($асимптота(прямая$(AB), E) \to$ актив(коорд(прямая$(AB), K)))$

Характеристика - "коордплоск(контрольвывода(коорд(E, K)))".

(g) параметры(x1). Импликация, вводящая в рассмотрение координатный набор, выраженный через новые параметры. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". При пустом списке x1 вместо терма "параметры(x1)" берется логический символ "параметры". Если фильтр B вида "контекст(...)" переброшен в указатели, то он регистрируется в списке x1 как "указатель(B)". Пример:

$\forall_{ABCDEKPQabcdef}(C \in$ прямая(AB) & $C \in$ прямая(DE) & $P \in$ прямая(AB) & коорд$(P, K) = (a, b)$ & $Q \in$ прямая(DE) & коорд$(Q, K) = (c, d) \to$ $e -$ число & $f -$ число & коорд$(C, K) = (e, f))$

Характеристика - "параметры(контрольвывода(коорд(прямая(AB),K)) указатель(контекст(посылка(x7) позиция(x8 x7) вид(x8 коорд(прямая(CD),K)))) не(равно(терм(прямая(AB)) терм(прямая(DE)))))". Вводится в рассмотрение координатный набор для общей точки двух прямых, уравнения которых упоминаются в задаче, если на каждой из прямых имеется точка с уже введенным в рассмотрение координатным набором.

(h) допкадр. Импликация вводит в рассмотрение объекты, которые часто встречаются в контексте, определяемом ее антецедентами. Пример:

$\forall_{ABCDEF}($трапеция$(ABCD) \rightarrow E\ in$прямая$(AD)\ \&\ E -$ точка $\&$ прямая$(BE) \perp$ прямая$(AD)\ \&\ F -$ точка $\&\ F \in$ прямая$(AD)\ \&$ прямая$(CF) \perp$ прямая$(AD))$

(i) равныетермы(x1 x2). Импликация вводит в рассмотрение новые числовые атомы для доказательства равенства числовых атомов x1, x2. Пример:

$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(DE)\ \&\ l(AC) = l(DF) \rightarrow$ актив$(\angle(BAC))\ \&$ актив$(\angle(EDF)))$

Характеристика - "равныетермы$(l(BC)\ l(EF))$". Для доказательства равенства противоположных сторон вводятся в рассмотрение углы между попарно равными сторонами.

(j) новопер(x1). Импликация вводит в рассмотрение координаты элементов одной системы координат в другой, чтобы определить координатный набор x1. Пример:

$\forall_{ABCDKMQabcde}(K = (A, B, C, D)\ \&$ коорд$(M, Q) = a \rightarrow c -$ число $\&$ $d -$ число $\&\ e -$ число $\&$ коорд$(A, Q) = (c, d, e))$

Характеристика - "новопер(коорд(M, K))".

(k) Новый(x1). Импликация вводит в рассмотрение координаты множества объектов в одной системе координат, если известны его координаты в другой системе. x1 - терм, инициирующий переход к другой системе. Пример:

$\forall_{ABK}($прямкоорд$(K) \rightarrow$ актив(коорд(прямая$(AB), K)))$

Характеристика - "Новый(уголмежду(прямая(AB), прямая(CD)))". Соответствующий прием проверяет наличие посылки, задающей уравнение прямой AB в некоторой двумерной системе координат, а также уравнение прямой CD в трехмерной системе K.

(l) точкарасст. Ввод вспомогательной системы координат в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Пример:

$\forall_{ABCDEK}($прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC)\ \&$ разныеточки$(A, B)\ \&$ разныеточки$(A, C) \rightarrow D -$ точка $\&\ E -$ точка $\&\ (A, D, E) = K\ \&$ прямкоорд$(K)\ \&\ E \in$ прямая$(AC)\ \&\ D \in$ прямая$(AB)\ \&$ $\neg(A \in$ интервал$(CE))\ \&\ \neg(A \in$ интервал$(BD)))$

Прием срабатывает, если в посылках вообще не встречается символ "коорд".

(m) вспомнеизвестная(x1). Тождество для ввода вспомогательной неизвестной. x1 - указатель цели ввода. Используются следующие указатели: 1 - усмотрение уравнения с единственной неизвестной, имеющей более одного вхождения, 2 - усмотрение системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Пример:

$\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a\ \&\ a -$ число$)$

Характеристика - "вспомнеизвестная(2)". Соответствующий прием усматривает, что если обозначаить угол ABC новой неизвестной a, то в задаче окажутся два уравнения с двумя неизвестными.

4. Вычисления

   (a) уравнматр(x1 x2). Тождество вычисления значения константного терма с помощью нормализатора уравнений. x1 - заголовок нормализатора, x2 - список указателей типов данных. Каждый указатель - либо "десчисло(A)", "натуральное(A)", "целое(A)", где A - переменная, либо "матрица(A)", где A - указатель вхождения "фикс(...)" терма "отображение(...)", задающего матрицу. Пример:

   $\forall_{Banx}((\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})x = \lambda_{ij}((1 \text{ при } i = j, \text{ иначе } 0), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})) = (x = B) \to \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \ \& \ j \in \{1,\dots,n\})^{-1} = B)$

   Характеристика - "уравнматр(уравнматр натуральное(n) матрица(фикс(1 1 1)) матрица(фикс(1 1 2)) матрица(фикс(0 1 1)))". Соответствующий прием использует нормализатор разрешения относительно неизвестных для вычисления операции над константым термом (в данном случае - для обращения константной матрицы).

   (b) исследовать(x1 x2 x3). Тождество для вычисления с помощью вспомогательной задачи на описание, имеющей цель "исследовать". x1 - условие вспомогательной задачи, x2 - конъюнкция фильтров, определяющая контекст применения приема, x3 - терм "набор(...)", перечисляющий цели вспомогательной задачи. Неизвестная задается в x3 без внешнего указателя "цель(...)". Пример:

   $\forall_{afgh}(\mathrm{card}(\mathrm{roots}(\lambda_x(f(x), g(x)), a)) = \mathrm{card}(\mathrm{roots}(h, a)))$

   Характеристика - "исследовать($\lambda_x(f(x), g(x) \ \& \ x \in a) = h$ и(тип(преобразовать) условие корень не(цель(извлекается))) набор(числокорней неизвестная(h)))". Соответствующий прием срабатывает в задаче на преобразование, условием которой служит левая часть приведенного выше равенства. Он добавляет к посылкам равенство, вводящее вспомогательное обозначение h для исследуемой функции, и заменяет на данное обозначение функцию из условия. Затем прием обращается к вспомогательной задаче на описание, имеющей цели "исследовать" и "числокорней". Условием ее служит указанное выше равенство с h. Ответ данной задачи содержит описание числа корней функции h на различных промежутках. Он добавляется к посылкам задачи на преобразование.

   (c) Конст0(x1 x2 x3). Тождество для уменьшения числа неконстантных операндов на предварительном этапе редактирования ответа задачи на вычисление. x1 - направление замены. x2 - устраняемый неконстантный терм, x3 - заменяющий константный. Пример:

   $\forall_{abcdemnp}(m - n = p \to a^m b/c + a^n d/e = a^n(a^p b/c + d/e))$

   Характеристика - "Конст0(второйтерм m p)".

(d) констерм(x1). Тождество для вычисления констатного терма с помощью пакета продукций x1. Пример:

$\forall_{Aabn}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})\ \&$
$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\}))^{-1} = b \leftrightarrow A^{-1} = b)$

Характеристика - "констерм(обрматрица)". Пакет продукций "обрматрица" обращает матрицу, элементы которой заданы в машинном формате "с плавающей запятой".

(e) наборзначений. Вычисление координат объекта в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Пример:

$\forall_{AKab}($прямкоорд$(K)\ \&\ A -$ точка $\&$ коорд$(A,K) = (a,b) \rightarrow$
коорд$(A,K) = (a,b))$

Соответствующий прием выводит следствие в посылках задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, левая часть третьего обрабатывается нормализатором вычисления координат "нормкоорд".

(f) вычисление. Тождество, использующее нормализатор вычисления. Пример:

$\forall_{abc}(a = b/c \rightarrow b/c = a)$

Соответствующий прием применяется к условию задачи на преобразование, имеющей цель "простейшиедроби". Указатель "контекст(входит(переменная(x4) параметры(корень)))" выбирает некоторую переменную условия x . После этого правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "простейшиедроби", которому передается комментарий (переменная x).

(g) Вычмн(x1 x2). Эквивалентность, использующая пакет продукций для явного разрешения относительно неизвестных списка x1. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{Aanpx}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\})\ \&$ характмн$(\lambda_{ij}(a(i,j),$
$i \in \{1,\dots,n\}\ \&\ j \in \{1,\dots,n\}), p) \rightarrow$ характмн$(A,x) \leftrightarrow x = p)$

Характеристика - "Вычмн(x второйтерм)". Пакет продукций "характмн" используется для определения характеристического многочлена квадратной числовой матрицы.

(h) значмн. Тождество, определяющее значение числового атома с помощью обращения к пакетному синтезатору. Пример:

$\forall_{ax}($вычислениеплощади$(x,a) \rightarrow S($фигура$(x)) = a)$

Синтезатор "вычислениеплощади" вычисляет площадь фигуры путем разбиения ее на простейшие подфигуры.

(i) место. Выражение через вспомогательные параметры координат объекта в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Пример:

$\forall_{ABCDKab}(K = (A,B,C)\ \&\ D -$ точка $\&$ прямкоорд$(K) \rightarrow a -$ число $\&\ b -$
число $\&$ коорд$(D,K) = (a,b))$

Соответствующий прием выводит следствие в посылках задачи на преобразование, имеющей цель "класс". По рассматриваемой в задаче точке D нормализатор "нормкоорд" не может определить координатный набор. Тогда для такого набора вводятся новые переменные a, b.

5. Использование нормализаторов.

   (a) стандравно. Тождество, использующее нормализатор для контекстной стандартизации. Пример:

   $\forall_{abcdef}(f = b + c \ \& \ 0 \leq b + c \to a(b + c)^d/e = af^d/e)$

   Соответствующий прием предпринимает попытку разложения на множители суммы в числителе при помощи нормализатора "видумножение".

   (b) оператор. Указание пакетного нормализатора либо цепочки нормализаторов x1, используемых приемом. В качестве примера можно взять квазипротокол из предыдущего пункта, сопровождаемый характеристикой "оператор(видумножение)".

   (c) упрощединица. Тождество попытки упрощения с помощью цепочки пакетных нормализаторов. Пример:

   $\forall_{abcden}(e = a(b + c)^n + d \to a(b + c)^n + d = e)$

   Соответствующий прием обращается к пакетному нормализатору раскрывания скобок "стандплюс" для попытки упрощения.

   (d) упрощминус. Тождество, использующее пакетный нормализатор для подготовки упрощения. Пример:

   $\forall_{abcdn}(a + b = cd \to (a + b)c^n = c^{n+1}d)$

   Соответствующий прием обрабатывает левую часть антецедента нормализатором "факторизация" ускоренной попытки разложения на множители. После этого оказывается возможной группировка выделенного множителя c и степени c^n.

   (e) нормвыч(x1 x2). Эквивалентность, использующая нормализатор вычислений для явного разрешения относительно неизвестных списка x1. x2 - направление замены. Пример:

   $\forall_{Aabc}(\text{собствзначение}(A, a, b) = ((a, b) \in c) \to \text{собствзначение}(A, a, b) \leftrightarrow (a, b) \in c)$

   Характеристика - "норвыч(a b второйтерм)". Соответствующий прием обращается к нормализатору вычисления собственных значений матрицы "собствзначения". Он получает в качестве входного терма утверждение с неизвестными "собствзначение(A, a, b)", выполняет необходимые вычисления и выдает условие принадлежности пары неизвестных (a, b) конечному списку найденных пар (корень - кратность).

   (f) заголовки(x1 x2). Эквивалентность, использующая нормализатор x1 приведения к заданным заголовкам для последующего эквивалентного преобразования, исключающего сложную операцию. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcde}(e = a/b + c \to \neg(a/b + c = d) \leftrightarrow \neg(e = d))$

Характеристика - "заголовки(видумножение второйтерм)". Соответствующий прием складывает дробные выражения с неизвестными, чтобы затем исключить дроби в равенстве.

(g) Заголовки(x1 x2). Эквивалентность, использующая нормализатор x1 приведения к заданным заголовкам для последующей декомпозиции условия задачи на описание. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{abn}(b = a \to a = n \leftrightarrow b = n)$

Характеристика - "Заголовки(видумножение второйтерм)". Соответствующий прием применяется к целочисленному уравнению с суммой в левой части и целочисленной ненулевой константой в правой. Он предпринимает попытку разложить на два содержащих неизвестные целочисленных множителя левую часть, чтобы затем свести уравнение к дизъюнкции подслучаев для разложения правой части в два целочисленных множителя.

(h) станддн(x1 x2 x3). Эквивалентность, использующая нормализатор x1 для стандартизации неизвестных подвыражений условия задачи на описание. x2 - направление замены, x3 - неизвестная. Пример:

$\forall_{abcde}(c = a \mathbin{\&} e = d/2 \to a = b \leftrightarrow \neg(\cos e = 0) \mathbin{\&} c = b \ \vee\ \cos e = 0 \mathbin{\&} a = b)$

Характеристика - "станддн(половинныйугол второйтерм x4)". Соответствующий прием выполняет переход к тангенсу половинного угла в уравнении, содержащем синус и косинус d, либо лишь один из них, но вместе с ним - тангенс e. Переформулировка содержащей неизвестные левой части уравнения выполняется первым антецедентом, обращающимся к пакетному нормализатору "половинныйугол".

(i) Стандплюс(x1). Эквивалентность, использующая нормализатор стандартной формы x1 для разгруппировки подвыражения с неизвестными. Пример:

$\forall_{abcdefg}(f = a(b + c)^d + e \to a(b + c)^d + e = g \leftrightarrow f = g)$

Характеристика - "Стандплюс(стандплюс)". Соответствующий прием выполняет раскрывание скобок с неизвестными слагаемыми в условии задачи на описание.

(j) импликанты(x1 x2). Эквивалентность, использующая нормализатор x1 приведения к заданным заголовкам для последующей декомпозиции консеквента кванторной импликации. x2 - направление замены. Пример:

$\forall_{deg}(d(f) = g(f) \to \forall_f(e(f) \to d(f) = 0) \leftrightarrow \forall_f(e(f) \to g(f) = 0))$

Характеристика - "импликанты(видумножение второйтерм)". Соответствующий прием обращается к оператору "видумножение" для разложения $d(f)$ на множители.

(k) ориентация. Прием нормализатора x1 общей стандартизации выражений с заголовком x2, использующий равенство из контекста при произвольной его ориентации. Пример:

$\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

Характеристика - "ориентация(нормоперация операция)". Соответствующий прием заменяет выражение a с заголовком "операция" на выражение b с заголовком "отображение", явно задающее данную операцию алгебраической системы.

(l) нормпарам(x1). Усмотрение избыточности условия на неизвестную с помощью нормализатора x1 ограничений на параметры. Пример:

$$\forall_{abx}((0 \leq a - b) = \text{истина} \ \& \ a < x \rightarrow \neg(x = b))$$

Характеристика - "нормпарам(стандменьшеилиравно)". Соответствующий прием отбрасывает при редактировании ответа условие $\neg(x = b)$ задачи на описание. Второй антецедент идентифицируется с другим условием. Первый антецедент обрабатывается нормализатором "стандменьшеилиравно". Так как на этапе редактирования ответа сопровождение по о.д.з. может оказаться нарушено, использование проверочного оператора для усмотрения неравенства $0 \leq a - b$ будет малоэффективным.

(m) стандхаракт. Шаблон для указания вида термов, обеспечивающих невырожденные преобразования к стандартной форме. Название стандартной формы A определяется другой характеристикой - "оператор(A)". Пример:

$$(a + b)^n c/d + e$$

Другая характеристика "оператор(стандплюс)" уточняет, что в данной ситуации имеет смысл попытка использования нормализатора "стандплюс" для раскрывания скобок. Дополняют описание шаблона характеристики "см(...)" и "указатель(...)". Они указывают, что n идентифицируется с натуральной константой; выражение e может быть нулевым; разрешаются единичные значения c, d, n, но хотя бы одно из них должно отличаться от единицы.

6. Стандартизация.

(a) класс(x1 x2). Тождество для стандартизации класса. x1 - направление замены. x2 - список термов "указатель(...)", "см(...)", передаваемых в спецификацию. Пример:

$$\forall_{abcd}(0 < b \rightarrow \mathrm{set}_x(d < a/b + c \ \& \ A(x)) = \mathrm{set}_x(0 < a + bc - bd \ \& \ A(x)))$$

Характеристика - "класс(второйтерм см(пересекаются(фикс(0 1 2 1 2)x)) указатель(обобщподст(фикс(0 1)) занесениепосылки(1 $A(x)$) быстрпреобр(фикс(0 2 2 1 2) стандплюс)))".

(b) операнд. Тождество для стандартизации операнда сложной операции с помощью нормализатора стандартной формы. Пример:

$$\forall_{abcdeghn}(h = (a + b)^n c/d + e \rightarrow g^{(a+b)^n c/d+e} = g^h)$$

Соответствующий прием раскрывает скобки в показателе степени, преобразуя его в сумму.

(c) асимптравны(x1 x2). Нетождественное преобразование условия задачи на преобразование, имеющее специальную целевую установку. x1 - цель задачи, x2 - направление замены. Пример:

$\forall_n((n \to \infty)$ & $m(n)$ – целое & $\lim_{n\to\infty}\{m(n)\} = \infty \to m(n)! = \sqrt{2\pi m(n)}(m(n))^{m(n)}\mathrm{exp}(-m(n)))$

Характеристика - "асимптравны(цель(асимптоценка) второйтерм)".

7. Вывод следствий.

   (a) целивывода(x1). Импликация для вывода следствий в посылках, ориентированного на специальную целевую установку. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация вывода осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". Если фильтр B вида "контекст(...)" переброшен в указатели, то он регистрируется в списке x1 как "указатель(B)". Пример:

   $\forall_{abfguv}(g = \lambda_x(u(x), v(x))$ & Производная(f, g) & $a = \mathrm{set}_x(u(x) = 0$ & $x \in b) \to \mathrm{roots}(g, b) = a)$

   Характеристика - "целивывода(тип(доказать) не(контекст(посылка(x5) вид(x5 равно(roots(g, b) x8)))) указатель(контекст(условие(x3) заголовок(x3 нижняягрань Нижняягрань) равно(x4 второйтерм(x3)) вид(x4 образ(f, b)))))". Соответствующий прием выводит равенство для множества корней производной при доказательстве неравенства, использующем производные.

   (b) заменанеизвестной. Импликация выводит параметрическое описание неизвестной в условиях задачи на описание. x1 - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация осуществляется текущим выражением A, то в начале списка x1 помещается терм "контрольвывода(A)". Пример:

   $\forall_{abcdmn}(\neg(a = 0)$ & $ax + b + c^{m/n} = d \to \exists_y(x = (y + d - b)/a$ & y – число))

   Соответствующий прием делает попытку замены неизвестной для получения двучленного уравнения с дробной степенью. Переменная x - неизвестная, не входящая в выражения a, b. Выражение d не содержит неизвестных. Переменная n идентифицируется с натуральной константой, отличной от 2, переменная m - с единицей либо двойкой.

   (c) Разложмн(x1). Импликация для вывода следствия в посылках задачи на исследование, обеспечивающего декомпозицию относительно неизвестных. x1 - список номеров антецедентов, идентифицируемых с посылками. Пример:

   $\forall_{abcde}(e = a + c$ & a – число & b – число & c – число & d – число & $a = b$ & $c = d \to e = b + d)$

   Характеристика - "Разложмн(6 7)". Соответствующий прием предпринимает попытку сложения двух целочисленных уравнений для разложения на множители левой части суммы.

8. Упрощение термов.

   (a) связпеременная(x1). Тождество для упрощения выражения относительно переменных связывающей приставки. x1 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abcdpq}(ap + b = 0$ & $\neg(a = 0)$ & $q = ad - bc \to cp + d = q/a)$

Характеристика - "связпеременная(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что преобразуемое вхождение подчинено квантору существования, причем p идентифицируется с произведение всех сомножителей, содержащих переменные связывающей приставки. Оно нелинейно относительно этих переменных. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Оно тоже располагается под указанным квантором. Выражение a не содержит переменных связывающей приставки. Последний антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором разложения на множители. Результат q является линейным относительно переменных связывающей приставки.

(b) Внешнеизв(x1). Эквивалентность, навешивающая внешнюю операцию над обеими частями равенства для свертки нескольких неизвестных выражений в одно. x1 - направление замены. Пример:

$\forall_{abcde}(e = 2a \rightarrow b\cos a\cos e + d = c \leftrightarrow b\sin(4a) + 4d\sin a = 4c\sin a \ \& \ \neg(\sin a = 0) \ \vee \ \sin a = 0 \ \& \ b\cos a\cos e + d = c)$

Характеристика - "Внешнеизв(второйтерм)". Соответствующий прием домножает обе части тригонометрического уравнения на синус, чтобы свернуть произведение косинуса на косинус двойного аргумента в синус четырехкратного аргумента.

9. Декомпозиция.

(a) декомпозиции. Дизъюнкция шаблонов утверждений, допускающих декомпозицию либо сильное упрощение относительно неизвестных. Сопровождается характеристиками "указатель(...)" и "см(...)", уточняющими контекст. Пример:

$axy/b = 0 \ \vee \ ax^c/b = 0$

Дополнительные характеристики "см(не(известно(x)) не(известно(y)))", "указатель(единица(1 a b) заменазнака(минус a))". Квазипротокол сам по себе не порождает никаких приемов. Он используется генератором приемов для созданиея фильтров, проверяющих декомпозируемость получаемых приемами утверждений.

(b) Тип(x1). Шаблон декомпозиции относится только к ситуациям, когда все переменные и все промежуточные выражения уравнения имеют тип x1. При этом переменная - корневой операнд шаблона - идентифицируется с константой типа x1. Пример:

$xy = n$

Характеристика - "Тип(целое)". Шаблон используется для создания фильтров приема, разлагающего на множители левую часть целочисленного уравнения, в правой части которого находится целочисленная константа.

10. минимум(x1). Предпочтительный выбор варианта срабатывания с наименьшим возможным значением модуля целочисленного параметра x1. В предыдущем примере - характеристика "минимум(n)".

Глава 3

Протоколы базы теорем

Для создания приема, помимо теоремы, бывают нужны также некоторые общие характеристики той предметной области, к которой теорема относится. Такие характеристики размещаются в базе теорем и называются протоколами базы теорем. Иногда протокол создается, чтобы фиксировать выбор некоторой версии создания приемов по теоремам данной предметной области, иногда - сам может стать источником приемов. Некоторые протоколы служат для организации какого-либо цикла логического вывода, порождающего новые теоремы. Во всех этих случаях протокол представляет собой терм чисто технического характера. Он вводится через тот же интерфейс, что и обычная теорема, и всегда снабжается характеристикой "протокол". В отдельных случаях допускаются дополнительные характеристики. Как и теоремы, протоколы могут создаваться приемами программирующего логического вывода. Эти приемы описываются в следующем томе монографии. Совокупность протоколов, относящихся к предметной области, может рассматриваться как некоторая схема алгоритмизации данной предметной области. По этой причине та часть системы вывода теорем, которая создает протоколы, получила название алгоритмизатора. На текущий момент этот модуль, как и сама система протоколов, находится лишь в зачаточном состоянии.

В этой главе мы приведем краткое описание типов протоколов, используемых системой.

3.0.11 Общие свойства понятий

1. степень(x1 x2 x3). Протокол указывает, что для ассоциативной операции x1 введена двуместная операция x2 типа "степени". x3 - номер операнда, соответствующего показателю степени. Пример: "степень(умножение степень 2)".

2. актив(x1). Протокол указывает на режим ввода посылки "актив(x1)" при обнаружении в задаче выражения x1. Пример: "актив(прямая(ab))".

3. развертка(x1 x2). Протокол указывает, что для двуместной ассоциативно - коммутативной операции x1 введена соответствующа яоперация x2 над семейством операндов. Пример: "развертка(суммавсех плюс)".

4. опред(x1 x2 x3). Протокол указывает, что при выполнении условия x1 значение объекта x3 однозначно определяется значением объекта x2. Здесь x2, x3 - переменные, x1 - утверждение с этими переменными. Пример: "опред(Отображение(x1 x2 x3)x1 x2)".

5. тождвывод(x1 x2). Протокол указывает, что для операции x1 создается прием, усматривающий ее значение из кванторного тождества, имеющегося в контексте. x2 - список символов, которые не должны встречаться в выражении, определяющем значением операции. Пример: "тождвывод(услвероятн услвероятн вероятность)".

6. размерность(x1 x2). x1 есть операция над x2-параметрическим семейством. Пример: "размерность(двойнойинтеграл 2)".

7. коммутативно(x1). x1 - коммутативный символ. Имеютя в виду как операции, так и симметричные отношения. Пример: "коммутативно(параллельны)".

8. одз(x1 x2). Утверждение x2 определяет о.д.з. для терма x1. Пример: "одз(прямая(AB)и(точка(A) точка(B)не(равно(A B))))".

9. ограничитель(x1 x2). x1 - символ одноместной операции. x2 - утверждение с единственной переменной x, интерпретируемой как операнд x1, указывающее некоторые дополнительные ограничения, достаточно часто выполняющиеся при использовании операции x1. Пример: "ограничитель(тангенс и(меньшеилиравно(0 x)меньшеилиравно(x пи)))". Величины углов в планиметрии располагаются в данном диапазоне, и для него имеет смысл создавать специальные приемы.

10. схемаоперандов(x1 x2). x1 - символ, обладающий симметрией, определяемой термом x2. Пример: "схемаоперандов(биссектриса набор(0 2 4 набор(1 1 3)))". Протокол указывает, что в терме "биссектриса($ABCD$)" второй и четвертый операнды зафиксированы на своих позициях, а первый и третий можно переставлять.

11. сокращтеор(x1 x2). Операция x1 введена для сокращенной записи выражений, содержащих операцию x2. Пример: "сокращтеор(услвероятн вероятность)".

12. блокраздела(x1 x2). Хотя операция x1 и определяется через более простые операции списка x2, но эти операции относятся к разным кластерам приемов, и сведение x1 к x2 без особых к тому причин не допускается. Пример: "блокраздела(скалумнож угол уголмежду)". Работа со скалярным произведением чаще осуществляется в координатах, а не в геометрических понятиях.

13. функция(x1 x2). Для термов x2 с заголовком "отображение" предусмотрена специальная идентификация, определяемая указателем "x1(v)", где v - вхождение терма x2 в теорему. Пример: "функция(матрица отображение(x1 x2 и(принадлежит(x1 номера(1 x3)) принадлежит(x2 номера(1 x4))) значение(x5 набор(x1 x2))))". Для идентификации определяющих прямоугольную матрицу функций от двух переменных используется указатель "матрица(v)".

14. логсимвол(x1). Протокол, инициирующий рассмотрение всех связанных с символом x1 теорем для общей алгоритмизации этого символа. Пример: "логсимвол(умножение)". Запуск процедуры логического вывода на этом протоколе, просмотрев имеющиеся теоремы, создаст протоколы для инициализации пакетных нормализаторов "нормумножение" и "упрощумножение".

15. раздел(x1). Протокол, инициирующий рассмотрение всех теорем раздела x1 для общей алгоритмизации этого раздела. Пример: "раздел(элементарнаяалгебра)". Запуск процедуры логического вывода на этом протоколе приведет к созданию нескольких протоколов "унификация". Например, будет создан протокол "унификация(секанс косеканс синус косинус тангенс котангенс тригаргумент)". Он указывает на целесообразность приведения соответствующих операций к общему аргументу. При этом "тригаргумент" - название идентифицирующего терма ГЕНОЛОГа, перечисляющего аргументы данных операций в текущем терме задачи.

16. сравн(x1 x2). Для заголовка x1 числового атома целесообразно создание приемов, усматривающих строгие либо нестрогие неравенства с этим атомом в одной части и константой x2 в другой. Пример: "сравн(угол $\pi/2$)".

17. родобъекта(x1). x1 - название одного из основных типов объектов. Пример: "родобъекта(натуральное)".

18. Новый(x1). x1 - понятие, для которого целесообразно создание приема расшифровки по определению. Пример: "Новый(гипсинус)".

19. взаимодействие(x1 x2). x2 - список символов операций, с которыми предположительно может "взаимодействовать" операция x1. В него не включаются операции, определяемые через x1, однако может включаться сама операция x1. Примеры: "взаимодействие(синус синус косинус)", "взаимодействие(факториал факториал)".

3.0.12 Нормализаторы

Нормализатор общей стандартизации

1. нормализация(x1 x2). x2 - название нормализатора общей стандартизации выражений либо утверждений с заголовком x1. Для нормализатора общей стандартизации равенств значением x1 служит тип объектов, соединяемых равенством. Пример: "нормализация(плюс нормплюс)".

2. общнорм(x1 x2). x1 - выражение $f(y_1...y_m)$, x2 - условия на контекст, при которых обработка выражения x1 нормализатором общей стандартизации обеспечивает вычисление значения операции f. Пример: "общнорм(прямоепроизведение(x1 x2) заголовок(x1 перечень) первыйсимвол(x1 набор) заголовок(x2 перечень) первыйсимвол(x2 набор))". Нормализатор общей стандартизации преобразует произведение двух конечных списков в список пар.

3. перем(x1). x1 - название нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком A. Для этого нормализатора предусмотрен прием, использующий посылку вида "$A(\ldots) = X$" для замены текущего выражения на переменную X. Пример: "перем(нормпромежуток)". Если в задаче по физике временной промежуток обозначен переменной, то эта переменная используется везде для ссылки на данный промежуток.

4. вычмн(x1 x2 x3). Для константных термов с заголовком x1 нормализатор общей стандартизации обеспечивает вычисление их значения, имеющего тип x2,

если x3 - набор типов константных операндов. Пример: "вычмн(плюс десчисло десчисло десчисло)".

Нормализатор сокращенной перезаписи

1. нормупростить(x1 x2). x2 - название нормализатора сокращенной перезаписи выражений с заголовком x1. Пример: "нормупростить(умножение упрощумножение)".

Нормализатор приведения к заданным заголовкам

1. нормзаголовок($g_1 \dots g_n f$). Протокол определяет название f нормализатора, преобразующего термы к одному из заголовков $g_1, \dots, g_n$. Пример: "нормзаголовок(умножение дробь степень видумножение)".

2. нормразделение(x1 x2 x3). x1 - вид утверждения либо выражения, которое с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам x3, применяемого к идентифицируемому с переменной x2 выражению, преобразуется к виду, допускающему декомпозицию. Пример: "нормразделение(непересек(x1 x2) x2 видобъединение)".

3. блокнеизвестных(x1 x2 x3). x1 - шаблон выражения, обрабатываемого нормализатором x2 приведения к заданным заголовкам, для которого блокируются дальнейшие преобразования ввиду того, что текущий результат достаточен для внешних целей. x3 - фильтр, уточняющий контекст. Пример: "блокнеизвестных($a\sin x\cos x+b\sin x+b\cos x+c$)) видумножение и(не(известно(x))известно(a)известно(b)известно(c)))". В указанной ситуации легко усматривается квадратное уравнение относительно суммы синуса и косинуса.

4. видобъекта(x1 x2 x3). x1 - название нормализатора приведения к заданным заголовкам, x2 - один из этих заголовков, x3 - список фильтров "контекст(вид(A $\dots$))", определяющих условия на вид входного терма A, при котором можно ожидать результативной работы нормализатора с получением заголовка x2. В этом списке в качестве A используется служебный символ "фикс". Возможно отсутствие x2. Тогда x3 определяет условия, при которых можно ожидать получение какого-либо из заданных заголовков нормализатора. Пример: "видобъекта(видумножение дробь контекст(вид(фикс $a+b/c$) заменазнака(минус b)))". В данном случае сложение дробных выражений обычно дает дробное выражение.

5. блокир(x1 x2 x3). Остановка попыток приведения к заданным заголовкам терма x1 нормализатором x2. x3 - конъюнкция фильтров. Пример: "блокир(плюс(умножение(x1 x2)x3) видумножение и(не(контекст(вид(x1 степень(x4 2)))) не(контекст(вид(x1 степень(x4 3)))) не(контекст(вид(x1 степень(x4 5)))) контекст(вид(x1 степень(x4 x5)) единица(1 x5) не(контекст(вид(x3 плюс(x6 умножение(x7 степень(x4 x8)))) единица(1 x7 x8) заменазнака(минус x7) единица(0 x6)))) не(контекст(тригаргумент(корень x4))) не(контекст(операнд(теквхожд x4) обобщмножитель(x4 x5) символ(x5 плюс))) не(контекст(обобщмножитель(x2 x4) символ(x4 плюс))) не(контекст(обобщмножитель(x1 x4) символ(x4 плюс))) не(контекст(вид(x1 степень(x5 x6)) десчисло(x5) единица(1 x6))) не(контекст(вид(теквхожд плюс(дробь(x5 x6) x7)) заменазнака(минус x5))) коммент(константа) коммент(

редуцирование)))". Собраны эвристические условия, заставляющие подозревать, что попытка разложения на множители выражения "плюс(умножение(x1 x2)x3)" окажется неудачной.

6. заголовок(x1 x2 x3). Нормализатор x2 приведения к заданным заголовкам применяется в задачах на преобразование с целью x3 к условию, представимому в виде терма x1. Пример: "заголовок(плюс(x1 x2) видумножение разложитьнамножители)".

Нормализатор стандартной формы

1. станддн(x1 x2 x3). x1 - название нормализатора стандартной формы, имеющей корневую ассоциативно-коммутативную операцию x2 и внутреннюю ассоциативно-коммутативную операцию x3. Пример - "станддн(стандплюс плюс умножение)".

2. стандартизация(x1 x2). x1- название нормализатора стандартной формы, x2 - список логических символов, для которых предусмотрена инициализация попытки обращения к данному нормализатору. Пример - "стандартизация(стандобъединение объединение пересечение разность прямоепроизведение прообраз образ)".

3. стандтерм(x1 x2 x3). Указание на контекст, в котором выполняется стандартизации с помощью нормализатора стандартной формы. x2 - преобразуемый терм, x1 - надтерм терма x2, в рамках которого выполняется стандартизация, x3 - заголовок нормализатора. Пример: "стандтерм(рациональное($a(b+c)^d$) $a(b+c)^d$ стандплюс)".

4. свертка(x1 x2). x2 - название специального нормализатора свертки выражений, приведенных к виду стандартной формы x1. Пример - "свертка(станддн двгруппировки)". Нормализатор "двгруппировки" предпринимает попытки булевой "факторизации" для уменьшения длины формулы алгебры логики.

Нормализатор упрощения относительно неизвестных

1. упрощнеизв(x1 x2). x2 - название нормализатора упрощения относительно неизвестных выражений с заголовком x1. Пример: "упрощнеизв(логарифм уравнлогарифм)".

2. нормнеизв(x1 x2 x3). x1 - название нормализатора, выполняющего разрешение утверждений вида x2 относительно неизвестных, указанных термом x3 вида "неизвестные(...)". Пример: "нормнеизв(нормМаксимум Максимум(x1 x2 x3 x4) неизвестные(x3 x4))".

Нормализатор вычисления

1. вычисление(x1). x1 - название нормализатора вычисления x1. Пример: "вычисление(собствзначения)".

2. симв(x1 x2 x3 x4). Для нормализатора x1, применяемого к терму вида x2, предпочтительно преобразование переменной x3 к заголовку, принадлежащему списку символов x4. Пример: "симв(нормнижняягрань нижняягрань(x1 образ(x2 x3))x3 перечень класс пусто)".

3. числпарам(x1 x2). x1 есть название нормализатора вычисления, предназначенного для выражения термов вида x2 через известные параметры и неизвестные внешней задачи на описание, рассматриваемой относительно текущей задачи на исследование. Пример: "числпарам(смпериод длина(промежуток(x1 x2 1 1)))".

4. нормвыч(x1 x2 x3). x1 есть название нормализатора вычисления, который следует применять к подвыражению условия x2 задачи на описание, идентифицированному с переменной x3. Пример: "нормвыч(нормквадрформа ортканонич-вид(x6 x23 x24) x6)".

Нормализатор выделения заданных подтермов

1. извлечфунк(x1 x2). x1 - название нормализатора извлечения заданного подтерма, заголовок которого принадлежит списку символов x2. Пример: "извлечфунк(извлечение плюс умножение степень дробь синус косинус логарифм тангенс)".

Нормализатор упрощения дизъюнкции

1. нормили(x1 x2). x1 - название нормализатора упрощения дизъюнкций, в которых встречаются предикаты списка x2. Пример: "нормили(склейканеравенств меньше меньшеилиравно)".

Специальная стандартизация

Протоколы этого раздела имеют предварительный характер.

1. станд(x1). Применение последовательности нормализаторов списка x1 для специальной стандартизации. Пример: "станд(стандменьше)".

2. пересечениесерий(x1 x2 x3). Для объединения двух параметрических описаний неизвестной, вид которых определяется конъюнкцией x1, используется нормализатор x2. x3 - неизвестная. Пример: "пересечениесерий($\exists_n(n-$целое & $f(n) \leq x$ & $x \leq g(n))$ & $\exists_m(m-$ целое & $p(m) \leq x$ & $x \leq q(m))$ пересечениесерий x)".

3. стандменьше(x1 x2). x2 - заголовок нормализатора стандартизации условий с известными параметрами для отношений, имеющих заголовок x1. Пример: "стандменьше(менше стандменьше)".

4. спускоперандов(x1 x2). В нормализаторе x1 предусмотрены приемы устранения вложенных операций списка x2. Пример: "спускоперандов(Нормногочлен плюс)".

5. смвывод(x1 x2). Нормализатор x1 переводит утверждение, заголовок которого принадлежит списку x2, в ослабленное либо (при наличии комментария "доказать") усиленное утверждение, в котором исключена сложная операция. Пример: "смвывод(исклцелаячасть меньше меньшеилиравно)".

3.0.13 Синтезаторы

1. синтезатор(x1 x2 вход(x3) выход(x4)x5). x1 - название синтезатора, реализующего утверждение x2; x3 - список входных переменных; x4 - список выходных переменных. x5 - список термов, уточняющих тип синтезатора. Пример: "синтезатор(компсвязности компсвязности(x1 x2) вход(x1) выход(x2) перечисление)". Синтезатор перечисляет компоненты связности множества точек евклидова пространства.

3.0.14 Вспомогательные задачи

1. конст(x1 x2). x1 определяет вид константного подвыражения посылки, для которого целесообразна попытка упрощения с помощью вспомогательной задачи. x2 - конъюнкция фильтров, определяющих некоторое условие на x1, которое после обращения к задаче должно оказаться ложным. Пример: "конст(синус(x1) контекст(подчинено(x2 теквхожд) символ(x2 арксинус арктангенс арккотангенс арккосинус)))".

2. вспомописание(x1 неизвестные(x2 x3)). Указание на создание приема, обращающегося к задаче на описание для разрешения условия x1, неизвестными которого служат только переменные x2 и x3, относительно x2. Пример: "вспомописание($ab^cd^e = f$, неизвестные(b, d))".

3. вспомнеизв(x1 неизвестные(x2)). x1 - конъюнкция условий задачи на описание, которые целесообразно пытаться разрешить относительно неизвестных подвыражений x2. Пример: "вспомнеизв($ax + by + cz + d = e$ & $fx + gy + hz + p = q$ & $rx + sy + tz + u = v$, неизвестные(x, y, z))".

4. упрощение(x1 x2 x3). Целесообразность попытки упрощения терма x2, являющегося подтермом терма x1, с помощью вспомогательной задачи на преобразование. x3 - конъюнкция фильтров. Пример: "упрощение($\mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & x – число & y – число),c, контекст(позиция(x8 c)вид(x8 $(e/f) + g$) заменазнака(минус e)))".

5. преобразовать(x1). Для выражений вида x1 целесообразна попытка вычисления их значения с помощью вспомогательной задачи на преобразование, имеющей цель "упростить". Пример: "преобразовать(объем(A))".

6. решение(x1 x2). Уравнение вида x1 в посылках задачи на исследование целесообразно разрешать относительно неизвестной x2. Пример: "решение($ab + c = d$, a)". С протоколом связан прием, разрешающий посылку задачи на исследование относительно той неизвестной, по которой она линейна. Применение приема сопровождается множеством дополнительных ограничений.

7. допконтекст(x1 x2 x3). Доказательство утверждений вида x1 при истинности фильтров x2 целесообразно передавать вспомогательной задаче на доказательство, сопровождаемой комментарием x3. Пример: "допконтекст(меньше(x1 x2) контекст(входит(переменная(x3) корень) переменная(x3)) комментарий(1 нижняягрань x3))". С протоколом связан прием, выбирающий переменную, по которой будет предприниматься дифференцирование, и обращающийся к задаче на доказательство неравенства с помощью производных.

3.0.15 Вид ответа

1. группнеизв(x1 x2). x1 - список шаблонов утверждений с единственной неизвестной y, для которых возможна свертка их в ответ относительно y. x2 - название раздела, к которому относятся данные утверждения. Роль y в протоколе играет переменная с номером 1. Пример: "группнеизв(принадлежит(x1 x2) не(принадлежит(x1 x2)) не(равно(x1 x2)) теориямножеств)".

3.0.16 Параметризация

1. параметризация(P). Протокол указывает на необходимость ввода параметров типа P при работе с условиями вида $P(A)$. Пример: "параметризация(целое)".

2. парамописание(P x). Протокол указывает на целесообразность попытки перехода от условия P задачи на описание, в котором переменная x идентифицируется с невырожденным неизвестным подвыражением, к параметрическому описанию относительно вспомогательного параметра y, путем разрешения утверждения "$P(y)$ & $x = y$" относительно некоторой входящей в x неизвестной. Пример: "парамописание(целое(x1) x1)". На данном протоколе создан прием, преобразующий в параметрическое описание условие задачи на описание вида "t – целое", где выражение t содержит некоторую неизвестную y. Выбирается новая целочисленная переменная n, уравнение $t = n$ разрешается относительно y, и по найденному явному выражению для y через n формируется параметрическое описание данной неизвестной с варьируемом параметром n.

3.0.17 Стандартизация

1. стандподст(x $f(\ldots x \ldots)$ A). Операнд x операции f является стандартизируемым в контексте, определяемом фильтром A. При решении задачи реализуется тенденция к отождествлению таких операндов для операций f. Пример: "стандподст(x1 степень(x1 x2) и(тип(описать) условие не(известно(x2))))". Основания степеней с неизвестными показателями при решении уравнений целесообразно пытаться сделать одинаковыми. Другой пример - "стандподст(x1 логарифм(x1 x2) истина)".

2. блокзамен(x1 x2). x1 - вид термов, появление которых в контексте x2 запрещается. x2 - конъюнкция фильтров и указателей идентификации. Пример: "блокзамен($\mathrm{tg}(a - 2b\pi/c)$ и(натуральное(b)натуральное(c) единица(1 b c)))". Протокол учитывается при выводе теорем. Он заставляет избавляться от минуса под тангенсом с помощью формул приведения.

3. унификация(x1 x2). Список x1 перечисляет такие одноместные операции, что при решении задач на описание целесообразно сведение их к общему аргументу (унификация аргументов). x2 - название идентифицирующего терма ГЕНОЛОГа, перечисляющего аргументы операций списка x1 в заданном терме. Характеристика "символ(A)", если она есть, указывает одноместную операцию A, допускающую вынесение из-под операций списка x1. Пример: "унификация(секанс косеканс синус косинус тангенс котангенс тригаргумент)".

4. числзнач(x1). x1 - числовой атом, для которого предусмотрен прием, усматривающий в контексте равенство, выражающее этот атом через численные параметры, и реализующий замену. Пример: "числзнач(вероятность(A B))".

5. подобныечлены(x1 x2). x1 - числовой атом, для которого предусмотрены специальные приемы приведения подобных членов. x2 - либо терм "не($A_1 \dots A_n$)", и тогда коэффициентами при x1 считаются произвольные выражения, не содержащие символов $A_1, \dots, A_n$ либо набор символов $A_1, \dots, A_n$, и тогда коэффициентами считаются произвольные выражения, не содержащие невырожденных числовых атомов, заголовки которых отличны от $A_1, \dots, A_n$. Если x2 отсутствует, то коэффициентами считаются произвольные выражения, не имеющие невырожденных числовых атомов. Пример: "подобныечлены(расстояние(x1 x2) не(расстояние длина))".

6. группировка(x1). x1 - числовой атом, для которого предусмотрен прием догруппировки (если коэффициент при x1 имеет вид суммы, то с ней группируются прочие члены с сомножителем x1). Пример: "группировка(расстояние(x1 x2))".

7. раскрытьскобки(x1). x1 - числовой атом, для которого предусмотрены приемы раскрывания скобок. Пример: "раскрытьскобки(расстояние(x1 x2))".

8. исключ(x1 x2). Предпринимается ориентация равенств, направленная на исключение выражений с заголовком x1. x2 - элементы спецификации приема. Пример: "исключ(область см(условие тип(описать) корень))". В условиях задач на описание области отображений заменяются на их явные выражения. Для этого выражение с заголовком "область" перемещается в левую часть равенства.

9. использ(x1 x2). Предпринимается ориентация равенств, направленная на переход к использованию логического символа x1. x2 - элементы спецификации приема. Пример: "использ(отрезок см(тип(исследовать) корень или(не(цель(текстоваязадача)) комментусловия(ориентацияравенства))) переменная)". В посылках задач на исследование переменные, обозначающие отрезки, заменяются на явные задания отрезков. Для этого выражение с заголовком "отрезок" перемещается в правую часть равенства.

10. едн(x1 x2 x3). Существует стандартизация утверждений с неизвестными, шаблон которых задается термом x1, делающая избыточной переменную x3, так что вместо нее в теоремах приемов следует подставлять единицу. x2 - список переменных, хотя бы одна из которых должна идентифицироваться с содержащим неизвестные выражением. Пример: "едн($a/b + c = d$, a, b)". Протокол используется при создании теорем приемов.

11. существпосылки(x1). Посылки с заголовком x1 являются часто используемыми, и развертка их по определению нецелесообразна. Пример: "существпосылки(описана)". Протокол используется при создании приемов.

3.0.18 Разрешение относительно заданного терма

1. нормуравн(x1). Для числового атома x1 предусмотрены приемы разрешения относительно x1 простейших уравнений. Пример: "нормуравн(угол(x1 x2 x3))".

2. консеквент(x1). Если x1 - заголовок неизвестного консеквента кванторной импликации в условиях задачи на описание, имеющей известные антецеденты, то целесообразно разрешить этот консеквент относительно единственной неизвестной. Пример: "консеквент(меньшеилиравно)". После разрешения неравенства относительно неизвестной появляется возможнотсь избавиться от квантора, переходя к рассмотрению известных точных верхней либо нижней граней.

3. извлечение($A(\ldots t(h(x))\ldots), x, t, P$). Для условий задачи на описание, имеющих вид A, предпринимается попытка усмотрения того, что вся неизвестная их часть выражается через заданный терм $h(x)$, содержащий неизвестную x. Для $h(x)$ вводится вспомогательная неизвестная y, условие разрешается относительно y, и в результат обратно подставляется $h(x)$. t - вспомогательная функциональная переменная внутри шаблона A, P - дополнительные условия на вспомогательную неизвестную, которая здесь обозначена той же буквой x, что и исходная неизвестная. Пример: "извлечение($a < f(\sin h(x) + \cos h(x))$, x, f, $x - mbox x$)". Соответствующий прием усматривает возможность замены суммы синуса и косинуса на новую неизвестную.

4. найдено(x1 x2 x3). Утверждение x1 рассматривается как определяющее неизвестную x2 через ранее найденные объекты, если истинна конъюнкция условий x3. Пример: "найдено($D \in$ окружность(AB)$\cap$прямая(AC), D, $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $\neg(A = C)$ & $\neg(A = B)$ & $D \in$ окружность(AB) & $A \in$ отрезок(CD))".

3.0.19 Вывод в условиях

1. коррекцияодз(x1 x2 x3). Коррекция о.д.з. путем вывода утверждения в условиях задачи на описание. x1 - вид терма, x2 - выводимое сопровождающее утверждение, x3 - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст. Пример: "коррекцияодз(дробь(x2 x1) не(равно(x1 0)) истина)". Соответствующий прием проверяет наличие комментария "коррекцияодз". Если затем не усматривается, что знаменатель дробь ненулевой, то создается дополнительное условие, явно на это указывающее.

3.0.20 Вывод в посылках

1. стандтеор(x1). Указание на целесообразность вывода промежуточных утверждений, вид которых задается шаблоном x1. Такие утверждения часто используются в антецедентах теорем приемов. Пример: "стандтеор(не(принадлежит(x1 интервал(x2 x3))))". В таком виде обычно формулируются условия принадлежности точки x3 лучу x1-x2.

3.0.21 Разбор случаев

1. подслучаи(x1 x2 x3). Указание на целесообразность разбора случаев по дизъюнкции x2 для достижения цели x1. x3 - список утверждений, дополняющих контекст. В качестве x1 используются следующие термы: "упрощение(t)" - упрощение выражения t, "числатомы($B_1 \ldots B_n$) вывод соотношения, связывающего числовые атомы $B_1, \ldots, B_n$. Примеры: "подслучаи(упрощение($(a/b)^c$), $0 < b \vee b < 0$)", "подслучаи(числатомы($\angle(BAC), \angle(CAD), \angle(BAD)$), $\in$ отрезок(BD) $\vee$

$B \in$ отрезок$(CD) \vee D \in$ отрезок$(BC), C \in$ прямая$(BD), A-$точка$, B-$точка$C-$точка$D-$точка)". В последнем протоколе разбор случаев позволяет установить, нужно ли брать сумму либо разность углов для получения третьего угла.

3.0.22 Пакеты продукций

1. циклзнач(x1 x2). x1 - название пакета продукций, использующего цикл. x2 - список термов следующих видов: "условие(...)" - утверждения, определяющие связь между входными и выходными параметрами оператора, "посылки(...)" - утверждения, определяющие условия на входные данные оператора, "вход(...)" - список входных параметров оператора, "выход(...)" - список выходных параметров оператора, "параметры(...)" - список вспомогательных параметров оператора, "контекст(...)" - утверждения, определяющие связь вспомогательных параметров с входными и выходными параметрами, "индикатор(...)" - утверждения, используемые продукциями, истинность которых устанавливается продукциями же. Для таких утверждений в программе вводятся специальные переменные - индикаторы истинности. При работе продукций значения входных переменных изменяются так, что из истинности утверждений "условие(...)" для текущих значений входных переменных и некоторых значений выходных вытекает их истинность для исходных значений входных переменных и тех же значений выходных. Пример: "циклзнач(линсист условие(равно(умножматр(x1 x23)x2) матр(x23 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0)x14 1)) посылки(матр(x1 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0)x14 x14)натуральное(x14)матр(x2 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0)x14 1)) вход(x1 x2) выход(x23) параметры(x13) контекст(натуральное(x13)вертикнули(x1 x13)) индикатор(диагмакс(x1 x13)))". Пакет продукций "линсист" решает матричное уравнение $ax = b$, где a - вещественная квадратная матрица размера $n \times n$, b и x - вещественные столбцы высоты n. Вспомогательный параметр m указывает число "пройденных" при диагонализации столбцов; утверждение "вертикнули(a, m)" означает, что матрица a имеет нули под главной диагональю в столбцах, номера которых меньше m. Утверждение "диагмакс(a, m)" означает, что максимальное значение модуля элементов матрицы a, расположенных в столбце с номером m не выше главной диагонали, достигается для ее диагонального элемента.

2. циклпарам(x1 x2). Аналогично предыдущему. Отличие лишь в том, что на каждом шаге истинность утверждений "условие(...)" для исходных значений входных переменных и некоторых значений выходных должна вытекать из истинности утверждений "контекст(...)" для текущих значений, а не из утверждений "условие(...)". Пример - "циклпарам(обрматрица условие(равно(x2 степеньматр(x1 минус(1)))) посылки(матр(x1 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0) x14 x14) натуральное(x14)) вход(x1) выход(x2) параметры(x3 x4 x13) контекст(равно(умножматр(x3 x2) x4) матр(x3 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0)x14 x14) матр(x4 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0)x14 x14) натуральное(x13) вертикнули(x3 x13)) индикатор(диагмакс(x3 x13)))".

3. значения(x1 x2). x1 - название пакета продукций, не использующего цикл. x2 - список термов следующих видов: "условие(...)" - утверждения, определяющие связь между входными и выходными параметрами оператора, "посылки(...)" - утверждения, определяющие условия на входные данные оператора, "вход(...)"

- список входных параметров оператора, "выход(...)" - список выходных параметров оператора. Пример: "значения(числкоэфф условие(равно(x3 числкоэфф(x1 x2))) посылки(число(x1) натуральное(x13) натуральное(x14) матр(x2 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0) x14 x13)) вход(x1 x2) выход(x3))".

4. повтор(x1 x2). x1 - название пакета продукций, использующего цикл, реализуемый до выполнения заданного условия. x2 - список термов следующих видов: "условие(...)" - утверждения, определяющие связь между входными и выходными параметрами оператора, "посылки(...)" - утверждения, определяющие условия на входные данные оператора, "вход(...)" - список входных параметров оператора, "выход(...)" - список выходных параметров оператора. Пример: "повтор(экспматр условие(равно(x3 точность(экспматр(x1)x2))) посылки(число(x2) матр(x1 промежуток(минусбеск плюсбеск 0 0) x14 x14) натуральное(x14)) вход(x1 x2) выход(x3))". Здесь x1 - квадратная вещественная матрица, для которой требуется вычислить экспоненту с точностью x2.

3.0.23 Вычисления

1. вычпрог($f(x_1 \dots x_n)P_1(x_1) \dots P_n(x_n)$). f - символ операции; $x_1, \dots, x_n$ - переменные; $P_1, \dots, P_n$ - типы значений этих переменных, для которых существует программа, вычисляющая значение операции f. Пример: "вычпрог(плюс(x1 x2) десчисло(x1) десчисло(x2))".

2. тождфунк(x1). Для вычисления операции x1 над функцией, обозначенной переменной, целесообразна попытка найти в контексте кванторное тождество, определяющее значения это функции. Пример: "тождфунк(пределпослед)".

3. вычислить(x1). Для выражений с заголовком x1 целесообразна попытка вычисления с помощью вспомогательной задачи. Пример: "вычислить(интеграл)".

4. вычисл($f(s_1 \dots s_n)$). Для вычисления операции f целесообразно преобразование ее i-го операнда к заголовку s_i. Пример: "вычисл(умножматр(строки строки))".

5. выч(A вход($x_1 \dots x_n$) выход($y_1 \dots y_m$) B). Существует процедура, перечисляющая значения выходных переменных $y_1, \dots, y_m$ при заданных значениях входных переменных $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющие утверждению A. B - список утверждений "тип(z,t)", уточняющих типы t константных значений входных и выходных переменных z. Пример: "выч(равно(x1 умножение(x2 x3)) вход(1) выход(x2 x3) тип(x1 целое) тип(x2 целое) тип(x3 целое))". Существует процедура, перечисляющая разложения целого числа в произведение двух целочисленных сомножителей.

3.0.24 Подготовка к вычислению

1. Класс(A n). A есть выражение, содержащее переменную x1. Если вместо этой переменной подставлено выражение вида "$\mathrm{set}_{x_1 \dots x_n}(f(x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_n)$ & $B(x_1 \dots x_n))$", то для вычисления значения выражения A рекомендуется разрешить уравнение под описателем "класс" относительно некоторой (по умолчанию - последней) переменной. Пример: "Класс(точки(x1 x2)3)". Соответствующий прием подготавливает задачу к вычислению площади поверхности, разрешая ее уравнение относительно последней переменной.

3.0.25 Установки на вывод теорем

Некоторые ячейки логического вывода в базе теорем имеют в своем первом пункте не теорему, а протокол, организующий какой-либо специализированный цикл логического вывода. Обычно исходными данными этого цикла служат теоремы, расположенные в последующих пунктах данной ячейки вывода и снабженные уточняющими их роль характеристиками. Подробнее об организации таких ячеек вывода будет рассказано в томе монографии, посвященном логическому выводу в базе теорем.

1. стандформа($A\ B_1(n_1)\dots B_k(n_k)$). Вывод упрощающих тождеств для нормализатора стандартной формы A. $B_i(n_i)$ - указатель оценки стоимости n_i операции B_i. Пример: "стандформа(стандобъединение объединение(1) пересечение(1) разность(1))".
2. факторизация(x1). Вывод тождеств для приведения к заголовку x1. Пример: "факторизация(умножение)".
3. функции(x1 x2 x3). Вывод тождеств для вычисления заданной характеристики простейших функций, определяемых операциями некоторого раздела. x1 - шаблон вычисляемой характеристики функции, x2 - переменная, обозначающая в нем рассматриваемую функцию, x3 - конъюнкция ограничений на параметры шаблона x1. Для указания раздела служит характеристика протокола "раздел(...)". Пример: "функции(образ(f, $[a, b]$), f, f − функция & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $a-$число & $b-$число & $a \leq b$ & $c-\mathrm{boolean}$ & $d-\mathrm{boolean}$)". Здесь c, d - указатели типа концов промежутка. Используется характеристика "раздел(элеменатрнаяалгебра)".
4. взаимнооднозначно(x1). Вывод утверждений о взаимной однозначности отображений, определяемых операциями раздела x1. Пример: "взаимнооднозначно(комплексныечисла)".

3.0.26 Ввод вспомогательных обозначений

В разделе собраны протоколы, на которых основаны приемы, вводящие вспомогательные обозначения для различных объектов в процессе решения задачи.

1. функподст(x1 x2). x1 - терм с подтермом "отображение(...)", для которого целесообразно ввести вспомогательное обозначение. x2 - условия на контекст. Предполагается, что x1 идентифицируется с подтермом условия задачи на преобразование. Пример: "функподст(inf(образ($\lambda_x(u(x), v(x)), a$)) и(корень не(входит(целаячасть корень))))".
2. обозначение(x1 x2). x1 - обозначаемое выражение, x2 - условия на контекст, в котором целесообразен ввод вспомогательного обозначения для x1. Пример: "обозначение(set_x(правсмежнкласс(a, G, H)), и(тип(доказать) контекст(операнд(x2 теквхожд)символ(x2 мощность))))".
3. обознач(x1 x2 x3). x1 - обозначаемое выражение, x2 - конъюнкция условий на параметры выражения x1, от которых будет зависеть обозначающая функциональная переменная. Эти условия содержат только данные параметры. x3 - условие на контекст, в котором целесообразен ввод функционального вспомогательного обозначения для x1. Пример: "обознач(det($\lambda_{ij}(A(i, j), i \in \{1, \dots, an +$

$b\}$ & $j \in \{1, \ldots, an + b\}$)), n – натуральное, и(тип(преобразовать) целое(a) целое(b) или(условие комментусловия(определитель Замена)) коммент(определитель значение теквхожд) не(заголовок($A(i, j)$, строки))))". Соответствующий прием вводит обозначение для определителя n-го порядка, чтобы вычислить его по рекурсии.

3.0.27 Координаты

1. точки(A B). Логический символ A - название координат. Выражение $B(x, K)$ обозначает множество объектов, координаты (типа A) которых в системе координат K образуют множество x. Пример - "точки(коорд точки)".

2. тчкоорд(A B). Логический символ A - название координат. Выражение $B(x, K)$ обозначает объект, координаты которого в системе координат K равны x. Пример: "тчкоорд(коорд, тчкоорд)".

3.0.28 Проверочные операторы

1. легковидеть(x1 x2). Для проверки утверждений вида x1 введен проверочный оператор с заголовком x2. Пример: "легковидеть(меньше(x1 x2) усмменьше)".

2. проверка(x1 x2). Для проверки утверждений вида x1 введен усиленный проверочный оператор с заголовком x2. Пример: "проверка(меньше(x1 x2) провменьше)".

3.0.29 Развертка

1. список(x1 x2) - x1 есть описатель "класс(...)", для которого предусмотрена идентификация с разверткой в конечный список, x2 - конъюнкция условий на параметры выражения x1, при которых развертка целесообразна. Пример: "список(класс(x23 перестановка(x23 номера(1 x14))) и(натуральное(x14) меньше(x14 5)))".

3.0.30 Идентифицирующие операторы

1. усм(x1 x2). Для обработки утверждения x1 предусмотрен идентифицирующий оператор, причем x2 - термы "вход(...)", "выход(...)", определяющие, какие переменные рассматриваются в качестве входных, а какие - в качестве выходных. Терм "выход(...)" может отсутствовать. Примеры: "усм(принадлежит(x1 отрезок(x2 x3)) вход(x1 x2 x3))", "усм(принадлежит(x1 отрезок(x2 x3)) вход(x2 x3) выход(x1))".

Глава 4

Автоматическая характеризация теорем

Характеристики теорем создаются автоматически двумя способами. Во-первых, имеется процедура "характеризатор", создающая список характеристик из общих соображений. Во-вторых, прием процедуры вывода теорем может создать характеристики теоремы в обход характеризатора, располагая более точной информацией о цели вывода теоремы. Например, при выводе формулы корней квадратного уравнения будет создана лишь характеристика, явно указывающая на использование этой формулы для разрешения уравнения относительно заданной перемнной. Если предоставить свободу действий характеризатору, то были бы предложены другие, в общем-то, бесполезные характеристики. Например, было бы создано предложение использовать формулу "в обратном порядке", сворачивая дизъюнкцию равенств для корней в более компактно записываемое исходное уравнение. Тем не менее, первичный анализ определений и аксиом предметной области должен выполнять именно характеризатор, намечая цели для последующего логического вывода и позволяя создавать простейшие приемы.

Интерфейс характеризации теоремы

Еще раз напомним команды интерфейса, связанные с характеризацией теоремы. Чтобы из просмотра теоремы в базе теорем перейти в режим ручного ввода характеристик текстовым редактором, достаточно нажать "к" (кир.). Для получения справок о типах характеристик из просмотра теоремы нажимается "Ctr-к" (кир.), переводящее в оглавление типов характеристик. Если левой кнопкой мыши нажать на характеристику в списке прорисованных под теоремой характеристик, то снизу появляется информация о данной характеристике. Чтобы ее убрать, достаточно нажать "пробел" либо нажать левую кнопку мыши в нижней части экрана.

Чтобы обратиться к процедуре "характеризатор" для повторного создания характеристик, следует из просмотра теоремы нажать "Х" (кир.). Предварительно следует вручную удалить из списка характеристик элемент "пв". Такой элемент блокирует автоматическкюу рехарактеризацию. Он создается процедурой вывода теорем для замораживания предложенного ею списка. Блокировку рехарактеризации вызывают также элементы с заголовками "блок", "протокол", "тожд", "станд", "теорема-приема". Часть характеристик теоремы в процессе рехарактеризации сохраняются, остальные - предварительно удаляются, а затем могут быть восстановлены характеризатором. Обязательно сохраняются характеристики с заголовками "определение", "блокраздела", "блокприемов", "копия", "обознач", "авт", "посылки".

Чтобы протестировать работу характеризатору, вместо "X" нужно нажать "Ctr-x" (кир.). Тогда будут происходить выходы в отладчик ЛОСа при создании характеризатором каждой новой характеристики. На экране появится фрагмент программы оператора "характ", регистрирующего эту характеристику. Под программой - горизонтальная черта, а под ней указана (в виде значения переменной x1) сама характеристика. Для просмотра участка программы характеризатора, создавшего ее, нужно нажать "Page Up", и далее пользоваться обычными средствами отладчика ЛОСа. Для перехода к просмотру очередной характеристики последовательно нажимаются клавиши "0"(ноль) и "Enter". Чтобы оборвать цикл просмотра и выйти в главное меню, нажимается "Esc".

При развитии программы характеризатора может понадобиться поиск теорем, в которых срабатывает тот или иной его прием. Для этого нужно создать контрольную точку "трассировка(стоп 0)" в точке программы характеризатора, где располагается прием, выбрать в оглавении базы теорем пункт, являющийся корневым для ветви поиска, и нажать "X". Начнется пролистывание теорем данной ветви и запуск характеризатора на них. Результаты работы характеризатора зарегистрированы нигде не будут, но отладчик ЛОСа при каждой попытке применения приема будет показывать соответствующий кадр.

Выйти на программу интерфейса, выполняющую обращение к характеризатору при ручном его запуске из просмотра теоремы, можно через пункт "База теорем" - "Характеризация теорем" - "Обращение к характеризации теоремы" оглавления программ. Эта программа обслуживает нажатия клавиш "X", "Ctr-x" из просмотра теоремы. В соседнем пункте "Тестирование характеризации теорем раздела" расположена программа, обращающаяся к тестированию характеризатора для выбранной ветви оглавления базы теорем.

4.1 Процедура "характеризатор"

Обращение к процедуре характеризатора имеет вид "характеризатор(x1 x2 x3)", где x1 - теорема, x2 - исходный список ее характеристик. Выходной переменной x3 присваивается пополненный в результате характеризации список x2. Выйти на начальную точку программы характеризатора можно через пункт "База теорем" - "Характеризация теорем" - "Характеризатор" - "Исходная точка" оглавления программ.

Прежде всего, отбрасываются квазипротоколы с символом "преобр" в антецедентах. Для них характеризатор сразу выдает неизмененный ответ x2. Далее переменной x4 присваивается вхождение консеквента теоремы x1. Если теорема не имеет вид кванторной импликации, то переменной x4 присваивается вхождение ее первого символа. Дальнейшие действия зависят от того, какой символ расположен по вхождению x4.

Характеризатор представляет собой достаточно большую базу приемов, каждый из которых анализирует теорему независимо от других. При обучении системы новые приемы размещались в программе несколько хаотично. Поэтому рассмотрение их удобнее будет привязать не к последовательному прохождению всей программы, а к оглавлению этих приемов, хранящемуся там же, где и указанная выше ссылка на исходную точку программы.

Все вводимые характеристики добавляются к списку x2, который в конце и выдается как результат. Добавление очередной характеристики H выполняется оператором "характ(H)". Значение x2 ему передавать не нужно, так как он самостоятельно находит значение x2 во внешнем кадре глобального стека интерпретатора и корректирует его.

4.1.1 Характеризация тождества

Здесь собраны приемы характеризатора, относящиеся к теоремам, у которых по вхождению x4 расположено равенство.

Общая стандартизация

Начальную точку программы, анализирующую случаи тождеств общей стандартизации, легко найти через первый пункт "Исходная точка" подпункта "Общая стандартизация" оглавления программ. Она выделена контрольной точкой "прием(2)". Для дальнейших рассмотрений здесь происходит присвоение переменной x5 одной из частей тождества, переменной x6 - противоположной части, переменной x7 - указатель направления "первыйтерм" либо "второйтерм", соответствующего переходу от x5 к x6. Ниже x5 будет рассматриваться как заменяемый терм, x6 - как заменяющий. Если не оговаривается обратное, в каждом из перечисляемых случаев вводится характеристика "нормализация(x7)".

1. Цикл учета общих соображений.

   Далее предполагается, что список свободных переменных заменяющего выражения - подмножество списка переменных заменяемого.

   (a) Заменяемый терм имеет свободные переменные, а заменяющий - не имеет. Пример:

   $\forall_n(n - \text{целое} \rightarrow \text{нод}(1, n) = 1)$

   (b) Заменяемый терм неоднобуквенный, а заменяющий - однобуквенный. Пример:

   $\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \rightarrow b \cup c = c)$

   (c) В заменяемом терме выделяется подтерм, из которого заменяющий терм получен отбрасыванием части операндов. Пример:

   $\forall_{kmn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \text{взаимнопросты}(m, n) \ \& \ k - \text{целое} \rightarrow \text{нод}(mk, n) = \text{нод}(k, n))$

   (d) Заменяемый терм имеет связанные переменные, а заменяющий не имеет связанных. Сложность символов заменяющего терма не больше, чем у заменяемого. Пример:

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow [a] = \sup(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ n \leq a)))$

   Замена происходит справа налево.

   (e) Заменяемый и заменяющий термы - константные, причем длина заменяющего меньше. Сложность символов заменяющего терма не больше сложности символов заменяемого. Пример:

   $\sin(\pi/6) = 1/2$

(f) Заменяющий терм бесповторный и имеет единственную переменную. Заменяемый терм тоже содержит эту переменную, но имеет также другие переменные. Сложность символов заменяющего терма не больше сложности символов заменяемого. Пример:

$\forall_{cd}(\neg(c = 0)\ \&\ c|d\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое} \rightarrow \text{нод}(c, d) = |c|)$

(g) В заменяемом терме выделяется собственный подтерм, представляющий собой результат переобозначения без отождествлений переменных заменяющего терма. Заменяющий подтерм бесповторный, а заменяемый - нет. Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b) \cdot (b/c) = a/c)$

(h) Заменяющий терм бесповторный, а заменяемый - не бесповторный и имеет переменные, не входящие в заменяющий. Сложность символов заменяющего терма не больше сложности символов заменяемого. Пример:

$\forall_{abd}(0 < ab\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \rightarrow d|b|/(ab) = d/|a|)$

(i) Заменяющий терм бесповторный, а заменяемый - нет. Оценки сложности обоих термов равны, причем самое сложное выражение каждого из них - единственное, и эти выражения имеют вид $f(x)$, $g(x)$, где x - переменная. Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ b - \text{rational} \rightarrow a^b|a|^c = |a|^{b+c})$

(j) Заменяющий терм после перестановки операндов некоторого своего подтерма становится собственным подтермом заменяемого терма. Возможна перестановка операндов некоммутативных операций. Не возникают новые подтермы наибольшей сложности, имеющие корневую некоммутативную операцию. Пример:

$\forall_{abe}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow 1/|b/a|^e = |a/b|^e)$

(k) Заменяющий терм получен переброской в заменяемом некоторого подтерма на другое место (быть может, с изменением порядка операндов некоторой его операции), после которой этот подтерм становится возможным вынести наружу как операнд ассоциативно-коммутативной операции. Дополнительно создается характеристика "коммутвхождение(x7)". Пример:

$\forall_{abn}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ n - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(n) - \text{even}) \rightarrow a/(b(-1)^n) = a(-1)^n/b)$

(l) Заменяющий терм имеет вид "f(префикс$(x_1 x_2)$)" либо "f(конкатенация$(x_1\ x_2)$)", а заменяемый не имеет операции, операндами которой служат x_1, x_2. Пример:

$\forall_{fg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{слово}\ \&\ 0 < l(g)\ \&\ \forall_x(x \in \text{Val}(g) \rightarrow x - \text{функция}) \rightarrow \text{произведение}(\text{префикс}(f, g)) = \text{произведение}(f, \text{произведение}(g)))$

(m) Заменяющий терм - операция, примененная к набору различных переменных, а заменяемый не имеет такого вида. Сложность операций заменяющего терма не больше сложности операций заменяемого. Если заменяемый терм - коммутативно-ассоциативная двуместная операция от квазипеременных (т.е. переменных либо одноместных операций от переменных), не содержащая констант, то заголовок заменяющего терма коммутативен. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0) \to \text{нок}(a, b) = ab/\text{нод}(a, b))$

В этом примере замена выполняется справа налево.

(n) Заменяющий терм бесповторный и представляет собой (быть может, после отбрасывания корневой одноместной операции) операцию от одноместных операций над переменными либо переменных. Заменяемый терм небесповторный. Сложность символово заменяющего терма не больше сложности символов заменяемого. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \max(a - b, b - a) = |a - b|)$

(o) Заменяющий терм бесповторный, а заменяемый - нет. Заменяющий терм имеет коммутативно-ассоциативный заголовок, причем каждый его корневой операнд получен из некоторого подтерма заменяемого вычеркиванием части его подтермов. Параметры каждого корневого операнда заменяющего терма содержатся в параметрах некоторого корневого операнда заменяемого. Заменяемый терм имеет более чем одноместную некоммутативную корневую операцию. Либо сложность заменяющего терма меньше сложности заменяемого, либо они равны, причем количество вхождений самого сложного символа в заменяющий терм не больше такого числа для заменяемого. Пример:

$\forall_{abcd}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$

(p) Заменяемый и заменяющий терм имеют вид "$f(x_1, \ldots, x_n)$", "$g(x_1, \ldots, x_n)$", причем сложность символа g меньше сложности символа f. Пример:

$\forall_a(a - \text{число}\ \&\ a \leq 0 \to |a| = -a)$

(q) Существует описатель "отображение" либо "класс" в заменяемом терме, такой, что любой описатель в заменяющем - более простой (в смысле поразрядного сравнения наборов чисел вхождений параметров). Сложность символов заменяющего терма не больше чем у заменяемого. Дополнительно вводится характеристика "описатель(N)". Пример:

$\forall_{Afg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ \text{конечное}(A)\ \&\ \text{Dom}(f) = A\ \&\ \text{Dom}(g) = A\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \sum_{x, x \in A}(f(x) + g(x)) = \sum_{x, x \in A} f(x) + \sum_{x, x \in A} g(x))$

(r) Заменяющий терм бесповторный и имеет единственную переменную x, а заменяемый - не бесповторный и имеет операцию, хотя бы два операнда которой равны x. Пример:

$\forall_n(n - \text{целое}\ \&\ \neg(n = 0) \to \text{нод}(n, n) = |n|)$

(s) Заменяемый и заменяющий термы бесповторные, имеют по единственному подвыражению максимальной сложности, причем для заменяющего терма это подвыражение получается из подвыражения заменяемого отбрасыванием части операндов его операций и их перестановкой. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{слово}\ \&\ \{;b\} \subseteq \mathbb{R} \to \inf(a; b\} = \min(a, \inf\{;b\}))$

Замена производится слева направо.

2. Цикл учета стандартных шаблонов.

   Для всех приводимых ниже шаблонов направление замены - слева направо.

   (a) Тождество вида $f(x, g(y)) = h(f(x, y))$. Операция h не сложнее операции f. Если $g = h$, то вводится также характеристика "заменазнака(g)". Пример:

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow -ab = (-a)b)$

   Заметим, что данный пример идентифицируется с шаблоном при перестановке частей равенства, так что замена - справа налево.

   (b) Безусловное тождество вида $f(x, g(y, z)) = g(f(x, y), z)$, где операция f ассоциативна и коммутативна, а операция g не ассоциативно-коммутативная. Пример:

   $\forall_{abe}(\neg(b = 0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $e -$ число $\rightarrow e \cdot (a/b) = (ae)/b)$

   (c) Условное тождество вида $f(x, g(y, z)) = g(f(x, y), z)$, где операция f ассоциативна и коммутативна, а операция g не ассоциативно-коммутативная. В этом случае вместо характеристики "нормализация(x7)" вводится характеристика "норм(x24)", где x24 - направление, противоположное направлению x7. Пример:

   $\forall_{adf}(a -$ set & $d -$ set & $f -$ set & непересек$(a, d) \rightarrow a \cup (f \setminus d) = (a \cup f) \setminus d)$

   Характеристика "норм(первыйтерм)" указывает, что хотя общая стандартизация и выполняется справа налево, однако обратное преобразование в пакетах приведения к заданным заголовкам тоже является допустимым.

   (d) Тождество вида $f(p(g(x, y)), z) = f(q(x), h(y, z))$, где операция h ассоциативно-коммутативная, а операция g - не коммутативная либо не ассоциативная. Пример:

   $\forall_{abc}(a-$число & $b-$rational & числитель$(b)-$even & $c-$число $\rightarrow |a|^{bc} = (a^b)^c)$

   (e) Тождество вида $f(g(x, h(y))) = p(q(x), y)$ (либо $= p(x, q(y))$). Пример:

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow -(a - b) = b - a)$

   (f) Тождество вида $f(x, g(y, z)) = p(q(x, y), z)$, где операции f, g не ассоциативно-коммутативные, а операция p ассоциативно - коммутативная. Пример:

   $\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0)$ & $0 < c$ & $0 < d$ & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число $\rightarrow$ $e \log_c d = \log_c(d^e))$

   Идентификация с шаблоном происходит при перестановке частей равенства, так что характеристика - "нормализация(первыйтерм)".

   (g) Тождество вида $h(f(x, y)) = g(p(x), q(y))$, где операция f не ассоциативно-коммутативная, а операция g ассоциативно-коммутативная. Пример:

   $\forall_{ab}($Вектор(a) & Вектор(b) & $a \perp b \rightarrow$ длина(вектумнож$(a, b)) =$ длина$(a) \cdot$ длина$(b))$

   (h) Тождество вида $f(x, g(y, h(z, v))) = p(u, q(s, t))$, где x, y, z, u, v, s, t - переменные либо одноместные операции от переменных. Пример:

   $\forall_{bcd}(b -$ set & $-$ set & $d -$ set $\rightarrow b \setminus (d \cup (b \setminus c)) = (b \cap c) \setminus d)$

(i) Тождество вида $f(g(x,y),g(z,v)) = g(p(x,z),q(y,v))$, где g не коммутативно, а f,p,q коммутативны. Пример:

$\forall_{dehi}(d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ h - \text{set}\ \&\ i - \text{set} \to (d \times h) \cap (e \times i) = (d \cap e) \times (h \cap i))$

(j) Тождество вида $f(g(x)) = h(f(x))$, где операция f сложнее операций g, h. Пример:

$\forall_a(a - \text{число} \to \sin(-a) = -\sin a)$

3. Группировка либо разгруппировка, определяемая справочниками "общнорм" и "склейка".

(a) Тождество $t_1 = t_2$, обе части которого элементарны, причем t_1 бесповторно, а t_2 имеет единственную переменную x, встречающуюся неоднократно. Эта переменная встречается в t_1, t_2 только под двуместной некоммутативной операцией f (возможные промежуточные одноместные операции не учитываются), причем в качестве одного и того же операнда. Справочник "общнорм" указывает, что для противоположного операнда операции f имеет место режим группировки либо разгруппировки. Данное тождество обеспечивает такой режим. Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(b = 0) \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

На промежуточных этапах решения задач обычно происходит "разгруппировка" оснований степени, хотя на этапе редактирования ответа мжет быть предпринято обратное преобразование. Решение о режиме группировки либо разгруппировки для конкретных операций принимается алгоритмизатором, анализирующим имеющиеся в предметной области теоремы. Это решение фиксируется в виде протокола базы теорем.

(b) Тождество $t_1 = t_2$, обе части которого элементарны. Группа R имеющих наибольшую сложность подтермов терма t_2, число переменных которых больше 1, бесповторна. t_1 не бесповторно. $f(A,B)$ - встречающаяся в R операция, для одного операнда которой справочник "общнорм" предусматривает режим разгруппировки, а для другого - режим группировки. Каждая переменная x, имеющая в t_1 более одного вхождения, встречается в том операнде Q терма $f(A,B)$, который не подлежит группировке. В t_1 имеется такой подтерм $f(C,D)$, что соответствующий Q операнд имеет те же параметры, что и Q. Пример:

$\forall_{ade}(d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ e \leq 0\ \&\ 0 \leq d - \sqrt{e_d^2}\ \&\ 0 \leq e + d^2\ \&\ a - \text{число} \to a\sqrt{d - \sqrt{e + d^2}} + a\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} = a\sqrt{2d + 2\sqrt{-e}})$

(c) Заменяющая часть - бесповторное выражение вида $f(x,p)$, где f некоммутативно; x - переменная. Заменяемая часть имеет вид $g(t_1,t_2)$, где каждое t_i - либо переменная x, либо выражение вида $f(x,s)$. По операнду операции f, отличному от x, имеется режим группировки. Пример:

$\forall_{ab}(\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational} \to aa^b = a^{b+1})$

(d) Заменяющая часть бесповторна и содержит подвыражение $f(A)$, где символ A выделен справочником "склейка". Оценки сложности прочих подвыражений заменяющей части меньше, чем для $f(A)$. Заменяемая часть имеет более одного подвыражения, заголовок которого выделен справочником "склейка". Параметры всех этих подтермов содержатся в параметрах A и не пересекаются друг с другом. Пример:

$\forall_{ab}(a -$ число $\& \; b -$ число $\rightarrow |a| \cdot |b| = |ab|)$

4. Тождества перестановочного типа.

   (a) Числа вхождений переменных в заменяемый и заменяющий термы одинаковые; числа вхождений неодноместных операций - одинаковые; числа вхождений одноместных операций - одинаковые. Как заменяемый, так и заменяющий терм имеют ровно одну неодноместную операцию, причем сложность ее у заменяемого терма больше сложности любой операции заменяющего терма. Заменяемый терм имеет свободные переменные. Пример:

   $\forall_{AB}(A - \mathrm{set} \; \& \; B - \mathrm{set} \rightarrow$ сужение(тождфунк$(A), B) =$ тождфунк$(A \cap B))$

   (b) Числа вхождений переменных в заменяемый и заменяющий термы одинаковые; числа вхождений неодноместных операций - одинаковые; числа вхождений одноместных операций - одинаковые. Заменяемый терм не входит в заменяющий и имеет свободные переменные. Число неодноместных некоммутативных операций в заменяющем терме не больше, чем в заменяемом. Заменяемый терм имеет вид $f(p, q)$, заменяющий - $f(r, s)$. Справочник "операнды" выделяет тот операнд операции f, упрощение которого является приоритетным. По этому операнду числа вхождений переменных при замене не увеличиваются, причем для некоторой переменной - число ее вхождений строго уменьшается. Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число $\& \; b -$ число $\& \; c -$ число $\& \; \neg(b = 0) \; \& \; \neg(\sin c = 0) \; \&$
   $\neg(\cos c = 0) \rightarrow a/(b \operatorname{ctg} c) = a \operatorname{tg} c/b)$

   (c) Перестановочное тождество, переводящее самый сложный терм на более "простое" вхождение. Пример:

   $\forall_{bcdef}(b -$ число $\& \; c -$ число $\& \; d -$ число $\& \; e -$ число $\& \; f -$ число $\&$
   $0 < ce \; \& \; \neg(f = 0) \rightarrow b/(f(c/e)^d) = b(e/c)^d/f)$

   Упрощение знаменателя является более приоритетным, так как при сложении дробных выражений подтермы знаменателя дублируются, а числителя - нет. Для установления эвристической "сложности" операндов используется справочник "упрощпеременных".

   (d) Выражение, не имеющее вида конечного перечня, преобразуется к виду конечного перечня без перехода к более сложным понятиям. Пример:

   $\forall df(f -$ функция $\& \; d \in \mathrm{Dom}(f) \rightarrow$ образ$(f, \{d\}) = \{f(d)\})$

5. Прочие характеристики общей стандартизации.

Помимо характеристики "нормализация(N)", на ситуацию типа общей стандартизации выражений могут указывать некоторые другие характеристики. Ниже эти случаи перечисляются. По-прежнему x7 - указатель направления от заменяемого терма к заменяющему.

(a) Тождество упрощает терм под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей либо равной сложности. Вводится характеристика "сокращ(x7)". Пример:

$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \to [n+a] = n + [a])$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

(b) Тождество преобразует выражение с использованием условных подвыражений, понижая при этом сложность понятий, отличных от символа "вариант". Вводится характеристика "варианты(x7)". Пример:

$\forall_k(k - \text{целое} \to (-1)^k = (1 \text{ при } k - \text{even}, \text{ иначе } -1))$

Характеристика - "варианты(второйтерм)".

(c) Тождество преобразует параметрическое описание класса в обычное. Вводится характеристика "парамописание(x7)". Пример:

$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + c^2 = 0) \to \text{set}_{xy}(\exists_t(x = at + b \ \& \ y = ct + d \ \& \ t - \text{число})) = \text{set}_{xy}(cx - ay + ad - bc = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

Характеристика - "парамописание(второйтерм)".

(d) Тождество преобразует параметрическое описание класса в операцию над семейством. Вводится характеристика "семействоэлементов(x7)". Пример:

$\forall_{Agh}(A - \text{set} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ h - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(h) = A \ \& \ \text{Dom}(g) = A \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \text{set}_x(x - \text{число} \ \& \ \exists_n(n \in A \ \& \ g(n) < x \ \& \ x < h(n))) = \bigcup_{n, n \in A}(g(n), h(n)))$

Характеристика - "семействоэлементов(второйтерм)".

(e) Тождество вида $f(g(x, y)) = h(f(x)f(y))$, где g, h ассоциативны и коммутативны. Вводится характеристика "замещение(второйтерм)". Пример:

$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to -b - c = -(b + c))$

Характеристика - "замещение(первыйтерм)".

(f) Тождество вида $f(g(x)) = x$, не имеющее существенных посылок. Вводится характеристика "отр". Пример:

$\forall_a(\text{Вектор}(a) \to -(-a) = a)$

(g) Тождество типа поглощения: "$\forall_{xy}(A(x) \ \& \ A(y) \ \& \ B(x, y) \to f(x, y) = y)$". Операция f ассоциативна и коммутативна. Единственный существенный антецедент - $B(x, y)$. Он представляет собой элементарное утверждение. Вводится характеристика "поглощает". Пример:

$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \to b \cup c = c)$

(h) Тождество, у которого заменяемая и заменяющая части имеют две переменные x,y причем заменяющая часть бесповторна, а заменяемая имеет три вхождения переменных. Вводится комментарий "сократимо". Пример:

$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ \neg(n - \text{even}) \ \& \ \neg(a = 0) \to |a|^n \text{sg}(a) = a^n)$

(i) Тождество, исключающее функциональную переменную, аргумент которой не связан внешними кванторами и описателями. Вводится комментарий "значперем(x7)". Пример:

$\forall_{abcdf}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ d -$ число $\& \ \neg(d = 0) \ \& \ a - b = 0 \to f(a)c/(f(b)d) = c/d)$

Сокращенная перезапись

Как и ранее, значением переменной x5 служит заменяемый терм, значением переменной x6 - заменяющий. Переменная x7 указывает направление замены. Если не оговаривается противное, в перечисляемых ниже случаях вводится характеристика "свертка(x7)".

1. Для любой переменной число ее вхождений в заменяющий терм не более числа вхождений в заменяемый терм, а для некоторой - строго меньше. Пример:

   $\forall_{abc}(a - \mathrm{set} \ \& \ b - \mathrm{set} \ \& \ c - \mathrm{set} \to (a \cup b) \setminus c = a \setminus c \cup b \setminus c)$

   Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

2. Числа вхождений переменных в заменяемый и заменяющий термы одинаковые, причем число вхождений неодноместных операций в заменяющий терм меньше, чем в заменяемый. Пример:

   $\forall_b(b -$ число $\to \cos(2b) = 1 - 2(\sin b)^2)$

   Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

3. Числа вхождений переменных в заменяемый и заменяющий термы одинаковые; числа вхождений неодноместных операций - тоже одинаковые, причем число вхождений в заменяющий терм одноместных операций меньше числа таких вхождений в заменяемый терм. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \mathrm{boolean} \ \& \ b - \mathrm{boolean} \to \neg(a \cdot b) = \neg a \cdot \neg b)$

   Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

4. Тождество свертки, уменьшающее число вхождений переменной до единицы. Вводится характеристика "склейка(...)". Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \to \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$

   Характеристика - "склейка(a первыйтерм)".

5. Тождество перестановочного типа, уменьшающее глубину заданной переменной до 1. Вводится характеристика "глубина(...)". Пример:

   $\forall_{ab}(a -$ число $\& \ 0 < a \ \& \ b -$ число $\to (1/a)^b = 1/a^b)$

   Характеристика - "глубина(b первыйтерм)".

6. Тождество, уменьшающее число операций над семействами до одной. Вводится характеристика "свертка(x7)". Пример:

   $\forall_{bc}(\mathrm{Dom}(b) = \mathrm{Dom}(c)$ & $b -$ функция & $c -$ функция & семействомножеств(b) & семействомножеств$(c) \to \bigcup_{d,d \in \mathrm{Dom}(c)}(b(d) \cup c(d)) = \bigcup(b) \cup \bigcup(c))$

   Характеристика - "свертка(первыйтерм)". Здесь $\bigcup$ - операция "объединениевсех".

7. Коррекция характеристик "свертка", "склейка" на "норм"для специальных случаев дистрибутивности. В действительности рассмотрен лишь единственный случай - дистрибутивность для прямого произведения двух множеств. Например:

   $\forall_{abe}(a - \mathrm{set}$ & $b - \mathrm{set}$ & $e - \mathrm{set} \to (a \times b) \cup (e \times b) = (a \cup e) \times b)$

   Вводится характеристика "норм(второйтерм)".

Группировки и перегруппировки

1. Перестановочное тождество: числа вхождений переменных в заменяемый и заменяющий термы одинаковые; числа вхождений неодноместных операций - одинаковые; числа вхождений одноместных операций - одинаковые. Вводится характеристика "перестановка". Пример:

   $\forall_{abcd}(a - \mathrm{set}$ & $b - \mathrm{set}$ & $c - \mathrm{set}$ & $d - \mathrm{set}$ & $b \subseteq c \to b \cup (a \cap c) \setminus d = c \cap (b \cup a \setminus d))$

2. Тождество вида $f(x, g(y, z)) = h(f(x, y), f(x, z))$. Операции g, h ассоциативны и коммутативны. Вводится характеристика "дистрибразвертка(...)". Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число $\to ab + ac = a(b + c))$

   Характеристика - "дистрибразвертка(первыйтерм)".

3. Тождество обобщенной дистрибутивности: $f(x, g(y, z)) = h(f(x, p(y)), f(x, q(z)))$. Здесь $p(x)$, $q(y)$ - одноместные операции от переменных либо сами переменные. Вводится характеристика "разбивает(...)". Для обычной дистрибутивности вводится как данная характеристика, так и характеристика из предыдущего пункта. Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $a \le 0$ & $b \le 0 \to (-a)^c(-b)^c = (ab)^c)$

   Характеристика - "разбивает(первыйтерм)".

4. Тождество для группировки сложных выражений. Заменяемое и заменяющее выражения - элементарные. Заменяемое выражение содержит все переменные теоремы. Оценки сложности заменяемого и заменяющего термов одинаковы, причем заменяемый терм имеет более одного выражения максимальной сложности, а заменяющий - только одно. Ни одно из наиболее сложных подвыражений заменяемого терма не содержит всех параметров наиболее сложного выражения заменяющего терма. Вводится характеристика "группмножитель(x7)". Пример:

$\forall_{abce}(\neg(b = 0)$ & $\neg(c = 0)$ & a – число & b – число & c – число & e – число $\rightarrow$ $(ac + be)/bc = a/b + e/c)$

Характеристика - "группмножитель(первыйтерм)".

5. Тождество с бесповторными частями, имеющими одинаковые списки переменных. Число этих переменных не менее двух. Вводится характеристика "группировки". Пример:

   $\forall_{an}(a$ – число & n – целое $\rightarrow [n + a] = n + [a])$

6. Тождество, преобразующее двуместную операцию над одноместными операциями с унифицируемыми аргументами в терм, имеющий два других унифицируемых аргумента. Вводится характеристика "тригаргумент(...)". Пример:

   $\forall_{ab}(a$ – число & b – число $\rightarrow \sin a \cos b = (\sin(a - b) + \sin(a + b))/2)$

   Характеристика - "тригаргумент(второйтерм)".

7. Тождество преобразует двуместную бесповторную некоммутативную операцию в операцию с ассоциативно-коммутативным заголовком, имеющую не менее двух неконстантных операндов. Вводится характеристика "коммутативно(...)". Пример:

   $\forall_{abc}(a$ – целое & b – целое & c – натуральное & $c|a$ & $c|b$ $\rightarrow$ нод$(a/c, b/c)$ = нод$(a, b)/c)$

   Характеристика - "коммутативно(первыйтерм)".

8. Тождество для варьирования стандартизируемого операнда. В антецедентах отсутствует равенство. Оценка сложности заменяющего терма не превосходит оценки сложности заменяемого. Вводится характеристика "стандлогарифм(...)". Пример:

   $\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0)$ & $\neg(c - 1 = 0)$ & $0 < a$ & $0 < b$ & $0 < c$ & a – число & b – число & c – число $\rightarrow \log_a b/\log_a c = \log_c b)$

   Характеристика - "стандлогарифм(c a первыйтерм)".

9. Тождество, упрощающее относительно неизвестных некоторый корневой операнд. Заменяемый терм имеет не более двух корневых операндов. Рассматривается наиболее сложный корневой операнд R. В предположении, что все переменные другого операнда известны, предпринимается обращение к оператору "неизвконтексты", перечисляющему фильтры F, при которых заменяющий терм теоремы имеет относительно неизвестных меньшую сложность, чем операнд R. Вводится характеристика "смнеизв(NmF)", где N - направление замены, m - номер операнда R. Пример:

   $\forall_{abcd}(\neg(c = 0)$ & a – число & d – число & $0 \leq a$ & b – число & c – rational & $\neg$(знаменатель(c) – even) $\rightarrow (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$

   Характеристика - "смнеизв(второйтерм 1 и(тип(описать)условие известно(c) не(известно(a)) натуральное(d) или(натуральное(d) натуральное(b))))".

10. Тождество, преобразующее операцию над условным выражением в условное выражение. Вводится характеристика "альтоперанды(...)". Пример:

    $\forall_{Pab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (0 \text{ при } P, \text{ иначе } a) \cdot b = (0 \text{ при } P, \text{ иначе } ab))$

    Характеристика - "альтоперанды(второйтерм)".

Упрощение сложных выражений

1. Тождество, уменьшающее глубину самых сложных подтермов и приводящее к возможности вычислений над константными термами.

   Оценки сложности заменяемого и заменяющего термов одинаковы. Количество самых сложных подтермов в заменяющей части не больше, чем в заменяемой. Глубина самого сложного подтерма в заменяемой части строго больше, чем в заменяющей. В заменяющем терме выделяются подтермы t_1, t_n, для которых возможно вычисление их константного значения, если известны константные значения входящих в них переменных. Для этого используется справочник "вычпрог". Вводится характеристика "вычпрог($N \ A \ t_1 \ldots t_n$)", где N - направление замены, A - конъюнкция указателей на типы константных значений переменных термов $t_1, \ldots, t_n$, для которых возможно вычисление значений этих термов. Пример:

   $\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \&$
   $f - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \rightarrow ab/(cd) + ae/(cf) = a(bf + de)/cdf)$

   Характеристика - "вычпрог(второйтерм, и(десчисло(d)десчисло(e) десчисло(b) десчисло(f)), $bf + de$, df)".

2. Тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам. Вводится характеристика "упрощение(...)". Пример:

   $\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \inf(\text{set}_n(b < n \ \& \ n - \text{целое})) = [b + 1])$

   Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

3. Тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам, при условии, что заданные выражения не зависят от заданных параметров.

   Оценка заменяющего терма меньше, чем оценка заменяемого. Однако, заменяющий терм имеет параметры, не входящие в заменяемый. Для каждого такого параметра x среди антецедентов теоремы втсречается кванторная импликация, конъюнктивные члены консеквента которой содержат равенство вида $x = t$. Определяются переменные y выражения t, принадлежащие кванторной приставке этой импликации. Затем создается характеристика "упрощкн($A \ N$)", где A - конъюнкция термов "конст($x \ y$)" по всем указанным x, N - направление замены. Характеристика означает, что упрощение происходит при условии независимости переменных x от параметров y. Пример:

   $\forall_{Pabm}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ P - \text{функция} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ b \subseteq a \ \&$
   $\forall_i(i \in a \rightarrow P(i) = m) \rightarrow \sum_{j, j \in b} P(j) = m \cdot \text{card}(b))$

   Характеристика - "упрощкн(конст($m \ i$) второйтерм)".

4. Тождество преобразует терм с несколькими вхождениями операции максимальной сложности, хотя бы одно из которых содержит все переменные заменяемой части, в выражение с единственным вхождением этой операции максимальной сложности. Вводится характеристика "единствсущ(...)". Пример:

   $\forall_{abc}(\sqrt{3}c\sin a - c\cos a + b = 2c\sin(a - \pi/6) + b)$

   Характеристика - "единствсущ(второйтерм)".

5. Тождество уменьшает число подвыражений максимальной сложности и уменьшает число вхождений переменных. Вводится характеристика "уменьшсложн(...)". Пример:

   $\forall_{acf}(a - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \ \& \ f \subseteq a \to c \setminus a \cup a \setminus f = c \setminus f)$

   Характеристика - "уменьшсложн(второйтерм)".

6. Тождество, преобразующее сложное выражение к стандартному виду объектов заданного типа.

   По типу значения заменяемой части тождества справочник "парамописание" перечисляет параметрические описания объектов такого типа. Проверяется унифицируемость этого параметрического описания с заменяющей частью тождества. Вводится характеристика "Стандкомпл(...)". Пример:

   $\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \&$
   $C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \to$
   $a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$

   Характеристика - "Стандкомпл(второйтерм)".

7. Тождество, преобразующее сложное выражение в выражение меньшей сложности, имеющее единственное подвыражение наибольшей сложности A. Вводится характеристика "исклтерм(A N)", где N - направление замены. Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2})$

   Характеристика - "исклтерм($\sqrt{a^2 + b^2}$ второйтерм)".

8. Тождество, декомпозирующее сложный терм в группу термов той же сложности, но зависящих от собственных подмножеств переменных. Характеристика - "декомпозиция(...)". Пример:

   $\forall_{ade}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < de \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \to$
   $\log_a(de) = \log_a|d| + \log_a|e|)$

   Характеристика - "декомпозиция(второйтерм)".

9. Тождество для варьирования сложного терма.

   Сложности заменяемого и заменяющего выражений равны. Все параметры заменяющего терма входят в заменяемый. Самый сложной подтерм A заменяемого терма единственный и совпадает с ним самим. Заменяющий терм имеет единственный самый сложный подтерм B, не связанный внешними кванторами и описателями. Вводится характеристика "варьир(N A B)", где N - направление замены. Пример:

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число & $0 < a$ & $\neg(a - 1 = 0)$ & $0 < b$ & $\neg(b - 1 = 0) \rightarrow \log_a b = 1/\log_b a)$

Характеристика - "варьир(второйтерм $\log_b a$ $\log_a b$)".

Константные термы

1. Тождество для упрощения с помощью вычислений над константными термами.

   Предпринимается анализ того, какие подтермы заменяющего терма, если они окажутся константными, могут быть вычислены при помощи стандартных вычислений ГЕНОЛОГа. Используется реализованный на ГЕНОЛОГе справочник "вычпрог", определяющий по символу операции f всевозможные наборы $(A, B_1, \dots, B_n)$, где $B_1, \dots, B_n$ - типы значений константных термов $x_1, \dots, x_n$, для которых компилятор ГЕНОЛОГа предусматривает вычисление значения операции $f(x_1, \dots, x_n)$, приводящее к константному терму типа A. Проверяется, что после вычислений заменяющий терм оказывает подобен (в смысле изменения констант) результату исключения части операндов в подтерме заменяемого терма. Вводится характеристика "вычпрог(x1 x2 x3)", где x1 - указатель направления, x2 - конъюнкция фильтров, определяющих типы константных значений переменных, x3 - список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем непосредственных вычислений. Пример:

   $\forall_{abce}(\neg(b = 0)$ & $\neg(c = 0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $e -$ число $\rightarrow (ac + be)/bc = a/b + e/c)$

   Характеристика - "вычпрог(первыйтерм, и(десчисло(b)десчисло(e)десчисло(a) десчисло(c)), $ac + be$, bc)".

2. Тождество, подготавливающее возможность использования специального оператора, упрощающего константные термы.

   В предыдущем пункте рассматривалась возможнотсь использовать вычисления над нелогическими структурами данных для упрощения константных термов. Однако, имеется множество логических операторов, выполняющих упрощения константных термов. Для нахождения таких операторов по подтерму заменяющего терма используется справочник "вычконст". По заголовку подтерма он выдает пару (заголовок процедуры, упрощающей константные термы с данным заголовком - набор типов константных термов для корневых операндов). Создаются характеристики "Выч(x1 x2 x3)", где x1 - подтерм заменяющего терма, такой, что если он оказывается константным, то для его упрощения целесообразно использовать оператор x2. Логический символ x3 - направление замены. Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $0 < a$ & $\neg(a - 1 = 0)$ & $0 < b$ &
   $0 < c \rightarrow \log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c)$

   Характеристика - "Выч(b/c, сокращдроби, первыйтерм)".

3. Константное тождество. Вводится характеристика "конст". Пример:

   $\sin 0 = 0.$

Тождества с невырожденными числовыми атомами

В начальной точке ветви программы характеризатора, соответствующей данному разделу, переменной x5 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x6 - пара термов, являющихся частями равенства в консеквенте, переменной x7 - список невырожденных числовых атомов консеквента.

1. Числовое тождество, имеющее невырожденные числовые атомы и не имеющее вырожденных.

   Среди невырожденных числовых атомов нет численных характеристик описателей "отображение". Вводится характеристика "числовойатом". Пример:

   $\forall_{ABC}(A$–точка & B–точка & C–точка & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = B)$ & прямая(AB) $\perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2)$

2. Тождество, выражающее терм с невырожденными числовыми атомами через численные параметры. Вводится характеристика "числатомы(...)". Пример:

   $\forall_{ABCDab}(A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $\neg(A = D)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(A = B)$ & $\angle(BAC) = a$ & $\angle(CAD) = b$ & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC)) \rightarrow \angle(BAD) = |a - b|)$

   Характеристика - "числатомы(второйтерм)".

3. Соотношение пропорциональности для двух невырожденных числовых атомов.

   В одной части равенства - произведение, имеющее своим сомножителем один невырожденный числовой атом, в другой части равенства - произведение, имеющее своим сомножителем другой невырожденный атом. В других сомножителях эти атомы не встречаются. Одно из произведений может быть вырожденным, но не оба. Вводится характеристика "пропорция". Пример:

   $\forall_{ABCDE}(A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & E – точка & $\neg(A = E)$ & $\neg(B = C)$ & $\neg(D = E)$ & $\neg(A = D)$ & $B \in$ прямая(AD) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(AE) & $\neg($прямая$(AE) =$ прямая$(BC)) \rightarrow l(AD)l(AC) = l(AE)l(AB))$

4. Тождество, выражающее невырожденный числовой атом через функциональную характеристику его носителя.

   В одной части равенства находится невырожденный числовой атом A. В другой части встречается описатель "отображение", имеющий единственную переменную x связывающей приставки. Определяющий значение отображения терм содержит выражение "значение(f x)", где f - переменная, встречающаяся в одной из частей равенства - антецедента теоремы. Параметры противоположной части B включаются в параметры атома A. Вводится характеристика "функраспред(B, N)", где N - направление замены. Пример:

$\forall_{ABabf}$(верпространство(B) & непрвеличина(A, B) & плотнраспред$(A, B) = f$ & a – число & b – число $\rightarrow$ вероятность(прообраз$(A, [a, b]), B) = \int_a^b f(x)dx$)

Характеристика - "функраспред(плотнраспред(A B), второйтерм)".

5. Тождество без невырожденных числовых атомов, имеющее в антецедентах более одного числового равенства с невырожденными числовыми атомами. Вводится характеристика "исключатом". Пример:

   $\forall_{ABCDabcd}(a$ – число & b – число & c – число & d – число & A – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $al(AB) = bl(CD)$ & $cl(AB) = dl(CD)$ & $\neg(l(AB) = 0) \rightarrow ad - bc = 0)$

6. Тождество, выражающее невырожденный числовой атом через более простые числовые атомы. Вводится характеристика "числатом". Пример:

   $\forall_{ABCD}(A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $\neg(C = D)$ & $\neg(A = B)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & $D \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ $2S$(фигура$(ABC)) = l(AB)l(CD))$

7. Тождество, выражающее численную характеристику операции над нечисловыми объектами через численные характеристики других операций над этими объектами. Вводится характеристика "Числвыраз(N)". Пример:

   $\forall_f(f$ – комплексное $\rightarrow Re(if) = -Im(f))$

   Характеристика - "Числвыраз(второйтерм)".

8. Тождество, выражающее нечисловой объект через его невырожденные числовые параметры. Вводится характеристика "Числзнач". Пример:

   $\forall_z(z$ – комплексное $\rightarrow z = |z|(\cos \arg(z) + i \sin \arg(z)))$.

Тождества с невырожденными атомарными выражениями

1. Тождество для атомарных нечисловых выражений. Вводится характеристика "Атомарное". Пример:

   $\forall_{AB}(A$ – точка & B – точка $\rightarrow -$вектор$(AB) =$ вектор$(BA))$

2. Равенство двух атомарных выражений (как нечисловых, так и числовых). Вводится характеристика "равны". Примеры:

   $\forall_{ABCDE}(A$ – set & C – set & D – set & верпространство(E) & $D \setminus A = B$ & непересек$(A, C) \rightarrow$ услвероятн$(D, C, E) =$ услвероятн$(B, C, E))$

   $\forall_{ABCD}(A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $\neg(C = D)$ & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & $\neg(A = B) \rightarrow$ прямая$(AB) =$ прямая$(CD))$

3. Тождество для варьирования способа задания атомарного выражения.

   Обе части равенства в консеквенте - атомарные выражения, т.е. такие выражения, тип значения которых отличается от типа значения хотя бы одного из их корневых операндов. Эти выражения отличаются друг от друга лишь таким переобозначением переменных, при котором исходные и переобозначенные антецеденты эквивалентны друг другу. Вводится характеристика "варугол(...)". Пример:

$\forall_{ABCD}(A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ $D -$ точка $\& \neg(C = D)\ \&$
$A \in$ прямая(CD) $\&$ $B \in$ прямая(CD) $\& \neg(A = B) \to$ прямая$(AB) =$ прямая$(CD))$

Характеристика "варугол(torойтерм)".

Тождества с описателями

1. Тождество, исключающее описатели. Вводится характеристика "описатель(...)". Пример:

   $\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&$ конечное$(b \setminus a)\ \&\ a \subseteq b \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_x(a \subseteq x\ \&\ x \subseteq b\ \&\ x - \mathrm{set})) = 2^{\mathrm{card}(b \setminus a)})$

   Характеристика - "описатель(второйтерм)".

2. Тождество исключает описатель "отображение" и вводит описатель "класс". Вводится характеристика "смописатель(...)". Пример:

   $\forall_P(P - \mathrm{set} \to \sum_{x, x \in P} \mathrm{card}x(\mathrm{mod}2) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_x(x \in P\ \&\ \neg(\mathrm{card}x - \mathrm{even}))))$

   Характеристика - "смописатель(второйтерм)".

3. Тождество, позволяющее перейти к более простой операции над семейством.

   Оценка заменяющего терма меньше оценки заменяемого. В обоих случаях наибольшую оценку имеет операция над отображением, причем нет других подтермов рассматриваемого (заменяемого либо заменяющего) терма, имеющих данную оценку. Вводится характеристика "упрощплс(...)". Пример:

   $\forall_{ACKabfgh}(f -$ функция $\&$ $g -$ функция $\&$ $h -$ функция $\&$ $a -$ число $\&$ $b -$ число $\&$ прямкоорд(K) $\&$ $C =$ точки(A, K) $\&$ $A = \mathrm{set}_{xyz}(x = f(z)\ \&\ y = g(z)\ \&\ a \leq z\ \&\ z \leq b\ \&\ z -$ число$)$ $\&$ непрерывно(h, A) $\&$ непрдифф$(f, [a, b])$ $\&$ непрдифф$(g, [a, b]) \to \int_C h(x, y, z) ds = \int_a^b h(f(t), g(t), t) \times$
   $\sqrt{1 + \text{производная}(f, t)^2 + \text{производная}(g, t)^2 dt})$

   Характеристика - "упрощплс(второйтерм)": оценка сложности символа криволинейного интеграла больше оценки сложности символа обычного интеграла.

4. Тождество, уменьшающее максимальную длину связывающих приставок описателей.

   Консеквент теоремы не содержит описателя "класс". Оценка сложности заменяющего терма не больше оценки сложности заменяемого. Существует связывающая приставка описателя "отображение" в заменяемом терме, которая длиннее любой связывающией приставки описателя "отображение" в заменяющем терме. Вводится характеристика "исклпарам(...)". Пример:

$\forall_{Aagpq}(A-\text{set}\ \&\ \text{Отображение}(a,A,\mathbb{R})\ \&\ \text{Отображение}(g,A,\mathbb{R})\ \&\ \text{Отображение}(p,A,\mathbb{R})\ \&\ \text{Отображение}(q,A,\mathbb{R}) \to$

$$\sum_{i,j,i\le g(j),0\le i,j\in A} (a(j)^i p(j)/(i!\cdot(g(j)-i)!\cdot q(j))) = \sum_{j,j\in A,0\le g(j)} p(j)(a(j)+1)^{g(j)}/(q(j)g(j)!))$$

Характеристика - "исклпарам(второйтерм)".

5. Тождество, исключающее кванторы под описателем "класс".

   Одна из частей тождества представляет собой одноместную операцию от описателя "класс". Внутри этого описателя встречается квантор. Противоположная часть тождества не имеет описателя "класс", содержащего квантор, причем ее оценка сложности не больше оценки сложности первой части. Один из наиболее сложных подтермов первой части - она сама. Вводится характеристика "упрощэкв(...)". Пример:

   $\forall_{ABm}(A-\text{set}\ \&\ B-\text{set} \to \text{card}(\text{set}_x(x-\text{set}\ \&\ x\subseteq A\times B\ \&\ \text{card}x=m\ \&\ \forall_{ij}(i(2)=j(2)\ \&\ j\in x\ \&\ i\in x\to i=j))) = \text{card}(\text{set}_{Cf}(C\subseteq B\ \&\ \text{card}C=m\ \&\ \text{Отображение}(f,C,A))))$

   Характеристика - "упрощэкв(второйтерм)".

6. Тождество, приводящее к более простым понятиям под описателем "класс".

   Одна из частей тождества представляет собой одноместную операцию от описателя "класс". Внутри этого описателя A не встречается квантор. Другая часть содержит описатели "класс", причем ни один из них не содержит кванторов, а оценки сложности их последнего терма меньше оценки сложности первого терма описателя A. Один из наиболее сложных подтермов первой части - она сама. Вводится характеристика "упрощэкв(...)". Пример:

   $\forall_{Af}(f-\text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\to\text{card}(\text{set}_{xy}(x\in\text{Val}(f)\ \&\ A(x,y,\text{обрфункция}(f)(x)))) = \text{card}(\text{set}_{xy}(A(f(x),y,x)\ \&\ x\in\text{Dom}(f))))$

   Характеристика - "упрощэкв(второйтерм)".

7. Тождество, выносящее операцию над семейством наружу из-под сложной операции.

   Некоторый антецедент теоремы имеет вид "функция(f)". В заменяемом терме встречается операция "$R(f)$", отличная от этого терма. Самый сложный подтерм заменяемого терма - он сам. В заменяющем терме находится подтерм Q с тем же заголовком, что и заменяемый терм. Он является самым сложным подтермом заменяющего терма. Внутри Q выделяется подтерм вида $f(t)$. Если в заменяемом терме заменить $R(f)$ на $f(t)$, то возникает выражение, которое можно получить из заменяющего терма удалением части операндов некоторых операций и заменой неконстантных подтермов на логические символы. Вводится характеристика "развязка(...)". Пример:

   $\forall_{Ca}(a-\text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(a)\ \&\ \text{конечное}(\text{Dom}(a))\ \&\ \text{разделимы}(a)\ \&\ \text{подмнож}(a,\text{элемсобытия}(C))\to\text{вероятность}(\bigcup(a),C) = \sum_{A,A\in\text{Dom}(a)}\text{вероятность}(a(A),C))$

Характеристика - "развязка(второйтерм)".

Координаты

1. Тождество для определения координат объекта.

   Консеквент имеет вид равенства терма вида $F(x, K)$, где F - обозначение каких-либо координат, некоторому набору. Вводится характеристика "системкоорд". Пример:

   $\forall_{ABKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд(A, K) $= (a, b, c)$ & коорд(B, K) $= (d, e, f)$ & Вектор(A) & Вектор(B) $\rightarrow$ коорд(вектумнож(A, B), K) $= (bf - ce, cd - af, ae - bd)$)

2. Соотношение, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат.

   Среди конъюнктивных членов консеквента встречается равенство, причем прочие конъюнктивные члены имеют своими заголовками только символы "не", "меньше", "меньшеилиравно". Предпринимается преобразование консеквента путем исключения переменных, определенных равенствами в антецедентах. Результат содержит как выражения для координат (наборы либо отдельные координаты), так и невырожденные числовые атомы, не являющиеся отдельными координатами. Вводится характеристика "числкоэфф". Пример:

   $\forall_{ABKabc}$($A-$точка & $B-$точка & Вектор(c) & прямкоорд(K) & вниз(вектор(AB), K) $\rightarrow$ скалумнож(вектор(AB), c) $= -$крд($c, K, 3$)$l(AB)$)

3. Выражение числового атома через параметры координат.

   Консеквент имеет вид равенства выражения, содержащего единственный числовой атом, причем невырожденный, выражению, у которого невырожденными числовыми атомами могут служить лишь значения отдельных координат объектов. Численные переменные этого выражения определены в антецедентах как разряды координатных наборов. Вводится характеристика "значпарам(...)". Пример:

   $\forall_{Kabcdefgh}$(Вектор(a) & Вектор(d) & прямкоорд(K) & коорд(a, K) $= (b, c, g)$ & коорд(d, K) $= (e, f, h)$ $\rightarrow$ скалумнож(a, d) $= be + cf + gh$)

   Характеристика - "значпарам(второйтерм)".

4. Дизъюнкция (возможно, вырожденная) тождеств, определяющих координаты одного и того же множества объектов. Вводится характеристика "уравнмножество". Примеры:

   $\forall_{ABKabcd}$($A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд(K) & $\neg(A = B)$ & коорд(A, K) $= (a, b)$ & коорд(B, K) $= (c, d)$ $\rightarrow$ коорд(прямая(AB), K) $= \mathrm{set}_{xy}((d - b)x + (a - c)y + cb - ad = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

   $\forall_{ABEKabcde}$($a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $A -$ точка & $B -$точка & прямкоорд(K) & $\neg(A = B)$ & мнимаяось(прямая(AB), E) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $m =$

$b^2c + d^2a - 4ace \rightarrow mc < 0$ & корд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(2cv + d = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)$ $\vee$ $0 < mc$ & корд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(2au + b = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$))$

5. Тождество, выражающее характеристику множества через множество координат элементов.

   Одна из частей равенства в консеквенте имеет вид $P(a)$, где a - переменная. В антецедентах имеется равенство, определяющее a как множество точек с координатами, принадлежащими заданному множеству. Противоположная часть консеквента зависит только от параметров выражения, задающего это множество координат. Вводится характеристика "точки(...)". Пример:

   $\forall_{APK}(A-\mathrm{set}$ & прямкоорд(K) & $P =$ точки(A, K) & $A \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ & квадрируемо(A) $\rightarrow S(P) = \iint_A dxdy)$

   Характеристика - "точки(второйтерм)".

6. Дизъюнктивно-конъюнктивная комбинация тождеств для параметров уравнений координат множеств точек. Вводится характеристика "числсвязь". Пример:

   $\forall_{AEKabcdefmn}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $A -$точка & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$)$ & центр(A, E) & коорд$(A, K) = (m, n) \rightarrow 2am + nb + d = 0$ & $2cn + bm + e = 0$ & $\neg(4ac - b^2 = 0))$

7. Тождество, выражающее координаты множества объектов в одной системе координат через его координаты в другой системе. Вводится характеристика "новконтекст". Пример:

   $\forall_{ABCKMTabcdefp}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & систкоорд(K) & систкоорд(T) & $T = (A, B, C)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (c, d)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (e, f)$ & коорд$(M, K) = \mathrm{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $p(x, y)) \rightarrow$ коорд$(M, T) = \mathrm{set}_{xy}(x-$число & $y-$число & $p(a+cx+ey, b+dx+fy)))$

8. Дизъюнкция (возможно, вырожденная) тождеств, определяющих координаты нескольких множеств объектов. Вводится характеристика "линии". Пример:

   $\forall_{ABCDEKabcdem}(a-$число & $b-$число & $c-$число & $d-$число & $e-$число & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & прямкоорд(K) & гипербола(E) & $\neg(C = D)$ & $\neg(A = B)$ & асимптота(прямая$(AB), E)$ & асимптота(прямая$(CD), E)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$)$ & $m = \sqrt{-c/a}$ & $\neg$(прямая$(AB) =$ прямая$(CD)) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(2acu+2acmv+ad+mbc = 0$ & $u-$число & $v-$число$)$ & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(2acu-2acmv+ad-mbc = 0$ & $u-$число & $v-$число$)$ $\vee$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{uv}(2acu - 2acmv + ad - mbc = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)$ & коорд(прямая$(CD), K) = \mathrm{set}_{uv}(2acu + 2acmv + ad + mbc = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$))$

9. Тождество, в одной части которого расположена отдельная координата объекта. Вводится характеристика "крд(...)". Пример:

$\forall_{AKaiptsv}$(мточка(a) & $p-$число & $t-$число & Равндвиж$(a,[p,t])$ & Трехмерн(K) & $s\in[p,t]$ & Место$(a,p)=A\to$ крд(Место$(a,s),K,i)=$ крд$(A,K,i)+$ крд(Скорость$(a,K,[p,t]),K,i)(s-p)$)

Характеристика - "крд(второйтерм)".

10. Тождество, выражающее отдельную координату сложного объекта через такие же координаты его элементов. Вводится характеристика "компоненты(...)". Пример:

    $\forall_{ABKi}(A -$ точка & $B -$ точка & Трехмерн(K) & $i\in\{1,2,3\}\to$ крд(вектор$(AB),K,i)=$ крд$(B,K,i)-$ крд(A,K,i))

    Характеристика - "компоненты(второйтерм)".

Тождества для обобщения теорем

1. Тождество вида "$f(g(x,y),z)=f(x,h(y,z))$". Операции g,h имеют общую единицу по переменной y. Вводится характеристика "обобщмножитель". Эта характеристика используется для создания приема справочника поиска теорем. Справочник выдает приему вывода теорем необходимые для обобщения теоремы дополнительные тождества. Пример:

    $\forall_{ade}(\neg(a=0)$ & $\neg(e=0)$ & $a-$число & $d-$число & $e-$число $\to d/(ae)=(d/e)/a)$

    Такое тождество позволяет вводить в знаменателях дробей обобщающие коэффициенты e.

2. Тождество вида "$f(x,g(y,z))=h(f(x,y),z)$". Операци h,g имеет общую единицу по переменной z. Вводится характеристика "обобщслагаемое(...)". Пример:

    $\forall_{abe}(\neg(b=0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $e -$ число $\to e\cdot(a/b)=ae/b)$

    Данное тождество позволяет вводить дробные выражения, обобщающие произведения: появляется новый параметр b в знаменателе. Характеристика - "обобщслагаемое(второйтерм)".

Преобразование к заданным заголовкам

Чтобы усмотреть тождество, которое могло бы оказаться полезным в нормализаторе приведения к заданным заголовкам, выполняются следующие действия. Одна из частей тождества рассматривается как заменяющая. Она представляется в виде $f_1(f_2(\dots f_k(t)\dots))$, где заголовком t служит неодноместная операция h; $k\geq 0$. Проверяется наличие нормализатора P приведения к списку заголовков S, включающему h. Внешние одноместные операции $f_1,\dots,f_k$ допустимы у результата применения P (например, минус - у результата разложения на множители). Заменяемая часть тождества не представима в виде $g_1(g_2(\dots g_m(r)\dots))$, где заголовок r входит в S, а внешние одноместные операции $g_1,\dots,g_m$ допустимы для P. Проверяется, что обратный переход от заменяющей части к заменяемой не является преобразованием общей стандартизации. Проверяется, что заменяемая часть не имеет вида F(префикс(x,y)) либо F(конкатенация(x,y)), где переменные x,y входят в заменяющую часть, но не под общей операцией. Проверяется, что обе части тождества устойчивы по отношению к нормализаторам общей стандартизации. Наконец, проверяется, что тождество неизбыточно - нет других тождеств, выполняющих приведение к требуемым заголовкам в той же ситуации. Учитываются дополнительные преимущества анализируемого тождества, такие, как отсутствие существенных посылок и неусложнение выражения. В итое вводится характеристика "нормзаголовок(P N)", где N - направление замены. Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

Характеристика - "нормзаголовок(видумножение второйтерм)".

Рекурсия

1. Тождество позволяет перейти от сложной операции с подтермом "префикс(A B)" к такой же операции с подтермом B. Вводится характеристика "префикснаярекурсия(...)". Пример:

   $\forall_{acd}(\neg(d \in a) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ c - \text{слово} \rightarrow a \setminus \{d;c\} = a \setminus \{;c\})$

   Характеристика - "префикснаярекурсия(второйтерм)".

2. Тождество, выражающее сложную операцию над множеством через значения этой же операции над подмножествами. Вводится характеристика "подмножества(...)". Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \text{огрснизу}(b) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \&$
   $\neg(a = \emptyset) \ \& \ \neg(b = \emptyset) \rightarrow \inf(a \cup b) = \min(\inf(a), \inf(b)))$

   Характеристика - "подмножества(второйтерм)".

3. Тождество, выражающее сложную операцию с натуральным параметром m через такую же операцию с меньшим значением натурального параметра. Вводится характеристика "натуральное(m N)", где N - направление замены. Пример:

   $\forall_{Amn}(A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{натуральное} \ \&$
   $\text{Dom}(A) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, m\} \ \& \ 0 \leq n - 2 \rightarrow A^n = A \cdot A^{n-1}$

   Имеются в виду матричные операции умножения и возведения в степень. Характеристика - "натуральное(n второйтерм)".

Тождество для приведения к стандартной форме

Справочник "стандформа" проверяет, что заголовок s заменяющей части тождества - корневая операция некоторой стандартной формы A. Заменяемая часть не имеет этого заголовка. Без данного приема нормализатор стандартной формы не преобразует заменяемую часть к заголовку s. Вводится характеристика "стандформа(A N)", где N - направление замены. Пример:

$\forall_{bcf}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow (b \cap c) \cup (c \cap f) = c \cap (b \cup f))$

Характеристика - "стандформа(стандобъединение первыйтерм)".

Равенство двух переменных

Вводится характеристика "равно". Пример:

$\forall_{ABCDEF}(A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $\neg(C = D)$ & $\neg(A = B)$ & E – точка & F – точка & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & $F \in$ прямая(CD) & $\neg($прямая$(AB) =$ прямая$(CD)) \rightarrow E = F)$

Тождество вида $A(y)$ & $P(x,y)$ & $P(x,z) \rightarrow x = z$, выражающее однозначную определимость объекта x по отношению $P(x,y)$

Вводится характеристика "однозначно". Пример:

$\forall_{abc}(a$ – set & $a \subseteq \mathbb{R}$ & наименьший(b,a) & аименьший$(c,a) \rightarrow b = c)$

Нечисловое равенство

Вводится характеристика "Равно". Пример:

$\forall_A(A$ – точка $\rightarrow$ вектор$(AA) =$ вектор0$)$

4.1.2 Характеризация эквивалентности

Общая стандартизация

Если не оговаривается обратное, в каждом из перечисляемых случаев вводится характеристика "общнорм(N)", где N - направление замены.

1. Заменяющее утверждение бесповторное и имеет меньше переменных, чем заменяемое. Пример:

   $\forall_{ABa}(A$ – set & B – set & $\neg(a \in A) \rightarrow a \in A \cup B \leftrightarrow a \in B)$

2. Заменяющее утверждение имеет, с точностью до внешнего отрицания, вид $P(x_1 \dots x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ - попарно различные переменные, а заменяемое утверждение не имеет такого вида. Оценка сложности заменяющего терма не больше оценки сложности заменяемого. Исключение составляет случай группировки операндов равенства в одном операнде, заголовком которого служит ассоциативно-коммутативная операция. Пример:

   $\forall_{de}(d$ – set & e – set $\rightarrow d \setminus e = \emptyset \leftrightarrow d \subseteq e)$

3. Заменяемое и заменяющее утверждения элементарны и бесповторны, причем заменяющее утверждение является равенством, а заменяемое - нет. Заменяющее утверждение не имеет более чем одноместных операций. Оценка сложности заменяющей части не превосходит оценки сложности заменяемой. Пример:

   $\forall_n(n$ – натуральное $\rightarrow n \leq 1 \leftrightarrow n = 1)$

4. Заменяющее утверждение (с точностью до внешнего отрицания) имеет вид равенства и является бесповторным, а заменяемое не имеет вида равенства либо

имеет единственную переменную и небесповторно. Если в заменяющем утверждении появляются новые выражения более чем с одной переменной, то заменяемое утверждение имело выражение более чем с одной переменной, отсутствующее в заменяющем. Примеры:

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq a - b \rightarrow 0 \leq b - a \leftrightarrow a = b)$

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$

$\forall_{a}(\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{скалумнож}(a, a) = 0 \leftrightarrow a = \text{вектор0})$

5. Заменяющее утверждение имеет меньшую арность предикатного символа, чем заменяемое. Оба утверждения бесповторные. Пример:

   $\forall_{n}(n - \text{целое} \rightarrow n - \text{натуральное} \leftrightarrow 0 \leq n - 1)$

   Характеристика - "общнорм(первыйтерм)".

6. Заменяемое и заменяющее утверждения бесповторные, имеющие одинаковые арности предикатного символа и одинаковые числа более чем одноместных операций. При этом число некоммутативных более чем одноместных операций у заменяющего терма меньше, чем у заменяемого. Дополнительно вводится характеристика "коммутатор". Пример:

   $\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow af = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$

   Характеристики - "общнорм(первыйтерм)", "коммутатор".

7. Заменяемое и заменяющее утверждения бесповторные, имеющие одинаковые арности предикатного символа и одинаковые числа более чем одноместных, в том числе одинаковые числа некоммутативных таких операций. Заменяющее утверждение имеет только однобуквенные операнды, причем все они различны, а заменяемое - не такое. Пример:

   $\forall_{a}(a - \text{число} \ \& \ 0 < \pi + a \ \& \ 0 < \pi - a \rightarrow \sin a = 0 \leftrightarrow a = 0)$

8. Заменяемое утверждение - дизъюнкция либо конъюнкция элементарных утверождений, заменяющее - бесповторное элементарное утверждение, максимум эвристических оценок сложности подтермов которого не превосходит такого максимума для заменяемого утверждения. Все переменные заменяющего утверждения встречаются в некотором члене заменяемого. Пример:

   $\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \neg(m = n) \leftrightarrow m \leq n - 1 \ \vee \ n + 1 \leq m)$

   Характеристика - "общнорм(первыйтерм)".

9. Эвристическая оценка сложности символов заменяемого терма больше, чем заменяющего. Заменяющий терм бесповторный. Либо заменяемый терм не бесповторный, либо заменяющий имеет вид $P(x_1 \ldots x_n)$ где $x_1, \ldots, x_n$ - переменные, а заменяемый не имеет такого вида. Примеры:

   $\forall_{ax}(a - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod}2) = 0 \leftrightarrow a - \text{even})$

$\forall_{abc}(a \setminus (b \cup c) \subseteq b \leftrightarrow a \subseteq b \cup c)$

Обе характеристики - "общнорм(второйтерм)".

10. Заменяющий терм элементарный, а заменяемый не имеет связанных переменных, но не элементарный. Он имеет подтерм, являющийся результатом подстановки в заменяющий терм. Пример:

    $\forall_{ab}(a - \text{целое} \; \& \; b - \text{целое} \rightarrow a = b \;\vee\; a \leq b - 1 \leftrightarrow a \leq b)$

11. Заменяющий терм бесповторный и представляет собой равенство, а заменяемый - отрицание равенства. Пример:

    $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \; \& \; b - \text{boolean} \rightarrow \neg(a = b) \leftrightarrow a = \neg b)$

12. Заменяемый терм - конъюнкция элементарных утверждений, в которой выделяется член A наибольшей сложности, причем наиболее сложный символ - заголовок A. Заменяющий терм - элементарное утверждение с тем же заголовком, что и A. Сложность каждого другого символа заменяющего терма меньше сложности некоторого отличного от A члена заменяемого терма. Пример:

    $\forall_{ABbf}(A - \text{set} \; \& \; B - \text{set} \; \& \; b \in B \rightarrow \text{Отображение}(f, A, B) \; \& \; \text{слой}(f, b) = \emptyset \leftrightarrow \text{Отображение}(f, A, B \setminus \{b\}))$

13. Заменяемый и заменяющий термы - конъюнкции элементарных утверждений. Каждый конъюнктивный член заменяющего терма бесповторный. Оценка заменяющего терма меньше, чем заменяемого. Пример:

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \; \& \; b - \text{число} \rightarrow a + b = 0 \; \& \; a - b = 0 \rightarrow a = 0 \; \& \; b = 0)$

Дизъюнктивно-конъюнктивные декомпозиции

1. Усмотрение дизъюнктивной декомпозиции элементарного утверждения. Заменяющая часть эквивалентности - дизъюнкция, заменяемая - элементарное утверждение. Каждый параметр заменяющей части входит в заменяемую. Совокупность атомарных утверждений, из которых построена заменяющая часть, образует декомпозицию заменяемой части по ее переменным. Вводится характеристика "или(...)". Пример:

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \; \&\_\text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \;\vee\; b = 0)$

    Характеристика - "или(второйтерм)".

2. Усмотрение конъюнктивной декомпозиции элементарного утверждения. Заменяющая часть эквивалентности - конъюнкция, заменяемая - элементарное утверждение. Каждый параметр заменяющей части входит в заменяемую. Совокупность атомарных утверждений, из которых построена заменяющая часть, образует декомпозицию заменяемой части по ее переменным. Вводится характеристика "и(...)". Пример:

    $\forall_{ab}(a - \text{натуральное} \; \& \; b - \text{натуральное} \rightarrow ab = 1 \leftrightarrow a = 1 \; \& \; b = 1)$

    Характеристика - "и(второйтерм)".

3. Усмотрение конъюнктивного упрощения элементарного утверждения. В заменяющей части эквивалентности находится конъюнкция элементарных утверждений, заменяемая часть элементарна. Максимум эвристических оценок сложности подтермов заменяемой части больше максимума таких оценок для заменяющей части. Вводится характеристика "и(...)". Пример:

   $\forall_{afx}(f - \text{функция} \rightarrow x \in \text{слой}(f, a) \leftrightarrow x \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ a = f(x))$

   Характеристика - "и(второйтерм)".

4. Эквивалентность имеет в одной части одноместный предикат $P(x)$, а в другой - дизъюнкцию равенств вида $x = t$, где t - константа. Вводится характеристика "конечное(...)". Пример:

   $\forall_a(a - \text{boolean} \leftrightarrow a = 0\ \vee\ a = 1)$

   Характеристика - "конечное(второйтерм)".

5. В заменяемой части эквивалентности находится элементарное утверждение, имеющее более чем трехместное отношение, а в заменяющей - конъюнкция, не имеющая более чем двуместных операций и отношений. Вводится характеристика "и(...)". Пример:

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
   $\text{четырехугольник}(ABCD) \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \parallel$
   $\text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$

   Характеристика - "и(второйтерм)".

6. Конъюнктивная декомпозиция явно разрешенного относительно неизвестной условия, приводящая к более простым известным выражениям. Произвольная переменная x заменяемой части рассматривается как неизвестная, и для нее проверяются указанные условия. Вводится характеристика "упрощпрог(x N)", где N - направление замены. Пример:

   $\forall_{mn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow m|(-n))$

   Характеристика - "упрощпрог(m первыйтерм)".

Усиление элементарного утверждения

1. Заменяемый и заменяющий термы суть элементарные утверждения. Заменяющий терм бесповторный и не имеет заголовка "не", а заменяемый - имеет заголовок "не". Заменяющий терм не группирует в одном подвыражении все переменные, если этого не делал заменяемый. Вводится характеристика "усиление(...)". Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \neg(a < b) \leftrightarrow b \leq a)$

   Характеристика - "усиление(второйтерм)".

2. Заменяемый и заменяющий термы суть элементарные утверждения. Заменяющий терм бесповторный и имеет заголовок "равно", а заменяемый - не имеет заголовка "равно". Оценка сложности заменяющего терма не больше оценки заменяемого. Заменяющий терм не группирует в одном подвыражении все переменные, если этого не делал заменяемый. Вводится характеристика "усиление(...)". Пример:

   $\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow 0 \leq 1 - n \leftrightarrow n = 1)$

   Характеристика - "усиление(второйтерм)".

3. Заменяемый терм элементарный, а заменяющий - дизъюнкция бесповторных равенств. Вводится характеристика "усиление(...)". Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ b \leq 0 \rightarrow 0 \leq ab \leftrightarrow a = 0\ \vee\ b = 0)$

   Характеристика - "усиление(второйтерм)".

4. Заменяемый и заменяющий термы элементарные. Рассматриваются существенные посылки, параметры которых включаются в симметрическую разность параметров заменяемого и заменяющего термов. Они составляют лишь часть существенных посылок. Заменяемое утверждение является следствием заменяющего и выделенных прсылок (к которым присоединяются все несущественные посылки), а для заменяющего аналогичное требование не выполняется. Вводится характеристика "усиление(...)". Пример:

   $\forall_{nx}(n - \text{целое}\ \&\ x - \text{целое} \rightarrow n < x \leftrightarrow n + 1 \leq x)$

   Характеристика - "усиление(второйтерм)".

Упрощение сложных подтермов

1. Эквивалентность уменьшает наибольшую из оценок сложности подтермов. Вводится характеристика "уменьшение(...)". Пример:

   $\forall_{ABf}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ B \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow A \subseteq B \leftrightarrow \text{образ}(f, A) \subseteq \text{образ}(f, B))$

   Характеристика - "уменьшение(первыйтерм)".

2. Сложности заменяемой и заменяющей частей эквивалентности одинаковы, причем обе эти части элементарны. При переходе к заменяющей части уменьшается максимальная сложность собственных подтермов термов максимальной сложности. Вводится характеристика "упрощплюс(...)". Пример:

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow a \sin c + a \cos c \leq b \leftrightarrow \sqrt{2} a \sin(c + \pi/4) \leq b)$

   Характеристика - "упрощплюс(первыйтерм)".

3. Сложности заменяемой и заменяющей частей одинаковы, но множество имеющих максимальную сложность подтермов заменяющей части является собственным подмножеством множества таких подтермов для заменяемой части. Вводится характеристика "упрощразность(...)". Пример:

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число & $0 < 1 - a + b \rightarrow 0 \leq -1 + [a] - [b] \leftrightarrow b < [a])$

Характеристика - "упрощразность(второйтерм)".

4. Эквивалентность имеет единственное вхождение самой сложной операции в заменяющем утверждении и несколько самых сложных операций в заменяемом, причем последние по своим переменным декомпозируют первую. Вводится характеристика "соединяет(...)". Пример:

   $\forall_{abcdx}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $x -$ число $\rightarrow a\sin(x+b)+c=d \leftrightarrow a\sin x\cos b + a\cos x\sin b + c = d)$

   Характеристика - "соединяет(первыйтерм)".

5. Сложность заменяемого утверждения больше сложности элементарного заменяющего. Каждое из них имеет переменные, не входящие в другое. Вводится характеристика "услрасст(...)". Пример:

   $\forall_{ABCpq}(p =$ вектор(AB) & $q =$ вектор$(AC) \rightarrow$ точкалуча$(A,B,C) \leftrightarrow$ однонаправлены(p,q) & $\neg(A=B))$

   Характеристика - "услрасст(первыйтерм)".

Группирующие эквивалентности

1. Консеквент не имеет связанных переменных. Число вхождений любой переменной в заменяемую часть не меньше числа ее вхождений в заменяющую часть. Либо имеется переменная, число вхождений которой в заменяющую часть строго меньше числа вхождений в заменяемую, либо заменяемая часть представляет собой результат подстановки в заменяющую и не подобна ей, либо заменяющая часть - равенство, заменяемая - не равенство, и число операций в заменяющей части не больше числа операций в заменяемой. Вводится характеристика "сборка(...)". Примеры:

   $\forall_{abc}(b - \mathrm{set}$ & $c - \mathrm{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

   Характеристика - "сборка(первыйтерм)"

   $\forall_{n}(n -$ натуральное $\rightarrow 0 \leq 1 - n \leftrightarrow n = 1)$

   Характеристика - "сборка(второйтерм)"

2. В одной части эквивалентности находится конъюнкция элементарных утверждений, каждое из которых бесповторно и имеет один и тот же список переменных S. В другой части эквивалентности - элементарное утверждение с теми же переменными S. Вводится характеристика "соединение". Пример:

   $\forall_{n}(0 < n$ & $n -$ целое $\leftrightarrow n -$ натуральное$)$

Перегруппировочные эквивалентности

1. Обе части эквивалентности бесповторны и содержат одни и те же переменные. При этом эквивалентность не дает рузгруппировки переменных наиболее сложных подтермов. Вводится характеристика "группировки". Пример:

   $\forall_{nx}(n -$ целое $\& \ x -$ целое $\rightarrow n < x \leftrightarrow n + 1 \leq x)$

2. Эквивалентность, используемая для разделения переменных в различных частях двуместного отношения. Существенные посылки отсутствуют. Обе части эквивалентности - элементарные бесповторные утверждения с двуместными корневыми отношениями. Заменяющее утверждение имеет два неконстантных операнда A, а заменяемое - один константный и один неконстантный - B. Все переменные утверждений A входят в B, которое имеет ровно две переменные. Вводится характеристика "разделение(...)". Пример:

   $\forall_{ab}(a -$ число $\& \ b -$ число $\rightarrow b < a \leftrightarrow 0 < a - b)$

   Характеристика - "разделение(первыйтерм)".

3. Эквивалентность, в заменяющей части которой расположено такое равенство $A = B$, что некоторые две переменные имеются в A, но отсутствуют в B, и обратно, некоторые две переменные имеются в B, но отсутствуют в A. Заменяемая часть имеет вид равенства, содержащего все указанные переменные, причем обе части равенства имеют длину, большую единицы. Эквивалентность не имеет характеристики "общнорм(...)". Вводится характеристика "раздпарам(...)". Пример:

   $\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ d -$ число $\& \ f -$ число $\rightarrow$ $af = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$

   Характеристика - "раздпарам(второйтерм)".

4. Эквивалентность, используемая для группировки переменных в одной части двуместного отношения. Существенные посылки отсутствуют; обе части эквивалентности - элементарные бесповторные утверждения с двуместными корневыми отношениями. Оба операнда A_1, A_2 заменяемого утверждения - неконстантные. Один из операндов заменяющего отношения имеет не более одной переменной; другой - не менее двух, причем хотя бы по одной общей переменной с A_1 и с A_2. Вводится характеристика "группировка(...)". Пример:

   $\forall_{mn}(m -$ целое $\& \ n -$ целое $\rightarrow$ взаимнопросты$(m, n) \leftrightarrow$ нод$(m, n) = 1)$

   Характеристика - "группировка(второйтерм)".

5. Дополнение к предыдущему случаю. Операнды A_1, A_2 - различные переменные. Один из операндов заменяющего отношения - константный, а другой имее вид $f(X_1, X_2)$ где f ассоциативно и коммутативно, X_1 и X_2 - переменные либо одноместные самодвойственные операции от переменных. Все антецеденты - указатели типа значения. Вводится характеристика "перемещение(f N)", где N - направление замены. Пример - тот же, что выше. Характеристика - "перемещение(нод второйтерм)".

Эквивалентность с квантором в одной части

1. В одной части эквивалентности находится квантор A, в другой - бескванторное утверждение B, все свободные переменные которого входят в A. Если A - квантор существования, то под ним расположена конъюнкция бескванторных утверждений; если A - квантор общности, то либо представляет собой простую импликацию, либо не имеет антецедентов и представляет собой эквивалентность без связанных переменных в консеквенте.

   (a) Утверждение B не имеет связанных переменных, причем оценка его сложности не превосходит оценки сложности утверждения A. Вводится характеристика "общнорм(...)". Пример:

   $$\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \exists_c(c - \text{целое} \ \& \ a \leq c \ \& \ c < b) \leftrightarrow a < b)$$

   Характеристика - "общнорм(второйтерм)".

   (b) B не имеет связанных переменных. Каждое атомарное утверждение внутри B представляет собой равенство вида $x = t$, где переменная x не входит в t, причем x - одно и то же для всех равенств. Вводится характеристика "общнорм(...)". Пример:

   $$\forall_{ab}(a - \text{set} \rightarrow \forall_x(x \in a \rightarrow x = b) \leftrightarrow a = \{b\} \ \lor \ a = \emptyset)$$

   Характеристика - "общнорм(второйтерм)".

   (c) Предыдущие два случая не имели места. Вводится характеристика "кванторнаясвертка(...)". Пример:

   $$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

   Характеристика - "кванторнаясвертка(первыйтерм)".

2. Эквивалентность, в одной части A которой находится либо квантор K, либо конъюнкция или дизъюнкция, имеющая квантор K своим членом. Другая часть B - бескванторное утверждение, параметры которого включают параметры утверждения A и параметры антецедентов. Внутри B имеется символ операции либо отношения, отсутствующий в A. Вводится характеристика "развертка(K N)", где N - направление замены. Пример:

   $$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \neg(a \subseteq b) \leftrightarrow \exists_c(\neg(c \in b) \ \& \ c \in a))$$

   Характеристика - "развертка(существует второйтерм)".

3. Параметрические описания.

   (a) Усмотрение явного параметрического описания. В одной части эквивалентности находится квантор существования A, в другой - конъюнкция B элементарных утверждений (быть может, вырожденная). Подкванторные утверждения квантора A суть равенства $x_1 = t_1$, ..., $x_n = t_n$, выражающие значения некоторых внешних для A переменных $x_1, \ldots, x_n$, а также ряд утверждений, определяющих ограничения на переменные связывающей пристакви квантора A. Попытка использовать вспомогательную задачу на описание B "старыми средствами" не позволяет получить более короткого параметрического описания. Вводится характеристика "параметризация". Пример:

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \exists_c(a = b \cap c\ \&\ c - \mathrm{set}))$

(b) В предыдущей ситуации дополнительно проверяется, что параметры однозначно восстанавливаются по параметризуемому объекту. Используется вспомогательная задача на описание. Вводится характеристика "биекция". Пример:

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set} \rightarrow b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c\ \&\ \text{непересек}(b, c)\ \&\ c - \mathrm{set}))$

(c) Неявное параметрическое описание. В одной части эквивалентности находится квантор существования, в другой - элементарное утверждение. Не имеет места ситуация с явным параметрическим описанием. Вводится характеристика "попыткапараметризации". Если квантор существования находится в левой части, то вводится также характеристика "связка". Примеры:

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \exists_x(x - \text{число}\ \&\ \neg(ax - \text{целое})) \leftrightarrow \neg(a = 0))$

Характеристики "попыткапараметризации", "связка".

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set} \rightarrow \neg(a \subseteq b) \leftrightarrow \exists_c(\neg(c \in b)\ \&\ c \in a))$

Характеристика - "попыткапараметризации".

(d) В левой части эквивалентности находится квантор, в правой - утверждение без связанных переменных. Предыдущие случаи не имеют места. Вводится характеристика "связка". Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow \exists_d(d - \text{число}\ \&\ ad^2 + bd = c) \leftrightarrow 0 \leq b^2 + 4ac\ \&\ \neg(a = 0)\ \vee\ a = 0\ \&\ (b = 0\ \&\ c = 0\ \vee\ \neg(b = 0)))$

4. Эквивалентность, заменяемая часть которой - квантор, а заменяющая - элементарна, но содержит переменные, отсутствующие в заменяемой части. Сложность заменяющей части не превосходит максимума сложности антецедентов и заменяемой части. Вводится характеристика "элемсвертка(...)". Пример:

   $\forall_{ABCa}(A - \mathrm{set}\ \&\ B - \mathrm{set}\ \&\ C - \mathrm{set}\ \&\ C \subseteq A \times B \rightarrow \forall_x(x \in C \rightarrow x(1) = a) \leftrightarrow C \subseteq \{a\} \times B)$

   Характеристика - "элемсвертка(второйтерм)".

5. Заменяемая часть - квантор . Заменяющая часть тоже имеет кванторы, но длины их связывающих приставок меньше (с учетом вложенности кванторов). Оценка сложности заменяющей части не превосходит оценки сложности заменяемой. Вводится характеристика "связприставка(...)". Пример:

   $\forall_{ABf}(\forall_{kn}(k - \text{целое}\ \&\ \text{взаимнопросты}(k, f(n))\ \&\ A(n) \rightarrow B(n)) \leftrightarrow \forall_n(A(n) \rightarrow B(n)))$

   Характеристика - "связприставка(второйтерм)".

6. Заменяемая часть имеет связанные переменные, а заменяющая - не имеет. Сложность заменяющей части не больше сложности заменяемой. Вводится характеристика "связпарам(...)". Пример:

   $\forall_f(\text{последовательность}(f,\mathbb{R}) \to \text{сходится}(\lambda_n(-f(n), n - \text{натуральное})) \leftrightarrow \text{сходится}(f))$

   Характеристика - "связпарам(второйтерм)". заметим, что данная характеристика встречается как в связи с кванторами, так и в связи с описателями.

7. Заменяемая часть - кванторная импликация без описателей, а заменяющая - результат подстановки описателй в некоторое элементарное утверждение. Вводится характеристика "новзнач(...)". Пример:

   $\forall_{AB}(\forall_x(A(x)\ \&\ \neg(x \in y) \to B(x)) \leftrightarrow \mathrm{set}_x(A(x)\ \&\ \neg(B(x))) \subseteq y)$

   Характеристика - "новзнач(второйтерм)".

8. Заменяемая часть - квантор существования, а заменяющая - дизъюнкция элементарных утверждений. Вводится характеристика "нормили(...)". Пример:

   $\forall_{abcd}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to \exists_x(x - \text{число}\ \&\ \neg(ax + b = cx + d)) \leftrightarrow \neg(a = c)\ \vee\ \neg(b = d))$

   Характеристика - "нормили(второйтерм)".

Эквивалентности с описателями

1. Эквивалентность, устраняющая вложенные описатели. Вводится характеристика "эквменьше(...)". Пример:

   $\forall_{akx}(\lim_{n\to\infty}\{k(n)\} = \infty \to \text{частичнпредел}(x, \text{кортежи}(\lambda_n(\lambda_m(a(m), m \in \{1, \ldots, k(n)\}), n - \text{натуральное}))) \leftrightarrow \text{частичнпредел}(x, \lambda_m(a(m), m - \text{натуральное}))\ \vee\ \exists_m(m - \text{натуральное}\ \&\ x = a(m)))$

   Характеристика - "эквменьше(второйтерм)".

2. Эквивалентность, устраняющая условное выражение под описателем. Вводится характеристика "эквменьше(...)". Пример:

   $\forall_{abfx}(\text{частичнпредел}(x, \lambda_n(f(n, (a(n)\ \text{при}\ n\text{—even, иначе}\ b(n))), n\text{—натуральное})) \leftrightarrow \text{частичнпредел}(x, \lambda_n(f(2n, a(2n)), n - \text{натуральное}))\ \vee\ \text{частичнпредел}(x, \lambda_n(f(2n+1, b(2n+1)), n - \text{натуральное})))$

   Характеристика - "эквменьше(второйтерм)".

3. Эквивалентность, отбрасывающая часть фрагментов под описателем. Вводится характеристика "эквменьше(...)", если заголовок заменяющего терма отличен от квантора существования, и характеристика "эквменьшеилиравно(...)" в противном случае. Примеры:

   $\forall_{afg}(\text{последовательность}(f,\mathbb{R})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \text{сходится}(\lambda_n(f(n)/(ag(n)), n\text{—натуральное})) \leftrightarrow \text{сходится}(\lambda_n(f(n)/g(n), n - \text{натуральное})))$

Характеристика - "эквменьше(второйтерм)".

$\forall_{afg}(a = \lim_{n\to\infty}\{f(n)\}$ & $a -$ число $\rightarrow$ частичнпредел$(x, \lambda_n(f(n)g(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow \exists_y($частичнпредел$(y, \lambda_n(g(n), n -$ натуральное$))))$

Характеристика - "эквменьшеилиравно(второйтерм)".

Решение уравнений

При характеризации проверяется, что одна из частей (далее рассматриваемая как заменяемая) элементарна, причем выбирается некоторая ее переменная x, рассматриваемая в этом разделе как неизвестная.

1. Заменяемая часть эквивалентности - элементарное утверждение A, глубина вхождения в которое переменной x более 1 (при отброшенном внешнем отрицании A, если таковое имеется). Заменяющая часть имеет такой дизъюнктивный член, что максимальная глубина вхождений x в его максимальные элементарные подутверждения не более 1. Каждый дизъюнктивный член заменяющей части либо удовлетворяет данному условию, либо имеет единственное вхождение x, в то время как A имеет более одного вхождения x. Вводится характеристика "глуб(x N)", где N - направление замены. Пример:

   $\forall_{abx}(a -$ число & $b -$ число & $x -$ число $\rightarrow ax = b \leftrightarrow \neg(a = 0)$ & $x = b/a \ \vee \ a = 0$ & $b = 0)$

   Характеристика - "глуб(x второйтерм)".

2. Заменяемая часть эквивалентности - элементарное утверждение с заголовком "не" и глубиной вхождений переменной x, равной 1. Заменяющая часть - элементарное утверждение без заголовка "не", также имеющее глубину вхождений переменной x, равную 1. Число вхождений переменной x в заменяемое и в заменяющее утверждения равно 1. Вводится характеристика "нормотр(x N)". Пример:

   $\forall_{ab}(b - \mathrm{set} \rightarrow \neg(a \in b) \leftrightarrow$ непересек$(\{a\}, b))$

   Характеристика - "нормотр(b второйтерм)".

3. Заменяемая часть не имеет связанных переменных. В ней содержится не менее двух атомарных утверждений с переменной x, причем глубина вхождения x в каждое атомарное утверждение заменяемой части равна 1. Заменяющая часть - элементарное утверждение, глубина вхождения в которое переменной x равна 1. Вводится характеристика "сокращнеизв(x N)". Пример:

   $\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число $\rightarrow c \leq \max(a, b) \leftrightarrow c \leq a \ \vee \ c \leq b)$

   Характеристика - "сокращнеизв(c первыйтерм)".

4. Заменяемая часть - конъюнкция элементарных утверждений, глубина вхождения переменной x в каждое из которых равна 1. Заменяющая часть после приведения к виду д.н.ф. превращается в дизъюнкцию конъюнкций, каждая из которых имеет меньше конъюнктивных членов с x, чем заменяемая часть, и

глубина вхождения в них переменной x (с точностью до отбрасывания внешнего отрицания) равна 1. Вводится характеристика "неизвперем(x N)". Пример:

$\forall_{abcd}(a-$ число & $b-$ число & $c-$ число & $d-$ число $\rightarrow c < a$ & $c < b$ & $d < c \leftrightarrow (0 \leq a-b$ & $c < b \vee \neg(0 \leq a-b)$ & $c < a)$ & $d < c)$

Характеристика - "неизвперем(c второйтерм)".

5. Заменяющая часть представляет собой параметрическое описание для неизвестной x. Заменяемая часть элементарна. В заменяющей части расположен квантор существования, некоторый конъюнктивный член которого с отличным от символа "принадлежит" заголовком имеет единичную глубину вхождения переменной x. Каждое вхождение этой переменной в заменяющую часть - операнд предикатного символа, подчиненного лишь конъюнкциям, дизъюнкциям и кванторам существования. Вводится характеристика "неизвпарам(x N)". Пример:

   $\forall_{ax}(a-$ число & $x-$ число $\rightarrow \sin x = a \leftrightarrow |a| \leq 1$ & $\exists_n(n-$ целое & $x = \pi n + (-1)^n \arcsin(a)))$

   Характеристика - "неизвпарам(x второйтерм)".

Числовые атомы

1. Эквивалентность, преобразующая равенство к более простым невырожденным числовым атомам. Вводится характеристика "упрощдн(...)". Пример:

   $\forall_{ABC}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & $\triangle(ABC) \rightarrow l(AB) = l(BC) \leftrightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$

   Характеристика - "упрощдн(первыйтерм)".

2. Эквивалентность двух равенств невырожденных числовых атомов. Вводится характеристика "эквуглы". Пример:

   $\forall_{ABCDEF}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & $D-$ точка & $E-$ точка & $F-$ точка & $\neg(A = B)$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность$(AB) \rightarrow l(CD) = l(EF) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(EAF))$

3. Эквивалентность двух неравенств с невырожденными числовыми атомами. Вводится характеристика "неравенства". Пример:

   $\forall_{ABC}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = C) \rightarrow l(AB) < l(BC) \leftrightarrow \angle(ACB) < \angle(BAC))$

Координаты

1. Эквивалентность преобразует равенство для множества точек с заданными координатами в равенство для множества координат этих точек. Вводится характеристика "Точки(...)". Пример:

   $\forall_{ABK}(A =$ точки$(B, K) \leftrightarrow$ коорд$(A, K) = B)$

   Характеристика - "Точки(второйтерм)".

2. Эквивалентность, переформулирующая утверждение через параметры координат. Вводится характеристика "числопред(...)". Пример:

   $\forall_{ABCKabcd}(C \in$ прямая(AB) & коорд(вектор$(AC), K) = (a, b)$ & коорд(вектор$(CB), K) = (c, d) \to C \in$ отрезок$(AB) \leftrightarrow 0 \leq ac$ & $0 \leq bd)$

   Характеристика - "числопред(второйтерм)".

3. Эквивалентность, переформулирующая утверждение через отдельные координаты. Вводится характеристика "числитель(...)". Пример:

   $\forall_{ABCK}($прямкоорд$(K) \to$ плоскость$(ABC) \parallel$ горизплоск$(K) \leftrightarrow$ крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3)$ & крд$(B, K, 3) =$ крд$(C, K, 3))$

   Характеристика - "числитель(второйтерм)".

4. Эквивалентность, дающая общий вид уравнения мнодества точек, имеющего заданный тип. Вводится характеристика "уравнкрив". Пример:

   $\forall_{ABCKP}($систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $P \subseteq$ плоскость$(ABC) \to$ Прямая$(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ & коорд$(P, K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $ax + by + c = 0)))$

5. Эквивалентность, переходящая к координатам более простого объекта. Вводится характеристика "упрощвект(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{Kabcdegiq}($коорд$(a, K) = (g, i, q)$ & $b-$число & $d-$число & $e-$число & систкоорд(K) & Вектор(a) & Вектор$(c) \to$ коорд$(a + c, K) = (b, d, e) \leftrightarrow$ коорд$(c, K) = (b - g, d - i, e - q))$

   Характеристика "упрощвект(второйтерм)".

Эквивалентность, переформулирующая элементарное утверждение через атомарные выражения заданного типа

Вводится характеристика "атомарное(t N)", где t - тип значений атомарных выражений, N - направление замены. Пример:

$\forall_{BCD}(\neg(B = C)$ & $\neg(C = D)$ & $D \in$ прямая(BC) & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка $\to$ однонаправлены(вектор(CB), вектор$(CD)) \leftrightarrow$ точкалуча$(C, B, D))$

Характеристика - "атомарное(Вектор первыйтерм)".

Эквивалентность, преобразующая одно утверждение с помощью другого таким образом, что параметры нового утверждения - объединение параметров исходных утверждений

Вводится комментарий "усмгруппа(k N)", где k - номер антецедента, идентифицируемого с другим утверждением, N - направление замены. Пример:

$\forall_{abcd}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $a = b \to c = d \leftrightarrow a + c = b + d)$

Характеристика - "усмгруппа(5 второйтерм)". Теорема используется в приеме сложения уравнений.

Эквивалентность может рассматриваться как определение принадлежности множеству

Вводится характеристика "принадлежит(...)". Пример:

$\forall_{abf}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set} \to f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2\ \&\ f(1) \in a\ \&\ f(2) \in b\ \&\ f -$ слово$)$

Характеристика - "принадлежит(второйтерм)".

4.1.3 Характеризация кванторной импликации

В данном разделе рассматриваются (быть может, с некоторыми исключениями) случаи кванторных импликаций, не являющихся тождествами либо эквивалентностями.

Элементарный консеквент

1. Простая импликация без существенных посылок.
   (a) Импликация без существенных прсылок, не являющаяся тождеством. Консеквент ее, после отбрасывания отрицания, приобретает вид $f(A_1 \dots A_n)$, где все A_i, кроме, быть может, одного, суть различные переменные. Вводится характеристика "пример". Пример:

   $\forall_b(b - \mathrm{set} \to b \subseteq b)$

   (b) Импликация без существенных посылок с элементарным консеквентом, не являющимся тождеством. Вводится характеристика "элементарно". Пример:

   $\forall_{bc}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set} \to b \cap c \subseteq b)$

2. Простая импликация с существенными посылками.
   (a) Не все параметры антецедента встречаются в параметрах консеквента, но каждый параметр консеквента встречается в параметрах антецедентов. Вводится характеристика "исключ". Пример:

   $\forall_{ade}(a - \mathrm{set}\ \&\ d - \mathrm{set}\ \&\ e - \mathrm{set}\ \&\ a \subseteq d\ \&\ d \subseteq e \to a \subseteq e)$

   (b) Импликация имеет антецедент вида $x = t$, где x - переменная, не входящая в t и в прочие антецеденты. Число вхождений этой переменной в консеквент более одного. Вводится характеристика "неизвестная(x)". Пример:

   $\forall_{abcdefhi}(0 \leq 4d^3 + 27a^2\ \&\ \neg(3bh - i^2 = 0)\ \&\ \neg(h = 0)\ \&\ h -$ число $\&\ i -$ число $\&\ b -$ число $\&\ e -$ число $\&\ f = \sqrt{4d^3 + 27a^2}\ \&\ c = -i/(3h) + (\sqrt[3]{f + 3\sqrt{3}a} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}a - f})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3})\ \&\ d = b/h - i^2/(3h^2)\ \&\ a = e/h + i(9bh - 2i^2)/(27h^3) \to bc + hc^3 + ic^2 = e)$

   Характеристика - "неизвестная(c".

   (c) Консеквент импликации получается из некоторого антецедента подстановкой вместо переменной x выражения $f(x, y)$, имеющего единицу по новой переменной y. Вводится характеристика "обобщение(i x)", где i - номер антецедента. Пример:

   $\forall_{adm}(m|d\ \&\ a -$ целое $\&\ d -$ целое $\&\ m -$ целое $\to m|ad)$

   Характеристика - "обобщение(1 d)".

(d) Импликация имеет единственный существенный антецедент A и консеквент "не(B)". Как A, так и B - двуместные отношения простейшего вида с двумя переменными. Отрицания отношений с тем же заголовком, что у B, устраняются при общей стандартизации. Вводится характеристика "Отрицание". Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \to \neg(b < a))$

(e) Каждое выражение консеквента, отличное от символьной константы, встречается в антецеденте. Либо консеквент имеет заголовок "равно", либо число его параметров более одного. Вводится характеристика "вывод". Пример:

$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \to a \subseteq e)$

(f) Импликация с характеристикой "вывод" имеет своим консеквентом двуместный нечисловой предикат, отличный от равенства. Вводится характеристика "отношение". Пример:

$\forall_{abc}(\text{нод}(a, b) = 1 \ \& \ b|ac \to b|c)$

(g) Импликация с характеристикой "вывод" имеет своим консеквентом равенство переменной константному выражению. Вводится характеристика "констнорм". Пример:

$\forall_{ABCDKab}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \&$
$\text{коорд}(D, K) = (a, b) \to b = 0)$

(h) Импликация, выражающая свойство транзитивности. Вводится характеристика "транзитивно". Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \to a \subseteq e)$

(i) Имеется существенный антецедент, содержащий все переменные импликации. Вводится характеристика "антецедент". Пример:

$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \cup e \to b \setminus c \subseteq e)$

(j) Импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности: два существенных антецедента A_1, A_2 и консеквент B. Каждый из них имеет две переменных. A_1 и A_2 имеют ровно одну общую переменную, причем список переменных B равен симметрической разности списков переменных A_1, A_2. Вводится характеристика "транзитоперанд". Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ c \in a \to c \in b)$

(k) Теорема имеет единственный существенный антецедент $P(x, y)$ и консеквент вида $P(f(x, z), f(y, z))$, где x, y, z - переменные. Вводится характеристика "монотонно". Пример:

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a \leq b \to a + c \leq b + c)$

(l) Консеквент и все антецеденты бесповторны. Список переменных каждого антецедента включается в список переменных консеквента. Вводится характеристика "попыткаспуска". Пример:

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& = 0 < a - b \to \neg(b - a = 0))$

(m) Простая импликация, консеквент которой - одноместное отношение от переменной. Вводится характеристика "свойство". Пример:

$\forall_{ABC}(B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ A\in\text{прямая}(BC)\rightarrow A-\text{точка})$

(n) Импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности относительно части переменных. Имеются два существенных антецедента A_1, A_2 и консеквент A_3. Вне непустого пересечения параметров всех этих трех утверждений остаются ровно три переменные x, y, z. При этом x, y входят в A_1; y, z - в A_2; x, z - в A_3. Вводится характеристика "транзитпереход". Пример:

$\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ B\in\text{отрезок}(AD)\ \&\ C\in\text{отрезок}(BD)\rightarrow C\in\text{отрезок}(AD))$

3. Импликация, выводящая свойство сложного понятия A.

Здесь A - единственное самое сложное выражение отличного от равенства консеквента. Сложность антецедентво меньше. Вводится характеристика "свойства(A)". Пример:

$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\rightarrow\text{вектумнож}(a,b)\perp b)$

Характеристика - "свойства(вектумнож(a, b))".

4. Кванторная импликация с элементарным консеквентом, отличным от тождества, у которой антецеденты имеют переменные, не входящие в консеквент, причем каждая такая новая переменная возникает из равенства в антецеденте, одна из частей которого содержит только старые переменные. Вводится характеристика "проверка". Пример:

$\forall_{abcdpq}(a-\text{целое}\ \&\ c-\text{целое}\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ p=|a|\ \&\ q=d-c\ \&\ \neg(p|q)\ \&\ b-\text{целое}\rightarrow\neg(ab+c=d))$

5. Кванторная импликация, у которой консеквент имеет вид "принадлежит(x t)", где x - переменная, не встречающаяся в отличном от переменной выражении t. Вводится характеристика "принадл". Пример:

$\forall_{abc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ a\in b\rightarrow a\in b\cup c)$

Кванторная импликация с дизъюнкцией в консеквенте

Вводится характеристика "дизъюнкция". Пример:

$\forall_{abc}(a-\text{целое}\ \&\ b-\text{целое}\ \&\ \text{простое}(c)\ \&\ c|(ab)\rightarrow c|a\ \vee\ c|b)$

Кванторная импликация с элементарными антецедентами и конъюнкцией утверждений в консеквенте

Вводится характеристика "конъюнкция". Пример:

$\forall_{mnkp}(m-\text{целое}\ \&\ n-\text{натуральное}\ \&\ k\in\{0,\ldots,n-1\}\ \&\ m=np+k\rightarrow$
$p=[m/n]\ \&\ k=m(\text{mod }n))$

Импликация с квантором существования в консеквенте

1. Импликация с квантором существования в консеквенте. Имеется единственный существенный антецедент A, содержащий все свободные переменные консеквента и не допускающий обработки проверочным оператором. Вводится характеристика "существует(m)", где m - номер антецедента A. Пример:

   $\forall_{Amnx}(m -$ натуральное & $n -$ натуральное & кортеж$(x, m+n, A) \to$ $\exists_{yz}($кортеж(y, m, A) & кортеж(z, n, A) & $x = (y; z)))$

   Характеристика - "существует(3)".

2. Квантор существования в консеквенте при осутствии существенных посылок. Вводится характеристика "нормсуществует". Пример:

   $\forall_b(b - \mathrm{set} \to \exists_a(a - \mathrm{set}$ & $b \subseteq a))$

3. Консеквент импликации представляет собой квантор существования от конъюнкции элементарных утверждений. Вводится характеристика "допконтекст". Пример:

   $\forall_A($Прямая$(A) \to \exists_{BC}(B -$ точка & $C -$ точка & $\neg(B = C)$ & $B \in A$ & $C \in A))$

4. Квантор существования в консеквенте имеет среди своих конъюнктивных членов дизъюнкцию. Вводится характеристика "дизъюнктоперанд". Пример:

   $\forall_{abf}(a -$ число & $b -$ число & $a < b$ & $f -$ функция & $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & непрерывно$(f, [a, b])$ & $f(a) = f(b) \to \exists_c(c -$ число & $0 < c - a$ & $0 < b - c$ & $(f(c) = \inf($образ$(f, (a, b)))\ \vee\ f(c) = \sup($образ$(f, (a, b))))))$

Кванторная импликация, используемая для усмотрения истинности либо ложности кванторной импликации

Вводится характеристика "квантор". Пример:

$\forall_{ab}(a < a$ & $0 \leq b - 1$ & $a < b \to \forall_n(n -$ натуральное $\to \neg(a = b^n)))$

Описатель "отображение" в консеквенте

1. Кванторная импликация с элементарными антецедентами и бескванторным консеквентом, имеющим описатель "отображение". Вводится характеристика "отображение". Пример:

   $\forall_{Aa}(A - \mathrm{set}$ & $a -$ число & конечное$(A) \to \sum_{x, x \in A} a = a \cdot \mathrm{card}(A))$

2. Кванторная импликация, у которой консеквент имеет единственный подтерм A максимальной сложности. Он содержит символ "отображение", причем каждый максимально сложный подтерм антецедентов имеет тот же заголовок, что и A. Вводится характеристика "функполе". Пример:

   $\forall_{af}($последовательность$(f, \mathbb{R})$ & $a -$ число & $\lim(f) = a \to \lim(\lambda_n(-f(n), n -$ натуральное$)) = -a)$

Числовые атомы

1. Кванторное неравенство для невырожденных числовых атомов. Вводится характеристика "числоценка". Пример:

   $\forall_{AB}(A -$ точка $\& \ B -$ точка $\& \ \neg(A = B) \rightarrow 0 < l(AB))$

2. Кванторная импликация, консеквентом которой служит кванторное тождество, выражающее невырожденный числовой атом через численные параметры. Вводится характеристика "имплик". Пример:

   $\forall_{AQnp}(n -$ целое $\& \ p -$ функция $\& \ A -$ функция $\& \ \mathrm{Dom}(A) = \{1, \ldots, n\} \ \&$ верпространство$(Q) \ \& \ \mathrm{Val}(A) \subseteq$ события$(Q) \ \& \ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ услвероятн$(A(i), \bigcap_{j=1}^{i-1} A(j), Q) = p(i)) \rightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow$ вероятность$(A(i), Q) = \prod_{j=1}^{i} p(j)))$

3. Кванторная импликация, у которой x1-й антецедент представляет собой соотношение пропорциональности для невырожденных числовых атомов x2 и x3. Вводится характеристика "смпропорц(x1 x2 x3)". Пример:

   $\forall_{ABCDEab}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ A -$ точка $\& \ B -$ точка $\& \ C -$ точка $\& \ D -$ точка $\& \ E -$ точка $\& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in$ прямая$(AD) \ \&$ прямая$(DE) \parallel$ прямая$(BC) \ \& \ C \in$ прямая$(AE) \ \& \ al(AB) = bl(AD) \ \& \ \neg($прямая$(AE) =$ прямая$(BC)) \rightarrow al(AC) = bl(AE))$

   Характеристика - "смпропорц(пятнадцать $l(AB)$ $l(AD)$)".

Координаты

1. Кванторная импликация с элементарными антецедентами, консеквент которой представляет собой конъюнкцию соотношений, связывающих координаты объектов с численными параметрами. Вводится характеристика "коорд". Пример:

   $\forall_{ABKabcd}(A -$ точка $\& \ B -$ точка $\&$ сисккоорд$(K) \ \&$ коорд$(A, K) = (a, b) \ \&$ коорд(вектор$(AB), K) = (c, d) \rightarrow$ коорд$(B, K) = (a + c, b + d))$

2. Кванторная импликация с элементарными антецедентами, консеквент которой представляет собой конъюнкцию соотношений, среди числовых атомов которых встречаются отдельные координаты объектов. Вводится характеристика "нормкрд". Пример:

   $\forall_{ABKc}(A -$точка $\& \ B -$точка $\&$ Вектор$(c) \ \&$ прямкоорд$(K) \ \&$ вниз(вектор$(AB), K) \rightarrow$ скалумнож(вектор$(AB), c) = -$крд$(c, K, 3)l(AB))$

3. Кванторная импликация, определяющая тип объекта по уравнению для координат его точек. Вводится характеристика "видобъекта". Пример:

   $\forall_{EKabc}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\&$ сисккоорд$(K) \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \&$ коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x -$число $\& \ y -$число$) \rightarrow$ Прямая$(E))$

4. Кванторная импликация, дающая стандартное представление для множества точек, уравнение которого содержится в антецедентах. Вводится характеристика "стандмн". Пример:

$\forall_{ABEKabc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & прямкоорд(K) & $\neg(A = B)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + bx + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$)$ & $b^2 - 4ac = 0$ & $\neg(a = 0) \to \exists_{AB}(A -$ точка & $B -$ точка & прямая$(AB) = E$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\text{set}_{uv}(2au + b = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)))$

5. Кванторная импликация определяет связи объекта, заданного уравнением для координат его точек, с другими объектами. Вводится характеристика "характ". Пример:

   $\forall_{ABKabc}($прямкоорд(K) & Прямая(A) & коорд$(A, K) = \text{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $ax + by + c = 0)$ & Вектор(B) & коорд$(B, K) = (-b, a) \to B \parallel A)$

6. Кванторная импликация, консеквент которой представляет собой конъюнкцию неравенств для параметров координат. Вводится характеристика "Крд". Пример:

   $\forall_{ABCKabcdef}(A -$ точка & $C -$ точка & систкоорд(K) & $B \in$ отрезок(AC) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & коорд$(C, K) = (e, f) \to$ $0 \leq (c - a)(e - c) + (d - b)(f - d))$

7. Консеквент импликации представляет собой квантор существования, причем некоторый конъюнктивный член подкванторного утверждения имеет вид "равно(коорд(...) класс(...))". Вводится характеристика "координаты". Пример:

   $\forall_{Kabc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & систкоорд(K) & $\neg(a^2 + b^2 = 0) \to$ $\exists_x($Прямая(x) & коорд$(x, K) = \text{set}_{uv}(au + bv + c = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)))$

8. Консеквент импликации представляет собой квантор существования, в котором вводится новая система координат и определяется уравнение координат множеств объектов относительно данной системы. Вводится характеристика "каноничкоорд". Пример:

   $\forall_{ABEKabcdpqr}(A -$точка & $B -$точка & прямкоорд(K) & эллипс(E) & фокус(A, E) & фокус(B, E) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ & $p = (a + c)/2$ & $q = (b + d)/2$ & $r = (c - a)^2 + (d - b)^2$ & $\neg(r = 0) \to \exists_{FGHQm}(F -$точка & $G -$ точка & $H -$ точка & $(F, G, H) = Q$ & коорд$(F, K) = (p, q)$ & коорд$(G, K) =$ $(p + (c - a)/sqrtr, q + (d - b)/\sqrt{r})$ & коорд$(H, K) = (p - (d - b)/\sqrt{r}, q + (c - a)/\sqrt{r})$ & прямкоорд(Q) & $m -$ число & $0 < m$ & $mbox(E, Q) = \text{set}_{xy}(4mx^2 +$ $(4m + r)y^2 - m(4m + r) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$)))$

9. Консеквент импликации представляет собой квантор существования, в котором вводится новая система координат и преобразуется относительно нее заданное в антецедентах уравнение координат множества объектов. Вводится характеристика "стандчисл". Пример:

   $\forall_{EKabcde}(a -$число & $b -$число & $c -$число & $d -$число & $e -$число & прямкоорд(K) & $\neg(c = 0)$ & $\neg(a = 0)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + bx + dy + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$) \to \exists_{ABCQ}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $(A, B, C) =$ Q & коорд$(A, K) = (-b/(2a), -d/(2c))$ & коорд$(C, K) = (-b/(2a) + 1, -d/(2c))$ & коорд$(B, K) = (-b/(2a), -d/(2c) + 1)$ & коорд$(E, Q) = \text{set}_{vu}(4a^2cu^2 + 4ac^2v^2 -$ $b^2c - d^2a + 4ace = 0$ & $u -$ число & $v -$ число$)))$

10. Кванторная импликация с квантором существования в консеквенте, выполняющая первичный ввод канонической системы координат и определяющая общий вид уравнения для координат множества объектов. Вводится характеристика "каноничвид". Пример:

    $\forall_E$(эллипс(E) $\rightarrow$ $\exists_{Kab}$(прямкоорд(K) & a – число & b – число & $0 < b$ & $0 \leq a - b$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ & x – число & y – число)))

Кванторная импликация, у которой некоторая переменная x1 однозначно определяется как консеквентом, так и антецедентами

Вводится характеристика "опрзнач(x1)". Пример:

$\forall_{ABCD}(A$ – точка & B – точка & C – точка & D – точка & $\neg(C = D)$ & $\neg(A = D)$ & $\neg(A = C)$ & прямая$(AC) \perp$ прямая(BD) & $B \in$ прямая(AC) & $\angle(ADB) = \angle(BDC)$ & $\neg(B = D) \rightarrow l(AB) = l(BC))$

Характеристика - "опрзнач(B)". Для ее получения решается вспомогательная задача на исследование, посылки которой получаются добавлением консеквента к списку антецедентов. Она имеет цель "опрзнач" и формирует комментарии (опрзнач A_1 A_2 A_3), указывающие, что в случае истинности утверждения A_2 существует единственное значение переменной A_3, при котором истинно утверждение A_1. По окончании решения проверяется, что среди версий A_1 встречаются как консеквент так и некоторый антецедент.

4.1.4 Проверочные операторы

1. Кванторная импликация, у которой все параметры антецедентов входят в консеквент. Консеквент допускает обработку проверочным оператором f, Каждый антецедент - либо равенство, либо отрицание равенства, либо допускает обработку проверочным оператором. Вводится характеристика "спуск(f)". Пример:

   $\forall_{bcg}(b - \mathrm{set}$ & $c - \mathrm{set}$ & $g - \mathrm{set}$ & $b \subseteq g \rightarrow b \cap c \subseteq g)$

   Характеристика - "спуск(усмсодержится)".

2. Кванторная импликация, имеющая такую существенную посылку A, что параметры всех остальных антецедентов встречаются либо в консеквенте, либо в A. Консеквент допускает обработку проверочным оператором f. Все отличные от A существенные антецеденты допускают обработку проверочными операторами. Вводится характеристика "легковидеть(f m)", где m - номер антецедента A. Пример:

   $\forall_{ade}(a - \mathrm{set}$ & $d - \mathrm{set}$ & $e - \mathrm{set}$ & $a \subseteq d$ & $d \subseteq e \rightarrow a \subseteq e)$

   Характеристики - "легковидеть(усмсодержится 4)", "легковидеть(усмсодержится 5)".

3. Кванторная импликация, имеющая более одной существенной посылки, причем такая, что никакая из посылок вместе с консеквентом не накрывает всех параметров антецедентов. Консеквент допускает обработку проверочным оператором f. Вводится характеристика "блокпроверок(f)". Пример:

$\forall_{abcde}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \times c \ \& \ (d,e) \in a \rightarrow d \in b)$

Характеристика - "блокпроверок(усмпринадлежит)".

4. Кванторная импликация, используемая в проверочном операторе, у которой конъюнкция существенных антецедентов эквивалентна консеквенту, причем переход от последнего к первой - преобразование общей стандартизации либо конъюнктивной декомпозиции. Вводится характеристика "Спуск". Пример:

   $\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ d \subseteq b \ \& \ d \subseteq c \rightarrow d \subseteq b \cap c)$

5. Кванторная импликация, используемая в проверочном операторе, у которой конъюнкция существенных антецедентов, кроме i-го, эквивалентна консеквенту, причем переход от последнего к первой - преобразование общей стандартизации либо конъюнктивной декомпозиции. Вводится характеристика "Спуск(i)". Пример:

   $\forall_{ade}(a|d \ \& \ a|e \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow a|d+e)$

   Характеристика - "Спуск(1)".

6. Утверждение без свободных переменных, имеющее своим заголовком предикатный символ. Вводится характеристика "спуск(...)". Пример:

   $\emptyset - \text{set}$.

   Характеристика - "спуск(усммножество)".

4.1.5 Утверждение без переменных

Вводится характеристика "конст". Пример:

$0 - \text{целое}$.

4.1.6 Характеризация антецедентов

(a) Антецеденты имеют единственное выражение наибольшей сложности, входящее в них однократно. Сложность больше 4. Вводится характеристика "главнчлен(s)", где s - заголовок выражения. Пример:

   $\forall_{abfg}(f - \text{функция} \ \& \ A = \text{Dom}(f) \ \& \ a \in \text{внутренность}(A) \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \ \& \ (b = \infty \ \vee \ b = -\infty) \rightarrow \neg(\text{огрвточке}(f,a)))$

   Характеристика - "главнчлен(предел)".

(b) Имеется более одного антецедента вида "функция(f)", причем в теореме встречается терм вида $f(t)$. Вводится характеристика "функции". Пример:

   $\forall_{Aafg}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \subseteq A \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ A = \text{Dom}(f) \ \& \ A = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{убывает}(f,a) \ \& \ \text{невозрастает}(g,a) \rightarrow \text{убывает}(\lambda_x(f(x) + g(x), x \in A), a))$

(c) Имеется антецедент, содержащий подтерм "отображение(...)". Вводится характеристика "отображ". Пример:

$\forall_{agn}$(перестановка(g, A) & $\mathrm{card}(A) = m$ & $\{; \lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\} \subseteq \{1, \ldots, m\} \rightarrow \mathrm{card}\{; \lambda_i(g(a(i)), i \in \{1, \ldots, n\})\} = \mathrm{card}(\{; \lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}))$

4.1.7 Отбрасывание избыточных характеристик

Процедура "характеризатор" получала в качестве входного данного x2 некоторый исходный список характеристик теоремы (возможно, пустой). Она пополняла его указанными выше приемами. По завершении этого процесса предпринимается расчистка данного списка - удаление тех характеристик, которые оказываются избыточными либо дезинформирующими при наличии других характеристик. Приемы расчистки имеют эмпирический характер и требуют дальнейшего развития. Началом расчистки служит контрольная точка "прием(138)".

Прежде всего, проверяется наличие в x2 элемента (смхаракт $A_1 \ldots A_n$). Этот элемент передается процедуре в качестве входного данного. Он указывает, что сохраняться должны только характеристики с заголовками $A_1, \ldots, A_n$. Соответственно, все прочие элементы из x2 удаляются. Дальнейшие действия по расчистке зависят от усмотрения в x2 конкретных заголовков. Они приводятся ниже.

1. В x2 имеется элемент "сокращ(N)", но отсутствует элемент "обобщслагаемое(M)", где M отлично от N. Если в x2 имеется элемент "группировки", причем число корневых операндов заменяющей согласно N части теоремы более одного, то этот элемент отбрасывается.

2. Если в x2 имеется элемент с заголовком "неизвпарам", то отбрасываются элементы с заголовком "связпарам".

3. Если в x2 имеется элемент с заголовком "исклпарам", то отбрасываются элементы с заголовками "варьир", "сокращ", "равны".

4. Если в x2 имеется элемент с заголовком "огрсвязок" либо "варианты", то отбрасываются элементы с заголовком "упрощение".

5. Если в x2 имеется элемент с заголовком "развязка", то все прочие элементы удаляются.

6. В x2 имеется элемент, заголовок которого принадлежит списку "Атомарное", "исключатом", "коорд", "числкоэфф", "числовойатом", "Крд", "числсвязь", "нормкрд", "систкоорд", "пропорция", "числатом", "числатомы". Прежде всего, удаляется элемент "вывод", если он есть. Затем просматриваются элементы E, имеющие своим заголовком один из символов "нормализация", "упрощение", "свертка", "склейка", "исключ", "стандформа", "варьир", "проверка", "блокпроверок", "равнчисл", "неизвестная", "группировки", "нормзаголовок", "исклтерм", "коммутативно", "сокращ", "группмножитель", "декомпозиция". Для каждого такого элемента проверяется выполнение следующих условий:

   (a) Либо в x2 входит элемент "числзнач", либо E не имеет заголовок "нормализация", либо теорема не имеет антецедента с заголовком "комплексное".

   (b) Если E имеет заголовок "упрощение", то неверно, что заменяемый терм - единственный числовой атом антецедентов.

   Если они выполнены, то E удаляется из списка x2.

7. Если в x2 имеется элемент "нормкрд", то удаляются все элементы, заголовок которых принадлежит списку "числовойатом", "исклтерм", "числатом", "числкоэфф", "попыткаспуска", "перестановка", "значпарам".
8. Если в x2 отсутствуют элементы с заголовками "Атомарное", "исключатом", "коорд", "числкоэфф", "числовойатом", "Крд", "числсвязь", "нормкрд", "систкоорд", "пропорция", "числатом", "числатомы", причем имеется элемент с заголовком "парамописание", то удаляются элементы с заголовками "вычпрог", "упрощение".
9. Если в x2 имеется элемент с заголовком "значпарам", то удаляются элементы с заголовками "исклтерм", "пропорция", "числатомы", "Числпарам", "числовойатом".
10. Если в x2 есть элемент с одним из заголовков списка "координаты", "каноничкоорд", "стандчисл", "уравнмножество", то удаляются элементы с заголовками "проверка", "систкоорд", "коорд", "описатель".
11. Если в x2 есть элемент "числсвязь", то удаляются элементы с заголовками "числовойатом", "числатом".
12. Если в x2 есть элемент "числкоэфф", то удаляются элементы с заголовками "исклтерм", "пропорция", "числатомы", "числатом", "числовойатом".
13. Если в x2 входит элемент "нормализация(N)", то удаляются элементы "вычпрог($N\ldots$)", "смнеизв($N\ldots$)", а также элементы с заголовками "стандформа", "коммутативно", у которых последний операнд отличен от N.
14. Если в x2 входит элемент с заголовком "описатель", то удаляются элементы с заголовками "вычпрог", "упрощение", "значперем", "числатомы". Удаляется также элемент "нормализация(N)", если имеется элемент "функподст($\ldots M$)", у которого $M \neq N$.
15. Если в x2 имеется элемент E вида (Существует ...), причем имеется также элемент с одним из заголовков "элемсвертка", "общнорм", "кванторнаясвертка", то элемент E удаляется.
16. Если в x2 имеется элемент "исключ", причем имеется также элемент "равно" либо "равны", то элемент "исключ" отбрасывается.
17. Если в x2 имеется элемент "видобъекта", то элементы с заголовком "проверка"удаляются.
18. Если в x2 имеется элемент "характ", то элементы с заголовками "исклтерм", "блокпроверок", "проверка", "свертка" удаляются.
19. Если в x2 имеется элемент "стандмн", то элементы с заголовками "проверка", "характ", "свертка", "нормализация", "координаты", "допконтекст" удаляются.

20. Если в x2 имеется элемент "новкадр", то элементы с заголовками "систкоорд", "коорд", "числкоэфф" удаляются.

21. Если в x2 имеется элемент "новокнтекст", то элементы с заголовками "уравнмножество", "значперем" удаляются.

22. Если в x2 имеется элемент "каноничвид", то элементы с заголовками "проверка", "систкоорд", "координаты", "коорд", "описатель", "существует" удаляются.

23. Если в x2 имеется элементс заголовком "числопред", то элементы с заголовками "усиление", "числвыраз" удаляются.

24. Если в x2 имеется элемент "констнорм", то элементы с заголовками "свертка", "варьир", "исключ" удаляются.

25. Если в x2 имеется элемент "значениепеременной", то элементс заголовком "описатель" удаляется.

26. Если в x2 имеется элемент с заголовком "упрощэкв", то элементы с заголовком "Числвыраз" удаляются.

27. Если в x2 имеется элемент с заголовком "эквуглы", то элемент с заголовком "общнорм" удаляется.

Глава 5

Создание спецификаций приемов

5.1 Интерфейс получения спецификаций для текущей теоремы в базе теорем

Как уже говорилось выше, имеется "ручной" интерфейс создания спецификаций приемов по теоремам. Из просмотра теоремы в базе теорем нажимается "г", после чего на экране прорисовываются теорема приема и его спецификация для первого элемента списка созданных спецификаций. Переходы между элементами этого списка выполняются с помощью клавиш "курсор вверх" - "курсор вниз". Фактически под теоремой приема прорисовывается не элемент "тип(...)", указывающий тип приема, а текст для названия этого типа. Под этим текстом изображаются (если они есть) остальные элементы спецификации. Теорема, текст названия типа приема и прочие элементы спецификации отделены друг от друга горизонтальными линиями. Для выхода из просмотра списка созданных спецификаций достаточно нажать "курсор влево".

По текущей просматриваемой спецификации можно создать прием ГЕНОЛОГа. Для этого нажимается клавиша "б". Прием создается, регистируется в буфере базы приемов и компилируется. Если его не перенести из буфера в другой раздел базы приемов, то после нажатия "Shift-O" (кир.) из оглавления базы приемов буфер приемов сбрасывается, а все созданные и зарегистрированные в нем приемы удаляются вместе со своими программами.

Если по спецификации нужно создать прием не в буфере базы приемов, а сразу зарегистрировать его в основной части этой базы, то из просмотра спецификации нажимается "с" (кир.). Автоматически выполняется переход в оглавление базы приемов. В этом оглавлении нужно создать новый либо выбрать старый концевой пункт, зайти в него и нажать "ш". Появится первый из приемов, созданных по спецификации. Если его нужно сохранить, то обычным образом нажимается F3 (сохранение и компиляция) либо F4 (сохранение без компиляции). Если данная версия приема не нужна, то для перехода к следующей версии нажимается "ш". Возвращение к предыдущим версиям списка не предусмотрено.

Если нужно изменить спецификацию ранее созданного приема, либо связать его с текущей просматриваемой спецификацией, то нажимается клавиша "у". Она переводит в оглавление базы приемов, где следует найти ранее созданную версию приема, войти в ее просмотр и нажать "Ctr-ц". Спецификация будет присвоена данной версии. Данная возможность практически не используется и обладает тем недостатком, что при рассогласовании обозначений переменных в автоматически созданной теореме приема и "старой" теореме приема никакой их коррекции в элементах спецификации не производится.

Программу, запускающую обращение к процедуре спецификатора по текущей просматриваемой теореме и реализующую указанный выше интерфейс, можно найти в пункте "База теорем" - "Спецификатор" - "Обращение к спецификатору из просмотра теоремы" оглавления программ. Она не содержит каких-либо принципиальных моментов, и мы ее не рассматриваем.

5.2 Процедура "приемы"

Для создания спецификаций приемов по заданной теореме служит процедура "приемы(x1 x2 x3 x4 x5)". Ей передаются следующие входные данные: x1 - теорема, x2 - ссылка на узел теоремы в базе теорем, x3 - набор характеристик теоремы, x4 - установка на синтез приемов. Ссылкой на узел теоремы служит, как обычно, терм "теорема(A_1, A_2)", где A_1 - логический символ, A_2 - номер узла в статье символа A_1. Выходной переменной x5 передается набор пар (теорема приема - спецификация приема).

Набор x4 почти не используется. Если в него помещается элемент "новый", то создаются приемы только тех типов, которые пока не созданы по теореме x1.

Выйти на программу оператора "приемы" можно через пункт "База теорем" - "Спецификатор" - "Процедура "приемы" " оглавления программ.

Переменной x6 присваивается одноэлементый набор, состоящий из накопителя результата. Первоночально накопитель пуст. Переменной x7 присваивается символ "пустоеслово". Если имеется установка "новый", то этой переменной переприсваивается список логических символов, задающих типы приемов, уже созданных по теореме x1. Далее просматривается список характеристик x3. Для текущей характеристики x8 с заголовком x9 создается одноэлементый набор x10, состоящий из накопителя промежуточных результатов создания спецификаций по теореме x1 для характеристики x8. Заполнение этого накопителя происходит при обращении к справочнику "приемы" на символе x9.

Справочник "приемы" обрабатывает следующие входные данные: x1 - теорема, x2 - ссылка "теорема(A_1, A_2)" на ее узел в базе теорем, x3 - набор характеристик теоремы, x4 - текущая характеристика теоремы, x5 - одноэлементный набор, состоящий из накопителя результата. Текущим логическим символом служит заголовок характеристики x4. Справочник формирует спецификации приемов, быть может, модифицируя в каждом случае теорему x1. Накопитель в x5 заполняется парами (модифицированная теорема - спецификация приема).

В нашем случае справочнику передаются входные данные x1,x2,x3,x8,x10. После обращения к нему начинается просмотр элементов x12 накопителя x10. Игнорируются спецификации, тип которых указан в списке x7.

Проверяется, имеет ли теорема x1 характеристику "консеквент(i, A)". Такая характеристика означает, что i - й антецедентя представляет собой кванторное равенство, определяющее свою правую часть (переменную) как результат обработки левой части нормализаторами списка A. Если такой антецедент $\forall_{x_1 \ldots x_n}(P_1 \ \& \ \ldots \ \& \ P_n \rightarrow Q = y)$

у теоремы пары x12 имеется, то он заменяется в данной теореме на $Q = y$. При этом в спецификацию приема заносится элемент "быстрпреобр(Q A посылки($P_1 \dots P_n$))".

Аналогично, проверяется, имеет ли теорема x1 характеристику "Консеквент(i, A)". Такая характеристика означает, что i - й антецедент представляет собой кванторную импликацию, которую следует обрабатывать проверочным оператором либо вспомогательной задачей на доказательство. Антецеденты импликации при этом рассматриваются как дополнительные посылки. A - либо логический символ "блокпроверок" (случай проверочного оператора), либо один из символов "легковидеть", "усматривается", "доказать", "следствие". Если такой антецедент $\forall_{x_1 \dots x_n}(P_1 \ \& \ \dots \ \& \ P_n \to Q)$ у теоремы пары x12 имеется, то он заменяется в данной теореме на Q. При этом в спецификацию приема заносится элемент "указатель(занесениепосылки(i, $P_1 \ \& \ \dots \ \& \ P_n$), $A(i)$)".

Если в спецификации отсутствует элемент "тип(короче)", указывающий, что прием относится к справочнику поиска теорем, то в спецификацию переносятся все элементы "см(...)", "указатель(...)" из характеристик теоремы.

Далее предпринимается обращение к процедуре "теоремаприема", которой передаются теорема пары x12, спецификация приема из этой же пары и введенный выше накопитель результата x6. Эта процедура выполняет преобразования теоремы приема согласно его спецификации и регистрирует полученную пару в накопителе x6. Программа ее будет приведена ниже.

После обработки всех характеристик теоремы x1 предпринимается отбрасывание избыточных приемов. Началом служит контрольная точка "прием(5)". Просматриваются позиции x8 набора, являющегося первым элементом одноэлементного набора x6. Так как удаляемые элементы будут заменяться нулями, анализируются лишь ненулевые элементы x9 на позициях x8. Напомним, что x9 - пара, состоящая из теоремы приема T и спецификации S. Приводимый ниже список действий по отбрасыванию избыточных типов появился в результате выборочного анализа действий спецификатора. Он заведомо неполон и нуждается в существенном развитии. Рассматриваются следующие случаи:

1. Если среди списка x3 характеристик исходной теоремы встречается элемент "смтеорема", указывающий, что теорема была выведена специально для справочника поиска теорем, то проверяется, что T имеет вид $F(\dots$, теорема$(\dots))$. Если это не так, то по вхождению x8 заносится 0.

2. Прием перехода к сложной операции, имеющей более простые операнды, как прием общей стандартизации, поглощает частные случаи однонаправленной замены.

   Здесь в S имеется элемент "тип(описатель)". Прочие элементы накопителя x6, чьи типы принадлежат списку "левпозиция", "префикс", "стандоператор", "внешоперанд", "записьприема", заменяются на 0. Напомним, что эти типы означают, соответственно, "сокращенная переформулировка выражений при завершающем редактировании", "свертка константного выражения", "декомпозиция сложной операции, использующая вспомогательное вычисление для развязки операндов", "корневая свертка условия задачи на преобразование", "сведение неизвестного подвыражения условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование к более простым неизвестным выражениям".

3. Прием общей стандартизации выражений поглощает другие приемы, применяемые в сканировании задачи.

   В S имеется элемент "тип(общнорм)". Прочие элементы накопителя x6, чьи типы принадлежат списку "родобъекта", "описатель", "нижняягрань", "текститра", "записьприема", заменяются на 0. Если в антецедентах теоремы x1 отсутствует равенство, то удаляются также приемы типа "обл". Напомним, что перечисленные типы означают, соответственно, "общий случай соотношения для числовых атомов", "переход к сложной операции, имеющей более простые операнды", "преобразование подвыражения условия задачи на доказательство, приводящее к подвыражению посылки", "варьирование выражения для получения повторного вхождения", "сведение неизвестного подвыражения условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование к более простым неизвестным выражениям". Тип "обл" означает "усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте".

4. Прием выражения координат объекта в одной системе координат через его координаты в другой системе поглощает прием выражения координат одного объекта через координаты других объектов.

   В S имеется элемент "тип(эксп)". Прочие элементы накопителя x6, приемы которых имеют тип "Набор", заменяются на 0.

5. Прием "преобразование разрешенного относительно неизвестной условия задачи на описание в дизъюнкцию, подслучай которой дает явное выражение для этой неизвестной, поглощает прием "разгруппировка условия принадлежности неизвестного элемента известному множеству для последйющей расшифровки".

   В S имеется элемент "тип(копия)". Прочие элементы накопителя x6, приемы которых имеют тип "заменанеизвестной", заменяются на 0.

6. Прием вывода двуместного отношения в посылках поглощает прием вывода в задаче на исследование, имеющей цель "исключ".

   В S имеется элемент "тип(свертка)". Прочие элементы накопителя x6, приемы которых имеют тип "примечанализатор", заменяются на 0.

7. Прием явного параметрического описания поглощает прием неявного параметрического описания.

   В S имеется элемент "тип(параметризация)". Прочие элементы накопителя x6, приемы которых имеют тип "попыткапараметризации", заменяются на 0.

8. Прием упрощения выражения под описателем относительно варьируемой переменной поглощает прием свертки под описателем "отображение" в условии задачи на преобразование.

   В S имеется элемент "тип(измзнака)". Прочие элементы накопителя x6, приемы которых имеют тип "мнимаячасть", заменяются на 0.

9. Прием безусловной общей стандартизации одного утверждения поглощает ряд других приемов.

   В S имеется элемент "тип(нормэкв)". Прочие элементы накопителя x6, чьи типы принадлежат списку "исключение", "видеоключ", "неизвестная", "первыйоперанд", "окончание", заменяются на 0. Напомним, что перечисленные типы означают, соответственно, "преобразование условия задачи на доказательство, исключающее сложное выражение", "явное выражение одной неизвестной через другие при контроле задачи на исследование, возникшей после разбора случаев", "выражение нечислового атома черех другие атомы", "разрешение посылки задачи на доказательство относительно заданных неизвестных", "упрощение условия задачи на доказательство относительно неконстантных выражений".

10. Условная общая стандартизация утверждения поглощает другие приемы замены.

    В S имеется элемент "тип(числооперандов)". Прочие элементы накопителя x6, чьи типы принадлежат списку "нижняястрока", "поискслова", "двойнаяоперация", заменяются на 0. Напомним, что перечисленные типы означают, соответственно, "переформулировка нечислового отношения в терминах отношения для числовых атомов", "переход в условии задачи на доказательство от нечислового предиката к соотношению для числовых атомов", "переформулировка условия задачи на описание, имеющего вид нечислового предиката, но содержащего численную неизвестную, в терминах числовых атомов".

11. Непосредственное исключение сложной операции поглощает другие приемы замены.

    В S имеется элемент "тип(стандупорядочение)". Прочие элементы накопителя x6, чьи типы принадлежат списку "сопровождтерм", "обл", "нормпараллельны", "усмцелое", "выводформулы", заменяются на 0. Напомним, что перечисленные типы означают, соответственно, "декомпозиция сложной операции", "усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в констексте", "выражение терма с числовыми атомами через численные параметры при помощи соотношений из посылок", "выражение текущего числового атома через более простые числовые атомы", "преобразование константного терма, обеспечивающее вычисление его значения с помощью нормализаторов общей стандартизации".

По окончании цикла все нули из накопителя x6 удаляются. Далее предпринимается проверка наличия симметричных версий приемов. Если в накопителе x6 найдены две пары (теорема - спецификация), у которых теоремы суть идентичные равенства либо эквивалентности, а спецификации отличаются направлениями замены, то проверяется, что при подходящем переобозначении переменных связывающей приставки одна из двух частей консеквента переходит в другую, а антецеденты сохраняются. Проверяется также, что при данном переобозначении сохраняются элементы спецификации, отличные от указателя типа приема и указателя направления. Отбрасывается та пара, которая соответствует замене справа налево.

Если среди характеристик теоремы имеется элемент "посылки(P)", то в спецификации приемов добавляется элемент "см(Входит(P списокпосылок))".

Далее выдается результат - содержимое накопителя x6.

5.3 Процедура "теоремаприема"

Приведенная выше схема действий спецификатора содержала обращение к процедуре "теоремаприема", выполняющей необходимые для заданного типа приемов преобразования теоремы приема. Обращение к этой процедуре имеет вид "теоремаприема(x1 x2 x3). Здесь x1 - теорема, x2 - спецификация приема, x3 - одноэлементный набор, состоящий из накопителя пар (теорема приема - спецификация приема). Выполняется преобразование теоремы x1 в теорему приема согласно спецификации x2. Результирующая пара заносится в накопитель набора x3.

Выйти на начало программы процедуры можно через пункт "База теорем" - "Спецификатор" - "Процедура ТЕОРЕМАПРИЕМА" оглавления программ.

Прежде всего, проверяется, принадлежит ли тип приема списку "нормкн", "унисборка", "нормплощадь", "окружность". В этих случаях теорема x1 не изменяется, и пара (x1,x2) сразу регистрируется в накопителе x3. Предварительно из x2 исключается элемент "теоремаприема". Напомним, что перечисленные типы приемов суть "использование кванторного тождества, явно определяющего значения функции, для вычисления операции над этой функцией", "стандартизация операнда в нормализаторе упрощения относительно неизвестных", "явное разрешение относительно переменных кванторной приставки отрицания кванторной импликации, возникающей при расшифровке условия задачи на описание и содержащей функцию, определенную в контексте", "стандартизация описателя "класс" ". Теоремы приемов данных типов были созданы для специальных целей еще на этапе вывода теорем и в последующей обработке не нуждаются.

Дальнейшие действия удобно представить как последовательность приемов, предпринимающих независимые попытки преобразования теоремы:

1. Рассмотрение варианта идентификации описателя "класс" по переменной x, характеризуемой как кортеж, с помощью развертки.

   Имеется в виду версия приема, при которой данный описатель идентифицируется с конечными наборами. Попытка создания такой версии начинается с усмотрения в заменяемой части теоремы приема вхождения x8 описателя $\mathrm{set}_x(\text{кортеж}(x, n, A)\ \&\ B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_m)$. Здесь x - единственная переменная связывающей приставки описателя. Выбирается новая переменная i. Переменной x14 присваивается утверждение $i \in \{1, \ldots, n\}$, переменной x15 - утверждение $x(i) \in A$. Предпринимается попытка упростить x15 при помощи задачи на преобразование, посылками которой служат антецеденты теоремы x1, пополненные утверждением x14. Затем переменной x16 присваивается кванторная импликация вида "длялюбого(i если x14 то x15)". Переменной x17 присваивается выражение $\lambda_i(x(i), i \in \{1, \ldots, n\})$. Составляется список x18, образованный импликацией x16 и результатами подстановки x17 вместо x в утверждения $B_1, \ldots, B_m$. Переменной x19 присваивается выражение $\mathrm{set}_x(C)$, где C - конъюнкция утверждений x18. Далее рассматривается результат x20 замены в теореме x1 вхождения x8 на x19. Если у x20 имеется антецедент, указывающий, что переменная n

имеет натуральное значение, то он отбрасывается, так как при идентификации x с конечными наборами это будет выполняться автоматически. Далее предпринимается рекурсивное обращение к процедуре "теоремаприема" для теоремы x20 и спецификации x2, пополненной элементом "развертка". Заметим, что после обращения проработка исходной версии теоремы x1 будет продолжена в соответствии с приводимыми ниже пунктами.

2. Исключение антецедентов, продублированных в термах вида "см(...)".

   Если спецификация содержит элемент "см($A_1 \dots A_n$)", причем некоторые из фильтров A_i содержатся в антецедентах, то они исключаются из списка антецедентов. Здесь и далее изменение антецедентов теоремы сопровождается обращением к оператору "коррантецедентов", согласующему элементы спецификации с новой нумерацией антецедентов.

3. Перестановка частей эквивалентности в соответствии с типом приема.

   Если тип приема - "параметризация" либо "попыткапараметризации", причем квантор существования оказывается в левой части эквивалентности, то предпринимается перестановка ее частей.

4. Исключение антецедента "деление(...)" в приеме стандартизации с помощью вычислений.

   Если тип приема - "исключприем" (стандартизация с помощью вычислений), причем теорема имеет антецедент "деление(m, n, k, p)", означающий, что k - неполное частное, а p - остаток от деления m на n, причем m, n - переменные, то проверяется наличие элемента спецификации "см(A)", в который входят m и n. Это означает, что m, n будут идентифицироваться с константами. В данной ситуации антецедент заменяется на "$m = nk + p$", а в спецификацию добавляется элемент "указатель(программа(...))", ссылающийся на измененный антецедент. Изменение необходимо для перехода к формату, воспринимаемому компилятором ГЕНОЛОГа.

5. Пополнение по о.д.з. подкванторных утверждений в приеме исключения несущественных неизвестных.

   Тип приема - "обрывзадачи" либо "удалениеусловия" (исключение несущественных неизвестных при вырожденном либо, соответственно, невырожденном органичении). В первом случае переменной x7 присваивается вхождение консеквента теоремы, во втором - вхождение его левой части. В обоих случаях по данному вхождению расположен квантор существования. Процедура "Одзтеор" определяет список x8 утверждений, необходимых для сопровождения подкванторного утверждения по о.д.з. В подсписок x10 списка x8 отбираются элементы, зависящие от переменных кванторной приставки и не являющиеся конъюнктивными членами подкванторного утверждения. Если x10 непуст, то его элементы добавляются к конъюнктивным членам под квантором.

6. Пополнение по о.д.з. утверждений под описателем в приеме исключения описателя "класс".

   Тип приема - "цепьвоглавлении". Переменной x7 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, заголовком которой служит описатель "класс".

Процедура "Одзтеор" определяет список x10 утверждений, необходимых для сопровождения утверждения R под описателем по о.д.з. В подсписок x12 списка x10 отбираются элементы, зависящие от переменных связывающей приставки описателя и не являющиеся конъюнктивными членами утверждения R. Если x12 непуст, то его элементы добавляются к конъюнктивным членам под утверждения под описателем.

7. Замена переменных для функций на термы "отображение(...)" и переменных для множеств на термы "класс(...)".

   Прежде всего, проверяется выполнение следующих условий:

   (a) Спецификация приема не имеет элемента "кванторныйконтекст".

   (b) Спецификация приема не имеет элемента вида "теоремаприема(значение)". Этот элемент вводится при альтернативной обработке текущего приема, в которой термы "отображение", "класс" не вводятся (см.ниже).

   (c) Теорема приема имеет символ "отображение" либо символ "значение".

   (d) Тип приема не принадлежит списку "разность", "переходномер", "учетнеизвестных", "движвправо", "отрицание", "нормуглы", "спуск", "попыткапараметризации", "вариант", "Контрользамены". По разным причинам, в этих случаях рассматриваемое преобразование теоремы нецелесообразно.

   (e) Теорема приема имеет заголовок "длялюбого".

   Далее переменной x4 присваивается текущая версия теоремы приема x1. Переменная x1, возможно, будет изменена, и тогда переменная x4 сохранит первоначальный вид теоремы приема для ее альтернативной обработки без применения данного преобразования.

   Переменной x7 присваивается список антецедентов теоремы x1. Начинается цикл просмотра элементов x8 этого списка, имеющих вид "последовательность(f, A)", где f - переменная, причем в консеквенте теоремы содержится подтерм вида $f(t)$. Выбирается новая переменная x10. Если в консеквенте теоремы встречается выражение вида $f(y)$, где y - переменная, связанная квантором либо описателем консеквента, то вместо новой переменной значением x10 становится y. Переменной x13 присваивается результат упрощения вспомогательной задачей утверждения "принадлежит(x10 A)" относительно списка x7. Определяется результат x14 подстановки в x13 вместо переменной x10 выражения "значение(f x10)". Переменной x15 присваивается утверждение "длялюбого(x10 если натуральное(x10) то x14)". Переменной x16 присваивается выражение "отображение(x10 натуральное(x10) значение(f x10))". Антецедент x8 теоремы x1 заменяется на x15, а вместо каждого вхождения f, кроме корневой связывающей приставки и термов вида $f(\ldots)$, подставляется x16.

   После указанной обработки антецедентов с заголовком "последовательность" вводится накопитель x8, заполняемый такими наборами переменных $(f_1, \ldots, f_n)$, $n \geq 2$, что среди антецедентов имеются равенства, явно указывающие на совпадение областей определения функций $f_1, \ldots, f_n$. Для разных наборов накопителя x8 совпадение их областей определений не усматривается.

Переменной x9 присваивается набор переменных, не входящих в теорему x1, длина которого на единицу больше длины набора x8. Переменной x10 присваивается последний элемент набора x9, переменной x11 - список переменных теоремы x1. Просматриваются такие переменные f списка x11, для которых в теореме встречается как выражение вида "$f(t)$", так и выражение вида $P(f)$, где P отлично от символа "область". Проверяется, что f не связана кванторами и описателями, отличными от корневого квантора общности. Проверяется отсутствие подвыражения "слово(f)". Если в накопителе x8 имеется набор, содержащий f, то переменной x13 присваивается переменная списка x9, расположенная на позиции с тем же номером, что указанный набор в x8. Иначе переменной x13 присваивается переменная, не встречающаяся в теореме x1 и в списке x9.

Переменной x14 присваивается набор вхождений в теорему x1 переменной f, отличных от элементов связывающей приставки и не имеющих вида "функция(f)" либо "значение(f, t)". Проверяется, что этот набор непуст. Переменной x15 присваивается набор из нулей, длина которого равна длине набора x14. Он играет роль накопителя термов, на которые будут заменяться вхождения x14. Выбирается переменная x16, которая будет играть роль связанной переменной для создаваемых описателей с участием функции f. Сначала ей присваивается переменная x10. Если в теореме встречается терм "$f(x)$", где x - переменная, связанная внешним квантором либо описателем, отличным от корневого квантора общности, то проверяется отсутствие вхождений f в область действия квантора либо описателя по x, не имеющих вида "функция(f)", "значение(f,t)", "$A \in \mathrm{Dom}(f)$". Тогда x16 заменяется на x.

Начинается заполнение накопителя x15. Для этого предпринимается синхронный просмотр списков x14 и x15. Значением переменной x17 служит вхождение в список x14, значением переменной x18 - соответствующее вхождение в список x15. Переменной x19 присваивается элемент списка x14 по вхождению x17 (т.е. некоторое вхождение f в теорему). Если x19 имеет вид "$A \in \mathrm{Dom}(f)$", то одновременно по вхождению x17 регистрируется вхождение символа принадлежности, а по вхождению x18 - терм "x13(A)". Таким образом, переменная x13, ранее обозначавшая область функции f, начинает играть роль предикатного символа. Если x19 не имеет указанного вида, но имеет вид "область(f)", то по вхождению x17 регистрируется вхождение символа "область", а по вхождению x18 - выражение "класс(x16 x13(x16))". Наконец, во всех прочих случаях по вхождению x18 регистрируется терм "отображение(x16, x13(x16), f(x16))".

По окончании заполнения накопителя x15 проверяется, имеется ли в x14 вхождение переменной f, являющееся операндом одного из символов "перемена-знака", "производная", "предел". В этом случае все вхождения термов x13(A) в термы набора x15 заменяются на термы "$A-$число". Это объясняется стандартизацией, принятой в приемах решателя по математическому анализу: фактическая область определения функции вынесена за рамки перечисленных выше операторов, а под описателем "отображение" внутри оператора везде проставлено "x – число". В будущем возможна коррекция такого подхода, но пока приходится его учитывать, иначе автоматически создаваемые приемы не будут срабатывать.

Наконец, переменной x17 присваивается результат замены всех вхождений набора x14 на термы набора x15. Если в теорему x17 входит переменная x13, то к ее списку антецедентов добавляется терм "функция(x13)", а к связывающей приставке - переменная x13. Затем x1 заменяется на данную теорему, и продолжение просмотра переменных f списка x11.

По окончании просмотра списка x11 - переход к оператору "повторение" и начало обработки описателей "отображение", входящих в теорему x1. Вместо переменных для областей их определения будут вводиться функциональные переменные. Переменной x12 присваивается вхождение текущего просматриваемого описателя "отображение". Проверяется, что после него идет скобка, причем предпоследний его терм, определяющий условие на область определения, имеет вид "$x \in A$", где x, A - переменные, причем x входит в связывающую приставку описателя, A - в связывающую приставку корневого квантора общности. Переменной x16 присваивается список всех вхождений в теорему переменной A, не являющихся элементами связывающей приставки и не расположенных в антецеденте вида "множество(A)".

Выбирается переменная x17, которая будет играть роль связанной переменной для создаваемых описателей с участием множества A. Сначала ей присваивается переменная x10. Если каждое вхождение в теорему переменной A имеет вид "$y \in A$", причем расположено в области действия квантора либо описателя по x, то переменной x17 переприсваивается x. Переменной x18 присваивается набор из нулей, длина которого равна длине набора x16. Он играет роль накопителя термов, на которые будут заменяться вхождения x16.

Начинается заполнение накопителя x18. Для этого предпринимается синхронный просмотр списков x16 и x18. Значением переменной x19 служит вхождение в список x16, значением переменной x20 - соответствующее вхождение в список x18. Переменной x21 присваивается элемент списка x16 по вхождению x19 (т.е. некоторое вхождение A в теорему). Если x21 имеет вид "$y \in A$", то одновременно по вхождению x19 регистрируется вхождение символа принадлежности, а по вхождению x20 - терм "$A(y)$". Таким образом, переменная A, ранее обозначавшая область отображения, начинает играть роль предикатного символа. Если x21 не имеет указанного вида, то по вхождению x20 регистрируется терм "класс(x17 A(x17))".

По окончании заполнения накопителя x18 переменной x19 присваивается результат замены всех вхождений набора x16 на термы набора x18. В списке антецедентов теоремы x19 терм "множество(A)" заменяется на "функция(A)". Результат присваивается переменной x22. Если спецификация приема имеет элемент "направл", то дополнительно предпринимается попытка упрощения заменяющего терма теоремы x22 вспомогательной задачей на преобразование, имеющей цели "упростить", "редуцирование", "теоремаприема". Наконец, x1 заменяется на x22, и откат к оператору "повторение", начиавшему цикл рассмотрения описателей "отображение".

Если в теорему x17 входит переменная x13, то к ее списку антецедентов добавляется терм "функция(x13)", а к связывающей приставке - переменная x13. Затем x1 заменяется на данную теорему, и продолжение просмотра переменных f списка x11.

По завершении обработки описателей "отображение" - откат к попытке обработки процедурой "теоремаприема" исходной версии теоремы x1, сохраненной в переменной x4. В этой попытке ввод функциональных переменных будет заблокирован путем добавления к спецификации приема элемента "теоремаприема(значение)". По завершении данной попытки - продолжение действий по обработке теоремы x1 (с введенными функциональными переменными) согласно приводимому перечню пунктов.

8. Ввод функциональных переменных для условий принадлежности множеству.

   Среди антецедентов теоремы x1 встречается утверждение "множество(A)", где A - переменная. Эта переменная не входит в другие антецеденты. Каждое ее вхождение в консеквент имеет вид "$t \in A$" и расположено в области действия описателя "отображение", связывающая приставка которого пересекается с пароаметрами выражения t. Тогда все вхождения указанных условий принадлежности заменяются на термы "$A(t)$", а антецедент "множество(A)" отбрасывается.

9. Отбрасывание антецедентов вида "типпредела(t)". Все такие антецеденты исключаются.

10. Исключение антецедента "$\mathrm{set}_x P(x) = A \times B$", определяющего область семейства.

    В списке антецедентов теоремы x1 усматривается равенство x5 вида "$\mathrm{set}_x P(x) = A \times B$", где x, P - переменные. В отличном от x5 антецеденте либо в консеквенте обнаруживается терм "отображение($y, P(\ldots), Q(\ldots)$)", где Q - переменная. Аналогично, в отличном от x5 антецеденте либо в консеквенте обнаруживается терм "значение(Q набор(z_1, z_2))", где z_1, z_2 - различные переменные. Переменной x14 присваивается набор, полученный из списка антецедентов отбрасыванием равенства x5 и утверждения "функция(P)", если оно есть, с последующим добавлением консеквента теоремы перед началом списка.

    Реализуется цикл просмотра и изменения элементов набора x14. Текущий элемент этого набора присваивается переменной x16. Если в терме x16 встречается подтерм вида "$\lambda_y(Q(y), P(y))$", то он заменяется на терм вида "$\lambda_{z_1 z_2}(Q(z_1, z_2), z_1 \in A \ \& \ z_2 \in B)$". Замены выполняются до тех пор, пока это возможно. Затем из элементов набора x14 формируется импликация: консеквентом становится начало набора, остальные элементы суть антецеденты. Происходит замена x1 на эту импликацию, и откат к подпункту "Ввод функциональных переменных для условий принадлежности множеству". По исчерпании возможностей применить преобразования трех последних пунктов - переход к следующему пункту.

11. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах приема замены.

    Если в спецификации имеется элемент "направл($\ldots$)", причем среди антецедентов теоремы имеется элемент $\neg(x = t)$, где x - переменная, не входящая в t, то переменной x11 присваивается набор результатов подстановки t вместо x в остальные антецеденты. Переменной x14 присваивается результат такой же подстановки в заменяемый терм. Решается задача на исследование x16, посылки которой суть x11 и о.д.з. терма x14. Ее максимальный уровень равен трем. Проверяется, что после решения в посылках задачи не появляется константа "ложь". Далее результаты подстановки t вместо x в заменяемую и заменяющую части независимо друг от друга упрощаются относительно посылок задачи x16 задачами на преобразование. Проверяется, что результаты упрощения совпадают. После этого у теоремы x1 отбрасывается антецедент $\neg(x = t)$.

12. Вынесение в непосредственно идентифицируемый антецедент соотношения пропорциональности для двух числовых атомов.

    В спецификации приема имеется элемент "пропорция(A, C)". Тип приема - "натурстепень" либо "следствие" (соответственно, "соотношение связывает числовой атом с атомом "неизв" через известные параметры" либо "два из трех числовых атомов пропорциональны, причем хотя бы один атом - "неизв"). Консеквент теоремы имеет вид $AB = CD$. Выбираются новые переменные a, b. к антецедентам теоремы добавляются $aA = bC$ и $\neg(C = 0)$, а консеквент заменяется на $aD = bB$.

13. Замена антецедентов "не(равно$(A\ B)$)" на "разныеточки$(A,\ B)$".

    Если имеются антецеденты вида "$t \in$ прямая(AB)", "$\neg(A = B)$", где A, B - переменные, то проверяется выполнение следующих условий:

    (a) Отсутствует антецедент, содержащий выражение для угла, вершиной которого служит одна из точек A, B, а одной из направляющих точек лучей - другая из точек A, B.

    (b) Отсутствует антецедент, выражающий условие перпендикулярности для прямой AB.

    (c) Отсутствует антецедент, выражающий условие отличия прямой AB от другой прямой.

    Тогда рассматривается список x13 результатов подстановки B вместо A в антецеденты, отличные от $\neg(A = B)$, а также результат x14 аналогичной подстановки в консеквент. Если удается усмотреть, что x14 является следствием x13, то антецедент $\neg(A = B)$ отобрасывается. Иначе он заменяется на "разныеточки(A,B)".

    В дополнение к сказанному, если имеется антецедент $\neg(A = B)$, а также сопроводающие его антецеденты $A \in P$, $B \in P$, Прямая(P), то этот антецедент заменяется на "разныеточки(A, B)".

14. Отбрасывание антецедента "систкоорд(K)". Если в антецедентах встречается подвыражение "коорд(x, K)", то антецедент "систкоорд(K)" отбрасывается.

15. Замена антецедента "$\neg(A \in$ прямая$(BC))$" на "разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC))".

    Если имеется антецедент R вида "$\neg(A \in$ прямая$(BC))$", где A, B, C - переменные, то решается вспомогательная задача на исследование, посылками которой служат обработанные оператором "станд" антецеденты теоремы. Максимальный уровень равен 4. Задача имеет цель "известно". Неизвестными ее служат все параметры антецедентов. Если в результате обнаруживается посылка вида "актив(прямая(AD))", где D - B либо C, причем среди антецедентов имеется утверждение "не(равно(A D))", то антецедент R заменяется на "разныепрямые(прямая(BC) прямая(AD))". Иначе - антецедент R заменяется на "разныепрямые(прямая(AB) прямая(BC))", причем добавляется антецедент "не(равно(A B))".

16. Замена на кванторные импликации условий включения области значений для функциональных переменных.

    Прежде всего, повторяется проверка условий, приведенных выше в пункте "Замена переменных для функций на термы "отображение(...)" и переменных для множеств на термы "класс(...)" ". Переменной x7 присваивается набор антецедентов теоремы, и начинается просмотр элементов x8 списка x7, имеющих вид "функция(f)", где f - переменная. Проверяется, что каждое вхождение в консеквент переменной f имеет вид $f(\ldots)$. Среди антецедентов теоремы находится равенство x11 вида $\mathrm{Dom}(f) = A$, где A не содержит f. Кроме того, в списке антецедентов находится утверждение x13 вида $\mathrm{Val}(f) \subseteq B$, где B не содержит f. Выбирается новая переменная x, и переменной x16 присваивается утверждение $\forall_x(x \in A \to f(x) \in B)$. Проверяется, что каждое вхождение переменной f в антецеденты, отличные от x8, x11, x13, имеет вид $f(\ldots)$. Затем список антецедентов преобразуется: из него исключаются утверждения x11 и x13, а добавляется утверждение x16.

17. Добавление посылок "актив".

    В зависимости от типа приема, рассматриваются следующие случаи:

    (a) К "актив"у относятся все геометрические элементы консеквента.

        Если тип приема принадлежит списку "частичныйответ", "Часть", "имя", "усммножество", "неполноечастное", "комплексное", "убываниедлин", "верхняягрань", "подборнеизвестных", "новыесвязки", "сборканабора", "примечанализатор", "текпеременные", "просмотртермов", "сборкамногочлена", "примечанияприема", "фильтрыприема", "Стандплюс", то для каждого входящего в консеквент числового атома t, имеющего своим заголовком один из символов "расстояние", "угол", "площадь", к антецедентам добавляется терм "актив(t)".

    (b) К "актив"у относятся все геометрические элементы консеквента, кроме выделенных указателем "пропорция(...)".

        Если тип приема принадлежит списку "извлечениеварианта", "бланкпрограммы", "нормоператора", "номероперанда", причем в спецификации имеется элемент "пропорция(...)"то для каждого входящего в консеквент и не входящего в элемент "пропорция(...)" числового атома t, имеющего своим заголовком один из символов "расстояние", "угол", "площадь", к антецедентам добавляется терм "актив(t)".

    (c) К "актив"у относятся все геометрические элементы консеквента, кроме выделенного указателем "определимо(...)".

Если прием имеет тип "определение", а его спецификация - элемент "определимо(r)", то для каждого входящего в консеквент и отличного от r числового атома t, имеющего своим заголовком один из символов "расстояние", "угол", "площадь", к антецедентам добавляется терм "актив(t)".

(d) К "актив"у относятся все геометрические элементы консеквента, кроме выделенного указателем "терм(...)".

Если прием имеет тип "редакцияфильтра", а его спецификация - элемент "терм(r)", то для каждого входящего в консеквент и отличного от r числового атома t, имеющего своим заголовком один из символов "расстояние", "угол", "площадь", к антецедентам добавляется терм "актив(t)".

(e) К "актив"у относятся все прямые и окружности, упомянутые в консеквенте и не встречающиеся в антецедентах.

Если прием имеет тип "свертка", то для каждого подвыражения t консеквента, имеющего своим заголовком символ "прямая" либо "окружность" и не встречающегося в антецедентах, к антецедентам добавляется терм "актив(t)".

(f) К "актив"у относятся все еще не учтенные геометрические элементы антецедентов.

Если тип приема принадлежит списку "склейкаоперандов", "внутрвывод", "теоремыраздела", то рассматриваются все подвыражения t антецедентов, имеющие своим заголовком один из символов "расстояние", "угол", "площадь". Если для такого t отсутствует антецедент "актив(t)", то он вводится.

18. Исключение избыточных антецедентов.

Проверяется, что тип приема отличен от символа "поискраздела". Для каждого антецедента предпринимается попытка усмотреть при помощи проверочных операторов, не является ли он следствием остальных антецедентов. Избыточные антецеденты отбрасываются. При проверках устанавливается сильный ограничитель трудоемкости.

19. Исключение антецедентов, входящих в условия на о.д.з. для заменяемого терма.

Проверяется, что прием выполняет тождественную либо эквивалентную замену. Переменной x8 присваивается заменяемый терм, переменной x9 - совокупность необходимых для сопровождения x8 по о.д.з. утверждений. Она определяется оператором "Одзтеор". Переменной x10 присваивается пересечение набора x6 обработанных оператором "стандупорядочение" антецедентов и списка x9. Проверяется, что список x10 непуст. Переменной x11 присваивается результат отбрасывания из набора антецедентов x6 утверждений x10. Дополнительно предпринимаются попытки исключить из набора x11 утверждения, являющиеся следствиями остальных утверждений. Здесь используются несколько более сильные средства, чем в предыдущем пункте - решаемая до уровня 5 задача на доказательство и средний ограничитель трудоемкости. В заключение список антецедентов теоремы заменяется на x11.

20. Исключение кванторных импликаций в антецедентах, входящих в условия на о.д.з. функциональных переменных.

    Либо в спецификации имеется элемент "направл(...)", либо тип приема - один из символов "обл", "удалениеусловия", "допустоператор", и тогда направление замены берется слева направо. Переменной x8 присваивается заменяемый терм. Среди антецедентов теоремы усматривается кванторная импликация x9 вида "$\forall_x(A(x) \rightarrow B(x))$", где x - переменная. Внутри $B(x)$ имеется вхождение терма вида $f(\ldots)$, где f - переменная, входящая в x8. Проверяется, что каждое вхождение f в терм x8 имеет вид $f(\ldots)$. Рассматривается некоторое такое вхождение $f(y)$, где y - переменная. Проверяется, что это вхождение расположено внутри некоторой конъюнкции. Переменной x21 присваивается объединение утверждений, расположенных в контексте этой конъюнкции, с ее конъюнктивными членами. Проверяется, что совокупность конъюнктивных членов утверждения $A(y)$ содержится в x21. Переменной x23 присваивается результат пополнения набора x21 утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. При помощи задачи на доказательство проверяется, что $B(y)$ - следствие утверждений x23. Затем x9 исключается из антецедентов.

21. Замена кванторных импликаций в антецедентах на их консеквенты с одновременным вводом сопровождающих посылок.

    Если имеется антецедент вида $\forall_x(A(x) \rightarrow B(x))$, у которого все параметры входят в параметры консеквента теоремы, причем существует проверочный оператор для усмотрения истинности утверждения $B(x)$, то данный антецедент заменяется на $B(x)$. К спецификации добавляются элементы, указывающие, что антецедент должен обрабатываться проверочным оператором, причем при этой обработке утверждения $A(x)$ добавляются к списку посылок. Связывающая приставка x допускается произвольной длины.

22. Исключение антецедентов, входящих в условие на о.д.з. других антецедентов либо в условие на о.д.з. консеквента.

    Проверяется, что тип приема принадлежит списку "частичныйответ", "Часть", "род", "имя", "усммножество", "неполноечастное", "формоперанды", "комплексное", "убываниедлин", "верхняягрань", "подборнеизвестных", "новыесвязки", "примечанализатор", "точкаграфа", "сборканабора", "просмотртермов", "текпеременные", "если", "сборкамногочлена", "определение", "знач", "нормсинус", "Набор", "редакторответа", "антецедент", "связка", "вписана", "связприставка", "последнийоперанд", "нормсуп", "повторчисло", "унисборка", "усмпростое", "цветпункта", "нормнабор", "арккотангенс", "узлыоглавления", "числнеизв", "числсвяз", "извлечение", "занесениеусловия", "примечанияприема", "терминал", "сжатиефильтра", "разность", "областьроста", "семействомножеств", "функциональныйсимвол", "редакцияфильтра", "формоперанды", "монотоннозависит", "коррекцияоткатов", "фильтрыприема", "неизвмножители", "элементызадачи", "консеквент", "группировки", "Стандплюс", "вставканабора", "родобъекта", "областьпримера", "склейкаоперандов", "Номера", "внутрвывод", "Операнды", "теоремыраздела". В основном, это приемы замены. Переменной x6 присваивается набор антецедентов теоремы. Переменной x7 присваивается объединение списка x6 с утверждениями, определяющими о.д.з. для консеквента. Переменной x8 присваивается набор списков утверждений, образующих о.д.з. для антецедентов. Они определяются процедурой "Одзтеор". В случае типа "нормнабор" к списку утверждений, сопровождающих антецедент с подтермом вида "$A \in$ прямая(...)", добавляется утверждение "точка(A)". Далее просматриваются синхронно списки x6 и x8. Для текущего элемента x12 списка x6 проверяется, встречается ли он в списке x7 либо в списке сопровождающих утверждений другого антецедента. Если x12 имеет вид "разныеточки(A B)", то дополнительно анализируется утверждение "не(равно(A B))". В случае успешной проверки антецедент x12 удаляется из списка x6. Если имели место изменения списка x6, предпринимается коррекция теоремы x1.

23. Исключение антецедентов, входящих в условие на о.д.з. других антецедентов.

    Проверяется, что тип приема принадлежит списку "свертка", "склейкаоперандов", "движвправо", "вывод", "извлечениеварианта", "бланкпрограммы", "нормоператора", "путь", "унификация", "усмцелое", "нормуглы", вставка", "определениепараметра", "неубывает", "вхождениепосылки", "кратность", "смпосылка", "равныедлины", "коррекциязнака", "терминал", "текпосылка", "термузла", "отрицаниеквантора", "номероперанда", "извлекается", "решить", "Подчинено", "быстрпреобр", "фильтротрезков", "свертка", "обрывзадачи", "корни", "тела", "котангенс", "обл", "прямыеуглы", "выпуклмногоугольник", "сдвигоператоров", "частное", "комментарий", "арифмпрогрессия", "символы", "возрастает", "учетзнаков", "актив", "ссылканаприем", "оценка", "определение", "комплексныечисла", "значениепеременной", "натурстепень", "функция", "имплик", "максимин", "нормкосеканс", "номерперехода", "стандравно", "больше", "продолжение", "оценкатерма", "консеквент", "следствие". В основном, это приемы вывода.

    Переменной x6 присваивается набор антецедентов теоремы. Переменной x7 присваивается набор списков утверждений, образующих о.д.з. для антецедентов. Они определяются процедурой "Одз". Далее просматриваются синхронно списки x6 и x7. Для текущего элемента x11 списка x6 проверяется, встречается ли он в списке сопровождающих утверждений другого антецедента. В случае успешной проверки антецедент x11 удаляется из списка x6. Если имели место изменения списка x6, предпринимается коррекция теоремы x1.

24. Исключение антецедентов, входящих в условие на о.д.з. консеквента для проверочного оператора либо приема обратного вывода.

    Проверяется, что тип приема принадлежит списку "Числсвяз", "спуск", "синтезатор", "подборзначений", "блокпрограммы". При помощи оператор "Одзтеор" находится список утверждений, сопровождающих по о.д.з. консеквент теоремы. Те из них, которые являются антецедентами, исключаются.

25. Исключение антецедентов, входящих в условие на о.д.з. других антецедентов приема проверочного оператора либо обратного вывода.

    Проверяется, что тип приема принадлежит тому же списку, что и в предыдущем пункте. Переменной x5 присваивается набор антецедентов теоремы. Переменной x6 присваивается набор списков утверждений, образующих о.д.з. для антецедентов. Они определяются процедурой "Одз". Если антецедент выделен в спецификации указателем "подборзначений", то для него список сопровождающих по о.д.з. утверждений полагается пустым. Далее просматриваются синхронно списки x5 и x6. Для текущего элемента x10 списка x5 проверяется, встречается ли он в списке сопровождающих утверждений другого антецедента. В случае успешной проверки антецедент x10 удаляется из списка x5. Если имели место изменения списка x5, предпринимается коррекция теоремы x1.

26. Исключение избыточных антецедентов теоремы приема вывода уравнения для текущих координат множества точек.

    Проверяется, что тип приема - "семействомножеств". В консеквенте теоремы обнаруживается равенство вида "$P(t, K) = \mathrm{set}(\ldots)$", где P - название типа координат (например, "коорд"), K - переменная. Среди антецедентов встречается равенство x11 вида "$K = (\ldots)$". Переменной x14 присваивается список переменных правой части данного равенства. Проверяется, что эти переменные не встречаются в консеквенте теоремы. Рассматривается список x15 всех содержащих переменные списка x14 антецедентов. Проверяется, что каждый такой антецедент, кроме x11, имеет вид "$t \subseteq$ плоскость$(\ldots)$" либо вид "$A \in$ плоскость$(\ldots)$", где A - точка из обозначения прямой t. Все антецеденты списка x15, а также антецедент "систкоорд(K)", удаляются.

27. Добавление первого антецедента для приема типа "вычисление сложной операции, примененной к операции на семейством, путем вычисления операции над элементами семейства".

    Проверяется, что прием имеет тип "Смполоса". В его спецификации находятся элементы "переменная(f)" и "направл$(\ldots)$". В заменяющем терме теоремы выбирается один из самых сложных подтермов A. Внутри A находится вхождение элементарного подвыражения $f(t)$. Выбирается новая переменная g. Перед антецедентами теоремы вводится еще один антецедент - равенство $g(t) = A$. В консеквенте предпринимается замена A на $g(t)$. Вводятся указатели для упрощения правой части первого антецедента нормализатором общей стандартизации и вспомогательной задачей на преобразование.

28. Замена антецедентов - отрицаний принадлежности множеству значений отображения на отрицания равенств.

    Если некоторый антецедент имеет вид $\neg(t \in \mathrm{Val}(\lambda_x(r(x), A(x)))$, где x - связывающая приставка производной длины, то он заменяется на $\neg(t = r(x))$, причем вводится указатель, определяющий использование дополнительной посылки $A(x)$ при его проверке.

29. Попытка проверки отрицаний равенства специализированными проверочными операторами.

    Если имеется антецедент вида "$\neg(a = b)$", то предпринимается попытка найти проверочный оператор, распознающий различие объектов того типа, к которому относятся a и b. Такой оператор определяется справочником "разныеточки". Входным данным для него может служить логический символ, используемый для стандартного обозначения объектов данного типа (например, "прямая"). Такой символ распознается как общий заголовок выражений a, b. Другим вариантом входного данного для справочника "разныеточки" служит символ, обозначающий тип объектов a, b. Для усмотрения такого типа решается вспомогательная задача на исследование, посылками которой являются антецеденты. После определения проверочного оператора R антецедент "$\neg(a = b)$" заменяется на $R(a, b)$. Заметим, что в наиболее часто встречающихся случаях - различии точек либо прямых - данный прием уже был продублирован выше.

30. Попытка перехода от переменных для множеств к функциональным предикатным переменным.

    Проверяется, что теорема - равенство либо эквивалентность, причем спецификация имеет элемент "направл(...)". Переменной x7 присваивается заменяемый терм, переменной x8 - заменяющий. В x7 выделяется подтерм вида $t \in A$, где A - переменная, не связанная в x7 кванторами и описателями и имеющая единственное вхождение в x7. Проверяется, что t - либо переменная, либо терм вида "набор(...)", операндами которого служат различные переменные. Переменной x11 присваивается набор $x_1, \ldots, x_k$ переменных терма t. Проверяется, что все эти переменные связаны внутри x7 кванторами и описателями. Проверяется, что каждое вхождение переменной A в терм x8 имеет вид "$r \in A$", где r - выражение, не имеющее заголовка "набор", если t - переменная, иначе имеющее заголовок "набор" и k корневых операндов. Переменной x15 присваивается результат замены подтермов $u \in A$ в консеквент теоремы на термы "$A(u)$".

    Далее предпринимается обработка списка x16 антецедентов теоремы. Переменной x18 присваивается текущий антецедент, содержащий переменную A. Рассматриваются вхождения x19 переменной A в x18. Если вхождение имеет вид $u \in A$, то оно заменяется на $A(u)$. Если вхождение x19 корневое и имеет вид $A = \mathrm{set}_X B(X)$, где длина связывающей приставки X равна k, то антецедент x18 заменяется на $A(X) = B(X)$, причем в спецификацию приема заносится указание на обработку правой части данного равенства вспомогательной задачей на описание с неизвестными X. Если вхождение x19 не имеет вид "$A(u)$", то оно заменяется на $\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k} A(x_1 \ldots x_k)$.

    По завершении изменений консеквента и антецедентов регистрируется новая версия теоремы x1.

31. Попытка перейти от переменных для функций к функциональным переменным.

    Проверяется, что теорема - равенство либо эквивалентность, причем спецификация имеет элемент "направл(...)". Переменной x7 присваивается заменяемый терм, переменной x8 - заменяющий. Последовательно применяются следующие два преобразования:

    (a) Проверяется, что тип приема - "стандчисло" (т.е. "переход к параметрическому описанию класса и попытка явного разрешения подкванторного утверждения"). В терме x8 берется вхождение подтерма вида $f(t)$, где f - переменная, не входящая в параметры антецедентов. Проверяется, что все ее вхождения в x8 имеют вид $f(\ldots)$, причем в x7 эта переменная имеет единственное вхождение, и оно не имеет указанного вида. Выбирается новая переменная P. Если t - переменная, то она она берется в качестве переменной y. Иначе в качестве y берется новая переменная. Переменной x16 присваивается выражение $\lambda_y(f(y), P(y))$. Затем в заменяемой части теоремы переменная f заменяется на терм x16.

(b) Переменной x10 присваивается набор, состоящий из заменямого терма x7 и из всех антецедентов, для которых в спецификации имеется элемент "указатель(идентификатор(...))", определяющий, что они должны участвовать в идентификации. Среди антецедентов находится утверждение x11 вида "$\mathrm{Dom}(f) = A$", где f - переменная, встречающаяся в термах списка x10 и не входящая в A. Проверяется, что каждое ее вхождение в термы списка x10 имеет вид $f(\ldots)$. В термах списка x10 выбирается вхождение вида $f(Y)$, где Y - единственная переменная либо набор различных переменных. Переменной x15 присваивается выражение "$\lambda_Y(f(Y), Y \in A)$". В отличных от x11 антецедентах вхождения переменной f, не имеющие вида $f(\ldots)$, заменяются на выражение x15.

32. Учет о.д.з. для числовых функций: указания на численные значения отбрасываются; условие дифференцируемости заменяется на равенство производной переменной, для которой указывается численное значение. Эта производная заменяется в прочих частях теоремы на заменяющую ее переменную.

    До тех пор, пока это возможно, выполняются следующие действия. В консеквенте теоремы находится терм вида $A(t, p)$, где A - один из символов "производная", "ограничена", "переменазнака", "сохрзнака", "убывает", "периодична", "возрастает", "неубывает", "невозрастает". Рассматриваются следующие случаи:

    (a) t имеет вид "$\lambda_x(f(x), B(x))$", где f - переменная. Рассматриваются следующие подслучаи:

      i. Имеется антецедент вида "$\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$". Тогда этот антецедент отбрасывается.

      ii. Имеется антецедент x11 вида "дифференцируема$(\lambda_x(f(x), B(x)), p)$". Выбирается переменная y, не входящая в теорему. Антецедент x11 отбрасывается и добавляются антецеденты "$A(t, p) = y$", "y – число". Все вхождения подтерма $A(t, p)$, кроме равенства с y, заменяются на y.

      iii. Имеется антецедент "функция(f)". Он отбрасывается.

    (b) t - переменная. Рассматриваются следующие подслучаи:

      i. Имеется антецедент "$\mathrm{Dom}(t) \subseteq \mathbb{R}$" либо "$\mathrm{Val}(t) \subseteq \mathbb{R}$". Он отбрасывается.

      ii. Имеется антецедент "$p \subseteq \mathrm{Dom}(t)$". Он отбрасывается.

5.4 Приемы спецификатора

Основную часть работы по созданию спецификаций приемов выполняет справочник "приемы". Входными данными при обращении к нему служат: x1 - теорема, x2 - ссылка "теорема(A_1, A_2)" на узел данной теоремы в базе теорем, x3 - набор характеристик теоремы, x4 - текущая характеристика теоремы, x5 - одноэлементный набор, представляющий собой накопитель результата и вначале состоящий из символа "пустоеслово". Логическим символом, на котором предпринимается обращение к справочнику, служит заголовок характеристики x4. В набор, зарегистрированный в накопителе x5, заносятся пары (модифицированная теорема приема - спецификация приема).

Если в качестве текущей характеристики выступает символ "протокол", то справочник "приемы" немедленно переадресует обработку справочнику "протокол". Входными данными последнего служат: x1 - протокол базы теорем, x2 - ссылка "теорема(A_1, A_2)" на узел протокола (рассматриваемого как теорема) в базе теорем, x3 - набор характеристик протокола, x4 - одноэлементный набор, являющийся накопителем результата. Логическим символом, на котором происходит обращение к справочнику, служит заголовок протокола. Накопитель x4 заполняется так же, как у справочника "приемы".

Приемы справочников "приемы" и "протокол" расположены в ветви "База теорем" - "Спецификатор" - "Процедуры справочников "приемы" и "протокол" ". В этой ветви приемы обоих справочников объединены. Оглавление ветви практически совпадает с оглавлением логического ассемблера: приемы спецификатора сгруппированы по типам тех приемов решателя, спецификации которых они создают. По умолчанию предполагаем, что спецификатор не изменяет теорему приема. Напомним, что процедура "теоремаприема" работает уже после него.

5.4.1 Приемы тождественной замены

Приемы общей стандартизации

1. Общая стандартизация (характеристика "нормализация").

   Если теорема имеет характеристику "нормализация(N)" и не имеет характеристики "описатель(...)", то создается спецификация "тип(общнорм)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_a(a - \text{число} \to a \cdot 1 = a)$

   Спецификация - "тип(общнорм)", "направл(второйтерм)".

2. Общая стандартизация (характеристика "норм").

   Характеристика "норм(N)" отличается от характеристики "нормализация(N)" лишь тем, что обратное преобразование в нормализаторах приведения к заданному заголовку тоже считается допустимым. После проверки того, что среди характеристик теоремы нет элемента "стандформа(...)", ориентирующего на преобразование в обратном направлении, создается спецификация "тип(общнорм)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{bde}(b - \text{set} \,\&\, d - \text{set} \,\&\, e - \text{set} \to (d \times b) \setminus (e \times b) = (d \setminus e) \times b)$

   Спецификация - "тип(общнорм)", "направл(второйтерм)".

3. Общая стандартизация (характеристика "нормкрд" - случай константного заменяющего терма).

   Сама по себе, характеристика "нормкрд" означает лишь наличие в равенстве выражений для отдельных координат объектов. Однако, если равенство имеет вид "$A(\ldots) = b$", где A - обозначение отдельной координат, причем правая часть не имеет свободных переменных, а левая - имеет, то тоже создается спецификация приема общей стандартизации. Пример:

$\forall_{atKT}$(Числотр(T) & мточка(a) & Трехмерн(K) & одномерндвиж(a, K, T) & $t \in T \to$ крд(Место(a, t), K, 3) = 0)

Спецификация - "тип(общнорм)", "направл(второйтерм)".

4. Общая стандартизация (характеристика "числатом" - случай константного заменяющего терма).

   В случае характеристики "числатом" проверяется, что консеквент имеет вид равенства невырожденного числового атома константному выражению. Если это так, то создается спецификация приема общей стандартизации. Пример:

   $\forall_{ABC}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = B)$ & $B \in$ отрезок$(AC) \to \angle(ABC) = \pi)$

   Спецификация - "тип(общнорм)", "направл(второйтерм)".

5. Общая стандартизация (характеристика "уменьшсложн").

   Характеристика "усменьшсложн(N)" означает, что теорема одновременно уменьшает число выражений максимальной сложности и не приводит к более длинным таким выражениям. Если теорема не имеет характеристики "описатель(...)", то создается спецификация приема общей стандартизации. Пример:

   $\forall_{abc}(a-$число & $b-$число & $c-$число & $0 \leq b-c$ & $0 \leq c-a \to [a, b] \cap [c, \infty) = [c, b])$

   Спецификация - "тип(общнорм)", "направл(второйтерм)".

6. Общая стандартизация выражения, использующая явно идентифицированный антецедент для подмножества операндов ассоциативно-коммутативной операции (характеристика "нормализация").

   В заменяемой части тождества встречается ассоциативно-коммутативная операция f, одним из операндов которой служит переменная x, не имеющая других вхождений в заменяемой части. Теорема имеет единственный существенный антецедент A, причем он содержит переменную x. Выбирается новая переменная y и находится результат B замены в утверждении A переменной x на $f(x, y)$. Составляется список S, полученный из антецедентов теоремы отбрасыванием A и добавлением всех необходимых для сопровождения B по о.д.з. утверждений. Определяется результат C обработки B относительно S нормализаторами общей стандартизации, а также результат D обработки C задачей на описание, имеющей цель "редакция". Если результаты обработки оператором "станд"термов C и D совпадают, то создается спецификация "тип(уникопия)", "направл(N)", "антецедент(i)", "переменная(x)". Здесь i - номер антецедента A. Пример:

   $\forall_{bc}(b -$ set & $c -$ set & $c \subseteq b \to b \cap c = c)$

   В теореме приема первые два антецедента отбрасываются, спецификация имеет вид "тип(уникопия)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)", "переменная(c)".

7. Общая стандартизация выражения, использующая явно идентифицированный антецедент для подмножества операндов ассоциативно-коммутативной операции (характеристика "норм").

   Аналогично предыдущему, но сравнение термов C, D не предпринимается. Пример:

   $$\forall_{adf}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ \text{непересек}(a, d) \to (a \cup (f \setminus d) = (a \cup f) \setminus d))$$

   В теореме приема первые три антецедента отбрасываются, спецификация имеет вид "тип(уникопия)", "направл(первыйтерм)", "антецедент(1)", "переменная(a)".

8. Лексикографическая стандартизация (характеристика "перестановка").

   Проверяется отсутствие характеристики "нормализация(...)", после чего для каждого $N =$ "первыйтерм", "второйтерм" создается спецификация "тип(цветпункта)", "направл(N)". Пример:

   $$\forall_{cdf}(c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ d \subseteq c \to d \cup (c \cap f) = c \cap (d \cup f))$$

   Спецификации - "тип(цветпункта)", "направл(первыйтерм)" и "тип(цветпункта)", "направл(второйтерм)".

9. Лексикографическая стандартизация (характеристика "группировки").

   Проверяется отсутствие характеристики "нормализация(...)". Поочередно рассматриваются случаи $N =$ "первыйтерм", "второйтерм". Переменной x8 присваивается заменяемый терм, переменной x9 - заменяющий. Проверяется, что их оценки сложности равны. Проверяется, что x9 имеет единственный корневой операнд x10, причем x10 - самый сложный подтерм в x9. Проверяется, что как числа более чем одноместных, так и числа одноместных операций в x8 и x10 равны. Тогда создается спецификация "тип(цветпункта)", "направл(N)". Пример:

   $$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \sin(b - a) = -\sin(a - b))$$

   Спецификация - "тип(цветпункта)", "направл(второйтерм)"

10. Усиленная общая стандартизация в условии задачи на доказательство (характеристика "нормализация").

    Теорема имеет единственный существенный антецедент x10, причем этот антецедент не является равенством. В нем усматривается такой символ x12, что справочник "проверка усматривает по нему наличие усиленного проверочного оператора, предназначенного для обработки утверждений вида x10. Создается спецификация "тип(смрасстояние)", "указатель(проверка(i))", "направл(N)", где i - номер антецедента x10. Пример:

    $$\forall_a(a - \text{число}\ \&\ 0 \leq a \to |a| = a)$$

    Спецификация - "тип(смрасстояние)", "указатель(проверка(2))", "направл(второйтерм)".

11. Посылки позволяют установить равенство двух подвыражений и использовать обычную общую стандартизацию (характеристика "сравнтермов").

    Характеристика "сравнтермов(f)" означает, что непосредственно идентифицируемый антецедент теоремы устанавливает равенство двух объектов, после чего предпринимается сокращение двух выражений, отличающихся только этими объектами. f - функциональная переменная, используемая для обозначения указанных выражений. Создается спецификация "тип(конецприставки)", "направл(второйтерм)", "указатель(отображение(f)сравнтермов(f))". Пример:

    $\forall_{abcdn}(a - b = 0 \to f(a)c/(f(b)d) = c/d)$

12. Общая стандартизация после использования равенства из контекста (характеристика "косвактив").

    Характеристика "косвактив(N)" означает тождество общей стандартизации, использующее равенство из контекста. Создается спецификация "тип(собствзначение)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{abc}(b = \text{путь}(\text{префикс}(a, c)) \to \text{началопути}(b) = \text{началопути}(a))$

    Спецификация - "тип(собствзначение)", "направл(второйтерм)".

Преобразование описателей

1. Исключение описателя "класс".

   (a) Исключение описателя "класс" (характеристика "описатель").

   Характеристика "описатель(N)" указывает на тождество, используемое для перехода к более простым описателям либо для исключения описателей. Проверяется, что заменяющий терм x8 не имеет связанных переменных, а заменяемый - имеет заголовок "класс". Создается спецификация "тип(цепьвоглавлении)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{af}(\text{слой}(f, a) = \text{set}_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ a = f(x)))$

   Спецификация - "тип(цепьвоглавлении)", "направл(первыйтерм)".

   (b) Развертка описателя "класс" в конечное объединение (характеристика "серия").

   Характеристика "серия(v N)"указывает на тождество либо эквивалентность, предназначенные для замены с разверткой операции над конечным семейством. v - указатель вхождения этой операции, N - направление замены. Прежде всего, создается заготовка спецификации x9, в которую заносятся элементы "тип(упрощинтеграл)", "указатель(развертка(v))", "направл(N)". Переменной x8 присваивается теорема x1. Прежде чем выдать результат (x8, x9), рассматриваются следующие случаи, в которых предпринимается коррекция теоремы и спецификации:

      i. Теорема имеет антецеденты "функция(f)" и $\forall_z(z \in \text{Dom}(f) \to \text{слово}(z) \ \& \ l(z) = m)$. Выбираются новые переменные x, A, B. Рассматривается выражение F вида $\lambda_x(A(x), B(x))$. Указанные два антецедента, а также антецедент "натуральное(m)" (если он есть) отбрасываются. Вместо них вводится антецедент $m = l(x)$. В консеквенте теоремы переменная f заменяется на F. Подтермы $F(t)$ при этом заменяются на

$A(t)$. К спецификации добавляется элемент "программа(k)", где k - номер нового антецедента.

ii. По вхождению v расположен терм вида "$F(\lambda_{xy}(A(x,y), B(x,y)\ \&\ x \leq t))$", где x - переменная, y - список переменных (возможно, пустой), t - неоднобуквенное выражение. Тогда выбирается новая переменная z, к антецедентам теоремы x8 присоединяется равенство $t = z$, а неравенство $x \leq t$ заменяется на $x \leq z$. К спецификации присоединяется элемент "см(целое(z))".

Затем выдается результат. Пример:

$\forall_{abAc}(a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ b - a = c \to \text{set}_x(x - \text{целое}\ \&\ a \leq x\ \&\ x \leq b\ \&\ x \in A) = \bigcup_{i=0}^{c}(\{a+i\} \text{ при } a+i \in A, \text{ иначе } \emptyset))$

Спецификация - "тип(упрощинтеграл)", "указатель(развертка(фикс(0 2)))", "направл(второйтерм)", "см(целое(c))".

2. Стандартизация описателя "класс".

(a) Стандартизация описателя "класс" (характеристика "класс").

Характеристика "класс(N K)" вводится для тождеств, стандартизирующих описатель "класс". В ней перечисляются дополнительные элементы K, передаваемые спецификации. Создается спецификация "тип(окружность)", "направл(N)", K. Пример:

$\forall_{abcd}(0 < b \to \text{set}_x(d < a/b + c\ \&\ A(x)) = \text{set}_x(0 < a + bc - bd\ \&\ A(x)))$

Спецификация - "тип(окружность)", "направл(второйтерм)", "см(пересекаются(фикс(0 1 2 1 2)x))", "указатель(обобщподст(фикс(0 1)) занесениепосылки(1 $A(x)$))", "быстрпреобр(фикс(0 2 2 1 2) стандплюс)". Фактически, спецификатор здесь играет роль передаточного звена, так как основные элементы спецификации были известны еще на этапе вывода теоремы.

(b) Переход от параметрического задания класса к непосредственному (характеристика "парамописание").

Характеристика "парамописание(N)" указывает на тождество, преобразующее параметрическое описание класса в его явное задание. Вводится спецификация "тип(константа)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcd}(\neg(a^2 + c^2 = 0) \to \text{set}_{xy}(\exists_t(x = at + b\ \&\ y = ct + d\ \&\ t - \text{число})) = \text{set}_{xy}(cx - ay + ad - bc = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

Спецификация - "тип(константа)", "направл(второйтерм)".

(c) Переход от непосредственного задания класса к параметрическому (протокол "параметризация").

Протокол "параметризация(P)" указывает на необходимость ввода параметров типа P при работе с условиями вида $P(A)$. Создается теорема приема вида:

$\forall_{fgA}((f(x) = n\ \&\ g(x)) = A \to \text{set}_x(g(x)\ \&\ P(f(x))) = \text{set}_x(\exists_n(P(n)\ \&\ A)))$

Спецификация - "тип(подборпосылок)", "направл(второйтерм)", "указатель(новаяпеременная(n))", "быстрпреобр(фикс(1 1) задача(5 описать полный явное одз прямойответ упростить цель(неизвестная(x))) посылки(целое(n)))".

В качестве примера можно привести протокол "параметризация(целое)".

(d) Сужение области параметрического описания класса (характеристика "огрсвязок").

Характеристика "огрсвязок(N)" указывает на тождество, сужающее область варьирования параметров в параметрическом задании класса. Создается спецификация "тип(фильтроснования)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Gaf}(f =$ операция(G) & порядокэлемента(a, G) – число $\to$ $\mathrm{set}_x(\exists_n(n$ – целое & $0 \leq n$ & $x =$ алгстепень$(a, f, n))) = \mathrm{set}_x(\exists_n(n \in \{0, \ldots,$ порядокэлемента$(a, G) - 1\}$ & $x =$ алгстепень$(a, f, n))))$

Спецификация - "тип(фильтроснования)", "направл(второйтерм)". Спецификатор играет роль передаточного звена, так как использование теоремы было предопределено еще на этапе ее вывода.

3. Группировка под описатель "класс" (характеристика "Класс").

Характеристика "Класс(N)" означает, что происходит группировка описателей "класс".

Создается спецификация "тип(транзитоперанд)", "направл(N)". Если в заменяемом терме имеются операции над описателем "отображение", допускающие развертку в обычные многоместные операции, то к спецификации добавляются указатели на такую развертку. Пример:

$\forall_{an}(n$ – натуральное $\to \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{set}_x($двнабор$(x, n)$ & $x(i) = a) = \mathrm{set}_x($двнабор$(x, n)$ & $0 <$ колич$(x, a)))$

Спецификация - "тип(транзитоперанд)", "направл(второйтерм)", "указатель(развертка(фикс(0 1)))", "см(целое(n))".

4. Переход от параметрического задания класса к операции над семействами (характеристика "семействоэлементов").

Характеристика "семействоэлементов(N)" означает, что тождество преобразует параметрическое описание класса в операцию над семейством. Создается спецификация "тип(нормуравнение)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fgh}(\mathrm{set}_x(x$ – число & $\exists_n(f(n)$ & $g(n) < x$ & $x < h(n))) = \bigcup_{n,f(n)}(g(n), h(n)))$

Спецификация - "тип(нормуравнение)", "направл(второйтерм)".

5. Переход к условному выражению под описателем "отображение" для выделения константного подслучая.

(a) Переход к условному выражению под описателем "отображение" для выделения константного подслучая (характеристика "варианты").

Характеристика "варианты(N)" означает, что тождество преобразует корневую сложную операцию в условное выражение с более простыми операциями.

Проверяется, что теорема не имеет существенных антецедентов и что все ее антецеденты используются для сопровождения заменяемого терма по о.д.з. Консеквент теоремы представляется в виде $t =$ вариант(A, r_1, r_2). Проверяется, что списки параметров обеих частей одинаковы. Рассматривается переменная x, входящая в одно из выражений r_1, r_2 и не входящая в другое. Выбираются новые переменные f, B. Формируется теорема с пустым списком антецедентов и консеквентом $\lambda_x(f(t), B(x)) = \lambda_x($вариант$(A, f(t_1), f(t_2)), B(x))$. Она снабжается спецификацией "тип(замечузел)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{bcd}(\lambda_a(c(\min(a,b)), d(a)) = \lambda_a((c(a) \text{ при } a \leq b, \text{ иначе } c(b)), d(a)))$

(b) Переход к условному выражению с константными альтернативами под описателем "отображение"для последующего вычисления (характеристика "варианты").

Проверяется, что заменяющий терм имеет заголовок "вариант", причем его условие - элементарное утверждение, а альтернативные выражения константные. Создается спецификация "тип(отделено)". "направл(N)". Пример:

$\forall_k(k - \text{целое} \rightarrow (-1)^k = (1 \text{ при } k - \text{even}, \text{ иначе } -1))$

6. Упрощение выражения под описателем относительно варьируемой переменной (характеристика "склейка").

Характеристика "склейка(x N)" указывает на тождество, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x к выражению с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

Вводится спецификация "тип(измзнака)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(ab + ac = a(b + c))$

Спецификация - "тип(измзнака)", "переменная(a)", "направл(второйтерм)".

7. Определение характеристики отображения.

(a) Непосредственное определение характеристики отображения (характеристика "описатель").

Характеристика "описатель(N)" означает, что тождество позволяет перейти к более простым описателям либо исключает описатели.

Проверяется, что заменяющий терм не имеет связанных переменных, а заменяемый имеет одним из своих корневых операндов терм "отображение(...)". В антецедентах нет равенства вида $x = t$, где x - переменная, являющаяся параметром заменяющего терма, а терм t содержит описатель "отображение". Проверяется, что число корневых операндов заменяемого терма больше 1, причем описатель "отображение" в нем единственный. Тогда создается спецификация "тип(усмпростое)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdef}(0 \leq c - b \rightarrow \text{образ}(\lambda_x(x + a, f(x)), [b, c]) = [a + b, a + c])$

(b) Непосредственное вычисление операции над семейством.

Так как семейством обычно называется отображение, сопоставляющее множеству индексов множество объектов, то семейством можно считать любое отображение, и даже использовать эти термины как синонимы. Ниже мы так и поступаем.

i. Непосредственное вычисление операции над семейством (характеристика "описатель").

Проверяется, что заменяющий терм не имеет связанных переменных, а заменяемый имеет одним из своих корневых операндов терм "отображение(...)". В антецедентах нет равенства вида $x = t$, где x - переменная, являющаяся параметром заменяющего терма, а терм t содержит описатель "отображение". Проверяется, что число корневых операндов равно 1, причем оценка сложности заменяемого терма не меньше оценки сложности заменяющего. Тогда создается спецификация "тип(эллипсоид)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{mn}(0 \leq m - n \rightarrow \sum_{k=n}^{m} k = (m - n + 1)(m + n)/2)$

ii. Непосредственное вычисление операции над семейством (протокол "развертка").

Протокол "развертка(a b)" указывает, что для двуместной ассоциативно-коммутативной операции b ведена соответствующая операция a над конечными семействами операндов.

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(эллипсоид)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abc}(\sum_{d, d=c, b(d)} a(d) = (a(c) \text{ при } b(c), \text{ иначе } 0))$

Протокол - "развертка(суммавсех плюс)".

iii. Непосредственное вычисление операции над семейством, использующее развертку в заменяющем терме (характеристика "развернуть"). Характеристика "развернуть(N)" указывает на тождество, исключающее операцию над семейством при развертке описателей в заменяющей части.

Создается спецификация "тип(названиесимвола)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdfn}(0 \leq c \ \& \ 0 \leq f \ \& \ f = n - d \ \& \ 0 \leq d - c \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \sum_{k=c}^{d}(a^k b^{n-k} C_n^k) = (a + b)^n - \sum_{g=0}^{c-1}(a^g b^{n-g} C_n^g) - \sum_{g=0}^{f-1}(a^{n-g} b^g C_n^g))$

Обе конечные суммы в правой части представляют собой остаточные члены, разворачиваемые приемом в обычные суммы.

iv. Шаг развертки операции над конечным семейством в обычную операцию (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(раскрытьскобки)", "направл(второйтерм)", "указатель(очевидно(1))", "указатель(единица(истина P))". Пример:

$\forall_{abPf}(P(a)\ \&\ \neg(a \in \{;b\}) \to \bigcup_{i,i\in\{a;b\},P(i)} f(i) = f(a) \cup \bigcup_{i,i\in\{;b\},P(i)} f(i))$

Спецификация - "тип(сдвигзапятой)", "направл(второйтерм)", "указатель(очевидно(1))", "указатель(единица(истина P))".

По тому же самому шаблону создается еще одна версия теоремы приема, которая снабжается спецификацией "тип(раскрытьскобки)", "направл(второйтерм)", "указатель(очевидно(1))", "указатель(единица(истина Q))". Пример:

$\forall_{aPQf}(Q(a) \to \bigcup_{i,i=a\ \vee\ P(i),Q(i)} f(i) = f(a) \cup \bigcup_{i,P(i),Q(i)} f(i))$

v. Шаг развертки операции над коротким набором в обычную операцию (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(усмубываетвточке)", "направл(второйтерм)", "длина(4)". Пример:

$\forall_a(a = m - n\ \&\ 0 < a \to \prod_{i=n}^{m} f(i) = f(n)\prod_{i=n+1}^{m} f(i))$

vi. Шаг развертки операции над коротким набором констант в обычную операцию (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(расстояниевграфе)", "направл(второйтерм)", "длина(30)". Пример:

$\forall_a(a = m - n\ \&\ 0 < a \to \sum_{i=n}^{m} f(i) = f(n) + \sum_{i=n+1}^{m} f(i))$

vii. Развертка операции над конечным семейством (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(отрицание)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)", "быстрпреобр длинанабора(b) длинанабора)". Пример:

$\forall_{ab}(\mathrm{Val}(a) = \{;b\}\ \&\ l(b) = n \to \bigcup(a) = \bigcup_{i=1}^{n} b(i))$

viii. Развертка операции над конечным семейством общего вида, элемент которого упоминается в посылках задачи на исследование (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(текстответа)", "направл(второйтерм)", "переменная(A)", "см(натуральное(k) целое(m) целое(n))". Пример:

$\forall_{Amnk}(k = n - m + 1 \to \bigcup_{i=m}^{n} A(i) = \bigcup_{j=1}^{k} A(m + j - 1))$

ix. Попытка вычислить операцию над семейством, расположенную в условии задачи на преобразование, с помощью переформулировки через описатель "класс" и последующего исключения этого описателя (характеристика "развертка").

Характеристика "развертка(K N)" означает, что теорема представляет собой эквивалентность для кванторной расшифровки. K - название возникающего при расшифровке квантора, N - направление замены.

Проверяется, что заменяемое утверждение имеет вид $x \in p(y)$, где x, y - различные переменные, а заменяющее имеет своим заголовком квантор K и единственную переменную z его кванторной приставки. Проверяется наличие антецедента "семействомножеств(y)". Проверяется, что каждое вхождение v переменной y в антецедент либо в заменяющий терм удовлетворяет одному из условий:

A. v имеет вид "функция(y)".
B. v имеет вид "семействомножеств(y)".
C. v имеет вид $\mathrm{Dom}(y)$.
D. v имеет вид $x \in y(z)$.

Составляется список S утверждений, получаемый отбрасыванием из списка антецедентов утверждений "функция(y)" и "семействомножеств(y)". Выбираются новые переменные u_1, u_2, u_3, u_4.

Последовательно просматриваются заменяющий терм и утверждения списка S. Для текущего такого утверждения P составляется список T вхождений в P термов вида $\mathrm{Dom}(y)$, $z \in \mathrm{Dom}(y)$ и $x \in y(z)$. Определяется результат P' замены этих вхождений на $\mathrm{set}_z(u_1(z))$, $u_1(z)$, $u_4 \in u_2(z)$. Пусть B - результат такого преобразования заменяющего терма, T - список результатов преобразований антецедентов S. Если заголовок B - квантор существования, то рассматривается список T', полученный присоединением перед T равенства $B = u_3(u_4)$. Если заголовок B - квантор общности, то в этом равенстве вместо B берется его отрицание. Далее формируется импликация R со связывающей приставкой u_1, u_2, u_3 и антецедентами T'. Ее консеквентом служит равенство $p(\lambda_z(\mathrm{set}_{u_4} u_2(z, u_4), u_1(z))) = \mathrm{set}_{u_4}(u_3(u_4))$. В случае квантора общности вместо $u_3(u_4)$ берется его отрицание. Создается спецификация с теоремой R и элементами "тип(характеризация)", "направл(второйтерм)", "указатель(новаяпеременная(u_4))", "указатель(отображение(u_3))", "быстрпреобр(фикс(1 1) задача(4 упростить))", "быстрпреобр(фикс(0 2) нормкласс)".

В качестве примера рассмотрим исходную теорему

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \to a \in \bigcup(f) \leftrightarrow$$
$$\exists_x(x \in \mathrm{Dom}(f) \ \& \ a \in f(x)))$$

Она преобразуется в теорему:

$$\forall_{bcd}(\exists_x(b(x) \ \& e \in c(x)) = d(e) \to \bigcup_{x,b(x)} c(x) = \mathrm{set}_e(d(e)))$$

(c) Попытка сведения вычисления операции над семейством к вычислению операций над другими отображениями (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(переменазнака)", "направл(второйтерм)", "быстрпреобр(фикс(1 2)задача(7 упростить))", "быстрпреобр(фикс(2 2) задача(7 упростить))", "см(входит(i $d(i)$) входит(вариант теквхожд) не(контекст(вид($c(i)$ и(целое(i)$p \leq i$)))))", "указатель(отображение(a, b, c, d, f) вхождение(f))". Пример:

$\forall_{abcdfmn}(m = \bigcup_{i,c(i),d(i)} f(i, a(i))$ & $n = \bigcup_{i,c(i),\neg d(i)} f(i, b(i)) \rightarrow$
$\bigcup_{i,c(i)} f(i, (a(i)$ при $d(i)$, иначе $b(i))) = m \cup n)$

(d) Попытка сведения вычисления операции над семейством к вычислению операций над другими семействами (характеристика "описатель", с изменением исходной теоремы).

Теорема определяет значение операции над отображением через значения этой операции над другими (обычно - более простыми) отображениями. Она преобразуется таким образом, чтобы в антецедентах находились равенства значений операций из заменяющей части вспомогательным переменным, а в консеквенте эти операции были заменены данными переменными. Прием будет обрабатывать добавленные антецеденты, обращаясь к вспомогательным задачам на преобразование. Теорема снабжается спецификацией "тип(переменазнака)", "направл(второйтерм)". В качестве примера рассмотрим теорему:

$\forall_{abfg}(f-$функция & $g-$функция & $a-$число & $b-$число & интегрируема(f)
& интегрируема(g) & $\mathrm{Dom}(f) = [a, b]$ & $\mathrm{Dom}(g) = [a, b] \rightarrow$
$\int_a^b (f(x) + g(x))dx =$ интеграл(f) + интеграл$(g))$.

Она преобразуется в следующую теорему:

$\forall_{abcdfg}(\int_a^b f(x)dx = c$ & $\int_a^b g(x)dx = d$ & $a -$ число & $b -$ число &
интегрируема$(\lambda_x(f(x), x -$ число & $a \leq x$ & $x \leq b))$ & интегрируема(
$\lambda_x(g(x), x -$ число & $a \leq x$ & $x \leq b)) \rightarrow \int_a^b (f(x) + g(x))dx = c + d)$.

(e) Попытка сведения вычисления операции над семейством к вычислению операций над другими семействами (характеристика "описатель", без изменения исходной теоремы).

Аналогично предыдущему, но теорема не модифицируется, так как изначально часть вычислений вынесена в ее антецеденты. Пример:

$\forall_{afkmp}(k -$ целое & $p -$ число & $m -$ целое & последовательность$(f, \mathbb{R})$ &
$\lim(\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)) = a$ & $(a -$ число $\vee$ $a = \infty$ $\vee$ $a = -\infty) \rightarrow$
$\lim(\lambda_n(\sum_{i=m}^{n+k} f(i)/(n + p), n -$ натуральное$)) = a)$

Напомним, что некоторые дополнительные преобразования будет выполнять процедура "теоремаприема". В данных примерах - отбрасывание сопровождающих по о.д.з. антецедентов.

(f) Занесение внешнего члена под знак операции над семействами.

    i. Занесение внешнего члена под знак операции над семействами (протокол "развертка").
    По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(сдвигзапятой)", "направл(второйтерм)". Пример:

    $\forall_{afgs}((a = f(i)) = (i = s) \rightarrow \bigcup_{i,g(i)} f(i) \cup a = \bigcup_{i,g(i) \vee i=s} f(i))$

    ii. Занесение внешнего члена под знак операции над семействами - случай продолжения ряда значений (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(простойцикл)", "направл(второйтерм)", "быстрпреобр(фикс(1 2)норм)". Пример:

$\forall_{amn}(b = a(m-1) \to b + \sum_{i=m}^{n} a(i) = \sum_{i=m-1}^{n} a(i))$

(g) Исключение вложенных операций над семействами (характеристика "описатель").

Проверяется, что заменяющий терм имеет описатель "отображение". Заменяемый терм имеет вложенные описатели "отображение", а заменяющий не имеет. Каждый описатель "отображение" в консеквенте теоремы является операндом одноместной операции. Создается спецификация "тип(вычислить)", "направл(
N)". Пример:

$\forall_{pn}(n$ – натуральное $\to \sum_{i=1}^{n}(p(i)\prod_{j=1}^{i-1}(1-p(j))) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p(i)))$

(h) Двухпараметрическое семейство.

i. Перестановка индексов в операции над двухпараметрическим семейством для применения кванторного тождества, исключающего описатель (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(минусодин)", "направл(второйтерм)", "см(
элементарно(фикс(1 5 2)))". Пример:

$\forall_{ABmnpq}(\forall_j(j \in \{q,\ldots,n\} \to \bigcup_{i=p}^{m} A(i,j) = B(j)) \to \bigcup_{r=p}^{m}\bigcup_{s=q}^{n} A(r,s) = \bigcup_{s=q}^{n} B(s))$

Прием идентифицирует антецедент с утверждением из контекста.

ii. Свертка операции над двухпараметрическим семейством по одному параметру (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(Величина)", "направл(второйтерм)", "указатель(элемент(i) перечень(b не(входит(i b))))", "см(не(входит(s, $m(j)$)) не(заголовок(j пустоеслово)))". Здесь s - название операции над конечным семейством. Пример:

$\forall_{abmt}(m(j) = \sum_{i,a(i,j)} t(i,j) \to \sum_{i,j,a(i,j),b(j)} t(i,j) = \sum_{j,b(j)} m(j))$

iii. Переход от операции над двухпараметрическим семейством к операции над однопараметрическим (характеристика "исклпарам").

Характеристика "исклпарам(N)" означает, что тождество преобразует выражение с описателем по нескольким варьируемым параметрам в выражение, описатели которого имеют строго меньшее число варьируемых параметров.

Проверяется, что среди антецедентов отсутствует равенство переменной выражению, корневым операндом которого служит описатель "отображение". Тогда создается спецификация "тип(вычислениеплощади)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Pafgmpq}(g(j)+f(j) = m \to \sum_{i,j,i+f(j)\leq m,0\leq i,P(j)} a(j)^i p(j)/(i!(g(j)-i)!q(j))$
$= \sum_{j,P(j),f(j)\leq m} p(j)(a(j)+1)^{m-f(j)}/(q(j)(m-f(j))!))$

   iv. Попытка вычислить операцию над двухпараметрическим семейством путем сведения ее к операции над однопараметрическим (характеристика "исклпарам").

       Проверяется, что среди антецедентов имеется равенство переменной выражению, корневым операндом которого служит описатель "отображение". Тогда создается спецификация "тип(обратный)", "направл(N)". Пример:

       $\forall_{afghpqrs}(h = \lambda_{xy}(f(x,y), p(x,y) = q(x,y) \;\&\; g(x,y)) \;\&\; (p(x,y) = q(x,y)) = (x = r(y) \;\&\; s(y)) \;\&\;$ критическиеточки$(\lambda_y(f(r(y),y), g(r(y),y) \;\&\; s(y))) = a \rightarrow$ критическиеточки$(h) = \mathrm{set}_{xy}(y \in a \;\&\; x = r(y)))$

   v. Развертка операции над двухпараметрическим семейством через операции над однопараметрическими семействами (протокол "развертка").

       По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(малбуква)", "направл(второйтерм)", "см(целое(m) целое(n))", "указатель(занесениепосылки(1 и(целое(j) $f(j)$))))". Пример:

       $\forall_{mnfa}(0 \leq j \rightarrow \sum_{i,j,i+j \leq m, n \leq i, i-\text{целое}, j-\text{целое}} a(i,j) = \sum_{k=n}^{m} \sum_{l \leq m-k, f(l), l-\text{целое}} a(k,l))$

(i) Сведение операции над семейством к характеристике класса.

   i. Сведение операции над семейством к характеристике класса (характеристика "смописатель").

       Характеристика "смописатель(N)" означает, что тождество исключает описатель "отображение" и вводит описатель "класс".

       Если теорема не имеет характеристики "упрощение", указывающей противоположное направление замены, то создается спецификация "тип(нормсигнум)", "направл(N)". Пример:

       $\forall_{fg}(\sum_{a,f(a)} \mathrm{card}(\mathrm{set}_b(g(a,b))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{ab}(f(a) \;\&\; g(a,b))))$

   ii. Попытка переформулировки через описатель "класс" операции над семейством, общий член которого задается с помощью описателя "класс" (характеристика "развертка").

       Действия аналогичны описанным выше в пункте "Попытка вычислить операцию над семейством, расположенную в условии задачи на преобразование, с помощью переформулировки через описатель "класс" и последующего исключения этого описателя. Проиллюстрируем их на том же примере, что в указанном пункте.

       Исходная теорема

       $\forall_{af}(f -$ функция $\&$ семействомножеств$(f) \rightarrow a \in \bigcup(f) \leftrightarrow \exists_x(x \in \mathrm{Dom}(f) \;\&\; a \in f(x)))$

       преобразуется в теорему:

       $\forall_{bcd}(\exists_x(b(x) \;\&\; c(x,e)) = d(e) \rightarrow \bigcup_{x,b(x)} \mathrm{set}_e(c(x,e)) = \mathrm{set}_e(d(e)))$. Создается спецификация "тип(усмотрениефильтра)", "направл(второйтерм)".

(j) Переход к операциям над семействами, имеющими более простой вид общего члена.

i. Сведение операции над семейством к операциям над семействами, имеющими более простой вид общего члена (характеристика "описатель").

Характеристика "описатель(N)" означает, что тождество позволяет перейти к более простым описателям либо исключает описатели.

Проверяется, что заменяемая - имеет вид одноместной операции над описателем "отображение", а заменяющая - имеет связанные переменные. Создается спецификация "тип(фильтррадикалов)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ade}(a - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ d - \text{функция}\ \&\ \text{конечное}(e)\ \&\ \mathrm{Dom}(d) = e\ \&\ \mathrm{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \prod_{f,f\in e} a^{d(f)} = a^{\sum_{f,f\in e} d(f)})$

Спецификация - "тип(фильтррадикалов)", "направл(второйтерм)".

ii. Сведение операции над семейством к операциям над семействами, имеющими более простой вид общего члена (характеристика "сокращ").

Характеристика "сокращ(N)" указывает, что тождество упрощает выражение под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей или равной сложности.

Проверяется, что заменяемый терм - одноместная операция от описателя "отображение". Заменяющий терм имеет единственный описатель "отображение". Выражение для значения второго описателя получается из подвыражения для значения первого вычеркиванием части операндов и заменой части неконстантных подтермов на логические символы. Оно короче. Создается спецификация "тип(фильтррадикалов)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Aabfgp}(A - \mathrm{set}\ \&\ \text{Отображение}(f, A, \mathbb{R})\ \&\ \text{Отображение}(p, A, \mathbb{R} \setminus \{0\})\ \&\ \text{Отображение}(g, A, \mathbb{R})\ \&\ b - \text{число}\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow \sum_{x,x\in A} g(x)b^{f(x)+a}/p(x) = b^a \sum_{x,x\in A} g(x)b^{f(x)}/p(x))$

Спецификация - "тип(фильтррадикалов)", "направл(второйтерм)".

iii. Сведение операции над семейством к операциям над семействами, имеющими более простой вид общего члена (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(фильтррадикалов)", "направл(второйтерм)", "см(включается(параметры($d(i)$))параметры(фикс(0 1 1 3))))", "указатель(отображение(a, b, c, d, f), вхождение(f), быстрпреобр(фикс(0 2 1 1 2) задача(4 тип(описать) полный явное прямойответ цель(неизвестная(i)))), быстрпреобр(фикс(0 2 2 1 2) задача(4 тип(описать) полный явное прямойответ цель(неизвестная(i)))))". Пример:

$\forall_{abcdf}(\text{конечное}(\mathrm{set}_i(c(i))) \rightarrow \sum_{i,c(i)} f(i, (a(i)\ \text{при}\ d(i),\ \text{иначе}\ b(i))) = \sum_{i,c(i),d(i)} f(i, a(i)) + \sum_{i,c(i),\neg d(i)} f(i, b(i)))$

iv. Сведение операции над семейством к операциям над семействами, допускающим непосредственное вычисление (характеристика "вычМн").

Характеристика "вычМн(N" указывает на тождество, сводящее операцию над семейством к операциям, допускающим непосрественное вычисление.

Создается спецификация "тип(подобныетермы)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{mnpq}(m - \text{целое} \ \& \ 0 \leq q - p \rightarrow \sum_{i=p}^{q}(iC_{m+i}^{n}) = (n+1)\sum_{i=p}^{q} C_{m+i+1}^{n+1} - (m+1)\sum_{i=p}^{q} C_{m+i}^{n})$

Спецификация - "тип(подобныетермы)", "направл(второйтерм)".

v. Сведение операции над семейством к операциям над семействами, допускающим более простое вычисление (характеристика "вычмн").

Создается спецификация "тип(видобъединение)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{akmnpq}(m - \text{целое} \ \& \ k - \text{целое} \ \& \ 0 \leq k - 1 \ \& \ 0 \leq q - p \ \& \ a = m + i \rightarrow \sum_{i=p}^{q}(i^{k}C_{m+i}^{n}) = \prod_{j=1}^{k}(n+j)\sum_{i=p}^{q} C_{k+a}^{n} + k - \sum_{i=p}^{q}((\prod_{j=1}^{k}(j+a) - i^{k})C_{a}^{n}))$

После раскрывания скобок во внутреннем конечном произведении и приведении подобных членов происходит уменьшение показателя степени, на которую домножается число сочетаний. Спецификация - "тип(видобъединение)", "направл(второйтерм)". Спецификатор недоработан, так как скобка со вторым конечным произведением должна быть вынесена в отдельный антецедент и упрощена вспомогательной задачей.

vi. Сведение операции над семейством к операциям над подсемействами, на которых упрощается вид общего члена (характеристика "преобрфильтр").

Характеристикой "преобрфильтр(t, N)" снабжаются тождества, сводящие операцию над семейством к операциям над подсемействами, на которых упрощается вид общего члена. t - вид упрощаемого подвыражения общего члена, N - направление замены.

Вводится спецификация "тип(началопути)", "терм(t)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fgP}(\text{мера0}(\text{set}_{xy}(P(x,y) \ \& \ g(x,y) = 0)) \rightarrow \iint_{P(x,y)} f(x,y)dxdy = \iint_{P(x,y) \ \& \ 0<g(x,y)} f(x,y)dxdy + \iint_{P(x,y) \ \& \ g(x,y)<0} f(x,y)dxdy)$

Спецификация - "тип(началопути)", "терм(sg($g(x,y)$))", "направл(второйтерм)".

vii. Замена переменной для стандартизации вида общего члена семейства (характеристика "заменапеременной").

Характеристикой "заменапеременной(N)" снабжаются тождества, выпоняющие замену варьируемой переменной в операции над семейством для упрощения общего члена.

Консеквент теоремы имеет вид "эквсемейства($t_1 t_2$)", т.е. семейства t_1, t_2 получаются друг из друга взаимно-однозначным переобозначением индексов. Выбирается новая переменная f, и консеквент заменяется на "$f(t_1) = f(t_2)$". Создается спецификация "тип(уровеньпосылки)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fgmnp}(p = m - n \rightarrow f(\lambda_k(C_p^{m-k}g(k), k - \text{целое} \ \& \ n \leq k \ \& \ k \leq m)) = f(\lambda_i(C_p^{i}g(m-i), i - \text{целое} \ \& \ 0 \leq i \ \& \ i \leq m - n)))$

Упрощается второй (верхний) операнд у числа сочетаний.

   viii. Применение специального нормализатора для последующей декомпозиции операции над семейством (протокол "развертка").

      По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(блокнеравенства)", "направл(второйтерм)", "оператор(g)". Пример:

      $\forall_{afg}(a = f(x) \to \sum_{x,g(x)} f(x) = \sum_{x,g(x)} a)$

      Спецификация - "тип(блокнеравенства)", "направл(второйтерм)", "оператор(стандплюс)". Прием предпринимает попытку раскрывания скобок для раздельного суммирования.

(k) Сведение операции над семейством к операциям над семействами, имеющими более простую область определения.

   i. Исключение описателя "отображение" из задания области определения семейства (характеристика "облфильтра").

      Характеристика "облфильтра(N)" указывает на тождество, исключающее описатель "отображение" в задании области некоторого семейства.

      Создается спецификация "тип(записьтеоремы)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{mrf}(\sum_{a,a\in\prod_{i=1}^{r} m(i)}(\prod_{i=1}^{r} f(a(i),i)) = \prod_{i=1}^{r}\sum_{j,j\in m(i)} f(j,i))$

   ii. Уменьшение параметров, определяющих размеры семейства.

      A. Развертка операции над семейством, имеющим фиксированные конечные размеры, в группу операций над семействами меньших размеров (характеристика "размеры").

         Характеристика "размеры(F, N)" означает, что тождество сводит вычисление операции над семейством к нескольким операциям над семействами, имеющими меньший размер области определения и формируемыми в режиме конечного перечисления. F - фильтр, уточняющий допустимые константные значения параметров, N - направление замены.

         Создается спецификация "тип(внешкасаются)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

         $\forall_{amn}(m \in \{1,\dots,n\} \to \mathrm{det}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,n\} \mathbin{\&} j \in \{1,\dots,n\})) = \sum_{k=1}^{n}(a(m,k)(-1)^{m+k}\mathrm{det}(\lambda_{ij}(((a(i,j)$ при $j < k,$ иначе $a(i,j+1))$ при $i < m,$ иначе $(a(i+1,j)$ при $j < k,$ иначе $a(i+1,j+1))), i \in \{1,\dots,n-1\} \mathbin{\&} j \in \{1,\dots,n-1\}))))$

         Спецификация "тип(внешкасаются)", "направл(второйтерм)", "см(натуральное(n))".

      B. Переход к операции над семейством меньшего фиксированного размера (характеристика "размер").

         Характеристика "размер(N)" означает, что тождество уменьшает размеры области определения операции над семейством.

         Создается спецификация "тип(норминтервал)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{amnk}(k \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(a(1,k)=0) \rightarrow$ ранг$(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\dots,m\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})) =$ ранг$(\lambda_{ij}((a(i+1,j)a(1,k)-a(1,j)a(i+1,k)$ при $j<k,$ иначе $a(i+1,j+1)a(1,k)-a(1,j+1)a(i+1,k)), i \in \{1,\dots,m-1\}$ & $j \in \{1\dots,n-1\})) + 1)$

Переменные m, n идентифицируются с натуральными константами.

C. Переход к операции над семейством меньшего размера (характеристика "размер").

Создается спецификация "тип(Нижняягрань)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Amn}(\text{set}_i(i \in \{1,\dots,n\}$ & $\neg(A(n,i)=0)) = \{m\} \rightarrow \det(\lambda_{ij}(A(i,j),$ $i \in \{1,\dots,n\}$ & $j \in \{1,\dots,n\})) = A(n,m)(-1)^{n+m}\det(\lambda_{ij}((A(i,j)$ при $j<m,$ иначе $A(i,j+1)), i \in \{1,\dots,n-1\}$ & $j \in \{1,\dots,n-1\})))$

iii. Разбиение конечной операции с дизъюнктивным описанием области определения (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(углы)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcd}(\neg b \rightarrow \sum_{i,a\ \vee d(i)} c(i) = \sum_{i,a,d(i)} c(i) + \sum_{i,b,d(i)} c(i)).$

iv. Сведение операции над семейством к операциям над подсемействами, если область определения семейства представлена в виде объединения подобластей (характеристика "разбиение").

Характеристика "разбиение(N)" означает, что тождество сводит вычисление операции над семейством к операциям над подсемействами, если область определения семейства представлена в виде объединения подобластей.

Создается спецификация "тип(номервхождения)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{CDfn}(C = \bigcup_{i=1}^{n} D(i)$ & конечнпересечения$(D) \rightarrow \int_C f(x,y)ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{D(i)} f(x,y)ds)$

v. Попытка вычислить операцию на одном из подсемейств, если область определения семейства представлена в виде объединения подобластей (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(учетнеизвестных)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcf}(\sum_{i,i\in b} f(i) = a$ & непересек$(b,c) \rightarrow \sum_{i,i\in b\cup c} f(i) = a + \sum_{i,i\in c} f(i)).$

Первый антецедент реализует попытку вычисления.

vi. Операция над семейством, имеющим дополнительное условие невырожденности (протокол "развертка").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(быстрописание)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abc}(\sum_{i,a(i),b} c(i) = (\sum_{i,a(i)} c(i)$ при $b,$ иначе $0)).$

vii. Рассмотрение альтернатив для области определения семейства (протокол "размерность").

Протокол "размерность(f n)" указывает, что f есть операция над n -параметрическим семейством.

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(нормО)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{fPABC}(P(x,y)=((x,y)\in(A\,\text{при}\,C,\ \text{иначе}\,B))\to\iint_{P(x,y)}f(x,y)dxdy=(\iint_A f(x,y)dxdy\ \text{при}\ C,\ \text{иначе}\ \iint_B f(x,y)dxdy))$

Условие на область интегрирования задается при помощи условного выражения.

viii. Группировка членов ассоциативно-коммутативной операции над семейством (характеристика "группы").

Характеристика "группы (N)" указывает на тождество, группирующее члены ассоциативно-коммутативной операции над семейством.

Создается спецификация "тип(диффлагранжа)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Afn}(n=\text{card}(A)\to\sum_{b,b\subseteq A}f(\text{card}(b))=\sum_{i=0}^{n}C_n^i f(i))$

ix. Отбрасывание членов семейства, не изменяющих значение операции (характеристика "нольмн").

Характеристика "нольмн(N)" указывает на тождество, исключающее нулевые члены операции над семейством.

Создается спецификация "тип(нормчислосочетаний)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{pqB}(\sum_{i,B(i)}(1+(-1)^i)p(i)/q(i)=\sum_{i,B(i),i-\text{even}}2p(i)/q(i))$

x. Замена переменной при вычислении операции над семейством, упрощающая область определения семейства (характеристика "упрощстанд").

Характеристика "упрощстанд(N)" указывает на кванторную импликацию с консеквентом "эквсемейства(...)", которая обеспечивает замену переменной описателя "отображение" с конечной областью определения, упрощающую задание этой области.

Выбирается новая переменная P, и консеквент "эквсемейства(A,B)" заменяется на равенство "$P(A)=P(B)$". Создается спецификация "тип(ристеорема)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{faP}(f(\lambda_i(a(i),i-\text{целое}\ \&\ \neg(i-\text{even})\ \&\ P(i)))=f(\lambda_i(a(2i+1),i-\text{целое}\ \&\ P(2i+1))))$

Замена выполняется слева направо.

(l) Частичное сокращение операций над семействами (характеристика "сокращмн").

Характеристика "сокращмн(N)" означает, что тождество выполняет частичное сокращение двух операций над семействами.

Создается спецификация "тип(нормпредел)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdfeg}(0 < f(n)\ \&\ 0 < b - c \rightarrow e(\prod_{n=a}^{b} f(n))^d/(g(\prod_{n=a}^{c} f(n))^d) = e(\prod_{n=c+1}^{b} f(n))^d/g)$

(m) Переход к более простой операции над семействами (характеристика "упрощплс").

Характеристика "упрощплс(N)" указывает на тождество, позволяющее перейти к более простой операции над семейством.

Создается спецификация "тип(указательошибки)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{afP}(0 < f(i) \rightarrow \log_a(\prod_{i,P(i)} f(i)) = \sum_{i,P(i)} \log_a f(i))$

(n) Разбиение области изменения параметра для сближения операций над семействами (характеристика "разблин").

Характеристика "разблин(N)" указывает на тождество, разбивающее область изменения параметра для сближения операций над семействами.

Создается спецификация "тип(фильтрпромежутков)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefg}(0 < e - c \rightarrow a\sum_{n=c}^{d} g(n) + b\sum_{n=e}^{f} g(n) = a\sum_{n=e}^{d} g(n) + a\sum_{n=c}^{e-1} g(n) + b\sum_{n=e} fg(n))$.

(o) Бескванторная переформулировка операции над семейством с помощью вспомогательного обозначения, вводимого кванторным тождеством (характеристика "квантспуск").

Характеристика "квантспуск(N)" указывает на тождество, выполняющее бескванторную переформулировку операции над семейством с помощью вспомогательного обозначения, вводимого кванторным тождеством.

Создается спецификация "тип(коордввода)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABabcmpq}(\forall_n(n -$ натуральное $\rightarrow \det(\lambda_{ij}(A(i,j,n), i \in \{1,\ldots,an+b\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,an+b\})) = p(n))\ \&\ b - c = aq\ \&\ A(k,l,m-q) = B(k,l,m) \rightarrow \det(\lambda_{kl}(B(k,l,m), k \in \{1,\ldots,am+c\}\ \&\ l \in \{1,\ldots,am+c\})) = p(m-q))$.

8. Определение характеристики класса.

(a) Непосредственное определение характеристики класса (характеристика "описатель").

Проверяется, что заменяющее выражение не имеет связанных переменных. Корневым операндом заменяемой части служит описатель "класс", причем других описателей в этой части нет. Оценка сложности заменяющей части не превосходит оценки сложности заменяемой. Тогда создается спецификация "тип(орграф)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{an}(n -$ целое $\&\ 0 \leq n\ \&$ конечное$(a) \rightarrow \mathrm{card}(\mathrm{set}_x(x - \mathrm{set}\ \&\ x \subseteq a\ \&\ \mathrm{card}(x) = n)) = C^n_{\mathrm{card}(a)})$

(b) Стандартизирующая замена переменной при определении характеристики класса (характеристика "новпарам").

Характеристика "новпарам(N)" указывает на тождество, выполняющее декомпозирующую замену переменных при определении характеристики класса.

Создается спецификация "тип(внешобрыв)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{BCP}(\text{непересек}(B, C) \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_A(A \subseteq B \cup C \ \& \ P(A) \ \& \ A - \mathrm{set})) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_A(\exists_{DE}(D \subseteq B \ \& \ E \subseteq C \ \& \ A = D \cup E \ \& \ D - \mathrm{set} \ \& \ E - \mathrm{set} \ \& \ P(D \cup E)))))$

(c) Упрощающий переход к характеристикам других классов (характеристика "упрощэкв").

Характеристика "упрощэкв(N)" указывает на тождество, выполняющее упрощающий переход к характеристикам других классов.

Создается спецификация "тип(граф)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABPmn}(m = \mathrm{card}(B(x)) \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n = \mathrm{card}(A(x)) \ \& \ n \leq m \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_{fx}(\text{Отображение}(f, A(x), B(x)) \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ P(x))) = m!\mathrm{card}(\mathrm{set}_x(P(x)))/(m - n)!)$

Заметим, что две мощности в антецедентах, хотя и обрабатываются нормализаторами, не обязательно должны быть вычислены данным приемом. Это же относится и к мощности в консеквенте.

(d) Попытка свести вычисление характеристики класса к вычислению характеристик других классов (характеристика "мощности").

Характеристика "мощности(N)" указывает на тождество, предпринимающее попытку свести вычисление характеристики класса к вычислению характеристик других классов.

Создается спецификация "тип(цикл)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{APQM}(M = \mathrm{set}_i(P(i) \ \& \ i - \text{целое} \ \& \ 0 \leq i \ \& \ i \leq \mathrm{card}(A) \ \& \ \text{конечное}(A) \ \& \ t(i) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{xy}(x - \mathrm{set} \ \& \ x \subseteq A \ \& \ \mathrm{card}(x) = i \ \& \ Q(x, y))) \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_{xy}(x - \mathrm{set} \ \& \ x \subseteq A \ \& \ P(\mathrm{card}(x)) \ \& \ Q(x, y))) = \sum_{i, i \in M} t(i))$

В отличие от предыдущего пункта, последний антецедент вычисляет мощность $t(i)$ при помощи вспомогательной задачи.

(e) Группировка характеристик классов (характеристика "группмножество").

Характеристика "группмножество(N)" указывает на тождество, выполняющее группировку характеристик классов.

Создается спецификация "тип(степеньвершины)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{mnPAB}(m + n = 0 \ \& \ A \subseteq B \to m \cdot \mathrm{card}(\mathrm{set}_x(P(x) \ \& \ x \in A)) + n \cdot \mathrm{card}(\mathrm{set}_x(P(x) \ \& \ x \in A)) = n \cdot \mathrm{card}(\mathrm{set}_y(P(y) \ \& \ y \in B \setminus A)))$

(f) Разрешение уравнения под описателм "класс" относительно заданной переменной для последующего вычисления (протокол "Класс").

Протокол "Класс(A n)" определяет некоторое выражение A содержащее переменную a. Если вместо этой переменной подставлено выражение вида "класс($x_1 \dots x_n$ и(равно($f(x_1 \dots x_n)$ $g(x_1 \dots x_n)$)$B(x_1 \dots x_n)$))", то для вычисления значения выражения A рекомендуется разрешить уравнение под описателем "класс" относительно некоторой (по умолчанию - последней) переменной.

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(Плюс)", "направл(второйтерм)", "переменная(y)", "указатель(единица(пусто b))". Пример:

$\forall_{bcfgA}(\mathrm{set}_{xy}(f(x,y) = g(x,y)\ \&\ A(x,y)) = c \to$ областьграницы$(\mathrm{set}_{xy}(f(x,y)$ $= g(x,y)\ \&\ A(x,y)) \cup b) =$ областьграницы$(c \cup b))$

(g) Исключение внутреннего квантора существования в описании класса при определении его мощности (характеристика "исключотр").

Характеристика "исключотр(N)" указывает на тождество, исключающее внутренний квантор существования в описании класса при определении его мощности.

Создается спецификация "тип(термнабора)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ghB}(\mathrm{card}(\mathrm{set}_{fx}(\exists_A(g(f,A,x)\ \&$ Отображение$(f,A,B(x)))\ \&\ h(f,x))) =$ $\mathrm{card}(\mathrm{set}_{fxA}(g(f,A,x)\ \&$ Отображение$(f,A,B(x))\ \&\ h(f,x))))$

(h) Разрешение остаточного условия под описателем "класс" для последующего вычисления (протокол "Класс").

По фиксированному шаблону сразу создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(континуум)", "направл(второйтерм)", "переменная(x)", "указатель(единица(пусто a))". Пример:

$\forall_{abfA}(A(x) = b \to$ областьграницы$(\mathrm{set}_{xy}(A(x)\ \&\ y = f(x)) \cup a) =$ областьграницы$(\mathrm{set}_{xy}(b\ \&\ y = f(x)) \cup a))$

Приемы обращения к нормализаторам

1. Попытка применения нормализатора приведения к заданным заголовкам.

(a) Попытка применения нормализатора приведения к заданным заголовкам для упрощения выражения (характеристика "упрощединица").

Характеристика "упрощединица"/ указывает на тождество, предпринимающее попытку упрощения с помощью цепочки пакетных нормализаторов. Она дополняется характеристикой "оператор(A)", ссылающейся на применяемый нормализатор A.

Проверяется, что A - нормализатор приведения к заданным заголовкам, после чего создается спецификация "тип(символ)", "направл(второйтерм)", "оператор(A)". Пример:

$\forall_{abc}(c = a + b \to a + b = c)$

Характеристики теоремы - "упрощединица", "оператор(видумножение)". Теорема представляет собой квазипротокол.

(b) Обращение к нормализатору приведения к заданным заголовкам в условии задачи на преобразование, имеющей цель приведения к этим заголовкам (протокол "заголовок").

Протокол "заголовок(T A B)" означает, что нормализатор A приведения к заданным заголовкам применяется в задачах на преобразование с целью B к условию, представимому в виде терма x1.

Выбирается не входящая в T переменная y и формируется теорема приема "длялюбого(xy если равно(y T) то равно(T y))", где x - параметры терма T. Для нее создается спецификация "тип(левыйкрай)", "направл(второйтерм)", "оператор(A)", "цель(B)". Пример:

По протоколу "заголовок($a+b$, видумножение, разложитьнамножители)" создаются теорема приема $\forall_{abc}(c = a+b \rightarrow a+b = c)$ и спецификация "тип(левыйкрай)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)", "цель(разложитьнамножители)".

2. Применение нормализатора стандартной формы.

(a) Попытка упрощения выражения путем применения нормализатора стандартной формы и последующей свертки с помощью других нормализаторов (характеристика "упрощединица").

Характеристикой "упрощединица" сопровождается тождество, реализующее попытку упрощения с помощью цепочки пакетных нормализаторов. Оно имеет также характеристику "оператор($A_1 \dots A_n$)".

Проверяется, что A_1 - название нормализатора стандартной формы и что $n > 1$. Тогда создается спецификация "тип(упростить)", "направл(второйтерм)", "оператор($A_1 \dots A_n$)". Пример:

$\forall_{abc}(c = a \vee b \rightarrow a \vee b = c)$

Спецификация - "тип(упростить)", "направл(второйтерм)", "оператор(станддн двгруппировки свертка)". Прием преобразует формулу алгебры логики к виду д.н.ф., упрощает эту д.н.ф., реализует упрощающие группировки и применяет прочие тождества свертки (например, для перехода к прочим элементарным функциям).

(b) Попытка применения нормализатора стандартной формы для упрощения выражения (характеристика "упрощединица").

Проверяется наличие характеристики "оператор(A_1)". Иогда создается спецификация, состоящая из элементов "тип(Умножение)", "направл(второйтерм)" и этой характеристики. Пример:

$\forall_{abcden}(e = a(b+c)^n + d \rightarrow a(b+c)^n + d = e)$

Спецификация - "тип(Умножение)", "направл(второйтерм)", "оператор(стандплюс)".

3. Применение нормализатора общей стандартизации.

(a) Применение нормализатора общей стандартизации для вычисления в стандартной ситуации (протокол "общнорм").

Протокол "общнорм($f(x_1 \dots x_m)$, A)" определяет условия A на контекст, при которых обработка выражения $f(x_1 \dots x_m)$ нормализатором общей стандартизации обеспечивает вычисление значения операции f.

Выбирается новая переменная y и создается теорема приема с антецедентом $y = f(x_1 \dots x_m)$ и консеквентом $f(x_1 \dots x_m) = y$. Она сопровождается спецификацией "тип(сложитьдроби)", "направл(второйтерм)", "см(A)". Пример:

По протоколу "общнорм(целаячасть(a) константа(a))" создается теорема приема $\forall_{ab}(b = [a] \rightarrow [a] = b)$, сопровождаемая спецификацией "тип(сложитьдроби)", "направл(второйтерм)", "см(константа(a))".

(b) Попытка упрощения путем общей стандартизации после перегруппировки (характеристика "перестановка").

Характеристика "перестановка" указывает на тождество перестановочного типа.

Проверяется, что консеквент имеет вид $t_1 = t_2$, где оба выражения t_1, t_2 бесповторны. В качестве r выбирается одно из них, в качестве s - другое. Если теорема имеет характеристику "нормализация(...)", то r - не заменяемое выражение. Внутри s выбирается не корневое вхождение v подтерма вида $f(x_1 \dots x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ - переменные; $n \geq 2$. Внутри r отсутствует выражение аналогичного вида, список переменных которого - надмножество данного списка переменных. Справочник "нормализатор" устанавливает существование нормализатора общей стандартизации для выражений с заголовком f. Выбирается новая переменная y, и составляется список S антецедентов теоремы, к которым добавлено равенство $y = f(x_1 \dots x_n)$. Определяется результат R замены в терме s вхождения v на y. Затем формируется теорема приема - импликация с антецедентами S, у которой консеквентом служит равенство r и R. Создается спецификация "тип(разложитьнамножители)", "направл(второйтерм)", "переменная(y)". Пример:

По теореме

$$\forall_{bef}(b - \mathrm{set}\ \&\ e - \mathrm{set}\ \&\ f - \mathrm{set}\ \&\ b \subseteq e \rightarrow b \cup (e \setminus f) = e \setminus (f \setminus b))$$

создается теорема приема

$$\forall_{befa}(b - \mathrm{set}\ \&\ e - \mathrm{set}\ \&\ f - \mathrm{set}\ \&\ b \subseteq e\ \&\ a = f \setminus b \rightarrow b \cup (e \setminus f) = e \setminus a)$$

Правая часть нового антецедента будет обрабатываться нормализатором общей стандартизации. Если это приведет к упрощению, состоится замена.

(c) Попытка упрощения путем общей стандартизации после перегруппировки (характеристика "группировки").

Характеристика "группировки" означает, что теорема представляет собой тождество либо эквивалентность, обе части которой - элементарные бесповторные термы, имеющие одно и то же множество переменных.

Проверяется, что теорема - тождество. Внутри одной из его частей выбирается вхождение двуместной операции $f(x, y)$, где x, y - переменные. Создается новая теорема, полученная из исходной добавлением антецедента $z = f(x, y)$, где z - новая переменная, и заменой в конесеквенте подтерма $f(x, y)$ на z. Она сопровождается спецификацией "тип(разложитьнамножители)", "направл(N)", "переменная(z)". Направление - в сторону части, содержащей z. Пример:

$\forall_{befa}(b \subseteq e \ \& \ a = f \setminus b \to b \cup (e \setminus f) = e \setminus a)$

Спецификация - "тип(разложитьнамножители)", "направл(второйтерм)", "переменная(a)".

(d) Попытка исключения сложного понятия путем общей стандартизации после дистрибутивной развертки (характеристика "дистрибразвертка").

Характеристика "дистрибразвертка(N)" указывает на тождество вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, h(y, z))$, где f, h - ассоциативны и коммутативны. N - направление замены от заголовка g к заголовку f.

Выбираются новые переменные u, v и создается импликация, полученная из исходной добавлением антецедентов $u = g(x, y), v = g(x, z)$ и заменой консеквента на $g(x, h(y, z)) = f(u, v)$. Проверяется отсутствие стандартной формы с корнеыой операцией f и внутренней операцией g. Затем новая импликация сопровождается спецификацией "тип(перечислоператор)", "направл(второйтерм)", "символ(g)". Пример:

$\forall_{abdef}(a = \text{образ}(f, d) \ \& \ b = \text{образ}(f, e) \to \text{образ}(f, d \cup e) = a \cup b)$

Спецификация - "тип(перечислоператор)", "направл(второйтерм)", "символ(образ)". Правые части антецедентов обрабатываются нормализатором "нормобраз". Проверяется, что при этом символ "образ" пропадает.

4. Попытка обращения к нормализатору вычисления (характеристика "вычисление").

Характеристикой "вычисление" снабжаются квазипротоколы, использующие нормализатор вычисления. Они также имеют характеристику "оператор(A)".

Создается спецификация "тип(9)", "направл(второйтерм)", "оператор(A)". Пример:

$\forall_{abcf}(a = \lim_{x \to b \setminus c} f(x) \to \lim_{x \to b \setminus c} f(x) = a)$

Спецификация - "тип(9)", "направл(второйтерм)", "оператор(нормпредел)". Прием обращается к нормализатору "нормпредел" для вычисления предела.

5. Попытка применения нормализатора, подготавливающего возможность упрощения (характеристика "упрощминус").

Характеристикой "упрощминус" снабжаются тождества, использующие пакетный нормализатор для подготовки упрощения. Они также имеют характеристику "оператор(A)".

Создается спецификация "тип(удалениепримечпосылки)", "направл(второйтерм)", "оператор(A)". Пример:

$\forall_{bce}(e = b + c \to \sqrt{b+c} = \sqrt{e})$

Спецификация - "тип(удалениепримечпосылки)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)".

6. Попытка применения нормализатора, подготавливающего возможность упрощения (протокол "степень").

   Протокол "степень(f g n)" указывает, что для ассоциативной операции f введена двуместная операция g типа "степени". n - номер операнда, соответствующего показателю степени.

   Справочник "нормзаголовок" определяет по символу f нормализатор Q приведения к заголовку f. Справочник "упрощзнак" находит заголовок P упрощенной версии нормализатора Q. Затем по фиксированному шаблону создается теорема приема, сопровождаемая спецификацией "тип(удалениепримечпосылки)", "направл(второйтерм)", "см(короче(d фикс(0 1 1))", "оператор(P)". Пример:

   По протоколу "степень(умножение степень 2)" создается теорема приема:

   $\forall_{abcdn}(a + b = cd \to (a+b)c^n = c^{n+1}d)$

   Спецификация - "тип(удалениепримечпосылки)", "направл(второйтерм)", "оператор(факторизация)".

Сближение подвыражений задачи

1. Задачи на преобразование.

   (a) Выбор более короткой версии стандартизируемого операнда, уже имеющейся в условии задачи на преобразование (характеристика "стандлогарифм").

   Характеристика "стандлогарифм(a b N)" указывает на тождество для варьирования стандартизируемого операнда. a, b - выражения для исходной и новой версий этого операнда. N - направление замены. Напомним, что стандартизируемый операнд некоторой операции f - такой ее операнд, что большинство тождеств для f предполагает совпадение этих операндов в заменяемой части. Например, таким операндом является основание логарифма.

   Проверяется, что a, b - переменные и что у теоремы нет характеристики "группировки". Тогда создается спецификация "тип(алгебрпересечение)", "направл(N)", "внутрзамена(a, b)". Пример:

   $\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ a - \text{число} \to \log_a b / \log_a c = \log_c b)$

   Спецификация - "тип(алгебрпересечение)", "направл(первыйтерм)", "внутрзамена(c, a)".

(b) Если две версии стандартизируемого операнда имеют равную длину и оба выражения входят в условие задачи на преобразование, то выбирается лексикографически предшествующее (характеристика "стандлогарифм").

Проверяется, что a, b - переменные и что заголовок f заменяемого терма t встречается в заменяющей части лишь один раз - как заголовок некоторого подтерма t'. Тогда создается спецификация "тип(вставкафильтра)", "направл(N)", "исключение t", "терм t'". Пример:

$\forall_{ab}(\neg(a-1=0) \to \log_b a = 1/\log_a b)$

Спецификация - "тип(вставкафильтра)", "направл(второйтерм)", "исключение $\log_b a$", "терм $\log_a b$".

(c) Переход в задаче на преобразование к уже имевшимся подтермам (характеристика "группировки").

Проверяется, что тождество не имеет характеристики "нормализация(...)". Рассматривается его левая часть t_1 и правая часть t_2. Проверяется, что терм t_2 не содержит символа "вариант"и что он получается из t_1 переобозначением переменных без их отождествлений. Внутри t_1 имеется единственный подтерм r максимальной сложности. Внутри t_2 выделяется подтерм максимальной сложности s. Создается спецификация "тип(поглощается)", "направл(второйтерм)", "исключение(r)", "терм(s)". Пример:

$\forall_{abcde}(0 < e \to e^{c \log_d a/b} = a^{c \log_d e/b})$

Спецификация - "тип(поглощается)", "направл(второйтерм)", "исключение($\log_d a$)", "терм($\log_d e$)".

(d) Переход в задаче на преобразование к уже имевшимся подтермам (характеристика "свертка").

Характеристика "свертка(N)" означает, что тождество обеспечивает переход к сокращенной записи.

Проверяется, что теорема не имеет характеристик "нормализация(...)" и "дистрибразвертка(...)". Рассматриваются заменяемый терм t_1 и заменяющий терм t_2. Проверяется, что самый сложный подтерм терма t_2 - он сам и что терм t_1 не содержит символа "вариант". Находятся все самые сложные подтермы $r_1, \ldots, r_m$ терма t_1. Создается спецификация "тип(поглощается)", "направл(M)", "исключение(t_2)", "терм($r_1 \ldots r_m$)". Здесь M - направление, противоположное N. Пример:

$\forall_{abc}(\neg(a-1=0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \to \log_a b/\log_a c = \log_c b)$

Спецификация - "тип(поглощается)", "направл(первыйтерм)", "исключение($\log_c b$)", "терм($\log_a b, \log_a c$)".

2. Задачи на описание.

(a) Переход в задаче на описание к подвыражению с неизвестными, уже имеющемуся в текущем условии.

i. Выбор лучшей версии стандартизируемого операнда, уже имеющейся в условии задачи на описание (характеристика "стандлогарифм").

Характеристика "стандлогарифм($r\ s\ N$)" указывает на тождество для варьирования стандартизируемого операнда. Здесь r, s - выражения для исходной и новой версий этого операнда; N - направление замены.

Проверяется, что r, s - переменные и что заголовок p заменяемого выражения имеет однократное вхождение в заменяющее выражение - как подтерм t вида $p(\ldots)$. Создается спецификация "тип(видмногочлена)", "направл(N)", "внутрзамена(r, s)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ab}(\neg(a-1=0) \to \log_b a = 1/\log_a b)$

Спецификация - "тип(видмногочлена)", "направл(N)", "внутрзамена(b, a)", "терм($\log_a b$)".

ii. Заключение всех вхождений неизвестных в условие задачи на описание внутри вхождений одного и того же подвыражения (характеристика "свертка").

Проверяется, что теорема не имеет характеристик "нормализация(...)" и "группмножитель(...)", причем в ее заменяемом выражении нет символа "вариант". Проверяется, что наиболее сложный подтерм заменяющего терма t - он сам и что заменяемый подтерм имеет единственный подтерм s наибольшей сложности. Создается спецификация "тип(наборантецедентов)", "направл(M)", "исключение(t)", "терм(s)". Здесь M - направление, противоположное направлению свертки. Пример:

$\forall_{ab}(\operatorname{arctg} a = \operatorname{Sg}(a) \arccos(1/\sqrt{a^2+1}))$

Спецификация - "тип(наборантецедентов)", "направл(второйтерм)", "исключение($\operatorname{arctg}(a)$)", "терм($\arccos(1/\sqrt{a^2+1})$)".

(b) Сведение неизвестного унифицируемого аргумента к другим уже имеющимся в задаче неизвестным унифицируемым аргументам.

i. Сведение неизвестного унифицируемого аргумента к другим уже имеющимся в задаче неизвестным унифицируемым аргументам (характеристика "сокращ").

Характеристика "сокращ(N)" означает, что тождество упрощает выражение под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей либо равной сложности.

Для некоторых групп одноместных операций целесообразен переход к общему аргументу (например, в тригонометрии). Аргументы таких операций называются унифицируемыми.

Проверяется, что оценки сложности заменяемого и заменяющего термов совпадают. По заголовку заменяемого терма справочник "тригаргумент" определяет тройку (S, p, T), где S - список одноместных операций, для которых целесообразна унификация аргументов, p - либо 0, либо заголовок одноместной операции, допускающей вынесение из-под операций списка S, T - заголовок идентифицирующего терма

ГЕНОЛОГа, перечисляющего унифицируемые аргументы данного типа (например, в тригонометрии - "тригаргумент"). Проверяется, что каждое самое сложное подвыражение заменяющего терма имеет своим заголовком спимвол одноместной операции с унифицируемым аргументом. Проверяется также, что аргумент заменяемого терма не является аргументом какого-либо из самых сложных подвыражений заменяющего. Тогда создается спецификация "тип(эквивалентность)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{ab}(\neg(\cos a = 0)\ \&\ \neg(\cos b = 0) \to \operatorname{tg}(a+b) = (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)/(1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b))$$

ii. Выражение одного неизвестного унифицируемого аргумента через другой в уравнении, не имеющем прочих неизвестных унифицируемых аргументов (характеристика "тригнеизв").

Характеристика "тригнеизв" означает, что тождество выражает один неизвестный унифицируемый аргумент через другой.

Создается спецификация "тип(областьроста)", "направл(второйтерм)". Пример:

$$\forall_{axy}(x + y = a \to \sin x = \sin a \cos y - \cos a \sin y)$$

Оба аргумента x, y не известны и уже встречаются в задаче, причем их сумма не содержит неизвестных.

(c) Преобразование двух неизвестных унифицируемых аргументов, приводящее к единственному неизвестному унифицируемому аргументу (характеристика "тригаргумент").

Характеристика "тригаргумент(N)" указывает на тождество, преобразующее терм с двумя операциями от переменных, представляющих собой унифицируемые аргументы, в терм, имеющий два новых выражения с унифицируемыми аргументами, отличающимися от исходных. N - направление замены.

По заголовку заменяемого терма справочник "тригаргумент" определяет тройку (S, p, T), где S - список одноместных операций, для которых целесообразна унификация аргументов, p - либо 0, либо заголовок одноместной операции, допускающей вынесение из-под операций списка S, T - заголовок идентифицирующего терма ГЕНОЛОГа, перечисляющего унифицируемые аргументы данного типа. В заменяющем терме имеется ровно два вхождения подтермов t_1, t_2 с заголовком из списка S. Выбираются новые переменные x_1, x_2 и создается импликация, антецеденты которой получаются из антецедентов исходной теоремы добавлением равенств $x_1 = t_1, x_2 = t_2$, а консеквент - равенство заменяемого терма исходной теоремы результату замены в заменяющем ее терме подтермов t_1, t_2 на переменные x_1, x_2. Эта импликация сопровождается спецификацией "тип(нормистина)", "направл(второйтерм)". Пример:

$$\forall_{abcd}(c = \sin(a - b)\ \&\ d = \sin(a + b) \to \sin a \cos b = (c + d)/2)$$

Оба выражения a, b содержат неизвестные, а хотя бы одно из выражений c, d - не содержит.

(d) Переход к известному подвыражению, уже имеющемуся в задаче на описание (характеристика "свертка").

Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "нормализация", "группмножитель". Проверяется, что заменяющий терм имеет единственный подтерм t максимальной сложности, а заменяемый - не менее двух подтермов той же сложности. Создается спецификация "тип(измпрог)", "направл(N)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{cd}(0 \leq \sin d \ \& \ 0 \leq \cos d \rightarrow (\sin d)^c(\cos d)^c = (\sin(2d))^c/2^c)$

Спецификация - "тип(измпрог)", "направл(второйтерм)", "терм($\sin(2d)$)".

(e) Выбор более короткой версии стандартизируемого операнда известного подтерма, уже имеющейся в условии задачи на описание (характеристика "стандлогарифм").

Характеристика "стандлогарифм($r\ s\ N$)" указывает на тождество для варьирования стандартизируемого операнда. Здесь r, s - выражения для исходной и новой версий этого операнда; N - направление замены.

Проверяется, что заменяющий терм имеет единственный подтерм t, заголовок которого совпадает с заголовком заменяемого терма. Создается спецификация "тип(фильтрмножителей)", "направл(N)", "внутрзамена(r, s)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ab}(\neg(a - 1 = 0) \rightarrow \log_b a = 1/\log_a b)$

Спецификация - "тип(фильтрмножителей)", "направл(N)", "внутрзамена(b, a)", "терм($\log_a b$)".

(f) Отождествление стандартизируемых операндов неизвестных подвыражений условия задачи на описание (характеристика "стандлогарифм").

Характеристика "стандлогарифм($r\ s\ N$)" указывает на тождество для варьирования стандартизируемого операнда. Здесь r, s - выражения для исходной и новой версий этого операнда; N - направление замены.

Рассматривается заголовок f заменяемого терма. Справочник "операнд-номер" усматривает, что для выражений с заголовком f целесообразен переход к одинаковым i - м корневым операндам, и выдает тройку (i, A, B), где A - выражение $f(x_1, \ldots, x_n)$, B - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации операндов. По теореме находится i - й корневой операнд ее заменяемой части. Проверяется, что он равен r. Внутри заменяющей части находится операция g, по которой справочник "операндномер" выдает тройку (j, A', B'). Проверяется, что s равно j-му корневому операнду этой операции. Определяется результат A'' замены переменных терма A' на новые переменные. Затем находится результат C замены j-го корневого операнда терма A'' на s. Создается спецификация "тип(нормпринадлежит)", "направл(N)", "терм(C)". Пример:

$\forall_{ab}(\neg(a - 1 = 0) \rightarrow \log_b a = 1/\log_a b)$

Спецификация - "тип(нормпринадлежит)", "направл(второйтерм)", "терм(логарифм($a\ d$))".

(g) Шаг сведения условия задачи на описание к кратным вхождениям единственного неизвестного подтерма (характеристика "склейка").

Характеристика "склейка(x N)" указывает на тождество, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x к выражению с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

Проверяется, что теорема не имеет характеристики с заголовком "дистрибразвертка" либо "нормализация". Заменяющий терм имеет единственный содержащий переменную x подтерм t максимальной сложности. Его заголовок не ассоциативен, а число параметров меньше 6. Создается спецификация "тип(Источники)", "направл(N)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{abcde}(e \cdot \log_c(a^d) - e \cdot \log_c(b^d) = ed \cdot \log_c(a/b))$

Спецификация - "тип(Источники)", "направл(второйтерм)", "терм($\log_c(a/b)$)".

(h) Варьирование неизвестного подвыражения условия задачи на описание, отождествляющее его с версией, необходимой по о.д.з. другого вхождения в условие (характеристика "варьир").

Характеристика "варьир(N, t, r)" указывает на тождество для варьирования сложного терма. N - направление замены, t - исходная версия терма, r - новая версия.

Проверяется совпадение заголовков термов t и r, а также совпадение множеств их параметров. Процедура "сравнтермов" находит в каждом из термов t, r такие наименьшие подтермы p, q, что t, r отличаются только внутри них. Проверяется, что список S_1 параметров терма p такой же, как у терма q. Проверяется непустота списка S_2 параметров терма t, не входящих в S_1. Проверяется, что переменные списка S_1 встречаются в t, r только внутри p, q. Справочник поиска теорем "смодз" находит по заголовку f термов t, r протокол "одз($f(x_1 \ldots x_n), A$)", у которого утверждение A указывает о.д.з. для $f(x_1, \ldots, x_n)$. Определяется набор B_1 антецедентов теоремы, параметры которых включаются в список S_1. Определяются подстановка σ_1, переводящая $f(x_1 \ldots x_n)$ в r, а также подстановка σ_2, переводящая тот же терм в t. Создается набор B_2, получаемый добавлением к B_1 результатов применения σ_1 к конъюнктивным членам терма A и отрицания результата применения σ_2 к A. Решается задача на описание с условиями B_2 и несущественными неизвестными S_1. На нее получается ответ R, отличный от символов "отказ" и "ложь". Составляется конъюнкция K тех конъюнктивных членов утверждения R, которые не взодят в о.д.з. терма r. Выбирается список S_3 не входящих в текущую теорему переменных, имеющий такую же длину, что и список S_2. Находятся результаты t', K' замены в t, K переменных S_2 на S_3. Затем создается спецификация "тип(опредпеременная)", "направл(N)", "терм(t', K')". Пример:

$\forall_{ab}(b - \mathrm{rational}\ \&\ \neg(\text{числитель}(b) - \mathrm{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \mathrm{even}) \to a^b = -(-a)^b)$

Спецификация - "тип(опредпеременная)", "направл(второйтерм)", "терм($(-a)^c$, $\neg(\mathrm{rational}(c)) \vee \mathrm{even}(\text{знаменатель}(c)))$". Соответствующи прием усматривает наличие степени с основанием $-a$, о.д.з. которой требует неотрицательности основания, и преобразует прочие степени a в степени $-a$.

3. Задачи на доказательство.

   (a) Выражение атомарного объекта условия задачи на доказательство через другие атомарные объекты, хотя бы один из которых уже имеется в условии.

      i. Выражение атомарного объекта условия задачи на доказательство через другие атомарные объекты, хотя бы один из которых уже имеется в условии (характеристика "Атомарное").

      Характеристика "Атомарное(a)" указывает на тождество для атомарных выражений типа a.

      Находится список S всех атмарных выражений типа a, встречающихся в консеквенте. Проверяется, что это консеквент - равенство, в одной части которого находится некоторое выражение t списка S, а другая часть не содержит t, но содержаит какое-то выражение списка S. Создается спецификация "тип(связка)", "направл(N)", причем направление замены N выбирается так, чтобы терм t оказался заменяемым. Пример:

      $\forall_{ABC}(\text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$

      Спецификация - "тип(связка)", "направл(первыйтерм)".

      ii. Выражение атомарного объекта условия задачи на доказательство через другие атомарные объекты, уже имеющиеся в этом условии (характеристика "Атомарное").

      Отличие от предыдущего пункта заключается лишь в том, что создается спецификация с типом приема "связприставка". Пример - тот же.

   (b) Преобразование подвыражения условия задачи на доказательство, приводящее к подвыражению посылки (характеристика "варьир").

   Характеристика "варьир(N, t, r)" указывает на тождество для варьирования сложного терма. N - направление замены, t - исходная версия терма, r - новая версия.

   Проверяется отсутствие характеристики с заголовком "сокращ", и создается спецификация "тип(нижняягрань)", "направл(N)", "терм(r)". Пример:

   $\forall_{abfn}(\text{обратим}(b, f)$ & n – натуральное $\to \text{алгстепень}(f(b, a), f, n) = f(b,$ $\text{алгстепень}(f(a, b), f, n), \text{обрэлемент}(b, f)))$

   Спецификация - "тип(нижняягрань)", "направл(второйтерм)", "терм(алгстепень($f(a, b), f, n$))".

4. Выбор версии нейтральной стандартизации по уже имевшемуся в посылках выражению (характеристика "Атомарное").

По характеристике "Атомарное(a)" находится список S всех атмарных выражений типа a, встречающихся в консеквенте. Проверяется, что это консеквент

- равенство, в одной части которого находится некоторое выражение t списка S, а в другой части A расположено единственное выражение r списка S. Длины и списки параметроы выражений r, t совпадают. Все свободные вхождения переменных части A заключены внутри r. Создается спецификация "тип(нормвычет)", "направл(N)", "терм(r)". Здесь направление замены выбирается так, чтобы t оказалось заменяемой частью. Пример:

$\forall_{AB}(-(\text{вектор}(AB)) = \text{вектор}(BA))$

Спецификация - "тип(нормвычет)", "направл(первыйтерм)", "терм(вектор(AB))".

5. Варьирование выражения для получения повторного вхожддения (характеристика "варьир").

   Характеристика "варьир(N, t, r)" указывает на тождество для варьирования сложного терма. N - направление замены, t - исходная версия терма, r - новая версия.

   Проверяется, что отсутствует характеристика с заголовком "сокращ", и создается спецификация "тип(текстгитра)", "направл(N)", "терм(r)". Пример:

   $\forall_{abc}(\log_{a/b} c = -\log_{b/a} c)$

   Спецификация - "тип(текстгитра)", "направл(второйтерм)", "терм($\log_{b/a} c$)".

6. Варьирование выражения для получения повторного вхождения (характеристика "исклтерм").

   Характеристика "исклтерм(A N)" означает, что тождество заменяет сложное выражение на выражение меньшей сложности, имеющее единственное подвыражение A наибольшей сложности. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(текстгитра)", "направл(N)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{ABfc}(\text{Val}(f) = A \ \& \ B = A \setminus \{c\} \to \text{прообраз}(f, B) = \text{Dom}(f) \setminus \text{слой}(f, c))$

   Спецификация - "тип(текстгитра)", "направл(второйтерм)", "терм(слой(f, c))".

Сокращенная переформулировка

1. Сокращенная переформулировка выражений при завершающем редактировании (характеристика "свертка").

   Характеристика "свертка(N)" означает, что тождество обеспечивает переход к сокращенной записи.

   Проверяется, что нет характеристики с заголовком "группмножитель" и что теорема не имела обобщения по характеристике "свертка". Тогда создается спецификация "тип(левпозиция)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{aeg}(\text{прообраз}(g, a) \cap \text{прообраз}(g, e) = \text{прообраз}(g, a \cap e))$

2. Попытка варьирования выражения для сокращенной переформулировки при завершающем редактировании (характеристика "вароценка").

   Характеристика "вароценка(N)" указывает на тождество для варьирования стандартного выражения.

   Создается спецификация "тип(правсосед)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcpq}(\neg(\text{скалумнож}(a,c)=0)\ \&\ \text{скалумнож}(b,c)=0\rightarrow p\cdot\text{вектумнож}(b,c)+qc=$ $(p\cdot\text{скалумнож}(c,c)/\text{скалумнож}(a,c))\cdot\text{вектумнож}(b,a)+$ $(q-\text{скалумнож}(a,\text{вектумнож}(c,b))p/\text{скалумнож}(a,c))\cdot c)$

   Спецификация - "тип(правсосед)", "направл(второйтерм)". Вектор a идентифицируется как операнд скалярного либо векторного произведения внутри q. Проверяется, что преобразование приводит к упрощению исходного выражения.

3. Группировка относительно сложного подвыражения на завершающем этапе редактирования ответа задачи на вычисление (характеристика "склейка").

   Характеристика "склейка(x N)" указывает на тождество, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x к выражению с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

   Проверяется, что теорема не имеет характеристики "дистрибразвертка". Оценки сложности заменяемого и заменяющего термов равны. Заменяющий терм бесповторный. Каждая свободная переменная заменяемого терма, кроме переменной x, имеет в нем единственное вхождение. Создается спецификация "тип(удалениепосылки)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(ac+bc=(a+b)c)$

   Спецификация - "тип(удалениепосылки)", "направл(второйтерм)". Прием проверяет, что оценка сложности выражения c достаточно высока и больше оценок сложности a,b.

4. Свертка, позволяющая сгруппировать новый терм со старым (характеристика "свертки").

   Характеристика "свертки(N)" указывает на тождество, позволяющее сгруппировать новый терм со старым.

   Создается спецификация "тип(вещественнаячасть)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcdepq}(b-\text{натуральное}\ \&\ c-\text{натуральное}\ \&\ q-\text{натуральное}\ \&\ p=\min(b,c)\rightarrow$ $d(\sin a)^b(\operatorname{tg} a)^q/(\cos a)^c e=(\operatorname{tg} a)^{p+q}(\sin a)^{b-p}d/((\cos a)^{c-p}e))$

   Спецификация - "тип(вещественнаячасть)", "направл(второйтерм)". Происходит группировка тангенсов.

5. Корневая свертка условия задачи на преобразование (характеристика "свертка").

   Характеристика "свертка(N)" означает, что тождество обеспечивает переход к сокращенной записи.

   Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "нормализация", "группмножитель". Затем создается спецификация "тип(внешоперанд)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcd}(c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to a(\sin b)^c/(d(\cos b)^c) = a(\operatorname{tg} b)^c/d)$

   Спецификация - "тип(внешоперанд)", "направл(второйтерм)". Если преобразуемое выражение - корневое и нет оснований предполагать, что синус и косинус смогут как-то "взаимодействовать" с другими частями условия, то свертка в тангенс не помешает дальнейшим действиям.

6. Группировка уникальных известных подвыражений посылки (характеристика "склейка").

   Характеристика "склейка(x N)" указывает на тождество, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x к выражению с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

   Проверяется, что сложности заменяемого и заменяющего термов равны, причем заменяемый терм имеет не менее двух подтермов максимальной сложности. Эти подтермы имеют единственную переменную x. Заменяемый терм имеет единственный подтерм максимальной сложности. Он бесповторный и содержит единственную переменную x. Создается спецификация "тип(Бинарнаяоперация)", "направл(N)", "терм(t_1)", ..., "терм(t_n)", где $t_1, \ldots, t_n$ - самые сложные подтермы заменяемого терма. Пример:

   $\forall_{abc}((\sin a)^b(\cos a)^b = (\sin(2a))^b/2^b)$

   Спецификация - "тип(Бинарнаяоперация)", "направл(второйтерм)", "терм($\sin a$)", "терм($\cos a$)".

7. Группировка всех вхождений унифицируемого аргумента в условие задачи на преобразование (характеристика "склейка").

   Проверяется, что заменяемый терм имеет не менее двух подтермов максимальной сложности. Составляется список $t_1, \ldots, t_n$ этих подтермов. При помощи справочника "тригаргумент" по заголовку терма t_1 определяется список $s_1, \ldots,$ s_m одноместных операций, для которых целесообразна унификация их аргументов. Проверяется, что все термы t_i имеют заголовки только из этого списка и что заменяющий терм имеет единственное вхождение символа из него. Создается спецификация "тип(Простоеотношение)", "направл(N)", "символ(S)", "терм(r_1)", ..., "терм(r_n)". Здесь S - заголовок идентифицирующего терма ГЕНОЛОГа, усматривающего унифицируемые аргументы данного типа; r_i - корневые операнды термов t_i (т.е. сами унифицируемые аргументы). Пример:

$\forall_{abcdef}(\neg(d - d\,\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b = 0)\ \&\ \neg(\cos a = 0)\ \&\ \neg(\cos b = 0) \to$
$e(\mathrm{tg}\,a + \mathrm{tg}\,b)^c/(f(d - d\,\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b)^c) = e(\mathrm{tg}(a + b))^c/(fd^c))$

Спецификация - "тип(Простоеотношение)", "направл(второйтерм)", "символ(тригаргумент)", "терм(a)", "терм(b)". Соответствующий прием проверяет, что других вхождений в условие задачи тригонометрических аргументов нет.

8. Свертка чрезмерно длинных условий задачи на преобразование (характеристика "свертка").

   Характеристика "свертка(N)" означает, что тождество обеспечивает переход к сокращенной записи.

   Проверяется, что теорема имеет характеристику с заголовком "дистрибразвертка" и не имеет характеристик с заголовками "нормализация", "группмножитель". Проверяется, что теорема не была обобщена по характтеристике "свертка". Создается спецификация "тип(внешзнаменатель)", "направл(N)", "число(100)". Пример:

   $\forall_{abc}(a/b + c/b = (a + c)/b)$

   Заметим, что надобность в специальном приеме сложения дробных выражений с одинаковыми знаменателями может возникнуть лишь там, где не работают общие приемы, предпринимающие попытку достичь упрощения путем сложения дробных выражений. Однако, в таких ситуациях и данный прием, как оказалось, требует достаточно сильных ограничений.

9. Свертка константного выражения (характеристика "свертка").

   Проверяется, что в заменяемом выражении нет символа "вариант" и что теорема не была обобщена по характеристике "свертка". Создается спецификация "тип(префикс)", "направл(N)". Если теорема имеет характеристику "замещение(M)", где $M \neq N$, то добавляется элемент "указатель(модификатор)". Напомним, что характеристика "замещение" указывает на тождество стандартизирующей разгруппировки для ассоциативно-коммутативных операций. Пример:

   $\forall_{abc}(a/b + c/b = (a + c)/b)$

   Спецификация - "тип(префикс)", "направл(второйтерм)".

Выражения с неизвестными

1. Группировка относительно выражения с неизвестными (характеристика "склейка").

   Характеристика "склейка($x\ N$)" указывает на тождество, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x к выражению с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

   Находится список $x_1, \ldots, x_k$ всех переменных, выделенных характеристикой "склейка($x_i\ N$)" (при заданном N). Проверяется, что глубина вхождения любой из них в заменяющий терм меньше глубины ее вхождения в заменяемый. Проверяется, что заменяющий терм не имеет унифициуемых аргументов, содержащих одну из данных переменных. Тогда создается спецификация "тип(нормнеизв)", "направл(N)", "неизвестные($x_1 \dots x_k$)". Пример:

$\forall_{abc}(0 \leq a \ \& \ 0 < b \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

Спецификация - "тип(нормнеизв)", "направл(первыйтерм)", "неизвестные(c)".

2. Группировка в одном подвыражении всех неизвестных условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование (характеристика "склейка").

   Проверяется, что для заданного направления N характеристика "склейка(x N)" - единственная и что отсутствует характеристика с заголовком "дистрибразвертка". Проверяется, что заменяющий терм имеет унифицируемый аргумент с переменной x. Тогда создается спецификация "тип(путьвоглавлении)", "направл(N)", "терм(x)". Пример:

   $\forall_{ab}(a \sin b + a \cos b = \sqrt{2} \sin(b + \pi/4))$

   Спецификация - "тип(путьвоглавлении)", "направл(второйтерм)", "терм(b)". Соответствующий прием проверяет, что все неизвестные текущего условия задачи заключены в преобразуемой сумме.

3. Группировка относительно заданного сложного выражения с неизвестными в корневом операнде условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование (характеристика "нормгрупп").

   Характеристика "нормгрупп(F N)" указывает на тождество группировки относительно сложного выражения с неизвестной, подготавливающей возможность эквивалентного преобразования, исключающего это выражение. F - список фильтров, уточняющих контекст; N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(выводсимвола)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

   $\forall_{abcdefgh}(a = fg \ \& \ e = fh \to ab^{c/d} + eb^{c/d} = f(g + h)b^{c/d})$

   Спецификация - "тип(выводсимвола)", "направл(второйтерм)", "см(не(известно(b)) или(контекст(подтерм(равно(теквхожд x9))корень) и(тип(описать) контекст(операнд(x9 теквхожд) корень(x9) символ(x9 меньше меньшеилиравно) не(сопровождение(x9))))) меньше(оценканеизв(g)5) меньше(оценканеизв(h)5))".

4. Уменьшение глубины неизвестной (характеристика "глубина").

   Характеристика "глубина(x N)" указывает, что тождество перестановочного типа уменьшает глубину переменной x до единицы. N - направление замены.

   Проверяется отсутствие характеристики "нормализация" и создается спецификация "тип(точкаокружности)", "направл(N)", "неизвестные(x)". Пример:

   $\forall_{abcde}(0 < e \to e^{c \log_d a/b} = a^{c \log_d e/b})$

Спецификация - "тип(точкаокружности)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(a)".

5. Сведение неизвестного подвыражения условия задачи на описание к более простым неизвестным выражениям.

   (a) Сведение неизвестного подвыражения условия задачи на описание к более простым неизвестным выражениям (характеристика "сокращ").

   Характеристика "сокращ(N)" означает, что тождество упрощает выражение под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей либо равной сложности.

   Проверяется отсутствие характеристики "описатель(N)". Проверяется также, что заменяемый терм не имеет связанных переменных, а заменяющий - имеет единственный подтерм максимальной сложности. Создается спецификация "тип(записьприема)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_a(\sin|a| = \sin a \cdot \mathrm{sg}(a))$

   Спецификация - "тип(записьприема)", "направл(второйтерм)".

   (b) Сведение неизвестного подвыражения условия задачи на описание к условному выражению с более простыми альтернативными выражениями и условием (характеристика "варианты").

   Характеристика "варианты(N)" означает, что тождество преобразует корневую сложную операцию в условное выражение с более простыми операциями.

   Проверяется отсутствие характеристики с заголовком "описатель". Создается спецификация "тип(трапеция)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(\max(a,b) = (a \text{ при } 0 \leq a-b, \text{ иначе } b))$

   Спецификация - "тип(трапеция)", "направл(второйтерм)".

   (c) Сведение неизвестного подвыражения условия задачи на описание, имеющей несколько неизвестных, к более простым неизвестным выражениям, хотя бы одно из которых уже встречалось в задаче (характеристика "упрощение").

   Характеристика "упрощение(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам.

   Проверяется, что теорема не имеет характеристики "описатель(N)" и что оценка сложности заменяемого терма больше оценки сложности заменяющего. Составляется непустой список $t_1, \ldots, t_m$ не входящих в заменяемый терм подтермов заменяющего терма, имеющих максимальную сложность в нем и не связанных в этом подтерме кванторами либо описателями. Создается спецификация "тип(радиус)", "направл(N)", "терм(t_1)", ..., "терм(t_m)". Пример:

   $\forall_a(\mathrm{tg}\, a = \sin a / \cos a)$

   Спецификация - "тип(радиус)", "направл(второйтерм)", "терм($\sin a$)", "терм($\cos a$)".

(d) Упрощение неизвестного подвыражения условия задачи на описание с помощью другого уравнения этой задачи (характеристика "упростить").

Характеристика "упростить(N t)" указывает на тождество, исключающее сложную операцию над неизвестным выражением с помощью равенства из посылок. N - направление замены, t - результирующий неизвестный подтерм.

Создается спецификация "тип(вхождениепосылки)", "направл(N)", "неизв(t)". Пример:

$$\forall_{abcdepq}(\neg(c = 0)\ \&\ e - d + bc = mp^2\ \&\ ac + d = e \rightarrow \sqrt{a+b} = \sqrt{m/c}|p|)$$

Спецификация - "тип(вхождениепосылки)", "направл(второйтерм)", "неизв(p)". Заметим, что по умолчанию непосредственно идентифицируемым в данной ситуации считается последний антецедент.

(e) Декомпозиция неизвестного подвыражения в условии задачи на описание (характеристика "декомпозиция").

Характеристика "декомпозиция(N)" указывает на тождество для декомпозиции выражения со сложным заголовком.

Проверяется, что заменяемый терм имеет единственный корневой операнд. Создается спецификация "тип(схемавариантов)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{ab}(\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

Спецификация - "тип(схемавариантов)", "направл(второйтерм)".

6. Использование равенств из посылок для определения неизвестного выражения (характеристика "опрнеизв").

Характеристика "опрнеизв($i_1 \ldots i_n$)" указывает на тождество, позволяющее определить значение неизвестного выражения с помощью равенств из посылок. $i_1, \ldots, i_n$ - список номеров антецедентов, идентифицируемых с посылками.

Создается спецификация "тип(вставка)", "направл(второйтерм)", "антецедент($i_1 \ldots i_n$)". Пример:

$$\forall_{abcd}(\neg(d = 0)\ \&\ d|a| = c|b| \rightarrow |a/b| = c/d)$$

Спецификация - "тип(вставка)", "направл(второйтерм)", "антецедент(2)".

7. Использование равенств из посылок для определения неизвестного выражения (характеристика "сокращ").

Характеристика "сокращ(N)" означает, что тождество упрощает выражение под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей либо равной сложности.

Проверяется, что заменяемое и заменяющее выражения элементарны и бесповторны. Заменяемое выражение имеет три параметра a, b, c, а заменяющее - только два параметра b, c. Заменяемый терм имеет вид $f(a, b, c)$, где f - ассоциативная и коммутативная операция, удовлетворяющая тождеству $f(a, a) = a$.

Выбираются две новые переменные u, v. К антецедентам теоремы добавляются равенства $f(a,b) = u$ и $f(a,c) = v$, причем вхождения левых частей этих равенств в прочие антецеденты заменяются на правые. Заменяемая часть преобразуется в $f(u,v)$. Измененная теорема сопровождается спецификацией "тип(вставка)", "направл(N)". Пример:

Теорема

$\forall_{abc}(a$ – число & b – число & c – число & $\neg(\max(a,b) - \max(a,c) = 0) \to \max(b,c) = \max(a,b,c))$

преобразуется в теорему приема

$\forall_{abcde}(\neg(d - e = 0)\ \&\ \max(a,b) = d\ \&\ \max(a,c) = e \to \max(b,c) = \max(d,e))$

и сопровождается спецификацией "тип(вставка)", "направл(первыйтерм)".

8. Использование равенств из посылок для исключения неизвестных (характеристика "исключнеизв").

   Характеристика "исключнеизв($i_1 \ldots i_n$)" указывает на тождество, позволяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенств из посылок. $i_1, \ldots, i_n$ - номера антецедентоа, идентифицируемых с посылками.

   Создается спецификация "тип(кратность)", "направл(второйтерм)", "антецедент($i_1 \ldots i_n$)". Пример:

   $\forall_{abcdpqn}(\neg(c = 0)\ \&\ ac = bd \to pa^n/(qb^n) = pd^n/(qc^n))$

   Спецификация - "тип(кратность)", "направл(второйтерм)", "антецедент(2)". Прием заменяет содержащие неизвестные выражения a, b на не содержащие неизвестных c, d.

9. Стандартизация констант неизвестных подвыражений условия задачи на описание при помощи вычислений (характеристика "константы").

   Характеристика "константы(N T X)" указывает на тождество, обеспечивающее стандартизацию константных подтермов неизвестных выражений. N - направление замены; T - набор термов "типданных(A $x_1 \ldots x_n$)", уточняющих тип константных значений выражений $x_1, \ldots, x_n$; X - терм "неизвестные($y_1 \ldots y_m$)", перечисляющий переменные для неизвестных выражений.

   Создается спецификация "тип(внешняязадача)", "направл(N)", T, "неизвестная(y_1)", ..., "неизвестная(y_m)". Пример:

   $\forall_{abcde}(b = ac \to a^d b^e = a^{d+e} c^e)$

   Спефицикация - "тип(внешняязадача)", "направл(второйтерм)", "типданных(натуральное a b)", "неизвестная(d)", "неизвестная(e)".

10. Группировка относительно известного подвыражения условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование для перенесения этого подвыражения в не содержащую неизвестных часть утверждения (характеристика "дистрибразвертка").

Характеристика "дистрибразвертка(N)" указывает на тождество вида $f(g(x,y),g(x,z)) = g(x,h(y,z))$, где f,h - ассоциативны и коммутативны. N - направление замены от заголовка g к заголовку f.

Проверяется, что заголовок g заменяемой части ассоциативен и коммутативен. Выбирается переменная x, имеющая в заменяющую часть более одного вхождения. Проверяется разрешимость уравнения $g(a,b) = c$ относительно неизвестной a. Затем создается спецификация "тип(вспомпреобразование)", "направл(M)", "известно(x)". Здесь M - направление замены, противоположное N. Пример:

$\forall_{abc}(ab + ac = a(b + c))$

Спецификация - "тип(вспомпреобразование)", "направл(второйтерм)", "известно(a)".

Преобразования, подготавливающие возможность упрощения

1. Вынесение наружу одноместной операции для возможности последующего применения приема общей стандартизации (характеристика "свертка").

   Характеристика "свертка(N)" означает, что тождество обеспечивает переход к сокращенной записи.

   Проверяется, что заменяющий терм имеет вид $f(t)$, заменяемый - $g(t_1,\ldots,t_n)$, где операция g ассоциативная и коммутативная, а f - одноместная операция. Составляется список S ссылок "теорема(A_1A_2)" на все не имеющих существенных посылок теоремы базы теорем - равенств либо эквивалентностей, у которых появление символа f в заменяемой части обеспечивает либо общую стандартизацию, либо уменьшение глубины неизвестной. Затем создается спецификация "тип(ромб)", "направл(N)", S. Пример:

   $\forall_{ab}(-a - b = -(a + b))$

   Спецификация - "тип(ромб)", "направл(второйтерм)", "теорем(целое 11)", "теорема(делит 37)", ..., "теорема(Умножение 21)" - всего около сорока ссылок на теоремы. Соответствующий прием будет выносить наружу общий минус всех слагаемых лишь в тех случаях, когда он немедленно будет использован одним из приемов общей стандартизации либо уменьшения глубины неизвестной. Например, если он окажется непосредственно под синусом или косинусом, или в левой части уравнения, и т.п.

2. Преобразование, приводящее к возможности упрощения надтерма (характеристика "внешвхожд").

   Характеристика "внешвхожд(F N)" указывает на тождество, подготавливающее возможность упрощения. F - конъюнкция фильтров на контекст преобразования (создается процедурой программирующего вывода), N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(плоскоститочки)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abcdefgh}(d^2 = c^2 - a^2g^2h \;\&\; (2(-c-d) = he^2 \vee 2(-c+d) = he^2) \;\&\; fe = -2ag \;\&\; \sqrt{b} = g\sqrt{h} \to -(c + a\sqrt{b}) = (e\sqrt{h}/2 + f/2)^2)$

Спецификация - "тип(плоскоститочки)", "направл(второйтерм)", "см(контекст(подтерм(степень(теквхожд дробь(x12 умножение(2 x13)))) или(не(тип(описать)) посылка и(известно(x12) известно(x13))) единица(1 x13)) не(контекст(вид(x2 плюс(x12 умножение(x13 степень(x9 дробь(x10 x11))))) единица(0 x12) единица(1 x13) заменазнака(минус x13))) или(не(константа(x2)) константа(теквхожд)) не(контекст(вид(x2 плюс(x9 дробь(x10 x11))) заменазнака(минус x10))))". Прием создает полный квадрат под радикалом.

3. Преобразование, приводящее к возможности упрощения надтерма (характеристика "упрощение").

   Характеристика "упрощение(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам.

   Заменяемая часть теоремы имеет единственный подтерм t максимальной сложности. При помощи протоколов "сокращтеор($f\ldots$)" и "блокраздела($f\ldots$)", где f - заголовок t, выявляются случаи нецелесообразности определяемой теоремой замены. При помощи справочника поиска теорем "надоператор" просматриваются тождества T, уменьшающие оценку сложности заменяемого терма P, у которых f - заголовок одного из корневых операндов терма P, причем f - наиболее сложный после заголовка P его символ. Создается список S всевозможных термов "контекст(подтерм(A))", где A - результат замены в P указанного корневого операнда на символ "теквхожд". Эти термы определяют различные контексты, в которых переход к заголовку f мог бы позволить получить упрощение. При непустом списке S создается спецификация "тип(плоскостьточки)", "направл(M)", "см(или(S))". Здесь M - направление замены, противоположное N. Пример:

   $\forall_a(\operatorname{tg} a = \sin a / \cos a)$

   Спецификация - "тип(плоскостьточки)", "направл(первыйтерм)", "см(или(контекст(подтерм(арктангенс(теквхожд))) контекст(подтерм(арккотангенс(теквхожд)))))".

4. Попытка группировки в условии задачи на преобразование для последующего сокращения (характеристика "сокращдроби").

   Характеристикой "сокращдроби" сопровождаются группировочные тождества, подготавливающие попытку сокращения.

   Создается спецификация "тип(блокфрагментов)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{abcd}(d = a^2 - b^2 \;\&\; c - \mathrm{rational} \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(c) - \mathrm{even}) \to (a-b)^c(a+b)^c = d^c)$

5. Преобразование, подготавливающее возможность декомпозиции посылки задачи на исследование либо на доказательство (характеристика "дистрибразвертка").

Характеристика "дистрибразвертка(N)" указывает на тождество вида $f(g(x,y),g(x,z)) = g(x,h(y,z))$, где f,h - ассоциативны и коммутативны. N - направление замены от заголовка g к заголовку f.

По символу g справочник поиска теорем "разделить" находит ссылку на кванторную эквивалентность T с характеристикой "или(M)" либо "и(M)", у которой две разделяемые переменные в заменяемой части соединены операцией g. Определяются заменяемая и заменяющая части P_1, P_2 эквивалентности T согласно направлению M. Проверяется, что ни один из корневых операндов утверждения P_2 (конъюнкции либо дизъюнкции) не содержит всех переменных этой части. Определяется результат P замены вхождения подтерма с заголовком g в P_1 на символ "теквхожд". Затем создается спецификация "тип(числоконстант)", "направл(K)", "см(контекст(подтерм(P)корень))". Здесь K - направление замены, противоположное N. Пример:

$\forall_{abc}(a(b+c) = ab + ac)$

Спецификация - "тип(числоконстант)", "направл(первыйтерм)", "см(контекст(подтерм(равно(теквхожд 0))корень))".

6. Преобразование, подготавливающее возможность декомпозиции условия задачи на описание (характеристика "дистрибразвертка").

   Аналогично предыдущему пункту, но перед созданием спецификации рассматривается корневой операнд утверждения P_1 - переменная x. Затем создается спецификация "тип(сходится)", "направл(K)", "см(контекст(подтерм(P)корень)не(известно(x)))". Как и выше, K - направление замены, противоположное N. В качестве примера можно взять ту же теорему, что и выше. Создается спецификация "тип(сходится)", "направл(первыйтерм)", "см(контекст(подтерм(равно(теквхожд 0))корень)не(известно(a)))".

Константные подвыражения

1. Попытка использовать специальный оператор для стандартизации константного выражения (характеристика "Выч").

   Характеристикой "Выч(t P N)" сопровождаются тождества, позволяющие выделить константный подтерм t, для которого существует специальный упрощающий оператор P. N - направление замены.

   Справочник "вычконст" определяет по заголовку s терма t пару (заголовок процедуры, используемой для упрощения константных термов с заголовком s - набор типов константных термов для операндов операции s). Проверяется, что заголовок указанной процедуры совпадает с P. Создается конъюнкция R термов вида $Q(r)$, где r - корневой операнд терма t (переменная), Q - тип значения этой переменной согласно справочнику "вычконст". Выбирается новая переменная x, к антецедентам теоремы добавляется равенство $x = t$, а в ее заменяющей части t заменяется на x. Измененная таким образом теорема сопровождается спецификацией "тип(переучет)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)", "см(R)". Пример:

Теорема $\forall_{abpq}(a$ – число & b – число & p – число & q – число & $\neg(q = 0)$ & $\neg(b = 0) \to ap/(bq) = (a/b)p/q)$

преобразуется в теорему приема:

$\forall_{abcpq}(c = a/b \to ap/(bq) = cp/q)$

и сопровождается спецификацией "тип(переучет)", "оператор(сокращдроби)", "направл(второйтерм)", "см(и(десчисло(a)десчисло(b)))".

2. Стандартизация с помощью вычислений (характеристика "вычпрог").

   Характеристикой "вычпрог(N F T)" снабжаются тождества либо эквивалентности, которые в случае применения в направлении N обеспечивают упрощение относительно констант, использующее вычисления ГЕНОЛОГа. F - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (обычно - типы константных значений переменных), T список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем непосредственных вычислений.

   Как и в предыдущем пункте, для подвыражений t списка T вводятся обозначающие их новые переменные x, и равенства $x = t$ добавляются в начало списка антецедентов теоремы. В заменяющей ее части выражения t заменяются на переменные x. Измененная теорема сопровождается спецификацией "тип(исключприем)", "направл(второйтерм)", "см(F)". Отличие от предыдущего пункта заключается в том, что вместо обработки константных подтермов специальными операторами используются стандартные вычисления ГЕНОЛОГа: добавленные к антецедентам равенства выделяются указателем "программа". Пример:

   $\forall_{abcdef}(f = bc \;\&\; d = ac + be \to a/b + e/c = d/f)$

   Спецификация - "тип(исключприем)", "направл(второйтерм)", "см(десчисло(b) десчисло(e) десчисло(a) десчисло(c))".

3. Стандартизация с помощью вычислений (протокол "вычпрог").

   Протокол "вычпрог($f(x_1 \dots x_n), P_1(x_1), \dots, P_n(x_n)$)" указывает на существование поддерживаемой компилятором ГЕНОЛОГа программы, вычисляющей значение операции f, если переменные $x_1, \dots, x_n$ имеют типы $P_1, \dots, P_n$.

   Выбирается новая переменная y и создается импликация, имеющая антецедент $f(x_1 \dots x_n) = y$ и такой же консеквент. Создается спецификация "тип(исключприем)", "направл(второйтерм)", S, где S - набор элементов "типданных($P_j, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$)", указывающих типы значения переменных. Каждый элемент объединяет все переменные с заданным типом значения P_j. Пример:

   $\forall_{abc}(a + b = c \to a + b = c)$

   Спецификация - "тип(исключприем)", "направл(второйтерм)", "типданных(десчисло a b)".

4. Стандартизация ответа с помощью приближенных вычислений (характеристика "вычисл").

   Характеристика "вычисл(N)" указывает на тождество, использующее приближенное вычисление для константных подтермов.

   Создается протокол "тип(непрерывно)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcpq}(c = a/b \to ap/bq = cp/q)$

   Спецификация - "тип(непрерывно)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием имеет указатель "выч(1)", определяющий обработку первого антецедента при помощи вычислений с плавающей запятой.

5. Усмотрение связи между константами, позволяющей выполнить упрощение (характеристика "Константа").

   Характеристика "Константа(N F)" указывает на тождество, в антецедентах которого проверяются с помощью непосредственных вычислений одно либо несколько соотношений для констант, причем тождество обеспечивает стандартизацию с упрощением константных подвыражений. N - направление замены, F - конъюнкция фильтров.

   Создается спецификация "тип(элементномер)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

   $\forall_{abcm}(b = 2m \ \& \ cm^2 + 1 = a \to \sqrt{a - b\sqrt{c}} = |m\sqrt{c} - 1|)$

   Спецификация - "тип(элементномер)", "направл(второйтерм)", "см(целое(a) целое(b) целое(c))".

6. Упрощение с помощью проверки условия на константные подвыражения (характеристика "констзхожд").

   Характеристика "констзхожд(N X)" указывает на упрощающее тождество, использующее проверочный оператор для усмотрения соотношения между константными подвыражениями. N - направление замены, X - список переменных, идентифицируемых с константными термами.

   Создается спецификация "тип(дробныйкоэффициент)", "направл(N)", "константа(X)". Пример:

   $\forall_{abc}(0 \leq a - b \to \max(a + c, b + c) = a + c)$

   Спецификация - "тип(дробныйкоэффициент)", "направл(второйтерм)", "константа(a, b)".

7. Группировка константных подвыражений, обеспечивающая упрощение с помощью нормализаторов общей стандартизации (характеристика "нормконст").

   Характеристика "нормконст(N F)" указывает на тождество, обеспечивающее группировку константных подвыражений для упрощения с помощью нормализаторов общей стандартизации. N - направление замены, F - конъюнкция фильтров.

Создается спецификация "тип(коррекцияоткатов)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abcdpqr}((a\log_b c+d)/(p\log_b q+r)=\log_{q^p b^r}(c^a b^d))$

Спецификация - "тип(коррекцияоткатов)", "направл(второйтерм)", "см(целое(a) целое(p) целое(d) целое(r) дробнаявеличина(q) дробнаявеличина(b) дробнаявеличина(c))".

8. Стандартизирующее рекурсивное уменьшение числового параметра (характеристика "рекурсия").

   Характеристика "рекурсия(N F)" указывает на тождество, выражающее сложную операцию через ее значения на наборах, характеризующихся меньшим значением численной характеристики. N - направление замены, F - конъюнкция фильтров.

   Создается спецификация "тип(внешвхождение)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$$\forall_k(\text{числобернулли}(k)=-\sum_{p=0}^{k-1}(\text{числобернулли}(p)C_{k+1}^{p})/(k+1))$$

   Спецификация - "тип(внешвхождение)", "направл(второйтерм)", "см(натуральное(k) меньшеилиравно(10 k))". Второй фильтр обусловлен тем, что для малых значения число Бернулли определяется непосредственно.

9. Попытка варьирования константного выражения для упрощения с помощью вспомогательной задачи (характеристика "вычконст").

   Характеристика "вычконст(N F)" указывает на тождество, позволяющее проварьировать константное подвыражение к виду, для которого целесообразна попытка упрощения с помощью вспомогательной задачи. N - направление замены, F - конъюнкция фильтров.

   Создается спецификация "тип(допчертежа)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

   $\forall_{abcdep}(p=\log_a(dc^e)\to a^{b/(\log_c d+e)}=c^{b/p})$

   Спецификация - "тип(допчертежа)", "направл(второйтерм)", "см(константа(теквхожд) не(входит(логарифм p)))". Соответствующий прием обрабатывает правую часть антецедента задачей на преобразование.

10. Использование пакета продукций для вычисления операции над константными термами (характеристика "констерм").

   Характеристика "констерм(P)" указывает на тождество для вычисления константного терма с помощью пакета продукций P.

   Если теорема не имеет характеристики "приближзнач", то создается спецификация "тип(вершины)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{acmn}(m=\text{числоинверсий}(\lambda_i(a(i),c(i)))\ \&\ c\text{−функция}\to\text{числоинверсий}(\lambda_i(a(i), i\in\{1,\dots,n\}))=m)$

11. Использование пакета продукций для приближенного вычисления операции над константными термами (характеристика "констерм").

    Если теорема имеет характеристику "приближзнач", то создается спецификация "тип(инфимум)", "направл(второйтерм)". Пример:

    $\forall_{Aabmnx}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})\ \&\ \det(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})) = b \to \det(A) = b)$

12. Использование нормализатора разрешения относительно неизвестных для вычисления операции над константными термами (характеристика "уравнматр").

    Характеристикой "уравнматр(P F)" снабжаются тождества вычисления значения константного терма с помощью нормализатора уравнений. P - заголовок нормализатора, F - список указателей типов данных.

    Создается спецификация "тип(коррекцияпосылок)", "направл(второйтерм)", "нормуравн(P)", "см(F)". Если имеются матричные данные, то относящиеся к ним указатели извлекаются из F и, после некоторой обработки, заносятся в элемент "указатель(...)". Пример:

    $\forall_{Banx}((\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})x = \lambda_{ij}((1 \text{ при } i = j, \text{ иначе } 0), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\})) = (x = B) \to (\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,n\}))^{-1} = B)$

    Спецификация - "тип(коррекцияпосылок)", "направл(второйтерм)", "нормуравн(Уравнматр)", "указатель(матрица(фикс(1 1 1 1)) матрица(фикс(1 1 2)) матрица(фикс(0 1 1)))", "см(натуральное(n))". Соответствующий прием обращается к нормализатору решения системы линейных уравнений для обращения матрицы.

13. Упрощение константного подвыражения посылки с помощью вспомогательной задачи (протокол "конст").

    Протокол "конст(t F)" определяет вид t константного подвыражения посылки, для которого целесообразна попытка упрощения с помощью вспомогательной задачи. F - конъюнкция фильтров, определяющих некоторое условие на t, которое после обращения к задаче должно оказаться ложным.

    Выбирается новая переменная x и вводится импликация с антецедентом $x = t$ и консеквентом $t = x$". Определяется результат G замены всех вхождения символа "теквхожд" в F на переменную x. Введенная импликация снабжается спецификацией "тип(конъюнкциявсех)", "направл(второйтерм)", "см(F & $\neg(G)$)". Пример:

    По протоколу "конст(синус(x1) контекст(подчинено(x2 теквхожд)символ(x2 арксинус арктангенс арккотангенс арккосинус)))" создается импликация "$\forall_{ac}(c = \sin a \to \sin a = c)$", сопровождаемая спецификацией "тип(конъюнкциявсех)", "направл(второйтерм)", "см(контекст(подчинено(x2 теквхожд) символ(x2 арксинус арктангенс арккотангенс арккосинус)) не(контекст(подчинено(x2 c)символ(x2 арксинус арктангенс арккотангенс арккосинус))))". Соответствующий прием упрощает при помощи задачи на преобразование синус от выражения, содержащего обратные тригонометрические функции, и проверяет, что от них удалось избавиться.

14. Уменьшение числа неконстантных подвыражений на предварительном этапе редактирования ответа задачи на вычисление (характеристика "Конст0").

    Характеристика "Конст0($N\ t\ r$)" указывает на тождество, уменьшающее число неконстантных операндов при редактировании ответа задачи на вычисление. N - направление замены, t - устраняемый неконстантный терм, r - заменяющий константный.

    Создается спецификация "тип(заменаразряда)", "направл(N)", "конст(t, r)". Пример:

    $\forall_{abcdemnp}(m - n = p \rightarrow a^m b/c + a^n d/ea^n(a^p b/c + d/e))$

    Спецификация - "тип(заменаразряда)", "направл(второйтерм)", "конст(m, p)".

15. Преобразование константного терма, обеспечивающее вычисление его значения с помощью нормализаторов общей стандартизации (характеристика "упрощение").

    Характеристика "упрощение(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам.

    Рассматривается список самых сложных подтермов заменяющей части. Проверяется, что для каждого из них справочник "вычмн" указывает непустое множество ситуаций, в которых нормализаторы общей стандартизации позволяют вычислить константное значение данного подтерма. Тогда создается спецификация "тип(выводформулы)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{mn}(n - \text{целое}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n\ \&\ 0 \leq m - n \rightarrow C_m^n = m!/(n! \cdot (m - n)!))$

    Спецификация - "тип(выводформулы)", "направл(второйтерм)".

Числовые атомы

1. Выражение числового атома через численные параметры.

    (a) Выражение числового атома через численные параметры с помощью обращения к синтезатору (характеристика "значмн").

    Характеристика "значмн" указывает на тождество, определяющее значение числового атома с помощью обращения к пакетному синтезатору.

    Создается спецификация "тип(стандформа)", "направл(второйтерм)". Пример:

    $\forall_{ax}(\text{вычислениеплощади}(x, a) \rightarrow S(\text{фигура}(x)) = a)$

    Синтезатор "вычислениеплощади" определяет площадь фигуры путем разбиения ее на простейшие подфигуры.

(b) Выражение числового атома через численные параметры с помощью обращений к нормализаторам (характеристика "числовойатом").

Характеристикой "числовойатом" сопровождаются тождества для невырожденных числовых атомов.

Проверяется, что консеквент имеет вида $A = t$, где A - невырожденный числовой атом; t - выражение с непустым списком входящих в него невырожденных числовых атомов $A_1, \dots, A_n$, оценки сложности которых меньше оценки сложности атома A. Выбираются новые переменные $x_1, \dots, x_n$ и определяется результат t' замены в выражении t атомов A_i на переменные x_i. Создается импликация, антецеденты которой получены добавлением к антецедентам исходной теоремы равенств $A_i = x_i$, а консеквентом служит равенство $A = t'$. Она сопровождается спецификацией "тип(неизвмножители)", "направл(второйтерм)". Предполагается, что значения x_i будут находиться нормализаторами. Пример:

$\forall_{ABCab}(a =$ вероятность$(A \cap B, C)$ & $b =$ вероятность$(A, C) \to$
условероятн$(B, A, C) = a/b)$

(c) Выражение числового атома через численные параметры с помощью равенств в посылках (характеристика "числовойатом").

i. Использование равенства из контекста, явно выражающего числовой атом через численные параметры (протокол "числзнач").

Протокол "числовойатом(P)" означает, что для числового атома P необходим прием, усматривающий в контексте равенство, выражающее этот атом через численные параметры, и реализующий замену.

Выбирается новая переменная x и создается теорема приема, антецедентом которой служит равенство $P = x$, а консеквентом - такое же равенство. Для нее вводится спецификация "тип(величинаугла)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ABp}($вероятность$(A, B) = p \to$ вероятность$(A, B) = p)$.

ii. Выражение числового атома через численные параметры с помощью равенства из контекста (характеристика "числпарам").

Характеристика "числпарам$(i\ N)$" указывает на тождество, использующее равенство из контекста для выражения числового атома через численные параметры. i - номер антецедента, идентифицируемого с равенством; N - направление замены.

Создается спецификация "тип(очереднойслучай)", "антецедент(i)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Kav}($вправо(v, K) & длина$(v) = a \to$ крд$(v, K, 1) = a)$

Спецификация - "тип(очереднойслучай)", "антецедент(2)", "направл(второйтерм)".

iii. Выражение числового атома через числовую функцию, заданную равенством из контекста (характеристика "функраспред").

Характеристикой "функраспред(t N)" снабжаются тождества, выражающие невырожденный числовой атом через связанную с ним функциональную характеристику. t - выражение для функциональной характеристики A, такое, что в антецедентах имеется равенство вида $A = t$; N - направление замены.

Составляется список S невырожденных числовых атомов, встречающихся в элементарных подвыражениях заменяющего терма, причем таких, параметры которых включаются в параметры консеквента. К антецедентам теоремы присоединяются равенства $r_i = x_i$, где r_i - элемент списка S, а x_i - новая переменная. В ее консеквенте вхождения термов r_i заменяются на переменные x_i. Выбирается антецедент, представляющий собой равенство для t, и создается спецификация "тип(неубывает)", "антецедент(j)", "направл(N)", где j - номер выбранного антецедента. Пример:

$\forall_{ABfgabkl}$(плотнраспред$(A, B) = \lambda_x(f(x), g(x)) \rightarrow$
вероятность(прообраз$(A, [a, b]), B) = \int_a^b f(x)d(x))$

Спецификация - "тип(неубывает)", "антецедент(1)", "направл(второйтерм)".

iv. Получение численного уравнения путем выражения числового атома через численные параметры с помощью равенства из посылок (характеристика "числнеизв").

Характеристика "числнеизв" указывает на тождество, выражающее числовой атом из уравнения в посылках.

Создается спецификация "тип(мультивставка)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ABCabc}(\neg(a = 0)\ \&\ a\angle(ABC) + b = c \rightarrow \angle(ABC) = (c - b)/a)$

2. Выражение терма с числовыми атомами через численные параметры при помощи соотношений из посылок.

(a) Использование равенства, выражающего функцию от невырожденного числового атома через численные параметры (характеристика "опрнеизв").

Характеристикой "опрнеизв($i_1 \dots i_n$)" снабжаются тождества, позволяющие определить значение неизвестного выражения с помощью равенств из посылок. $i_1, \dots, i_n$ - номера анецедентов, идентифицируемых с посылками.

Проверяется,что $n = 1$, причем антецедент с номером i_1 - равенство вида $x = t$, где x - численная переменная, не входящая в t, причем самый сложный подтерм выражения t - оно само. Тогда создается спецификация "тип(записьпеременной)", "направл(второйтерм)", "антецедент(i_1)". Пример:

$\forall_{ab}(\cos a = b\ \&\ 0 \leq a\ \&\ 0 \leq \pi - a \rightarrow \sin a = \sqrt{1 - b^2})$

Спецификация - "тип(записьпеременной)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)". Соответствующий прием проверяет, что a содержит невырожденный числовой атом, а b - не содержит.

(b) Выражение терма с числовыми атомами через численные параметры при помощи соотношений из посылок (характеристика "числатомы").

Характеристикой "числатомы(N)" снабжаются тождества, выражающие терм с невырожденными числовыми атомами через численные параметры. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормпараллельны)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCKPQRabcdef}$(делениеотрезка(B, P, C, a, b) & делениеотрезка(C, Q, A, c, d) & делениеотрезка$(A, R, B, e, f) \to$ орплощадь$(K,$ вектор$(PQ),$ вектор$(QR))/$орплощадь$(K,$ вектор$(AB),$ вектор$(BC)) =$ $(bdf + ace)/(b + a)(c + d)(e + f))$

Соответствующий прием проверяет, что a, b, c, d, e, f не содержат невырожденных числовых атомов.

3. Приведение подобных членов с числовыми атомами.

(a) Приведение подобных членов с невырожденными числовыми атомами (протокол "подобныечлены").

Протокол "подобныечлены(A t)" указывает на числовой атом A, для которого предусмотрены специальные приемы приведения подобных членов. t - либо терм "не($s_1 \dots s_n$)", и тогда коэффициентами при A считаются произвольные выражения, не содержащие символов $s_1, \dots,$ s_n, либо набор символов $s_1, \dots s_n$, и тогда коэффициентами считаются произвольные выражения, не содержащие невырожденных числовых атомов, заголовки которых отличны от $s_1, \dots, s_n$. Если t отсутствует, то коэффициентами считаются произвольные выражения, не имеющие невырожденных числовых атомов.

Проверяется, что t отсутствует, и выбираются новые переменные $a, b,$ c, d. Создается импликация без антецедентов, имеющая единственный консеквент $aA/b + cA/d = (a/b + c/d)A$. Она сопровождается спецификацией "тип(кривая)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ABabcd}(a \cdot$ вероятность$(A, B)/b = c \cdot$ вероятность$(A, B)/d =$ $(a/b + c/d)$вероятность$(A, B))$

(b) Приведение подобных членов с числовыми атомами при ограничениях на типы атомов коэффициентов (протокол "подобныечлены").

Проверяется, что t имеет вид "не($s_1 \dots s_n$)". Импликация фомируется та же самая. Она сопровождается спецификацией "тип(меньшеилиравно)", "направл(второйтерм)", "символ($s_1 \dots s_n$)". Пример:

$\forall_{ABabcd}(al(AB)/b + cl(AB)/d = (a/b + c/d)l(AB))$

Спецификация - "тип(меньшеилиравно)", "направл(второйтерм)", "символ(расстояние длина)".

   (c) Догруппировка относительно числового атома (протокол "группировка").

   Протокол "группировка(A)" означает, что для числового атома A предусмотрен прием догруппировки (если коэффициент при A имеет вид суммы, то с ней группируются прочие члены с сомножителем A).

   Выбираются новые переменные a, b, c и создается импликация без антецедентов, имеющая консеквент $(a+b)A+cA=(a+b+c)A$. Она сопровождается спецификацией "тип(нормкосинус)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{ABabc}((a+b)l(AB)+cl(AB)=(a+b+c)l(AB))$

4. Раскрывание скобок в выражениях с числовыми атомами.

   (a) Раскрывание скобок в выражении с числовым атомом, позволяющее выполнить приведение подобных членов с этим атомом (протокол "раскрытьскобки").

   Протокол "раскрытьскобки(A)" означает, что A - числовой атом, для которого предусмотрены приемы раскрывания скобок.

   Выбираются новые переменные a, b, c, d и создается импликация без антецедентов, имеющая консеквент $a(bA+c)+dA=(ab+d)A+ac$. Она сопровождается спецификацией "тип(другоевхождение)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{ABabcd}(a(b\text{длина}(A)+c)+d\text{длина}(A)=(ab+d)\text{длина}(A)+ac)$

   (b) Раскрывание скобок в произведении численного выражения на линейную комбинацию с невырожденным числовым атомом.

      i. Раскрывание скобок в произведении численного выражения на линейную комбинацию с невырожденным числовым атомом (протокол "раскрытьскобки").

      Пусть протокол имеет вид "раскрытьскобки(A)". Выбираются новые переменные a, b, c, и создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит равенство $a(bA+c)=abA+ac$. Она сопровождается спецификацией "тип(учетооперанда)", "направл(второйтерм)", "см(или(не(известно(a)) не(контекст(подтерм(равно(теквхожд a)) корень известно(a)))) не(контекст(подтерм(равно(теквхожд 0)))) не(контекст(операнд(d теквхожд)символ(d дробь))))". Пример:

      $\forall_{ABabc}(a(bl(AB)+c)=abl(AB)+ac)$

      ii. Раскрывание скобок в произведении численного выражения на линейную комбинацию с невырожденным числовым атомом, имеющим вхождения вне рассматриваемого произведения (протокол "раскрытьскобки").

      Теорема приема - такая же, как в предыдущем пункте. Спецификация отличается только типом приема. Здесь его роль играет символ "разделы". Пример теоремы приема можно взять из предыдущего пункта.

iii. Раскрывание скобок в произведении численного выражения на линейную комбинацию невырожденных числовых атомом (протокол "раскрытьскобки").

Пусть протокол имеет вид "раскрытьскобки(A)". Выбираются новые переменные a, b, c. Рассматриваются все параметры $a_1, \ldots, a_n$ терма A, и выбираются отличные от них и от переменных a, b, c переменные $b_1, \ldots, b_n$. Пусть B - результат замены в A переменных $a_1, \ldots, a_n$ на $b_1, \ldots, b_n$. Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит Выбираются новые переменные a, b, c. Рассматриваются все параметры $a_1, \ldots, a_n$ терма A, и выбираются отличные от них и от переменных a, b, c переменные $b_1, \ldots, b_n$. Пусть B - результат замены в A переменных $a_1, \ldots, a_n$ на $b_1, \ldots, b_n$. Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит равенство $a(bA+cB) = abA+acB$. Она сопровождается спецификацией "тип(регистрациятеоремы)", "направл(второйтерм)", "см(или(не(известно(a)) не(контекст(подтерм(равно(теквхожд a)) корень известно(a)))) не(контекст(подтерм(равно(теквхожд 0)))) не(контекст(операнд(d теквхожд)символ(d дробь))))". Пример:

$\forall_{ABabc}(a(bl(AB) + cl(CD)) = abl(AB) + acl(CD))$

(c) Раскрывание скобок в произведении численного выражения на линейную комбинацию со степенью невырожденного числового атома, имеющего вхождения вне рассматриваемого произведения (протокол "раскрытьскобки").

Пусть протокол имеет вид "раскрытьскобки(A)". Выбираются новые переменные a, b, c, d, и создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит равенство $a(bA^c+d) = abA^c+ad$. Она сопровождается спецификацией "тип(блокредактора)", "направл(второйтерм)", "см(или(не(известно(a)) не(контекст(подтерм(равно(теквхожд a)) корень известно(a)))) не(контекст(подтерм(равно(теквхожд 0)))) не(контекст(операнд(e теквхожд)символ(e дробь))))". Пример:

$\forall_{ABabcn}(a(bl(AB)^n + c) = abl(AB)^n + ac)$

(d) Раскрывание скобок для квадрата линейной комбинации числовых атомов, если уравнение содержит также их произведение (протокол "раскрытьскобки").

Пусть протокол имеет вид "раскрытьскобки(A)". Выбираются новые переменные a, b, c, d. Рассматриваются все параметры $a_1, \ldots, a_n$ терма A, и выбираются отличные от них и от переменных a, b, c, d переменные $b_1, \ldots, b_n$. Пусть B - результат замены в A переменных $a_1, \ldots, a_n$ на $b_1, \ldots, b_n$. Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит равенство $a(bA + cB)^2 + d = ab^2A^2 + ac^2B^2 + 2abcAB$. Она сопровождается спецификацией "тип(чтениезадачи)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ABCDabcd}(d(al(AB) + bl(CD))2 + c = da^2l(AB)^2 + db^2l(CD)^2 + 2abdl(AB)l(CD) + c)$

5. Использование пропорциональной линейной комбинации числовых атомов, усматриваемой в посылках.

(a) Выражение линейной комбинации числовых атомов через численные параметры при помощи посылки, представляющей собой равенство для пропорциональной линейной комбинации тех же атомов (протокол "пропорция").

Протокол "пропорция(A)" указывает, что для числового атома A создаются приемы, связанные с соотношениями пропорциональности.

Выбираются новые переменные a, b, c, d, e, f. Рассматриваются все параметры $a_1, \ldots, a_n$ терма A, и выбираются отличные от них и от переменных a, b, c переменные $b_1, \ldots, b_n$. Пусть B - результат замены в A переменных $a_1, \ldots, a_n$ на $b_1, \ldots, b_n$. Создается импликация с антецедентами $aA+bB = c$, $a = de$, $b = fe$, $\neg(e = 0)$ и консеквентом $dA+fB = c/e$. Она снабжается спецификацией "тип(контрольнормализации)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)". Пример:

$\forall_{ABCDabcdpq}(pl(AB) + ql(CD) = c \,\&\, p = ad \,\&\, q = bd \,\&\, \neg(d = 0) \to al(AB) + bl(CD) = c/d)$

(b) Выражение дроби с линейной комбинацией числовых атомов через численные параметры при помощи посылки, представляющей собой равенство для пропорциональной линейной комбинации тех же атомов (протокол "пропорция").

Пусть протокол имеет вид "пропорция(A)". Выбираются новые переменные a, b, c, d, e, f, g, p. Рассматриваются все параметры $a_1, \ldots, a_n$ терма A, и выбираются отличные от них и от переменных a, b, c переменные $b_1, \ldots, b_n$. Пусть B - результат замены в A переменных $a_1, \ldots, a_n$ на $b_1, \ldots, b_n$. Создается импликация с антецедентами $aA + bB = c$, $bd - ae = 0$, $\neg(a = 0)$, $\neg(g = 0)$, $c = fg$ и консеквентом $(dA + eB)h/(gp) = dgh/(ap)$. Она снабжается спецификацией "тип(возрастание)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)". Пример:

$\forall_{ABCDabcdmnpqr}(al(AB) + bl(CD) = r \,\&\, pb - aq = 0 \,\&\, \neg(a = 0) \,\&\, \neg(d = 0) \,\&\, r = cd \to (pl(AB) + ql(CD))m/(dn) = cpm/(an))$

(c) Упрощение линейной комбинации числовых атомов при помощи посылки, выражающей через численные параметры пропорциональную линейную комбинацию тех же атомов (протокол "пропорция").

Выбираются новые переменные a, b, c, d, e, f. Рассматриваются все параметры $a_1, \ldots, a_n$ терма A, и выбираются отличные от них и от переменных a, b, c переменные $b_1, \ldots, b_n$. Пусть B - результат замены в A переменных $a_1, \ldots, a_n$ на $b_1, \ldots, b_n$. Создается импликация с антецедентами $aA+bB = c$, $ad = e$, $bd = f$ и консеквентом $eA + fB = cd$. Она снабжается спецификацией "тип(схемаоперандов)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)", "указатель(коммутативно(фикс(1)))". Пример:

$\forall_{ABCDabcdpq}(al(AB) + bl(CD) \,\&\, p = ad \,\&\, q = bd \to pl(AB) + ql(CD) = cd)$

Условные выражения

1. Стандартизирующая группировка внутрь условного выражения (характеристика "альтоперанд").

Характеристика "альтоперанд(N)" указывает, что тождество имеет в заменяемой части операцию от условного выражения, а в заменяющей части - условное выражение. N - направление замены.

Проверяется, что обе части тождества бесповторны, и создается спецификация "тип(команды)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Pab}((0 \text{ при } P,\ \text{иначе } a)b = (0 \text{ при } P, \text{иначе } ab))$

2. Свертка условного выражения.

   (a) Свертка условного выражения (характеристика "свертка").

   Характеристика "свертка(N)" означает, что тождество обеспечивает переход к сокращенной записи.

   Если заменяемый терм имеет заголовок "вариант", а заменяющий не содержит символа "вариант", то создается спецификация "тип(новоператор)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_a(a - \text{число} \to (-a \text{ при } a < 0,\ \text{иначе } a) = |a|)$

   (b) Свертка условного выражения в условии задачи на преобразование (характеристика "свертка").

   Этот тип приема отличается от предыдущего несколько усиленной мотивацией срабатывания. Спецификация для него создается в тех же случаях, что и для предыдущего типа, а окончательный выбор между ними делает доводчик. Возможно использование обоих приемов, но с разными уровнями срабатывания. Спецификация имеет вид "тип(арккотангенс)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}((a \text{ при } 0 \leq b - a,\ \text{иначе } b) = \min(a, b))$.

Исключение сложных операций и вычисления

1. Исключение сложной операции.

   (a) Тождественная расшифровка по определению.

      i. Тождественная расшифровка по определению для исключения редко встречающегося понятия (характеристика "определение").

      Если понятие только что введено и для него почти нет приемов, то вначале задачи с ним решаются путем расшифровки его по определению. Впоследствии, по мере накопления обслуживающих данное понятие приемов, уровень срабатывания приема рсашифровки будет повышаться. В конце концов, такой прием вообще может оказаться удаленным. Пока данная тема не прорабатывалась, а спецификация приема создается по специальному протоколу, указывающему, что этот прием нужен.

      Пусть P - определяемое выражение, Q - определяющее, f - заголовок выражения P. Проверяется отсутствие протоколов "сокращтеор(f,g)", "блокраздела(f $h_1 \ldots h_n$)", где хотя бы один из символов $h_1, \ldots, h_n$

встречается в Q. Первый из них означает, что операция f введена для сокращенной записи выражений, содержащих операцию g (например, "услвероятность" - "вероятность"). Второй - что хотя операция f и определяется через более простые операции списка $h_1, \ldots, h_n$, но эти операции относятся к различным кластерам приемов, и сведение f к $h_1, \ldots, h_n$ без особых к тому причин нецелесообразно (например, "скалумнож "угол", "уголмежду"). Проверяется наличие протокола "Новый(f)", указывающего, что f - новое понятие, для которого целесообразно создание приема расшифровки по определению. Тогда создается спецификация "тип(новаргумент)", "направл(N)", где N - направление замены P на Q. Пример:

$\forall_x(\mathrm{ch}\, x = (\exp(x) - \exp(-x))/2)$.

ii. Расшифровка по определению подвыражения условия задачи на описание, содержащего неизвестные (характеристика "определение").

Начало совпадает с началом предыдущего пункта, но проверка наличия протокола "Новый(f)" отменяется. Создается спецификация "тип(производная)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{mn}(n$ – целое & m – целое & $0 \leq m$ & $0 \leq n \rightarrow C_n^m = (0$ при $n < m$, иначе $n!/(m!(n-m)!)))$

(b) Непосредственное исключение сложной операции (характеристика "упрощение").

Характеристика "упрощение(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам.

Пусть t - заменяемое выражение, r - заменяющее. Проверяется, что если r содержит описатель "класс", то и t его содержит. Если t имеет единственное подвыражение p максимальной сложности, а s - его заголовок, то проверяется наличие такого протокола "сокращтеор(s s')", что r имеет более одного вхождения символов s, s'. Если такого протокола не нашлось, то дополнительно проверяется отсутствие протокола "блокраздела(s $s_1, \ldots, s_n$)", у которого хотя бы один из символов $s_1, \ldots, s_n$ входит в r. В случае успеха создается спецификация "тип(стандупорядочение)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abAB}(B \subseteq b \rightarrow$ сужение(индикатор$(A, B, a), b) =$ индикатор$(b \cap A, B, a))$

(c) Непосредственное исключение сложной операции (характеристика "варианты").

Характеристика "варианты(N)" означает, что тождество преобразует корневую сложную операцию в условное выражение с более простыми операциями.

Если теорема не имеет характеристики с заголовком "описатель", то создается спецификация "тип(стандупорядочение)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abim}(m = l(a)$ & $i \in \{1, \ldots, l(a) + l(b)\} \rightarrow (a; b)(i) = (a(i)$ при $i \leq m$, иначе $b(i-m)\})$

(d) Непосредственное исключение сложной операции в ситуации, когда новые описатели исключаются нормализаторами общей стандартизации (характеристика "упрощение").

Характеристика "упрощение(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам.

Проверяется наличие характеристики "нормзнач(F N)", где F - фильтры, при истинности которых возможно исключение описателей в заменяющем терме с помощью нормализаторов общей стандартизации. Затем создается спецификация "тип(смежны)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{ABin}(l(A) = n \ \& \ i \in \{0, \ldots, n\} \to \text{слойсемейства}(A, B, i) =$
$\bigcup_{m,m\subseteq\{1,\ldots,n\}},\text{card}_{(m)=i}(\bigcap_{j,j\in m} A(j) \cap \bigcap_{j,j\in\{1,\ldots,n\}\setminus m}(B \setminus A(j))))$

Спецификация - "тип(смежны)", "направл(второйтерм)", "см(натуральное(n))".

(e) Исключение сложной операции путем развертки (характеристика "упрощение").

Пусть характеристика - "упрощение(N)". Проверяется, что в заменяющем терме встречается подвыражение вида "$\lambda_i(t(i), i \in \{m \ldots, n\})$". Проверяется также наличие антецедента вида "слово(a)", такого, что в теореме встречается подвыражение "длинанабора(a)". Если отсутствует антецедент вида "длинанабора(a) $= b$", где b - переменная, то такой антецедент вводится (с новой переменной b), а все вхождения подвыражения "длинанабора(a)" заменяются на b. Для скорректированной таким образом теоремы создается спецификация "тип(числкоэффициент)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(l(a) = b \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ \{1, \ldots, b\} \subseteq \{; a\} \to \text{обрфункция}(a) =$
$\lambda_i(\text{номерэлемента}(i, a), i \in \{1, \ldots, b\}))$

(f) Исключение сложной операции с помощью кванторного тождества из контекста.

   i. Исключение сложной операции с помощью кванторного тождества из контекста (характеристика "описатель").

   Характеристика "описатель(N)" означает, что тождество позволяет перейти к более простым описателям либо исключает описатели.

   Рассматриваются заменяемое выражение P и заменяющее Q. Проверяется, что Q не имеет связанных переменных, а оценки сложности выражений P, Q равны. Проверяется, что P имеет единственный подтерм t максимальной сложности, а его вхождение в P единственное. Проверяется, что оно является вхождением в последний операнд описателя "отображение". Рассматривается связывающая приставка $x_1 \ldots x_n$ этого описателя. Проверяется, что пересечение ее с параметрами терма t непусто; обозначим его элементы $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. Если предпоследний терм T описателя "отображение" имеет вид "$x_p -$целое $\& \ N \leq x_p \ \& \ x_p \leq M$", то он заменяется на "$x_p \in \{N, \ldots, M\}$". Выбирается новая переменная f. Формируется импликация, полученная из исходной добавлением антецедента "$\forall_{x_1 \ldots x_n} T \to t = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$" и заменой консеквента на "$Q = P'$", где P' - результат замены в P терма t на $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$. Эта импликация сопровождается спецификацией "тип(смпосылка)", "направл(второйтерм)", "см(не(входит(s $f(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})$))))". Пример:

$\forall_{akpABC}(A - \mathrm{set}\ \&\ p - \text{функция}\ \&\ B - \text{функция}\ \&\ k - \text{натуральное}\ \&\ \mathrm{Dom}(p) = \{1,\ldots,k\}\ \&\ \mathrm{Dom}(B) = \{1,\ldots,k\}\ \&\ \mathrm{Val}(B) \subseteq \text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C)\ \&\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,k\} \to \text{услвероятн}(A, B(i), C) = p(i))\ \&\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(i)\ \&\ \text{несовместны}(\lambda_i(B(i), i \in \{1,\ldots,k\}), C)\ \&\ \forall_i(i \in \{1,\ldots,k\} \to \text{вероятность}(B(i), C) = a(i)) \to \text{вероятность}(A, C) = \sum_{i=1}^{k} p(i)a(i))$

Спецификация - "тип(смпосылка)", "направл(второйтерм)", "см(не(входит(вероятность $a(i)$))))".

ii. Исключение сложной операции с помощью кванторного тождества из контекста (характеристика "кванторныйконтекст").

Характеристика "кванторныйконтекст" указывает на тождество для исключения описателя "отображение" с помощью кванторного тождества из контекста.

Среди антецедентов имеется кванторная импликация с консеквентом вида $f(x) = t$. Создается спецификация "тип(смпосылка)", "направл(N)", "кванторныйконтекст", "см(не(входит(s $f(x)$))))", где s - заголовок выражения t. Пример:

$\forall_{fABCq}(\text{конечное}(B)\ \&\ \text{конечное}(C)\ \&\ B \subseteq A\ \&\ \text{Отображение}(f, A, C)\ \&\ \forall_i(i \in C \to \mathrm{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, B), i)) = q(i)) \to \mathrm{card}(B) = \sum_{i,i\in C} q(i))$

Спецификация - "тип(смпосылка)", "направл(второйтерм)", "кванторныйконтекст", "см(не(входит(мощность $q(i)$))))".

iii. Непосредственное исключение сложной операции с помощью кванторного тождества, имеющегося в контексте (протокол "тождвывод").

Протокол "тождвывод(fA)" указывает, что для операции f создается прием, усматривающий ее значение из кванторного тождества, имеющегося в контексте. A - список символов, которые не должны встречаться в выражении, определяющем значение операции.

Определяется арность n символа f. Выбираются отличные от x, t и друг от друга переменные $y_1, \ldots, y_n$, а также переменные $z_1, \ldots, z_n$. Выбираются также новые переменные B, g. Рассматривается импликация с антецедентами $\forall_x(B(x) \to f(y_1(x), \ldots, y_n(x)) = g(x)), (y_1(t), \ldots, y_n(t)) = (z_1, \ldots, z_n), B(t)$ и консеквентом $f(z_1, \ldots, z_n) = g(t)$. Она снабжается спецификацией "тип(дискретнаяматематика)", "направл(второйтерм)". К этому добавляется элемент "см(...)", перечисляющий условия невхождения символов списка A в $g(x)$. Пример:

По протоколу "тождвывод(мощность мощность)" создается теорема приема

$\forall_{abcdt}(\forall_x(c(x) \to \mathrm{card}(a(x)) = d(x))\ \&\ a(t) = b\ \&\ c(t) \to \mathrm{card}(b) = d(t))$

Спецификация - "тип(дискретнаяматематика)", "направл(второйтерм)", "см(не(входит(мощность фикс(1 5 2))))".

(g) Исключение сложной операции при установлении независимости вспомогательного терма от заданных параметров (характеристика "упрощкн").

Характеристика "упрощкн(S, N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам, при условии, что заданные выражения не зависят от заданных параметров. S - список термов "конст(A_1, A_2)", где A_1 - переменная, обозначающая выражение, которое не должно зависеть от переменных списка A_2. N - направление замены.

Вводится накопитель D антецедентов модифицированной импликации, который вначале совпадает со списком антецедентов исходной импликации. Просматриваются все антецеденты, имеющие вид $\forall_X(P \to Q)$, у которых некоторый конъюнктивный член консеквента Q - равенство $x = t$, где переменная x фигурирует в некотором терме "конст$(x, \ldots)$" из S. Такие равенства добавляются к накопителю D и исключаются из консеквента Q. Создается список R термов "посылки$(x\ P)$" для всех таких случаев. Затем создается импликация с антецедентами D и исходным консеквентом. Она сопровождается спецификацией "тип(неизв)", "направл(N)", "S", "R". Пример:

$$\forall_{jknpAB}(\mathrm{Val}(A) \subseteq \text{события}(B)\ \&\ l(A) = n\ \&\ \text{незавсобытия}(A, B)\ \&$$
$$j \in \{0, \ldots, n\}\ \&\ \text{вероятность}(A(k), B) = p \to$$
$$\text{вероятность}(\text{слойсемейства}(A, \text{элемсобытия}(B), j), B) = C_n^j p^j (1-p)^{n-j})$$

Спецификация - "тип(неизв)", "направл(второйтерм)", "конст(p, k)", "посылки$(p,\ k \in \{1, \ldots, n\})$". Последний элемент представляет собой указание дополнительной посылки, используемой при упрощении выражения "вероятность$(A(k), B)$". После упрощения проверяется, что оно не зависит от k.

(h) Исключение сложной операции с помощью тождеств из контекста (характеристика "извлечфунк").

Характеристика "извлечфунк(N)" указывает на тождество, исключающее сложную операцию с помощью системы тождеств, усмотренных в посылках. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(упрощение)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abc}(l(a) = 2\ \&\ \inf\{; a\} = b\ \&\ \sup\{; a\} = c \to a(1) + a(2) = b + c)$$

Под сложной операцией здесь понимается "значение".

(i) Попытка исключения сложной операции, заключенной внутри теоремной переменной (характеристика "упрощМинус").

Характеристика "упрощМинус(N)" указывает на тождество, исключающее сложную операцию, заключенную внутри переменной. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(функционально)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcd}(d = a^2 - b^2\ \&\ 0 \leq a - b\ \&\ 0 \leq a + b \to (a - b)^c (a + b)^c = d^c)$$

Прием проверяет, что сомножителем a либо b служит радикал четной степени, который при возведении в квадрат либо исчезнет, либо уменьшит свою степень.

2. Попытка вычисления.

   (a) Переход к параметрическому описанию класса и попытка явного разрешения подкванторного утверждения (характеристика "упрощение").

   Характеристика "упрощение(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам.

   Проверяется, что заменяющее выражение имеет вид "$\mathrm{set}_x(\exists_y A(x,y))$". Выбирается новая переменная B, и создается импликация, полученная из исходной преобразованием заменяющего выражения в "$\mathrm{set}_x(\exists_y(A(x,y)\ \&\ B(x)))$". Она сопровождается спецификацией "тип(стандчисло)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fga}(\text{образ}(\lambda_x(f(x),g(x)),a) = \mathrm{set}_y(\exists_x(x \in a\ \&\ y = f(x)\ \&\ c(y))))$

   Соответствующий прием имеет указатель "контекст", присваивающий переменной c тип значений выражения $f(x)$. После этого утверждение под квантором существования разрешается вспомогательной задачей на описание относительно x. Затем другая задача упрощает описатель "класс".

   (b) Попытка использовать заданную последовательность промежуточных вычислений (характеристика "вычислить").

   Характеристика "вычислить" указывает на тождество для сведения сложного вычисления к цепочке более простых вычислений.

   Создается спецификация "тип(извлечение)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{abmn}(m = \mathrm{card}(a)\ \&\ n = \mathrm{card}(b)\ \&\ m - \text{число}\ \&\ n - \text{число} \rightarrow \mathrm{card}(a \times b) = mn)$

   Антецеденты вычисляют значения m, n, и они подставляются в заменяющий терм.

   (c) Попытка вспомогательных вычислений, позволяющая перейти к сложной операции с более простыми операндами (характеристика "вычбуф").

   Характеристика "вычбуф" указывает на тождество, использующее вспомогательные вычисления для перехода к сложной операции с более простыми операндами.

   Вводится спецификация "тип(равноудалена)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{APb}(\mathrm{card}(A(y)) = b \rightarrow \mathrm{card}(\mathrm{set}_{xy}(x \in A(y)\ \&\ P(y))) = b\mathrm{card}(\mathrm{set}_y(P(y))))$

   Правая часть антецедента обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, после чего проверяется независимость b от переменных y.

   (d) Попытка преобразования сложной операции к виду, допускающему декомпозицию вычисления (характеристика "разбить").

   Характеристика "разбить" указывает на тождество, выполняющее вычисление для подготовки декомпозиции сложной операции.

Создается спецификация "тип(склейка)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ABCDQp}(D = A \cap (B \cup C)$ & $p =$ вероятность$(D, Q) \rightarrow$ вероятность$(A \cap (B \cup C), Q) = p)$

Правая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором приведения к виду объединения, после чего правая часть второго антецедента обрабатывается задачей на преобразование. Проверяется, что результат p не содержит символа "вероятность".

(e) Вычисление с помощью вспомогательной задачи на исследование свойств объекта (характеристика "исследовать").

Характеристика "исследовать(A F G)" указывает на тождество для вычисления с помощью вспомогательной задачи на описание, имеющей цель "исследовать". A - условие вспомогательной задачи, F - конъюнкция фильтров, определяющая контекст применения приема, G - терм "набор(...)", перечисляющий цели вспомогательной задачи. Неизвестная задается в G без внешнего указателя "цель".

Создается спецификация "тип(префикснаяоперация)", "направл(второйтерм)", "см(F)", "указатель(посылка(A примечание(определениепараметра)примечание(разборслучаев))", "быстрпреобр(A задача(7 тип(описать) исследовать комментарий(обращение)G))". Пример:

$\forall_{fgha}(\text{card}(\text{roots}(\lambda_x(f(x), g(x)), a)) = \text{card}(\text{roots}(h, a)))$

Спецификация - "тип(префикснаяоперация)", "направл(второйтерм)", "см(тип(преобразовать)условие корень не(цель(извлекается)))", "указатель(посылка($\lambda_x(f(x), g(x)$ & $x \in a) = h$) примечание(определениепараметра) примечание(разборслучаев))быстрпреобр($\lambda_x(f(x), g(x)$ & $x \in a) = h$ задача(7 тип(описать) исследовать комментарий(обращение) числокорней неизвестная(h)))". Для определения числа корней прием обращается к задаче на описание, исследующей функцию на число корней.

(f) Попытка вычислить подвыражение с помощью вспомогательной задачи на преобразование (протокол "преобразовать").

Протокол "преобразовать(A)" означает, что для выражений вида A целесообразна попытка вычисления их значения с помощью вспомогательной задачи на преобразование, имеющей цель "упростить".

Выбирается новая переменная x и создается импликация, антецедентом и консеквентом которой служит одно и то же равенство $A = x$. Она сопровождается спецификацией "тип(натурлог)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{Ap}($объем$(A) = p \rightarrow$ объем$(A) = p)$

В действительности прием проверяет наличие посылок, задающих координаты точек множества A в некоторой прямоугольной системе координат. В протоколе это не отражено, и он требует доработки.

(g) Отбрасывание вырожденных случаев при вычислении (характеристика "особыезначения").

Характеристикой "особыезначения" сопровождаются теоремы приемов, определяющих попытку вычисления при дополнительных ограничениях, представляющих собой условие невырожденности.

Создается спецификация "тип(внешкорень)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcf}(c = \int_a^b f(x)dx \rightarrow \int_a^b f(x)dx = (c \text{ при } 0 \leq b - a, \text{ иначе } 0))$

Соответствующий прием вычисляет интеграл в антецеденте при помощи вспомогательной задачи на преобразование, к посылкам которой добавляется неравенство $0 \leq b - a$.

3. Упрощение выражений с функциональными переменными.

   (a) Непосредственное исключение функциональных переменных (характеристика "значперем").

   Характеристика "значперем(N)" указывает на тождество, исключающее функциональную переменную, аргумент которой не связан внешними кванторами и описателями. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(движвправо)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{aijnAB}(\text{правмногоугольник}(a) \,\&\, l(a) = n \,\&\, i \in \{1, \ldots, n\} \,\&\, j \in \{1, \ldots, n\} \,\&$ $\text{окружность}(AB) \text{ описана около фигура}(a) \rightarrow l(a(i)a(j)) =$ $2l(AB)\sin(\pi|i - j|/n))$

   (b) Использование кванторного тождества, явно определяющего значения функции, для вычисления операции над этой функцией (протокол "тождфунк").

   Протокол "тождфунк(p)" означает, что для вычисления операции p над функцией, обозначенной переменной, целесообразна попытка найти в контексте кванторное тождество, определяющее значения этой функции.

   Создается импликация "$\forall_{abcd}(\forall_e(a(e) \rightarrow b(e) = c(e)) \,\&\, \mathrm{set}_e(a(e)) = \mathrm{Dom}(b) \,\&$ $p(\lambda_e(c(e), a(e))) = d \rightarrow p(b) = d)$". Она сопровождается спецификацией "тип(нормкн)", "направл(второйтерм)", "быстпреобр(фикс(2 1)задача(4 упростить))", "быстрпреобр(фикс(2 2) задача(4 упростить))", "быстрпреобр(фикс(3 1) задача(5 упростить))". Пример:

   По протоколу "тождфунк(пределпослед)" создается теорема приема

   "$\forall_{abcd}(\forall_e(a(e) \rightarrow b(e) = c(e)) \,\&\, \mathrm{set}_e(a(e)) = \mathrm{Dom}(b) \,\&$ $\text{пределпослед}(\lambda_e(c(e), a(e))) = d \rightarrow \text{пределпослед}(b) = d)$".

   Соответствующий прием использует задающую члены последовательности кванторную импликацию для вычисления предела этой последовательности.

   (c) Использование кванторного тождества,определяющего условие на значения функции, для вычисления операции над этой функцией (характеристика "функоперация").

   Характеристика "функоперация(N)" указывает на тождество, позволяющее вычислить операцию над функцией по кванторной посылке, накладывающей условия на ее значения. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(выводимо)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fghab}(df(t)/dt = a \ \& \ dg(t)/dt = b \ \& \ \forall_v(h(v) \to y(f(v)) = g(v)) \ \&$
$e = f(t) \to dy(e)/de = b/a).$

Соответствующий прием вычисляет производную функции y, заданной параметрически - через функции f, g, с которыми она связана посредством кванторной импликации.

(d) Группировка функциональных переменных вглубь (характеристика "функаргумент").

Характеристика "функаргумент(N)" указывает на тождество группировки функциональных переменных вглубь. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(главноеменю)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fABpq}(\text{группоид}(A) \ \& \ \text{группоид}(B) \ \& \ \text{гомоморфизм}(f, A, B) \ \&$
$p \in \text{носитель}(A) \ \& \ q \in \text{носитель}(A) \to f(\text{операция}(A)(p, q)) =$
$\text{операция}(B)(f(p), f(q)))$

(e) Вычисление сложной операции, примененной к операции над семейством, путем вычисления операции над элементами семейства (характеристика "функподст").

Характеристика "функподст(f N)" указывает на тождество, выражающее сложную операцию над термом, содержащим функцию f, через сложные операции над термами, содержащими значения этой функции. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(Смполоса)", "направл(N)", "переменная(f)". Пример:

$\forall_{abef}(a(f) = \inf(e(f)) \ \& \ \neg(e(f) = \emptyset) \to \inf(\bigcup_{f,b(f)} e(f)) =$
$\inf(\text{set}_d(\exists_f(d = a(f) \ \& \ b(f)))))$

Спецификация - "тип(Смполоса)", "направл(второйтерм)", "переменная(e)", "указатель(занесениепосылки(2 $b(f)$))", "указатель(быстрпреобр($a(f)$ норминф задача(4 упростить) посылки($b(f)$)))".

4. Рекурсия.

(a) Вычисление с помощью рекурсии по длине набора (характеристика "длинанабора").

Характеристика "длинанабора(a N)" указывает на тождество, позволяющее выразить сложную операцию с параметром a, значением которого служит набор, через такую же операцию, в которой переменная a заменена на выражение, имеющее своим значением набор меньшей длины. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(числовоеравенство)", "переменная(a)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{afginAB}(l(a) = n \ \& \ i \in \{1, \ldots, n-1\} \ \& \ a(i) = \lambda_x(f(x), A(x)) \ \&$
$a(i+1) = \lambda_y(g(y), B(y)) \ \& \ l(x) = l(g(y)) \to \text{произведение}(a) =$

произведение($\lambda_j((a(j)$ при $j < i,$ иначе $(\lambda_y(f(g(y)), A(g(y))$ & $B(y))$ при $j = i,$ иначе $a(j+1))), j \in \{1, \ldots, n-1\})))$

Спецификация - "тип(числовоеравенство)", "переменная(a)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием выполняет один шаг в вычислении произведения цепочки отображений.

(b) Вычисление с помощью рекурсии по натуральному параметру (характеристика "натуральное").

Характеристика "натуральное(a N)" указывает на тождество, позволяющее выразить сложную операцию с натуральным параметром a через такую же операцию, в которой переменная a заменена на выражение, имеющее натуральное значение, меньшее a. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормпрог)", "натуральное(a)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABn}(0 \leq n-2$ & $B = A^{n-1} \to A^n = AB)$

Спецификация - "тип(нормпрог)", "натуральное(n)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием выполняет один шаг в вычислении степени матрицы.

(c) Вычисление с помощью префиксной рекурсии (характеристика "префикснаярекурсия").

Характеристика "префикснаярекурсия(N)" указывает на тождество, позволяющее перейти от сложной операции с подтермом "префикс(A B)" к такой же операции с подтермом B. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(номера)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(\mathrm{card}(\{a; b\}) = \mathrm{card}(\{; b\}) + (0$ при $a \in \{; b\},$ иначе $1))$

5. Переход к сложной операции, имеющей более простые операнды.

(a) Переход к сложной операции, имеющей более простые операнды (характеристика "сокращ").

Характеристика "сокращ(N)" означает, что тождество упрощает выражение под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей либо равной сложности.

Проверяется, что заменяющий терм t имеет единственный подтерм максимальной сложности, причем если t элементарно, то бесповторно. Создается спецификация "тип(описатель)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(\inf(\{a; b\}) = \min(a, \inf(\{; b\})))$

(b) Декомпозиция сложной операции (характеристика "декомпозиция").

Характеристика "декомпозиция(N)" указывает на тождество для декомпозиции выражения со сложным заголовком.

Проверяется, что нет характеристики с заголовком "дистрибразвертка" и что среди параметров заменяющего терма имеется бесповторная в этом терме переменная. Создается спецификация "тип(сопровождтерм)", "направл(N)". Если отсутствуют характеристики с заголовками "нормализация" и "группмножитель", то к ней добавляется элемент "см(или(посылка не(тип(преобразовать)) не(корень) и(не(цель(упростить))не(цель(длина)))))". Пример:

$\forall_{cdf}(\text{прообраз}(f,c)\setminus\text{прообраз}(f,d)=\text{прообраз}(f,c\setminus d))$

Спецификация - "тип(сопровождтерм)", "направл(первыйтерм)".

(c) Декомпозиция сложной операции (характеристика "нормализация").

Проверяется отсутствие характеристики с заголовком "описатель". Проверяется, что заменяемый терм бесповторный, а заменяющий - не бесповторный. Создается спецификация "тип(сопровождтерм)", "направл(N)", где N - направление общей стандартизации. Пример:

$\forall_{abc}(c-\text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c)-\text{even})\rightarrow a^c b^c=(ab)^c)$

Спецификация - "тип(сопровождтерм)", "направл(первыйтерм)".

(d) Декомпозиция сложной операции (характеристика "числатом").

Характеристика "числатом" указывает на тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые.

Проверяется, что одна из частей тождества - невырожденный числовой атом, имеющий в этой части максимальную сложность. Проверяется также, что в другой части (рассматриваемой как заменяющая) каждое подвыражение максимальной сложности имеет тот же заголовок, что и заменяемая часть, причем все эти подвыражения образуют декомпозицию заменяемой части по ее переменным. Тогда создается спецификация "тип(сопровождтерм)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(\text{однонаправлены}(a,b)\rightarrow\text{длина}(a+b)=\text{длина}(a)+\text{длина}(b))$

(e) Декомпозиция сложной операции, использующая вспомогательное вычисление для развязки операндов (характеристика "услнезавис").

Характеристика "услнезавис(N)" указывает на тождество для декомпозиции сложного выражения, использующее возможность вычислить вспомогательное выражение, связывающее разделяемые переменные. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(стандоператор)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABa}(\text{конечное}(A)\ \&\ \text{конечное}(B)\ \&\ a=\text{card}(A\cap B)\rightarrow\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-a)$

(f) Декомпозиция сложной операции для получения повторяющихся вхождений неконстантного терма (характеристика "нормализация").

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики с заголовком "описатель". Проверяется, что заменяемый терм A бесповторный, а заменяющий терм B - не бесповторный. Проверяется, что единственный наиболее сложный подтерм заменяемого терма - он сам, причем заменяющий терм имеет более одного подтерма максимальной сложности. Заголовки этих подтермов совпадают с заголовком заменяемого терма. Хотя бы один из них имеет корневой операнд, не встречающийся в заменяемом терме. Тогда создается спецификация "тип(контрольслучаев)", "направл(N)", где N - направление общей стандартизации. Пример:

$\forall_{abc}(\log_a |b/c| = \log_a |b| - \log_a |c|)$

(g) Декомпозиция сложной операции для получения повторяющихся вхождений неконстантного терма (характеристика "декомпозиция").

Характеристика "декомпозиция(N)" указывает на тождество для декомпозиции выражения со сложным заголовком. N - направление замены.

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики с заголовком "описатель" и наличие характеристики "сокращ(N)". Далее - в точности как для предыдущего пункта. Пример:

$\forall_{abc}(\log_a(b/c) = \log_a |b| - \log_a |c|)$

(h) Декомпозиция сложной операции, использующая посылку для идентификации подмножества операндов ассоциативно-коммутативной операции (характеристика "нормализация").

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики с заголовком "описатель". Проверяется, что заменяемый терм A бесповторный, а заменяющий терм B - не бесповторный. В заменяемом терме находится вхождение подвыражения вида $f(x, y)$, где f ассоциативно и коммутативно, а x, y - различные переменные. Рассматриваются список S_1 обработанных оператором "станд" антецедентов теоремы, содержащих переменную x, а также список S_2 обработанных оператором "станд" антецедентов, содержащих переменную y. Проверяется, что эти списки имеют равные длины и первый переходит во второй после замены x на y и дообработки оператором "станд". В списке S_2 выбирается антецедент C заголовок которого не является указателем типа значения. Проверяется, что остальные элементы списка S_2 имеют своими заголовками указатели типа значения. Тогда создается спецификация "тип(перечни)", "направл(N)", "антецедент(i)". Здесь N - направление замены при нормализации, i - номер антецедента C. Пример:

$\forall_{abc}(0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$

Спецификация - "тип(перечни)", "направл(первыйтерм)", "антецедент(2)". Здесь непосредственно идентифицируемый антецедент "$0 \leq b$" выделяет подпроизведение b произведения ab.

(i) Декомпозиция сложной операции, использующая посылку, дающую явное значение для одного из декомпозирующих подвыражений (характеристика "частичнпредст").

Характеристика "частичнпредст(N)" указывает на тождество для декомпозиции сложного выражения, использующее равенство в посылках для значения самого сложного подвыражения одного из декомпозирующих термов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(внутркасаются)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcfp}(c = a \setminus b \ \& \ \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, b)) = p \ \& \ b \subseteq a \to \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, a)) = p + \mathrm{card}(\mathrm{roots}(f, c)))$

Спецификация "тип(внутркасаются)", "направл(второйтерм)".

(j) Вынесение наружу операции над семейством из-под сложного понятия (характеристика "развязка").

Характеристика "развязка(N)" указывает на тождество, выносящее наружу операцию над семейством из-под сложного понятия. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(усмделит)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCn}(\text{услнезависит}(\lambda_i(A(i), i \in \{1, \ldots, n\}), B, C) \to$
$\text{услвероятн}(\bigcap_{i=1}^{n} A(i), B, C) = \prod_{i=1}^{n} \text{услвероятн}(A(i), B, C))$

(k) Решение вспомогательной задачи для выражения подтерма сложной операции в виде объединения и вынесения этого объединения из-под сложной операции (характеристика "Разбиение").

Характеристика "Разбиение(X, N)" указывает на тождество, предпринимающее попытку разбиения класса и выражения его характеристики через характеристики подклассов. X - переменная для класса, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(контрольглубины)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{AKQ}(\mathrm{set}_{xyz}((x, y, z) \in A) = \bigcup_{i=1}^{n} Q(i) \ \& \ \text{разделены}(Q) \to$
$\text{объем}(\text{точки}(A, K)) = \sum_{i=1}^{n} \text{объем}(\text{точки}(Q(i), K)))$

Соответствующий прием обрабатывает левую часть антецедента вспомогательной задачей на описание, разрешая ее относительно z. Конечные объединение и сумма рассматриваются как обычные.

(l) Переход в одной из имеющих наибольшую сложность операций к более простым операндам (характеристика "упрощпересечение").

Характеристика "упрощпересечение(N)" указывает на тождество, упрощающее операнды одной из имеющих наибольшую сложность операция заменяемого терма. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(усмнеподв)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \log_b(\sqrt{c+1} - 1) - a \log_b(\sqrt{c+1} + 1) = 2a \log_b(\sqrt{c+1} - 1) - a \log_b c)$

6. Группировка сложных операций.

   (a) Группировка сложных операций (характеристика "группмножитель").

   Характеристика "группмножитель(N)" указывает на тождество, выполняющее группировку сложных операций. N - направление замены.

   Рассматриваются группа A подвыражений заменяемого терма, имеющих максимальную сложность, и группа B подвыражений заменяющего терма, имеющих максимальную сложность. Если заголовок f некоторого терма t списка B - неодноместная операция, для которой целесообразен переход к ее одинаковым i-м корневым операндам (например, к одинаковым основаниям логарифма), причем се термы списка A с заголовком f имеют один и тот же i-й операнд, отличный от i-го операнда терма t, то создание спецификации отменяется. Иначе проверяется, что список A состоит из единственного выражения P, причем набор B не образует его декомпозицию по свободным переменным. Тогда создается спецификация "тип(логзамена)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abc}(0 < \operatorname{sh} a \to c(\operatorname{sh} a)^b(\operatorname{ch} a)^b = c(\operatorname{sh}(2a))^b/2^b)$$

(b) Свертка нескольких сложных операций в одну более сложную, если эти операции слабо взаимодействуют с контекстом (характеристика "свертка").

Характеристика "свертка(N)" означает, что тождество обеспечивает переход к сокращенной записи.

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики с заголовком "нормализация". Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма больше оценки сложности заменяемого, причем заменяемый терм имеет более одного подтерма максимальной сложности, а заменяющий - только один такой подтерм. Тогда создается спецификация "тип(текстблок)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abmn}(n - \text{натуральное} \to an!/(bm!(n-m)!) = aC_n^m/b)$$

Спецификация - "тип(текстблок)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что в текущем терме задачи нет других факториалов.

(c) Подготовка к группировке сложных операций (характеристика "группоиды").

Характеристика "группоиды" указывает на тождество, позволяющее получить повторное вхождение сложной операции при развертке операции над семейством.

Создается спецификация "тип(ребра)", "направл(второйтерм)". Пример:

$$\forall_{cdm}(d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d \ \& \ m = c - d \ \& \ 0 < m \to c! = d! \prod_{n=d+1}^{c} n)$$

Соответствующий прием проверяет, что преобразуемый факториал - сомножитель слагаемого некоторой суммы, другое слагаемое которой имеет своим сомножителем факториал выражения d. При это разность g величин c, d - натуральное число, меньшее 5.

(d) Попытка группировки сложных операций после варьирования терма (характеристика "варьиртерма").

Характеристика "варьиртерма(F)" указывает на тождество, предпринимающее попытку варьирования выражения для преобразования надвыражения. F - фильтр, уточняющий контекст целесообразности попытки.

Создается спецификация "тип(корень)", "направл(второйтерм)", "см(F)". Если фильтр F вырожденный (константа "истина"), то последний элемент не вводится. Пример:

$\forall_{apqr}(p \cdot \arcsin(a/\sqrt{1+a^2}) + q = r \to p \cdot \mathrm{arctg}(a) + q = r)$

Спецификация - "тип(корень)", "направл(второйтерм)", "см(или(входит(арксинус q) входит(арккосинус q)))". Соответствующий прием обрабатывает левую часть антецедента вспомогательной задачей и проверяет, что группировка состоялась.

7. Упрощение контекста сложной операции.

   (a) Уменьшение натурального параметра, связанного с вхождением сложной операции, при редактировании ответа задачи на описание (характеристика "натурстепень").

   Характеристика "натурстепень(N)" указывает на тождество для уменьшения натурального параметра, связанного со сложным подвыражением. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(противоречие)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcdef}(f - \text{натуральное} \to d^{b+c\cdot(\log_d e)^f/a} = d^b e^{c\cdot(\log_d e)^{f-1}/a})$

   Спецификация - "тип(противоречие)", "направл(второйтерм)".

   (b) Перегруппировка с перенесением сложных операций на более "удобные" вхождения (характеристика "вхождперем").

   Характеристика "вхождперем(N)" указывает на тождество для перенесения сложного выражения на более удобное место. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(вычет)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abdeghi}(\neg(hg^{i/2} - e = 0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \mathrm{even})\ \&\ b - \mathrm{rational}\ \&$
   $0 \le g \to d(hg^{i/2} - e)^b/(a(g^i h^2 - e^2)^b) = d/(a(e + hg^{i/2})^b))$

   Спецификация - "тип(вычет)", "направл(первыйтерм)". Соответствующий прием переносит иррациональность из знаменателя в числитель.

8. Подготовка выражения к исключению сложной операции.

   (a) Преобразование сложной операции, ориентированное на последующее ее вычисление (характеристика "вычислять").

   Характеристика "вычислять(N)" указывает на тождество, реализующее один шаг в вычислении сложного выражения. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(нормрасстояний)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABCDEF}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \text{ромб}(ABCD)\ \&$
   $E \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ F \in \text{отрезок}(AD) \to S(\text{фигура}(AECF)) =$
   $S(\text{фигура}(ABCD)) - S(\text{фигура}(BEC)) - S(\text{фигура}(CDF)))$

   Соответствующий прием сводит вычисление площади фрагмента ромба к вычислению площади ромба и двух треугольников.

(b) Использование равенства из посылок для подготовки вычисления (протокол "вычисл").

Протокол "вычисл($f(s_1 \dots s_n)$)" означает, что для вычисления операции f целесообразно преобразование ее i-го операнда к заголовку s_i; $i = 1, \dots, n$.

Выбираются переменные $x_1, \dots, x_n, y$, фиксируется $i\{1, \dots, n\}$, и создается теорема с антецедентом $x_i = y$ и консеквентом $f(x_1 \dots x_n) = f(x_1 \dots x_{i-1}$ y $x_{i+1} \dots x_n)$. Она снабжается спецификацией "тип(пооднусторону)", "направл(второйтерм)", "см(не(заголовок(x_i s_i)) заголовок(y s_i))", "антецедент(1)".

В качестве примера рассмотрим протокол "вычисл(умножматр(строки строки))", указывающий, что для вычисления произведения двух матриц требуется их стандартное представление через операцию "строки(...)". По нему создается теорема приема

$\forall_{abc}(a = c \rightarrow ab = cb)$.

Здесь имеется в виду операция произведения матриц "умножматр". Теорема сопровождается спецификацией "тип(пооднусторону)", "направл(второйтерм)", "см(не(заголовок(a строки)) заголовок(c строки))", "антецедент(1)".

(c) Преобразование, подготавливающее возможность исключения сложного понятия, расположенного в терме, идентифицированном с переменной (характеристика "декомпозиция").

Характеристика "декомпозиция(N)" указывает на тождество для декомпозиции выражения со сложным заголовком. N - направление замены.

Проверяется, что заменяемый терм имеет вид $f(g(x,t))$, где g - символ коммутативной операции, x - переменная. Просматриваются вхождения v переменной x в заменяющую часть. Если v - операнд одноместной операции h, причем справочник "упрощдробь" указывает фильтр F, при истинности которого велика вероятность взаимного уничтожения в выражении $h(T)$ операции h и некоторой расположенной внутри T операции g, то этот фильтр регистрируется в накопителе R. Справочник выдает фильтр, в котором терм T обозначен первой переменной "x1". В нем могут встречаться и другие переменные, идентифицируемые самим фильтром. Перед занесением в накопитель R переменная "x1" заменяется на x, а прочие переменные - переобозначаются на новые переменные, не входящие в теорему. По окончании просмотра вхождений v проверяется, что накопитель R непуст. Рассматривается дизъюнкция D элементов этого накопителя, и создается спецификация "тип(началоразбора)", "направл(N)", "см(D)". Пример:

$\forall_{ab}(\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

Спецификация - "тип(началоразбора)", "направл(второйтерм)", "см(или(контекст(вид(a умножение(x3 x4))символ(x3 аркусинус арккосинус арктангенс) единица(1 x4) заменазнака(минус x4)) контекст(вид(a дробь(x3 x4)) или(заголовок(x4 2) и(заголовок(x4 минус) первыйсимвол(x4 2))) символ(x3 арксинус арккосинус арктангенс) заменазнака(минус x4))))".

   (d) Стандартизация подвыражения сложной операции, ориентированная на последующее ее вычисление (характеристика "стандоперанды").

   Характеристика "стандоперанды(F N)" указывает на тождество стандартизации подвыражения, направленной на последующее вычисление всего выражения. F - фильтр, уточняющий контекст вхождения подвыражения. В нем "теквхожд" обозначает преобразуемое подвыражение, "корень" - само выражение. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(геометрия)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$$\forall_{pm}(\text{циклперест}(\lambda_j(p(j), j \in \{1, \ldots, m\})) = \text{таблица}(\{p(m) \to p(1); \\ \lambda_j(p(j) \to p(j+1), j \in \{1, \ldots, m-1\})\}))$$

   Спецификация - "тип(геометрия)", "направл(второйтерм)", "см(контекст(подчинено(теквхожд x1)символ(x1 произведение)))". Для того, чтобы вычислить произведение подстановок, циклическая перестановка представляется в виде таблицы.

9. Реализация специальной целевой установки задачи на преобразование (характеристика "смцель").

   Характеристика "смцель(K N)" указывает на тождество, выполняющее замену в соответствии со специальной целевой установкой задачи на преобразование. K - указатель "контекст(...)", идентифицирующий необходимую целевую установку. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(теорияграфов)", "направл(N)", "указатель(K)". Пример:

$$\forall_{abflpq}(l = q - p \;\&\; 0 < l \;\&\; \text{нечетнаяфункция}(\lambda_x(f(x), x - \text{число})) \;\&\; \\ a = \lambda_i((2/l) \int_p^q f(x) \sin(2\pi i x/l) dx, i - \text{целое}) \to f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i) \sin(2\pi i x/l))$$

   Спецификация - "тип(теорияграфов)", "направл(второйтерм)", "указатель(контекст(цель(рядфурье x p q)))".

10. Упрощающее нетождественное преобразование при наличии специальной цели (характеристика "асимптравны").

   Характеристика "асимптравны(цель(C) N)" указывает на нетождественное преобразование условия задачи на преобразование, имеющей специальную целевую установку. C - цель задачи, N - направление замены. Заметим, что хотя преобразование и нетождественное (например, асимптотическая оценка), но консеквент теоремы приема имеет вид равенства.

   Создается спецификация "тип(движвлево)", "направл(N)", "см(условие тип(преобразовать) C)". Пример:

$$\forall_{an}((n \to \infty) \;\&\; \lim_{n \to \infty}\{m(n)\} = \infty \;\&\; a = m(n) \to m(n)! = \sqrt{2\pi a} a^a \text{exp}(-a))$$

   Спецификация "тип(движвлево)", "направл(второйтерм)", "см(условие тип(преобразовать)цель(асимптоценка))", "указатель(идентификатор(3))". Последний элемент спецификации добавлен оператором "теоремаприема", который ввел обозначение a для неоднократно встречающегося в заменяющей части выражения $m(n)$.

Специальная стандартизация

1. Специальная стандартизация (характеристика "стандартизация").

   Характеристика "стандартизация(N)" указывает на тождество либо эквивалентность, определяющие специальную стандартизацию в направлении N. Фактически, это просто указатель на не прорабатанные пока типы стандартизации.

   Создается спецификация "тип(автоклавиатура)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcdefghijkn}(f = ng + h \ \& \ e = ni + j \ \& \ h + j = n \ \& \ h \leq j \ \& \ \neg(n - \text{even}) \rightarrow (ak + b)^{f/n}(dk + c)^{e/n} = (ak + b)^{g}(dk + c)^{i+1}((ak + b)/(dk + c))^{h/n})$

   Соответствующий прием выделяет дробную степень дробно-линейной функции при интегрировании. Здесь k - переменная, по которой происходит интегрирование; e, f, n - натуральные константы. Все антецеденты выделены указателем "программа".

2. Попытка использовать специальную стандартизацию в условии задачи на доказательство (характеристика "стандцель").

   Характеристика "стандцель(N)" указывает на тождество, инициирующее попытку специальной стандартизации в условии задачи на доказательство. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(модульредактора)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{aAB}(a = l(AB) \rightarrow a^2 = \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AB)))$

   Соответствующий прием инициирует переформулировку условия задачи в терминах скалярных произведений. Заметим, что прием применяется только в усиленном режиме и на достаточно высоком уровне. Он не изменяет текущей задачи, а лишь предпринимает попытку решить вспомогательную задачу, полученную из текущей указанной заменой.

3. Упрощение выражения относительно связанных переменных (характеристика "связпеременная").

   Характеристика "связпеременная(N)" указывает на тождество для упрощения выражения относительно переменных связывающей приставки. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(удалениеузла)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcdpq}(ap + b = 0 \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ q = ad - bc \rightarrow cp + d = q/a)$

   Соответствующий прием усматривает, что утверждение расположено внутри квантора существования, причем p идентифицируется со всеми сомножителями, содержащими переменные связывающей приставки R этого квантора. Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем a не содержит переменных списка R. Выражение q линейно относительно переменных R, а выражение p - нелинейно. Таким образом, достигается переход от нелинейного относительно связанных переменных выражения к линейному.

4. Упрощение ответа функционального уравнения относительно варьируемой переменной (характеристика "связкоммент").

   Характеристика "связкоммент(N)" указывает на тождество для упрощения ответа функционального уравнения относительно варьируемой переменной. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(нормзадачи)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcd}((a + bc)/(bd) = a/(bd) + c/d)$

   Спецификация - "тип(нормзадачи)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием упрощает ответ функционального (например, дифференциального) уравнения относительно варьируемой переменной, входящей в выражение b, но не входящей в d.

5. Применение нормализатора приведения к заданным заголовкам для контекстной стандартизации (характеристика "стандравно")

   Характеристика "стандравно" указывает на тождество либо эквивалентность, использующие нормализатор для контекстной стандартизации. Сопровождается характеристикой "оператор(P)", указывающей название нормализатора P.

   Проверяется, теорема является тождеством, а P - нормализатор приведения к заданным заголовкам, после чего создается спецификация "тип(стандарт)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

   $\forall_{abcdef}(f = b+c \;\&\; d - \mathrm{rational} \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(d) - \mathrm{even}) \to a(b+c)^d/e = af^d/e)$

   Спецификация - "тип(стандарт)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Соответствующий прием выполняет разложение на множители суммы в числителе дробного выражения.

6. Обращение к нормализатору стандартной формы для контекстной стандартизации (характеристика "стандравно").

   Среди характеристик находится элемент "оператор(P)", причем теорема является тождеством, а справочник "станддн" усматривает, что P - название стандартной формы. Создается спецификация "тип(Прямоепроизведение)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". К ней добавляются элементы "см(...)", "указатель(...)" из характеристик теоремы. Пример:

   $\forall_{abcdefn}(f = (a + b)^n c/d + e \to \sin((a + b)^n c/d + e) = \sin f)$

   Спецификация - "тип(Прямоепроизведение)", "направл(второйтерм)", "оператор(стандплюс)", "см(натуральное(n) или(не(заголовок(c 1)) не(заголовок(d 1)) не(заголовок(n 1))))", "указатель(единица(1 c d n)единица(0 e))". Соответствующий прием раскрывает скобки под синусом.

Ввод обозначения для функции, рассматриваемой в условии задачи на преобразование (протокол "функподст")

Протокол "функподст(A B)" указывает терм A с подтермом "отображение(...)", для которого целесообразно ввести вспомогательное обозначение. B - фильтр, уточняющий условие на контекст. Предполагается, что A идентифицируется с условием задачи на преобразование.

Выбирается новая переменная x, находится подтерм "отображение(...)" терма A, и определяется результат A' замены в A данного подтерма на переменную x. Затем создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит равенство $A = A'$. Она снабжается спецификацией "тип(двенадцать)", "направл(второйтерм)", "см(условие тип(преобразовать) B)". Пример:

$\forall_{abuv}(\inf(\text{образ}(\lambda_x(u(x), v(x)), a)) = \inf(\text{образ}(b, a)))$

Спецификация - "тип(двенадцать)", "направл(второйтерм)", "см(условие тип(преобразовать) корень не(входит(целаячасть корень)))". Соответствующий прием вводит обозначение для функции, которая будет исследоваться с помощью производных.

Координаты

1. Выражение координат объекта через невырожденные числовые атомы (характеристика "систкоорд").

   Характеристика "систкоорд" указывает на тождество для определения координат объекта.

   Если консеквент имеет вид равенства обозначения каких-либо координат выражению t с заголовком "набор", причем t имеет хотя бы один невырожденный числовой атом и не имеет вырожденных, то создается спецификация "тип(добавлениеветви)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C)$ & $D \in \text{прямая}(AC)$ & $\text{точкалуча}(A, C, D) \rightarrow$ $\text{коорд}(D, K) = (0, l(AD)/l(AC)))$

2. Выражение координат объекта через координаты других объектов и вычисление последних с помощью нормализаторов (характеристика "систкоорд").

   Проверяется, что консеквент K имеет вид равенства выражения r, обозначающего какие-либо координаты, выражению t с заголовком "набор". Составляется список S всех выражений t', для которых среди антецедентов имеется равенство вида $r' = t'$, где r' обозначает какие-либо координаты и не имеет параметров, не входящих в r, а t' имеет заголовок "набор". Если S непуст и содержит все параметры выражения t, то создается спецификация "тип(восстановлениеменю)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{ABKabcd}(\text{коорд}(A, K) = (a, b)$ & $\text{коорд}(B, K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (c - a, d - b))$

   Соответствующий прием использует нормализатор "нормкоорд" для обработки левых частей антецедентов.

3. Выражение координат объекта через указанные в посылках координаты другого объекта (характеристика "систкоорд").

   Проверяется, что консеквент K имеет вид равенства выражения r, обозначающего какие-либо координаты, выражению t с заголовком "набор". Составляется список S всех выражений t', для которых среди антецедентов имеется равенство вида $r' = t'$, где r' обозначает какие-либо координаты и имеет параметры, не входящие в r, а t' имеет заголовок "набор". Проверяется, что список S непуст и содержит все параметры терма t. Находится список $i_1, \ldots, i_n$ номеров антецедентов, использованных при составлении списка S. Затем создается спецификация "тип(Набор)", "направл(второйтерм)", "антецедент($i_1 \ldots i_n$)". Пример:

   $\forall_{ABCKabcd}$(коорд(вектор(AC), K) $= (a, b)$ & коорд(вектор(CB), K) $= (c, d) \rightarrow$ коорд(вектор(AB), K) $= (a + c, b + d)$)

   Спецификация - "тип(Набор)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1 2)".

4. Выражение числового атома через координаты.

   (a) Выражение числового атома посылки через координаты (характеристика "значпарам").

   Характеристика "значпарам(N)" указывает на тождество, выражающее невырожденный числовой атом через параметры координат. N - направление замены.

   Проверяется отсутствие в посылках равенства, у которого в левой части находится обозначение каких-либо координат, а в правой части - описатель "класс". Тогда создается спецификация "тип(типы)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{Kabcu}$(Вектор(u) & крд($u, K, 1$) $= a$ & крд($u, K, 3$) $= b$ & крд($u, K, 2$) $= c$ & Трехмерн(K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ длина(u) $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$)

   (b) Выражение числового атома посылки через координаты и более простые числовые атомы (характеристика "числкоэфф").

   Характеристика "числкоэфф" указывает на тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат.

   Проверяется, что в посылках нет равенства, определяющего координаты множества объектов либо содержащего подтерм вида "точки(set(...))". Проверяется, что консеквент - равенство, в одной части которого расположен невырожденный числовой атом A. При этом множество параметров любого другого невырожденного числового атома консеквента, отличного от координаты, является собственным подмножеством параметров атома A. Тогда создается спецификация "тип(простыеделители)", "направл(N)", где N - направление исключения атома A. Пример:

   $\forall_{Kabc}$(вверх(вектор(AB), K) & прямкоорд(K) $\rightarrow$ скалумнож(вектор(AB), c) $=$ крд($c, K, 3$)$l(AB)$)

   (c) Выражение числового атома посылки через параметры уравнения для координат множества объектов (характеристика "значпарам").

Характеристика "значпарам(N)" указывает на тождество, выражающее невырожденный числовой атом через параметры координат. N - направление замены.

Если среди антецедентов имеется уравнение для координат множества объектов, то создается спецификация "тип(знач)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefABCDK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uv}(du + ev + f = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ ae - bd = 0\ \&\ \neg(d = 0) \to \text{расстмежду}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)) = |cd - af|/(|d|\sqrt{a^2 + b^2}))$

(d) Выражение числового атома условия задачи на преобразование через координаты (характеристика "значпарам").

Пусть имеется характеристика "значпарам(N)", причем среди антецедентов нет уравнения для координат множества объектов. Если оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого, то создается спецификация "тип(Копия)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCK}(B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{куб}(A)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&$
$\text{ребро}(\text{отрезок}(BC), A)\ \&\ \text{вверх}(\text{вектор}(BC), K) \to$
$\text{нижнийуровень}(A, K) = \text{крд}(B, K, 3))$

(e) Выражение числового атома условия задачи на преобразование через координаты (характеристика "числкоэфф").

Характеристика "числкоэфф" указывает на тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат.

Проверяется, что в посылках нет равенства, определяющего координаты множества объектов либо содержащего подтерм вида "точки(set(...))". Проверяется, что консеквент - равенство, причем оценка сложности одной из его частей меньше оценки сложности другой. Более сложная часть не имеет своим заголовком обозначение отдельной координаты объекта. Тогда создается спецификация "тип(Копия)", "направл(N)", где N - направление замены более сложной части на менее сложную. Пример:

$\forall_{ABCDKP}(\text{цилиндр}(A)\ \&\ \text{основание}(P, A)\ \&\ P = \text{Круг}(BCD)\ \&$
$\text{вертплосквект}(\text{вектор}(BC), K)\ \&\ \text{вертплосквект}(\text{вектор}(BD), K)\ \&$
$\text{прямкоорд}(K) \to \text{нижнийуровень}(A, K) = \text{крд}(B, K, 3) - l(BC))$

5. Определение характеристики множества, заданного через координаты своих элементов (характеристика "точки").

Характеристика "точки(N)" указывает на тождество, выражающее операцию над множеством через множество координат элементов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(просмотртерма)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{APK}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ P = \text{точки}(A, K) \to S(P) = \iint_A dxdy)$

6. Выражение координат множества объектов через описатель "класс" (характеристика "уравнмножество").

   Характеристика "уравнмножество" указывает на тождество либо дизъюнкцию тождеств, определяющих координаты заданного множества объектов.

   Проверяется, что консеквент - равенство, и создается спецификация "тип(внешконтекст)". Пример:

   $\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(y = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

7. Переход от выражения с координатами к существенным числовым атомам (характеристика "Числпарам").

   Характеристика "Числпарам(N)" указывает на тождество свертки, не имеющее в своей заменяемой части невырожденных числовых атомов, отличных от координатных, а в заменяемой - имеющее невырожденны числовые атомы, причем только некоординатные. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(квадркорень)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABCK}(A \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ \text{вправо}(\text{вектор}(BC), K) \rightarrow a \cdot \text{крд}(A, K, 1) - a \cdot \text{крд}(B, K, 1) = al(AB))$

   Соответствующий прием проверяет, что расстояние $l(AB)$ является существенным числовым атомом.

8. Выражение координат объекта в одной системе координат через его координаты в другой системе (характеристика "сисrécкоорд").

   Характеристика "систкоорд" указывает на тождество для определения координат объекта.

   Проверяется, что консеквент имеет вид равенства выражения вида $P(A, K)$, где P - название каких-либо координат, выражению с заголовком "набор". Проверяется наличие антецедента вида $Q(A, M) = \text{набор}(\ldots)$, где Q - название каких-либо координат (возможно, совпадающее с P), а M отлично от K. Тогда создается спецификация "тип(эксп)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{ABCDKQabdefghkmnp}(Q = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ \text{коорд}(D, Q) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (d, e, f) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (g, h, k) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (m, n, p) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (d + a(g - d) + b(m - d), e + a(h - e) + b(n - e), f + a(k - f) + b(p - f)))$

9. Задачи на преобразование, имеющие цель "класс".

   (a) Исключение вспомогательных параметров в условии задачи на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "вспомпараметр").

   Характеристика "вспомпараметр(N)" указывает на тождество, исключающее вспомогательный параметр в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормравно)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCDKx}(D -$ точка & прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (x, 0) \to x^2 = l(AD)^2)$

Соответствующий прием исключает вспомогательные параметры выражения x.

(b) Переход от координатного задания множества к бескоординатному в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "смлиния").

Характеристика "смлиния(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход от координатного к бескоординатному заданию множества точек. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(общаяточка)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCDEKa}($прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(AC) & разныеточки$(D, E) \to \mathrm{set}_X(X -$ точка & $\exists_x(x -$ число & коорд$(X, K) = (x, a))) =$ перпендикуляр(прямая(DE), тчкоорд$(K, (0, a))))$

(c) Декомпозиция координатного задания множества в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "сМлинии").

Характеристика "смЛинии(N)" указывает на тождество, обеспечивающее декомпозицию координатного задания множества точек.

Создается спецификация "тип(сохранениемеию)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{KPQ}(\mathrm{set}_A(A -$ точка & $\exists_{xy}((x, y) =$ коорд(A, K) & $\neg(P(x, y))$ & $Q(x, y))) = \mathrm{set}_A(A -$ точка & $\exists xy((x, y) =$ коорд(A, K) & $Q(x, y))) \setminus \mathrm{set}_A(A -$ точка & $\exists xy((x, y) =$ коорд(A, K) & $P(x, y))))$

(d) Переход к представлению множества объектов через множество координат в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "смточки").

Характеристика "смточки(N)" указывает на тождество для представления множества объектов с заданным условием на координаты через множество координат. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормарккосинус)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{KQpq}(\mathrm{set}_A(\exists_t(A =$ тчкоорд$(K, (p(t), q(t)))$ & $Q(t))) =$ точки$(\mathrm{set}_{xy}(\exists_t(Q(t)$ & $x = p(t)$ & $y = q(t))), K))$

10. Использование посылки для перехода к бескоординатному описанию множества в задаче на исследование, имеющей цель "точки" (протокол "точки").

Протокол "точки(A,B)" связывает с логическим символом A - названием координат - логический символ B, такой, что выражение $B(x, K)$ обозначает множество объектов, координаты типа A которых в системе координат K образуют множество x.

Для каждого символа s списка "разность", "пересечение", "объединение" создаются своя теорема и спецификация. Именно, вводится импликация с антецедентами $a = B(b, c)$, $a = d$ и консеквентом $s(a, e) = s(d, e)$. Она сопровождается спецификацией "тип(ограничено)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1 2)". Пример:

$\forall_{abcdK}(a = \text{точки}(b, K)\ \&\ a = c \to a \setminus d = c \setminus d)$

Соответствующий прием идентифицирует оба антецедента с посылками, проверяя, что выражение c не содержит символа "точки".

11. Выражение координаты через числовые атомы (характеристика "крд").

    Характеристика "крд(N)" указывает на тождество, в заменяемой части которого расположено выражение для отдельной координаты объекта. N - направление замены.

    Создается спецификация "тип(консеквент)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{ABK}(\text{вверх}(\text{вектор}(AB), K) \to \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 3) = l(AB))$

12. Операция над множествами, заданными через координаты (протокол "точки").

    Протокол "точки(A,B)" связывает с логическим символом A - названием координат - логический символ B, такой, что выражение $B(x, K)$ обозначает множество объектов, координаты типа A которых в системе координат K образуют множество x.

    Создается импликация с антецедентом "$A(a, b) = \text{set}_c(d(c))$" и консеквентом "$a \cup B(\text{set}_e(f(e))) = B(\text{set}_e(f(e)\ \&\ d(e)), b)$". Она сопровождается спецификацией "тип(конъюнкция)", "направл(второйтерм)", "указатель(идентификатор(1) кортежпеременных(c) кортежпеременных(e))", "быстрпреобр(фикс(0 2 1 2) задача(5 тип(описать) полный явное прямойответ упростить вход цель(неизвестная(e))))", "быстрпреобр(фикс(0 2) задача(4 упростить))". Пример:

    $\forall_{AFGK}(\text{коорд}(A, K) = \text{set}_y(G(y)) \to A \cap \text{точки}(\text{set}_x(F(x)), K) =$
    $\text{точки}(\text{set}_x(F(x)\ \&\ G(x)), K))$

5.4.2 Приемы эквивалентной замены

Общая стандартизация одного утверждения

1. Безусловная общая стандартизация одного утверждения (характеристика "общнорм").

   Характеристика "общнорм(N)" указывает на эквивалентность общей стандартизации утверждений, не имеющих вида конъюнкции либо дизъюнкции. Заменяющее утверждение элементарно. N - направление замены.

   Проверяется отсутствие характеристики "усиление". Если теорема имеет антецеденты, не используемые для сопровождения по о.д.з., то проверяется, что число параметров консеквента не менее двух, а у каждого антецедента параметр единственный. Кроме того, проверяется, что не выполнено ни одно из следующих условий:

   (a) Заменяемая часть имеет своим заголовком квантор. В случае квантора существования рассматривается список S конъюнктивных членов подкванторного утверждения, в случае квантора общности - список S антецедентов и консеквента. В этом списке имеет такое утверждение, что некоторая переменная, не относящаяся к кванторной приставке квантора, входит в него неоднократно.

   (b) Заменяемая часть - равенство с невырожденными числовыми атомами, ни один из которых не входит в заменяющую часть. Эта часть не является равенством.

   Тогда создается спецификация "тип(нормэкв)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(a + b = a + c \leftrightarrow b = c)$

2. Условная общая стандартизация одного утверждения (характеристика "общнорм").

   Проверяется отсутствие характеристики "усиление". Теорема имеет антецеденты, не используемые для сопровождения по о.д.з.. При этом либо число параметров консеквента менее двух, либо имеется антецедент с более чем одним параметром. Кроме того, проверяется, что не выполнено ни одно из следующих условий:

   (a) Заменяемое утверждение бесповторно, причем некоторый антецедент имеет более двух корневых операндов.

   (b) В заменяющем терме имеется подутверждение с более чем двумя корневыми операндами, заголовок которого отличен от символов "и", "или", "длялюбого", "существует". В заменяемом терме такого подутверждения нет.

   Тогда создается спецификация "тип(числооперандов)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(\text{непересек}(a, b) \to b \subseteq c \leftrightarrow b \subseteq a \cup c)$

   Спецификация - "тип(числооперандов)", "направл(первыйтерм)".

3. Условная общая стандартизация утверждения: использование проверочного оператора для отбрасывания альтернативы в условном выражении (протокол "легковидеть").

   Протокол "легковидеть(A B)" означает, что для проверки утверждений вида A введен проверочный оператор с заголовком B.

   Проверяется, что A имеет вид "$\neg(x = s)$", где x - переменная, s - логический символ. Поочередно рассматриваются импликации с антецедентом "$\neg(a = s)$" и консеквентами "$a = (b \text{ при } c, \text{ иначе } s) \leftrightarrow (c \,\&\, a = b)$", "$a = (s \text{ при } c, \text{ иначе } b) \leftrightarrow (\neg c \,\&\, a = b)$". В обоих случаях a, b, c - переменные с номерами 1,2,3. Эти импликации сопровождаются спецификацией "тип(числооперандов)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{abc}(\neg(a = \emptyset) \to a = (b \text{ при } c, \text{ иначе } \emptyset) \leftrightarrow c \,\&\, a = b)$

4. Общая стандартизация одного утверждения, использующая нормализатор приведения к заданным заголовкам (характеристика "нормзнака").

   Характеристика "нормзнака(N)" указывает на эквивалентность общей стандартизации, использующую нормализатор приведения к заданным заголовкам. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(упрощдн)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcdef}(a+b=de \ \& \ c=df \ \& \ \neg(d=0) \to a+b=c \leftrightarrow e=f)$

   Соответствующий прием обрабатывает левые части первых двух антецедентов нормализатором "факторизация".

5. Элементарная переформулировка с исключением сложного понятия (характеристика "уменьшение").

   Характеристика "уменьшение(N)" указывает на эквивалентность, исключающую символы с наибольшей оценкой сложности. N - направление замены.

   Проверяется, что теорема не имеет характеристик с заголовками "общнорм" и "развертка", причем обе части эквивалентности суть элементарные утверждения. Для каждой переменной x, входящей в заменяющее утверждение и не встречающейся в подтермах заменяемого утверждения, имеющих максимальную сложность, проверяется выполнение следующих условий:

   (a) Наибольшая из оценок сложности содержащих x подтермов заменяемого утверждения меньше наибольшей оценки сложности содержащих x подтермов заменяющего.

   (b) Существует вхождение x в заменяющее утверждение, расположенное внутри его подтерма, не имеющего своим заголовком ни один из символов "равно", "набор", "значение".

   Если они выполнены для какого-либо x, то спецификация не создается. Иначе создается спецификация "тип(обрыв)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(\text{верхняягрань}(a,b) \to \text{наибольший}(a,b) \leftrightarrow a \in b)$

6. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения.

   (a) Конъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения.

      i. Конъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения (характеристика "и").
      Характеристика "и(N)" указывает на эквивалентность, декомпозирующую элементарное утверждение в конъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

      Проверяется, что заменяющее утверждение не содержит символа "или". Если заменяемое утверждение содержит обозначение каких-либо координат, а заменяющее - обозначение $Q(\ldots)$ отдельной координаты, то проверяется наличие антецедента, содержащего символ Q. Затем создается спецификация "тип(огрсверху)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{abc}(a \in b \setminus c \leftrightarrow \neg(a \in c) \ \& \ a \in b)$

ii. Конъюнктивная декомпозиция элементарной посылки (характеристика "и").

Кроме проверок, указанных в предыдущем пункте, проверяется также, что если заменяемый терм имеет вхождение подтерма $s(\ldots)$ с более чем двумя корневыми операндами, то символ s входит в заменяющий терм. Затем создается спецификация "тип(транслзамена)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(c \subseteq a \cap b \leftrightarrow c \subseteq a \ \& \ c \subseteq b)$

(b) Дизъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения.

i. Дизъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения (характеристика "или").

Характеристика "или(N)" указывает на эквивалентность для декомпозиции элементарного утверждения в дизъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

Проверяется, что заменяющая часть не содержит символа "и". Создается спецификация "тип(сверткаварианта)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(a = \emptyset \ \vee \ b = \emptyset \leftrightarrow a \times b = \emptyset)$

Спецификация - "тип(сверткаварианта)", "направл(первыйтерм)".

ii. Дизъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения (характеристика "перечисл").

Характеристика "перечисл" указывает на эквивалентность для преобразования элементарного утверждения в квантор существования, подлежащий развертке в дизъюнкцию.

Создается спецификация "тип(сверткаварианта)", "направл(второйтерм)". В случае, когда среди подкванторных утверждений имеется утверждение U вида $i \in \{m, \ldots, n\}$, где i - варьируемая переменная, добавляются элементы "см($\ldots$)", необходимые для целочисленности значений m, n, а также элемент "указатель(или($\ldots$))", определяющий развертку квантора существования в дизъюнкцию по перечислению U. Пример:

$\forall_{abcd}(a = b - c \rightarrow d \in \{c, \ldots, b\} \leftrightarrow \exists_e(e \in \{0, \ldots, a\} \ \& \ d = c + e))$

Спецификация - "тип(сверткаварианта)", "направл(второйтерм)", "см(целое(a))", "указатель(или(фикс(0 2)фикс(0 2 2 1)))".

iii. Дизъюнктивная декомпозиция под корневым отрицанием в посылке (характеристика "или").

Проверяется, что заменяющая часть не содержит символа "и". Создается спецификация "тип(усмнечетнаяфункция)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

Соответствующий прием преобразует исходную посылку в конъюнкцию, которая далее расформируется на отдельные посылки.

(c) Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения.

   i. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения (характеристика "или").

      Проверяется, что заменяющая часть содержит символ "и". Создается спецификация "тип(множество)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{abcf}((a = \emptyset \vee b = \emptyset) \,\&\, (c = \emptyset \vee f = \emptyset) \vee a = c \,\&\, b = f \leftrightarrow a \times b = c \times f)$

      Спецификация - "тип(множество)", "направл(первыйтерм)".

   ii. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения (характеристика "и").

      Проверяется, что заменяющая часть содержит символ "или". Создается спецификация "тип(множество)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{bcde}((\neg(d \in b) \ \vee \ \neg(d \in e)) \,\&\,$ непересек$(b, e \cap \{;c\}) \leftrightarrow$ непересек$(b, e \cap \{d;c\}))$

      Спецификация - "тип(множество)", "направл(первыйтерм)".

   iii. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция в условии задачи на описание (характеристика "и").

      Проверяется, что заменяющая часть - конъюнкция равенств. Создается спецификация "тип(дескриптор)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{ab}(a \leq 0 \,\&\, b \leq 0 \rightarrow a = 0 \,\&\, b = 0)$

   iv. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция в условии задачи на доказательство (характеристика "или").

      Создается спецификация "тип(констдробь)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{abc}(a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

7. Ориентация равенства.

   (a) Ориентация равенства, приводящая к исключению понятия (протокол "исключ").

      Протокол "исключ(A B)" означает, что предпринимается ориентация равенств, направленная на исключение выражений с заголовком A. B - элементы спецификации приема.

      Если A отлично от символа "отображение", то определяется арность n символа A и вводится теорема "$\forall_{x_1 \ldots x_{n+1}}(x_1 = A(x_2 \ldots x_{n+1}) \leftrightarrow A(x_2 \ldots x_{n+1}) = x_1)$". Если A - символ "отображение", то вводится теорема "$\forall_{afg}(a = \lambda_x(f(x), g(x)) \leftrightarrow \lambda_x(f(x), g(x)) = a)$". В обоих случаях теорема сопровождается спецификацией "тип(Равно)", "B". Пример:

      По протоколу "исключ(мощность см(посылка тип(преобразовать) корень))" создается теорема приема

      $\forall_{ab}(a = \mathrm{card}(b) \leftrightarrow \mathrm{card}(b) = a)$

   (b) Ориентация равенства, приводящая к использованию понятия (протокол "использ").

Протокол "использ(A B)" означает, что предпринимается ориентация равенств, направленная на переход к использованию логического символа A. B - элементы спецификации приема.

Если A отлично от символа "отображение", то определяется арность n символа A и вводится теорема "$\forall_{x_1 \dots x_{n+1}}(A(x_2 \dots x_{n+1}) = x_1 \leftrightarrow x_1 = A(x_2 \dots x_{n+1}))$". Если A - символ "отображение", то вводится теорема "$\forall_{afg}(\lambda_x(f(x), g(x)) = a \leftrightarrow a = \lambda_x(f(x), g(x)))$". В обоих случаях теорема сопровождается спецификацией "тип(возрастаниедлин)", "B". Пример:

По протоколу "использ(отрезок см(тип(исследовать) корень или(не(цель(текстоваязадача))комментусловия(ориентацияравенства))) переменная)" создается теорема приема

$\forall_{abc}(\text{отрезок}(bc) = a \leftrightarrow a = \text{отрезок}(bc))$

8. Усиление утверждения.

   (a) Усиление утверждения (характеристика "усиление").

   Характеристика "усиление(N)" указывает на эквивалентность, выполняющую усиление элементарного утверждения. N - направление замены.

   Если каждый дизъюнктивный член заменяющего утверждения представляет собой равенство, то создается спецификация "тип(занесениеусловия)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow 0 < 2 - n \leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n = 1)$

   (b) Усиление посылки (характеристика "усиление").

   При наличии характеристики "усиление(N)" создается спецификация "тип(явное)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_n(n - \text{целое} \rightarrow 0 < n \leftrightarrow 0 \leq n - 1)$

   Спецификация - "тип(явное)", "направл(второйтерм)".

9. Константные выражения.

   (a) Упрощение утверждения относительно неконстантных выражений (характеристика "констнабор").

   Характеристика "констнабор(X N)" указывает на эквивалентность, упрощающую утверждение относительно неконстантных подвыражений. X - список переменных, идентифицируемых с константными выраженями, N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(удалениезамечания)", "направл(N)", "переменные(Y)", где Y - все переменные заменяемой части, не вошедшие в список X. Пример:

   $\forall_{abcd}(0 < a \ \& \ 0 < c \rightarrow a\sqrt{b} - c\sqrt{d} = 0 \leftrightarrow a^2 b - c^2 d = 0)$

   Спецификация - "тип(удалениезамечания)", "направл(второйтерм)", "переменные(b, d)".

(b) Упрощение условия задачи на доказательство относительно неконстантных выражений (характеристика "констнабор")

Создается спецификация "тип(окончание)", "направл(N)", "переменные(Y)", где Y - все переменные заменяемой части, не вошедшие в список X. Пример:

$\forall_{abcd}(0 < c \;\&\; 0 < d \;\&\; 0 \leq b \;\&\; 0 \leq a \rightarrow 0 \leq cb^2 - da^2 \leftrightarrow 0 \leq \sqrt{c}b - \sqrt{d}a)$

Спецификация - "тип(окончание)", "направл(первыйтерм)", "переменные(c, d)".

(c) Общая стандартизация, использующая вычисления с константными термами (характеристика "вычпрог").

Характеристика "вычпрог(N F T)" указывает на тождество либо эквивалентность, которые в случае применения в направлении N обеспечивают упрощение относительно констант, использующее вычисления ГЕНОЛОГа. F - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (в нее включаются указания на типы константных значений переменных), T - список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем непосредственных вычислений.

Для подвыражений t списка T вводятся обозначающие их новые переменные x, и равенства $x = t$ добавляются в начало списка антецедентов теоремы. В заменяющей ее части выражения t заменяются на переменные x. Измененная теорема сопровождается спецификацией "тип(титр)", "направл(второйтерм)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abcfgpqrs}(g = cs - q \;\&\; f = cr - p \;\&\; ar + bs < 0 \rightarrow c \leq (ap + bq)/(ar + bs) \leftrightarrow 0 \leq fa + gb)$

Спецификация - "тип(титр)", "направл(второйтерм)", "см(десчисло(b) десчисло(p)десчисло(q)десчисло(r)десчисло(s))".

10. Общая стандартизация с исключением квантора.

(a) Стандартизация с исключением квантора (характеристика "элемсвертка")

Характеристика "элемсвертка(N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой имеет своим заголовком квантор, а заменяющая элементарна. Заменяющая часть имеет переменные, не входящие в заменяемую часть. Оценка сложности заменяющего терма не превосходит оценок сложности заменяемого терма и любого из антецедентов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(пример)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCa}(A - \text{set} \;\&\; B - \text{set} \;\&\; C \subseteq A \times B \rightarrow \forall_x(x \in C \rightarrow x(2) = a) \leftrightarrow C \subseteq A \times \{a\})$

(b) Стандартизация с исключением квантора (характеристика "общнорм")

Проверяется, что заголовок заменяемой части - квантор и что теорема не имеет характеристики с заголовком "усиление". Проверяется, что оценка сложности заменяющего утверждения не превосходит оценки сложности заменяемого. Тогда создается спецификация "тип(пример)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ae}(\exists_d(d - \mathrm{set}\ \&\ a \subseteq d\ \&\ d \subseteq e) \leftrightarrow a \subseteq e)$

(c) Стандартизация с частичным исключением квантора (характеристика "связприставка").

Характеристика "связприставка(N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой представляет собой квантор. Кванторы в заменяющей части имеют более короткие связывающие приставки, причем сложность символов заменяющей части не более, чем сложность заменяемой. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(хэшзадачи)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{axP}(\forall_z(P(z) \rightarrow a(z) - \mathrm{rational}\ \&\ \neg(a(z) = 0)) \rightarrow \exists_{yz}(0 < y\ \&\ y - \mathrm{rational}\ \&\ x = a(z)y\ \&\ P(z)) \leftrightarrow \exists_z(P(z)\ \&\ x - \mathrm{rational}\ \&\ 0 < a(z)x))$

(d) Развертка квантора общности в конъюнкцию (протокол "список").

Протокол "список(A B)" означает, что A есть описатель "класс(...)", для которого предусмотрена идентификация с разверткой в конечный список, B - конъюнкция условий на параметры выражения A, при которых развертка целесообразна.

Пусть A имеет вид "$\mathrm{set}_x(C(x))$", где x - переменная. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ - все параметры терма A. Выбираются не входящие в A переменные a, n, P, i, y, и создается теорема приема $\forall_{anPx_1\ldots x_k}(\{;a\} = \mathrm{set}_x(C(x))\ \&\ l(a) = n \rightarrow (\forall_y(C(y) \rightarrow P(y)) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow P(a(i))))))$. Она сопровождается спецификацией "тип(переходномер)", "направл(второйтерм)", "см(B)", "указатель(развертка(фикс(1 2)) развертка(фикс(0 2))отображение(P))". Пример:

$\forall_{amnF}(\{;a\} = \mathrm{set}_y(\text{перестановка}(y, \{1, \ldots, n\}))\ \&\ l(a) = n \rightarrow \forall_x(\text{перестановка}(x, \{1, \ldots, n\}) \rightarrow F(x)) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, m\} \rightarrow F(a(i))))$

(e) Развертка квантора общности в конъюнкцию (характеристика "конъюнкциявсех").

Характеристика "конъюнкциявсех(N)" указывает на эквивалентность для развертки кванторной импликации в конъюнкцию.

Создается спецификация "тип(таблица)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{kAB}(\forall_{xy}(x \in E(k)\ \&\ A(x, y) \rightarrow B(x, y)) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{0, \ldots, k-1\} \rightarrow \forall_y(A(i, y) \rightarrow B(i, y))))$

Напомним, что посредством $E(k)$ в дискретной математике обозначается множество $\{0, \ldots, k-1\}$. Соответствующий прием выписывает заменяющую импликацию в виде конъюнкции. Предполагается, что k идентифицировано с натуральной константой.

(f) Развертка квантора существования в дизъюнкцию (характеристика "нормили").

Характеристика "нормили(N)" указывает на эквивалентность, имеющую квантор существования в заменяемой части и дизъюнкцию элементарных утверждений - в заменяющей. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(провменьше)", "направл(N)". Пример:

$\forall_A(\exists_n(n - \text{целое} \ \& \ A((-1)^n)) \leftrightarrow A(1) \ \vee \ A(-1))$

(g) Развертка квантора существования в дизъюнкцию (характеристика "дизъюнкциявсех").

Характеристика "дизъюнкциявсех(N)" указывает на эквивалентность для развертки квантора существования в дизъюнкцию.

Создается спецификация "тип(провменьше)", "направл(N)". Если квантор существования берется по переменной i, пробегающей целочисленный промежуток, то для тех концов промежутка, которые обозначены переменными x, в спецификацию добавляется элемент "см(целое(x))". Если неконстантный конец t промежутка обозначен не переменной, то для него вводится вспомогательная переменная x. К антецедентам теоремы присоединяется равенство $x = t$, а к спецификации добавляется элемент "см(целое(x))". Кроме того, если под квантором существования по i выделяется конъюнктивный член "принадлежит(i номера(...))", то к спецификации добавляется элемент "указатель(или(u_1 u_2))", где u_1 - указатель вхождения квантора существования, u_2 - указатель вхождения члена "принадлежит(i номера(...))". Пример:

$\forall_{afkm}(a = k - m \ \& \ k - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \to \exists_n(f(n) \ \& \ n - \text{целое} \ \&$
$m \leq n \ \& \ n \leq k) \leftrightarrow \exists_l(l \in \{0, \ldots, a\} \ \& \ f(m + l)))$

Спецификация - "тип(провменьше)", "направл(второйтерм)", "см(целое(a))", "указатель(или(фикс(0 2) фикс(0 2 2 1)))". Соответствующий прием равзорачивает заменяющий квантор существования в дизюнкцию. Проверяется, что a - целочисленная константа.

11. Стандартизация с исключением описателя (характеристика "нормсвязок").

Характеристика "нормсвязок(N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой содержит описатели, а заменяющая - не имеет связанных переменных. Ее сложность не превосходит сложности заменяемой части. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(списокзадач)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(\text{card}(\text{set}_x(x - \text{число} \ \& \ ax^2 + bx + c = 0)) = 2 \leftrightarrow 0 < b^2 - 4ac)$

12. Свертка дизъюнкции (характеристика "общнорм").

Проверяется, что заменяемый терм имеет заголовок "или", причем у теоремы нет характеристики "усиление". Тогда создается спецификация "тип(полный)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \leq b)$.

13. Свертка дизъюнкции (характеристика "сокращнеизв")

    Характеристика "сокращнеизв(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой есть дизъюнктивно-конъюнктивная конструкция из элементарных утверждений, глубина вхождения в оторые переменной x (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x, глубина которого равна 1. N - указатель направления замены.

    Проверяется, что заголовок заменяемого терма - "или", причем заменяющий терм - подтерм заменяемого. Тогда создается спецификация "тип(полный)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{ade}(d \subseteq e \rightarrow a \subseteq d \;\vee\; a \subseteq e \leftrightarrow a \subseteq e)$

14. Свертка конъюнкции (характеристика "общнорм")

    Если у теоремы нет характеристики с заголовком "усиление", то проверяется, что заголовок заменяемой части - "и", и создается спецификация "тип(блоктеорем)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{ab}(\neg(a - b = 0) \;\&\; b - a \leq 0 \leftrightarrow 0 < a - b)$

15. Расшифровка служебного символа "одз" (характеристика "одз").

    Характеристика "одз" указывает на эквивалентность, используемую для создания приема, выполняющего котнекстную расшифровку символа "одз".

    Создается спецификация "тип(бинарнаяоперация)", "направл(N)", где N - направление замены для устранения символа "одз". Пример:

    $\forall_{bcdf}(d = \mathrm{set}_x(g(x) \;\&\; \text{одз}(h(x))) \;\&\; f = \lambda_x(h(x), g(x)) \rightarrow \mathrm{Min}(f, \text{одз}, b, c) \leftrightarrow \mathrm{Min}(f, d, b, c))$

    Спецификация - "тип(бинарнаяоперация)", "направл(второйтерм)".

Общая стандартизация группы утверждений

1. Общая стандартизация группы посылок (характеристика "общнорм").

   Заголовок заменяемой части - "и", причем отсутствует характеристика с заголовком "усиление". Проверяется, что не выполнено ни одно из следующих условий:

   (a) Среди конъюнктивных членов заменяемой части встречается равенство с невырожденными числовыми атомами, причем заменяющая часть элементарна, не является равенством и не содержит невырожденных числовых атомов указанного равенства.

   (b) В заменяющей части встречается подутверждение с более чем двумя корневыми операндами, не являющееся конъюнкцией либо дизъюнкцией, а в заменяемой части такого подутверждения нет.

Если они не выполнены, то создается спецификация "тип(заменатермов)", "направл(N)". Пример:

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \neg(a = 0) \ \& \ 0 \leq a \leftrightarrow 0 < a)$

2. Общая стандартизация группы кванторных посылок с одинаковыми антецедентами (характеристика "общнорм").

   Заголовок заменяемой части - "и", причем отсутствует характеристика с заголовком "усиление". Отсутствуют существенные антецеденты. Каждый параметр заменяющего утверждения является параметром заменяемого. Каждый конъюнктивный член как заменяющего, так и заменяемого утверждений элементарен. Рассматриваются все параметры $x_1, \ldots, x_n$ заменяемого утверждения, а также все его конъюнктивные члены $A_1, \ldots, A_m$. Выбираются новые (не входящие в теорему) переменные $P, z_1, \ldots, z_m$. Составляется список S кванторных импликаций $\forall_{z_i}(P(z_i) \rightarrow A'_i)$; $i = 1, \ldots, m$, где A'_i - результат подстановки в A_i термов $x_1(z_i), \ldots, x_n(z_i)$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$. Определяется результат Q подстановки в заменяющее утверждений выражений $x_1(z_1), \ldots, x_n(z_1)$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$. Создаются импликация P вида $\forall_{z_1}(P(z_1) \rightarrow Q)$ и эквивалентность E конъюнкции утверждений S утверждению P. Находятся все свободные переменные $z_1, \ldots, z_q$ терма E. Составляется список $B_1, \ldots, B_k$ всех антецедентов теоремы, не используемых для сопровождения по о.д.з. ее заменяемого терма. Если $k = 0$, то создается импликация $\forall_{z_1 \ldots z_q} E$, которая сопровождается спецификацией "тип(окрестность)", "направл(второтйерм)". Если $k > 0$, то выбираются новые переменные $Z_1, \ldots, Z_q$ и составляется список M импликаций $\forall_{Z_i}(P(Z_i) \rightarrow B'_i)$; $i = 1, \ldots, q$. Здесь $B'i$ - результат подстановки в B_i термов $x_1(Z_1), \ldots, x_n(Z_n)$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$. Затем создается импликация с антецедентами S' и консеквентом E, снабжаемая той же спецификацией, что и выше. Пример:

   $\forall_{abc}(\forall_d(c(d) \rightarrow a(d) \subseteq b(d)) \ \& \ \forall_e(c(e) \rightarrow b(e) \subseteq a(e)) \leftrightarrow \forall_d(c(d) \rightarrow a(d) = b(d)))$

3. Общая стандартизация группы условий задачи на описание (характеристика "общнорм")

   Заголовок заменяемой части - "и", причем отсутствует характеристика с заголовком "усиление". Создается спецификация "тип(заменаусловия)", "направл(N)". Если теорема имеет характеристику с заголовком "определение", то к спецификации добавляется элемент "см(не(цель(проверка)))". Пример:

   $\forall_{ab}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ 0 \leq ab \leftrightarrow 0 < ab)$

4. Общая стандартизация группы условий задачи на описание (характеристика "связпарам")

   Характеристика "связпарам(N)" указывает на эквивалентность, у которой заменяемая часть имеет связанные переменные, а заменяющая - не имеет. Сложность заменяющей части не больше сложности заменяемой. N - направление замены.

Проверяется, что заменяемая часть - конъюнкция, каждый член которой - элементарное утверждение либо кванторная импликация с элементарными антецедентами и консеквентом. Создается спецификация "тип(заменаусловия)", "направл(N)". Пример:

Пример:

$\forall_a$(классмножеств$(a) \leftrightarrow a - \mathrm{set}\ \&\ \forall_x(x \in a \to x - \mathrm{set}))$

Спецификация - "тип(заменаусловия)", "направл(первыйтерм)".

5. Исключение описателя в группе посылок с помощью вспомогательной задачи на описание (характеристика "смпреобр").

   Характеристика "смпреобр(N)" указывает на эквивалентность, предназначенную для перехода от группы посылок с описателями "класс" к элементарной посылке. Антецедент введен для обращения к вспомогательной задаче, преобразующей утверждение под описателем "класс". N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(Ключ)", "направл(N)". Если заменяемый терм - конъюнкция, среди членов которой встречается утверждение P вида $x \in A$ либо $x \subseteq A$, где x - переменная, а выражение A содержит описатель "класс", то к спецификации добавляется элемент "указатель(смравно(u))", где u - указатель вхождения A в теорему. Кроме того, добавляется элемент "указатель(точкапривязки(s))", где s - заголовок утверждения P. Пример:

   $\forall_{APQKa}(\mathrm{set}_x(P(x)\ \&\ Q(x)) = a \to A \in$ точки$(\mathrm{set}_x(P(x)), K)\ \&$
   $A \in$ точки$(\mathrm{set}_x(Q(x)), K) \leftrightarrow A \in$ точки$(a, K))$

   Спецификация - "тип(Ключ)", "направл(второйтерм)", "указатель(смравно(фикс(0 1 1 2))", "указатель(смравно(фикс(0 1 2 2)))", "указатель(точкапривязки(принадлежит))". Соответствующий прием разрешает относительно x утверждение $P(x)\ \&\ Q(x)$.

Сокращенная переформулировка

1. Дизъюнктивно - конъюнктивная свертка в условии задачи на свертку (характеристика "сборка").

   Характеристика "сборка(N)" указывает на эквивалентность, используемую для сокращенной переформулировки утверждений. N - направление замены.

   Если заменяемый терм - конъюнкция, все члены которой, кроме некоторого члена A, необходимы для сопровождения по о.д.з. утверждения A, то спецификация не создается. Иначе - создается спецификация "тип(сборка)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{bef}$(непересек$(b, e \cup f) \leftrightarrow$ непересек$(b, e) \cup$ непересек$(b, f))$

   Спецификация - "тип(сборка)", "направл(первыйтерм)".

2. Сокращенная переформулировка группы условий задачи на свертку (характеристика "сборка")

   Проверяется, что заменяемый терм - конъюнкция. Как и в предыдущем пункте, проверяется, что она не состоит из единственного утверждения и группы сопровождающих его по о.д.з. утверждений. Затем создается спецификация "тип(соединение)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

   Спецификация - "тип(соединение)", "направл(первыйтерм)".

3. Свертка группы известных условий задачи на описание при редактировании ответа (характеристика "сборка").

   Проверяется, что заменяемый терм - конъюнкция, не состоящая из единственного утверждения и группы сопровождающих его по о.д.з. утверждений. Проверяется, что заменяющий терм бесповторный. Если какой - либо из конъюнктивных членов заменяемого терма - равенство переменной не содержащему ее выражению, то заменяющий терм тоже является равенством. Тогда создается спецификация "тип(комментарииусловия)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(0 \leq b - a \ \& \ 0 \leq a + b \leftrightarrow 0 \leq b - |a|)$

4. Упрощение известного условия для параметров при редактировании ответа задачи на описание (характеристика "упрощплюс")

   Характеристика "упрощплюс(N)" указывает на эквивалентности, у которых сложности заменяемой и заменяющей частей эквивалентности равны, причем обе эти части элементарны. При переходе к заменяющей части уменьшается максимальная сложность собственных подтермов термов максимальной сложности. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(равнойдлины)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcmn}(m - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ \neg(n - \text{even}) \rightarrow a + bc^{m/n} = 0 \leftrightarrow a^n + b^n c^m = 0)$

   Спецификация - "тип(равнойдлины)", "направл(второйтерм)".

5. Упрощение известного условия для параметров при редактировании ответа задачи на описание (характеристика "упрощразность")

   Характеристика "упрощразность(N)" указывает на эквивалентность, у которой сложности заменяемой и заменяющей частей одинаковы, но множество имеющих максимальную сложность подтермов заменяющей части является собственным подмножеством множества таких подтермов для заменяемой части. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(равнойдлины)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(0 < b - a + 1 \rightarrow 0 \leq -1 + [a] - [b] \leftrightarrow b < [a])$

   Спецификация - "тип(равнойдлины)", "направл(второйтерм)".

6. Упрощение известного условия для параметров при редактировании ответа задачи на описание (характеристика "уменьшение")

   Характеристика "уменьшение(N)" указывает на эквивалентность, исключающую символы с наибольшей оценкой сложности. N - направление замены.

   Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "развертка", "общнорм". Если заменяемая часть элементарна, то создается спецификация "тип(равнойдлины)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{abcdef}(f = b^e - c^a b^d \to a \log_b c + d < e \leftrightarrow 0 < b - 1 \ \& \ 0 < f \ \vee \ b - 1 < 0 \ \& \ f < 0)$

   Спецификация - "тип(равнойдлины)", "направл(второйтерм)", "указатель(идентификатор(1))". Последний элемент вводится при модификации теоремы оператором "теоремаприема".

7. Упрощение известного условия для параметров при редактировании ответа задачи на описание (характеристика "сборка")

   Характеристика "сборка(N)" указывает на эквивалентность, используемую для сокращенной переформулировки утверждений. N - направление замены.

   Если заголовок заменяемой части - "или", а заменяющая часть элементарна, то создается спецификация "тип(равнойдлины)", "направл(N)", "см(корень цель(и))". Пример:

   $\forall_{abc}(a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

Кванторные свертки и расшифровки

1. Кванторная свертка (характеристика "кванторнаясвертка")

   Характеристика "кванторнаясвертка(N)" указывает на эквивалентность для кванторной свертки. N - направление замены для исключения квантора.

   Создается спецификация "тип(кванторнаясвертка)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to c \in b))$

2. Кванторная свертка (характеристика "общнорм")

   Проверяется отсутствие характеристики с заголовком "усиление". Заменяемый терм имеет своим заголовком квантор "длялюбого" либо "существует". Оценка сложности заменяющего терма больше оценки сложности заменяемого. Тогда создается спецификация "тип(кванторнаясвертка)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_f(\text{семействомножеств}(f) \leftrightarrow \forall_x(x \in \mathrm{Dom}(f) \leftrightarrow f(x) - \mathrm{set}))$

3. Свертка квантора существования в консеквенте кванторного условия задачи на описание (характеристика "Существует")

   Характеристика "Существует(N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой представляет собой квантор, а заменяющая - бескванторная. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(ветвьоглавления)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{AGPfyz}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $A =$ носитель(G) & $f(z) \in A \rightarrow \exists_x(y = f$(префикс$(x, z)$) & $P(x)) \leftrightarrow y \in A$ & $P(f(y,$ обрэлемент$(f(z), f))))$)

Соответствующий прием проверяет, что преобразуется консеквент кванторного условия задачи на описание.

4. Кванторная расшифровка (характеристика "развертка")

   Характеристика "развертка(K N)" указывает на эквивалентность для кванторной расшифровки. K - тип возникающего при расшифровке квантора ("длялюбого", "существует"); N - направление замены.

   Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого и что подтермы заменяемого терма, обладающие максимальной сложностью, отличны от самого заменяемого терма. Создается спецификация "тип(теквхожд)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{af}(a \in \bigcup(f) \leftrightarrow \exists_x(x \in \mathrm{Dom}(f)$ & $a \in f(x)))$

5. Кванторная расшифровка в условии задачи на доказательство (характеристика "развертка")

   Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого. Ни одна из частей эквивалентности не имеет заголовка "не". Тогда создается спецификация "тип(развертка)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$

6. Кванторная расшифровка посылки, приводящая к квантору общности (характеристика "развертка").

   Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого. Заменяемое утверждение элементарно. Заменяющее - имеет своим заголовком квантор и не содержит символа "эквивалентно". Оно содержит также противоположный квантор. Создается спецификация "тип(задача)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fm}(f(m) -$ число $\rightarrow$ сходится$(\lambda_m(f(m), m -$ натуральное$)) \leftrightarrow \exists_a(a -$ число & $\forall_e(e -$ число & $0 < e \rightarrow \exists_n(n -$ натуральное & $\forall_m(m -$ натуральное & $n \leq m \rightarrow |f(m) - a| < e)))))$

   Первый антецедент был создан процедурой "теоремаприема" по антецеденту "последовательность(f,R)" исходной теоремы. При этом к спецификации добавились элементы "указатель(блокпроверок(1))", "указатель(занесениепосылки(1 натуральное(m)))".

7. Кванторная расшифровка посылки, приводящая к конъюнкции с квантором общности (характеристика "развертка").

Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого. Заменяемое утверждение элементарно. Заменяющее - представляет собой конъюнкцию, один из членов которой имеет своим заголовком квантор общности. Создается спецификация "тип(задача)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{AGaf}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $a \in$ носитель(G) & $A \subseteq$ носитель$(G) \to$ порождэлемент$(a, A, G) \leftrightarrow a \in A$ & $\forall_x(x \in A \to \exists_n(n-$целое & $x =$ алгстепень$(a, f, n))))$

8. Кванторная расшифровка посылки, приводящая к квантору существования (характеристика "развертка").

   Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого. Заменяемое утверждение элементарно. Заменяющее - имеет своим заголовком квантор и не содержит символа "эквивалентно". Создается спецификация "тип(облнорм)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abf}(a \in$ образ$(f, b) \leftrightarrow \exists_x(a = f(x)$ & $x \in b))$

   Заметим, что в случае квантора общности прием проверяет наличие отрицания над преобразуемым утверждением.

9. Кванторная расшифровка утверждения с описателями.

   (a) Кванторная расшифровка утверждения с описателями (характеристика "развертка").

   Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого. Заменяемое утверждение элементарно и не является равенством. В заменяющем утверждении P встречается квантор K. Его связывающая приставка состоит из единственной переменной x. Рассматривается параметр y заменяющего утверждения, имеющий в нем единственное вхождение v. Это вхождение расположено под квантором K и имеет вид "$x \in y$". Если в заменяемой части встречается отличная от y переменная, причем эта часть симметрична относительно данных двух переменных, то в качестве y выбирается лексикографически большая. Определяется результат A подстановки в заменяемую часть выражения $\mathrm{set}_x(y(x))$ вместо переменной y, а также результат B замены вхождения v в заменяющую часть на терм "$y(x)$". Создается импликация, антецеденты которой получены подстановкой в отличные от "множество(y)" антецеденты теоремы терма $y(x)$ вместо y. Ее консеквентом служит эквивалентность термов A, B. Здесь сохраняется ориентация исходной теоремы. Построенная таким образом импликация сопровождается спецификацией "тип(точкапрямой)", "направл(N)". Пример:

   По теореме

   $\forall_{ab}(a - \mathrm{set}$ & $b - \mathrm{set} \to$ непересек$(a, b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to \neg(c \in b)))$

   создается импликация:

   $\forall_{ab}(a - \mathrm{set} \to$ непересек$(a, \mathrm{set}_c b(c)) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to \neg b(c)))$

Процедура "теоремаприема" отбрасывает ее антецедент.

(b) Кванторная расшифровка утверждения с описателями (характеристика "описание").

Характеристика "описание(N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой содержит описатели, а заменяющая - не содержит, но содержит кванторы. Сложность заменяющей части меньше сложности заменяемой. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(точкапрямой)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{afg}(g(a) \to \inf(\mathrm{set}_x(\exists_y(x = f(y)\ \&\ g(y)))) = f(a) \leftrightarrow$
$\forall_y(g(y) \to f(a) \leq f(y)))$

Спецификация - "тип(точкапрямой)", "направл(второйтерм)".

(c) Кванторная расшифровка в условии задачи на описание, исключающая неизвестный описатель (характеристика "исключлин").

Характеристика "исключлин(N)" указывает на эквивалентность кванторной расшифровки, исключающую описатель. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(разныестороны)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{PQ}(\mathrm{set}_x(P(x)) = \mathrm{set}_y(Q(y)) \leftrightarrow \forall_x(P(x) \to Q(x))\ \&\ \forall_x(Q(x) \to P(x)))$

Спецификация "тип(разныестороны)", "направл(второйтерм)".

(d) Кванторная расшифровка в условии задачи на поиск примера, исключающая неизвестный описатель (характеристика "исключлин").

Создается спецификация "тип(Отображение)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Pa}(\mathrm{set}_x(P(x)) = a \leftrightarrow \forall_x(P(x) \to x \in a)\ \&\ \forall_x(x \in a \to P(x)))$

10. Кванторная расшифровка, приводящая к параметрическому описанию класса (характеристика "развертка").

Характеристика "развертка(K N)" указывает на эквивалентность для кванторной расшифровки. K - тип возникающего при расшифровке квантора ("длялюбого", "существует"); N - направление замены.

Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого, причем K - символ "существует". Заменяющий терм имеет своим заголовком квантор существования, причем среди конъюнктивных членов подкванторного утверждения встречается равенство $x = t$, где x - переменная, не входящая в связывающую приставку квантора существования и в выражение t. Тогда создается спецификация "тип(нормразность)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABx}(f = \text{операция}(A) \to \text{левсмежнкласс}(x, A, B) \leftrightarrow \exists_y(y \in \text{носитель}(A)\ \&$
$x = \mathrm{set}_z(\exists_u(u \in B\ \&\ z = f(y, u)))))$

Спецификация - "тип(нормразность)", "направл(второйтерм)".

11. Кванторная расшифровка константного условия при редактировании ответа (характеристика "развертка").

    Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого, причем заменяемый терм - не равенство. Создается спецификация "тип(пунктыоглавления)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{Aaf}$(группа(A) & $f =$ операция$(A) \to$ подгруппа$(a, A) \leftrightarrow a -$ set &
    $a \subseteq$ носитель(A) & $\forall_{xy}(x \in a$ & $y \in a \to f(x, y) \in a)$ &
    $\forall_x(x \in a \to$ обрэлемент$(x, f) \in a))$

12. Кванторная расшифровка под квантором.

    (a) Кванторная расшифровка под квантором (характеристика "развертка").

        Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого. Создается спецификация "тип(нормчислитель)", "направл(N)". Пример:

        $\forall_{ab}(a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to c \in b))$

        Соответствующий прием проверяет, что преобразуемое утверждение расположено под квантором. Он вводит комментарий, блокирующий обратное преобразование. Обычно уровень срабатывания такого приема достаточно большой, т.е. расшифровка предпринимается при исчерпании прочих средств.

    (b) Кванторная расшифровка антецедента кванторной импликации, приводящая к квантору существования, и явное разрешение подкванторного утверждения относительно связанных переменных (характеристика "развертка").

        Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого. Заменяемое утверждение элементарно. Заменяющее - имеет своим заголовком квантор существования и не содержит символа "эквивалентно". Создается спецификация "тип(замещение)", "направл(N)". Пример:

        $\forall_{afc}(y \in \mathrm{Val}(\lambda_x(f(x), c(x))) \leftrightarrow \exists_x(c(x)$ & $a = f(x)))$

        Соответствующий прием проверяет, что заменяемое утверждение является антецедентом кванторной импликации, и разрешает утверждения под квантором существования относительно x.

13. Кванторная расшифровка в условии задачи на описание, не имеющей неизвестных (характеристика "развертка").

    Проверяется, что теорема имеет характеристику с заголовком "определение". Затем создается спецификация "тип(неравенства)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{Af}$(бинарнаяоперация$(f, A) \to$ коммутативно$(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A$ & $y \in A \to f(x, y) = f(y, x)))$

14. Явное разрешение относительно переменных кванторной приставки кванторной расшифровки отрицания условия задачи на описание (характеристика "развертка").

    Проверяется, что оценка сложности заменяющего утверждения A меньше оценки сложности заменяемого, причем заменяемое утверждение B элементарно. Заголовком утверждения A служит квантор общности. Составляется список S, образованный антецедентами квантора A и отрицанием его консеквента. Составляется список F переменных f, для которых в A имеется подтерм вида "значение(f ...)", причем в B существует вхождение f, не имеющее вида "значение(f ...)". Проверяется, что список S непуст. Выбирается переменная g, не входящая в теорему. Формируется терм t вида "значение(g X)", где X - связывающая приставка квантора A. Формируется конъюнкция K утверждений S. Создается импликация, полученная из теоремы добавлением к антецедентам утверждения "$K = t$"и заменой консеквента на "$B \leftrightarrow \neg(\exists_X t)$". Эта импликация сопровождается спецификацией "тип(нормплощадь)", "направл(N)", "функция(F)". Пример:

    $\forall_{APf}((x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ \neg(f(x,y) \in A)) = P(x,y) \to \text{замкнуто}(A,f) \leftrightarrow \neg(\exists_{xy}(P(x,y))))$

    Спецификация - "тип(нормплощадь)", "направл(N)", "функция(f)". Соответствующий прием преобразует левую часть антецедента, пытаясь разрешить ее относительно x, y. Даже в случае, когда это не удается, замена выполняется.

15. Кванторная расшифровка в режиме развертки (характеристика "развертка").

    Проверяется, что оценка сложности заменяющего утверждения A меньше оценки сложности заменяемого. Затем создается спецификация "тип(контрольбуфера)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{ab}(\text{наименьший}(a,b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \to a \in c))$

    Соответствующий прием применяется к подутверждению условия задачи на описание, имеющей цель "развертка".

16. Ввод новых описателей в режиме свертки (характеристика "новзнач").

    Характеристика "новзнач(N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой представляет собой кванторную импликацию без описателей, а заменяющая - результат подстановки некоторых описателей в элементарное утверждение. N - направление замены.

    Создается спецификация "тип(текзадача)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{abcd}(\text{нижняягрань}(b, \text{set}_e(\exists_c(e = d(c) \ \& \ a()))) \leftrightarrow \forall_c(a(c) \to b \leq d(c)))$

    Спецификация - "тип(текзадача)", "направл(первыйтерм)".

Применение параметрического описания

1. Попытка использования явного параметрического описания при получении частичного ответа (характеристика "параметризация").

   Характеристика "параметризация" указывает на эквивалентность с квантором существования в одной из своих частей, которую можно неизбыточным образом использовать для получения явного параметрического описания.

   В качестве направления замены N выбирается то, которое приводит к появлению квантора существования. Проверяется, что заменяемая часть представляет собой элементарное утверждение. Тогда создается спецификация "тип(параметризация)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(a \subseteq b \leftrightarrow \exists_c(a = b \cap c \ \& \ c - \mathrm{set}))$

   Спецификация - "тип(параметризация)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется в задачах на описание, имеющих цель "пример" либо "параметризация", причем a - неизвестная.

2. Попытка использования неявного параметрического описания при получении частичного ответа (характеристика "попыткапараметризации").

   Характеристика "попыткапараметризации" указывает на эквивалентность с квантором существования в одной из своих частей, которую можно неизбыточным образом использовать для получения неявного параметрического описания.

   В качестве направления замены N выбирается то, которое приводит к появлению квантора существования. Проверяется, что внутри этого квантора нет символа "эквивалентно". Тогда создается спецификация "тип(попыткапараметризация)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(\neg(a \subseteq b) \leftrightarrow \exists_c(\neg(c \in b) \ \& \ c \in a))$

3. Попытка использования неявного параметрического описания при получении частичного ответа (характеристика "параметризация").

   В качестве направления замены N выбирается то, которое приводит к появлению квантора существования. Проверяется, что этот квантор имеет не менее двух свободных переменных. Тогда создается спецификация "тип(параметризация)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{mk}(m - \text{целое} \ \& \ k - \text{целое} \rightarrow m|k \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ k = mn))$

   Отличие от приема, использующего данное описание как явное, заключается в том, что здесь не требуется, чтобы переменная k была неизвестной, а лишь то, чтобы заменяемое утверждение содержало неизвестную.

4. Явное параметрическое описание собственного подутверждения условия при получении полного ответа задачи на описание (характеристика "параметризация").

   В качестве направления замены N выбирается то, которое приводит к появлению квантора существования. Проверяется, что теорема имеет характеристику "определение(...)". Тогда создается спецификация "тип(цепь)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{nx}(n - \text{натуральное} \rightarrow x \in \text{транспозиции}(n) \leftrightarrow \exists_{ij}(i \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; j \in \{1, \ldots, n\} \;\&\; \neg(i = j) \;\&\; x = \text{транспозиция}(i, j, n)))$

5. Использование неявного параметрического описания при получении ответа задачи на описание, не имеющей несущественных неизвестных (характеристика "попыткапараметризации").

   Проверяется, что под квантором существования нет эквивалентности, и создается спецификация "тип(учетвбуфере)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_b(\neg(b \subseteq \mathbb{Z}) \leftrightarrow \exists_a(\neg(a - \text{целое}) \;\&\; a \in b))$

6. Попытка использования явного параметрического описания несущественной неизвестной, позволяющего обозначить вспомогательной переменной заданный встречающийся в задаче терм (характеристика "парамугол").

   Характеристика "парамугол(t N)" указывает на эквивалентность для явного параметрического описания, позволяющую вводить вспомогательную неизвестную для встречающегося в задаче терма t с неизвестными. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(анализатор)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fABa}(\text{взаимнооднозначно}(f) \;\&\; a \in A \rightarrow \text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow \exists_{bg}(b \in B \;\&\; \text{Отображение}(g, A\backslash\{a\}, B\backslash\{b\}) \;\&\; \text{взаимнооднозначно}(g) \;\&\; f = \text{доопределение}(g, \{a\}, b)))$

   Характеристика - "парамугол($f(a)$ второйтерм)". Соответствующий прием усматривает, что f - несущественная неизвестная. Парметрическое описание вводит вспомогательную переменную b для $f(a)$.

7. Переход к параметрическому описанию под квантором либо описателем (характеристика "перечислподст").

   Характеристика "перечислподст(N)" указывает на эквивалентность для замены группы условий под описателем на параметрическое описание. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(Однасторона)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{Pikmnp}(\text{простое}(p(i)) \;\&\; k(i) - \text{натуральное} \rightarrow m - \text{натуральное} \;\&\; m | \prod_{i=1}^{n}(p(i))^{k(i)} \;\&\; m \in P \leftrightarrow \exists_a(\text{кортеж}(a, n, \mathbb{Z}) \;\&\; \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow 0 \leq a(i) \;\&\; a(i) \leq k(i)) \;\&\; m = \prod_{i=1}^{n}(p(i))^a(i) \;\&\; m \in P))$

Спецификация - "тип(Однасторона)", "направл(N)", "указатель(блокпроверок(1))", "указатель(занесениепосылки(1 $i \in \{1,\dots,n\}$))", "указатель(блокпроверок(2))", "указатель(занесениепосылки(2 $i \in \{1,\dots,n\}$))". Элементы "указатель" были сформированы при преобразовании теоремы в теорему приема.

Преобразование утверждений с неизвестными

1. Разрешение относительно неизвестных.

   (a) Разрешение условия либо посылки относительно неизвестных

      i. Разрешение условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование относительно заданных неизвестных (характеристика "глуб").

      Характеристика "глуб(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x, глубина которых (с отбрасыванием внешнего отрицания, если оно есть) больше 1, а заменяющая построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x, и притом глубины 1. N - направление замены.

      Проверяется, что теорема не имеет характеристик "и(...)", "или(...)", "общнорм(N)", "сложнреш". Составляется список $x_1,\dots,x_n$ всех переменных x_i, встречающихся в характеристиках теоремы, имеющих вид "глуб(x_i N)". Затем создается спецификация "тип(глуб)", "неизвестные($x_1,\dots,x_n$)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{abc}(c - \text{число} \to a+b=c \leftrightarrow a=c-b)$

      Спецификация - "тип(глуб)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(a)".

      ii. Разрешение условия задачи на описание относительно заданных неизвестных.

         A. Непосредственное разрешение условия задачи на описание относительно заданных неизвестных (характеристика "глуб").

         Аналогично предыдущему пункту, но тип приема - "Делители". Пример:

         $\forall_{abcde}(e = b^2+4ac \to ad^2+bd=c \leftrightarrow \neg(a=0)\ \&\ 0 \le e\ \&\ (d = (\sqrt{e}-b)/(2a)\ \vee\ d = -(\sqrt{e}+b)/(2a))\ \vee\ bd=c\ \&\ a=0)$

         Спецификация - "тип(Делители)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(d)". Выбор конкретного типа приема осуществляется путем примерки на задачах. В тех случаях, когда разрешение относительно неизвестных приводит к более громоздким выражениям, в задачах на исследование оно обычно не применяется.

         B. Непосредственное разрешение условия задачи на описание относительно заданных неизвестных - корневой случай (характеристика "глуб").

         Аналогично предыдущему пункту, но тип приема - "фильтрудвоения"Пример:

         $\forall_{ab}(0 \le \pi+b\ \&\ 0 \le \pi-b \to \cos a \le b \leftrightarrow 0 < a-1\ \vee\ 0 \le 1+a\ \&\ 0 \le 1-a\ \&\ (\arccos a \le b\ \vee\ b \le -\arccos a))$

Спецификация - "тип(фильтрудвоения)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(b)". Приемы данного типа создаются, если заменяющее утверждение достаточно сложно. Тогда прочие приемы должны сначала упростить логическую конструкцию путем разбора случаев или иных средств, чтобы разрешаемое отношение стало корневым.

C. Непосредственное разрешение условия задачи на описание относительно заданной неизвестной, если прочие параметры суть константные выражения (характеристика "глуб").

Проверяется, что теорема не имеет характеристик "и(...)", "или(...)", "общнорм(N)", но имеет характеристику "сложнреш". Составляется список $x_1, \ldots, x_n$ всех переменных x_i, встречающихся в характеристиках теоремы, имеющих вид "глуб(x_i N)". Затем создается спецификация "тип(последнийсимвол)", "неизвестные($x_1, \ldots, x_n$)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdpqrx}(\neg(a = 0)\ \&\ p = (3ac - b^2)/(3a^2)\ \&\ q = (2b^3 - 9abc - 27a^2d)/(27a^3)\ \&\ r = q^2/4 + p^3/27\ \&\ 0 < r \to ax^3 + bx^2 + cx = d \leftrightarrow x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{r}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{r}} - b/(3a))$

Спецификация - "тип(последнийсимвол)", "неизвестные(x)", "направл(второйтерм)". Этот тип приема создается для особо громоздких заменяющих утверждений.

D. Усмотрение независимости истинности условия от неизвестной (характеристика "глуб").

Пусть имеется характеристика "глуб(x N)" и нет характеристики "сложнреш", причем x не встречается в заменяющем терме. Составляется список $x_1, \ldots, x_n$ всех переменных x_i, встречающихся в характеристиках теоремы, имеющих вид "глуб(x_i N)". Затем создается спецификация "тип(невозрастает)", "неизвестные($x_1 \ldots x_n$)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcde}(d = b^2 + 4ac\ \&\ d < 0 \to c \leq ae^2 + be \leftrightarrow 0 < a)$

Спецификация - "тип(невозрастает)", "неизвестные(e)", "направл(второйтерм)".

E. Разрешение условия задачи на описание относительно заданных неизвестных с помощью дополнительного условия (характеристика "неизвконтексты").

Характеристика "неизвконтексты(X N)" указывает на эквивалентность для разрешения относительно неизвестных списка X, использующую утверждения из контекста. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(путь)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABxy}(x \subseteq A\ \&\ \text{непересек}(y, A) \to B = x \cup y \leftrightarrow x = A \cap B\ \&\ y = B \setminus A)$

Спецификация - "тип(путь)", "неизвестные(x, y)", "направл(второйтерм)".

F. Разрешение условия задачи на описание, имеющей цель "функционально" (характеристика "функционально").

Характеристика "функционально(X N)" указывает на эквивалентность для разрешения относительно неизвестных списка X, применяемую только в задачах на описание, имеющих цель "функционально". N - направление замены.

Создается спецификация "тип(список)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABbmf}(\text{Отображение}(f, A, B)\ \&\ 0 < 2m - \text{card}(A)\ \&\ \text{конечное}(A)\ \&\ b \in B \to \text{card}(\text{слой}(f, b)) = m \leftrightarrow b = \text{элемент}(\text{set}_x(x \in B\ \&\ \text{card}(\text{слой}(f, x)) = m)))$

Спецификация "тип(список)", "неизвестные(b)", "направл(второйтерм)".

G. Условие задачи на описание преобразуется в явное параметрическое описание неизвестных (характеристика "неизвпарам").

Характеристика "неизвпарам(x N)" указывает на эквивалентность, дающую явное параметрическое описание значений неизвестной x. N - направление замены.

Проверяется, что заменяемый терм не имеет заголовка "и". Затем создается спецификация "тип(серия)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(\sin a = b \leftrightarrow 0 \le b + 1\ \&\ 0 \le 1 - b\ \&\ (\exists_n(n - \text{целое}\ \&\ a = \arcsin b + 2\pi n)\ \vee\ \exists_n(n - \text{целое}\ \&\ a = -\arcsin b + \pi + 2\pi n)))$

Спецификация - "тип(серия)", "неизвестная(a)", "направл(второйтерм)".

H. Условие задачи на описание преобразуется в явное параметрическое описание неизвестных, разворачиваемое в дизъюнкцию (характеристика "неизвпарам").

Пусть имеется характеристика "неизвпарам(x N)", заменяемый терм не имеет заголовка "и", а заменяющий имеет вид "$\exists_i(i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ldots)$". Тогда создается спецификация "тип(длинатекста)", "неизвестная(i)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcn}(b - \text{комплексное}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ c = (|b|)^{1/n} \to b = a^n \leftrightarrow \exists_m(a = c \cdot \cos(2\pi m/n + \arg(b)/n) + c \cdot \sin(2\pi m/n + \arg(b)/n)i\ \&\ m \in \{0, \ldots, n-1\}))$

Спецификация - "тип(длинатекста)", "неизвестная(a)", "направл(второйтерм)", "указатель(идентификатор(3))". Третий антецедент был введен процедурой "теоремаприема", чтобы убрать повторения в консеквенте.

I. Условие задачи на описание преобразуется в явное параметрическое описание функциональных неизвестных (характеристика "Неизв").

Характеристика "Неизв(f N)" указывает на эквивалентность, дающую явное параметрическое описание значений функциональной неизвестной f. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(заголовок)", "неизвестная(f)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ampdrky}(\neg(a(m{+}1) = 0)$ & $p = \sum_{j=1}^{m+1}(a(j)n^{j-1})$ & Базисрешений(p, d) & $d = \{;r\}$ & $l(r) = k \rightarrow \forall_n(n -$ целое & $s \leq n \rightarrow \sum_{j=1}^{m+1}(a(j)y(n + j - 1)) = 0) \leftrightarrow \exists_c(\forall_n(n -$ целое & $s \leq n \rightarrow y(n) = \sum_{i=1}^{k}(c(i)r(i)))$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, k\} \rightarrow c(i) -$ число$)))$

Спецификация - "тип(заголовок)", "неизвестная(y)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием решает линейное однородное рекуррентное уравнение с постоянными коэффициентами.

J. Использование нормализатора вычислений для явного разрешения относительно неизвестных условия задачи на описание (характеристика "нормвыч").

Характеристикой "нормвыч(X, N)" снабжаются эквивалентности, использующие нормализатор вычислений для явного разрешения относительно неизвестных списка X. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормсуммавсех)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Aabc}($собствзначение$(A, a, b) = ((a, b) \in c) \rightarrow$ собствзначение$(A, a, b) \leftrightarrow (a, b) \in c)$

Спецификация "тип(нормсуммавсех)", "неизвестные(a, b)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием обрабатывает левую часть антецедента нормализатором "собствзначения", определяющим собственные значения a квадратной матрицы A и их кратности b.

K. Использование пакета продукций для явного разрешения относительно неизвестных условия задачи на описание (характеристика "Вычмн").

Характеристикой "Вычмн(X, N)" снабжаются эквивалентности, использующие пакет продукций для явного разрешения относительно неизвестных списка X. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(задачираздела)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Aanpx}(A = \lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\})$ & характмн($\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}), p) \rightarrow$ характмн$(A, x) \leftrightarrow x = p)$

Спецификация - "тип(задачираздела)", "неизвестные(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием для определения характеристического многочлена квадратной вещественной матрицы обращается к пакету продукций "характмн".

L. Использование синтезаторов для явного разрешения относительно неизвестных условия задачи на описание (характеристика "определ").

Характеристика "определ(A,S,N)" указывает на эквивалентность для явного разрешения с помощью синтезаторов условия задачи на описание. A - терм "неизвестные(...)", перечисляющий неизвестные, S - список термов "значения(...)", перечисляющих группы номеров антецедентов, обрабатываемых общим синтезатором. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(подменю)", "A", "указатель(S)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcdfgmpqr}(f(x) \leq b \ \& \ c \leq g(x) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \\ r = \mathrm{set}_x(f(x) = b \ \& \ g(x) = c \ \& \ c \in m) \ \& \ \neg(r = \emptyset) \ \& \\ a = \lambda_x(f(x)/g(x), x - \text{число}) \to \mathrm{Max}(a, m, p, q) \leftrightarrow q = b/c \ \& \ p = r)$$

Спецификация - "тип(подменю)", "неизвестные(p,q)", "указатель(значения(1) значения(2))", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием определяет максимальное значение дробного выражения, определяя с помощью синтезаторов "верхняяоценка" и "нижняяоценка" верхнюю оценку числителя и нжнюю - знаменателя. Затем вспомогательной задачей на описание находится непустое множество точек, где эти оценки достигаются одновременно.

M. Разрешение кванторного условия задачи на описание относительно неизвестных с помощью ввода вспомогательного известного описателя (характеристика "неизвмнож").
Характеристика "неизвмнож(x N)" указывает на эквивалентность для разрешения кванторной импликации относительно неизвестной x, использующую ввод новых описателей. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(набороперандов)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{AB}(\forall_x(A(x) \ \& \ \neg(x \in y) \to B(x)) \leftrightarrow \mathrm{set}_x(A(x) \ \& \ \neg(B(x))) \subseteq y)$$

Спецификация - "тип(набороперандов)", "неизвестные(y)", "направл(второйтерм)".

N. Явное разрешение консеквента кванторного условия задачи на описание относительно неизвестной (протокол "консеквент").

Протокол "консеквент(A)" означает, что если A - заголовок содержащего неизвестные консеквента кванторной импликации в условиях задачи на описание, причем антецеденты неизвестных не содержат, то целесообразно разрешить этот консеквент относительно единственной неизвестной.

Проверяется, что символ A двуместный. Создается теорема:

$$\forall_{afgh}(a = A(g(x), h(x)) \to \forall_x(f(x) \to A(g(x), h(x))) \leftrightarrow \\ \forall_x(f(x) \to a)).$$

Она снабжается спецификацией "тип(меньше)", "направл(второйтерм)". Пример:

$$"\forall_{afgh}(a = (g(x) < h(x)) \to \forall_x(f(x) \to g(x) < h(x)) \leftrightarrow \\ \forall_x(f(x) \to a))"$$

Соответствующий прием разрешает правую часть антецедента относительно некоторой неизвестной, входящей в неравенство.

O. Переход к более простому описателю в условии задачи на описание и попытка явного разрешения этого условия (характеристика "упрощимп").

Характеристика "упрощимп(X,N)" указывает на эквивалентность, позволяющую перейти к более простому описателю в условии задачи на описание для попытки явного разрешения этого условия. X - список неизвестных, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(транскоммент)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{afghpqrsA}(a = \lambda_{xy}(f(x,y), g(x,y))\ \&\ \mathrm{Max}(\lambda_y(f(y,h(y)), g(y,h(y))), \mathrm{set}_z(A(z)), p, q) = (p = r\ \&\ q = s) \rightarrow \mathrm{Max}(a, \mathrm{set}_{zv}(v = h(z)\ \&\ A(z)), p, q) \leftrightarrow q = s\ \&\ p = \mathrm{set}_{zv}(v = h(z)\ \&\ z \in r))$

Спецификация - "тип(транскоммент)", "неизвестные(p, q)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием понижает размерность области, на которой нужно найти максимум, если ее уравнение явно выражает одну координату через другую. Левая часть второго антецедента разрешается вспомогательной задачей на описание относительно неизвестных p, q.

P. Переход к более простому описателю в условии задачи на описание, явное разрешение этого условия и получение параметрического описания (характеристика "упрощПлюс").

Характеристика "упрошПлюс(X N)" указывает на эквивалентность, позволяющую перейти к более простому описателю в условии задачи на описание для попытки явного разрешения этого условия и получения параметрического описания. X - список неизвестных, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(определено)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fguvwa}(0 < a\ \&\ \mathrm{Extr}(\lambda_x(f(x), g(x)\ \&\ 0 \leq f(x)), u, c, w) = b \rightarrow \mathrm{Extr}(\lambda_x((f(x))^a, g(x)), u, v, w) \leftrightarrow \exists_c(b\ \&\ v = c^a))$

Спецификация - "тип(определено)", "неизвестные(u, v, w)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием для определения точек экстремума отбрасывает константный положительный показатель степени, а после получения результата восстанавливает его в параметрическом описании.

Q. Разрешение относительно значения неизвестной функции при решении функционального уравнения (характеристика "глуб").

Пусть теорема имеет характеристику "глуб(x N)" и не имеет характеристик "общнорм", "и", "или", "сложнреш". Если заменяемая часть - "равенство", то создается спецификация "тип(термодинамика)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Здесь X - список всех таких переменных y, для которых теорема имеет характеристику вида "глуб(y N)". Пример:

$\forall_{abcd}(b - \text{rational}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ d = c^{1/b}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow a^b = c \leftrightarrow 0 \leq c\ \&\ (a = d\ \vee\ a = -d))$

Спецификация - "тип(термодинамика)", "неизвестные(a)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется при решении диффеpeнициального уравнения с известными b, c.

iii. Разрешение посылки задачи на доказательство либо на исследование относительно заданных неизвестных (характеристика "глуб").

Пусть теорема имеет характеристику "глуб(x N)" и не имеет характеристик "общнорм", "и", "или". Если в заменяющей части встречается символ "равно", то создается спецификация "тип(предпоследоперанд)", "неизвестные(x)", направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \rightarrow ab = c \leftrightarrow a = c/b)$

Спецификация - "тип(предпоследоперанд)", "неизвестные(a)", направл(второйтерм)".

iv. Разрешение посылки задачи на исследование относительно одной из неизвестных с помощью вспомогательной задачи (протокол "решение").

Протокол "решение(A x)" означает, что уравнение вида A в посылках задачи на исследование целесообразно разрешать относительно неизвестной x.

Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит эквивалентность $A \leftrightarrow A$. Она сопровождается спецификацией "тип(вычеркивание)", "направл(второйтерм)", "переменная(x)". Пример:

$\forall_{abcd}(ab + c = d \leftrightarrow ab + c = d)$

Спецификация - "тип(вычеркивание)", "направл(второйтерм)", "переменная(b)". Соответствующий прием идентифицирует переменную b с неизвестной, не входящей в a. Проверяется, что выражение c либо не содержит b, либо линейно относительно b. Затем решается вспомогательная задача на описание с неизвестной b.

(b) Разрешение группы утверждений относительно заданных неизвестных.

i. Разрешение группы условий задачи на описание относительно заданных неизвестных (характеристика "Неизвестные").

Характеристика "Неизвестные(X N)" указывает на эквивалентность, полученную для разрешения группы утверждений относительно неизвестных списка X. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(область)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefpqrxy}(p = ae - bd\ \&\ q = ce - bf\ \&\ r = af - cd\ \&\ \neg(p = 0) \rightarrow ax + by = c\ \&\ dx + ey = f \leftrightarrow x = q/p\ \&\ y = r/p)$

Спецификация - "тип(область)", "неизвестные(x, y)", "направл(второйтерм)".

ii. Группа условий задачи на описание преобразуется в явное параметрическое описание неизвестных (характеристика "неизвпарам").

Характеристика "неизвпарам(x N)" указывает на эквивалентность, дающее явное параметрическое описание неизвестной x. N - направление замены.

Проверяется, что заменяемый терм имеет заголовок "и". Затем создается спецификация "тип(о)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(\neg(\cos b = 0) \to a \leq \operatorname{tg} b \,\&\, \operatorname{tg} b \leq c \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \,\&\, \pi n + \operatorname{arctg} a \leq b \,\&\, b \leq \pi n + \operatorname{arctg} c))$

Спецификация "тип(о)", "неизвестные(b)", "направл(воройтерм)".

iii. Разбор случаев для группы условий задачи на описание, с явным разрешением каждого подслучая (характеристика "подслучаи").

Характеристика "подслучаи(x N)" указывает на эквивалентность, обеспечивающую разбор случаев для группы условий задачи на описание, с попыткой явного разрешения для каждого подслучая. x - неизвестная, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормИнтеграл)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abxAPQ}(a \subseteq A \,\&\, (\text{разбиение}(A \setminus a, y) \,\&\, y \subseteq \{;b\}) = P(y) \,\&\, (\text{разбиение}(A, x) \,\&\, x \subseteq \{;b\}) = Q(x) \,\&\, \neg(a = \emptyset) \to \text{разбиение}(A, x) \,\&\, x \subseteq \{a;b\} \leftrightarrow Q(x) \;\vee\; \exists_y(P(y) \,\&\, x = y \cup \{a\}))$

Спецификация - "тип(нормИнтеграл)", "неизвестная(x)", "направл(воройтерм)". Соответствующий прием перечисляет разбиения, составленные из данных подмножеств, рассматривая два подслучая: когда элемент a включается в разбиение и когда не включается. Левые части второго и третьего антецедентов разрешаются относительно y и x вспомогательными задачами на описание.

iv. Разрешение группы посылок задачи на исследование относительно неизвестных (характеристика "Неизвестные").

Характеристика "Неизвестные(X, N)" указывает на эквивалентность, полученную для разрешения группы утверждений относительно неизвестных списка X. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(предпоследсимвол)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefpxy}(p = bd - ae \,\&\, \neg(p = 0) \to ax + by = c \,\&\, dx + ey = f \leftrightarrow x = (bf - ce)/p \,\&\, y = (cd - af)/p)$

Спецификация - "тип(предпоследсимвол)", "неизвестные(x, y)", "направл(воройтерм)".

v. Использование пакета продукций для явного разрешения относительно неизвестных группы условий задачи на описание (характеристика "неизвоценки").

Характеристика "неизвоценки(X N)" указывает на эквивалентность, использующую пакет продукций для явного разрешения группы условий задачи на описание относительно неизвестных. X - список неизвестных, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(внешнеизв)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abmnxA}(A = \lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,n\}) \ \&$
$\text{точность}(\text{собствзначения}(\lambda_{ij}(a(i,j), i \in \{1,\ldots,n\} \ \& \ j \in \{1,\ldots,n\})), b) =$
$m \rightarrow \text{собствзначения}(A) = x \ \& \ \text{точность}(x,b) \leftrightarrow x = m)$

Спецификация - "тип(внешнеизв)", "неизвестные(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием обращается к пакету продкций "собствзнач" для определения собственных значений квадратной матрицы над полем вещественных чисел.

vi. Обращение к пакетному нормализатору для склейки двух параметрических описаний в условиях задачи на описание (протокол "пересечениесерий").

Протокол "пересечениесерий(A, P, x)" означает, что для объединения двух параметрических описаний неизвестной, вид которых определяется конъюнкцией A, используется нормализатор P. x - неизвестная.

Выбирается переменная y, не входящая в терм A, и создается импликация с единственным антецедентом $y = A$, консеквентом которой служит терм $A \leftrightarrow y$. Она сопровождается спецификацией "тип(гипсинус)", "направл(второйтерм)", "неизвестная(x)", "быстрпреобр(фикс(1 2)P)". Пример:

$\forall_{afgpq}(a = (\exists_n(n-\text{целое} \ \& \ f(n) \leq x \ \& \ x \leq g(n)) \ \& \ \exists_m(m-\text{целое} \ \& \ p(m) \leq x \ \& \ x \leq q(m))) \rightarrow (\exists_n(n - \text{целое} \ \& \ f(n) \leq x \ \& \ x \leq g(n)) \ \& \ \exists_m(m - \text{целое} \ \& \ p(m) \leq x \ \& \ x \leq q(m))) \leftrightarrow a)$

Спецификация - "тип(гипсинус)", "направл(второйтерм)", "неизвестная(x)", "быстрпреобр(фикс(1 2)пересечениесерий)". Соответствующий прием обращается к пакетному нормализатору "пересечениесерий" для пересечения двух серий промежутков.

(c) Выражение одних неизвестных подтермов задачи на описание либо на исследование через другие.

i. Выражение неизвестной задачи на описание либо на исследование через другие неизвестные (характеристика "неизвестные").

Характеристика "неизвестные(x Y N)" указывает на эквивалентность, полученную для выражения неизвестной x через неизвестные, входящие в выражения, идентифицируемые с переменными списка Y. N - направление замены.

Проверяется, что переменная x встречается в заменяемой части однократно и что заменяющий терм не содержит квантора "существования". Тогда создается спецификация "тип(новоперанд)", "переменная(x)", "направл(N)", "неизвестные(x Y)". Пример:

$\forall_{abc}(c - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a - c = b \leftrightarrow c = a - b)$

Спецификация - "тип(новоперанд)", "переменная(c)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(c, a)".

ii. Выражение неизвестной задачи на исследование через другую неизвестную (характеристика "пропорцнеизв").

Характеристика "пропорцнеизв($x\ y\ N$)" указывает на эквивалентность, позволяющую выразить неизвестную x через неизвестную y. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(пересекаются)", "неизвестные(x, y)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abxy}(\neg(a = 0) \rightarrow ax = ay + b \leftrightarrow x = y + b/a)$

Спецификация - "тип(пересекаются)", "неизвестные(x, y)", "направл(второйтерм)".

iii. Выражение неизвестной задачи на описание через другую неизвестную (характеристика "пропорцнеизв").

Аналогично предыдущему пункту, но спецификация имеет вид "тип(конец)", "неизвестные(x, y)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abxy}(ax + by = 0\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ x = -by/a\ \vee\ a = 0\ \&\ by = 0)$

Спецификация - "тип(конец)", "неизвестные(x, y)", "направл(второйтерм)".

iv. Разрешение условия задачи на описание для выражения одной неизвестной через другую (протокол "вспомописание").

Протокол "вспомописание(A неизвестные($x\ y$))" означает, что принято решение о создании приема, предпринимающего разрешение условия A задачи на описание, неизвестными которого служат только переменные x и y, относительно x.

Создается импликация с пустым списком антецедентов, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения A самому себе. Она сопровождается спецификацией "тип(приемыраздела)", "направл(второйтерм)", "неизвестные($x\ y$)". Пример:

$\forall_{abcdef}(ab^c d^e = f \leftrightarrow ab^c d^e = f)$

Спецификация - "тип(приемыраздела)", "направл(второйтерм)", "неизвестные($b\ d$)". Соответствующий прием разрешает уравнение относительно b с помощью задачи на описание.

v. Выражение неизвестной задачи на исследование, имеющей цель "известно", через другие неизвестные (характеристика "неизвестные").

Характеристика "неизвестные($x\ Y\ N$)" указывает на эквивалентность, полученную для выражения неизвестной x через неизвестные, входящие в выражения, идентифицируемые с переменными списка Y. N - направление замены.

Проверяется, что переменная x встречается в заменяемом терме однократно и что заменяющий терм не содержит квантора существования. Затем создается спецификация "тип(прогрвыражение)", "переменная(x)", "направл(N)", "неизвестные(Y)". Пример:

$\forall_{abcx}(\neg(b = 0) \rightarrow a + bx = c \leftrightarrow x = (c - a)/b)$

Спецификация - "тип(прогрвыражение)", "переменная(x)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(a, b, c)".

vi. Выражение вспомогательной неизвестной задачи на исследование, имеющей цель "известно", через другие неизвестные (характеристика "неизвестные").

Аналогично предыдущему пункту, но тип приема - "принадл". Пример:

$\forall_{abcdp}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(b=0) \to a(bp+c)=d \leftrightarrow p=(d-ac)/(ab))$

Спецификация - "тип(принадл)", "переменная(p)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(a,b,c,d)". Заметим, что приемы данного типа отличаются от приемов предыдущего типа фильтрами и меньшим уровнем срабатывания.

vii. Условие задачи на описание преобразуется в параметрическое описание неизвестной через другие неизвестные (характеристика "неизвестные")

Пусть характеристика - "неизвестные($x\ Y\ N$)".

Проверяется, что переменная x встречается в заменяемой части однократно и что заменяющий терм содержит квантор "существования". Тогда создается спецификация "тип(целыенеотрицательные)", "переменная(x)", "направл(N)", "неизвестные($x\ Y$)". Пример:

$\forall_{abxy}(ax+by=\text{вектор0} \leftrightarrow a=0\ \&\ by=\text{вектор0}\ \vee\ \exists_c(c-\text{число}\ \&\ x=cy\ \&\ ac+b=0))$

Спецификация - "тип(целыенеотрицательные)", "переменная(x)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x,y)".

viii. Использование группы посылок задачи на исследование для выражения неизвестных подтермов через численные параметры (характеристика "Неизвестные").

Характеристика "Неизвестные(X, N)" указывает на эквивалентность, полученную для разрешения группы утверждений относительно неизвестных списка X. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(пунктоглавления)", "неизвестные(X)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdxy}(c=a^2-4b\ \&\ d=\sqrt{c} \to x+y=a\ \&\ xy=b \leftrightarrow 0\le c\ \&\ (x=(a-d)/2\ \&\ y=(a+d)/2\ \vee\ x=(a+d)/2\ \&\ y=(a-d)/2))$

Спецификация - "тип(пунктоглавления)", "неизвестные(x,y)", "направл(второйтерм)".

ix. Разрешение группы условий задачи на описание относительно сложных неизвестных подвыражений (протокол "вспомнеизв").

Протокол "вспомнеизв(A неизвестные($x_1\dots x_n$))" означает, что утверждение A - конъюнкция условий задачи на описание, которые целесообразно пытаться разрешить относительно неизвестных подвыражений $x_1,\dots,x_n$.

Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения A самому себе. Она сопровождается спецификацией "тип(комментарии)", "направл(второйтерм)", "неизвестные($x_1\dots x_n$)". Пример:

$\forall_{abcdefghpqrstuvxyz}(ax+by+cz+d=e\ \&\ fx+gy+hz+p=q\ \&\ rx+sy+tz+u=v \leftrightarrow ax+by+cz+d=e\ \&\ fx+gy+hz+p=q\ \&\ rx+sy+tz+u=v)$

Спецификация - "тип(комментарии)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x,y,z)".

x. Выражение одного неизвестного подтерма задачи на описание через другой, если эти подтермы имели кратные вхождения в условие (характеристика "неизвестные").

Характеристика "неизвестные($x\ Y\ N$)" указывает на эквивалентность, полученную для выражения неизвестной x через неизвестные, входящие в выражения, идентифицируемые с переменными списка Y. N - направление замены.

Проверяется, что число вхождений переменной x в заменяемую часть теоремы больше 1 и для каждой переменной списка Y это число тоже больше 1. Тогда создается спецификация "тип(смисточник)", "направл(N)", "неизвестные($x\ Y$)". Пример:

$\forall_{abcdxy}(d=b^2-4ac \rightarrow ax^2+bxy+cy^2=0 \leftrightarrow \neg(a=0)\ \&\ 0 \leq d\ \&\ (x=y(\sqrt{d}-b)/(2a)\ \vee\ x=-(y(\sqrt{d}+b)/(2a)))\ \vee\ a=0\ \&\ (y=0\ \vee\ bx+cy=0)\ \vee\ d<0\ \&\ x=0\ \&\ y=0)$

Спецификация - "тип(смисточник)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x,y)".

xi. Выражение одного неизвестного подтерма задачи на исследование через другой, если эти подтермы имели кратные вхождения в посылку (характеристика "неизвестные").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "смзначение". В качестве примера можно взять прием с той же теоремой, что в предыдущем пункте.

xii. Явное выражение одной неизвестной через другие при контроле задачи на исследование, возникшей после разбора случаев (характеристика "глуб").

Пусть характеристика - "глуб($x\ N$)". Проверяется, что заменяющая часть имеет вид "$x=t$", где переменная x не входит в t. Создается спецификация "тип(видеоключ)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(c - \text{число} \rightarrow a+b=c \leftrightarrow a=c-b)$

Спецификация - "тип(видеоключ)", "переменная(x)", "направл(второйтерм)".

(d) Преобразование условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование к виду, допускающему явное разрешение относительно заданного выражения с неизвестными.

i. Преобразование условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование к виду, допускающему явное разрешение относительно заданного выражения с неизвестными (характеристика "неизвтермы").

Характеристика "неизвтермы($t\ P\ X\ N$)" указывает на эквивалентность, подготавливающую возможность разрешения относительно заданного подвыражения t с неизвестными при помощи нормализатора уравнений P. X - список переменных, идентфицируемых с неизвестными подтермами, N - направление замены. Если заменяющий терм устойчив к общей стандартизации, то ссылка на нормализатор P может отсутствовать.

Проверяется, что терм t - не переменная, и создается спецификация "тип(нормуравн)", "неизвтермы(t)", "направл(N)", "неизвестные(X)", "норм(P)". Если список X пуст либо P отсутствует, соответствующий элемент не создается. Пример:

$\forall_{abcxy}(y-2x=0 \to a\cos x+b\cos y=c \leftrightarrow a\cos x+2b(\cos x)^2=b+c)$

Спецификация - "тип(нормуравн)", "неизвтермы($\cos x$)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x)", "норм(квадруравн)".

ii. Свертка дизъюнктивного условия задачи на описание, приводящая к разрешимому относительно неизвестного подвыражения подслучаю (характеристика "дизъюнктблок").

Характеристика "дизъюнктблок(x N)" указывает на эквивалентность, выполняющую свертку дизъюнктивного условия для получения разрешимого относительно неизвестной x утверждения.

Создается спецификация "тип(дизъюнкциявсех)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ax}(\sin x+\cos x=a \ \vee \ \sin x+\cos x=-a \leftrightarrow \sin(2x)=a^2-1)$

Спецификация - "тип(дизъюнкциявсех)", "неизвестные(x)", "направл(второйтерм)".

(e) Преобразование условия задачи на описание, разрешенного относительно неизвестной.

i. Преобразование разрешенного относительно неизвестной условия задачи на описание в дизъюнкцию, подслучай которой дает явное выражение для этой неизвестной (характеристика "или").

Характеристика "или(N)" указывает на эквивалентность, декомпозирующую элементарное утверждение в дизъюнкцию бесквантоных утверждений. N - направление замены.

Одним из операндов заменяющей дизъюнкции служит равенство $x=t$, где x - переменная, глубина вхождения которой в заменяемую часть равна 1, а выражение t не содержит x. Создается спецификация "тип(копия)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in \{b;c\} \leftrightarrow a=b \ \vee \ a \in \{;c\})$

Спецификация - "тип(копия)", "неизвестная(a)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проименяется, если a отлично от переменной либо встречается в прочих условиях.

ii. Разгруппировка условия принадлежности неизвестного элемента известному множеству для последующей расшифровки (характеристика "или").

Пусть характеристика - "или(N)". Проверяется, что заменяемая часть имеет вид $x \in t$, где x - переменная, не встречающаяся в t, но входящая в каждый из дизъюнктивных членов заменяющей части. Тогда создается спецификация "тип(заменанеизвестной)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

Спецификация - "тип(заменанеизвестной)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет наличие у выражений b, c подтерма с заголовком, отличным от простейших теоретико-множественных операций, а также наличие в контексте условия задачи прочих нетривиальных условий на a.

iii. Разгруппировка условия принадлежности неизвестного элемента известному множеству для последующей расшифровки (характеристика "и").

Пусть характеристика - "и(N)". Проверяется, что заменяемая часть имеет вид $x \in t$, где x - переменная, не встречающаяся в t, но входящая в каждый из конъюнктивных членов заменяющей части. Тогда создается спецификация "тип(заменанеизвестной)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

Спецификация - "тип(заменанеизвестной)", "направл(второйтерм)".

iv. Разрешенное относительно неизвестной условие задачи на описание преобразуется в явное параметрическое описание для исключения данной неизвестной из других условий (характеристика "смпарам").

Характеристика "смпарам(x N)" указывает на эквивалентность, преобразующую явное разрешенное относительно неизвестной x утверждение в явное параметрическое описание значений этой неизвестной. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(лексикопредшествует)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{aAB}(a \in A \times B \leftrightarrow \exists_{xy}(x \in A \ \& \ y \in B \ \& \ a = (x, y)))$

Спецификация - "тип(лексикопредшествует)", "неизвестная(a)", "направл(второйтерм)".

v. Разрешенное относительно неизвестной условие задачи на описание переформулируется с учетом целевой установки (характеристика "редакторответа").

Характеристика "редакторответа(x A N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую явно разрешенное относительно неизвестной x утверждение в другое, тоже явно разрешенное относительно x, с учетом целевой установки. A - фильтр, определяющий целесообразность замены. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(связный)", "неизвестная(x)", "см(A)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in (b, c) \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ b < a \ \& \ a < c)$

Спецификация - "тип(связный)", "неизвестная(a)", "см(или(цель(усмменьше) цель(неравенства) цель(областьграницы) цель(нормобласть)))", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием, при наличии специальных целей, требующих получение ответа в виде неравенств, исключает условие принадлежности неизвестной промежутку.

vi. Усиление условия задачи на описание, явно разрешенного относительно неизвестной (характеристика "усиление").

Характеристика "усиление(N)" указывает на эквивалентность, позволяющую усилить элементарное утверждение. N - направление замены.

Рассматривается общая переменная x заменяемой и заменяющей частей, которая в каждой из этих частей имеет глубину 1. Создается спецификация "тип(делители)", "направл(N)", "неизвестная(x)". Пример:

$\forall_{abn}(n - \text{целое} \ \& \ b = [a] \to a < n \leftrightarrow b + 1 \leq n)$

Спецификация - "тип(делители)", "направл(второйтерм)", "неизвестная(n)".

vii. Переход от соотношения для числовых атомов к качественной характеризации объекта при редактировании ответа (характеристика "числвыраз").

Характеристика "числвыраз(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую нечисловое отношение через отношение для числовых атомов. N - направление замены.

Проверяется, что заменяемый терм бесповторный и все его параметры имеют глубину вхождения, равную 1. При определении глубины не учитываются одноместные операции типа "знака". Создается спецификация "тип(плюссимв)", "направл(M)", где M - направление, противоположное направлению N. Пример:

$\forall_{ab}(\text{скалумнож}(a, b) = 0 \leftrightarrow a \perp b)$

viii. Конъюнктивная декомпозиция явно разрешенного относительно неизвестной условия для учета прочих ограничений на эту неизвестную (характеристика "допусловие").

Характеристика "допусловие(x N)" указывает на эквивалентность, преобразующую явно разрешенное относительно неизвестной x условие в конъюнкцию других явно разрешенных относительно этой неизвестной условий, более удобную для учета прочих ограничений на x. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(конечное)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abx}(x \in [a, b] \leftrightarrow x - \text{число} \ \& \ a \leq x \ \& \ x \leq b)$

Спецификация - "тип(конечное)", "неизвестная(x)", "направл(второйтерм)".

ix. Конъюнктивная декомпозиция явно разрешенного относительно неизвестной условия, приводящая к более простым известным выражениям (характеристика "упрощпрог").

Характеристика "упрощпрог(x N)" указывает на эквивалентность, сохраняющую разрешенность относительно неизвестной x, но приводящую к более простым выражениям с известными параметрами. N - направление замены.

Проверяется, что переменная x имеет единственное вхождение в заменяющую часть, не являющееся указателем типа значения. Затем создается спецификация "тип(смугол)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(b -$ число $\to a \in (-\infty, b) \leftrightarrow a -$ число $\& \ a < b)$

Спецификация - "тип(смугол)", "неизвестная(a)", "направл(второйтерм)".

(f) Усмотрение возможности выразить условие задачи на описание через заданное неизвестное подвыражение и разрешение его относительно этого подвыражения (протокол "извлечение").

Протокол "извлечение($A(\ldots t(h(x))\ldots), x, t, P(x)$)" означает, что для условий задачи на описание, имеющих вид A, предпринимается попытка усмотрения того, что вся неизвестная их часть выражается через заданный терм $h(x)$, содержащий неизвестную x. Для $h(x)$ ввходится вспомогательная неизвестная y, условие разрешается относительно y, и в результат обратно подставляется $h(x)$. t - вспомогательная функциональая переменная внутри шаблона A, $P(x)$ - дополнительные условия на вспомогательную неизвестную, которая здесь обозначена той же буквой x, что и исходная неизвестная.

Выбираются новые переменные y, z, и создается импликация с антецедентом $A(\ldots t(y)\ldots) \ \& \ P(y) = z(y)$ и консеквентом $A \leftrightarrow z(t)$. Выбирается новая переменная u, и данная импликация сопровождается спецификацией "тип(Облвхожд)", "направл(второйтерм)", "указатель(идентификатор(1) отображение(t) контекст(неизвестная(x) позиция(u корень) вид($u \ h(x)$) входит($x \ u$)) новаргумент($t \ x$ извлечение) новаяпеременная(y))". Пример:

Протокол - "извлечение($a < f(\sin(h(x)) + \cos(h(x))), x, f, x -$ число)". Теорема:

$\forall_{abcfhx}((a < f(b) \ \& \ b -$ число$) = c(b) \to a < f(\sin(h(x)) + \cos(h(x))) \leftrightarrow c(\sin h(x) + \cos h(x)))$

Спецификация - "тип(Облвхожд)", "направл(второйтерм)", "указатель(идентификатор(1) отображение(f) контекст(неизвестная(x) позиция(d корень) вид($d \ \sin h(x) + \cos h(x)$) входит($x \ d$)) новаргумент($f \ x$ извлечение) новаяпеременная(b))".

(g) Попытка разрешения равенства неизвестного выражения новому параметру для получения параметрического описания в условии задачи на описание (протокол "парамописание").

Протокол "парамописание($P(x) \ x$)" указывает на целесообразность попытки перехода от условия $P(x)$ задачи на описание, в котором переменная x идентифицируется с невырожденным неизвестным подвыражением A, к параметрическому описанию относительно вспомогательного параметра y, путем разрешения утверждения $P(y) \ \& \ x = y$ относительно некоторой входящей в A неизвестной.

Выбираются не входящие в протокол переменные y, z, v, w, и создается импликация с антецедентом $(x = y \ \& \ P(x)) = (z = v \ \& \ w(y))$ и консеквентом

$P(x) \leftrightarrow \exists_y(P(x) \ \& \ z = v \ \& \ w(y))$. Она сопровождается спецификацией "тип(норммощность)", "направл(второйтерм)", "неизвестная(x)", "указатель(идентификатор(1) контекст(неизвестная(z) входит(z x)) новаяпеременная(y))". Пример:

$\forall_{abcde}((a = b \ \& \ b - \text{целое}) = (c = d \ \& \ e(b)) \rightarrow a - \text{целое} \leftrightarrow \exists_b(b - \text{целое} \ \& \ c = d \ \& \ e(b)))$

Спецификация - "тип(норммощность)", "направл(второйтерм)", "неизвестная(a)", "указатель(идентификатор(1) контекст(неизвестная(c) входит(c a)) новаяпеременная(b))". Соответствующий прием разрешает левую часть антецедента относительно неизвестной c, идентифицированной как неизвестная, входящая в выражение a.

2. Дизъюнктивно-конъюнктивные декомпозиции.

   (a) Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование относительно неизвестных.

      i. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание, для последующей расшифровки условия принадлежности неизвестному множеству (характеристика "и").

      Характеристика "и(N)"указывает на эквивалентность, декомпозирующую элементарное утверждение в конъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

      Составляется список S переменных x, для которых в заменяющей части имеется утверждение вида $A \in x$, причем заголовками его надтермов, расположенных в заменяющей части, могут быть только символы "и", "или", "не". Если в списке S имеется переменная, глубина вхождения которой в заменяемую часть (с отброшенным отрицанием, если оно есть) равна 1, то создается спецификация "тип(внешзначение)", "неизвестные(S)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{abc}(\{a; b\} \subseteq c \leftrightarrow \{; b\} \subseteq c \ \& \ a \in c)$

      Спецификация - "тип(внешзначение)", "неизвестные(c)", "направл(второйтерм)".

      ii. Попытка декомпозиции условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам (характеристика "Заголовки").

      Характеристика "Заголовки(R N)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор R приведения к заданным заголовкам для последующей декомпозции условия задачи на описание. N - направление замены.

      Создается спецификация "тип(декомпозиция)", "оператор(R)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{abc}(c = a - b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b \leftrightarrow c = 0)$

      Спецификация - "тип(декомпозиция)", "оператор(видумножение)", "направл(второйтерм)".

iii. Попытка дизъюнктивной декомпозиции посылки задачи на исследование с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам (характеристика "разложмн").

Характеристика "разложмн(R, u)" указывает на эквивалентность, которая может использоваться для попытки декомпозиции с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам. R - название нормализатора, u - указатель вхождения подвыражения заменяющего терма, к которому применяется нормализатор.

Выбирается новая переменная x. Пусть t - подтерм по вхождению u. К антецедентам теоремы добавляется равенство $x = t$, а в консеквенте вместо t помещается x. Преобразованная импликация сопровождается спецификацией "тип(заменапосылки)", "направл(N)", "оператор(R)". Направление N выбирается так, чтобы переменная x была в заменяющей части.

В качестве примера можно взять теорему из предыдущего пункта. Спецификация - "тип(заменапосылки)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Прием из предыдущего пункта не применялся в задачах на исследование с целью "известно", а данный прием применяется только в таких задачах. Они требуют различной доводки на примерах, в частности, различных уровней срабатывания.

iv. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование относительно неизвестных.

A. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование относительно неизвестных (характеристика "или").

Характеристика "или(N)" указывает на эквивалентность для декомпозиции элементарного утверждения в дизъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

Проверяется, что после приведения заменяющей дизъюнкции к виду д.н.ф. среди конъюнктивных членов каждого дизъюнктивного члена встречается равенство с бесповторной для этого дизъюнктивного члена переменной в одной из своих частей. Тогда создается спецификация "тип(промежуток)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcd}(\{a, b\} = \{c, d\} \leftrightarrow a = c \ \& \ b = d \ \vee \ a = d \ \& \ b = c)$

B. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание относительно неизвестных (характеристика "или").

Проверяется, что заменяемая часть - бесповторное элементарное утверждение, и создается спецификация "тип(нормнок)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(0 < ab \leftrightarrow a < 0 \ \& \ b < 0 \ \vee \ 0 < a \ \& \ 0 < b)$

C. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание относительно неизвестных (характеристика "и").

Проверяется, что заменяемая часть - бесповторное элементарное утверждение, и создается спецификация "тип(нормнок)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcd}(c \leq \min(a, b) + d \leftrightarrow c \leq a + d \ \& \ c \leq b + d)$

D. Дизъюнктивно - конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание относительно заданных неизвестных, использующая конечное перечисление относительно константных параметров (характеристика "перечисление").

Характеристика "перечисление(X F N)" указывает на эквивалентность, определяющую перечисление значений неизвестных призаданном виде константных параметров. X - список неизвестных, F - конъюнкция фильтров, задающих условия на параметры, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(ключ)", "неизвестные(X)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{nxy}(x-\text{целое} \ \& \ y-\text{целое} \leftrightarrow xy = n \leftrightarrow \exists_{pq}(n = pq \ \& \ x = p \ \& \ y = q))$

Спецификация - "тип(ключ)", "неизвестные(x, y)", "направл(второйтерм)", "см(целое(n))". Соответствующий прием перечисляет все разложения целочисленной константы n на два целочисленных множителя.

E. Дизъюнктивно - конъюнктивная декомпозиция посылки задачи на исследование относительно заданных неизвестных, использующая конечное перечисление относительно константных параметров (характеристика "перечисление").

Отличие от предыдущего пункта состоит лишь в том, что тип приема - "изменение". Пример тот же самый.

v. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование путем анализа экстремальных значений.

A. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование путем анализа экстремальных значений (характеристика "разбивает").

Характеристика "разбивает(N)" указывает на эквивалентность, обеспечивающую дизъюнктивно-конъюнктивную декомпозицию элементарного утверждения путем анализа экстремальных значений. N - направление замены. Иногда она сопровождается характеристикой "идентпосылка(i F)", означающей, что истинность антецедента с номером i предпочтительно обеспечивать, используя указатель идентификации либо фильтр F.

Проверяется наличие характеристики с заголовком "идентпосылка". Создается спецификация "тип(нормвнутренность)", "направл(N)". Для каждой характеристики "идентпосылка(i F)" добавляется элемент "указатель(F)" (если заголовок F - символ "перечень") либо "см(F)". Вводится импликация, полученная из исходной отбрасыванием тех антецедентов, которые выделены характеристиками "идентпосылка". Она снабжается указанной спецификацией. Пример:

Теорема

$$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ b - \text{натуральное}\ \&\ |c| \leq 1 \rightarrow (\sin a)^b c = 1 \leftrightarrow (\sin a)^b = 1\ \&\ c = 1\ \vee\ (\sin a)^b = -1\ \&\ c = -1)$$

имеет характеристики "разбивает(второйтерм)" и "идентпосылка(5 не(контекст(вид(c умножение(x4 x5)) единица(1 x4) заменазнака(минус x4) не(контекст(вид(x5 степень(x6 x7)) единица(1 x7) символ(x6 синус косинус) легковидеть(меньше(0 x7)))))))". Очевидно, из истинности фильтра, указанного в характеристике "идентпосылка", вытекает истинность последнего антецедента. Поэтому в теореме приема он отбрасывается.

B. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание путем анализа экстремальных значений (характеристика "разбивает").

Если характеристика с заголовком "идентпосылка" отсутствует, то создается спецификация "тип(нормрасстояние)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcde}(a \leq d\ \&\ b - c \leq e\ \&\ d + e = 0 \rightarrow a + b = c \leftrightarrow a = d\ \&\ b = c + e)$$

Соответствующий прием использует синтезатор "верхняяоценка" для обработки первых двух антецедентов.

vi. Декомпозиция условия задачи на описание с разрешением получаемых подутверждений (характеристика "вспомнеизв").

Характеристика "вспомнеизв(T)" указывает на эквивалентность, позволяющую реализовать условие задачи на описание путем решения вспомогательных задач для антецедентов. T - список термов "набор($i\ x_1 \ldots x_k$)", где i - символьный номер антецедента; $x_1, \ldots, x_k$ - вспомогательные неизвестные, определяемые при решении вспомогательной задачи для данного антецедента. Предполагается, что ответ задачи должен иметь вид конъюнкции равенств для переменных x_j.

Вводятся пустые накопители X, Z, A, B. Просматриваются термы "набор($i\ x_1 \ldots x_k$)" из характеристики "вспомнеизв". Выбираются переменные $z_1, \ldots, z_k$, не входящие в теорему и в накопитель Z. i-й антецедент P заменяется на равенство ($P = (x_1 = z_1\ \&\ \ldots x_k = z_k)$). Номер i заносится в накопитель A; переменные $x_1, \ldots, x_k$ - в накопитель X; переменные $z_1, \ldots, z_k$ - в накопитель Z. В накопитель B заносится терм "быстрпреобр(фикс(i 1) задача(6 тип(описать) полный явное прямойответ цель(неизвестная(X))))".

По окончании просмотра указанных наборов предпринимается замена в консеквенте теоремы переменных X на переменные Z. Полученная импликация сопровождается спецификацией "тип(отбор)", "направл(второйтерм)", "указатель(идентификатор(A) новаяпеременная(X_1) $\ldots$ новаяпеременная(X_N) B)", где $X = \{X_1, \ldots, X_N\}$. Пример:

$\forall_{MNRSabcdfgmnpqrs}(\mathrm{Max}(\lambda_x(f(x), p(x)), a, m, n) = (m = M \ \& \ n = N) \ \& \ \mathrm{Max}(\lambda_y(g(y), q(y)), b, r, s) = (r = R \ \& \ s = S) \rightarrow \mathrm{Max}(\lambda_{xy}(f(x) + g(y), p(x) \ \& \ q(y)), a \times b, c, d) \leftrightarrow c = M \times R \ \& \ d = N + S)$

Спецификация - "тип(отбор)", "направл(второйтерм)", "указатель(идентификатор(1 2) новаяпеременная(m) новаяпеременная(n) новаяпеременная(r) новаяпеременная(s) быстрпреобр(фикс(1 1)задача(6 тип(описать) полный явное прямойответ цель(неизвестная(m n)) упростить)) быстрпреобр(фикс(2 1)задача(6 тип(описать) полный явное прямойответ цель(неизвестная(r s)) упростить)))".

vii. Декомпозиция уравнения с учетом цели "независит" (характеристика "независит").

Характеристика "независит(X)" указывает на эквивалентность, определяющую способ подбора корней, не зависящих от заданных параметров. X - список исключаемых переменных, идентифицируемых с выражениями, имеющими запрещенные параметры.

Создается спецификация "тип(умножсимв)", "переменные(X)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcdef}(a - b = c \ \& \ c = de + f \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a = b \leftrightarrow e = 0 \ \& \ f = 0)$

Спецификация - "тип(умножсимв)", "переменные(d)", "направл(второйтерм)".

(b) Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция группы условий задачи на описание.

i. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция группы условий задачи на описание для разделения нескольких выражений, содержащих заданную неизвестную (характеристика "Непересек").

Характеристика "Непересек(t_1 t_2)" указывает на эквивалентность, разделяющую неизвестные подвыражения t_1, t_2 в различных условиях задачи на описание.

Создается спецификация "тип(типданных)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(X)", где X - параметры характеристики. Пример:

$\forall_{abcdefghijpxy}(p = af - be \ \& \ i = d - c \ \& \ j = h - g \rightarrow ax + by + c = d \ \& \ ex + fy + g = h \leftrightarrow \neg(p = 0) \ \& \ px - if + jb = 0 \ \& \ py - ja + ie = 0 \ \vee \ p = 0 \ \& \ ax + by + c = d \ \& \ ex + fy + g = h)$

Спецификация - "тип(типданных)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x, y)".

ii. Попытка декомпозиции группы условий задачи на описание с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам (характеристика "группнеотл").

Характеристика "группнеотл(N)" указывает на эквивалентность для попытки одновременной декомпозиции группы условий задачи на описание с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(позиция)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcde}(ab = c \ \& \ ad = e \to c = 0 \ \& \ e = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ \neg(a = 0) \ \&$
$b = 0 \ \& \ d = 0)$

Соответствующий прием предпринимает попытку разложить на множители выражения c, e при помощи нормализатора "факторизация".

iii. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция группы условий задачи на описание для перехода к более простому условию (характеристика "группконденс").

Характеристика "группконденс(N)" указывает на эквивалентность для декомпозиции группы условий задачи на описание с целью перехода к более простым условиям. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(теплобразования)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefg}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ g = ad - bc \to ae + bf = 0 \ \& \ ce + df = 0 \leftrightarrow$
$e = 0 \ \& \ f = 0 \ \vee \ ae + bf = 0 \ \& \ g = 0)$

Соответствующий прием проверяет, что e, f содержат неизвестные, а также что хотя бы одно из выражений a, b, c, d их содержит.

(c) Разбор случаев для конечного числа значений неизвестной (характеристика "конечное").

Характеристика "конечное(N)" указывает на эквивалентность с одноместным предикатом $P(x)$ в одной части и дизъюнкцией равенств вида $x = t$, где t - константа, в другой части. N - направление перехода к дизъюнкции.

Создается спецификация "тип(стандплощадь)", "направл(N)", "неизвестные(x)". Пример:

$\forall_a(a - \text{boolean} \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = 1)$

(d) Эквивалентное преобразование условия задачи на описание, обеспечивающее последующую его декомпозицию.

i. Эквивалентное преобразование условия задачи на описание, обеспечивающее последующую его декомпозицию (характеристика "уравнвариант").

Характеристика "уравнвариант(F N)" указывает на эквивалентность, преобразующую эквивалентность к виду, допускающему декомпозицию. F - конъюнкция фильтров, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(свобвхождение)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abcde}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \to ab + ac + bd = e \leftrightarrow (a + d)(b + c) = e + cd)$

Спецификация - "тип(свобвхождение)", "направл(второйтерм)", "см(не(известно(a)) не(известно(b)) целое(c) целое(d) целое(e) не(заголовок(терм($e + cd$)0)))".

Соответствующий приема приводит целочисленное уравнение к виду равенства произведения двух целочисленных неизвестных выражений целочисленной константе, для дальнейшего разбора случаев по делителям этой константы.

ii. Использование нормализатора преобразования к заданному заголовку для последующей декомпозиции уравнения (протокол "нормразделение").

Протокол "нормразделение($A(x)$ x P)" означает, что $A(x)$ - вид утверждения либо выражения, которое с помощью нормализатора P приведения к заданным заголовкам, применяемого к идентифицируемому с переменной x выражению, преобразуется к виду, допускающему декомпозицию.

Определяется список $s_1, \ldots, s_k$ заголовков, к которым преобразует нормализатор P. Выбирается новая переменная y и создается импликация с антецедентом $y = x$ и консеквентом $A(x) \leftrightarrow A(y)$. Она сопровождается спецификацией "тип(соотвпозиция)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)", "см(не(известно(x)) не(переменная(x)) не(заголовок(x s_1)) $\ldots$ не(заголовок(x s_k)) или(короче(y x) заголовок(y s_1) $\ldots$ заголовок(y s_k)) длина(контрольглубины))". Пример:

$\forall_{acd}(a = d \rightarrow$ непересек$(c, d) \leftrightarrow$ непересек$(c, a))$

Спецификация - "тип(соотвпозиция)", "направл(второйтерм)", "оператор(видобъединение)", "см(не(известно(d)) не(переменная(d)) не(заголовок(d объединение)) или(короче(a d) заголовок(a объединение)) длина(контрольглубины))".

3. Свертка нескольких условий задачи на описание в одно условие.

(a) Свертка группы явно разрешенных относительно неизвестных условий в одно, тоже явно разрешенное относительно неизвестных (характеристика "сокращнеизв")

Характеристика "сокращнеизв(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой есть дизъюнктивно-конъюнктивная конструкция из элементарных утверждений, глубина вхождения в которые переменной x (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x, глубина которого равна 1. N - указатель направления замены.

Проверяется отсутствие характеристики "соединение". Проверяется также, что заменяемая часть - конъюнкция, каждый член которой содержит переменную x. Тогда создается спецификация "тип(кн)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \cup b \subseteq c \leftrightarrow a \subseteq c \ \& \ b \subseteq c)$

Спецификация - "тип(кн)", "неизвестные(c)", "направл(первыйтерм)".

(b) Свертка нескольких неизвестных условий в одно условие, допускающее непосредственное разрешение относительно неизвестного подвыражения (характеристика "сокращмод")

Характеристика "сокращмод(x, N)" указывает на эквивалентность, преобразующую конъюнкцию утверждений в дизъюнкцию конъюнкций, каждая из которых пока не разрешена относительно заданной неизвестной, но допускает такое разрешение. В заменяющем терме дизъюнкции и конъюнкции могут быть вырожденными. x - неизвестная, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(однасторона)", "направл(N)", "неизвестные(x)". Пример:

$\forall_a(\sin(2a) = 0 \ \& \ \neg(\sin a = 0) \leftrightarrow \cos a = 0)$

Спецификация - "тип(однасторона)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(a)".

(c) Свертка в одно условие нескольких условий с неизвестными, используемых только при проверке (характеристика "соединение").

Характеристика "соединение" указывает на эквивалентность, заменяющую конъюнкцию бесповторных элементарных утверждений на одно бесповторное элементарное утверждение, причем все указанные утверждения имеют одни и те же переменные.

Создается спецификация "тип(начало)", "направл(N)", где N - направление замены конъюнкции на элементарное утверждение. Пример:

$\forall_a\neg(\sin a = 0) \ \& \ \neg(\cos a = 0) \leftrightarrow \neg(\sin(2a) = 0)$

Спецификация - "тип(начало)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет наличие условия задачи на описание, имеющего вид равенства неизвестной тригонометрической функции известному выражению, причем ни для $\sin a$, ни для $\cos a$ таких равенств нет.

(d) Свертка группы неизвестных условий в одно условие, явно разрешенное относительно неизвестного выражения (характеристика "сокращнеизв").

Характеристика "сокращнеизв(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой есть дизъюнктивно-конъюнктивная конструкция из элементарных утверждений, глубина вхождения в которые переменной x (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x, глубина которого равна 1. N - указатель направления замены.

Проверяется отсутствие характеристики "соединение". Проверяется также, что заменяемая часть - конъюнкция, каждый член которой содержит переменную x. Тогда создается спецификация "тип(усмконечное)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(a < b \ \& \ -a < b \leftrightarrow |a| < b)$

Спецификация - "тип(усмконечное)", "неизвестные(b)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием требует, чтобы b идентифицировалось с каким-либо содержащим неизвестные выражением, не обязательно с неизвестной.

(e) Свертка всех содержащих заданную неизвестную условий задачи на поиск примера в единственное условие, допускающее непосредственный подбор примера (характеристика "сокращнеизв").

Пусть характеристика - "сокращнеизв(x N)". Проверяется отсутствие характеристики "соединение". Проверяется также, что заменяемая часть - конъюнкция, каждый член которой содержит переменную x. Тогда создается спецификация "тип(экв)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abx}(x - \text{число} \ \& \ a < x \ \& \ x < b \leftrightarrow x \in (a,b))$

Спецификация "тип(экв)", "неизвестные(x)", "направл(второйтерм)".

(f) Свертка группы условий задачи на описание при редактировании ответа (характеристика "сокращнеизв").

Пусть характеристика - "сокращнеизв(x N)". Проверяется отсутствие характеристики "соединение". Проверяется также, что заменяемая часть - конъюнкция, каждый член которой содержит переменную x. Если оценка сложности заменяющей части не больше оценки сложности заменяемой, то создается спецификация "тип(объединениесписков)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 1 \leq n \leftrightarrow n - \text{натуральное})$

4. Упрощение утверждений относительно неизвестных.

   (a) Неизвестные подвыражения со сложным заголовком.

      i. Преобразования условия либо посылки, исключающее сложное выражение с неизвестными.

         A. Преобразования условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование, исключающее сложное выражение с неизвестными (характеристика "неизвоценка").

         Характеристика "неизвоценка(N F)" указывает на эквивалентность, применение которой в направлении N позволяет получить более простые выражения с неизвестными. F - фильтр, уточняющий контекст.

         Создается спецификация "тип(прообраз)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

         $\forall_{abcde}(e - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{числитель}(e) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(e) - \text{even}) \rightarrow ab^e + cd^e < 0 \leftrightarrow a^{1/e}b + c^{1/e}d < 0)$

         Спецификация - "тип(прообраз)", "направл(второйтерм)", "см(и(не(контекст(операнд(фикс(0 1 1)x6)вид(x6 умножение(x7 x8)) не(известно(x8)) не(контекст(вид(x8 степень(x9 x10)) не(известно(x9)))) единица(1 x7) заменазнака(минус x7))) известно(e)))". Соответствующий прием исключает степенные выражения с неизвестными основаниями b, d, в предположении, что a, c, e известны.

         B. Преобразование подутверждения условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование, исключающее сложное выражение с неизвестными (характеристика "неизвоценка").

         Аналогично предыдущему, но спецификация имеет вид "тип(Узелприема)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abcd}(d = bc \to c \le a/b \leftrightarrow 0 < b \;\&\; d \le a \;\vee\; b < 0 \;\&\; a \le d)$

Спецификация - "тип(Узелприема)", "направл(второйтерм)", "см(и(не(Входит(связка цели)) не(сопровождение) или(не(известно(a)) не(известно(b))) конец(не(контекст(переменная(c) подчинено(теквхожд x4) символ(x4 существует класс отображение длялюбого) входит(c связприставка(x4))))) известно(c)))", "указатель(идентификатор(1))". Последний элемент добавлен при коррекции теоремы приема. Соответствующий приема исключает неравенства с дробными неизвестными частями.

C. Преобразования посылки задачи на доказательство либо на исследование, исключающее сложное выражение с неизвестными (характеристика "неизвоценка").

Аналогично предыдущему, но спецификация имеет вид "тип(натуральные)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abc}(0 \le a \;\&\; 0 \le c \to a\sqrt{b} = c\sqrt{d} \leftrightarrow a^2b - c^2d = 0)$

Спецификация - "тип(натуральные)", "направл(второйтерм)", "см(и(не(известно(b)) не(известно(d)) не(контекст(числовойатом(корень x5) не(переменная(x5)) не(константа(x5)))) константа(x1) константа(x3)))".

ii. Преобразование условия либо посылки к виду, позволяющему исключить сложное выражение с неизвестными.

A. Преобразование условия задачи на описание к виду, позволяющему исключить сложное выражение с неизвестными (характеристика "упрощнеизв").

Характеристика "упрощнеизв(N F)" указывает на эквивалентность, применение которой в направлении N позволяет перейти к утверждению, для которого имеются средства перехода к более простым выражениям с неизвестными. F - фильтр, уточняющий контекст.

Создается спецификация "тип(исключнеизв)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abcdefq}(q = a^2e - c^2 + 2cd - b^2f + 2b(d - c)\sqrt{f} \to a\sqrt{e} + b\sqrt{f} + c = d \leftrightarrow q = d^2 \;\&\; 0 \le (d - c - b\sqrt{f})a)$

Спецификация - "тип(исключнеизв)", "направл(второйтерм)", "см(не(известно(e)) не(известно(f)) известно(d) не(контекст(вид(c плюс(x7 умножение(x8 степень(x9 дробь(x10 умножение(2 x11)))))) не(известно(x9)) единица(0 x7) заменазнака(минус x8) единица(1 x8 x11))) не(короче(e f)) не(равно(e f)) меньше(число(слагаемое(x16 x8) не(известно(x8))) 9))".

B. Применение нормализатора приведения к заданным заголовкам к подвыражению условия задачи на описание для последующего эквивалентного преобразования, исключающего сложную операцию (характеристика "заголовки").

Характеристика "заголовки(P N)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор P приведения к заданным заголовкам для последующего эквивалентного преобразования, исключающего сложную операцию. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(корректформ)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcde}(e = a/b + c \to a/b + c = d \leftrightarrow e = d)$

Спецификация - "тип(корректформ)", "оператор(видумножение)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием выполняет сложение неизвестных дробей в одной из частей уравнения.

C. Преобразование посылки задачи на исследование к виду, позволяющему исключить сложное выражение с неизвестными (характеристика "упрощнеизв").

Характеристика "упрощнеизв(N F)" указывает на эквивалентность, применение которой в направлении N позволяет перейти к утверждению, для которого имеются средства перехода к более простым выражениям с неизвестными. F - фильтр, уточняющий контекст.

Создается спецификация "тип(упрощплюсвект)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{ab}(\sin a - \sin b = 0 \leftrightarrow \sin((a-b)/2) = 0 \ \vee \ \cos((a+b)/2) = 0)$

Спецификация - "тип(упрощплюсвект)", "направл(второйтерм)", "см(не(известно(корень)))".

iii. Переход к более простым неизвестным подвыражениям со сложным заголовком (характеристика "косвнеизв").

Характеристика "косвнеизв(x N)" указывает на эквивалентность, преобразующую утверждение со сложной неизвестной операцией в утверждение, имеющее ту же самую неизвестную операцию, но с более простым операндом. x - неизвестная, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(учетзамены)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abx}(b - \text{число} \to \text{дробнаячасть}(a + x) = b \leftrightarrow \text{дробнаячасть}(x) = \text{дробнаячасть}(b - a) \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 < 1 - b)$

Спецификация - "тип(учетзамены)", "неизвестные(x)", "направл(второйтерм)".

iv. Переход в условии задачи на описание к альтернативным сложным выражениям с неизвестными (характеристика "альтзначения").

Характеристика "альтзначения(N)" указывает на эквивалентность, преобразующую утверждение к альтернативным сложным подвыражениям с неизвестными. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(упрощминусвект)", "направл(N)". Если теорема имеет также характеристику "Начало(t)", определяющую терм t, усмотрение которого в задаче инициирует попытку применения приема, то добавляется элемент "терм(t)". Пример:

$\forall_{abcijk}(\neg(b-1=0)\ \&\ 0<b\ \&\ 0<i\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c=j\log_b i \to a+ki^j=0 \leftrightarrow a=0\ \&\ k=0\ \vee\ c-\log_b a=-\log_b(-k)\ \&\ k<0\ \&\ 0<a\ \vee\ c-\log_b(-a)=-\log_b k\ \&\ a<0\ \&\ 0<k)$

Спецификация - "тип(упрощминусвект)", "направл(второйтерм)", "терм($\log_b c$)", "указатель(идентификатор(5))". Последний элемент введен при коррекции теоремы приема.

v. Применение нормализатора, стандартизирующего неизвестные подвыражения условия задачи на описание со сложным заголовком (характеристика "станддн").

Характеристика "станддн(P N x)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор P для стандартизации неизвестных подвыражений условия задачи на описание. N - направление замены, x - неизвестная.

Создается спецификация "тип(равнозначны)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcde}(c=a\ \&\ e=d/2 \to a=b \leftrightarrow \neg(\cos e=0)\ \&\ c=b\ \vee\ \cos e=0\ \&\ a=b)$

Спецификация - "тип(равнозначны)", "оператор(половинныйугол)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием усматривает целесообразность перехода в левой части тригонометрического уравнения к тангенсу половинного аргумента e. Проверяется наличие косинуса d либо тангенса e, а также отстствие содержащих неизвестные тригонометрических операций, отличных от $\sin d$, $\cos d$, $\operatorname{tg} d$, $\operatorname{tg} e$. Правая часть первого антецедента обрабатывается оператором "половинныйугол", выполняющим выражение содержащих неизвестные тригонометрических операций через тангенс e.

vi. Навешивание внешней операции на обе части равенства - условия задачи на описание для последовательной свертки нескольких неизвестных подвыражений со сложным заголовком в одно такое подвыражение (характеристика "Внешнеизв").

Характеристика "Внешнеизв(N)" указывает на эквивалентность, навешивающую внешнюю операцию над обеими частями равенства для свертки нескольких неизвестных выражений в одно. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(заслонфигуры)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcde}(e=2a \to b\cos a\cos e+d=c \leftrightarrow b\sin(4a)+4d\sin(a)=4c\sin a\ \&\ \neg(\sin a=0)\ \vee\ \sin a=0\ \&\ b\cos a\cos e+d=c)$

Соответствующий прием "сворачивает" произведение коиснусов кратных аргументов, домножая его на синус.

(b) Расшифровка неизвестного подутверждения условия задачи на описание (характеристика "развертка").

Характеристика "развертка($K\ N$)" указывает на эквивалентность для кванторной расшифровки. K - тип возникающего при расшифровке квантора ("длялюбого", "существует"); N - направление замены.

Проверяется, что оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого, причем теорема не имеет характеристики "параметризация". Тогда создается спецификация "тип(содержится)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Af}(A \times A \subseteq \mathrm{Dom}(f) \rightarrow \text{замкнуто}(A, f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in A\ \&\ y \in A \rightarrow f(x, y) \in A))$

(c) Попытка применения нормализатора уравнений к переформулировке подутверждения условия задачи на описание (характеристика "нормкн").

Характеристика "нормкн(N)" указывает на эквивалентность, преобразующую элементарное утверждение с неизвестными в конъюнкцию элементарных утверждений, причем целесообразна попытка применения нормализатора уравнений к каждому конъюнктивному члену заменяющего утверждения. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(степеньделителя)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set} \rightarrow a = b \leftrightarrow a \subseteq b\ \&\ b \subseteq a)$

Соответствующий прием применяет нормализатор "уравнсодержится" для разрешения относительно неизвестных каждого включения в правой части. Проверяется, что при этом глубина вхождений неизвестных уменьшается, включая случай явного разрешения относительно неизвестных.

(d) Группировка дизъюнктивных членов относительно неизвестной (характеристика "сокращнеизв").

Характеристика "сокращнеизв($x\ N$)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой есть дизъюнктивно-конъюнктивная конструкция из элементарных утверждений, глубина вхождения в которые переменной x (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x, глубина которого равна 1. N - указатель направления замены.

Проверяется, что заголовок заменяемой части - "или", причем теорема не имеет характеристики "соединение". Тогда создается спецификация "тип(имп)", "неизвестные(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(b \leq |a| \leftrightarrow b \leq a\ \vee\ b \leq -a)$

Спецификация - "тип(имп)", "неизвестные(b)", "направл(первыйтерм)".

(e) Группировка дизъюнктивных членов относительно неизвестной (характеристика "или").

Характеристика "или(N)" указывает на эквивалентность, декомпозирующую элементарное утверждение в дизъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

Проверяется, что параметры заменяемого утверждения включаются в параметры заменяющего. Обнаруживается такая переменная x, входящая в заменяемую часть, что глубина вхождения ее в каждый из дизъюнктивных членов заменяющей части равна 1. Тогда создается спецификация "тип(имп)", "неизвестные(x)", "направл(M)", где M - направление, противоположное N. Пример:

$\forall_{abc}(a \in \{b; c\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a \in \{; c\})$

Спецификация - "тип(имп)", "неизвестные(a)", "направл(первыйтерм)".

(f) Переход к новым неизвестным для упрощения условия задачи на описание (характеристика "новыенеизвестные").

Характеристика "новыенеизвестные(X, N, F)" указывает на эквивалентность, определяющую переход к новым неизвестным - связанным переменным квантора существования заменяющей части, обеспечивающий упрощение утверждения относительно неизвестных. X - список переменных, рассматриваемых в качестве неизвестных, N - направление замены, F - фильтр, уточняющий контекст.

Создается спецификация "тип(прямойответ)", "направл(N)", "неизвестные(X)", "см(F)". Пример:

$\forall_{xy}(a - \text{число}\ \&\ 0 \leq a \to x^2 + y^2 = a \leftrightarrow \exists_z(x = \sqrt{a}\sin z\ \&\ y = \sqrt{a}\cos z\ \&\ 0 \leq z\ \&\ z < 2\pi\ \&\ z - \text{число}))$

Спецификация - "тип(прямойответ)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x, y)", "см(контекст(новоеусловие(х2)не(линейноеуравнение(х2 неизвестные))))".

(g) Группировка неизвестных членов в одной части условия либо посылки задачи.

  i. Группировка неизвестных членов в одной части условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование (характеристика "группировка").

  Характеристика "группировка(N)" указывает на эквивалентность, позволяющую группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. N - направление замены.

  Проверяется, что заменяемая часть имеет своим заголовком либо равенство, либо символ отношения, допускающего перегруппировку членов между своими частями. Тогда создается спецификация "тип(неизвестные)", "направл(N)". Пример:

  $\forall_{ab}(0 \leq a - b \leftrightarrow b \leq a)$

  Спецификация - "тип(неизвестные)", "направл(первыйтерм)".

ii. Группировка нескольких неизвестных членов в одной части уравнения задачи на исследование для приведения подобных членов относительно неизвестного подвыражения (характеристика "подобныечлены").

Характеристика "подобныечлены(N x F)" указывает на эквивалентность, определяющую перегруппировку содержащих неизвестные членов между операндами неодноместного отношения для приведения подобных членов относительно неизвестных. N - направление замены, x - неизвестная, F - фильтр, уточняющий контекст.

Создается спецификация "тип(последнийтерм)", "направл(N)", "неизвестная(x)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abcx}(ax + b = cx \leftrightarrow b = (c - a)x)$

Спецификация - "тип(последнийтерм)", "направл(второйтерм)", "неизвестная(x)", "см(десчисло(a) десчисло(c))".

(h) Применение нормализатора стандартной формы к неизвестному подвыражению.

i. Применение нормализатора стандартной формы для разгруппировки неизвестного подвыражения условия задачи на описание (характеристика "Стандплюс").

Характеристика "Стандплюс(P N)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор стандартной формы P для разгруппировки подвыражения с неизвестными. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(таблзначение)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcdfg}(f = a(b + c)^d \to a(b + c)^d = g \leftrightarrow f = g)$

Спецификация - "тип(таблзначение)", "оператор(стандплюс)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием выполняет раскрывание скобок с неизвестными слагаемыми.

ii. Применение нормализатора стандартной формы для разгруппировки неизвестного подвыражения посылки задачи на исследование (характеристика "Стандплюс").

Аналогично предыдущему, но спецификация имеет вид "тип(суп)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcefg}(f = a(b + c) + e \to a(b + c) + e = g \leftrightarrow f = g)$

Спецификация - "тип(суп)", "оператор(стандплюс)", "направл(второйтерм)".

(i) Преобразование неизвестного кванторного условия задачи на описание в бескванторное с помощью вспомогательной задачи на описание (характеристика "связнеизв").

Характеристика "связнеизв(i X N)" указывает на эквивалентность, преобразующую кванторную импликацию с неизвестными в бескванторное утверждение с помощью вспомогательной задачи на описание, обрабатывающей заданный антецедент. i - номер антецедента, X - список неизвестных, относительно которых он разрешается, N - направление замены.

Рассматривается список A антецедентов $A_1, \ldots, A_n$. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_k)$. Выбираются переменные $y_1, \ldots, y_k$, не входящие в теорему. Антецедент A_i заменяется в списке A на равенство "$A_i = ((x_1 = y_1) \mathbin{\&} \ldots (x_k = y_k))$". В остальных утверждениях списка A переменные x_j заменяются на y_j. Находится результат B такой же замены переменных в консеквенте теоремы. Создается импликация R с антецедентами A и консеквентом B. Рассматривается заменяемый терм Q исходной теоремы. Проверяется, что он представляет собой кванторную импликацию. Составляется список $z_1, \ldots, z_m$ всех параметров терма Q, не входящих в антецедент A_i (до его преобразования). Составляется также список $t_1, \ldots, t_p$ подтермов "значение($\ldots$)" кванторной импликации Q, содержащих переменные ее связывающей приставки. Затем для теоремы R создается спецификация "тип(учетнормализации)", "направл(N)", "быстрпреобр(фикс(i 1) задача(6 тип(описать) полный явное прямойответ упростить цель(неизвестная($x_1 \ldots x_k$))))", "см(или(не(известно(z_1)) $\ldots$ не(известно(z_m))) известно(терм(t_1)) $\ldots$ известно(терм(t_p)))", "указатель(идентификатор(i) новаяпеременная(x_1) $\ldots$ новаяпеременная(x_k))". Пример:

$\forall_{abcfgyz}(\mathrm{Max}(\lambda_x(g(x), x - \text{число}), \mathrm{set}_x(x - \text{число} \mathbin{\&} f(x)), y, z) = (y = b \mathbin{\&} z = c) \mathbin{\&} \neg(b = \emptyset) \rightarrow \forall_x(x - \text{число} \mathbin{\&} f(x) \rightarrow g(x) < a) \leftrightarrow c < a)$

Спецификация - "тип(учетнормализации)", "направл(второйтерм)", "быстрпреобр(фикс(1 1) задача(6 тип(описать) полный явное прямойответ упростить цель(неизвестная(y z))))", "см(не(известно(a)) известно(терм($f(x)$)) известно(терм($g(x)$)))", "указатель(идентификатор(1) новаяпеременная(y) новаяпеременная(z))". Соответствующий прием заменяет кванторную строгую верхнюю оценку для каждого элемента множества на строгое неравенство для наибольшего элемента множества, определяемого при помощи задачи на описание.

(j) Эквивалентное преобразование условия задачи на описание для перехода к неизвестному подвыражению, уже встречающемуся в условиях (характеристика "повтор").

Характеристика "повтор(t X)" указывает на эквивалентность, преобразующую условие задачи на описание для получения повторного вхождения выражения t с неизвестными списка X.

Создается спецификация "тип(замечусловие)", "терм(t)", "неизвестные(X)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abn}(a \subseteq b \mathbin{\&} \mathrm{card}(b) = n \mathbin{\&} \text{конечное}(b) \rightarrow \neg(a = b) \leftrightarrow \mathrm{card}(a) < n)$

Спецификация - "тип(замечусловие)", "терм(card(a))", "неизвестные(a)", "направл(второйтерм)".

(k) Упрощение относительно неизвестных одной посылки задачи на исследование с помощью другой.

i. Преобразование одной посылки задачи на исследование с помощью другой для получения уравнения относительно неизвестных внешней задачи на описание (характеристика "внешперем").

Характеристика "внешперем(i N X)" указывает на эквивалентность, позволяющую преобразовать одну посылку задачи на исследование с помощью другой посылки к виду, в котором все неизвестные относятся к внешней задаче. i - номер антецедента, идентифицируемого с другой посылкой, N - направление замены, X - список неизвестных заменяющего утверждения.

Создается спецификация "тип(цепьзадач)", "направл(N)", "неизвестные(X)", "антецедент(i)". Пример:

$\forall_{abcdx}(x = \operatorname{ctg} p \to a \sin p/b = c \cos p/d \leftrightarrow a/b = cx/d)$

Спецификация - "тип(цепьзадач)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x)", "антецедент(1)". Соответствующий прием исключает выражение p, содержащее неизвестные, не являющиеся неизвестными внешней задачи на описание. При этом выражения a, b, c, d не содержат неизвестных, а x - содержит неизвестные внешней задачи на описание.

ii. Преобразование одной посылки задачи на исследование с помощью другой для получения уже встречавшегося неизвестного подвыражения (характеристика "повторение").

Характеристика "повторение(i N A неизвестные(X))" указывает на эквивалентность, позволяющую преобразовать одну посылку задачи на исследование с помощью другой посылки к виду, в котором определяется значение некоторого уже встречающегося в посылках неизвестного выражения A. i - номер антецедента, идентифицируемого с другой посылкой, N - направление замены, X - все переменные терма A, идентифицируемые с неизвестными выражениями.

Создается спецификация "тип(Целое)", "направл(N)", "неизвестные(X)", "антецедент(i)", "терм(A)". Пример: 2 $\forall_{abxy}(x+y = a \to x^2+y^2 = b \leftrightarrow 2xy = a^2 - b)$

Спецификация - "тип(Целое)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x, y)", "антецедент(1)", "терм(xy)".

iii. Преобразование имеющего несколько числовых атомов уравнения задачи на исследование с помощью другого уравнения для декомпозиции на группу уравнений с единственным числовым атомом (характеристика "исклповтор").

Характеристика "исклповтор(i N x известно($y_1 \dots y_k$))" указывает на эквивалентность, преобразующую некоторое утверждение задачи с помощью утверждения из контекста. i - номер антецедента, идентифицируемого со вторым утверждением, N - направление замены, x - общая переменная двух утверждений, исключаемая при замене и идентифицируемая с неизвестным подтермом, $y_1, \dots, y_k$ - все переменные, идентифицируемые с термами без неизвестных.

Создается спецификация "тип(перем)", "направл(N)", "антецедент(i)", "см(не(известно(x)) известно(y_1) … известно(y_k))". Если переменная x встречается в заменяемой части как операнд ассоциативно-коммутативной операции, имеющей другим операндом какую-либо переменную y_j, то в спецификацию добавляется элемент "указатель(перечень(x не(известно(x))))". При этом фильтр "известно(y_j)" отбрасывается. Пример:

$\forall_{abcdefgh}(ag + b = c \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ f = bh - dg - ch + eg \to ah + d = e \leftrightarrow f = 0)$

Спецификация - "тип(перем)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)", указатель(перечень(a не(известно(a))))", "см(не(известно(a))известно(g))".

iv. Преобразование уравнения с несколькими числовыми атомами с помощью другого уравнения задачи на исследование для получения уравнения с единственным числовым атомом (характеристика "исклповтор").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "шахмблок". Пример тот же, с заменой типа приема.

v. Преобразование одного численного уравнения задачи на исследование с помощью другого для исключения неизвестных (характеристика "исклповтор").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "случзнач". Пример тот же.

vi. Преобразование одной посылки задачи на исследование с помощью другой для исключения неизвестного подвыражения (характеристика "Сокращ").

Характеристика "Сокращ(i X)" указывает на эквивалентность, преобразующую посылку задачи на исследование с помощью другой посылки для исключения неизвестных подвыражений. i - номер антецедента, идентифицируемого с другой посылкой, X - список переменных, идентифицируемых с исключаемыми подвыражениями.

Создается спецификация "тип(Слагаемое)", "неизвестные(X)", "антецедент(i)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcdpnq}(\neg(b = 0) \ \& \ ab = cd \to pa^n = qc^n \leftrightarrow pd^n = qb^n)$

Спецификация - "тип(Слагаемое)", "неизвестные(a, c)", "антецедент(2)", "направл(второйтерм)".

vii. Преобразование одной посылки задачи на исследование с помощью другой для упрощения относительно неизвестных подвыражений (характеристика "сокращплюс").

Характеристика "сокращплюс(S)" указывает на эквивалентность, преобразующую посылку задачи на исследование с помощью другой посылки для упрощения относительно неизвестных подвыражений. S - список термов "неизвестные(A)" для групп переменных A, хотя бы одна из которых идентифицируется с содержащим неизвестные подвыражением.

Создается спецификация "тип(перечислцелые)", "направл(второйтерм)", S. Пример:

$\forall_{abcdexy}(ax^2 + b = c \ \& \ x + y = e \to ay^2 + b = d \leftrightarrow a(x - y)e = c - d)$

Спецификация - "тип(перечислцелые)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x)", "неизвестные(y)".

viii. Преобразование одного уравнения задачи на исследование с помощью другого для упрощения относительно невырожденных числовых атомов (характеристика "числинт").

Характеристика "числинт(S)" указывает на эквивалентность, преобразующую одно уравнение задачи на исследование с помощью другого для упрощения относительно невырожденных числовых атомов. S - список этих атомов.

Создается спецификация "тип(размер)", "числатомы(S)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcdx}(ax = b \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ d -$ число $\to cx = d \leftrightarrow bc = ad)$

Спецификация - "тип(размер)", "числатомы(a, c, x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, c, x содержат невырожденные числовые атомы, а выражения b, d - не содержат.

ix. Преобразование одного уравнения задачи на исследование с помощью другого для получения уравнения с единственной неизвестной (характеристика "сокращПлюс").

Характеристика "сокращПлюс(X)" указывает на эквивалентность, преобразующую одно уравнение задачи на исследование с помощью другого, исключая неизвестное подвыражение. X - список всех переменных заменяющей части, которые могут содержать неизвестные.

Создается спецификация "тип(рисунок)", "неизвестные(X)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcxy}(ax = b \ \& \ \neg(c = 0) \to ac = y \leftrightarrow xy = bc)$

Спецификация - "тип(рисунок)", "неизвестные(x, y)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что измененное уравнение имеет единственную неизвестную, в то время как исходное - больше одной неизвестной.

x. Преобразование одного уравнения задачи на исследование с помощью другого для уменьшения числа вхождений неизвестных (характеристика "сокращПлюс").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "вычислениедлины". Пример тот же, но фильтры приема другие: проверяется, что выражение x имеет меньше вхождений неизвестных, чем выражение a. Проверяется также, что b, c не содержат неизвестных.

xi. Преобразование одной посылки задачи на исследование с помощью другой для последующей декомпозиции (характеристика "уравнминус").

Характеристика "уравнминус(i)" указывает на эквивалентность, преобразующую одно уравнение задачи на исследование с помощью другого к виду, допускающему декомпозицию. i - номер антецедента, идентифицируемого со вторым уравнением.

Создается спецификация "тип(инф)", "направл(второйтерм)", "антецедент(i)". Пример:

$\forall_{abcd}(c = a \;\&\; c - d = b \;\&\; a - \text{число} \to d = a \leftrightarrow b = 0)$

Смецификация - "тип(инф)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)". Соответствующий прием предпринимает поапытку разложения на множители разности левых частей уравнений с совпадающими ненулевыми правыми частями.

(l) Упрощение условия задачи на описание с помощью другого условия либо посылки.

i. Эквивалентное преобразование одного условия с помощью другого для исключения заданной неизвестной (характеристика "исклфикс").

Характеристика "исклфикс(i y X)" указывает на эквивалентность, преобразующую одно условие задачи на описание с помощью другого для исключения заданной неизвестной y. X - список переменных, которые тоже могут идентифицироваться с неизвестными. i - номер антецедента, идентифицируемого со вторым условием.

Создается спецификация "тип(текущаязадача)", "направл(второйтерм)", "антецедент(i)", "переменная(y)", "неизвестные(X)". Пример:

$\forall_{abcdefgx}(agx + b = c \;\&\; \neg(a = 0) \to dgx + e = f \leftrightarrow ae - bd = af - cd)$

Спецификация - "тип(текущаязадача)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)", "переменная(x)", "неизвестные(b, e)".

ii. Эквивалентное преобразование одного условия с помощью другого для получения условия более простого типа (характеристика "упрощумножение").

Характеристика "упрощумножение(N)" указывает на эквивалентность, упрощающую условие задачи на описание с помощью другого условия. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(конкатенация)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefg}(\neg(bg = 0) \;\&\; ad = bg \;\&\; f = be - cd \to ae = cg \leftrightarrow f = 0)$

Спецификация - "тип(конкатенация)", "направл(N)". Соответствующий прием выполняет деление уравнений, левые части которых имеют общий неизвестный множитель. Выражения b, c неизвестных не содержат.

iii. Эквивалентное преобразование одного условия с помощью другого для получения условия с единственной неизвестной (характеристика "исклповтор").

Характеристика "исклповтор(i N x известно($y_1 \dots y_k$))" указывает на эквивалентность, преобразующую некоторое утверждение задачи с помощью утверждения из контекста. i - номер антецедента, идентифицируемого со вторым утверждением, N - направление замены, x - общая переменная двух утверждений, исключаемая при замене и идентифицируемая с неизвестным подтермом, $y_1, \dots, y_k$ - все переменные, идентифицируемые с термами без неизвестных.

Прием аналогичен ранее расмотренному приему для преобразования посылок. Для удоства чтения повторим его описание. Создается спецификация "тип(комментариипосылки)", "направл(N)", "антецедент(i)", "см(не(известно(x)) известно(y_1) ... известно(y_k))". Если переменная x встречается в заменяемой части как операнд ассоциативно-коммутативной операции, имеющей другим операндом какую-либо переменную y_j, то в спецификацию добавляется элемент "указатель(перечень(x не(известно(x))))". При этом фильтр "известно(y_j)" отбрасывается. Пример:

$\forall_{abcdefgh}(ag + b = c \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ f = bh - dg - ch + eg \rightarrow ah + d = e \leftrightarrow f = 0)$

Спецификация - "тип(комментариипосылки)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1)", указатель(перечень(a не(известно(a))))", "см(не(известно(a))известно(g))".

iv. Эквивалентное преобразование одного условия задачи на описание с помощью другого для исключения неизвестных (характеристика "исклповтор").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "подствпосылки".

v. Эквивалентное преобразование одного условия с помощью другого для обеспечения декомпозиции уравнения (характеристика "неизвмножители").

Характеристика "неизвмножители(i)" указывает на эквивалентность, преобразующую одно условие задачи на описание с помощью другого для обеспечения возможности декомпозиции. i - номер антецедента, идентифицируемого со вторым условием. Обычно эта характеристика дополняется характеристикой "оператор(P)", указывающей на используемый нормализатор.

Создается спецификация "тип(замечание)", "направл(второйтерм)", "антецедент(i)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcde}(e = a - b + c - d \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow e = 0)$

Спецификация - "тип(замечание)", "направл(второйтерм)", "антецедент(5), "оператор(видумножение)". Соответствующий прием предпринимает попытку разложения на множители левой части разности двух уравнений.

vi. Эквивалентное преобразование одного условия задачи на описание с помощью другого и попытка разрешить результат относительно неизвестных (характеристика "смрешение").

Характеристика "смрешение(i j x известно($a_1 \ldots a_m$))" указывает на эквивалентность, преобразующую одно условие задачи на описание с помощью другого для поыптки разрешения результата относительно неизвестных. i - номер антецедента, идентифицируемого со вторым условием задачи, j - номер антецедента, обращающегося к вспомогательной задаче на описание, x - переменная, идентифицируемая с содержащим неизвестные выражением, $a_1, \ldots, a_m$ - все известные параметры.

Создается спецификация "тип(нормграницы)", "направл(второйтерм)", "антецедент(i)", "идентификатор(j)", "неизвестные(x)", "известно(a_1 $\ldots a_m$)". Пример:

$\forall_{abcdpqrA}(\neg(a = 0)\ \&\ ab + c = d\ \&\ (aq - cp = ar - dp) = A \rightarrow pb + q = r \leftrightarrow A)$

Спецификация - "направл(второйтерм)", "антецедент(2)", "идентификатор(3)", "неизвестные(b)", "известно(a, d, p, r)". Соответствующий прием рассматривает линейную комбинацию двух уравнений в задаче на описание, имеющей единственную неизвестную, и пытается ее разрешить.

vii. Эквивалентное преобразование одного условия задачи на описание с помощью другого для исключения известного параметра (характеристика "извлечпараметр").

Характеристика "извлечпараметр(a X)" указывает на эквивалентность, преобразующую одно условие задачи на описание с помощью другого для исключения известного параметра. a - переменная, идентифицируемая с выражением, содержащим исключаемый параметр, X - список переменных, идентифицируемых с неизвестными выражениями.

Создается спецификация "тип(выходнаястепень)", "направл(второйтерм)", "параметры(a)", "неизвестные(X)". Пример:

$\forall_{ABbcd}(\neg(b = 0)\ \&\ A = bc\ \&\ B - \text{число} \rightarrow B = cd \leftrightarrow Ad - bB = 0)$

Спецификация - "тип(выходнаястепень)", "направл(второйтерм)", "параметры(c)", "неизвестные(A, B)". Соответствующий прием проверяет, что b, d - константы, и создает линейную комбинацию двух уравнений с одной неизвестной, имеющих параметр, для получения уравнения без параметра.

viii. Исключение неизвестных в условии задачи на описание, имеющей цель "замещение" (характеристика "замещениеусловий").

Характеристика "замещениеусловий" указывает на эквивалентность для преобразования условия задачи на описание, имеющей цель "замещение".

Создается спецификация "тип(вычитсимв)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall ABKabcd$(коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \to A = B \leftrightarrow a = c$ & $b = d)$

Соответствующий прием заменяет равенство точек на равенства их известных координат.

(m) Преобразование одной группы условий задачи на описание в другую группу, допускающую разрешение относительно неизвестных подвыражений (характеристика "группреш").

Характеристика "группреш$(x_1 \dots x_n\ N)$" указывает на эквивалентность, преобразующую группу утверждений с неизвестными в другую группу, для которой возможно явное разрешение относительно операндов сложных операций. X - переменные, рассматриваемые в качестве неизвестных, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(цепьвхождений)", "направл(N)", "неизв(x_1)", "...", "неизв(x_n)". Пример:

$\forall_{abcd}(\sin a \sin b = c\ \&\ \cos a \cos b = d \leftrightarrow \cos(a+b) = d-c\ \&\ \cos(a-b) = d+c)$

Спецификация - "тип(цепьвхождений)", "направл(второйтерм)", "неизв(a)", "неизв(b)".

(n) Попытка преобразования группы условий задачи на описание для одновременной их декомпозиции (характеристика "разложмод").

Характеристика "разложмод(N)" указывает на эквивалентность для преобразования группы условий задачи на описание, обеспечивающего их декомпозицию. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(убывание)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefghijkpq}(h = ag\ \&\ i = dg\ \&\ \neg(h = 0)\ \&\ \neg(i = 0)\ \&\ p = gad\sin(k-j) + ae - db - fa + dc\ \&\ q = gad\sin(j+k) + ae + db - fa - dc \to h \sin j \cos k + b = c\ \&\ i \cos j \sin k + e = f \leftrightarrow p = 0\ \&\ q = 0)$

Соответствующий прием, обнаружив два уравнения для произведений тригонометрических функций, переходит от них к двум уравнения для тригонометрических функций суммы и разности аргументов и пытается разрешить эти уравнения.

(o) Группировка одноместной операции внутрь неизвестной ассоциативно-коммутативной операции, если внешнее двуместное отношение допускает перегруппировку членов этой операции, а противоположная его часть тоже известна (характеристика "нормминус").

Характеристика "нормминус(N)" указывает на эквивалентность, вносящую внешнюю одноместную операцию под знак ассоциативно-коммутативной операции для последующей группировки неизвестных членов уравнения. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(рядфурье)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(-(a+b) = c \leftrightarrow -a-b = c)$

Соответствующий прием вносит минус внутрь суммы с неизвестными в уравнениии, правая часть которого тоже содержит неизвестные. Таким образом подготавливается возможность группировки неизвестных членов в одной части уравнения, а известных - в другой.

(p) Упрощение относительно выражения с неизвестными при редактировании параметрического описания ответа функционального уравнения (характеристика "глуб").

Характеристика "глуб(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x, глубина которых (с отбрасыванием внешнего отрицания) более 1, а заменяющая часть построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x, и притом глубины 1. N - указатель направления замены.

Проверяется наличие характеристики "уменьшение(N)", означающей, что эквивалентность исключает символы с наибольшей оценкой сложности. Создается спецификация "тип(наборзначений)", "направл(N)", "неизвестные(x)". Пример:

$\forall_{abc}(0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \rightarrow \log_a b = c \leftrightarrow b = a^c)$

Спецификация - "тип(наборзначений)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(b)". Соответствующий прием применяется при редактировании ответа дифференциального уравнения. a, c не содержат неизвестных, b - содержит.

Преобразование посылки к виду дизъюнкции

1. Переход к дизъюнкции в посылке задачи на доказательство или задачи на исследование, имеющей цель "противоречие" (характеристика "или").

   Характеристика "или(N)" указывает неа эквивалентность, выполняющую декомпозицию элементарного утверждения в дизъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(минимакс)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

2. Переход к дизъюнкции в посылке задачи на доказательство или задачи на исследование, имеющей цель "противоречие" (характеристика "уменьшение").

   Характеристика "уменьшение(N)" указывает на эквивалентность, исключающую символы с наибольшей оценкой сложности. N - направление замены.

   Если заменяющий терм имеет заголовок "или", то создается спецификация "тип(минимакс)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcd}(0 \leq c \ \& \ d = cb \rightarrow 0 < a + c|b| \leftrightarrow 0 < a + d \ \vee \ 0 < a - d)$

   Спецификация - "тип(минимакс)", "направл(N)", "указатель(идентификатор(2))".

3. Переход к дизъюнкции в посылке задачи на доказательство или задачи на исследование, имеющей цель "противоречие" (характеристика "конечное").

   Характеристика "конечное(N)" указывает на эквивалентность с одноместным предикатом $P(x)$ в одной части и дизъюнкцией равенств вида $x = t$, где t - константа, в другой части. N - направление перехода к дизъюнкции.

   Создается спецификация "тип(минимакс)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_a(a - \text{boolean} \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = 1)$

4. Конъюнктивная декомпозиция под корневым отрицанием в посылке задачи на доказательство или задачи на исследование, имеющей цель "противоречие" (характеристика "и").

   Создается спецификация "тип(блокпроверок)", "направл(N)". Исключение составляет случай, когда заменяемая часть - отношение, одним из операндов которого служит атомарное выражение, не встречающееся в заменяющей части. Пример:

   $\forall_{adef}(a - \text{set} \to \text{непересек}(d, e \cup f) \leftrightarrow \text{непересек}(d, e) \ \& \ \text{непересек}(d, f))$

5. Переход к дизъюнктивной посылке, определяющей значение переменной, входящей в условие (характеристика "или").

   Если в заменяющей (дизъюнктивной) части эквивалентности существует равенство переменной x выражению, не содержащему этой переменной, причем глубина переменной x в заменяемой части равна 1, то создается спецификация "тип(нормперечень)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(a \in \{b; c\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a \in \{; c\})$

   Спецификация - "тип(нормперечень)", "переменная(a)", "направл(второйтерм)".

6. Разбор случаев при исследовании свойств объекта (характеристика "или").

   Если отсутствуют существенные посылки, то создается спецификация "тип(направлпараболы)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(ab < 0 \leftrightarrow a < 0 \ \& \ 0 < b \ \vee \ 0 < a \ \& \ b < 0)$

   Соответствующий прием срабатывает в задачах на исследование, имеющих цель "линия", т.е. при исследовании свойств кривой, заданной своим уравнением.

7. Дизъюнктивная декомпозиция посылки задачи на исследование (характеристика "или").

   Аналогично предыдущему, но тип приема - "частноемн". Пример:

   $\forall_{abcd}(ab + ad + bc + cd = 0 \leftrightarrow a + c = 0 \ \vee \ b + d = 0)$

Упрощение утверждений с описателями

1. Исключение описателя с помощью кванторов (характеристика "новзнач").

   Характеристика "новзнач(N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой представляет собой кванторную импликацию без описателей, а заменяющая - результат подстановки некоторых описателей в элементарное утверждение. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(сектор)", "направл(M)", где M - направление замены, противоположное N. Пример:

   $\forall_{fPma}(P(a)\ \&\ m = f(a) \to m = \max(\lambda_x(f(x), P(x))) \leftrightarrow \forall_x(P(x) \to f(x) \le m))$

2. Исключение содержащего неизвестные описателя с помощью кванторов (характеристика "описание").

   Характеристика "описание(N)" указывает на эквивалентность, у которой заменяемая часть содержит описатели, а заменяющая - не содержит, но содержит кванторы. Сложность заменяющей части меньше сложности заменяемой. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(Угол)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{aP}(\sup(\mathrm{set}_x(P(x))) \le a \leftrightarrow \forall_x(P(x) \to x \le a))$

3. Использование эквивалентности для упрощения описателя (характеристика "эквменьше").

   Характеристика "эквменьше(N)" указывает на эквивалентность, упрощающую описатель. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(посылка)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fga}(\text{сходится}(\lambda_n(af(n)/g(n), n-\text{натуральное})) \leftrightarrow a = 0 \vee \neg(a = 0)\ \&\ \text{сходится}(\lambda_n(f(n)/g(n), n - \text{натуральное})))$

4. Упрощение описателя путем перехода к параметрическому описанию (характеристика "эквменьшеилиравно").

   Характеристика "эквменьшеилиравно(N)" означает, что эквивалентность упрощает описатель путем перехода к параметрическому описанию. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(разряд)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fga}(a = \lim_{n\to\infty}\{f(n)\}\ \&\ a - \text{число} \to \text{частичнпредел}(x, \lambda_n(f(n) + g(n), n - \text{натуральное})) \leftrightarrow \exists_y(\text{частичнпредел}(y, \lambda_n(g(n), n - \text{натуральное}))\ \&\ x = a + y))$

5. Исключение описателя с помощью вспомогательных вычислений (характеристика "исклпрог").

   Характеристика "исклпрог" указывает на эквивалентность для исключения описателя, использующую вспомогательные вычисления.

   Создается спецификация "тип(стремится)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{axb}(b = \lim_{n\to\infty}\{a(n)\}$ & $b-$число $\to$ частичнпредел$(x, \lambda_n(a(n), n-$натуральное$))$ $\leftrightarrow x = b)$

   Соответствующий прием предпринимает попытку вычислить предел последовательности для нахождения множества ее частичных пределов.

6. Переход от утверждения с описателем "отображение" к утверждению с описателем "класс" (характеристика "классобъекта").

   Характеристика "классобъекта" указывает на эквивалентность для перехода от описателя "отображение" к описателю "класс".

   Создается спецификация "тип(теоремыбуфера)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{aiAB}($числотр$(B(i)) \to a \in \bigcap_{i,A(i)} B(i) \leftrightarrow$ верхняягрань$(a, \mathrm{set}_x(\exists_i(A(i)$ & $x = \inf(B(i)))))$ & нижняягрань$(a, \mathrm{set}_x(\exists_i(A(i)$ & $x = \sup(B(i))))))$

   Соответствующий прием заменяет условие принадлежности точки семейству числовых отрезков сравнением ее с точной верхней и нижней гранями множеств концов отрезков. Антецедент обрабатывается проверочным оператором, которому передается дополнительная посылка $A(i)$.

7. Разрешение относительно переменной, связанной внешним описателем.

   (a) Параметрическое описание переменной, связанной внешним описателем "класс" (характеристика "параметризация").

   Характеристика "параметризация" указывает на эквивалентность с квантором существования в одной из своих частей, которую можно неизбыточным образом использовать для получения явного параметрического описания.

   Пусть N - направление замены на квантор существования. Проверяется, что теорема имеет характеристику "уменьшение(N)". Среди конъюнктивных членов утверждения под квантором существования находится равенство для переменной x, не входящей в связывающую приставку этого квантора. Создается спецификация "тип(тригповтор)", "направл(N)", "переменная(x)". Пример:

   $\forall_{ABf}(\mathrm{card}($образ$(f, A)) = 1 \leftrightarrow$ Отображение$(f, A, B) \leftrightarrow \exists_b(b \in B$ & $f =$ конст$(A, b)))$

   Спецификация - "тип(тригповтор)", "направл(второйтерм)", "переменная(f)". Соответствующий прием проверяет, что заменяемое утверждение расположено в области действия описателя "класс" по переменной f.

(b) Явное разрешение утверждения относительно переменной, связанной внешним описателем (характеристика "глуб").

Характеристика "глуб(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x, глубина которых (с отбрасыванием внешнего отрицания) более 1, а заменяющая часть построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x, и притом глубины 1. N - указатель направления замены.

Проверяется, что теорема не имеет характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм", "сложнреш" и что заменяющая часть не содержит символа "или". Предпринимается попытка преобразовать заменяемую часть вспомогательной задачей на преобразование, имеющей цель "группировки". Затем создается спецификация "тип(параллели)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{amn}(a - \text{целое} \to -a \in \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow a \in \{-n, \ldots, -m\})$$

Спецификация - "тип(параллели)", "переменная(a)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет наличие внешнего описателя по переменной a.

(c) Явное разрешение относительно одной из варьируемых переменных условия условного выражения под описателем "отображение" (характеристика "глуб").

Пусть характеристика - "глуб(x N)".

Проверяется, что теорема не имеет характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм", "сложнреш" и что отсутствует другая характеристика "глуб($\ldots$)". Если заменяемая и заменяющая части - равенства, то создается спецификация "тип(отладка)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abci}(\neg(a = 0) \to ai + b = c \leftrightarrow i = (c - b)/a)$$

Спецификация - "тип(отладка)", "неизвестная(i)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием оказался востребован при стандартизации описания вида матрицы.

(d) Явное разрешение относительно варьируемой переменной при вычислении операции над семейством (характеристика "глуб").

Пусть характеристика - "глуб(x N)".

Проверяется, что теорема не имеет характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм", "сложнреш". Тогда создается спецификация "тип(указательвхождения)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abic}(0 < b \to a + bi < c \leftrightarrow i < (c - a)/b)$$

Спецификация - "тип(указательвхождения)", "неизвестная(i)", "направл(второйтерм)".

(e) Группировка элементов описания класса, явно разрешенных относительно переменной связывающей приставки (характеристика "сокращнеизв").

Характеристика "сокращнеизв(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой есть дизъюнктивно-конъюнктивная конструкция из элементарных утверждений, глубина вхождения в которые переменной x (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x, глубина которого равна 1. N - указатель направления замены.

Проверяется, что заменяемая часть - конъюнкция, каждый член которой содержит переменную x, причем хотя бы один из этих членов не имеет вида "$x \in t$". Тогда создается спецификация "тип(десделение)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{kmn}(m|k \ \& \ n|k \leftrightarrow \text{нок}(m,n)|k)$

Спецификация - "тип(десделение)", "переменная(k)", "направл(второйтерм)".

(f) Дизъюнктивно-конъюнктивная свертка для упрощения относительно переменной, связываемой внешним описателем "класс" (характеристика "упрощобъединение").

Характеристика "упрощобъединение(x N)" указывает на эквивалентность для дизъюнктивно-конъюнктивной свертки, упрощающей относительно переменной x. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нижнийкрай)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{axf}(f(a) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ A \rightarrow x = a \ \& \ A \ \vee \ a < x \ \& \ x - \text{целое} \ \& \ f(x) \leftrightarrow -[-a] \leq x \ \& \ x - \text{целое} \ \& \ f(x))$

Спецификация - "тип(нижнийкрай)", "переменная(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что переменная x связана внешним описателем, не связывающим переменные выражения a.

Упрощение кванторов

1. Декомпозиция кванторной импликации в конъюнкцию нескольких кванторных импликаций и элементарных утверждений (характеристика "подразбиение").

Характеристика "подразбиение(N)" указывает на эквивалентность, разбивающую кванторную импликацию в конъюнкцию нескольких импликаций и элементарных утверждений. N - направление замены. Допускается вариант "подразбиение(N t)", где t - подтерм кванторной импликации, появление которого инициирует попытку преобразования.

Создается спецификация "тип(Примечпосылки)", "направл(N)". Если есть терм t, то к спецификации добавляется элемент "терм(t)". Пример:

$\forall_{PQ}(\forall_{xy}(x - \text{число} \ \& \ P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \leftrightarrow \forall_{xy}(x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x \ \& \ P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \ \& \ \forall_{xy}(x - \text{число} \ \& \ x < 0 \ \& \ P(x,y) \rightarrow Q(x,y)))$

Спецификация - "тип(Примечпосылки)", "направл(второйтерм)", "терм(модуль(x))". Соответствующий прием разбивает импликацию на две для исключения модуля.

2. Упрощение квантора за счет перехода к новым переменным (характеристика "новпеременные").

   Характеристика "новпеременные" указывает на эквивалентность для упрощения параметрического описания путем перехода к новым переменным.

   Создается спецификация "тип(нормодз)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{Pn}(n -$ натуральное $\rightarrow \exists_k(k -$ целое & $P(k(\mathrm{mod}(n)))) \leftrightarrow$
   $\exists_k(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ & $P(k)))$

3. Отбрасывание избыточных обобщенных антецедентов кванторной импликации (характеристика "антецеденты").

   Характеристика "антецеденты(N)" указывает на эквивалентность для отбрасывания реализуемой группы антецедентов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(двойнойаргумент)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fAB}(\forall_{kn}(k -$ целое & взаимнопросты$(k, f(n))$ & $A(n) \rightarrow B(n)) \leftrightarrow$
   $\forall_n(A(n) \rightarrow B(n)))$

4. Попытка применения нормализатора приведения к заданным заголовкам для декомпозиции кванторной импликации (характеристика "импликанты").

   Характеристика "импликанты(P N)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор P приведения к заданным заголовкам для последующей декомпозиции консеквента кванторной импликации. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(команда)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{Apq}(p(x) = q(x) \rightarrow \forall_x(A(x) \rightarrow p(x) = 0) \leftrightarrow \forall_x(A(x) \rightarrow q(x) = 0))$

   Спецификация - "тип(команда)", "оператор(видумножение)", "направл(второйтерм)".

Упрощение проверяемого условия

1. Расшифровка по определению проверяемого условия (характеристика "определение").

   Проверяется, что теорема - эквивалентность, заменяющее утверждение которой не имеет связанных переменных. Создается спецификация "тип(вставкафрагментов)", "направл(N)", где N - направление замены в сторону расшифровки определения. Пример:

   $\forall_{fAB}($биекция$(f, A, B) \leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = A$ & $\mathrm{Val}(f) = B$ & взаимнооднозначно$(f))$

2. Преобразование условия задачи на доказательство, исключающее сложное выражение (характеристика "уменьшение").

   Характеристика "уменьшение(N)" указывает на эквивалентность, исключающую символы с наибольшей оценкой сложности. N - направление замены.

   Проверяется, что оценка сложности набора выражений заменяющего терма меньше оценки сложности набора выражений заменяемого. Тогда создается спецификация "тип(исключение)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{bec}(\mathrm{Val}(\lambda_f(e(f), c(f))) \subseteq \mathbb{R} \,\&\, b\text{−число} \to \text{Верхняягрань}(b, \mathrm{Val}(\lambda_f(e(f), c(f)))) \leftrightarrow$
   $\forall_f(c(f) \to e(f) < b))$

   Спецификация - "тип(исключение)", "направл(второйтерм)".

3. Преобразование условия задачи на доказательство к виду, позволяющему исключить сложное выражение (характеристика "предвкадр").

   Характеристика "предвкадр(N)" указывает на эквивалентность, подготавливающую возможность эквивалентного преобразования для исключения сложной операции. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(усмчетное)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcde}(0 \leq b \,\&\, 0 \leq d \,\&\, a \leq 0 \,\&\, c \leq 0 \,\&\, 0 \leq e \to 0 \leq a\sqrt{b} + c\sqrt{d} + e \leftrightarrow$
   $0 \leq e^2 - a^2b - c^2d - 2ac\sqrt{b}\sqrt{d})$

   Спецификация - "тип(усмчетное)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием уменьшает число неизвестных радикалов до одного, чтобы далее можно было исключить все неизвестные радикалы.

4. Преобразование условия задачи на доказательство к виду, содержащему общее подвыражение с посылкой (характеристика "общтермы").

   Характеристика "общтермы(A N)" указывает на эквивалентность, преобразующую утверждение для получения подтерма заданного вида A. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(минус)", "направл(N)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{abc}(\text{Вектор}(a) \,\&\, \text{Вектор}(b) \,\&\, \text{Вектор}(c) \to \text{компланарны}(a, b, c) \leftrightarrow$
   $\text{скалумнож}(a, \text{вектумнож}(b, c)) = 0)$

   Спецификация - "тип(минус)", "направл(второйтерм)", "терм(вектумнож(b c))". Соответствующий прием усматривает в посылке выражение "вектумнож(b c)" и использует его для переформулировки условия задачи на доказательство.

5. Применение нормализатора приведения к заданным заголовкам для декомпозиции условия задачи на доказательство (протокол "нормразделение").

   Протокол "нормразделение($A(x)$ x P)" означает, что $A(x)$ - вид утверждения либо выражения, которое с помощью нормализатора P приведения к заданным заголовкам, применяемого к идентифицируемому с переменной x выражению, преобразуется к виду, допускающему декомпозицию.

Выбирается новая переменная y и создается импликация с антецедентом $y = x$ и консеквентом $A(x) \leftrightarrow A(y)$. Она сопровождается спецификацией "тип(нормарктангенс)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{cd}(d = c \to 0 \leq c \leftrightarrow 0 \leq d)$

Спецификация - "тип(нормарктангенс)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Соответствующий прием выполняет сложение дробных выражений в правой части неравенства, используя для этого оператор "видумножение".

6. Исключение сложного понятия под символом "истинность" (характеристика - "уменьшение").

   Характеристика "уменьшение(N)" указывает на эквивалентность, исключающую символы с наибольшей оценкой сложности. N - направление замены.

   Проверяется, что теорема не имеет характеристик с заголовками "развертка", "общнорм" и что обе части эквивалентности - элементарные утверждения. Создается спецификация "тип(выход)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_f$(коммутативно(f) $\to$ обратимо(f) $\leftrightarrow$ правобратимо(f))

   Спецификация - "тип(выход)", "направл(второйтерм)".

7. Группировка в одной части доказываемого отношения всех невырожденных объектов (характеристика "объекты").

   Характеристика "объекты(N)" указывает на эквивалентность, группирующую в одной части отношения все невырожденные объекты. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(независит)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{acAf}$(группа(A) & f = операция(A) $\to$ $f(a) = b$ $\leftrightarrow$ f(суффикс(a, обрэлемент(b, f))) = единица(f))

   Спецификация - "тип(независит)", "направл(второйтерм)".

Специальная стандартизация

В этом разделе собраны различные типы приемов, выполняющих стандартизацию, связанную с особенностями предметной области. Чтобы генератор приемов мог создать полноценные приемы таких типов, в базе теорем должны присутствовать протоколы, фиксирующие решения о принятой в предметной области стандартизации, а теоремы должны иметь соответствующие характеристики. В большинстве случаев эти данные пока отсутствуют, так что генератор приемов выдает лишь "скелет" описания приема.

1. Группировка в одной части двуместного отношения всех операндов ассоциативно-коммутативной операции (характеристика "группировка").

   Характеристика "группировка(N)" указывает на эквивалентность, позволяющую группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. N - направление замены.

   Проверяется, что заголовком каждой части эквивалентности служит один и тот же символ P, отличный от равенства. Справочник "перегруппировка" усматривает, что возможна перегруппировка A - членов операндов отношения P из одной части в другую с изменением знака B. Тогда создается спецификация "тип(группировка)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(0 \leq b - a \leftrightarrow a \leq b)$

   Спецификация - "тип(группировка)", "направл(первыйтерм)". Хотя теорема приема простая, список фильтров приема весьма внушительный. Автоматически создается пока лишь часть из них.

2. Использование нормализатора для специальной стандартизации.

   (a) Попытка применения нормализатора приведения к заданным заголовкам для декомпозиции элементарного утверждения (протокол "нормразделение").

   Протокол "нормразделение($A(x)$ x P)" означает, что $A(x)$ - вид утверждения либо выражения, которое с помощью нормализатора P приведения к заданным заголовкам, применяемого к идентифицируемому с переменной x выражению, преобразуется к виду, допускающему декомпозицию.

   Выбирается новая переменная y и создается импликация с антецедентом $y = x$ и консеквентом $A(x) \leftrightarrow A(y)$. Она сопровождается спецификацией "тип(текприем)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

   $\forall_{cd}(d = c \rightarrow 0 \leq c \leftrightarrow 0 \leq d)$

   Спецификация - "тип(текприем)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Соответствующий прием выполняет попытку разложения на множители ненулевой части неравенства для известных параметров в условиях задачи на описание.

   (b) Стандартизация известного подвыражения условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам (характеристика "станднабор")

   Характеристика "станднабор(N)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор приведения к заданным заголовкам для контекстной стандартизации не содержащего неизвестных подвыражения условия задачи на описание. N - направление замены.

   Берется характеристика "оператор(P)", и создается спецификация "тип(внешсловарь)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

   $\forall_{abcdefg}(g = a + b \rightarrow (a + b)^c d + e = f \leftrightarrow g^c d + e = f)$

Спецификация - "тип(внешсловарь)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Соответствующий прием предпринимает попытку разложить на множители известный коэффициент, имеющий вид суммы. Текущий терм задачи - уравнение с неизвестными. В частности, выражения d, e должны содержать неизвестные, а число неизвестных задачи должно быть более единицы.

(c) Применение нормализатора стандартной формы для стандартизации операнда одноместного отношения (протокол "стандтерм").

Протокол "стандтерм(A B P)" указывает на контекст, в котором выполняется стандартизаци с помощью нормализатора стандартной формы. B - преобразуемый терм, A - надтерм терма B, в рамках которого выполняется стандартизация, P - заголовок нормализатора.

Проверяется, что A имеет вид $f(B)$. Создается импликация с антецедентом "$b = a$" и консеквентом "$f(a) \leftrightarrow f(b)$". Здесь a, b - переменные. Эта импликация сопровождается спецификацией "тип(копиязадачи)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

По протоколу "стандтерм(рациональное($a(b+c)^d$) $a(b+c)^d$ стандплюс)" создается прием с теоремой:

$\forall_{ab}(b = a \rightarrow a - \mathrm{rational} \leftrightarrow b - \mathrm{rational})$

Спецификация - "тип(копиязадачи)", "направл(второйтерм)", "оператор(стандплюс)". Прием раскрывает скобки, чтобы можно было отбросить заведомо рациональные слагаемые.

(d) Обработка не сопровождающего по о.д.з. утверждения нормализатором стандартизации условий на известные параметры при редактировании ответа задачи на описание (протокол "стандменьше").

Протокол "стандменьше(f P)" указывает заголовок нормализатора стандартизации условий с известными параметрами для отношений, имеющих заголовок P.

Определяется арность n символа f. В случае коммутативно-ассоциативного символа она полагается равной 2. Проверяется что эта арность больше 1 и не больше 9. Выбираются переменные $x_1, \ldots x_n$ и отличная от них переменная y. Создается импликация с антецедентом $y = f(x_1 \ldots x_n)$ и консеквентом $f(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow y$. Выбирается новая переменная z, и указанная импликация сопровождается спецификацией "тип(корекцияпосылок)", "направл(второйтерм)", "быстрпреобр($f(x_1 \ldots x_n)$ P удалениепосылок(z не(известно(z))) посылки(одз))". Пример:

$\forall_{abc}(c = (a \leq b) \rightarrow a \leq b \leftrightarrow c)$

Спецификация - "тип(корекцияпосылок)", "направл(второйтерм)", "быстрпреобр($a \leq b$ стандменьшеилиравно удалениепосылок(x4 не(известно(x4))) посылки(одз))". Соответствующий прием выполняет обращение к нормализатору нестрогих неравенств для параметров при редактировании ответа задачи на описание.

(e) Обработка сопровождающего по о.д.з. утверждения нормализатором стандартизации условий на известные параметры при редактировании ответа задачи на описание (протокол "стандменьше").

Отличие от предыдущего пункта лишь в том, что тип приема - "простое". Пример - тот же. Отличие приемов данного и предыдущего пункта заключается в том, что в данном приеме преобразуемое утверждение может использоваться как сопровождающее по о.д.з., и это вызывает некоторые дополнительные действия по его учету в комментариях, а в предыдущем пункте преобразуемое утверждение не использовалось для сопровождения по о.д.з., и дополнительные действия не требовались.

(f) Попытка применения ослабленного нормализатора приведения к заданным заголовкам для декомпозиции условия на известные параметры при редактировании ответа задачи на описание (протокол "нормразделение").

Протокол "нормразделение($A(x)$ x P)" означает, что $A(x)$ - вид утверждения либо выражения, которое с помощью нормализатора P приведения к заданным заголовкам, применяемого к идентифицируемому с переменной x выражению, преобразуется к виду, допускающему декомпозицию.

Определяется список $s_1, \ldots, s_k$ заголовков, к которым преобразует нормализатор P. Выбирается новая переменная y и создается импликация с антецедентом $y = x$ и консеквентом $A(x) \leftrightarrow A(y)$. Справочник "упрощзнак" выдает упрощенную версию P' нормализатора P приведения к заданным заголовкам. Созданная импликация сопровождается спецификацией "тип(лимит)", "направл(второйтерм)", "оператор(P')". Пример:

$\forall_{ab}(b = a \rightarrow a = 0 \leftrightarrow b = 0)$

Спецификация - "тип(лимит)", "направл(второйтерм)", "оператор(факторизация)".

(g) Применение нормализатора стандартной формы для контекстной стандартизации (характеристика "стандравно").

Характеристика "стандравно" указывает на тождество либо эквивалентность, использующие нормализатор для контекстной стандартизации. Сопровождается характеристикой "оператор(P)", указывающей название нормализатора P.

Проверяется, что теорема является эквивалентностью, после чего создается спецификация "тип(контрользамены)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcdef}(f = a(b + c)^d + e \rightarrow 0 < a(b + c)^d + e \leftrightarrow 0 < f)$

Спецификация - "тип(контрользамены)", "направл(второйтерм)", "оператор(стандплюс)". Соответствующий прием раскрывает скобки в неравенстве, являющемся условием задачи на доказательство.

3. Стандартизация с переходом от квантора к описателю (характеристика "перех").

Характеристика "перех(N)" указывает на эквивалентность для перехода от квантора к описателю. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(комбинаторныефункции)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{xNAPQB}(B(i) = \mathrm{set}_y(y \in A \ \& \ \forall_z(Q(y,i) \to P(y,i))) \to \text{кортеж}(x, N, A) \ \&$
$\forall_{iz}(i \in \{1, \ldots, N\} \ \& \ Q(x(i), i) \to P(x(i), i)) \leftrightarrow x \in \prod_{i=1}^{N} B(i))$

Соответствующий прием представляет множество кортежей в виде прямого произведения. Правая часть антецедента сворачивается при помощи вспомогательной задачи на преобразование.

4. Стандартизирующая контрапозиция кванторной импликации (характеристика "контрапозиция").

   Характеристика "контрапозиция(N)" указывает на эквивалентность для стандартизирующей контрапозиции кванторной импликации. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(выписка)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{Pn}(n - \text{натуральное} \to \forall_k(P(k) \ \& \ k - \text{натуральное} \to \neg(k \leq n)) \leftrightarrow$
   $\forall_k(k \in \{1, \ldots, n\} \to \neg(P(k))))$

   Спецификация - "тип(выписка)", "направл(второйтерм)".

5. Стандартизация посылок задачи на исследование.

   (a) Специальная стандартизация посылки задачи на исследование (характеристика "стандпосылки").

   Характеристика "стандпосылки(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации посылки задачи на исследование. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(ответ)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(a + b = 0 \to \sin a = 0 \leftrightarrow \sin b = 0)$

   Спецификация - "тип(ответ)", "направл(второйтерм". Соответствующий прием идентифицирует антецедент с посылкой. При этом выражение a имеет заголовок "плюс", а выражение b - не имеет.

   (b) Специальная группировка посылок задачи на исследование (характеристика "СтандПлюс").

   Характеристика "СтандПлюс(N)" указывает на эквивалентность для специальной группировки посылок задачи на исследование. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(массив)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(b - \mathrm{set} \ \& \ c - \mathrm{set} \to \text{непрерывно}(a, b) \ \& \ \text{непрерывно}(a, c) \leftrightarrow \text{непрерывно}(a, b \cup c))$

Спецификация - "тип(массив)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "непрерывно", т.е. решаемых для исследования функций на непрерывность.

(c) Использование равенства из контекста для уменьшения числа параметров известной посылки задачи на исследование (характеристика - "уменьшить").

Характеристика "уменьшить(N)" указывает на эквивалентность, использующую равенство из посылок для уменьшения числа параметров посылки задачи на исследование. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(включается)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{acdef}(d - a = 0 \ \& \ c + d = e \ \& \ f = (0 < e) \rightarrow 0 < a + c \leftrightarrow f)$

Спецификация - "тип(включается)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием рассматривает неконстантное слагаемое a правой части неравенства без неизвестных, имеющего более одного параметра. В контекста усматривается равенство $d - a = 0$, при помощи которого неравенство удается преобразовать к виду, имеющему лишь один параметр.

6. Специальная стандартизация посылки задачи на описание (характеристика "стандплс").

Характеристика "стандплс(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации посылки задачи на описание. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(входит)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefg}(\text{диффлагранжа}(f, a, \lambda_{xy}(bx^2/c + dx^2/e + g(y), h(y))) \leftrightarrow \text{диффлагранжа}(f, a, \lambda_{xy}((b/c + d/e)x^2 + g(y), h(y))))$

Соответствующий прием приводит подобные члены для квадратов одной из переменных многоместной функции при использовании дифференциала Лагранжа.

7. Специальная стандартизация посылки задачи на преобразование (характеристика "преобр").

Характеристика "преобр(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации посылки задачи на преобразование. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(неопред)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(a \leq b \leftrightarrow a < b)$

Соответствующий прием заменяет нестрогие неравенства, определяющие область интегрирования, на строгие, чтобы при упрощении подынтегрального выражения легче было проверять условия на о.д.з.

8. Специальная стандартизация условия задачи на преобразование (характеристика "преобразование").

   Характеристика "преобразование(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации условия задачи на преобразование. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(внешоперация)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcd}(a\sqrt{c} + b\sqrt{d} = 0 \leftrightarrow a^2c - b^2d = 0 \ \& \ ab \leq 0)$

   Спецификация - "тип(внешоперация)", "направл(таоройтерм)". Соответствующий прием применяется в задачах на преобразование, имеющих цель "класс". При это преобразуемое равенство расположено внутри квантора существования, связанные переменные которого входят как в c, так и в d.

9. Стандартизация условий задачи на доказательство.

   (a) Специальная стандартизация условия задачи на доказательство (характеристика - "стандплюс").

      Характеристика "стандплюс(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации условия задачи на доказательство.

      Создается спецификация "тип(результат)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{abc}(0 < a \rightarrow 0 < ab + c \leftrightarrow 0 < b + c/a)$

      Спецификация - "тип(результат)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием преобразует доказываемое неравенство перед его дифференцированием. Выражение b имеет своим заголовком один из символов "логарифм", "арктангенс", "арксинус", "арккосинус" и содержит переменную дифференцирования, а выражения a, c имеют вхождения этой переменной только внутри алгебраических операций.

   (b) Применение специального нормализатора к условию задачи на доказательство (характеристика "вычрасст").

      Характеристика "вычрасст(P)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор вычисления P для преобразования условия задачи на доказательство.

      Создается спецификация "тип(новпозиция)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

      $\forall_{abfc}(a = \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, c)) \leftrightarrow a)$

      Спецификация - "тип(новпозиция)", "направл(второйтерм)", "оператор(нормнижняягрань)". Прием используется при доказательстве неравенств с помощью производной. Приемы оператора "нормнижняягрань" используют информацию о корнях производной на промежутке, найденных до момента обращения к нему.

(c) Стандартизирующая контрапозиция в кванторном условии задачи на доказательство (характеристика - "импликант").

Характеристика "импликант(N)" указывает на эквивалентность для стандартизирующей контрапозиции кванторной импликации, являющейся условием задачи на доказательство. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(округление)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fgAB}(\forall_x(A(x)\ \&\ f(x) < g(x) \to \neg(B(x))) \leftrightarrow \forall_x(A(x)\ \&\ B(x) \to g(x) \leq f(x)))$

Спецификация - "тип(округление)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется к кванторному условию задачи на доказательство до того, как антецеденты кванторной импликации будут перенесены в посылки.

10. Специальная стандартизация условия задачи на описание.

(a) Специальная стандартизация условия задачи на описание (характеристика "стандПлюс").

Характеристика "стандПлюс(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации условия задачи на описание. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(номерсимв)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{mn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \to \neg(m = n) \leftrightarrow m \leq n - 1\ \vee\ n + 1 \leq m)$

Спецификация - "тип(номерсимв)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется к условию задачи на описание, не имеющей уравнений. Выражение m содержит неизвестные, а n - не содержит. Преобразованное условие сопровождается комментарием "разборслучаев".

(b) Специальная стандартизация импликативного условия задачи на описание (характеристика "группнеизв").

Характеристика "группнеизв(N F)" указывает на эквивалентность для группировки всех содержащих неизвестные членов в одном операнде консеквента кванторного условия задачи на описание. N - направление замены, F - фильтр, определяющий целесообразность замены.

Создается спецификация "тип(Неизв)", "направл(N)", "см(F)". Пример:

$\forall_{fg}(f(n) - \text{число} \to \forall_n(n - \text{натуральное} \to f(n) = g(n)) \leftrightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \to f(n) - g(n) = 0))$

Спецификация - "тип(Неизв)", "направл(второйтерм)", "см(не(известно(фикс(0 1 5 1))) не(известно(фикс(0 1 5 2))) входит(n фикс(0 1 5 1)) входит(n фикс(0 1 5 2)) не(контекст(вид(фикс(0 1 5 1) значение(x1 n)) неизвестная(x1))) не(контекст(вид(фикс(0 1 5 2) значение(x1 n)) неизвестная(x1))))".

(c) Переформулировка условия задачи на описание, имеющего вид нечислового предиката, но содержащего численную неизвестную, в терминах числовых атомов (характеристика "числвыраз").

Характеристика "числвыраз(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую нечисловое отношение через отношение для числовых атомов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(двойнаяоперация)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}$(Вектор(a) & Вектор(b) $\rightarrow a \perp b \leftrightarrow$ скалумнож$(a, b) = 0)$

Спецификация - "тип(двойнаяоперация)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется к условию задачи на описание, содержащему численную неизвестную.

(d) Преобразование известного подвыражения условия задачи на описание для упрощения разрешения относительно неизвестных (характеристика "известные").

Характеристика "известные(N)" указывает на эквивалентность для преобразования известного подвыражения условия задачи на описание, упрощающее его разрешение относительно неизвестных. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(конецотрезка)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdx}(d = ab + ac \rightarrow \cos x = ab + ac \leftrightarrow \cos x = d)$

Спецификация - "тип(конецотрезка)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием усматривает равенство косинуса выражения x, содержащего неизвестные, сумме либо разности синусов и косинусов. Антецедент предпринимает попытку свернуть эту комбинацию в синус либо косинус.

(e) Стандартизация условия задачи на описание относительно константных подвыражений (характеристика "Конст1").

Характеристика "Конст1(N)" указывает на эквивалентность для стандартизации условия задачи на описание относительно константных подвыражений. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(параметры)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdnpq}(c -$ целое & $n -$ целое & $0 \leq n$ & $b = pq$ & $p|c$ & $d = c/p$ &
нод$(a, p) = 1 \rightarrow ap^n = b + c \leftrightarrow ap^{n-1} = q + d$ & $0 \leq n - 1)$

Спецификация - "тип(параметры)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием сокращает обе части целочисленного уравнения на общий множитель p. Переменные a, b, p идентифицируются с целочисленными константами. Выражение n содержит неизвестные.

(f) Стандартизация условия задачи на описание, подготавливающая возможность учета цели "независит" (характеристика "независят").

Характеристика "независят(N)" указывает на эквивалентность для стандратизации условия задачи на описание, ориентированной на учет цели "независит". N - направление замены.

Создается спецификация "тип(кортежпеременных)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcd}(\neg(c=0) \to a+b/c=d \leftrightarrow ac+b=cd)$

Спецификация - "тип(кортежпеременных)", "направл(второйтерм)". Соответсвующий прием домножает обе части уравнения на знаменатель c, не содержащий неизвестных и запрещенных целью "независит" переменных. После исключения знаменателя окажется возможной группировка, формирующая зануляемый коэффициент при выражении с запрещенными переменными.

(g) Применение специального нормализатора к условию задачи на описание (протокол "нормнеизв").

Протокол "нормнеизв(P A неизвестные(X))" указывает название P нормализатора, выполняющего разрешение утверждений вида A относительно неизвестных X.

Выбирается новая переменная x и создается импликация с антецедентом $x=A$ и консеквентом $A \leftrightarrow x$. Она сопровождается спецификацией "тип(четырнадцать)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)", "неизвестные(X)". Пример:

$\forall_{abcde}(e=\mathrm{Min}(a,b,c,d) \to \mathrm{Min}(a,b,c,d) \leftrightarrow e)$

Спецификация - "тип(четырнадцать)", "направл(второйтерм)", "оператор(нормМинимум)", "неизвестные(c,d)". Соответствующий прием обращается к нормализатору "нормМинимум" при известных a,b и не известных c,d. Этот нормализатор используется при исследовании функции с помощью производной и обеспечивает переход от всей области определения к множеству особых точек, после чего сравнивает конечное число значений.

(h) Применение специального нормализатора к подвыражению условия задачи на описание (протокол "нормвыч").

Протокол "нормвыч(P A x)" указывает название P нормализатора вычисления, который следует применять к подвыражению условия A задачи на описание, идентифицированному с переменной x.

Выбирается новая переменная y, после чего создается импликация с антецедентом $y=x$ и консеквентом вида $A \leftrightarrow A'$, где A' получается из A заменой переменной x на y. Она сопровождается спецификацией "тип(семнадцать)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{fgxy}(g=f \to \text{ортканоничвид}(f,x,y) \leftrightarrow \text{ортканоничвид}(g,x,y))$

Спецификация - "тип(семнадцать)", "направл(второйтерм)", "оператор(нормквадрформа)". Соответствующий прием предпринимает предварительную стандартизацию выражения f перед приведением его к виду канонической квадратичной формы при помощи нормализатора "нормквадрформа". Сюда относятся раскрывание скобок и различные перегруппировки.

(i) Стандартизация условия задачи на описание с помощью синтезаторов (характеристика "стандподбор").

Характеристика "стандподбор(N)" указывает на эквивалентность для стандартизации условия задачи на описание с помощью синтезатора. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(исследовать)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{AGpqry}$(квадрканоничвид$(x, p(x), y, q, r)$ & $G =$ числфунк$(y, q) \rightarrow$ положитопред$(\lambda_x(p(x), A(x))) \leftrightarrow$ положитопред(G))

Спецификация - "тип(исследовать)", "направл(второйтерм)". Первый антецедент обрабатывается синтезатором, определяющим результат q преобразования к каноническому виду квадратичной формы $p(x)$ относительно переменных x. Выдаются также список y переменных, относительно которых берется канонический вид, и список r равенств, выражающих переменные x через y.

(j) Стандартизация параметрического описания в условии задачи на описание (характеристика "опркласс").

Характеристика "опркласс(x N)" указывает на эквивалентность для стандартизации параметрического описания в условиях задачи на описание. x - неизвестная, N - направление замены.

Создается спецификация "тип(учетпассива)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(\exists_n(c = -an\pi/b$ & $n -$ целое$) \leftrightarrow \exists_n(c = an\pi/b$ & $n -$ целое$))$

Спецификация - "тип(учетпассива)", "неизвестная(c)", "направл(второйтерм)".

(k) Стандартизация подутверждения импликативного условия задачи на описание, ориентированная на его свертку в бескванторное условие (характеристика "усиление").

Характеристика "усиление(N)" указывает на эквивалентность, позволяющую усилить элементарное утверждение. N - направление замены.

Выбирается параметр консеквента x, имеющий единственное вхождение в каждую из частей эквивалентности, причем такой, что глубина его вхождения в каждую из этих частей равна 1. Создается спецификация "тип(усмвозрастаетвточке)", "направл(N)", "переменная(x)". Пример:

$\forall_{abn}(n -$ целое & $b = [a] \rightarrow a < n \leftrightarrow b + 1 \leq n)$

Спецификация - "тип(усмвозрастаетвточке)", "направл(второйтерм)", "переменная(n)". Соответствующий прием проверяет, что заменяемое утверждение - антецедент либо консеквент кванторной импликации по переменной n. Прием переходит от строгого неравенства к нестрогому из-за того, что только для таких неравенств в решателе созданы приемы, исключающие кванторы по целочисленной переменной.

11. Специальная стандартизация утверждения под описателем "класс" (характеристика "стандобъединение").

    Характеристика "стандобъединение(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации под описателем "класс". N - направление замены.

    Создается спецификация "тип(ответзадачи)", "направл(N)". Пример:

    $\forall_{ab}(0 < a + |b| \leftrightarrow 0 < a + b \ \vee \ 0 < a - b)$

    Спецификация - "тип(ответзадачи)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что заменяемое вхождение расположено под описателем "класс" по переменной, входящей в выражение b.

12. Специальная стандартизация утверждения под описателем "отображение" (характеристика "стандсумма").

    Характеристика "стандсумма(N)" указывает на эквивалентность для специальной стандартизации под описателем "отображение". N - направление замены.

    Создается спецификация "тип(нормфакториал)", "направ(N)". Пример:

    $\forall_{abc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \in (b, c) \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ b < a \ \& \ a < c)$

    Спецификация - "тип(нормфакториал)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием, усматривая заменяемый терм под условным выражением внутри определенного интеграла, преобразует его так, чтобы сработал приема, подразбивающий область интегрирования.

Исключение сложных понятий

1. Уменьшение числа сложных понятий (характеристика "соединяет").

   Характеристика "соединяет(N)" указывает на эквивалентность, имеющую единственное вхождение самой сложной операции в заменяющем утверждении и несколько самых сложных операций в заменяемом, причем последние по своим переменным декомпозируют первую. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(целые)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fAB}(\neg(\text{прообраз}(f, A) = \emptyset) \ \& \ \neg(\text{прообраз}(f, B) = \emptyset) \ \& \ f - \text{слово} \rightarrow$
   $\inf(\text{прообраз}(f, A)) < \inf(\text{прообраз}(f, B)) \leftrightarrow f(\inf(\text{прообраз}(f, A \cup B))) \in A \setminus B)$

   Спецификация - "тип(целые)", "направл(второйтерм)". Обращаем внимание, что в данном приеме f - конечный набор.

2. Преобразование утверждения со сложными операциями, подготавливающее возможность исключения этих операций (характеристика "Преобр").

   Характеристика "Преобр(N)" указывает на эквивалентность, подготавливающую возможность тождественного преобразования для исключение сложной операции. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(формредактор)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}$(Вектор(a) & Вектор(b) & Вектор(c) $\rightarrow$ компланарны(a, b, c) $\leftrightarrow$ скалумнож(a, вектумнож(b, c)) $= 0$)

Спецификация - "тип(формредактор)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что одно из выражений b, c имеет заголовок "вектумнож".

3. Преобразование утверждения со сложными отношениями, упрощающее проверку истинности этих отношений (характеристика "провменьше").

   Характеристика "провменьше(N)" указывает на эквивалентность, упрощающую проверку истинности сложного отношения. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(условие)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{afg}(g = \lambda_i(f(i), i -$ число$) \rightarrow$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} f(i), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} g(i), n -$ натуральное$)))$

   Спецификация - "тип(условие)", "направл(второйтерм)". Правая часть антецедента обрабатывается нормализатором "асимптоценка".

4. Рекурсивная расшифровка утверждения со сложным понятием. (характеристика "редукция").

   Характеристика "редукция(N)" указывает на эквивалентность для рекурсивной расшифровки утверждения со сложным понятием. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(сохр1)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{afnxAB}(x = \{; \lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}$ & $B = \lambda_i(f(a(1), a(i)), i \in \{1, \ldots, n\})$ & $C = \lambda_i(f(a(i), a(1)), i \in \{1, \ldots, n\}) \rightarrow f[x, x] \subseteq A \leftrightarrow \{; B\} \subseteq A$ & $\{; C\} \supseteq A$ & $f[\{; \lambda_i(a(i), i \in \{2, \ldots, n\})\}, \{; \lambda_i(a(i), i \in \{2, \ldots, n\})\}] \subseteq A)$

   Спецификация - "тип(сохр1)", "направл(второйтерм)". Прием выполняет один шаг рекурсивной расшифровки условия включения результата применения двуместной операции к конечному списку.

5. Исключение сложного отношения (характеристика - "исключприем").

   Характеристика "исключприем(N)" указывает на эквивалентность для исключения сложного отношения. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(внешоператор)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{af}(\lim_{i \rightarrow \infty} f(i) = \infty$ & $\forall_b(b -$ число & $0 < b \rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} f(i)/i^b = 0) \rightarrow$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}(i^a f(i)), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow a < -1)$

   Спецификация - "тип(внешоператор)", "направл(второйтерм)".

6. Частичное исключение сложного отношения в условии задачи на описание (характеристика "частичныйответ").

   Характеристика "частичныйответ(N)" указывает на эквивалентность для частичного исключения сложного отношения. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(просмотрзадачи)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{fab}(\lim_{n\to\infty}|f(n+1)/f(n)| = a \to \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m-\text{натуральное})) \leftrightarrow$
   $a-1<0 \;\vee\; a-1=0 \;\&\; \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m-\text{натуральное})))$

   Спецификация - "тип(просмотрзадачи)", "направл(второйтерм)". Прием выделяет использует признак Даламбера и выделяет особый остаточный случай равенства a единице.

Явное разрешение безотносительно к неизвестным

1. Разрешение относительно неконстантного выражения.

   (a) Разрешение относительно неконстантного выражения (характеристика "глуб").

   Характеристика "глуб(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x, глубина которых (с отбрасыванием внешнего отрицания) более 1, а заменяющая часть построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x, и притом глубины 1. N - указатель направления замены.

   Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм" и создается спецификация "тип(точкаотрезка)", "терм(x)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(-a \le b \leftrightarrow -b \le a)$

   Спецификация - "тип(точкаотрезка)", "терм(b)", "направл(первыйтерм)". Соответствующий прием разрешает неравенство относительно неконстантного выражения b, при условии, что выражение a - константное.

   (b) Разрешение сопровождающего утверждения ответа задачи на описание относительно неконстантного выражения (характеристика "глуб").

   Пусть характеристика - "глуб(x, N)". Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм" и создается спецификация "тип(удалениепримечания)", "переменные(x)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abc}(0 < b \to ab \le c \leftrightarrow a \le c/b)$

   Спецификация - "тип(удалениепримечания)", "переменные(a)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется при редактировании ответа задачи на описание. Преобразуемое условие не содержит неизвестных. Выражения b, c константные, причем b идентифицируется с произведением всех известных множителей. Выражение a неконстантное.

2. Разрешение элементарного утверждения относительно переменной, связываемой внешним квантором (характеристика "глуб").

   Пусть характеристика - "глуб(x, N)". Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм" и создается спецификация "тип(усмнеделит)", "неизвестная(x)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abx}(\neg(a = 0) \to ax + b = 0 \leftrightarrow x = -b/a)$

   Спецификация - "тип(усмнеделит)", "неизвестная(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что преобразуемое утверждение - антецедент квантора общности либо конъюнктивный член утверждения под квантором существования. В обоих случаях переменная x входит в кванторную приставку.

3. Явное разрешение кванторной посылки относительно функциональной переменной (характеристика "функразр").

   Характеристика "функразр(N)" указывает на эквивалентность, явно разрешающую кванторную импликацию относительно функциональной переменной. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(нормнижняягрань)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{afk}(k - \text{целое} \to \forall_n(n - \text{натуральное} \ \& \ k \leq n \to f(n) = af(n-1)) \leftrightarrow$
   $\forall_n(n - \text{натуральное} \ \& \ k - 1 \leq n \to f(n) = f(k-1)a^{n-k+1}))$

   Спецификация - "тип(нормнижняягрань)", "направл(второйтерм)".

4. Разрешение группы известных условий задачи на описание относительно параметра (характеристика "Неизвестные").

   Характеристика "Неизвестные(X, N)" указывает на эквивалентность, полученную для разрешения группы утверждений относительно неизвестных списка X. N - направление замены.

   Если X состоит из единственной переменной x, то создается спецификация "тип(Суффикс)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{akmn}(k - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ a = k - m + 1 \ \& \ 0 < a \to m \leq n \ \&$
   $n \leq k \ \& \ n - \text{натуральное} \leftrightarrow \exists_b(b \in \{0, \ldots, a-1\} \ \& \ n = m + b))$

   Спецификация - "тип(Суффикс)", "переменная(n)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием усматривает два неравенства для натуральной переменной n, не являющейся неизвестной, причем диапазон изменения ее значений имеет конечное число точек a, меньшее 15. Тогда эти неравенства заменяются на дизъюнкцию равенств для n.

5. Явное выражение параметра известного условия задачи на описание через другие параметры (характеристика "глуб").

   Пусть характеристика - "глуб(x, N)". Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм" и создается спецификация "тип(известно)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \rightarrow ab + c = 0 \leftrightarrow b = -c/a)$

Спецификация - "тип(известно)", "переменная(b)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется к не содержащему неизвестных условию задачи на описание, причем b - переменная, не входящая в a, c.

6. Разрешение посылки относительно параметра.

   (a) Явное выражение параметра посылки через другие параметры (характеристика "глуб").

   Аналогично предыдущему, но тип приема - "бланк". Пример:

   $\forall_{abcx}(\neg(a = 0) \rightarrow ax + b = c \leftrightarrow x = (1/a)(c - b))$

   Здесь a - число; b, c, x - векторы. Спецификация - "тип(бланк)", "переменная(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется к содержащей неизвестных посылке. Переменная x не встречается в выражениях a, b, c; выражение c не является переменной.

   (b) Явное выражение численного параметра посылки задачи на исследование через другие численные параметры при контроле разбора случаев (характеристика "глуб").

   Пусть характеристика - "глуб(x, N)". Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм", "сложнреш". Проверяется, что консеквент имеет только численные параметры. Тогда создается спецификация "тип(списокпосылок)", "переменная(x)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcx}(\neg(a = 0) \rightarrow ax + b = c \leftrightarrow x = (c - b)/a)$

   Спецификация - "тип(списокпосылок)", "переменная(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "контроль", к равенствам без неизвестных. Переменная x идентифицируется с переменной, не входящей в b, c. Выражения b, c не содержат невырожденных числовых атомов.

Числовые атомы

1. Выражение невырожденного числового атома через численные параметры в посылке задачи.

   (a) Выражение невырожденного числового атома через численные параметры в посылке задачи (характеристика "числ").

   Характеристика "числ(N)" указывает на эквивалентность, разрешающую уравнение относительно невырожденного числового атома. N - направление замены.

   Среди конъюнктивных членов заменяющей части находится равенство, у которого одна из частей - невырожденный числовой атом A. Создается спецификация "тип(развязка)", "направл(N)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{abc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow \mathrm{card}(a) + b = c \leftrightarrow \mathrm{card}(a) = c - b)$

Спецификация - "тип(развязка)", "направл(второйтерм)", "терм(мощность(a))". Соответствующий прием проверяет, что выражения b, c не содержат невырожденных числовых атомов.

(b) Выражение невырожденного числового атома через численные параметры в задаче на исследование.

i. Выражение невырожденного числового атома через численные параметры в задаче на исследование (характеристика "числ").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "запись". Пример:

$\forall_{abAB}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) = b \leftrightarrow l(AB) = b/a)$

Спецификация - "тип(запись)", "направл(второйтерм)", "терм($l(AB)$))".

ii. Выражение через численные параметры числового атома, встречающегося невырожденным образом еще в одном уравнении (характеристика "числ").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "выборпозиции". Пример:

$\forall_{abcAB}(\neg(c - b = 0) \rightarrow al(AB) + b = c \leftrightarrow l(AB) = (c - b)/a \ \& \ \neg(a = 0))$

Спецификация - "тип(выборпозиции)", "направл(второйтерм)", "терм($l(AB)$))". Соответствующий прием проверяет, что выражение $l(AB)$ встречается еще хотя бы в одном уравнении задачи, причем его вхождение не является одной из частей данного уравнения. Проверяется также, что a, b, c не имеют невырожденных числовых атомов.

iii. Выражение через численные параметры, в том числе через заданные известные параметры, числового атома, встречающегося невырожденным образом еще в одном уравнении (характеристика "числ").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "импликант". Кроме того, если заменяемый терм представляет собой равенство, то рассматривается та его часть, которая содержит числовой атом, относительно которого выполняется разрешение, и для всех численных переменных x этой части к спецификации добавляется терм "известно(x)". Пример:

$\forall_{abcAB}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB)/b = c \leftrightarrow l(AB) = bc/a)$

Спецификация - "тип(импликант)", "направл(второйтерм)", "терм(l(AB)))", "известно(a)", "известно(b)". Соответствующий прием проверяет, что выражение c не содержит невырожденных числовых атомов. Выражение $l(AB)$ встречается еще хотя бы в одном уравнении задачи, причем его вхождение не является одной из частей данного уравнения.

iv. Выражение числового атома через численные параметры, ориентированное на последующее получение численного уравнения (характеристика "числзначение").

Характеристика "числзначение(N)" указывает на эквивалентность, разрешающую уравнение относительно невырожденного числового атома для последующего вывода численного уравнения. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(блокзадачи)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcdkmpqsnABCD}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(m=0)\ \&\ pl(AB)+ql(CD)=r\ \&\ (ml(CD)^2+n)/k=s\rightarrow(al(AB)^2+b)/c=d\leftrightarrow l(AB)=\sqrt{(cd-b)/a})$$

Спецификация - "тип(блокзадачи)", "направл(второйтерм)". Выражения $a, b, c, d, k, m, n, s, p, q, r$ не содержат невырожденных числовых атомов.

v. Выражение через численные параметры невырожденного числового атома, являющегося единственным невырожденным числовым атомом еще одного уравнения (характеристика "числ").

Характеристика "числ(N)" указывает на эквивалентность, разрешающую уравнение относительно невырожденного числового атома. N - направление замены.

Среди конъюнктивных членов заменяющей части находится равенство, у которого одна из частей - невырожденный числовой атом A. Создается спецификация "тип(Интеграл)", "направл(N)", "терм(A)". Пример:

$$\forall_{abcABC}(\neg(a=0)\rightarrow a\angle(ABC)+b=c\leftrightarrow\angle(ABC)=(c-b)/a)$$

Спецификация - "тип(Интеграл)", "терм($\angle(ABC)$)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет наличие в задаче на исследование еще одного уравнения с единственным невырожденным числовым атомом $\angle(ABC)$. Кроме того, проверяется, что выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов.

vi. Выражение через численные параметры невырожденного числового атома, входящего в другое уравнение, отличное от равенства двух числовых атомов (характеристика "числ").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "оценкапозиции". Пример тот же. Соответствующий прием проверяет, что содержащее атом $\angle(ABC)$ другое уравнение не имеет вида равенства этого атома какому-либо (вырожденному либо невырожденному) числовому атому.

(c) Выражение невырожденного числового атома общего вида через численные параметры в задаче на исследование (характеристика "глуб").

Пусть характеристика - "глуб(x, N)". Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм", "сложнреш". Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство с переменной x в левой части. Тогда создается спецификация "тип(левсосед)", "терм(x)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcx}(\neg(b=0)\rightarrow a+bx=c\leftrightarrow x=(c-a)/b)$$

Спецификация - "тип(левсосед)", "терм(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что x - невырожденный числовой атом, причем выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов. Прием заблокирован для геометрических атомов, так как для них созданы свои аналогичные приемы, имеющие различные уровни срабатывания в зависимости от контекста.

(d) Выражение числового атома через численные параметры в посылке задачи на доказательство (характеристика "числ").

Характеристика "числ(N)" указывает на эквивалентность, разрешающую уравнение относительно невырожденного числового атома. N - направление замены.

Среди конъюнктивных членов заменяющей части находится равенство, у которого одна из частей - невырожденный числовой атом A. Создается спецификация "тип(вхождениетерма)", "направл(N)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCab}(\angle(ABC) + a = b \leftrightarrow \angle(ABC) = b - a)$

Спецификация - "тип(вхождениетерма)", "направл(второйтерм)", "терм($\angle(ABC)$)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов.

(e) Шаг разрешения невырожденных числовых атомов относительно численных параметров в задаче на исследование (характеристика "глуб").

Пусть характеристика - "глуб(x, N)". Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "и", "или", "общнорм", "сложнреш". Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство с переменной x в левой части. Тогда создается спецификация "тип(текущийуровень)", "терм(x)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{bcx}(\neg(c = 0) \to bx = c \leftrightarrow x = c/b \ \& \ \neg(b = 0))$

Спецификация - "тип(текущийуровень)", "терм(x)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется к посылке задачи на исследование, имеющей цель "известно". Выражение x содержит невырожденный числовой атом, а выражения b, c - не содержат.

(f) Предварительный шаг выражения числового атома через численные параметры, если этот атом является единственным невырожденным числовым атомом еще одного уравнения (характеристика "числотр").

Характеристика "числотр(N)" указывает на эквивалентность, частично разрешающая уравнение относительно невырожденного числового атома. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(содержание)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdpqAB}(\neg(a = 0) \to a(pl(AB)+q)^2/c+d = b \leftrightarrow |pl(AB)+q| = \sqrt{(b-d)c/a} \ \&$
$0 \leq a(b-d)c)$

Соответствующий прием применяется к посылке задачи на исследование. Проверяется, что выражения a, b, c, d, p, q не содержат невырожденных числовых атомов. Проверяется, что имеется еще одно уравнение с числовым атомом $l(AB)$, остальные числовые атомы которого - вырожденные. Проверяется также, что от модуля в левой части удалось избавиться.

2. Выражение одного невырожденного числового атома через другие.

(a) Выражение одного невырожденного числового атома через другой.

i. Выражение одного невырожденного числового атома через другой в посылках задачи на доказательство либо на исследование (характеристика "выражение").

   Характеристика "выражение(N)" указывает на эквивалентность, позволяющую выразить один невырожденный числовой атом через другие. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(блокнормализации)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcABKi}(\neg(a=0) \to a \cdot \text{крд}(A,K,i) + b \cdot \text{крд}(B,K,i) = c \leftrightarrow$ $\text{крд}(A,K,i) = (c - b \cdot \text{крд}(B,K,i))/a)$

   Каждая неизвестная выражений a, b, c является неизвестной внешней залачи на описание.

ii. Выражение одного невырожденного числового атома через другой в посылках задачи на доказательство либо на исследование с помощью известных параметров (характеристика "выражение").

   Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(комментарийпосылки)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcABKi}(\neg(a = 0) \to a \cdot \text{крд}(A,K,i) + b = c \cdot \text{крд}(B,K,i) + d \leftrightarrow$ $\text{крд}(A,K,i) = (c \cdot \text{крд}(B,K,i) + d - b)/a)$

   Выражения a, b, c, d не содержат неизвестных.

iii. Выражение одного числового атома через другой в посылках задачи на доказательство (характеристика "выражение").

   Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(откат)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abABCD}(\neg(a=0) \to al(AB) = bl(CD) \leftrightarrow l(AB) = bl(CD)/a)$

   Соответствующий прием проверяет, что выражение a не содержит неизвестных, а выражение b - либо известно, либо имеет тип "внешнеизв". При прочих равных условиях деление выполняется на тот из коэффициентов a, b, который константный.

iv. Выражение одного числового атома через другой в задаче на исследование, чтобы уменьшить количество невырожденных числовых атомов в уравнении с численной неизвестной (характеристика "выражение").

   Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(видпеременной)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Отличие состоит в том, что текущая задача - не на доказательство, а на исследование. Проверяется также наличие уравнения, содержащего как оба атома $l(AB)$, $l(CD)$, так и некоторую неизвестную внешней задачи на описание.

v. Выражение одного числового атома через другой, чтобы получить уравнение с единственным невырожденным числовым атомом (характеристика "выражение").

Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(усм)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{cABCD}(l(AB) + l(CD) = c \leftrightarrow l(AB) = c - l(CD))$

Соответствующий прием применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Выражение c не содердит неизвестных. Среди посылок имеется еще одно уравнение, в котором встречается атомы $l(AB)$, $l(CD)$ и не встречаются другие невырожденные числовые атомы.

vi. Выражение одного числового атома через другой, чтобы обеспечить сокращение другого уравнения на общий множитель обеих его частей (характеристика "выражение").

Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(лежатнапрямой)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abABCD}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) = bl(CD) \leftrightarrow l(AB) = bl(CD)/a)$

Соответствующий прием применяется к посылке задачи на доказательство либо на исследование. Оба выражения a, b не содержат неизвестных, причем предпочтение при выборе знаменателя отдается тому из них, которое константное. Среди посылок имеется еще одно уравнение, в котором одно из выражений $l(AB)$, $l(CD)$ является множителем одной из частей равенства, а другое - множителем другой, причем после сокращения остается уравнение с неизвестными.

vii. Выражение числового атома через пропорциональный ему атом, если последний уже использован для аналогичного представления какого-либо числового атома (характеристика "выражение").

Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(расстояния)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Оба выражения a, b не содержат неизвестных, причем предпочтение при выборе знаменателя отдается тому из них, которое константное. Проверяется наличие посылки, выражающей некоторое расстояние в виде $pl(CD)/q$.

viii. Выражение не встречающегося в других уравнениях числового атома через пропорциональный ему атом (характеристика "выражение").

Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(точкилуча)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Оба выражения a, b не содержат неизвестных, причем предпочтение при выборе знаменателя отдается тому из них, которое константное. Проверяется отсутствие другой посылки с заголовком "равно", содержащей выражение $l(AB)$.

ix. Выражение одного числового атома через другой, чтобы получить систему из двух уравнений с двумя неизвестными атомами, один из которых - переменная (характеристика "выражение").

Пусть характеристика - "выражение(N)". Создается спецификация "тип(Вещество)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{cABCD}(l(AB) + l(CD) = c \leftrightarrow l(AB) = c - l(CD))$

Соответствующий прием проверяет, что c не содержит неизвестных, причем в посылках задачи имеются два уравнения, одно из которых содержит $l(AB)$, другое - $l(CD)$, а кроме того, оба они содержат еще единственную общую численную неизвестную.

x. Выражение одного числового атома через некоторый другой, если существует дополнительное уравнение для обоих атомов, в котором первый атом встречается однократно (характеристика "числ").

Характеристика "числ(N)" указывает на эквивалентность, разрешающую уравнение относительно невырожденного числового атома. N - направление замены.

Среди конъюнктивных членов заменяющей части находится равенство, у которого одна из частей - невырожденный числовой атом A. Создается спецификация "тип(внешдлялюбого)", "направл(N)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{abcAB}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) + b = c \leftrightarrow l(AB) = (c - b)/a)$

Соответствующий прием проверяет, что текущее уравнение имеет еще ровно один невырожденный числовой атом P, причем имеется другое уравнение, содержащее в точности такие же два невырожденных числовых атома, и атом $l(AB)$ встречается в нем однократно. Проверяется также, что выражения a, b, c не содержат терма $l(AB)$.

(b) Выражение одного невырожденного числового атома через другие.

i. Выражение числового атома через другие числовые атомв, если существует еще одно уравнение, содержащее первый атом и хотя бы один из последних (характеристика "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(альтзначения)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcAB}(\neg(a = 0) \rightarrow al(AB) + b = c \leftrightarrow l(AB) = (c - b)/a)$

Соответствующий прием проверяет, что задача имеет еще одно уравнение в посылках, содержащее как $l(AB)$, так и некоторый другой невырожденный числовой атом текущего уравнения. Кроме того, проверяется, что выражения a, b, c не содержат подвыражения $l(AB)$, а c не является невырожденным числовым атомом.

ii. Выражение числового атома через другие числовые атомы, если существует еще одно уравнение, содержащее все эти атомы (характеристика "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(заменанабора)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Прием проверяет наличие еще одного уравнения в посылках, содержащего все невырожденные числовые атомы текущего уравнения. Проверяется также, что текущее уравнение содержит невырожденный числовой атом, отличный от $l(AB)$; выражение c не является невырожденным числовым атомом; выражения a, b, c не содержат терма $l(AB)$.

iii. Разрешение уравнения относительно числового атома, встречающегося в другом уравнении, не являющемся равенством двух числовых атомов (характеристика "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(асимптоценка)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCab}(\angle(ABC) + a = b \leftrightarrow \angle(ABC) = b - a)$

Соответствующий прием проверяет наличие в посылках другого уравнения с подвыражением $\angle(ABC)$, причем это уравнение не является равенством двух числовых атомов. Кроме того, проверяется, что b не содержит невырожденных числовых атомов.

iv. Разрешение относительно числового атома исходного уравнения (характеристика "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(нормформ)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Прием проверяет, что текущее уравнение - не выведенное, а имевшееся в исходной формулировке задачи. Проверяется также, что выражение a не содержит подтерма $\angle(ABC)$, а выражение b - не содержит невырожденных числовых атомов.

v. Разрешение уравнения относительно числового атома, встречающегося в другом уравнении, не являющемся равенством двух числовых атомов, если те атомы, через которые он выражается, сами встречаются в таких уравнениях (характеристика "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(попытказамены)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Прием проверяет, что атом $\angle(ABC)$ встречается в другом уравнении, не являющемся равенством двух невырожденных числовых атомов. Кроме того, проверяется, что все невырожденные числовые атомы выражений a, b встречаются в других уравнениях, не являющихся равенствами двух числовых атомов. Наконец, проверяется, что b не является невырожденным числовым атомом.

vi. Выражение числового атома, встречающегося в другом уравнении задачи на исследование, не являющемся равенством двух числовых атомов, через более простые атомы (характеристика "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(разделысимволов)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcd}(\neg(a = 0) \to aS(d) + b = c \leftrightarrow S(d) = (c - b)/a)$

Прием применяется к посылке задачи на исследование. Проверяется, что оценки сложности невырожденных числовых атомов, встречающихся в выражениях a, b, c, меньше, чем оценка сложности символа "площадь". Проверяется также, что выражение $S(d)$ встречается в другом уравнении задачи, не являющемся равенством двух числовых атомов.

vii. Выражение числового атома, встречающегося в другом равенстве из посылок задачи на доказательство, не являющемся равенством двух числовых атомов, через более простые атомы (характеристика "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(учетодз)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Отличие состоит лишь в том, что прием применяется к посылке задачи на доказательство.

viii. Выражение невырожденного числового атома через атомы других типов в задаче на исследование (характеристика - "числ").

Пусть характеристика - "числ(N)". Создается спецификация "тип(базавхождения)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abciK}(\neg(a=0) \to a \cdot \text{крд}(c,K,i)+b=d \leftrightarrow \text{крд}(c,K,i)=(d-b)/a)$

Соответствующий прием применяется в задачах на исследование. Выражение b не содержит символа "крд". Выражение a не имеет невырожденных числовых атомов, выражение d не содержит неизвестных.

ix. Выражение одного невырожденного числового атома через однотипный числовой атом и через атомы других типов в задаче на исследование (характеристика "выражение").

Характеристика "выражение(N)" указывает на эквивалентность, позволяющую выразить один невырожденный числовой атом через другие. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(разныепрямые)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABKicd}((\neg(d=0) \ \vee \ \neg(c=0)) \to (\text{крд}(A,K,i)-\text{крд}(B,K,i))c=d \leftrightarrow$ $\text{крд}(A,K,i)=\text{крд}(B,K,i)+d/c)$

Прием проверяет наличие еще одной посылки, содержащей оба числовых атома крд(A,K,i) и крд(B,K,i). Выражение d не содержит символа "крд": выражение c не имеет невырожденных числовых атомов.

x. Разрешение уравнения относительно подвыражения с числовым атомом, ориентированное на уменьшение количества числовых атомов в другом уравнении с численными неизвестными (характеристика "числотр").

Характеристика "числотр(N)" указывает на эквивалентность, частично разрешающая уравнение относительно невырожденного числового атома. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(копияветви)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcAB}(\neg(a=0) \to a(l(AB)^2)+b=c \leftrightarrow l(AB)^2=(c-b)/a)$

Прием проверяет существование еще одного уравнения в текущей задаче на исследование, содержащего как $l(AB)$, так и некоторую численную неизвестную внешней задачи на описание. Проверяется, что каждый невырожденный числовой атом текущего уравнения встречается и в указанном другом уравнении. Проверяется также, что a не содержит неизвестных, c не является квадратом расстояния либо невырожденным числовым атомом, и ни одно из выражений b, c не содержит $l(AB)$.

3. Стандартизация равенства с числовыми атомами в посылке задачи на исследование либо на доказательство.

   (a) Переход в равенстве с невырожденными числовыми атомами к более простым числовым атомам (характеристика "упрощдн").

   Характеристика "упрощдн(N)" указывает на эквивалентность двух равенств с невырожденными числовыми атомами, уменьшающую наибольшую из сложностей этих атомов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(комментпосылок)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABCbcdp}(\angle(ABC) = p \;\&\; \text{прямая}(BC) \perp \text{прямая}(AC) \;\&\; \text{актив}(\angle(ABC)) \;\&\; \text{коллинеарны}(b, \text{вектор}(AB)) \;\&\; cd \leq 0 \to \text{скалумнож}(\text{вектор}(CA), b) = c \leftrightarrow dl(AC)\text{длина}(b) \sin p = -c)$

   Спецификация - "тип(комментпосылок)", "направл(второйтерм)".

   (b) Упрощение посылки задачи на исследование либо на доказательство относительно невырожденных числовых атомов (характеристика - "упрощУмножение").

   Характеристика "упрощУмножение(N)" указывает на эквивалентность для упрощения равенства относительно невырожденных числовых атомов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(исключениеоперанда)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcABC}(\neg(b = 0) \to a\angle(ABC)/b = c \leftrightarrow a\angle(ABC) = bc)$

   Спецификация - "тип(исключениеоперанда)", "направл(N)". Соответствующий прием проверяет, что выражение b не содержит неизвестных, а c не является невырожденным числовым атомом.

   (c) Преобразование посылки для последующего разрешения относительно невырожденных числовых атомов (характеристика "стандчастнреш").

   Характеристика "стандчастнреш(N)" указывает на эквивалентность для подготовки разрешения равенства относительно невырожденных числовых атомов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(4)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABabcde}((al(AB) + b)(cl(AB) + d) = e \leftrightarrow acl(AB)^2 + (bc + ad)l(AB) + bd = e)$

   Спецификация - "тип(4)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием преобразует посылку к виду квадратного уравнения относительно $l(AB)$. Предварительно проверяется, что выражения a, b, c, d не содержат неизвестных, а выражение e отлично от 0 и не имеет невырожденных числовых атомов.

   (d) Переход к соотношению пропорциональности для числовых атомов (характеристика "пропорцуравн").

   Характеристика "пропорцуравн(N)" указывает на эквивалентность для перехода к соотношению пропорциональности двух числовых атомов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(результподст)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abABCD}(al(AB) - bl(CD) = 0 \leftrightarrow al(AB) = bl(CD))$

   Спецификация - "тип(результподст)", "направл(второйтерм)".

4. Разрешение системы уравнений относительно числовых атомов.

   (a) Определение числовых атомов из системы уравнений в посылках задачи на исследование (характеристика "числтабл").

   Характеристика "числтабл(N)" указывает на эквивалентность для разрешения системы уравнений относительно невырожденных числовых атомов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(списокусловий)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{apqABCD}(0 < p + q \to l(AB) + l(CD) = a \ \& \ pl(AB) = ql(CD) \leftrightarrow$
   $l(AB) = aq/(p + q) \ \& \ l(CD) = ap/(p + q))$

   Соответствующий прием проверяет, что выражения a, p, q не содержат неизвестных.

   (b) Выражение числовых атомов через другие числовые атомы путем решения системы уравнений (характеристика "числтабл").

   Пусть характеристика - "числтабл(N)". Создается спецификация "тип(склейканеравенств)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Отличие состоит лишь в том, что выражение a может содержать неизвестные, но не содержит атомов $l(AB)$, $l(CD)$.

5. Комбинация уравнений с числовыми атомами.

   (a) Комбинация уравнений с невырожденными числовыми атомами для получения уравнения с численными параметрами (характеристика "уравнменьше").

   Характеристика "уравнменьше(N)" указывает на эквивалентность для исключения невырожденных числовых атомов в уравнении путем комбинации с другим уравнением. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(пересечениесписков)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abcpqrABCDEF}(al(AB) + bl(CD) = cl(EF) \ \& \ aq - bp = 0 \ \& \ \neg(l(EF) = 0) \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ \neg(p = 0) \to pl(AB) + ql(CD) = rl(EF) \leftrightarrow pc - ar = 0)$

Спецификация - "тип(пересечениесписков)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, c, p, r не содержат невырожденных числовых атомов.

(b) Уравнение с невырожденными числовыми атомами преобразуется с помощью нескольких дополнительных уравнений в группу уравнений, каждое из которых более простое, чем некоторое из исходных уравнений (характеристика "уравнумножение").

Характеристика "уравнумножение" указывает на эквивалентность, преобразующую уравнение с невырожденными числовыми атомами при помощи группы других уравнений в группу уравнений, каждое из которых проще, чем некоторое исходное. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(равныетермы)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCDEFabcdpqmn}$(разныеточки(A, B) & разныеточки(C, D) & разныеточки(E, F) & $\neg(p = 0)$ & $cl(EF) = al(AB)^n$ & $cl(CD) = bl(AB)^m$ & $d = al(AB)^{n-1} + bl(AB)^{m-1} + c$ & $d = p \to l(AB) + l(CD) + l(EF) = q \leftrightarrow cq = pl(AB)$ & $al(AB)^{n-1}q = pl(EF)$ & $bl(AB)^{m-1}q = pl(CD)$)

Спецификация - "тип(равныетермы)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием идентифицирует пятый, шестой и последний антецеденты с посылками. После этого левая часть последнего антецедента сравнивается с правой частью предпоследнего антецедента, формируемой на основе уже идентифицированных к этому моменту переменных и обрабатываемой нормализаторами общей стандартизации. Проверяется, что выражения p, q - правая часть последнего антецедента и правая часть преобразуемого уравнения - не содержат неизвестных.

(c) Линейная комбинация двух соотношений пропорциональности числовых атомов для исключения этих атомов (характеристика "пропорцисключ").

Характеристика "пропорцисключ(N)" указывает на эквивалентность, использующую два соотношения пропорциональности для исключения невырожденных числовых атомов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(медиана)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCDabcd}(\neg(a = 0)$ & $\neg(l(AB) = 0)$ & $al(AB) = bl(CD) \to cl(AB) = dl(CD) \leftrightarrow ad = bc)$

Спецификация - "тип(медиана)", "направл(второйтерм)". Выражения a, b, c, d не содержат числовых атомов "$l(AB)$", "$l(CD)$", а выражения a, b не содержат каких-либо невырожденных числовых атомов.

(d) Комбинация уравнений для перехода от уравнения с несколькими невырожденными числовыми атомами к уравнению, имеющему не более одного числового атома (характеристика "уравнменьше").

Характеристика "уравнменьше(N)" указывает на эквивалентность для исключения невырожденных числовых атомов в уравнении путем комбинации с другим уравнением. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(спускоперандов)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{ABCDabcdp}(l(AB)^2 = l(CD)^2 = a \ \& \ l(AB) + l(CD) + b = c \ \& \\ p = (c-b)^2 - a - 2d \rightarrow l(AB)l(CD) = d \leftrightarrow p = 0)$$

Спецификация - "тип(спускоперандов)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, b, c, d не содержат атомов $l(AB)$, $l(CD)$. Проверяется также, что выражение p имеет не более одного невырожденного числового атома.

(e) Комбинация уравнений и сокращение для перехода от уравнения с несколькими невырожденными числовыми атомами к уравнению, имеющему единственный неизвестный числовой атом (характеристика "сокращтеор").

Характеристика "сокращтеор(N)" указывает на эквивалентность, использующую комбинацию уравнений и сокращение для исключения невырожденных числовых атомов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(прогинф)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcdABCD}(\neg(l(CD) = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a = bl(CD)^2 \ \& \ (bc - ad = 0) = \\ (p = 0) \rightarrow c = dl(CD)^2 \leftrightarrow p = 0)$$

Спецификация - "тип(прогинф)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием идентифицирует третий антецедент с другой посылокй. Выражения a, b, c, d не содержат терма $l(CD)$. Проверяется, что исходное уравнение имеет больше одного числового атома, содержащего неизвестные, а итоговое - единственный такой атом.

(f) Деление двух соотношений с числовыми атомами для получения соотношения пропорциональности (характеристика "пропорцрасст").

Характеристика "пропорцрасст(N)" указывает на эквивалентность, выводящую соотношение пропорциональности путем деления двух соотношений с невырожденными числовыми атомами. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(трасснабор)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcABCD}(\neg(a = 0) \ \& \ al(AB) = b \rightarrow al(CD) = c \leftrightarrow bl(CD) = cl(AB))$$

Спецификация - "тип(трасснабор)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения b, c не имеют невырожденных числовых атомов, а выражение a - имеет.

(g) Комбинация двух уравнений для исключения заданного числового атома (характеристика "уравнменьше").

Характеристика "уравнменьше(N)" указывает на эквивалентность для исключения невырожденных числовых атомов в уравнении путем комбинации с другим уравнением. N - направление замены.

Проверяется, что среди антецедентов имеется единственное равенство, причем консеквент и это равенство имеют единственный числовой атом. Затем создается спецификация "тип(схемаслучаев)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{ABabcd}(al(AB) + b = 0 \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow cl(AB) + d = 0 \leftrightarrow ad - bc = 0)$$

Спецификация - "тип(схемаслучаев)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, c не содержат невырожденных числовых атомов, выражения b, d не содержат атома $l(AB)$, причем каждый невырожденный числовой атом выражения b встречается в выражении d.

(h) Использование пропорциональности двух числовых атомов для исключения одного из них (характеристика "исключтеор").

Характеристика "исключтеор(N)" указывает на эквивалентность, использующую соотношение пропорциональности двух числовых атомов для исключения одного из них. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(обозначения)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcpqABCD}(pl(AB) = ql(CD)\ \&\ \neg(q = 0) \rightarrow al(AB) + c = bl(CD) \leftrightarrow (aq - bp)l(AB) + cq = 0)$$

Спецификация - "тип(обозначения)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, b, p, q не содержат невырожденных числовых атомов.

(i) Линейная комбинация двух уравнений с более чем одним невырожденным числовым атомом, дающая соотношение пропорциональности для двух невырожденных числовых атомов (характеристика "пропорцнаборы").

Характеристика "пропорцнаборы(N)" указывает на эквивалентность, комбинирующую два уравнения для получения соотношения пропорциональности для числовых атомов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(корневоевхождение)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcpqrdmABCDEFMN}(\neg(a = 0)\ \&\ al(AB) + bl(CD) + ml(RS) = cl(EF)\ \&\ aq - bp = 0\ \&\ ar - pm = 0 \rightarrow pl(AB) + ql(CD) + rl(RS) = dl(MN) \leftrightarrow pcl(EF) = adl(MN))$$

Спецификация - "тип(корневоевхождение)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, c, d, p не содержат невырожденных числовых атомов.

(j) Линейная комбинация уравнений для понижения степени числовых атомов (характеристика "степеньмн").

Характеристика "степеньмн(N)" указывает на эквивалентность, комбинирующую уравнения для понижения степени числового атома. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(Содержание)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{abcdeAB}(a + (b + l(AB))^2 = c \rightarrow a + (d - l(AB))^2 = e \leftrightarrow 2(b + d)l(AB) = c - e - b^2 + d^2)$$

Спецификация - "тип(Содержание)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения b, c, d, e не содержат невырожденных числовых атомов.

(k) Комбинация уравнений, позволяющая исключить часть вхождений числовых атомов (характеристика "исклант").

Характеристика "исклант(N)" указывает на эквивалентность для исключения части вхождений невырожденных числовых атомов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(альтоперанд)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABCDabcpqr}(\neg(a = 0)\ \&\ al(AB)l(CD)/b = c \rightarrow pl(AB)l(CD) + q = r \leftrightarrow pbc/a + q = r)$

Спецификация - "тип(альтоперанд)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения a, b, c не содержат невырожденных числовых атомов.

(l) Комбинация уравнений, дающая равенсво числовых атомов (характеристика "численныйатом").

Характеристика "численныйатом(N)" указывает на эквивалентность, комбинирующую уравнения для получения равенства двух числовых атомов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(перпендикулярны)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{acABCD}(al(AB) = c\ \&\ \neg(a = 0) \rightarrow al(CD) = c \leftrightarrow l(AB) = l(CD))$

Спецификация - "тип(перпендикулярны)", "направл(второйтерм)".

6. Переформулировка нечислового отношения в терминах отношения для числовых атомов.

(a) Переформулировка нечислового отношения в терминах отношения для числовых атомов (характеристика "числвыраз").

Характеристика "числвыраз(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую нечисловое отношение через отношение для числовых атомов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нижняястрока)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{Aafn}$(группа(A) & n – целое & $a \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) & порядокэлемента(a, A) – число $\rightarrow$ алгстепень(a, f, n) $=$ единица(f) $\leftrightarrow$ порядокэлемента(a, A)$|n$)

Спецификация - "тип(нижняястрока)", "направл(второйтерм)".

(b) Переход в условии задачи на доказательство от нечислового предиката к соотношению для числовых атомов (характеристика "числвыраз").

Создается спецификация "тип(поискслова)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}$(Вектор(a) & Вектор(b) $\rightarrow a \perp b \leftrightarrow$ скалумнож(a, b) $= 0$)

Спецификация - "тип(поискслова)", "направл(второйтерм)".

7. Использование синтезатора для выражения неизвестной через выделенные в задаче числовые атомы (характеристика "знач").

   Характеристика "знач(x N)" указывает на эквивалентность, использующую пакетный синтезатор для определения значений неизвестной x. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(циклоперанд)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abpx}(\text{отрезки}([b,a],p) \to x = a - b \leftrightarrow x = p)$

   Спецификация - "тип(циклоперанд)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется в посылке задачи на исследование, имеющей цель "известно". Проверяется наличие посылки вида $A = [b,c]$. Антецедент обрабатывается пакетным синтезатором "отрезки", выражающим длину $a-b$ промежутка $[b,a]$ через длины других упоминаемых в задаче промежутков. Необходимость в таком приеме возникла при рассмотрении задач с временными промежутками, где существенной является лишь длина промежутка, а не его концевые моменты. Прием позволяет уменьшить на единицу число рассматриваемых параметров и избежать трудностей с выделением подсистем уравнений, число которых равно числу встречающихся в них неизвестных.

8. Переход в определении функции от невырожденного числового атома к численному параметру (характеристика "числфунк").

   Характеристика "числфунк" указывает на кванторную импликацию, выполняющую в определении функции переход от невырожденного числового атома к численному параметру.

   Создается спецификация "тип(вид)", "направл(второйтерм)". Теорема изначально не является эквивалентностью, но для приема преобразуется в кванторную эквивалентность. В качестве примера рассмотрим теорему

   $\forall_{abfyz}(\text{Max}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), [0, b-a], y, z) \to \text{Max}(\lambda_x(f(\text{длина}([a,x])),$
   $x - \text{число}), [a,b], \text{set}_v(\exists_w(w \in y \;\&\; v = a + w)), z))$

   Она преобразуется в теорему приема:

   $\forall_{abcfyzAT}(T = [a,b] \;\&\; \text{Max}(\lambda_x(f(x), x - \text{число}), [0, b-a], u, t) = A(u,t) \to$
   $\text{Max}(\lambda_x(f(\text{длина}([a,x])), x - \text{число}), T, y, z) \leftrightarrow \exists_{ut}(A(u,t) \;\&\; z = t \;\&$
   $y = \text{set}_v(\exists_w(w \in u \;\&\; v = a + w))))$

   Этот прием применяется в содержащем неизвестные условии задачи на описание. Он исключает числовой атом "длина" и сводит задачу к определению максимума обычной числовой функции.

Нечисловые атомы

1. Выражение невырожденного нечислового атома через атомарные параметры (характеристика "атом").

Характеристика "атом(N)" указывает на эквивалентность для выражения нечислового атома через атомарные параметры. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(блоктрассировки)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcAB}(\neg(a=0)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(c) \to a\cdot\text{вектор}(AB)+b=c \leftrightarrow$ $\text{вектор}(AB)=(1/a)(c-b))$

Спецификация - "тип(блоктрассировки)", "направл(воройтерм)". Соответствующий прием проверяет, что выражения b, c не содержат векторных атомов, отличных от переменных.

2. Выражение невырожденного нечислового атома через другие атомы (характеристика "атом").

   Создается спецификация "тип(супремум)", "направл(N)". В качестве примера можно взять прием, теорема которого такая же, как в предыдущем пункте. Это прием проверяет, что выражения b, c не содержат подтерма "вектор(AB)", а выражение c не является векторным атомом, отличным от переменной.

3. Выражение нечислового атома через другие атомы (характеристика "глуб").

   Характеристика "глуб($x\ N$)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x, глубина которых (с отбрасыванием внешнего отрицания) более 1, а заменяющая часть построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x, и притом глубины 1. N - указатель направления замены.

   Проверяется, что заменяющая часть - равенство вида "$x = t$". В антецедентах находится утверждение $P(x)$, где P - название нечислового типа объектов. Проверяется наличие в антецедентах другого утверждения вида $P(y)$, где y - переменная, входящая в t. Затем создается спецификация "тип(неизвестная)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{abAB}(\neg(a=0)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{Вектор}(B)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to$ $aA=bB \leftrightarrow A=(b/a)B)$

Координаты

1. Переход от задания исследуемого объекта через координаты к равенству, определяющему координаты этого объекта (характеристика - "Точки").

   Характеристика "Точки(N)" указывает на эквивалентность, преобразующую равенство для множеств точек с заданными координатами в равенство для множества координат этих точек. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(соотвмножитель)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABK}(A=\text{точки}(B,K) \leftrightarrow \text{коорд}(A,K)=B)$

Спецификация - "тип(соотвмножитель)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "класс". Проверяется, что A - неизвестная, B - выражение с заголовком "класс".

2. Переформулировка утверждения через координаты.

   (a) Переформулировка подутверждения условия задачи через координаты (характеристика "числопред").

   Характеристика "числопред(N)" указывает на эквивалентность, выражающую утверждение через параметры координат. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(сравн)", "направл(N)", "антецедент($i_1 \dots i_n$)", где $i_1, \dots, i_n$ - номера всех антецедентов, представляющих собой равенства для координат. Пример:

   $\forall_{ABCKabcdxy}(\text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d)\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (x, y) \to C \in \text{прямая}(AB) \leftrightarrow (c - a)(y - b) = (d - b)(x - a))$

   Спецификация - "тип(сравн)", "направл(второйтерм)", "антецедент(1 2 3)".

   (b) Переформулировка подутверждения посылки задачи на исследование через координаты (характеристика "числитель").

   Характеристика "числитель(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую утверждение через отдельные координаты объектов. N - направление замены.

   Проверяется, что в заменяемой части эквивалентности не встречается обозначение каких-либо координат либо отдельной координаты. Затем создается спецификация "тип(базаприемов)", "направл(N)", "антецедент($i_1 \dots i_n$)", где $i_1, \dots, i_n$ - номера всех антецедентов, представляющих собой равенства для координат. Пример:

   $\forall_{pqrK}(\text{одномерный}(p, K)\ \&\ \text{одномерный}(q, K)\ \&\ \text{одномерный}(r, K) \to p + q = r \leftrightarrow \text{крд}(p, K, 1) + \text{крд}(q, K, 1) = \text{крд}(r, K, 1))$

   Спецификация - "тип(базаприемов)", "направл(второйтерм)".

3. Переформулировка условия задачи на описание с помощью ввода координат множества объектов (характеристика "числкоэффициент").

   Характеристика "числкоэффициент(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую утверждение, вводя координаты множества объектов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(касательная)", "направл(N)", "антецедент($i_1 \dots i_n$)", где $i_1, \dots, i_n$ - номера всех антецедентов, представляющих собой равенства для координат. Пример:

   $\forall_{AEKabcdefpq}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{линвторпорядка}(E)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \to A - \text{касательная к} E \leftrightarrow$

$\exists_{gh}(g - \text{число} \mathbin{\&} h - \text{число} \mathbin{\&} \text{коорд}(A, K) = \mathrm{set}_{uv}((2ag + ch + d)u + (2bh + cg + e)v + dg + eh + 2f = 0 \mathbin{\&} u - \text{число} \mathbin{\&} v - \text{число}) \mathbin{\&} ag^2 + bh^2 + vgh + dg + eh + f = 0))$

Спецификация - "тип(касательная)", "направл(второйтерм)", "антецедент(3)". Соответствующий прием применяется к условию задачи на описание, причем A содержит неизвестные.

4. Переформулировка утверждения в терминах, позволяющих далее использовать координаты объектов (характеристика "Переобознач").

   Характеристика "Переобознач(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую утверждение в терминах, позволяющих далее использовать координаты объектов. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(Длина)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABCDEK}(\text{прямкоорд}(K) \mathbin{\&} \text{ориентация}(K, (\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC), \text{вектор}(AD))) = a \to E \in \text{трехгранугол}(ABCD) \leftrightarrow a = \text{ориентация}(K, (\text{вектор}(AE), \text{вектор}(AC), \text{вектор}(AD))) \mathbin{\&} a = \text{ориентация}(K, (\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AE), \text{вектор}(AD))) \mathbin{\&} a = \text{ориентация}(K, (\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC), \text{вектор}(AE))))$

   Спецификация - "тип(Длина)", "направл(второйтерм)".

5. Переход к координатам более простого объекта (характеристика "упрощплюсвект").

   Характеристика "упрощплюсвект(N)" указывает на эквивалентность, преобразующую утверждение для перехода к координатам более простого объекта. N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(сдвиг)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABCDKabcdef}(\text{коорд}(A, K) = (d, e, f) \to \text{коорд}(A + B, K) = (a, b, c) \leftrightarrow \text{коорд}(B, K) = (a - d, b - e, c - f))$

   Спецификация - "тип(сдвиг)", "направл(второйтерм)".

6. Задача на преобразование, имеющая цель "класс".

   (a) Ввод в рассмотрение уравнения для координат множества точек в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "уравнпринадлежит").

   Характеристика "уравнпринадлежит(N)" указывает на эквивалентность, вводящую уравнение для множества точек, рассматриваемого в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". N - направление замены.

   Создается спецификация "тип(раздел)", "направл(N)". Пример:

   $\forall_{ABCPK}(K = (A, B, C) \to \exists_{xy}(\text{Прямая}(x) \mathbin{\&} P(x, y)) \leftrightarrow \exists_{abcxy}(\text{коорд}(x, K) = \mathrm{set}_{uv}(au + bv + c = 0 \mathbin{\&} u - \text{число} \mathbin{\&} v - \text{число}) \mathbin{\&} a - \text{число} \mathbin{\&} b - \text{число} \mathbin{\&} c - \text{число} \mathbin{\&} \text{Прямая}(x) \mathbin{\&} P(x, y)))$

   Спецификация - "тип(раздел)", "направл(второйтерм)".

(b) Исключение вспомогательных параметров в условии задачи на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "вспомописание").

Характеристика "вспомописание(N)" указывает на эквивалентность, исключающую вспомогательные параметры в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". N - направление замены.

Создается спецификация "тип(параллелпрямые)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{ABCDEKabc}(\text{прямкоорд}(K) \mathbin{\&} K = (A, B, C) \mathbin{\&} \text{коорд}(D, K) = (a, b) \mathbin{\&} \text{коорд}(E, K) = (c, 0) \mathbin{\&} 0 < c \mathbin{\&} \text{разныеточки}(A, D) \to a < 0 \leftrightarrow \pi/2 < \angle(DAE))$$

Спецификация - "тип(параллелпрямые)", "направл(второйтерм)". Исключается параметр a.

(c) Условие существования объекта переформулируется в задаче на преобразование, имеющей цель "класс", как условие существования его координат (характеристика "существкоорд").

Характеристика "существкоорд(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую условие существования объекта в условие существования его координат. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(записьоператора)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{AKPQ}(\exists_{xy}(x - \text{точка} \mathbin{\&} x \in A \mathbin{\&} \text{коорд}(A, K) = \text{set}_{uv}(P(u, v)) \mathbin{\&} Q(x, y)) \leftrightarrow \exists_{aby}(Q(\text{тчкоорд}(K, (a, b)), y) \mathbin{\&} P(a, b) \mathbin{\&} \text{коорд}(A, K) = \text{set}_{uv}(P(u, v)) \mathbin{\&} a - \text{число} \mathbin{\&} b - \text{число}))$$

Спецификация - "тип(записьоператора)", "направл(второйтерм)".

(d) Явное задание объекта через координаты в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "опредкоорд").

Характеристика "опредкоорд(N)" указывает на эквивалентность для явного задания объекта через координаты в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". N - направление замены.

Создается спецификация "тип(контрольфрагмента)", "направл(N)". Пример:

$$\forall_{AKabcdpq}(\neg(p{+}q = 0) \to A \in \text{отрезок}(\text{тчкоорд}(K, (a, b))\text{тчкоорд}(K, (c, d))) \mathbin{\&} pl(A\text{тчкоорд}(K, (a, b))) = ql(A\text{тчкоорд}(K, (c, d))) \leftrightarrow A = \text{тчкоорд}(K, ((cq + pa)/(p + q), (dq + pb)/(p + q))))$$

Спецификация - "тип(контрольфрагмента)", "направл(второйтерм)".

(e) Переформулировка подутверждения условия задачи на преобразование, имеющей цель "класс", через параметры координат множества объектов (характеристика "определить")

Характеристика "определить(N)" указывает на эквивалентность, переформулирующую утверждение через параметры координат множества объектов. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(точкиокружности)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{AKMNPabc}$(Прямая(A) & $K = (M, N, P)$ & коорд(A, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax+by+c = 0$ & x – число & y – число) $\rightarrow A \parallel$ прямая(MN) $\leftrightarrow a = 0$)

Спецификация - "тип(точкиокружности)", "направл(воройтерм)".

7. Задачи на исследование, имеющие цель "исследовать".

   (a) Явное задание конечного множества объектов через их координаты в задаче на исследование, имеющей цель "исследовать" (протокол "тчкоорд").

   Протокол "тчкоорд(A B)" означает, что логический символ A является названием координат, а выражение вида $B(K, x)$ обозначает объект, координаты типа A которого в системе координат K равны x.

   Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений $A(a, b) = \{; \lambda_i(c(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}$ и $a = \{; \lambda_i(B(b, c(i)), i \in \{1, \ldots, n\})\}$. Она сопровождается спецификацией "тип(стандстепень)", "направл(второйтерм)".

5.4.3 Усмотрение истинности либо ложности

Непосредственное усмотрение истинности либо ложности

Приемы данного раздела обычно имеют заголовок "второйтерм", хотя консеквент их теоремы не является ни равенством, ни эквивалентностью. Компилятор понимает данный заголовок как указание на эквивалентность консеквента константе "истина". Если консеквент имеет вид отрицания, то прием будет заменять утверждение под этим отрицанием на константу "ложь".

1. Непосредственное усмотрение истинности либо ложности (характеристика "элементарно").

   Характеристика "элементарно" указывает на кванторную импликацию без существенных посылок, имеющую элементарный консеквент.

   Создается спецификация "тип(элементызадачи)". Пример:

   $\forall_b$(непересек($b, \emptyset$))

   Соответствующий прием имеет заголовок "второйтерм" и заменяет утверждение непересечения с пустым множеством на константу "истина".

2. Непосредственное усмотрение истинности либо ложности (характеристика "нормсуществует").

   Характеристика "нормсуществует" означает, что теорема представляет собой кванторную импликацию без существенных посылок с квантором существования в консеквенте, либо сама имеет заголовок "существует".

   Создается спецификация "тип(элементызадачи)". Пример:

   $\exists_x(x - \mathrm{set}$ & $\neg(x = \emptyset))$

3. Непосредственное усмотрение истинности либо ложности (характеристика "квантор").

   Характеристика "квантор" указывает на теорему, позволяющую усмотреть истинность либо ложность кванторной импликации.

   Создается спецификация "тип(элементызадачи)". Пример:

   $\forall_b(\neg(\forall_a(a - \mathrm{set} \rightarrow \neg(b \subseteq a))))$

4. Непосредственное усмотрение истинности либо ложности (характеристика "конст").

   Характеристика "конст" указывает на утверждение без переменных.

   Создается спецификация "тип(элементызадачи)". Пример:

   $\neg(\pi - \mathrm{rational})$

5. Непосредственное усмотрение истинности либо ложности (характеристика "дизъюнкция").

   Характеристика "дизъюнкция" означает, что консеквент теоремы имеет вид дизъюнкции.

   Проверяется, что теорема имеет заголовок "длялюбого", но существенные антецеденты у нее отсутствуют. Проверяется также, что все дизъюнктивные члены консеквента суть элементарные утверждения. Тогда создается спецификация "тип(элементызадачи)". Пример:

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a = b) \ \vee \ a \leq b)$

Фиксация однозначно определимого операнда

Характеристика - "опредзначение".

Характеристика "опредзначение(i)" указывает на такую импликацию с консеквентом вида $P(t_1 \ldots t_n)$, что значение t_i, если вообще существует, однозначно определяется значениями $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$.

Создается спецификация "тип(линейноеуравнение)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \text{наибольший}(n, \mathrm{set}_m(m - \text{натуральное} \ \& \ m|n)))$

Характеристика - "опредзначение(1)".

Соответствующий прием усматривает истинность утверждения "наибольший(...)".

Усмотрение истинности либо ложности подутверждения с помощью проверочного оператора

1. Усмотрение истинности либо ложности с помощью проверочного оператора (характеристика "попыткаспуска").

Характеристика "попыткаспуска" указывает на теорему, представляющую собой простую импликацию с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте.

Справочник "заголовокприема" определяет по текущей теореме список возможных версий приема типа "блокпрограммы" (т.е. типа "усмотрение истинности либо ложности с помощью проверочного оператора). Если хотя бы в одной из этих версий все антецеденты снабжены указателями "блокпроверок" и "идентификатор", то создается спецификация "тип(блокпрограммы)". Пример:

$\forall_{ab}(0 \leq a - \pi \rightarrow \arccos b \leq a)$

2. Усмотрение истинности либо ложности с помощью проверочного оператора (характеристика "проверка").

   Характеристика "проверка" указывает на кванторную импликацию с элементарным консеквентом, отличным от тождества, у которой антецеденты имеют переменные, не входящие в консеквент, причем каждая такая новая переменная возникает из равенства в антецеденте, одна из частей которого содержит только старые переменные.

   Действия те же, что в предыдущем пункте. Пример:

   $\forall_{fAn}(\text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ \mathrm{Dom}(f) = \{1, \ldots, n\}\ \&\ \mathrm{Val}(f) = A \rightarrow$ $\text{перестановка}(f, A))$

3. Усмотрение истинности либо ложности с помощью проверочного оператора (протокол "легковидеть").

   Протокол "легковидеть(A B)" означает, что для проверки утверждений вида A введен проверочный оператор с заголовком B.

   Создается импликация с антецедентом A, консеквент которой тоже равен A. Она сопровождается спецификацией "тип(блокпрограммы)". Если A имеет вид $P(x)$, то к спецификации добавляется элемент "см(или(не(корень)не(переменная(x)) и(тип(описать) неизвестная(x))))". Если длина терма A больше 2, то к спецификации добавляется элемент "см(или(условие не(отрицание)))". Пример:

   $\forall_a(\neg(a = \emptyset) \rightarrow \neg(a = \emptyset))$

Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия задачи на доказательство с помощью усиленного проверочного оператора

1. Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия задачи на доказательство с помощью усиленного проверочного оператора (протокол "проверка").

   Протокол "проверка(A B)" означает, что для проверки утверждений вида A введен усиленный проверочный оператор с заголовком B.

Создается импликация с антецедентом A, консеквент которой тоже равен A. Она сопровождается спецификацией "тип(чисткапрограммы)", "указатель(проверка(1))". Пример:

$\forall_{ab}(a < b \to a < b)$

Указатель "проверка(1)" указывает, что антецедент должен обрабатываться усиленным проверочным оператором. В данном случае - оператором "провменьше".

2. Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия задачи на доказательство с помощью усиленного проверочного оператора (характеристика "провменьшеилиравно").

   Характеристика "провменьшеилиравно(P)" указывает на теорему, используемую для усмотрения истинности с помощью усиленного проверочного оператора P.

   Создается спецификация "тип(чисткапрограммы)", "оператор(P)". Пример:

   $\forall_{abcx}(0 \leq c \ \& \ b^2 - 4ac \leq 0 \to 0 \leq ax^2 + bx + c)$

   Спецификация - "тип(чисткапрограммы)", "оператор(провменьшеилиравно)".

Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте

1. Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте (характеристика "элементарно").

   Характеристика "элементарно" указывает на кванторную импликацию без существенных посылок, имеющую элементарный консеквент.

   Проверяется, что теорема имеет единственный антецедент, причем этот антецедент не используется для сопровождения консеквента по о.д.з. Тогда создается спецификация "тип(обл)", "антецедент(1)". Пример:

   $\forall_a(a - \text{слово} \to a - \text{функция})$

2. Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте (характеристика "антецедент").

   Характеристика "антецедент" указывает на простую импликацию, некоторый существенный антецедент которой содержит все переменные связывающей приставки.

   Проверяется, что теорема не имеет характеристики "числовойатом" и имеет единственный существенный антецедент. Этот антецедент имеет те же параметры, что и консеквент. Создается спецификация "тип(обл)", "антецедент(i)", где i - номер указанного антецедента. Пример:

   $\forall_{fAb}(f(b) \in A \to \neg(\text{прообраз}(f, A) = \emptyset))$

3. Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте (характеристика "легковидеть").

   Характеристика "легковидеть(P i)" указывает на простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком P, причем ее i-й антецедент - непосредственно идентифицируемый, а остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

   Проверяется, что i-й антецедент существенный, и создается спецификация приема "тип(обл)", "антецедент(i)". Пример:

   $\forall_{ab}(b \in a \to \neg(a = \emptyset))$

4. Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте (характеристика "транзитоперанд").

   Характеристика "транзитоперанд" указывает на импликацию, имеющую вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с двумя переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов.

   Для каждого номера i существенного антецедента создается спецификация отдельного приема "тип(обл)", "антецедент(i)". Пример:

   $\forall_{Axa}(\neg(A \subseteq a)\ \&\ x \subseteq \{a\} \to \neg(\text{разбиение}(A, x)))$

5. Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте (характеристика "попыткаспуска").

   Характеристика "попыткаспуска" указывает на простую импликацию с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте.

   Проверяется, что теорема имеет единственный существенный антецедент, а число корневых операндов консеквента не менее 3, и все эти операнды суть переменные. Проверяется также, что существенный антецедент имеет те же самые корневые операнды. Затем создается спецификация "тип(обл)". Пример:

   $\forall_{ABCD}(\text{параллелограмм}(ABCD) \to \text{четырехугольник}(ABCD))$

Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия с помощью идентифицирующих операторов

1. Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия с помощью идентифицирующих операторов (протокол "усм").

   Протокол "усм(A B C)" означает, что для обработки утверждения A предусмотрен идентифицирующий оператор, причем B, C - термы "вход(...)" и "выход(...)", определяющие, какие переменные рассматриваются в качестве входных, а какие - в качестве выходных. Терм C может отсутствовать.

Проверяется, что C отсутствует, и создается импликация с антецедентом A, консеквент которой тоже равен A. Она сопровождается спецификацией "тип(Норм)", "направл(второйтерм)". Пример:

По протоколу "усм(точкалуча(a b c) вход(a b c))" создается теорема приема

$\forall_{ABC}$(точкалуча(A, B, C) → точкалуча(A, B, C))

Соответствующий прием обрабатывает антецедент идентифицирующим оператором "точкалуча".

2. Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия с помощью идентифицирующих операторов (характеристика "попыткаспуска").

   Характеристика "попыткаспуска" указывает на теорему, представляющую собой простую импликацию с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте.

   Проверяется, что каждый существенный антецедент допускает обработку идентифицирующим оператором. Затем создается спецификация "тип(Норм)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{ABC}(B \in$ отрезок$(AC) \to$ точкалуча$(A, B, C))$

3. Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия с помощью идентифицирующих операторов (характеристика "легковидеть").

   Характеристика "легковидеть(P i)" указывает на простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком P, причем ее i-й антецедент - непосредственно идентифицируемый, а остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

   Проверяется, что каждый существенный антецедент допускает обработку идентифицирующим оператором. Затем создается спецификация "тип(Норм)", "направл(второйтерм)". Пример:

   $\forall_{ABCDE}(D \in$ отрезок(AE) & $E \in$ отрезок$(BC) \to D \in$ фигура$(ABC))$

Усмотрение истинности либо ложности с помощью непосредственных вычислений

1. Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия с помощью непосредственных вычислений (характеристика "прогинф").

   Характеристика "прогинф" указывает на импликацию, осуществляющую усмотрение истинности с помощью непосредственных вычислений.

   Создается спецификация "тип(пересечение)". Пример:

   $\forall_{abcdn}(d =$ нод(b, n) & $\neg(d|a) \to \neg(a = (bx)(\mathrm{mod}\ n)))$

   Соответствующий прием идентифицирует a, b, n с целочисленными константами, после чего проверяет истинность антецедентов при помощи непосредственных вычислений.

2. Усмотрение ложности посылки с помощью непосредственных вычислений (характеристика "прогинф").

   Создается спецификация "тип(нормдуга)". Пример:

   $\forall_{abcdpq}(p = |a| \ \& \ q = d - c \ \& \ \neg(p|q) \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow \neg(ab + c = d))$

   Соответствующий прием идентифицирует a, c, d с целочисленными константами, b - с переменной. Первые три антецедента обрабатываются путем непосредственных вычислений, последний - обрабатывается проверочным оператором. Прием применяется к посылкам, имеющим вид равенства.

Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия с помощью нормализатора вычисления

Характеристика - "Норм". Эта характеристика указывает на теорему, позволяющую усмотреть истинность утверждения с помощью нормализатора вычислений.

Создается спецификация "тип(унитерм)". Пример:

$\forall_{abdf}(\lim_{n\to\infty} |f(n+1)/f(n)| = a \ \& \ a - 1 < 0 \rightarrow \text{сходится}(\lambda_m(\sum_{n=b}^{m} f(n), m - \text{натуральное})))$

Соответствующий прием обрабатывает левую часть нормализатором вычисления "нормпредел".

Усмотрение истинности либо ложности с помощью пакетных синтезаторов

1. Усмотрение истинности условия задачи на доказательство с помощью пакетного синтезатора (характеристика "оценкаперем").

   Характеристика "оценкаперем(i)" указывает на теорему, использующую пакетный синтезатор для усмотрения истинности. i - номер антецедента, обрабатываемого пакетным синтезатором.

   Создается спецификация "тип(сжатиефильтра)", "указатель(значения(i))". Пример:

   $\forall_{abc}(a - b \leq c \ \& \ c < 0 \rightarrow a < b)$

   Соответствующий прием для доказательства строгого неравенства обращается к синтезатору "верхняяоценка", получающему константную верхнюю оценку c разности частей неравенства.

2. Усмотрение истинности либо ложности условия задачи на описание с помощью пакетного синтезатора (характеристика "оценкаперем").

   Создается спецификация "тип(разность)", "указатель(значения(i))". Пример:

   $\forall_{abc}(c \leq |b| \ \& \ 0 < c - 1 \rightarrow \neg(\cos a = b))$

   Соответствующий прием применяется к равенству либо отрицанию равенства, являющемуся условием задачи на описание. Выражение b не константное и не содержит неизвестных. Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, получающим нижнюю оценку c модуля b.

Усмотрение истинности либо ложности с помощью вспомогательных задач на доказательство

1. Усмотрение истинности условия с помощью вспомогательных задач на доказательство (характеристика "доказать").

   Характеристика "доказать" указывает на теорему, созданную для приема, устанавливающего истинность утверждения с помощью вспомогательных задач на доказательство.

   Создается спецификация "тип(объединениефрагментов)". Пример:

   $\forall_{fghp}(f(i) = g(i)h(i)/p(i)$ & сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^n |g(i)/p(i)|, n -$ натуральное$)) \rightarrow$ сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^n f(i), n -$ натуральное$)))$

   Соответствующий прием выделяет в общем члене ряда множители $h(i)$, представляющие собой неотрицательные степени синуса либо косинуса, а также степени минус единицы, отбрасывает их, и пытается усмотреть сходимость ряда из модулей "остатков" при помощи задачи на доказатеьство.

2. Усмотрение истинности условия задачи на доказательство с помощью вспомогательных задач на доказательство.

   (a) Усмотрение истинности условия задачи на доказательство с помощью вспомогательных задач на доказательство (характеристика "доказать").

   Создается спецификация "тип(смоператор)". Пример:

   $\forall_{ABCDE}(B \in$ отрезок(AC) & разныестороны$(D, E,$ прямая$(AC))$ &
   разныеточки(A, B) & разныеточки(B, C) & $\angle(DBC) = \angle(ABE) \rightarrow$
   $B \in$ прямая$(DE))$

   Для доказательства того, что точка лежит на прямой, доказывается равенство "вертикальных" углов.

   (b) Доказательство после применения нормализатора.

      i. Попытка применения усиливающего нормализатора утверждений к условию задачи на доказательство (протокол "смвывод").

      Протокол "смвывод(P A)" означает, что нормализатор P переводит утверждение, заголовок которого принадлежит списку A, в ослабленное либо (при наличии комментария "доказать") усиленное утверждение, в котором исключена сложная операция.

      Выбирается символ s списка A. Определяется его арность n. Выбираются первые n переменных $a_1, \ldots, a_n$ и создается утверждение U вида $s(a_1 \ldots a_n)$. Затем строится импликация, антецедентом и консеквентом которой является данное утверждение. Она сопровождаетя спецификацией "тип(идентификация)", "указатель(следствие(1))", "быстрпреобр(U P(замечание(доказать)))". Пример:

      $\forall_{ab}(a \leq b \rightarrow a \leq b)$

      Спецификация - "тип(идентификация)", "указатель(следствие(1))", "быстрпреобр($a \leq b$ исклцелаячасть(замечание(доказать)))". Соответствующий прием усматривается в доказываемом неравенстве целую часть и избавляется от нее при помощи нормализатора "исклцелаячасть", заменяющего доказываемое неравенство на более сильное.

ii. Доказательство путем применения нормализатора приведения к заданным заголовкам и дизъюнктивно-конъюнктивной декомпозиции условия (протокол "нормразделение").

Протокол "нормразделение($A(x)$ x P)" означает, что A - вид утверждения либо выражения, которое с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам P, применяемого к идентифицируемому с переменной x выражению, преобразуется к виду, допускающему декомпозицию.

Выбирается переменная y, не входящая в протокол, и создается импликация, антецедентами которой служат равенство $y = x$ и $A(y)$, а консеквентом - $A(x)$. Она сопровождается спецификацией "тип(комплексное)", "оператор(P)", "указатель(следствие(2))". Пример:

Протокол - "нормразделение($\neg(x = 0)$ x видумножение)". По нему создана теорема приема $\forall_{ab}(a = b \rightarrow \neg(a = 0) \leftrightarrow \neg(b = 0))$. Соответствующий прием применяется к условию задачи на описание, содержащему неизвестные и не используемому для сопровождения по о.д.з. Исходное выражение a имеет заголовок "плюс", причем проверяется, что его удалось представить в виде произведения, дроби либо степени.

(c) Попытка сведения к вспомогательной задаче на доказательство, решаемой специальным методом (протокол "допконтекст").

Протокол "допконтекст(A F K)" означает, что доказательство утверждений вида A при истинности фильтров F вида "контекст(...)" целесообразно передавать вспомогательной задаче на доказательство, причем указатель K определяет дополнтельный комметарий к этой задаче.

Создается импликация с антецедентом A и консеквентом A. Она сопровождается комментарием "тип(рекурсия)", "указатель(следствие(1),F,K)". Пример:

Протокол "допконтекст($a \leq b$ контекст(входит(переменная(c)корень) переменная(c)) комментарий(1 нижняягрань c))". Импликация имеет вид $\forall_{ab}(a \leq b \rightarrow a \leq b)$. Соответствующий прием выбирает переменную диференцирования c для доказательства неравенства с помощью производных. Комментарий (нижняягрань c) является указанием на данный способ доказательства.

(d) Решение вспомогательной задачи для доказательства шага индукции (характеристика "индуктпарам").

Характеристика "индуктпарам(i)" указывает на теорему, обеспечивающую доказательство шага индукции с помощью вспомогательной задачи. i - номер антецедента, обрабатываемого задачей.

Создается спецификация "тип(плюсбеск)", "указатель(доказать(i))". Пример:

$\forall_{abcf}(0 \leq \sum_{n=1}^{c} f(n) + a \ \& \ 0 \leq f(c+1) + b - a \rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{c+1} f(n) + b)$

Первый антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство - индуктивным предположением. Истинность второго устанавливается при помощи вспомогательной задачи на доказательство.

3. Усмотрение истинности либо ложности содержащего неизвестные условия задачи на описание с помощью вспомогательной задачи на доказательство (характеристика "усмвхожд").

   Характеристика "усмвхожд" указывает на теорему, используемую для усмотрения истинности либо ложности условия задачи на описание с помощью вспомогательной задачи на доказательство.

   Создается спецификация "тип(стрелкапирса)". Пример:

   $\forall_{ab}(0 < a - b \to \neg(a \leq b))$

   Соответствующий прием используется на достаточно высоком уровне, когда обычных средств для решения неравенства уже не хватило, и предпринимается попытка доказать, что оно ложно.

4. Усмотрение истинности либо ложности сопровождающего утверждения при редактировании ответа задачи на описание с помощью вспомогательной задачи на доказательство (характеристика "усмвхожд").

   Создается спецификация "тип(дистрибразвертка)". Пример:

   $\forall_{ab}(0 < a - b \to \neg(a = b))$

   Соответствующий прием применяется к не содержащему неизвестных условию задачи на описание при редактировании ее ответа. Предварительно проверяется наличие в посылках неравенства, переспкающегося по своим параметрам с данным условием.

Усмотрение истинности либо ложности с помощью вспомогательной задачи на преобразование

1. Усмотрение истинности либо ложности подутверждения условия с помощью вспомогательной задачи на преобразование (характеристика "усмнорм").

   Характеристика "усмнорм" указывает на теорему, предназначенную для усмотрения истинности либо ложности утверждения с помощью задачи на преобразование.

   Создается спецификация "тип(выводусловия)". Пример:

   $\forall_{abcfgpuv}(p = \lambda_{xy}(f(x,y), g(x,y)) \ \& \ f(x,b) = c \to \neg(\mathrm{Extr}(p,(a,b),u,v)))$

   Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, задающим функцию p. Выражение b не содержит неизвестных. После подстановки его вместо второго аргумента функции и упрощения вспомогательной задачей на преобразование оказывается, что результат c не зависит от переменной x. Отсюда делается вывод, что (a, b) не является точкой экстремума.

2. Усмотрение истинности условия задачи на доказательство с помощью вспомогательной задачи на преобразование (характеристика "усмнорм").

   Создается спецификация "тип(частнпроизв)". Пример:

   $\forall_{AB}$(конечное(B) & $A \subseteq B$ & $0 \leq \mathrm{card}(A) - \mathrm{card}(B) \to A = B$)

   Проверяется наличие посылки, в которой встречается символ "мощность". Разность мощностей в последнем антецеденте упрощается задачей на преобразование. Далее используются проверочные операторы.

Использование нормализатора утверждений для усмотрения избыточного условия на неизвестную в ответе задачи на описание

Характеристика - "нормпарам(P)". Она указывает на теорему, усматривающую избыточность условия на неизвестную с помощью нормализатора P ограничений на параметры.

Проверяется, что консеквент имеет единственный параметр x, не входящий в антецеденты. Создается спецификация "тип(круг)", "оператор(P)", "неизвестная(x)", "указатель(идентификатор(1))". Пример:

$\forall_{abx}((0 < b - a) =$ истина & $x \leq a \to \neg(x = b))$

Спецификация - "тип(круг)", "оператор(стандменьше)", "неизвестная(x)", "указатель(идентификатор(1))". Прием применяется к отрицанию равенства- условию задачи на описание, для которой имеет место этап редактирования ответа. Выражения a, b не содержат неизвестных, x - неизвестная. Левая часть первого антецедента обрабатывается нормализатором "стандменьше". Использование нормализатора вместо проверочного оператора объясняется тем, что в период редактирования ответа утверждения, сопровождающие по о.д.з., обычно уже отброшены, и для усмотрения истинности неравенства приходится выполнять его эквивалентные преобразования.

Доказательство равенства с однозначно характеризуемым объектом

Характеристика - "однозначно". Она указывает на тождество вида "$A(y)$ & $P(x, y)$ & $P(z, y) \to x = z$", выражающее однозначную определимость объекта x по отношению $P(x, y)$.

Выбираются новые переменные f, v. Создается импликация с антецедентами $A(y)$, $P(x, y)$, $(f(x) = z) = (x = v)$, $P(v, y)$ и консеквентом $f(x) = z$. Она сопровождается спецификацией "тип(если)". Пример:

$\forall_{abcde}$(наименьший(b, a) & $(d(b) = c) = (b = e)$ & наименьший$(e, a) \to d(b) = c$)

Переменная d функциональная. Левая часть второго антецедента разрешается относительно неизвестного подвыражения b вспомогательной задачей на описание. Истинность третьего антецедента устанавливается задачей на доказательство. Точкой инициализации срабатывания приема служит первый антецедент.

5.4.4 Вывод в посылках

Заметим, что не все типы приемов вывода непосредственно создаются спецификатором. Обычно спецификатор инициирует прием со сравнительно слабыми ограничениями на срабатывание, а уточнение его типа происходит при доводке приема по задачнику. Иногда спецификатор дополнительно предлагает прием с достаточно высокой мотивированностью срабатывания. Соответственно, в данном разделе количество пунктов существенно меньше, чем в соответствующем разделе логического ассемблера.

Вывод одного отношения

1. Вывод одноместного отношения.

   (a) Вывод одноместного предиката (характеристика "свойство").

   Характеристика "свойство" указывает на простую импликацию, консеквентом которой служит одноместное отношение от переменной.

   Создается спецификация "тип(антецедент)". Пример:

   $\forall_{ABC}(A \in \text{прямая}(BC) \to A - \text{точка})$

   (b) Вывод одноместного предиката, характеризующего текущий объект (характеристика "текобъект").

   Характеристика "текобъект(t)" указывает на теорему для вывода одноместного предиката, характеризующего объект t.

   Создается спецификация "тип(общкоммент)", "терм(t)". Пример:

   $\forall_{ABC}(\text{эллипс}(\text{Окружность}(ABC)))$

   Соответствующий прием активируется при усмотрении выражения "Окружность(ABC)". Проверяется, что это выражение расположено в левой части уравнения для координат окружности в трехмерном пространстве.

2. Вывод равенства.

   (a) Вывод равенства для числовых атомов.

   i. Равенство двух невырожденных числовых атомов.

   A. Равенство двух числовых атомов (характеристика "числовойатом").

   Характеристика "числовойатом" указывает на тождество для невырожденных числовых атомов.

   Проверяется, что в обеих частях равенства расположены невырожденные числовые атомы, причем корневые операнды каждого из них - переменные. Тогда создается спецификация "тип(редактор-ответа)". Пример:

   $\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC)\ \&\ \text{прямая}(BD) \perp \text{прямая}(AC)\ \&$
   $D \in \text{прямая}(AC) \to l(AD) = l(DC))$

B. Равенство двух старых числовых атомов (характеристика "числовойатом").

Создается спецификация "тип(подборнеизвестных)". Пример:

$\forall_{ABCDEF}(C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) & $l(CD) = l(EF)$ & $E \in$ окружность(AB) & $F \in$ окружность(AB) & актив$(S($фигура$(ACD)))$ & актив$(S($фигура$(AEF))) \rightarrow S($фигура$(ACD)) = S($фигура$(AEF)))$

ii. Соотношение пропорциональности для двух невырожденных числовых атомов.

A. Соотношение пропорциональности для двух числовых атомов (характеристика - "пропорция").

Характеристика "пропорция$(A\ B)$" указывает на соотношение пропорциональности для числовых атомов A, B.

Создается спецификация "тип(оценка)". Пример:

$\forall_{ABCDEF}($разныеточки(A, C) & разныеточки(B, C) & разныепрямые(прямая(AC), прямая$(BC))$ & $l(AE) = l(CE)$ & $l(BD) = l(CD)$ & $D \in$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая$(BE) \rightarrow 2l(EF) = l(BF))$

Прием выводит соотношение для длин отрезков медиан, возникающих при их пересечении.

B. Соотношение пропорциональности для двух старых числовых атомов (характеристика - "пропорция").

Создается спецификация "тип(преобразователь)". Пример:

$\forall_{ABCDEab}($актив$(l(BD))$ & актив$(l(AB))$ & $B \in$ прямая(AD) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(BC) & $C \in$ прямая(AE) & $al(AB) = bl(AC)$ & разныепрямые(прямая(BC), прямая$(AE)) \rightarrow al(BD) = bl(CE))$

Прием проверяет, что расстояния BD и CE уже встречаются в задаче.

iii. Вывод явного выражения для значения невырожденного числового атома.

A. Вывод явного выражения для значения числового атома (характеристика "числатом").

Характеристика "числатом" указывает, что тождество выражает сложный числовой атом через более простые.

Создается спецификация "тип(частичныйответ)". Пример:

$\forall_{ABCKa}($крд$(A, K, 1) =$ крд$(B, K, 1) + a$ & одномерный(вектор(AB), $K) \rightarrow l(AB) = |a|)$

B. Вывод явного выражения для значения числового атома (характеристика "числзнач").

Характеристика "числзнач" указывает на тождество, в одной из частей которого расположен невырожденный числовой атом, не встречающийся в противоположной части, не являющейся числовым атомом, но содержащей невырожденные числовые атомы.

Создается спецификация "тип(частичныйответ)". Пример:

$\forall_{ABCDEKabc}(\text{актив}(l(AE))\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ K=(A,B,C,D)\ \&\ E\in$ прямая$(AB)\ \&\ A\in$ отрезок$(BE)\ \&$ коорд$(E,K)=(a,b,c)\to l(AE)=-al(AB))$

C. Вывод явного выражения для значения старого числового атома (характеристика "числатом").

Создается спецификация "тип(метатерм)". Пример:

$\forall_{ABC}(\text{актив}(\angle(BAC))\to l(BC)=\sqrt{l(AB)^2+l(AC)^2-2l(AB)l(AC)\cos\angle(BAC)})$

Расстояния AC, AB и угол BAC известны. Выражение $l(AB)$ уже встречается в задаче.

iv. Общий случай соотношения для невырожденных числовых атомов

A. Общий случай соотношения для числовых атомов (характеристика "числовойатом").

Характеристика "числовойатом" указывает на тождество для невырожденных числовых атомов.

Проверяется отсутствие характеристик "равны", "числатом". Если имеется характеристика "пропорция", то проверяется, что количество невырожденных числовых атомов не менее 3. Тогда создается спецификация "тип(родобъекта)". Пример:

$\forall_{ABCDE}($прямая$(AB)\perp$ прямая$(AC)\ \&$ окружность(DE) вписана в фигура$(ABC)\to 2l(DE)=l(AB)+l(AC)-l(BC))$

B. Соотношение для старых числовых атомов (характеристика "числовойатом")

Проверяется, что все невырожденные числовые атомы консеквента - углы либо расстояния. Создается импликация, получаемая из исходной теоремы добавлением к антецедентам термов "актив(A)" для всех неывротденных числовых атомов A консеквента. Она снабжается спецификацией "тип(род)". Пример:

$\forall_{ABC}(\text{актив}(l(AC))\ \&\ \text{актив}(l(AB))\ \&\ \text{актив}(l(BC))\ \&$
$B\in$ отрезок$(AC)\to l(AC)=l(AB)+l(BC))$

C. Вывод соотношения для числовых атомов, которые предполагается выразить через координаты (характеристика - "выразить").

Характеристика "выразить" указывает на теорему приема, выводящую соотношение для числовых атомов, которое предполагается выразить через координаты.

Создается спецификация "тип(завершениепрограммы)". Пример:

$\forall_{ab}($Вектор$(a)\ \&$ Вектор$(b)\ \&\ a\perp b\to$ скалумнож$(a,b)=0)$

Соответствующий прием проверяет наличие в посылках равенства, определяющего координаты вектора a либо b.

v. Выражение текущего числового атома через более простые числовые атомы (характеристика "числатом").

Характеристика "числатом" указывает, что тождество выражает сложный числовой атом через более простые.

Среди невырожденных числовых атомов консеквента выбирается атом A, имеющий максимальную сложность, причем если таковых несколько, берется самый длинный. Создается спецификация "тип(усмцелое)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCD}(mbox(ABCD) \to S(\text{фигура}(ABCD)) = l(AB)l(BC))$

Спецификация - "тип(усмцелое)", "терм(S(фигура($ABCD$)))".

vi. Вывод выражения невырожденного числового атома через численные параметры (характеристика "числотобр").

Характеристика "числотобр" указывает на теорему для вывода равенства, выражающего невырожденный числовой атом через численные параметры.

Создается спецификация "тип(различимы)". Пример:

$\forall_{ABmn}(\text{разбиение}(A,B)\ \&\ \mathrm{card}(B) = m\ \&\ m - \text{число}\ \&\ \forall_i(i \in B \to \mathrm{card}(i) = n)\ \&\ n - \text{число} \to \mathrm{card}(A) = mn)$

Первый и четвертый антецеденты идентифицируются с посылками, второй - выделен указателем "идентификатор". Проверяется, что выражения m, n не содержат невырожденных числовых атомов.

vii. Вывод уравнения для численных параметров нечислового объекта (характеристика "числовоеравенство").

Характеристика "числовоеравенство" указывает на теорему, консеквент которой является равенством для числовых параметров нечисловых объектов.

Создается спецификация "тип(прогртерм)". Пример:

$\forall_{ABfgm}(\text{плотнраспред}(A,B) = \lambda_t(f(t), g(t))\ \&\ \text{матожидание}(A,B) = m\ \&\ \text{дисперсия}(A,B) = a \to a = \int_{-\infty}^{\infty}(t-m)^2 f(t)dt)$

viii. Вывод стандартизирующего равенства, сводящего текущий невырожденный числовой атом к однотипному атому (характеристика "стандчисло").

Характеристика "стандчисло(A)" указывает на теорему для вывода стандартизирующего равенства, выражающего невырожденный числовой атом A через однотипные атомы.

Создается спецификация "тип(доопределение)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{abcdpqxy}([x+a,b] = p\ \&\ [b,x+c] = q \to \text{длина}(q) = c - a - \text{длина}(p))$

Прием инициируется при усмотрении выражения "длина(q)". Выражения a, c не содержат невырожденных числовых атомов. Выражение "длина(p)" уже встречается в задаче. Выводимое равенство снабжается комментарием "ориентацияравенства", блокаирующим перестановку его частей.

ix. Использование специального нормализатора для вычисления значения числового атома (характеристика "вычислениеугла").

Характеристика "вычислениеугла(P)" указывает на теорему приема, вычисляющую значение невырожденного числового атома с помощью нормализатора P и выводящую равенство для этого значения.

Создается спецификация "тип(числзначение)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{ABCapq}$(актив(S(фигура(ABC))) & S(фигура(ABC)) $= a$ & S(фигура(ABC)) $= p$ & $p = q \to S$(фигура(ABC)) $= q$)

Спецификация - "тип(числзначение)", "оператор(вычплощадь)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные выделены указателем "идентификатор". Второй антецедент обрабатывает терм "S(фигура(ABC))" нормализатором общей стандартизации "нормплощадь". Проверяется, что результат a содержит неизвестные, и тогда третий антецедент предпринимает обращение к более трудоемкому нормализатору "вычплощадь", определяющему площадь из соображений пропорциональности. Чтобы обеспечить развязку на обработку в теореме одного и того же терма двумя различными нормализаторами, эти нормализаторы применяются к правым частям антецедентов - т.е. к a и p. Проверяется, что результат второго обращения q не содержит неизвестных.

x. Вывод следствия уравнений с числовыми атомами

A. Вывод из уравнения нового уравнения для невырожденных числовых атомов, представляющих интерес в текущем контексте (характеристика "новатомы").

Характеристика "новатомы(i)" указывает на теорему для вывода уравнения с новыми числовыми атомами при помощи уравнения для старых. i - номер антецедента, идентифицируемого со старым уравнением.

Создается спецификация "тип(заменазнака)", "антецедент(i)". Пример:

$\forall_{apqrST}$($T = [p,q]$ & $S = [r,q]$ & $r \in T$ & длина($[p,r]$) $= a \to$ длина(S) $=$ длина(T) $- a$)

Спецификация - "тип(заменазнака)", "антецедент(4)". Все антецеденты, кроме третьего, идентифицируются с посылками. Выражения a, p, r не имеют невырожденных числовых атомов.

B. Исключение числового атома при выводе линейной комбинации двух уравнений (характеристика "исключатом").

Характеристика "исключатом" указывает на тождество без невырожденных числовых атомов в консеквенте, имеющее в антецедентах несколько числовых равенств с невырожденными числовыми атомами.

Создается спецификация "тип(узлыоглавления)". Пример:

$\forall_{ABabcd}(al(AB) = b \;\&\; cl(AB) + d = 0 \to ad + bc = 0)$

Антецеденты идентифицируются с посылками. Выражения b, d имеют одинаковые невырожденные числовые атомы, причем они не содержат выражения $l(AB)$.

C. Вывод следствия двух уравнений, позволяющего исключить некоторый невырожденный числовой атом первого уравнения (характеристика "исключназвание").

Характеристика "исключназвание(x)" указывает на теорему для вывода комбинации двух уравнений с невырожденными числовыми атомами, исключающей некоторый атом первого уравнения. x - переменная для единственного остаточного терма, который может содержать невырожденные числовые атомы.

Создается спецификация "тип(нормменьшеилиравно)", "переменная(x)". Пример:

$\forall_{ABmnqrs}(nl(AB)r = s \ \& \ ml(AB)^2r = q \to msl(AB) = nq)$

Спецификация - "тип(нормменьшеилиравно)", "переменная(s)". Выражения m, n, q не содержат невырожденных числовых атомов. Выражение r содержит отличный от $l(AB)$ и не входящий в s невырожденный числовой атом.

D. Вывод следствия двух уравнений, имеющего единственный неизвестный числовой атом, если исходное уравнение имело более одного такого атома (характеристика "единстватом").

Характеристика "единстватом($x \ i_1 \dots i_n$)" указывает на теорему для вывода комбинации уравнений с невырожденными числовыми атомами, устраняющей все такие атомы, кроме одного. x - переменная, идентифицируемая с термом, имеющим устраняемые атомы. $i_1, \dots, i_n$ - список номеров антецедентов, идентифицируемых с уравнением.

Создается спецификация "тип(большаядуга)", "переменная(x)", "антецедент(i_1)", ..., "антецедент(i_n)". Пример:

$\forall_{abcdefghij}(i = gd \ \& \ h = ga \ \& \ h\sin j + b = c \ \& \ i\cos j + e = f \to a^2g^2d^2 - a^2(f-e)^2 - d^2(c-b)^2 = 0)$

Спецификация - "тип(большаядуга)", "переменная(j)", "антецедент(3)", "антецедент(4)". Выражения b, c, e, f, h, i в совокупности имеют единственный содержащий неизвестные числовой атом. При этом выражение j содержит отсутствующий в них числовой атом с неизвестными.

E. Вывод численного уравнения из двух уравнений с невырожденными числовыми атомами (характеристика "числа").

Характеристика "числа" указывает на теорему для вывода комбинации уравнений с невырожденными числовыми атомами, дающей уравнение с численными параметрами.

Создается спецификация "тип(внешконъюнкция)". Пример:

$\forall_{abcdefpq}(a + b = de \ \& \ (a+b)f = c \ \& \ dp = q \to cp - qef = 0)$

Два последних антецедента идентифицируются с посылками. Выражения c, e, f, p, q не содержат невырожденных числовых атомов с неизвестными, а выражение d - содержит. Каждое слагаемое суммы $a+b$ содержит тригонометрическую операцию от невырожденного числового атома с неизвестными. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть обрабатывается нормализатором разложения на множители.

F. Вывод следствия более чем двух уравнений для исключения неизвестных подвыражений (характеристика "Исключение").

Характеристика "Исключение" указывает на теорему для вывода следствия из более чем двух уравнений, позволяющего исключить неизвестные подвыражения.

Создается спецификация "тип(простыемножители)". Пример:

$\forall_{abcdefpqr}(a-b+d=p \ \& \ b-c+e=q \ \& \ c-a+f=r \to d+e+f=p+q+r)$

Выражения a, b, c содержат неизвестные.

xi. Вывод следствий из численных уравнений.

A. Вывод следствия нескольких численных уравнений, более простого относительно некоторой неизвестной (характеристика "линейно").

Характеристика "линейно" указывает на теорему для вывода следствия из численных уравнений, более простого относительно некоторой неизвестной.

Создается спецификация "тип(станд)". Пример:

$\forall_{abcdefgh}(ag+b=c \ \& \ ah+d=e \ \& \ f=bh-dg-ch+eg \to f=0)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - выделен указателем "идентификатор". Существует неизвестная, относительно которой выражение a нелинейно, а выражения b, d - линейны. Эта неизвестная не входит в выражения g, h. Выражение f содержит данную неизвестную и линейно относительно нее.

B. Вывод из нескольких уравнений уравнения для численных параметров, в котором исключено сложное неизвестное подвыражение (характеристика "сложный").

Характеристика "сложный" указывает на теорему приема для вывода следствия из численных уравнений для исключения сложного неизвестного подвыражения.

Создается спецификация "тип(количествооперандов)". Пример:

$\forall_{abcdefghij}(i=gd \ \& \ h=ga \ \& \ h\sin j+b=c \ \& \ i\cos j+e=f \to a^2g^2d^2-a^2(f-e)^2-d^2(c-b)^2=0)$

Два последних антецедента идентифицируются с посылками, два первых - выделены указателем "идентификатор". Выражение j содержит неизвестные. Выражения b, c, e, f, h, i не содержат тригонометрических операций с неизвестными.

C. Вывод следствия из численного уравнения, ориентированного на сближение с другим уравнением (характеристика "сближение").

Характеристика "сближение" указывает на кванторную импликацию для вывода следствий в посылках задачи на исследование, ориентированную на сближение подвыражений, содержащих неизвестные.

Создается спецификация "тип(стмногочлена)". Пример:

$\forall_{abcd}(a\sqrt{d}+b=c \to a^2d-b^2+2bc-c^2=0)$

Выражение d линейно относительно некоторой неизвестной, не входящей в выражение b, причем существуе другое уравнение с этой неизвестной, относительно которой оно линейно. Выражения a, c не содержат неизвестных.

D. Применение нормализатора стандартной формы к неизвестной части численного уравнения для вывода следствия (характеристика "стандследствие").

Характеристика "стандследствие(P)" указывает на теорему приема, использующего нормализатор P стандартной форомы для вывода следствия из уравнения.

Создается спецификация "тип(центр)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcdep}(p=a(b+c)+d \ \& \ a(b+c)+d=e \to p=e)$

Спецификация - "тип(центр)", "оператор(стандплюс)". Прием усматривает, что сумма $b+c$ содержит неизвестные, и выводит следствия, раскрывая скобки в левой части уравнения с помощью оператора "стандплюс".

E. Вывод следствия из двух численных уравнений для исключения неизвестной (характеристика "единстватом").

Характеристика "единстватом($x\ i_1 \dots i_k$)" указывает на теорему для вывода комбинации уравнений с невырожденными числовыми атомами, устраняющей все такие атомы, кроме одного. x - переменная, идентифицируемая с термом, имеющим устраняемые атомы. $i_1, \dots, i_k$ - список номеров антецедентов, идентифицируемых с уравнениями.

Создается спецификация "тип(нормсужение)", "переменная(x)", "антецедент(i_1)", ..., "антецедент(i_k)". Пример:

$\forall_{abcdefghij}(i=gd \ \& \ h=ga \ \& \ h\sin j+b=c \ \& \ i\cos j+e=f \to a^2g^2d^2-a^2(f-e)^2-d^2(c-b)^2=0)$

Спецификация - "тип(нормсужение)", "переменная(j)", "антецедент(3)", "антецедент(4)". Существует неизвестная, входящая в j и не входящая в b, c, e, f, h, i. Оба уравнения не имеют невырожденных числовых атомов. Среди выражений b, c, e, f, h, i имеется хотя бы одно, содержащее неизвестные.

F. Вывод следствия из численных уравнений, подготавливающего возможность разгруппировки неизвестных, заключенных в одном сложном подвыражении (характеристика "разделитель").

Характеристика "разделитель" указывает на теорему, выводящую следствие из нескольких численных уравнений для последующего разделения неизвестных.

Создается спецификация "тип(Сигнум)". Пример:

$\forall_{abcd}(a + b = 0 \ \& \ c + d = 0 \rightarrow ac - bd = 0)$

Проверяется, что a - произведение известного коэффициента на синус либо косинус суммы двух содержащих неизвестные, но не имеющих общей неизвестной выражений, а c - произведение известного коэффициента на синус либо косинус разности тех же самых выражений. После преобразования появляется возможность использовать формулу перехода от произведения тригонометрических функций к сумме и за счет этого разделить данные выражения.

G. Извлечение из нескольких численных уравнений явного выражения для неизвестной (характеристика "определитель").

Характеристика "определитель(x)" указывает на теорему, позволяющую усмотреть значение переменной x из нескольких уравнений.

Создается спецификация "тип(независят)", "неизвестная(x)". Пример:

$\forall_{abx}(0 < x + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - x \ \& \ \sin x = a \ \& \ c \cos x = b \rightarrow$
$x = \mathrm{Sg}(a) \arccos(b/c))$

Выражения a, b, c не содержат неизвестных, выражение x - содержит. При этом выражение x не содержит невырожденных числовых атомов.

H. Вывод следствия из численных уравнений, в котором неизвестные группируются под одной сложной операцией (характеристика "Группоид").

Характеристика "Группоид($i \ j$)" указывает на кванторную импликацию, выводящую следствие из двух утверждений, позволяющее применить тождество свертки после группировки неизвестных подвыражений. i, j - номера группируемых антецедентов.

Создается спецификация "тип(упрощвариант)", "антецедент(i)", "антецедент(j)". Пример:

$\forall_{abcdefghijk}(h = ba \ \& \ i = ea \ \& \ h \sin j \cos k + c = d \ \&$
$i \cos j \sin k + f = g \rightarrow abe \sin(j - k) + ce - fb = de - gb)$

Два последних антецедента идентифицируются с уравнениями, не имеющими невырожденных числовых атомов; два первых - выделены указателем "идентификатор". Выражения j, k содержат неизвестные.

(b) Вывод равенства старых объектов.

i. Вывод равенства старых объектов (характеристика "равно").

Характеристика "равно" указывает на равенство двух переменных либо конъюнкцию таких равенств.

Создается спецификация "тип(склейкаоперандов)". Пример:

$\forall_{mn}(\text{простое}(n)\ \&\ m|n\ \&\ \neg(m-1=0) \to m=n)$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками, третий - проверочным оператором.

ii. Вывод равенства старых объектов (характеристика "равны").

Характеристика "равны" указывает на равенство двух атомарных выражений.

Проверяется, что консеквент является равенством двух выражений, каждое из которых встречается в антецедентах. Создается спецификация "тип(склейкаоперандов)". Пример:

$\forall_{ABEFG}(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(EF)\ \&\ G \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$G \in \text{прямая}(EF) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(EF))$

(c) Вывод нечислового равенства.

i. Вывод нечислового равенства (характеристика "Равно").

Характеристика "Равно" указывает на нечисловое равенство.

Рассматриваются существенные антецеденты теоремы. Проверяется, что они содержат все параметры консеквента и что оценка их сложности не меньше оценки сложности консеквента. Отбрасывается случай, когда консеквент - равенство для набора координат. Затем создается спецификация "тип(тела)". Пример:

$\forall_{abc}(a = \text{обратныйпуть}(b)\ \&\ c = \text{конецпути}(a) \to \text{началопути}(b) = c)$

Здесь a, b - ориентированные кривые. Прием срабатывает без ограничений.

ii. Вывод нечислового равенства для текущего объекта (характеристика "текданные").

Характеристика "текданные(A)" указывает на нечислове тождество, дающее выражение для заданного объекта A.

Создается спецификация "тип(трассперечисл)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{fgmA}(f(n) = \text{алгстепень}(A, g, m)\ \&\ m = n \to \text{замыкание}(\{A\}, \{g\}) = \text{set}_x(\exists_n(n - \text{натуральное}\ \&\ x = f(n))))$

Спецификация - "тип(трассперечисл)", "терм($\text{set}_x(\exists_n(n-\text{натуральное}\ \&\ x = f(n))))$". Первый антецедент обрабатывается пакетным синтезатором, усматривающим, что объект $f(n)$ - результат m - кратного применения к объекту g бинарной ассоциативной операции A. Выводится следствие, что рассматриваемый класс значений $f(n)$ представляет собой алгебраическое замыкание одноэлементного множества $\{g\}$ относительно операции A.

iii. Вывод равенства, связывающего между собой атомарные нечисловые объекты.

A. Вывод равенства, выражающего текущий атомарный объект через другие старые атомарные объекты (характеристика "Атомарное").

   Характеристика "Атомарное(p)" указывает на тождество для атомарных выражений типа p.

   Проверяется, что теорема - равенство, в одной из частей которого находится атомарное выражение A типа p. Создается спецификация "тип(извлекается)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to$ вектор$(AB) = -$вектор(CD))

   Спецификация - "тип(извлекается)", "терм(вектор(AB))". Попытка применения приема инициируется усмотрением выражения "вектор(AB)".

B. Вывод равенства, выражающего текущий атомарный объект через атомарный объект "неизв" и известные атомарные объекты (характеристика "Атомарное").

   Пусть характеристика - "Атомарное(p)". Проверяется, что теорема - равенство, в одной из частей которого находится атомарное выражение A типа p. Создается спецификация "тип(провменьшеилиравно)", "указатель(контрольвывода(A))". Пример:

   $\forall_{ABC}$(актив(вектор(CB)) $\to$ вектор$(AC) =$ вектор$(AB) -$ вектор(CB))

   Спецификация - "тип(провменьшеилиравно)", "указатель(контрольвывода(вектор(AC)))". Среди рассматриваемых векторов один известен и один имеет тип "неизв".

C. Вывод равенства, связывающего текущий атомарный объект с определимыми атомарными объектами (характеристика "Атомарное").

   Пусть характеристика - "Атомарное(p)". Проверяется, что теорема - равенство, в одной из частей которого находится атомарное выражение A типа p. Создается спецификация "тип(гипкосинус)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(AD)) $\to$ вектор$(AC) =$ вектор$(AB) +$ вектор(AD))

   Спецификация - "тип(гипкосинус)", "терм(вектор(AC))". Векторы "вектор(AB)" и "вектор(AD)" имеют тип "определимо".

D. Вывод равенства, связывающего текущий атомарный объект с атомарным объектом "квазиактив" (характеристика "Атомарное").

   Пусть характеристика - "Атомарное(p)". Проверяется, что теорема - равенство, в одной из частей которого находится атомарное выражение A типа p. Создается спецификация "тип(блокчертежа)", "терм(A)". В качестве примера можно рассмотреть прием, теорема которого та же, что в предыдущем пункте. Спецификация -

"тип(блокчертежа)", "терм(вектор(AC))". Хотя бы один из векторов "вектор(AB)", "вектор(AD)" имеет тип "квазиактив".

E. Выражение одного нечислового атомарного объекта через другие нечисловые атомарные объекты (характеристика "Атомарное").

Пусть характеристика - "Атомарное(p)". Проверяется, что теорема - равенство, в одной из частей которого находится атомарное выражение A типа p. Создается спецификация "тип(остатокнабора)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCDEFG}(C = \text{проекция}(A, \text{плоскость}(EFG))\ \&\ D = \text{проекция}(B,$ $\text{плоскость}(EFG))\ \&\ \text{актив}(\text{вектор}(AB)) \to \text{вектор}(CD) =$ $\text{проекция}(\text{вектор}(AB), \text{плоскость}(EFG)))$

F. Выражение неизвестного нечислового атомарного объекта через его известные компоненты (характеристика "равны").

Характеристика "равны" указывает на равенство двух атомарных выражений.

Проверяется, что одна из частей равенства встречается в антецедентах, а другая - не встречается. Пусть первая из них - A, вторая - B. К антецедентам теоремы добавляется "актив(A)", а части консеквента переупорядочиваются так, чтобы B была слева. Затем создается спецификация "тип(выпуклмногоугольник)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCD}(\text{актив}(\text{прямая}(AB))\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)$ $\&\ \text{разныеточки}(C, D) \to \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(AB))$

Спецификация - "тип(выпуклмногоугольник)", "терм(прямая(AB))". Выражения C, D известны, а "прямая(AB)" - содержит неизвестные.

iv. Вывод равенства, дающего явное выражение для функциональной характеристики (характеристика "Функвых").

Характеристика "Функвых" указывает на тождество, дающее явное выражение для функциональной характеристики объекта.

Создается спецификация "тип(внимание)". Пример:

$\forall_{abAX}(\text{функраспред}(X, A) = \lambda_x(a(x), x - \text{число})\ \&\ b(x) = da(x)/dx \to$ $\text{плотнраспред}(X, A) = \lambda_x(b(x), x - \text{число}))$

v. Вывод равенства, позволяющего вычислить текущую функциональную характеристику (характеристика "функрасст").

Характеристика "функрасст" указывает на тождество, позволяющее вычислить функциональную характеристику объекта.

Создается спецификация "тип(конъюнктконтекст)". Пример:

$\forall_{ABfgh}(\text{плотнраспред}(A, B) = \lambda_t(f(t), h(t))\ \&\ g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx \to$ $\text{функраспред}(A, B) = \lambda_t(g(t), t - \text{число}))$

Попытка применения приема начинается с усмотрения в задаче подтерма "функраспред(A, B)". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, причем его правая часть не содержит неизвестных.

vi. Вывод равенства, выражающего неизвестную компоненту известного объекта через этот объект (характеристика "значениепеременной").

Характеристика "значениепеременной" указывает на тождество, у которого в одной части находится переменная, не входящая в противоположную часть.

Рассматривается переменная x, расположенная в одной из частей равенства, и создается спецификация "тип(убывает)", "неизвестная(x)". Пример:

$\forall_{abc}(c = a + bi \ \& \ a -$ число $\& \ b -$ число $\rightarrow b = Im(c))$

Спецификация - "тип(убывает)", "неизвестная(b)". Выражение c не содержит неизвестных, b - содержит.

vii. Вывод равенства, направленного на выражение неизвестных компонент известных объектов через эти объекты (характеристика "компонента").

Характеристика "компонента(A)" указывает на тождество, выражающее неизвестную компоненту A известного объекта через этот объект и другие его параметры.

Создается спецификация "тип(узелстатьи)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{abcA}(A = \{;a\} \ \& \ \{;b\} \subseteq \{;a\} \ \& \ \{;c\} = \{;a\} \setminus \{;b\} \rightarrow \{;b\} = A \setminus \{;c\})$

Спецификация - "тип(узелстатьи)", "терм(перечень(b))". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, причем выражение A не содержит неизвестных, а b содержит. Второй антецедент обрабатывается проверочным оператором, третий выделен указателем "идентификатор".

3. Вывод двуместного предиката, не являющегося равенством.

(a) Вывод двуместного отношения в задаче на исследование либо на доказательство (характеристика "отношение").

Характеристика "отношение" указывает на импликацию, выводящую отличный от равенства нечисловой двуместный предикат без новых объектов.

Проверяется, что теорема не имеет характеристики "транзитивно", причем если она имеет характеристику "транзитоперанд", то заголовком консеквента не служит отрицание. Тогда создается спецификация "тип(свертка)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in b \ \& \ b \subseteq c \rightarrow a \in c)$

(b) Вывод двуместного отношения в задаче на исследование либо на доказательство (характеристика "вывод").

Характеристика "вывод" указывает на простую импликацию, котороая может представлять интерес для создания приема вывода, не вводящего в рассмотрение новых сложных объектов.

Проверяется, что теорема не имеет характеристики "транзитивно", причем если она имеет характеристику "транзитоперанд", то заголовком консеквента не служит отрицание. Консеквент не является равенством и имеет два корневых операнда. Тогда создается спецификация "тип(свертка)". Пример:

$\forall_{abc}(c \in a \ \& \ \text{нижняягрань}(b,a) \to b \leq c)$

(c) Вывод двуместного отношения в задаче на описание, имеющей цель "пример" (характеристика "вывод").

Проверяется, что теорема не имеет характеристики "транзитивно", причем если она имеет характеристику "транзитоперанд", то заголовком консеквента не служит отрицание. Консеквент не является равенством и имеет два корневых операнда. Тогда создается спецификация "тип(сдвигоператоров)". Пример:

$\forall_{ab}(a \in b \ \& \ \text{нижняягрань}(a,b) \to \text{наименьший}(a,b))$

(d) Вывод двуместного отношения, связывающего неизвестный объект задачи на исследование с известным (характеристика "бинарноеотношение").

Характеристика "бинарноеотношение(x)" указывает на импликацию для вывода двуместного отношения, свяывающего неизвестный объект x с известным.

Создается спецификация "тип(расширениепосылок)", "неизвестная(x)". Пример:

$\forall_{fmnpyzA}(\text{Min}(f, \{f, \ldots, n\}, y, z) \ \& \ f = \lambda_x(p(x), A(x)) \ \& \ \forall_i(i \in \{m, \ldots, n\} \to A(i)) \to y \subseteq \text{set}_i(i \in \{m, \ldots, n\} \ \& \ (i = m \ \vee \ p(i) - p(i-1) \leq 0) \ \& \ (i = n \ \vee \ p(i) - p(i+1) \leq 0)))$

Спецификация - "тип(расширениепосылок)", "неизвестная(y)". Выражения m, n, p не содержат неизвестных, выражение y - содержит. Первые два антецедента идентифицируются с утверждениями из контекста, истинность третьего усматривается при помощи задачи на доказательство.

(e) Вывод нечислового двуместного предиката, характеризующего текущий объект (характеристика "свойства").

Характеристика "свойства(P)" указывает на простую импликацию, выражающую свойства "сложного" объекта P.

Создается спецификация "тип(стандтерм)", "терм(P)". Пример:

$\forall_{afA}(a \in A \to f(a) \in \text{образ}(f, A))$

Спецификация - "тип(стандтерм)", "терм(образ(f, A))".

(f) Вывод неравенства.

i. Вывод неравенства для невырожденных числовых атомов (характеристика "числоценка").

   Характеристика "числоценка" указывает на простую импликацию, дающую неравенство для невырожденных числовых атомов.

   Создается спецификация "тип(элемент)". Пример:

   $\forall_{ABCD}(\text{ромб}(ABCD)\ \&\ \angle(BAD) < \pi/2 \rightarrow \pi/2 < \angle(ABC))$

ii. Вывод неравенства для текущего невырожденного числового атома (характеристика "числоценка").

   Проверяется, что консеквент содержит единственный невырожденный числовой атом t. Создается спецификация "тип(нок)", "терм(t)". Пример:

   $\forall_{aK}(\text{вправо}(a, K) \rightarrow 0 \leq \text{крд}(a, K, 1))$

   Спецификация - "тип(нок)", "терм(крд($a, K, 1$))".

iii. Вывод неравенства для численных параметров при контроле разбора случаев (характеристика "менее").

   Характеристика "менее" указывает на импликацию, выводящую неравенство для численных параметров при контроле подслучаев.

   Создается спецификация "тип(вхождениевзадачу)". Пример:

   $\forall_{ab}(\cos b = a\ \&\ 0 \leq b\ \&\ 0 < \pi/2 - b \rightarrow 0 < a)$

iv. Вывод неравенства для численных параметров в задаче на исследование, имеющей цель "известно" (характеристика "меньше").

   Характеристика "меньше" указывает на вывод неравенства для численных параметров в задаче на исследование, имеющей цель "известно".

   Создается спецификация "тип(утверждения)". Пример:

   $\forall_{abcd}(ab/d = c\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 \leq c\ \&\ 0 < d \rightarrow 0 \leq a)$

   Первый антецедент идентифицируется с посылкой, остальные обрабатываются проверочными операторами. Переменная a - неизвестная.

v. Вывод неравенства для численных неизвестных в задаче на исследование, не имеющей цели "известно" (характеристика "меньшеилиравно").

   Характеристика "меньшеилиравно" указывает на вывод неравенства для численных параметров в задаче на исследование, не имеющей цели "известно".

   Создается спецификация "тип(внутрпосылка)". Пример:

   $\forall_{abcdex}(d = b^2 - 4a(c - e)\ \&\ ax^2 + bx + c = e \rightarrow 0 \leq d)$

   Второй антецедент идентифицируется с посылкой, первый - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором раскрывания скобок, а при наличии тригонометрических операций с неизвестными - нормализатором разложения на множители. Выражения d, x содержат неизвестные.

vi. Вывод неравенства для выражения с известными численными параметрами нечисловых объектов (характеристика "числоценка").

Характеристика "числоценка" указывает на простую импликацию, дающую неравенство для невырожденных числовых атомов.

Создается спецификация "тип(корни)". Пример:

$\forall_{ABCd}(\angle(ABC) = d$ & разныепрямые(прямая(AB), прямая(BC)) $\rightarrow 0 < d$ & $0 < \pi - d)$

Выражение d неконстантное и не содержит неизвестных.

4. Вывод многоместного отношения.

(a) Вывод многоместного отношения (характеристика "вывод").

Характеристика "вывод" указывает на простую импликацию, котороая может представлять интерес для создания приема вывода, не вводящего в рассмотрение новых сложных объектов.

Проверяется, что консеквент имеет более двух корневых операндов и что теорема не имеет характеристики с заголовком "варопер". Тогда создается спецификация "тип(унификация)". Пример:

$\forall_{ABCDE}$(окружность(DE) вписана в фигура(ABC) $\rightarrow$ биссектриса($BACD$))

(b) Вывод многоместного отношения, характеризующего текущий объект (характеристика "объект").

Характеристика "объект(A)" указывает на вывод многоместного отношения, характеризующего объект A.

Создается спецификация "тип(клавиатураоператора)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCD}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(BC) & прямая(AB) $\|$ прямая(CD) & прямая(BC) $\|$ прямая(AD) $\rightarrow$ прямоугольник($ABCD$))

5. Вывод условия, однозначно определяющего неизвестный объект через известные объекты, но не являющегося равенством (характеристика "опред").

Характеристика "опред(x)" указывает на кванторную импликацию, используемую для идентификации объекта x в задаче на построение.

Создается спецификация "тип(отрицаниеквантора)", "переменная(x)". Пример:

$\forall_{ABCDE}$(актив(прямая(AB)) & актив(прямая(CD)) & $E \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(CD) & разныепрямые(прямая(AB), прямая(CD)) & E – точка $\rightarrow$ $E \in$ прямая(AB) $\cap$ прямая(CD))

Спецификация - "тип(отрицаниеквантора)", "переменная(E)". Выражения для прямых AB и CD не содержат неизвестных, переменная E - неизвестная.

6. Вывод следствия нескольких посылок задачи на исследование, подготавливающий декомпозицию относительно неизвестных (характеристика "Разложмн").

   Характеристика "Разложмн($i_1 \dots i_n$)" указывает на импликацию для вывода следствия в посылках задачи на исследование, обеспечивающего декомпозицию относительно неизвестных. $i_1, \dots, i_n$ - список номеров антецедентов, идентифицируемых с посылками. Сопровождается характеристикой "оператор(P)", указывающей на используемый приемом нормализатор.

   В характеристиках теоремы находится элемент "оператор(P)". Создается спецификация "тип(цель)", "антецедент($i_1 \dots i_n$)", "оператор(P)". Пример:

   $\forall_{abcde}(a + c = e \ \& \ a = b \ \& \ c = d \to e = b + d)$

   Спецификация - "тип(цель)", "антецедент(2 3)", "оператор(видумножение)". Второй и третий антецеденты идентифицируются с уравнениями, правые части которых суть целочисленные константы с ненулевой суммой. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его левая часть - сумма левых частей уравнений - обрабатывается нормализатором разложения на множители. Проверяется, что результат представим как произведение двух целочисленных выражений, содержащих неизвестные.

7. Вывод отрицания равенства (характеристика "вывод").

   Характеристика "вывод" указывает на простую импликацию, котороая может представлять интерес для создания приема вывода, не вводящего в рассмотрение новых сложных объектов.

   Проверяется, что консеквент - отрицание равенства, и создается спецификация "тип(первыйсимвол)". Пример:

   $\forall_{BCEFG}$(окружность(BC)вписана в Угол(EFG) $\to \neg$(прямая(FE) $=$ прямая(FG)))

8. Вывод в посылках задачи на доказательство.

   (a) Вывод в посылках задачи на доказательство либо задачи на исследование, имеющей цель "противоречие", ориентированной на исключение переменной (характеристика "исключзадачи").

   Характеристика "исключзадачи(x)" указывает на импликацию для вывода в посылках задачи на доказательство, ориентированный на исключение заданной переменной x.

   Создается спецификация "тип(объединение)", "переменная(x)". Пример:

   $\forall_{abcdx}(0 < a \ \& \ c < 0 \ \& \ 0 < ax + b \ \& \ 0 < cx + d \to 0 < ad - bc)$

   Спецификация - "тип(объединение)", "переменная(x)". Два последних антецедента идентифицируются с посылками. Выражения a, b, c, d не содержат некоторой переменной, входящей в x. В случае задачи на доказательство эта переменная не встречается в условии.

(b) Вывод в посылках задачи на доказательство с ограничениями на сложность выводимого утверждения (характеристика "Вывод").

Характеристика "Вывод" указывает на импликацию для вывода следствий в посылках задачи на доказательство.

Создается спецификация "тип(квадрат)". Пример:

$\forall_{abc}(0 < a + b \ \& \ 0 \leq c - b \rightarrow 0 < a + c)$

Хотя бы одно из выражений a, c имеет для каждого своего слагаемого подобный член в другом из этих выражений. Выражение b неконстантное.

(c) Вывод в посылках задачи на доказательство утверждения, содержащего выражение из условия задачи (характеристика "выводусловия").

Характеристика "выводусловия(t)" указывает на вывод следствия в посылках задачи на доказательство, содержащего заданное выражение t из условия.

Создается спецификация "тип(следузел)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{abf}(x \in a \ \& \ \text{образ}(f, a) \subseteq b \rightarrow f(x) \in b)$

Спецификация - "тип(следузел)", "терм($f(x)$)".

(d) Вывод равенства для объекта, упоминаемого в текущем подтерме условия задачи на доказательство (характеристика "равнтекст").

Характеристика "равнтекст(t)" указывает на вывод в посылках задачи на доказательство для сближения с текущим подвыражением t условия этой задачи.

Создается спецификация "тип(Минимум)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{fpqAB}(\text{группоид}(A) \ \& \ \text{группоид}(B) \ \& \ \text{гомоморфизм}(f, A, B) \ \&$
$p \in \text{носитель}(A) \ \& \ q \in \text{носитель}(A) \rightarrow f(\text{операция}(A)(p, q)) =$
$\text{операция}(B)(f(p), f(q)))$

Спецификация - "тип(Минимум)", "терм(операция(B)($f(p), f(q)$))". Отличие от предыдущего типа приема заключается в том, что здесь используется указатель "контрольвывода".

(e) Вывод в посылках задачи на доказательство, ориентированный на сближение с выражениями ее условия (характеристика "ближе").

Характеристика "ближе" указывает на вывод в посылках задачи на доказательство, ориентированный на сближение с подвыражением ее условия.

Создается спецификация "тип(вводтерма)". Пример:

$\forall_{abc}(0 \leq a^2 + b^2 - c \ \& \ 0 \leq a + b \ \& \ 0 \leq c \rightarrow 0 \leq a + b - \sqrt{c})$

Выражение c константное. В условии встречается сумма, имеющая своими слагаемыми натуральные (быть может, вырожденные) степени выражений a, b.

(f) Вывод в задаче на доказательство, ориентированный на сближение с текущим подвыражением условия (характеристика "равнтекст").

Пусть характеристика - "равнтекст(t)" (см. выше). Тогда создается спецификация "тип(грань)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{abcfG}$(группа(G) & $f =$ операция(G) & $c =$ обрэлемент(a, f) $\rightarrow$ $f(a, b, c,$ обрэлемент$(b, f)) \in$ коммутант(G))

Спецификация - "тип(грань)", "терм($f(a, b, c)$)". Прием использует указатель "контрольвывода". Попытка применения его инициируется усмотрением в условии задачи на доказательство подвыражения $f(a, b, c)$.

(g) Вывод из кванторной посылки задачи на доказательство утверждения с новым описателем, содержащего выражение, уже встречающееся в других посылках (характеристика "функвых").

Характеристика "функвых(t)" указывает на теорему, в которой из кванторной импликации для значения функции выводится соотношение, связывающее некоторый описатель с выражением t, встречающимся в задаче.

Создается спецификация "тип(пусто)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{Abf}(\forall_x(A(x) \rightarrow f(x) = b) \rightarrow \mathrm{set}_x(A(x)\ \&\ x \in \mathrm{Dom}(f)) \subseteq$ слой$(f, b))$

Антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство. Проверяется, что выражение "слой(f, b)" уже встречается в посылках.

(h) Вывод результата группировки в левой части двуместного отношения всех ненулевых членов и обработки этой части нормализатором стандартной формы (характеристика "стандоператор").

Характеристика "стандоператор(A)" указывает на теорему для вывода результата группировки в левой части всех членов двуместного отношения и обработки его нормализатором стандартной формы A.

Создается спецификация "тип(контрольтитра)", "оператор(A)". Пример:

$\forall_{abcdepq}(p = a(b + c)^d + e - q\ \&\ a(b + c)^d + e = q \rightarrow p = 0)$

Второй антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство. Натуральный показатель степени d не превосходит 4. Первый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором стандартной формы "стандплюс".

(i) Вывод результата развертки - свертки кванторной импликации, возникающей при расшифровке по определению посылки задачи на доказательство (характеристика "имп").

Характеристика "имп" указывает на теорему для вывода результата развертки - свертки кванторной импликации, возникающей при расшифровке по определению посылки задачи на доказательство.

Создается спецификация "тип(вариант)". Пример:

$\forall_{afA}$(группа(A) & $f =$ операция(A) & подгруппа(a, A) & $\forall_{xy}(x \in a\ \&$ $y \in a \rightarrow f(x, y) \in a) = b \rightarrow b)$

Третий антецедент идентифицируется с посылкой задачи на доказательство. Четвертый антецедент выделен указателем "идентификатор". Его правая часть сначала обрабатывается задачей на преобразование с целью "развертка", а затем - задачей на преобразование с целью "свертка". Проверяется, что результат b не содержит кванторов.

(j) Вывод при доказательстве шага индукции (характеристика "инд").

Характеристика "инд" указывает на вывод при доказательстве шага индукции.

Создается спецификация "тип(справочник)". Пример:

$\forall_{abcdpqem}(0 < a \,\&\, 0 < c \,\&\, 0 < c - a \,\&\, 0 < d \,\&\, e - a - m + c = 0 \,\&$
$0 < m - c \,\&\, 0 < pa^b + qc^d \,\&\, q < 0 \to 0 < pa^{b-d}e^d + qm^d)$

Указатель "контрольвывода" инициирует применение приема при усмотрении в условии задачи на доказательство подтерма вида "$re^g + sm^h$". Предпоследний антецедент идентифицируется с посылкой задачи, выделенной комментарием "целое i" как индуктивное предположение при доказательстве индукцией по параметру i. Переменная i входит в каждое из выражений b, d, g, h и не входит в $b - d$. Пятый антецедент выделен указателем "идентификатор".

Вывод группы отношений

1. Вывод группы элементарных утверждений в задаче на доказательство либо на исследование (характеристика "конъюнкция").

Характеристика "конъюнкция" указывает на кванторную импликацию с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции элементарных утверждений.

Проверяется отсутствие характеристик "равнчисл", "нормкрд", и создается спецификация "тип(второйоперанд)". Пример:

$\forall_{ABCDEF}$(внешкасательная(отрезок(EF), окружность(AB), окружность(CD)) $\to$ отрезок(EF) – касательная к окружность(AB) & отрезок(EF) – касательная к окружность(CD) & однасторона(A, C, прямая(EF)) & актив(прямая(AC)))

2. Вывод серии утверждений, определяемых элементами набора (характеристика "квантор").

Характеристика "квантор" указывает на теорему для усмотрения истинности либо ложности кванторной импликации.

Проверяется, что консеквент - кванторная импликация K с единственной связанной переменной i и единственным антецедентом вида $i \in \{1, \ldots, n\}$, где n - переменная. Среди антецедентов теоремы находятся утверждения "слово(a)" и "$l(a) = n$". Тогда создается спецификация "тип(термузла)", "набор(a, n)". Пример:

$\forall_{Exn}(E - \mathrm{set} \,\&\, x -$ слово $\&\, l(x) = n \,\&\, E$ описана около фигура$(x) \to$
$\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to x(i) \in E))$

3. Вывод группы элементарных утверждений в задаче на исследование, ограничивающих значения неизвестной конечным множеством вариантов (характеристика "конечно").

   Характеристика "конечно" указывает на вывод группы посылок задачи на исследование, ограничивающих значения неизвестных конечным множеством вариантов.

   Создается спецификация "тип(переменные)". Пример:

   $\forall_{GH}(\text{подгруппа}(H, \text{перестановки}(n))\ \&\ \{;b\} = \text{set}_y(\text{перестановка}(y, \{1, \ldots, n\})) \to \text{носитель}(\text{перестановки}(n)) = \{;b\}\ \&\ H \subseteq \{;b\})$

   Переменная n идентифицируется с натуральной константой, не превосходящей 4. Выражение H содержит неизвестные. Правая часть второго антецедента выделена указателем "развертка". В ней перечисляются все перестановки размера n.

4. Упрощающий вывод группы утверждений в посылках задачи на доказательство (характеристика "следствия").

   Характеристика "следствия" указывает на упрощающий вывод группы утверждений в посылках задачи на доказательство.

   Создается спецификация "тип(Приведение)". Пример:

   $\forall_{ab}(0 \leq a^2 - b^2\ \&\ 0 \leq a \to 0 \leq a - b\ \&\ 0 \leq a + b)$

   Прием эквивалентной замены в данной ситуации мог бы привести к усложнению работы с имеющимися в других частях задачи выражениями a^2, b^2.

5. Вывод группы равенств для числовых атомов (характеристика "равнчисл").

   Характеристика "равнчисл" указывает на кванторную импликацию с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции равенств для невырожденных числовых атомов.

   Создается спецификация "тип(оценкатерма)". Пример:

   $\forall_{ABCD}(\text{биссектриса}(BACD) \to \angle(CAD) = \angle(DAB)\ \&\ \angle(BAC) = 2\angle(CAD))$

6. Использование текущего известного числового атома для составления системы численных уравнений (характеристика "теквхожд").

   Характеристика "теквхожд(A)" указывает на теорему, созданную для использования текущего числового атома A при составлении системы численных уравнений.

   Создается спецификация "тип(неизвоценки)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{ABKabcdmnp}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{Вектор}(B)\ \&\ \text{оруголмежду}(A, B, K) = p\ \&\ m\cdot\text{длина}(A) = n\cdot\text{длина}(B)\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \to m(a\cos p - b\sin p) = cn\ \&\ m(a\sin p + b\cos p) = dn)$

Спецификация - "тип(неизвоценки)", "терм(оруголмежду(A, B, K))". Антецеденты вычисляют при помощи нормализаторов и синтезаторов численные выражения a, b, c, d, m, n, p. При этом p не содержит неизвестных.

Ввод в рассмотрение нового объекта

1. Ввод вспомогательного параметра (характеристика "параметр").

   Характеристика "параметр(F)" указывает на тождество для ввода вспомогательного параметра. F - список уточняющих контекст фильтров. Если вспомогательный параметр вводится для текущего выражения, то в начале списка F помещается терм "контрольвывода(A)". Если A в этом терме отсутствует, то по умолчанию привязка происходит по обозначаемому выражению.

   Создается спецификация "тип(коммутативно)", "см(F)". Если в F встречается терм "контрольвывода(A)", то он оттуда удаляется, а к спецификации добавляется терм "указатель(контрольвывода(A))". Пример:

   $\forall_{abcxAB}(axl(AB) = b \to c = l(AB))$

   Соответствующий прием усматривает равенство с численной неизвестной x, не входящей в прочие уравнения задачи на исследование, имеющей цель "известно". Выражение b содержит какое-либо расстояние. Тогда для обозначения $l(AB)$ создается вспомогательный параметр c, который временно будет рассматриваться как известный.

2. Ввод вспомогательной неизвестной.

   (a) Ввод вспомогательной неизвестной (характеристика "вспомнеизвестная")

   Характеристика "вспомнеизвестная(n)" указывает на тождество для ввода вспомогательной неизвестной. n - указатель на выбор обозначаемого объекта: 1 - через равенство в консеквенте, 2 - через указатель "контрольвывода".

   Проверяется, что $n = 2$, и создается указатель "тип(эквивалентно)". Пример:

   $\forall_{ABa}(\text{актив}(\text{окружность}(AB) \to l(AB) = a \ \& \ a - \text{число})$

   Прием проверяет, что в задаче выделено расстояние от A до некоторой точки, не связанной с окружностью, причем это расстояние имеет тип "неизв". Тогда вводится обозначение для радиуса окружности, регистрируемое как вспомогательная неизвестная. Таким образом ставится "подцель" на вычисление этого радиуса.

   (b) Ввод вспомогательной неизвестной для текущего объекта (характеристика "вспомнеизвестная").

   Пусть имеется характеристика "вспомнеизвестная(1)". Тогда создается спецификация "тип(удалениепосылок)". Пример:

   $\forall_{ABCa}(\angle(ABC) = a \ \& \ a - \text{число})$

Прием срабатывает при усмотрении в задаче на исследование уравнения, содержащего более одного вхождения угла $\angle(ABC)$ и не имеющего неизвестных вне этих вхождений. Вводится новая численная неизвестная a. После того, как уравнение переформулируется через a, оно будет решаться вспомогательной задачей на описание.

3. Ввод вспомогательных объектов (характеристика "допконтекст").

   Характеристика "допконтекст" указывает на кванторную импликацию, консеквент которой - квантор существования от конъюнкции элементарных утверждений.

   Проверяется, что связывающая приставка консеквента не пересекается с параметрами антецедентов. Затем квантор существования в консеквенте отбрасывается (его связанные переменные добавляются к общей кванторной приставке теоремы). Полученная теорема приема сопровождается спецификацией "тип(Минус)". Пример:

   $\forall_{ABCDEFG}$(биссектриса$(BACD)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) &
   $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая$(AC) \rightarrow G -$ точка & $G \in$ отрезок(EF) &
   $G \in$ прямая$(AD))$

   Прием вводит в рассмотрение точку G пересечения биссектрисы с прямой, которая ей перпендикулярна, и замечает, что эта точка находится на отрезке между сторонами угла.

4. Ввод вспомогательных обозначений.

   (a) Ввод вспомогательного обозначения для текущего подвыражения (протокол "обозначение").

   Протокол "обозначение$(t\ F)$" указывает условие F на контекст, в котором целесообразен ввод вспомогательного обозначения для выражения t.

   Выбирается не входящая в протокол переменная x. Создается импликация "$\forall_x(t = x)$". Она сопровождается спецификацией "тип(нормтаблица)", "см(F)". Пример:

   По протоколу "обозначение(операция(x1) и(тип(доказать)контекст(посылка(x2)вид(x2 группа(x1)))))" создается теорема приема

   $\forall_{fG}$(операция$(G) = f)$.

   Инициализация применения приема происходит при усмотрении в задаче выражения "операция(G)". Проверяется наличие посылки "группа(G)".

   (b) Ввод вспомогательного обозначения для вычисления по индукции (протокол "обознач").

   Протокол "обознач$(t\ K\ F)$" указывает на условия, при которых вводится новая функциональная переменная для вычисления по индукции (т.е. для вывода рекуррентного соотношения). t - обозначаемое выражение, K

- конъюнкция условий на параметры выражения t, от которых будет зависеть обозначающая функциональная переменная. Эти условия содержат только данные параметры. F - условия на контекст, в котором целесообразен ввод функционального вспомогательного обозначения для t.

Пусть $K_1, \ldots, K_n$ - все конъюнктивные члены утверждения K; $x_1, \ldots, x_m$ - все их параметры. Выбирается переменная f, не входящая в протокол. Рассматривается кванторная импликация Q вида $\forall_{x_1 \ldots x_m}(K_1 \ \& \ \ldots \ \& \ K_n \rightarrow t = f(x_1 \ldots x_m))$. По ней создается другая кванторная импликация Q' без антецедентов и с консеквентом Q. Квантор общности берется по всем параметром утверждения Q. Теорема приема Q' сопровождается спецификацией "тип(чтениечертежа)", "см(F)". Пример:

$\forall_{abAB}(\forall_n(n -$ натуральное $\rightarrow \det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1, \ldots, an+b\} \ \&$
$j \in \{1, \ldots, an+b\})) = B(n)))$

Прием вводит обозначение $B(n)$ для вычисляемого рекурсивным образом определителя $an + b$ - го порядка.

Регистрация объекта в активе

1. Регистрация рассматриваемого объекта в активе (протокол "актив").

   Протокол "актив(A)" указывает на режим ввода посылки "актив(A)" при обнаружении в задаче выражения A.

   Находится список $x_1, \ldots, x_k$ параметров терма A, и создается кванторная импликация "$\forall_{x_1 \ldots x_k}$актив(A)". Она сопровождается спецификацией "тип(занесениепосылки)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{AB}$(актив(прямая(AB)))

   Спецификация - "тип(занесениепосылки)", "терм(прямая(AB))".

2. Регистрация в активе нового объекта (характеристика "актив").

   Характеристика "актив(F)" указывает на импликацию, консеквент которой представляет собой конъюнкцию термов "актив(...)". Ее использование означает ввод новых объектов. F - список уточняющих контекст фильтров. При отсутствии таких фильтров вместо "актив(F)" берется характеристика "актив". Если инициализация ввода объектов осуществляется текущим выражением A, то в начале списка F помещается терм "контрольвывода(A)".

   Проверяется, что F не начинается с терма "контрольвывода(...)", после чего создается спецификация "тип(Контрользамены)", "см(F)". Пример:

   $\forall_{ABC}$(актив($\angle(ABC)$) $\rightarrow$ актив(прямая(AB)))

   В данном примере фильтры F отсутствуют.

3. Регистрация в активе нового объекта, связанного с текущим подтермом (характеристика "актив").

   Пусть характеристика - "актив(F)", причем F начинается с терма "контрольвывода(A)". Тогда создается спецификация "тип(измпозиции)", "см(F')", "указатель(контрольвывода(A))", где F' получается из F отбрасыванием первого элемента. Пример:

   $\forall_{AB}$(актив(окружность(AB)))

   Спецификация - "тип(измпозиции)", указатель(контрольвывода(круг(AB)))".

Вывод дизъюнкции для разбора случаев

1. Разбор случаев в посылках (характеристика "дизъюнкция").

   Характеристика "дизъюнкция" указывает на кванторную импликацию, у которой консеквент имеет вид дизъюнкции.

   Создается спецификация "тип(проверка)". Пример:

   $\forall_{ABC}$(актив($l(AB)$) & актив($l(AC)$) & актив($l(BC)$) & $B \in$ прямая$(AC) \rightarrow$
   $b \in$ отрезок(AC) $\vee$ $C \in$ отрезок(AB) $\vee$ $A \in$ отрезок(BC))

   Одно из расстояний имеет тип "неизв", одно - известно, а третье уже рассматривается в задаче.

2. Разбор случаев в посылках (характеристика "выписка").

   Характеристика "выписка(t)" либо "выписка" указывает на импликацию с квантором существования в консеквенте, разворачиваемым в конечную дизъюнкцию для разбора случаев. Если указано t, то оно определяет терм инициализации приема.

   Проверяется отсутствие t и создается спецификация "тип(проверка)". Пример:

   $\forall_{akmn}(k -$ целое & $m -$ целое & $a = k + m + 1$ & $0 < a$ & $0 \leq n + m$ &
   $0 \leq k - n$ & $n -$ целое $\rightarrow \exists_b(b \in \{0, \ldots, a-1\}$ & $n = -m + b))$

   Три последних антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование. Выражение n - переменная. Третий антецедент выделен указателем "идентификатор" и вычисляет a. Проверяется, что a - десятичная константа, меньшая 10.

3. Разбор случаев в посылках задачи на доказательство, связанный с рассмотрением текущего подвыражения ее условия (характеристика "выписка").

   Проверяется, что характеристика имеет вид "выписка(t)", и создается спецификация "тип(конъюнктчлен)", "терм(t)". Пример:

   $\forall_{pmx}(p|m \rightarrow \exists_i(i \in \{0, \ldots, p-1\}$ & $\exists_y(x = py + i$ & $y -$ целое$)))$

Спецификация - "тип(конъюнктчлен)", "терм($mc|d$)". Переменная m идентифицируется с целочисленной константой. x - переменная, входящая в выражение d. Антецедент выделен указателем "программа" и перечисляет простые делители p числа m.

4. Разбор случаев в посылках задачи на доказательство, связанный с рассмотрением текущего подвыражения ее условия (характеристика "альтоперанды").

   Характеристика "альтоперанды(t)" указывает на теорему приема, выводящую дизъюнкцию для разбора случаев при усмотрении подвыражения t.

   Создается спецификация "тип(конъюнктчлен)", "терм(t)". Пример:

   $\forall_b(0 < b \ \vee \ b < 0 \vee = b = 0)$

   Спецификация - "тип(конъюнктчлен)", "терм($ab + c$)". Выражение $ab + c$ является одной из частей неравенства - условия задачи на доказательство, которую предполагается решать путем дифференцирования трансцендентного выражения a по некоторому параметру x. Перед дифференцированием предпринимается разбор случаев по знаку "алгебраического" относительно x множителя b.

5. Разбор случаев в посылках задачи на доказательство, связанный с рассмотрением текущего подвыражения ее условия (характеристика "Случай").

   Характеристика "Случай(t)" указывает на импликацию для разбора случаев с целью исключения сложного подвыражения t.

   Проверяется, что выражение t не встречается в антецедентах, и создается спецификация "тип(конъюнктчлен)", "терм(t)". Пример:

   $\forall_a(a \leq 0 \ \vee \ 0 < a)$

   Спецификация - "тип(конъюнктчлен)", "терм($|a|$)".

6. Разбор случаев в посылках задачи на преобразование, связанный с рассмотрением текущего подвыражения ее условия (характеристика "Случай").

   Пусть характеристика - "Случай(t)".

   Проверяется, что выражение t не встречается в антецедентах, и создается спецификация "тип(внешантецедент)", "терм(t)". Пример:

   $\forall_a(a \leq 0 \ \vee \ 0 < a)$

   Спецификация - "тип(внешантецедент)", "терм($|a|$)".

7. Разбор случаев в посылках для связи числового атома "неизв" с известным числовым атомом (характеристика "числнабор").

   Характеристика "числнабор(t)" указывает на импликацию с дизъюнкцией в консеквенте, определяющую разбор случаев для явного выражения числового атома t через другой атом.

Создается спецификация "тип(сборкамногочлена)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ABCD}$(актив($\angle(ABD)$) & актив($\angle(ABC)$) & $C \in$ прямая(BD) $\to$
$B \in$ отрезок(DC) & $\angle(ABD) = \pi - \angle(ABC)$ $\vee$ точкалуча(B, D, C) & $\angle(ABD) = \angle(ABC)$)

Угол ABC известен, угол ABD имеет тип "неизв".

Контроль противоречивости при разборе случаев

1. Усмотрение противоречия в посылках задачи на исследование, возникшей при разборе случаев (характеристика "контроль").

   Характеристика "контроль" указывает на кванторную импликацию с консеквентом "ложь", используемую для усмотрения нереализуемых подслучаев.

   Создается спецификация "тип(известны)". Пример:

   $\forall_{ABa}(l(AB) = a$ & $a < 0 \to$ ложь)

2. Усмотрение противоречия в посылках задачи на доказательство, возникшей при разборе случаев (характеристика "контроль").

   Создается спецификация "тип(одз)". Пример:

   $\forall_{AB}$(A – точка & B – точка & $A = B$ & разныеточки(A, B) $\to$ ложь)

   Первые три антецедента идентифицируются с посылками, причем A, B - переменнные. Последний антецедент обрабатывается проверочным оператором. Задача на доказательство имеет комментарий "ложь". Прием нужен для того, чтобы в случае условия "ложь" задачи на доказательство усматривать противоречивость посылок до выдачи отказа. Поэтому уровень срабатывания его равен 0.

3. Усмотрение вырожденной ситуации в посылках задачи на исследование, возникшей при разборе случаев (характеристика "идентзадачи").

   Характеристика "идентзадачи" указывает на теорему приема, усматривающего совпадение параметров при контроле противоречивости подслучая.

   Создается спецификация "тип(достижимо)". Пример:

   $\forall_{ABCDabcde}(0 < a$ & $0 < c$ & $0 < d$ & $0 < e$ & $al(AB)/c = -dl(CD)/e \to$
   $A = B$ & $C = D)$

   Последний антецедент идентифицируется с посылкой задачи на исследование, имеющей цель "контроль". Остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

Вывод утверждения существования

1. Вывод утверждения существования (характеристика "допконтекст").

   Характеристика "допконтекст" указывает на кванторную импликацию, консеквент которой - квантор существования от конъюнкции элементарных утверждений.

   Проверяется, что среди самых сложных подвыражений консеквента существует такое, заголовок которого не встречается среди самых сложных подвыражений антецедентов. Затем создается спецификация "тип(продолжение)". Пример:

   $\forall_a(\text{огрснизу}(a) \to \exists_b(\text{нижняягрань}(b, a)))$

2. Вывод утверждения существования (характеристика "существует").

   Характеристика "существует(i)" указывает на кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, которую можно применять для вывода следствий в посылках задачи на доказательство, с привязкой по i -му антецеденту.

   Проверяется отсутствие характеристики "допконтекст", и создается спецификация "тип(продолжение", "антецедент(i)". Пример:

   $\forall_{abc}(\text{последовательность}(a, b)\ \&\ \text{подпоследовательность}(c, a) \to \exists_d(\text{последовательность}(d, \mathbb{N})\ \&\ \text{возрастает}(d, \mathbb{N})\ \&\ \forall_i(i - \text{натуральное} \to c(i) = a(d(i)))))$

   Спецификация - "тип(продолжение", "антецедент(2)".

Вывод кванторной импликации

1. Вывод кванторной импликации, определяющей значения серии невырожденных числовых атомов (характеристика "имплик").

   Характеристика "имплик" указывает на кванторную импликацию, консеквентом которой служит кванторное тождество, выражающее невырожденный числовой атом через численные параметры.

   Создается спецификация "тип(решить)". Пример:

   $\forall_{AQnp}(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{услвероятн}(A(i), \bigcap_{j=1}^{i-1} A(j), Q) = p(i)) \to \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to \text{вероятность}(A(i), Q) = \prod_{j=1}^{i} p(j)))$

2. Вывод кванторного тождества с целью преобразования его в рекуррентное соотношение (характеристика "тождвывод").

   Характеристика "тождвывод" указывает на теорему, выводящую кванторное тождество для преобразования его в рекуррентное соотношение.

   Создается спецификация "тип(уровень)". Пример:

$\forall_{ABCabm}(\forall_n(n$—натуральное $\to \det(\lambda_{ij}(A(i,j), i \in \{1,\ldots,an{+}b\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,an{+}b\})) = B(n))\ \&\ \mathrm{set}_i(i \in \{1,\ldots,an+b\}\ \&\ \neg(A(1,i)=0)) = \{;C\}\ \&\ l(C) = m \to \forall_n(n$ – натуральное $\&\ 2 \le n \to B(n) = \sum_{k=1}^{m}(A(1,C(k))(-1)^{C(k)+1}\det(\lambda_{ij}((A(i+1,j)$ при $j < C(k),$ иначе $A(i{+}1,j{+}1)), i \in \{1,\ldots,an{+}b\}\ \&\ j \in \{1,\ldots,an{+}b\})))))$

Прием имеет заголовок "вывод" и применяется в посылках задачи на преобразование. Первый антецедент идентифицируется с посылкой. Переменные a, m идентифицируются с натуральными константами, b - с целочисленной константой. Второй и третий антецеденты выделены указателем "идентификатор". Предполагается, что после применения приема удастся выразить определитель в общем члене суммы через B.

3. Вывод обобщения кванторной импликации (характеристика "обобщ").

Характеристика "обобщ" указывает на теорему для вывода обобщения кванторной импликации.

Создается спецификация "тип(новый)". Пример:

$\forall_f(0 \le f(n)\ \&\ \forall_{mn}(m$ – натуральное $\&\ n$ – натуральное $\to f(m+n) \le f(m) + f(n)) \to \forall_{mn}(m$ – натуральное $\&\ n$ – натуральное $\to f(m) \le [m/n]f(n) + (0$ при $m|n,$ иначе $f(m(\mathrm{mod}\ n)))))$

Прием применяетя в посылках задачи на описание, имеющей цель "длялюбого".

Вывод при специальных целевых установках

1. Целевой вывод, инициируемый посылкой (характеристика "целивывода").

Характеристика "целивывода(F)" указывает на импликацию для вывода следствий в посылках, ориентированного на специальную целевую установку. F - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация приема осуществляется текущим выражением A, то в начале списка F помещается терм "контрольвывода(A)". Если фильтр B вида "контекст($\ldots$)" переброшен в указатели, то он регистрируется в списке F как "указатель(B)".

Проверяется, что F не содержит терма "контрольвывода($\ldots$)" и содержит терм "посылка". Тогда создается спецификация "тип(См)", "см(F)". Пример:

$\forall_{afguv}(g = \lambda_x(u(x), v(x))\ \&$ Производная$(f,g)\ \&\ a = \mathrm{set}_x(u(x) = 0\ \&\ v(x)) \to \mathrm{roots}(g, \mathrm{Dom}(g)) = a)$

Спецификация - "тип(См)", "см(посылка тип(описать)не(контекст(посылка(x5) вид(x5 равно(корни(x7 x2)x8)))) не(цель(исследовать))указатель(контекст(условие(x3)заголовок(x3 Экстремум)равно(x6 первыйтерм(x3)))))".

Прием применяется в посылках задачи на описание, имеющей условие вида "Экстремум($f,\ldots$)". Первые два антецедента идентифицируются с посылками, определяющими уже вычисленную производную g функции f. Третий антецедент, выделенный указателем "идентификатор", находит корни производной.

2. Целевой вывод, инициируемый текущим подвыражением условия (характеристика "целивывода").

   Пусть характеристика - "целивывода(F)". Проверяется, что F начинается с терма "контрольвывода(A)" и содержит фильтр "условие". Тогда создается спецификация "тип(ослабление)", "терм(A)", "см(F')", где F' - остаток списка F. Пример:

   $\forall_{abcf}$(собстввекторы(f, a, b) & ортогонализация(b, c) $\rightarrow$ ортогонализация(b, c))

   Спецификация - "тип(ослабление)", "терм(ортканоничвид(f, y, z))", "см(тип(описать)условие неизвестная(y) неизвестная(z) не(контекст(посылка(x4) вид(x4 ортогонализация(b x5))))". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, перечисляющим ранее найденные собственный векторы квадратичной формы f для собственного значения a. Второй антецедент, обрабатываемый пакетным синтезатором, ортогонализует эти векторы.

3. Вывод следствий в задаче на исследование, имеющей цель "исключ" (характеристика "исключ").

   Характеристика "исключ" указывает на простую импликацию с существенными посылками, у которой консеквент содержит не все параметры антецедентов, но каждый параметр консеквента встречается в антецедентах.

   Создается спецификация "тип(примечанализатор)". Пример:

   $\forall_{abc}(a \subseteq b \ \& \ b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c)$

   Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель (исключ ...). Выражения a, c не содержат переменных этой цели, а выражение b содержит.

4. Использование синтезаторов для устранения зависимости от исключаемых переменных в задаче на исследование, имеющей цели "длялюбого" и "независит" (характеристика "транзитоперанд").

   Характеристика "транзитоперанд" указывает на теорему, имеющую вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными. При этом переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов.

   Рассматривается существенный антецедент A. Усматривается, что его можно обработать пакетным синтезатором P с неконстантными входными данными, причем параметры этих входных данных не встречаются в консеквенте. Выходная переменная синтезатора встречается в консеквенте. Рассматривается переменная x, встречающаяся как в антецеденте A, так и в консеквенте, а также переменная y антецедента A, не встречающаяся в консеквенте. Создается спецификация "тип(точкиотрезка)", "указатель(значения(i))", "см(независит(x) не(независит(y)))". Здесь i - номер антецедента A. Пример:

   $\forall_{abc}(a \leq b \ \& \ b \leq c \rightarrow a \leq c)$

Спецификация - "тип(точкиотрезка)", "указатель(значения(1))", "см(независит(a) не(независит(b)))".

5. Вывод в задаче на описание, имеющей цель "независит", подготавливающий устранение зависимости текущего подвыражения условия от исключаемых переменных (характеристика "независимы").

   Характеристика "независимы(t)" указывает на теорему для вывода посылки, подготавливающей исключение подвыражения t условия задачи на описание для устранения зависимости от заданных переменных.

   Создается спецификация "тип(сокращение)", "терм(t)". Пример:

   $\forall_{abcdef}(0 \leq a + bc \;\&\; 0 \leq d + ef \;\&\; 0 < b \;\&\; 0 < e \rightarrow 0 \leq bec + bef + ae + bd)$

   Спецификация - "тип(сокращение)", "терм($c + f$)". Прием применяется при усмотрении в неравенстве - условии задачи на описание - выражения $c + f$. Задача имеет цель (независит $\ldots$), причем оба выражения c, f содержат "запрещенные" переменные, а выражения a, b, d, e их не содержат. Первые два антецедента идентифицируются с посылками. Выводимое приемом неравенство позволит сгруппировать слагаемые и получить сумму $c + f$, чтобы впоследствии исключить ее из условия при обратном выводе.

Вывод определения

Характеристика - "определение(t)", где t - определяемое теоремой выражение либо утверждение.

Проверяется, что консеквент - эквивалентность, в одной части которой расположено определяемое утверждение, а другая часть не содержит символа "или". Если теорема имеет характеристику "и", то проверяется наличие конъюнктивного члена заменяющей части, содержащего все параметры заменяемой. Если заменяющая часть - конъюнкция, а определяемое утверждение - отношение с не менее чем тремя операндами, и все эти операнды - различные переменные, то проверяется, что среди членов заменяющей части отсутствует отношение от тех же операндов. Далее создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и определяемое утверждение, а консеквент - заменяющая часть исходной теоремы. Она сопровождается спецификацией "тип(нормуглы)". Пример:

$\forall_a(\text{бескмалая}(a) \rightarrow \text{последовательность}(a, \mathbb{R}) \;\&\; \lim(a) = 0)$

Координаты

1. Связь числовых атомов с координатами.

   (a) Связь числовых атомов с координатами (характеристика "числкоэфф").

      Характеристика "числкоэфф" указывает на тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат.

      Проверяется, что среди антецедентов теоремы нет упоминаний о координатах множеств точек. Составляется список $i_1, \ldots, i_n$ номеров антецедентов -

равенств для координатных наборов либо отдельных координат, параметры правой части которых пересекаются с параметрами консеквента. Если этот список непуст, то создается спецификация "тип(формоперанды)", "антецедент(i_1)", ..., "антецедент(i_n)". Пример:

$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & $A \in$ отрезок(BD) & коорд$(D, K) = (a, b) \to l(AD) = -al(AB))$

Спецификация - "тип(формоперанды)", "антецедент(4)".

(b) Связь числовых атомов с координатами (характеристика "значпарам").

Характеристика "значпарам(N)" указывает на тождество, выражающее невырожденный числовой атом через параметры координат. N - направление замены.

Составляется список $i_1, \ldots, i_n$ номеров антецедентов - равенств для координат единичных объектов, у которых параметры правых частей пересекаются с параметрами консеквента. Если этот список непуст, создается спецификация "тип(формоперанды)", "антецедент(i_1)", ..., "антецедент(i_n)". Пример:

$\forall_{ABKabc}($прямкоорд(K) & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b, c)$ & актив$(l(AB)) \to l(AB) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2})$

Заметим, что в действительности этот прием в решателе имеет другой тип - "связь старых числовых атомов с координатами". Однако, спецификатор не поддерживает этот подтип, как и множество других подтипов для приемов вывода численных равенств. Первоначально он создает самый общий тип, а подтипы выбираются уже доводчиком.

(c) Связь числовых атомов с координатами (характеристика "Числатомы").

Характеристика "Числатомы" указывает на импликацию для вывод группы равенств, связывающих невырожденные числовые атомы с параметрами координат.

Составляется список $i_1, \ldots, i_n$ номеров антецедентов - равенств для координат единичных объектов, у которых параметры правых частей пересекаются с параметрами консеквента. Если этот список непуст, создается спецификация "тип(формоперанды)", "антецедент(i_1)", ..., "антецедент(i_n)". Пример:

$\forall_{ABCDK}($прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & однасторона$(C, D,$ прямая$(AB))$ & коорд$(D, K) = (b, c) \to b = l(AD)\cos(\angle(BAD))$ & $c = l(AD)\sin(\angle(BAD)))$

Как и в предыдущем примере, фактически имеется прием "связь старых числовых атомов с координатами".

2. Связь текущего числового атома с координатами (характеристика "числкоэфф").

Проверяется, что среди антецедентов теоремы нет упоминаний о координатах множеств точек, причем имеются равенства для координатных наборов либо отдельных координат, параметры правой части которых пересекаются с параметрами консеквента. Если в консеквенте имеется единственный числовой атом t, не являющийся обозначением отдельной координаты, то создается спецификация "тип(Операнды)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{Kabcdefgh}$(прямкоорд(K) & коорд(a,K) $=$ (b,c,g) & коорд(d,K) $=$ (e,f,h) $\to$ скалумнож(a,d) $= be+cf+gh$)

Спецификация - "тип(Операнды)", "терм(скалумнож(a,d))".

3. Вывод соотношений для координат объектов.

   (a) Вывод соотношений для координат объектов (характеристика "коорд").

   Характеристика "коорд" указывает на тождество для координат объектов.

   Проверяется отсутствие характеристики "систкоорд" и создается спецификация "тип(больше)". Пример:

   $\forall_{ABCDKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(вектор(AB)$,K$) $=(a,b)$ &
   коорд(вектор(CD)$,K$) $=(c,d)$ & прямая(AB) $\perp$ прямая(CD) $\to$
   $ac+bd=0$)

   (b) Вывод координат объекта в задаче на исследование, имеющей цель "систкоорд" (характеристика "систкоорд").

   Характеристика "систкоорд" указывает на тождество для определения координат объекта.

   Проверяется, что консеквент теоремы - равенства выражения t для координат некоторому координатному набору, причем параметры выражения t включаются в параметры других выражений для координат, являющихся частями равенств из антецедентов. Тогда создается спецификация "тип(синус)". Пример:

   $\forall_{ABKabcd}$(Вектор(A) & Вектор(B) & коорд(A,K) $=(a,b)$ &
   коорд(B,K) $=(c,d)$ $\to$ коорд($A+B,K$) $=(a+c,b+d)$)

   Напомним, что "систкоорд" - цель задачи на исследование, решаемой для вывода координат всевозможных объектов, выразимых только через те объекты, координаты которых изначально были указаны в посылках.

4. Выражение координатных переменных через координаты других объектов и новые параметры (характеристика "новпараметры").

Характеристика "новпараметры" указывает на теорему для выражения координат объекта при помощи вспомогательных параметров.

Создается спецификация "тип(функции)". Пример:

$\forall_{ABCDKabcdefmnpqr}$($A \in$ Угол(BCD) & коорд(вектор(CA)$,K$) $=(a,b,c)$ &
коорд(вектор(CB)$,K$) $=(d,e,f)$ & коорд(вектор(CD)$,K$) $=(p,q,r)$ $\to$
$m-$ число & $n-$ число & $0\le m$ & $0\le n$ & $a=md+np$ & $b=me+nq$ &
$c=mf+nr$)

Радиус-вектор точки внутри угла представляется в виде линейной комбинации направляющих векторов сторон угла. Первые два антецедента идентифицируются с посылками, причем a, b, c - переменные. Остальные антецеденты выделены указателем "идентификатор".

5. Выражение координатных наборов через числовые атомы.

   (a) Выражение координатных наборов через числовые атомы (характеристика "систкоорд").

   Характеристика "систкоорд" указывает на тождество для определения координат объекта.

   Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство для координатного набора некоторого объекта, обозначенного переменной. Проверяется также, что консеквент имеет невырожденные числовые атомы. Затем создается спецификация "тип(удаление)". Пример:

   $\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, E)$ & $D \in$ прямая(AE) & точкалуча(A, E, D) & прямкоорд$(K) \to$ коорд$(D, K) = (0, 0, l(AD)))$

   (b) Выражение координатного набора через численные параметры.

      i. Выражение координатного набора через численные параметры (характеристика "систкоорд").

      Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство для координатного набора некоторого объекьа, обозначенного переменной. Проверяется также, что консеквент не имеет невырожденных числовых атомов. Затем создается спецификация "тип(стандравно)". Пример:

      $\forall_{ABCDEKab}(K = (A, B, C)$ & коорд$(D, K) = (a, b)$ & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $E \in$ прямая$(AB) \to$ коорд$(E, K) = (a, 0))$

      ii. Выражение координатного набора через численные параметры (характеристика "равнозначны").

      Характеристика "равнозначны" указывает на вывод равенства для координат объекта, инициируемый равенством объектов.

      Создается спецификация "тип(стандравно)". Пример:

      $\forall_{ABKabc}($коорд$(B, K) = (a, b)$ & Вектор(A) & Вектор(B) & $A = cB \to$ коорд$(A, K) = (ac, bc))$

      Первый и последний антецеденты идентифицируются с посылками.

      iii. Выражение координатных наборов через известные параметры (характеристика "систкоорд").

      Проверяется, что консеквент - равенство для координатного набора, и вводится спецификация "тип(Синус)". Пример:

      $\forall_{ABKabcdefghijklm}(\neg(k = 0)$ & коорд$(l, K) = (c, d)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ &
      коорд(вектор$(lm), K) = (g, h)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (e, f)$ &
      $j \in$ прямая(lm) & $j \in$ прямая(AB) & $i = g(b - d) + h(c - a)$ &
      $k = eh - fg \to$ коорд$(j, K) = (a + ei/k, b + fi/k))$

Первые три антецедента, а также шестой и седьмой идентифицируются с посылками. Выражения a, b, e, f, i, k не содержат неизвестных.

6. Выражение текущего координатного набора через числовые атомы.

   (a) Выражение текущего координатного набора через числовые атомы (характеристика "систкоорд").

   Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство координат A некоторого объекта выражению с заголовком "набор". Проверяется также, что среди конъюнктивных членов консеквента нет других равенств для координат и что консеквент содержит невырожденные числовые атомы. Тогда создается спецификация "тип(регистрациячертежа)", "терм(A)". Пример:

   $\forall_{ABCDEFK}(K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, E) & прямая$(DE) \parallel$ прямая(AC) & $F \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, F) & прямая$(DF) \parallel$ прямая$(AB) \to$ коорд$(D, K) = (l(AE)/l(AB), l(AF)/l(AC)))$

   Спецификация - "тип(регистрациячертежа)", "терм(коорд(D, K))".

   (b) Выражение текущего координатного набора через численные параметры.

      i. Выражение текущего координатного набора через численные параметры (характеристика "систкоорд").

      Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство координат A некоторого объекта выражению с заголовком "набор". Проверяется также, что среди конъюнктивных членов консеквента нет других равенств для координат и что консеквент не содержит невырожденных числовых атомов. Тогда создается спецификация "тип(степени)", "терм(A)". Пример:

      $\forall_{AKab}($прямкоорд(K) & полкоорд$(A, K) = (a, b) \to$ коорд$(A, K) = (a \cos b, a \sin b))$

      Спецификация - "тип(степени)", "терм(коорд(A, K))". Выражения a, b не содержат невырожденных числовых атомов.

      ii. Выражение текущего координатного набора через известные параметры (характеристика "систкоорд").

      Проверяется, что консеквент - равенство для координатного набора, и создается спецификация "тип(факториал)", "терм(t)", где t - левая часть этого равенства. Пример:

      $\forall_{ABCDKabcdpquv}($прямая$(CD) \parallel$ прямая(AB) & однасторона$(B, D,$ прямая$(AC))$ & коорд(вектор$(AB), K) = (a, b)$ & $pl(AB) = ql(CD)$ & коорд$(C, K) = (c, d)$ & $\neg(q = 0)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (u, v)$ & $\neg(bu - av = 0) \to$ коорд$(D, K) = (c + ap/q, d + bp/q))$

      Спецификация - "тип(факториал)", "терм(коорд(D, K))". Выражения a, b, c, d, p, q не содержат неизвестных.

   (c) Выражение связанного с текущим термом координатного набора через числовые атомы.

i. Выражение связанного с текущим термом координатного набора через числовые атомы (характеристика "систкоорд").

Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство координат некоторого отличного от переменной выражения t выражению с заголовком "набор". Проверяется также, что среди конъюнктивных членов консеквента нет других равенств для координат и что консеквент содержит невырожденные числовые атомы. Тогда создается спецификация "тип(нормотрицание)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{Ka}$(вертикаль(a, K) & прямкоорд$(K) \to$ коорд(напрпути$(a), K) =$ $(0, 0, \mathrm{sg}($крд(конецпути$(a), K, 3) -$ крд(началопути$(a), K, 3))))$

Спецификация - "тип(нормотрицание)", "терм(напрпути(a))".

ii. Выражение связанного с текущим термом координатного набора через численные параметры (характеристика "систкоорд").

Проверяется, что среди конъюнктивных членов консеквента имеется равенство координат некоторого отличного от переменной выражения A выражению с заголовком "набор". Проверяется также, что среди конъюнктивных членов консеквента нет других равенств для координат и что консеквент не содержит невырожденных числовых атомов. Тогда создается спецификация "тип(числосочетаний)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABKabcdef}$(прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд$(B, K) = (d, e, f)$ & Вектор(A) & вектор$(B) \to$ коорд(вектумнож$(A, B), K) = (bf - ce, cd - af, ae - bd))$

Спецификация - "тип(числосочетаний)", "терм(вектумнож(A, B))". Выражения a, b, c, d, e, f не содержат невырожденных числовых атомов.

(d) Вывод соотношений для отдельных координат и числовых атомов (характеристика "нормкрд").

Характеристика "нормкрд" указывает на равенство либо конъюнкцию равенств, содержащих отдельные координаты.

Создается спецификация "текпосылка". Пример:

$\forall_{ABK}$(вправо(вектор$(AB), K) \to$ крд$(A, K, 3) =$ крд$(B, K, 3))$

(e) Вывод соотношения, связывающего текущую координату с другими координатами и числовыми атомами (характеристика "нормкрд").

В консеквенте находится выражение t для отдельной координаты некоторого выражения r. Если таких выражений несколько, берется то, у которого оценка сложности выражения r наибольшая. Проверяется, что каждый невырожденный числовой атом консеквента встречается в антецедентах. Тогда создается спецификация "тип(коррекциязнака)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{abdKi}(ab = d \to a \cdot$ крд$(b, K, i) =$ крд$(d, K, i))$

В антецеденте имеется в виду умножение вектора на число. Спецификация - "тип(коррекциязнака)", "терм(крд(b, K, i))".

(f) Вывод ограничений на координаты объектов (характеристика "Крд").

Характеристика "Крд" указывает на кванторную импликацию, консеквент которой - конъюнкция неравенств для параметров координат.

Проверяется, что в антецедентах отсутствует уравнение для координат множества объектов. Затем создается спецификация "тип(наборслов)". Пример:

$\forall_{ABKabcd}$(прямкоорд(K) & Вектор(A) & Вектор(B) & коорд(A,K) $= (a,b)$ & коорд(B,K) $= (c,d)$ & уголмежду(A,B) $< \pi/2 \rightarrow 0 < ac + bd$)

(g) Ввод нового объекта для вычисления координат.

i. Ввод в рассмотрение объекта, необходимого для вычисления текущего координатного выражения (характеристика "вспомобъекты").

Характеристика "вспомобъекты(t)" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение новые объекты для использования определения некоторого объекта t.

Создается спецификация "тип(функция)", "терм(t". Пример:

$\forall_{ABCDEK}$($D-$точка & $K = (A,B,C) \rightarrow E-$точка & $E-$прямая(AC) & прямая(DE) $\|$ прямая(AB))

Спецификация - "тип(функция)", "терм(коорд(D,K))".

ii. Ввод новых объектов и задание их координатных наборов через старые параметры (характеристика "коордввода").

Характеристика "коордввода(F)" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение новые объекты и одновременно задающую их координатные наборы. F - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация осуществляется при усмотрении текущего выражения A, то в начале списка F помещается терм "контрольвывода(A)".

Проверяется отсутствие терма "контрольвывода(...)". Проверяется, что все параметры правых частей равенств в консеквенте, определяющих координатные наборы, содержатся в антецедентах. Тогда создается спецификация "тип(натуральное)", "см(F)". Пример:

$\forall_{ABCDEFG}$(ромб($ABCD$) & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ прямая(BD) & коорд(E,K) $= (a,b)$ & $F \in$ прямая(AB) & коорд(F,K) $= (c,d) \rightarrow$ $G -$ точка & $G \in$ прямая(CD) & коорд(G,K) $= (2a-c, 2b-d)$)

Спецификация - "тип(натуральное)", "см(известно(a) известно(b) известно(c) известно(d) не(контекст(усм(принадлежит(x5 прямая(CD))) равно(терм(коорд(x5 K))терм($(2a-c, 2b-d)$)))) контекст(посылка(x5) вхождениетерма(x5 копия(коорд(прямая(CD)K)))) не(заголовок(терм(коорд(прямая(CD)K)) класс)) контекст(усм(принадлежит(x6 прямая(CD))) известно(терм(коорд(x6 K)))) не(равно(F A)) не(равно(F B)))".

Прием вводит в рассмотрение точку, симметричную точке на стороне ромба относительно его центра.

iii. Ввод новых объектов и задание их координатных наборов через вспомогательные параметры (характеристика "коордввода").

Пусть характеристика - "коордввода(F)".

Проверяется отсутствие терма "контрольвывода(...)". Проверяется, что не все параметры правых частей равенств в консеквенте, определяющих координатные наборы, содержатся в антецедентах. Тогда создается спецификация "тип(нормализатор)", "см(F)". Пример:

$\forall_{ABDEabc}$(осьсимметрии(прямая(AB), E) & параболоид(E) & прямкоорд(K) $\rightarrow D -$ точка & вершина(D, E) & $D \in$ прямая(AB) & $a -$ число & $b -$ число & $-$ число & коорд(D, K) $= (a, b, c)$)

Спецификация - "тип(нормализатор)", "см(не(контекст(посылка(x4) вид(x4 вершина(x5 E)))))". Прием вводит новые переменные D, a, b, c.

iv. Ввод новых объектов, связанных с текущим выражением, и задание их координатных наборов через вспомогательные параметры (характеристика "коордввода").

Пусть характеристика - "коордввода(F)".

Проверяется наличие терма "контрольвывода(A)". Проверяется, что не все параметры правых частей равенств в консеквенте, определяющих координатные наборы, содержатся в антецедентах. Тогда создается спецификация "тип(нормализатор)", "см(F')", "терм(A)". Здесь F' - остаток термов F после удаления элемента "контрольвывода(A)". Пример:

$\forall_{ABCDEKxyz}$(прямкоорд(K) $\rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & $\neg(A = B)$ & прямая(AB) $\perp$ плоскость(CDE) & коорд(вектор(AB), K) $= (x, y, z)$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число)

Спецификация - "тип(нормализатор)", "см(легковидеть(Вектор(c) не(контекст(усм(перпендикулярно(прямая(x1 x2)плоскость(CDE))))) не(контекст(посылка(x1) вид(x1 перпендикулярно(x2 плоскость(CDE)))))))".

v. Ввод нового объекта и выражение его через координаты в задаче на исследование, имеющей цель "исследовать" (характеристика "новобъект").

Характеристика "новобъект" указывает на ввод нового объекта и выражение его через координаты в задаче на исследование, имеющей цель "исследовать". Напоним, что цель "исследовать" используется в задачах на стандартное исследование свойств различных объектов.

Создается спецификация "тип(предикатныйсимвол)". Пример:

$\forall_{ABCDEKHabcdmnpq}$($H =$ внутренность(круг(AB)) $\cap$ внутренность(Угол(CAD)) & $A =$ тчкоорд($K, (a, b)$) & $B =$ тчкоорд($K, (c, d)$) & $C =$ тчкоорд($K, (p, q)$) & $m = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ & $n = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2} \rightarrow E -$ точка & $E \in$ прямая(AC) & $E \in$ окружность(AB) & $E =$ тчкоорд($K, (a + (p-a)m/n, b + (q-b)m/n)$) & $\neg(A \in$ отрезок(CE)))

Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками задачи на исследование, имеющей цель "исследовать". Прием проверяет отсутствие рассматриваемой в задае общей точки прямой AC и окружности AB. Затем вводится переменная E для такой общей точки, причем эта точка явно задается через свои координаты.

(h) Ввод в рассмотрение координатного набора, выраженного через новые параметры (характеристика "параметры").

Характеристика "параметры(F)" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение координатный набор, выраженный через новые параметры. F - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация срабатывания приема осуществляется текущим выражением A, то в начале списка F помещается терм "контрольвывода(A)". При пустом списке F вместо терма "параметры(F)" берется логический символ "параметры". Если фильтр B вида "контекст(...)" переброшен в указатели, то он регистрируется в списке F как "указатель(B)".

Проверяется отсутствие в списке F терма "контрольвывода(...)", и создается спецификация "тип(меткаперехода)", "см(F)". Пример:

$\forall_{ABCDEKabc}(\text{плоскость}(ABC) - \text{касательная к}E\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&$
$D \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ D \in E \rightarrow a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&$
$\text{коорд}(D, K) = (a, b, c))$

Спецификация - "тип(меткаперехода)", "см(контекст(посылка(x3)вид(x3 равно(коорд(E x4)x5)) заголовок(x5 класс)) коммент(касательная плоскость(ABC) E))".

(i) Ввод в рассмотрение связанного с текущим термом координатного набора, выраженного через новые параметры (характеристика "параметры").

Пусть характеристика - "параметры(F)". Проверяется, что в списке F имеется элемент "контрольвывода(A)", и создается спецификация "тип(норммаксимум)", "терм(A)", "см(F')", где F' - остаток списка F. Пример:

$\forall_{ABCKabcdefp}(C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\text{set}_{xyz}(\text{пропорциональны}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f))\ \&\ x - \text{число}\ \&$
$y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}) \rightarrow p - \text{число}\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (-a + pd, -b + pe,$
$- c + pf))$

Спецификация - "тип(норммаксимум)", "терм(коорд(прямая(AB),K))", "см(известно(a) известно(b) известно(c) известно(d) известно(e) известно(f) контекст(посылка(x7) разряд(x7 C x8) подчинено(x8 x9) символ(x9 прямая) не(равно(x9 фикс(1 2)))))".

(j) Координаты множества объектов.

i. Вывод уравнения для координат множества объектов (характеристика "уравнмножество").

Характеристика "уравнмножество" указывает на тождество либо дизъюнкцию тождеств, определяющих координаты заданного множества объектов.

Создается спецификация "тип(значениепеременной)". Пример:

$\forall_{ABCEKabcd}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{фокус}(A, E)\ \&\ \text{коорд}(E, K) =$
$\text{set}_{xy}(ax + by^2 + cy + d = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \neg(a = 0)\ \&$

$\neg(b = 0)$ & директриса(прямая$(BC), A, E) \rightarrow$ коорд(прямая$(BC), K) =$ set$_{uv}(4abu - a^2 - c^2 + 4bd = 0$ & u – число & v – число))

Первые три антецедента и последний антецедент идентифицируются с посылками.

ii. Вывод общего вида уравнения для координат множества объектов (характеристика "координаты").

Характеристика "координаты" указывает на кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, дающим общий вид уравнения для координат множества объектов.

Проверяется, что консеквент - квантор существования, внутри которого расположено равенство с описателем "класс" в одной части и координатным выражением в другой. Проверяется также, что параметры этого координатного выражения не входят в связывающую приставку квантора существования. Рассматривается теорема, полученная из исходной отбрасыванием квантора существования в консеквенте. Она сопровождается спецификацией "тип(Подчинено)". Пример:

$\forall_{ABCDKabcd}$(коорд(прямая$(AD), K) =$ set$_{xy}(ax+by+c = 0$ & $x-$число & y – число) & прямая$(AD) \parallel$ прямая$(BC) \rightarrow d$ – число & коорд(прямая$(BC), K) =$ set$_{xy}(ax+by+d = 0$ & $x-$число & $y-$число))

Прием вводит новый параметр d, связанный в исходной теореме кавантором существования.

iii. Вывод уравнения для текущих координат множества объектов (характеристика "уравнмножество").

Проверяется, что консеквент - равенство с описателем "класс" в одной части и координатным выражением t в другой. Проверяется, что утверждение под описателем "класс"не является квантором существования. Тогда создается спецификация "тип(семействомножеств)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ABCDKabcdef}(C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & коорд$(C, K) = (a, b, c)$ & коорд$(D, K) = (d, e, f)$ & разныеточки$(C, D) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB), K) =$ set$_{xyz}$(пропорцнаборы$((x - a, y - b, z - c), (d - a, e - b, f - c))$ & x – число & y – число & z – число))

Спецификация - "тип(семействомножеств)", "терм(коорд(прямая(AB), K))".

iv. Вывод общего вида уравнения для текущих координат множества объектов (характеристика "координаты").

Проверяется, что консеквент - квантор существования, внутри которого расположено равенство с описателем "класс" в одной части и координатным выражением вида $P(A, Q)$ в другой. Проверяется, что параметры этого координатного выражения не входят в связывающую приставку квантора существования, причем Q - переменная, и в антецедентах нет равенства для координатного выражения со вторым операндом Q. Тогда рассматривается теорема, полученная из исходной отбрасыванием квантора существования в консеквенте. Она сопровождается спецификацией "тип(фильтротрезков)", "терм($P(A,Q)$)". Пример:

$\forall_{AK}$(Прямая(A) $\to a -$ число &-число & $c -$ число & $\neg(a^2+b^2=0)$ & коорд(A,K) $=$ set$_{xy}(ax+by+c=0$ & $x -$ число & $y -$ число))

Спецификация - "тип(фильтротрезков)", "терм(коорд(A,K))".

v. Вывод параметрического описания для текущих координат множества объектов (характеристика "уравнмножество").

Проверяется, что консеквент - равенство с описателем "класс" в одной части и координатным выражением t в другой. Проверяется, что утверждение под описателем "класс"является квантором существования. Тогда создается спецификация "тип(Преобр)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ABKabcef}$(разныеточки(A,B) & коорд(A,K) $=(a,b)$ & коорд(вектор(AB)$,K$) $=(e,f)$ & $A\in C$ & $B\in c$ & Прямая(c) $\to$ коорд(c,K) $=$ set$_{xy}(\exists_t(x=a+et$ & $y=b+ft$ & $t -$ число)))

Спецификация - "тип(Преобр)", "терм(коорд(c,K))".

vi. Выражение координат объекта через параметры уравнений для координат множеств объектов (характеристика "систкоорд").

Характеристика "систкоорд" указывает на тождество для определения координат объекта.

Проверяется наличие в антецедентах равенства для координат множества объектов, у которого параметры правой части пересекаются с параметрами консеквента. Затем создается спецификация "тип(равныедлины)". Пример:

$\forall_{ABKabcd}$(прямкоорд(K) & коорд(окружность(AB)$,K$) $=$ set$_{xy}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & $x -$ число & $y -$ число) $\to$ коорд(A,K) $=(-b/(2a),-c/(2a))$ & $\neg(a=0)$)

vii. Ввод в рассмотрение координат множества объектов, связанного с текущим термом (характеристика "коордплоск").

Характеристика "коордплоск(F)" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение координаты множества объектов. F - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация осуществляется текущим выражением A, то в начале списка F помещается терм "контрольвывода(A)". При пустом списке F вместо терма "коордплоск(F)" берется логический символ "коордплоск". Если фильтр B вида "контекст(...)" должен быть переброшен в указатели, то он регистрируется в списке F как "указатель(B)".

Создается спецификация "тип(значениемн)". При наличии элемента "контрольвывода(A)" к ней добавляется "терм(A)". При непустом списке F' элементов списка F, не имеющх заголовка "контрольвывод" и "контекст", добавляется элемент "см(и(F'))". При наличии элемента E списка F с заголовком "контекст" в спецификацию добавляется элемент "указатель(E)". Пример:

$\forall_{ABEK}$(асимптота(прямая(AB)$,E$) $\to$ актив(коорд(прямая(AB)$,K$)))

Спецификация - "тип(значениемн)", "терм(коорд(E, K))".

viii. Характеризация множеств объектов, использующая уравнения для их координат.

   A. Усмотрение вида множества объектов по уравнению для его координат (характеристика "видобъекта").

      Характеристика "видобъекта" указывает на кванторную импликацию, определяющую вид объекта по уравнению для координат его точек.

      Создается спецификация "тип(подобны)". Пример:

      $\forall_{EKabcdef}($прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+by^2+cx+dy+ez+f=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$)$ & $\neg(e=0)$ & $0<ab \rightarrow$ параболоид(E) & эллиптический$(E))$

   B. Характеризация множеств объектов с помощью уравнений для координат (характеристика "характ").

      Характеристика "характ" указывает на кванторную импликацию, определяющую связи объекта, заданного уравнением для координат его точек, с другими объектами.

      Создается спецификация "тип(ссылканаприем)". Пример:

      $\forall_{AEKabcdemn}($прямкоорд(K) & гипербола(E) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0$ & $x-$ число & $y-$ число$)$ & $A\in E$ & коорд$(A,K)=(m,n)$ & $(2am+b=0\ \vee\ 2cn+d=0) \rightarrow$ вершина$(A,E))$

      Первые четыре антецедента идентифицируются с посылками, последние два - выделены указателем "идентификатор".

   C. Усмотрение вида исследуемого множества объектов по параметрам уравнения для его координат (характеристика "видобъекта").

      Проверяется наличие в антецедентах теоремы равенства для координат множества объектов. Если длина связывающей приставки описателя "класс" в этом равенстве равна 2, то переменной x10 присваивается символ "линия" (случая исследования двумерной кривой), иначе - символ "эллипсоид" (трехмерный случай). Создается спецификация "тип(Отрицание)", "цель(x10)". Пример:

      $\forall_{EKabcde}($прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xyz}(ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$ & $x-$ число & $y-$ число & $z-$ число$)$ & $e=b^2+c^2-4ad$ & $\neg(a=0)$ & $0<e \rightarrow$ Цилиндр(E) & круглый$(E))$

      Спецификация - "тип(Отрицание)", "цель(эллипсоид)". Прием применяется в задачах на исследование свойств поверхностей.

   D. Характеризация исследуемого множества объектов по параметрам уравнения для его координат (характеристика "характмн").

      Характеристика "характмн(P)" указывает на теорему, определяющую характеристики исследуемого множества объектов через параметры уравнения для его координат. P - цель задачи.

Создается спецификация "тип(обобщмножитель)", "цель(P)". Пример:

$\forall_{EKPabcdefghpq}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xyz}$($ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + pz + q = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & (собствзначение(A, u, v) & собствектор(A, u, w)) $= P \rightarrow \forall_{uvw}$($P \rightarrow$ собствекпов(E, u, K, w)))

Спецификация - "тип(обобщмножитель)", "цель(эллипсоид)". Последний антецедент определяет при помощи вспомогательной задачи на описание собственные значения поверхности и их собственные вектора.

E. Текущий терм инициирует характеризацию множеств объектов с помощью уравнений для координат (характеристика "множнабор").

Характеристика "множнабор(t)" указывает на теорему, выполняющую характеризацию связанного с термом t множества объектов с помощью уравнения для его координат.

Создается спецификация "тип(модификатор)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ABCDEKabcdefpqrs}$(коорд(плоскость($CDE$), K) $=$ set$_{xyz}$($px + qy + rz + s = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & коорд(A, K) $= (a, b, c)$ & коорд(B, K) $= (d, e, f)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $0 \leq (ap + bq + cr + s)(dp + eq + fr + s) \rightarrow$ однасторона(A, B, плоскость(CDE)))

Спецификация - "тип(модификатор)", "терм(классточки(A, g))".

F. Усмотрение стандартного представления исследуемого множества объектов по параметрам уравнения для его координат (характеристика "стандмн").

Характеристика "стандмн" указывает на кванторную импликацию, дающую стандартное представление для множества точек, координаты которого приводятся в антецедентах.

В антецедентах находится уравнение для координат множества объектов, и создается спецификация "тип(частное)", "цель(P)", где P - логический символ "линия", если уравнение двумерное, и символ "эллипсоид", если оно трехмерное. Пример:

$\forall_{ABEKabc}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $=$ set$_{xy}$($ax^2 + bx + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $b^2 - 4ac = 0$ & $\neg(a = 0) \rightarrow A -$ точка & $B -$ точка & прямая(AB) $= E$ & коорд(прямая(AB), K) $=$ set$_{uv}$($2au + b = 0$ & $u -$ число & $v -$ число))

Спецификация - "тип(частное)", "цель(линия)". Прием вводит новые переменные A, B.

G. Усмотрение специальной связи системы координат с исследуемым множеством объектов, заданным уравнением (характеристика "системыкоординат").

Характеристика "системыкоординат(P)" указывает на теорему, усматривающую специальную связь системы координат с исследуемым множеством объектов. P - цель задачи либо список допустимых целей.

Создается спецификация "тип(прямыеуглы)", "цель(P)". Пример:

$\forall_{ABCEKQabcdempq}$(прямкоорд(K) & коорд(E, K) $= \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + e = 0$ & x – число & y – число) & $0 < ac$ & $0 \leq e(a - c)$ & $ce < 0 \to$ каноничкоорд(K, E))

Спецификация - "тип(прямыеуглы)", "цель(точки линия)". Прием применяется в задачах на исследование, имеющих цель "точки" либо "линия".

(k) Две системы координат.

i. Выражение координат объекта в одной системе через его координаты в другой системе (характеристика "новкадр").

Характеристика "новкадр" указывает на тождество, выражающее координаты объекта в одной системе координат через его координаты в другой системе.

Создается спецификация "тип(актив)". Пример:

$\forall_{ABCDEFGKQabcd}(K = (B, C, D)$ & $Q = (E, F, G)$ & коорд(B, Q) $= (a, b)$ & вектор(BC) = вектор(EF) & вектор(BD) = вектор(EG) & коорд(A, K) $= (c, d)$ & сисiткоорд(Q) $\to$ коорд(A, Q) $= (a + c, b + d)$)

ii. Выражение текущих координат объекта в одной системе через его координаты в другой системе (характеристика "новкадр").

Проверяется, что консеквент теоремы - равенство, дающее выражение для координат A некоторого объекта. Создается спецификация "тип(автоменю)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCKQabcdefxy}(K = (A, B, C)$ & коорд(A, Q) $= (a, b)$ & коорд(вектор(AB), Q) $= (c, d)$ & коорд(вектор(AC), Q) $= (e, f)$ & коорд(D, K) $= (x, y)$ & D – точка $\to$ коорд(D, Q) $= (a + cx + ey, b + dx + fy)$)

Спецификация - "тип(автоменю)", "терм(коорд(D, Q))".

iii. Выражение текущих координат множества объектво в одной системе через его координаты в другой системе (характеристика "новконтекст").

Характеристика "новконтекст" указывает на тождество, выражающее координаты множества точек в одной системе координат через его координаты в другой системе.

Проверяется, что консеквент теоремы - равенство, дающее выражение для координат A некоторого множества объектов. Создается спецификация "тип(учетзнаков)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCKMTabcdefp}(T = (A, B, C)$ & коорд(A, K) $= (a, b)$ & коорд(вектор(AB), K) $= (c, d)$ & коорд(вектор(AC), K) $= (e, f)$ & коорд(M, K) $= \mathrm{set}_{xy}(x$ – число & y – число & $p(x, y)) \to$ коорд(M, T) $= \mathrm{set}_{xy}(x$ – число & y – число & $p(a + cx + ey, b + dx + fy)$))

Спецификация - "тип(учетзнаков)", "терм(коорд(M, T))".

iv. Переход к новой системе координат для уравнения множества объектов, связанного с текущим термом задачи (характеристика "новыеточки").

Характеристика "новыеточки(A)" указывает на теорему приема, осуществляющую переход к новой системе координат для уравнения множества объектов, связанного с объектом A.

Создается спецификация "тип(умножить)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABCDEKMNQXYabcdefghikmnpqrst}(Q = (A, B, C)$ & коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & коорд(вектор$(AB), K) = (d, e, f)$ & коорд(вектор$(AC), K) = (g, h, i)$ & коорд(прямая$(MN), K) = \mathrm{set}_{xyz}($пропорцнаборы$((x + p, y + q, z + r), (k, m, n))$ & x − число & y − число & z − число) & $(k = Xd + Yg$ & $m = Xe + Yh$ & $n = Xf + Yi$ & X − число & Y − число$) = (X = s$ & $Y = t)$ & $(-p = Xd + Yg + a$ & $-q = Xe + Yh + b$ & $-r = Xf + Yi + c$ & X − число & Y − число$) = (X = D$ & $Y = E)$ & прямкоорд$(K) \to$ коорд(прямая$(MN), Q) = \mathrm{set}_{uv}(-tu + sv + tD - sE = 0$ & u − число & v − число))

Спецификация - "тип(умножить)", "терм(Уголмежду(F G прямая(MN)))". Прием определяет координаты прямой MN в двумерной системе координат через ее координаты в трехмерной системе координат.

v. Выражение координат исследуемого множества объектов в одной системе через его координаты в другой (характеристика "новпозиция").

Характеристика "новпозиция(P)" указывает на теорему приема, выражающего координаты исследуемого множества объектов в одной ситеме координат через его координаты в другой. P - цель задачи на исследование.

Создается спецификация "тип(новпозиция)", "цель(P)". Пример:

$\forall_{ABCKMQabcdeffp}(K = (A, B, C)$ & коорд$(A, Q) = (a, b)$ & коорд(вектор$(AB), Q) = (c, d)$ & коорд(вектор$(AC), Q) = (e, f)$ & коорд$(M, K) = \mathrm{set}_{xy}(x$ − число & y − число & $q(x, y))$ & $p = cf - de$ & $\neg(p = 0)$ & прямкоорд$(Q) \to$ коорд$(M, Q) = \mathrm{set}_{xy}(x-$число & $y-$число & $q((fx-ey+be-af)/p, (cy-dx+ad-bc)/p)))$

Спецификация - "тип(новпозиция)", "цель(линия)".

vi. Ввод в рассмотрение координат объекта, для которого уже рассматриваются координаты в другой системе.

A. Ввод в рассмотрение координат элементов одной системы координат в другой системе, если текущие координаты объекта в одной системе не известны, а в другой - известны (характеристика "новопер").

Характеристика "новопер(t)" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение координаты элементов одной системы координат в другой, чтобы определить координатный набор t.

Создается спецификация "тип(контрольодз)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ABCDEFKTa}(K = (A, B, C)$ & $T = (D, E, F)$ & коорд$(M, K) = a \to$ актив(вектор(DA)) & актив(коорд(A, T)))

Спецификация - "тип(контрольодз)", "терм(коорд(M, T))". Прием вводит в рассмотрение координаты начала координат системы K в системе T, чтобы перейти от известных координат объекта M в системе K к рассматриваемым в задаче его координатам в системе T.

B. Ввод в рассмотрение координат связанного с текущим термом множества объектов в одной системе, если известны его координаты в другой системе (характеристика "Новый").

Характеристика "Новый(t)" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение координаты множества объектов в одной системе, если известны его координаты в другой системе. t - терм, инициирующий переход к другой системе.

Создается спецификация "тип(числочленов)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ABK}$(прямкоорд(K) $\rightarrow$ актив(коорд(прямая(AB), K)))

Спецификация - "тип(числочленов)", "терм(уголмежду(прямая(AB) прямая(CD)))". Прием усматривает, что для прямой CD нормализатор "нормкоорд" способен определить ее уравнение в системе K, а для прямой AB имеется уравнение в другой системе координат.

C. Ввод в рассмотрение координат объекта в специальной системе координат, связанной с ним косвенным образом, если уже введены его координаты в другой системе (характеристика "собствкоорд").

Характеристика "собствкоорд" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение координаты объекта в специальной системе координат, связанной с этим объектом, если уже введены координаты этого объекта в другой системе.

Создается спецификация "тип(учетпосылок)". Пример:

$\forall_{AEKQabcdepq}$(фокус(A, E) & прямкоорд(K) & прямкоорд(Q) & коорд(E, Q) $= \text{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & коорд(A, K) $= (p, q) \rightarrow$ актив(коорд(A, Q))))

vii. Ввод в рассмотрение новой системы координат.

A. Ввод в рассмотрение вспомогательной системы координат и задание в ней общего вида уравнения для множества объектов (характеристика "каноничкоорд").

Характеристика "каноничкоорд" указывает на кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, вводящую новую систему координат и определяющую вид уравнения для координат множества объектов относительно этой системы.

Создается кванторная импликация, получаемая из теоремы заменой консеквента - квантора существования - на подкванторное утверждение. Она снабжается спецификацией "тип(номерперехода)". Пример:

$\forall_{ABEFGHKQabcdmp}$(прямкоорд(K) & парабола(E) & вершина(A, E) & коорд(A, K) $= (a, b)$ & фокпараметр(E) $= p$ & направлпараболы(E,

$B)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & $m=\sqrt{c^2+d^2}$ &$\neg(m=0)\to$ $F-$точка & $G-$точка & $H-$точка & $(F,G,H)=Q$ & коорд$(F,K)=(a,b)$ & коорд$(G,K)=(a+c/m,b+d/m)$ & коорд$(H,K)=(a-d/m,b+c/m)$ & коорд$(E,Q)=\mathrm{set}_{xy}(y^2-2px=0$ & $x-$ число & $y-$ число$))$

B. Ввод в рассмотрение вспомогательной системы координат, в которой уравнение для множества объектов имеет стандартный вид (характеристика "стандчисл").

Характеристика "стандчисл" указывает на кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, вводящую новую систему координат, в которой исходное уравнение для координат множества объектов приобретает более простой вид.

Создается кванторная импликация, получаемая из теоремы заменой консеквента - квантора существования - на подкванторное утверждение. Она снабжается спецификацией "тип(нормкосеканс)". Пример:

$\forall_{ABCEKQabcdefmpq}($прямкоорд$(K)$ & коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{xy}(ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ & $x-$ число & $y-$ число$)$ & $m=a-b+\sqrt{(a-b)^2+c^2}$ & $p=m/\sqrt{m^2+c^2}$ & $q=c/\sqrt{m^2+c^2}\to$ $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $(A,B,C)=Q$ & коорд$(A,K)=(0,0)$ & коорд$(B,K)=(p,q)$ & коорд$(C,K)=(-q,p)$ & прямкоорд(Q) & коорд$(E,Q)=\mathrm{set}_{uv}((m^2a+mc^2+bc^2)u^2+(m^2b-mc^2+ac^2)v^2+(md+ce)\sqrt{m^2+c^2}u+(em-cd)\sqrt{m^2+c^2}v+fm^2+fc^2=0$ & $u-$ число & $v-$ число$))$

Прием выполняет поворот системы координат для перехода к главным осям кривой второго порядка.

C. Ввод в рассмотрение вспомогательной системы координат, в которой уравнение для исследуемого множества объектов имеет стандартный вид (характеристика "Стандравно").

Характеристика "Стандравно(P)" указывает на импликацию, вводящую вспомогательную систему координат, в которой исследуемое множество объектов имеет стандартный вид. P - список допустимых целей.

Создается спецификация "тип(символвхождения)", "цель(P)". Пример:

$\forall_{ABCEKQabcdpq}($прямкоорд(K) & коорд$(E,K)=\mathrm{set}_{yx}(ay^2+by+cx+d=0$ & $x-$ число & $y-$ число$)$ & $0<ac$ & $p=(b^2-4ad)/(4ac)$ & $q=-b/(2a)\to A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & $(A,B,C)=Q$ & прямкоорд(Q) & каноничкоорд(Q,E) & коорд$(A,K)=(q,p)$ & коорд$(B,K)=(q,p-1)$ & коорд$(C,K)=(q+1,p)$ & коорд$(E,Q)=\mathrm{set}_{vu}(v^2-cu/a=0$ & $u-$ число & $v-$ число$)$ & фокпараметр$(E)=c/(2a))$

Спецификация - "тип(символвхождения)", "цель(точки линия)". Прием определяет каноническую систему координат и каноническое уравнение параболы.

D. Ввод в рассмотрение вспомогательной системы координат, связанной с текущим термом (характеристика "спецпреобр").

Характеристика "спецпреобр(t)" указывает на теорему приема, вводящего систему координат, связанную с объектом t.

Создается спецификация "тип(параллелограмм)", "терм(t)". Пример:

$\forall_{ABCDEKQ}(Q = (A, B, C)$ & вектор$(AB) \perp$ вектор$(AC) \rightarrow$
D – точка & E – точка & $K = (A, D, E)$ & прямкоорд(K) &
коорд$(B, K) = (l(AB), 0)$ & коорд$(C, K) = (0, l(AC)))$

Спецификация - "тип(параллелограмм)", "терм(оруголмежду(a, b, Q))". Прием выполняет переход к прямоугольной системе координат.

(l) Первичный ввод системы координат.

i. Ввод системы координат, связанной с объектами задачи (характеристика "прямкоорд").

Характеристика "прямкоорд(F)" указывает на импликацию, вводящую в рассмотрение систему координат. F - список уточняющих контекст фильтров. Если инициализация осуществляется текущим выражением A, то в начале списка F помещается терм "контрольвывода(A)". Если фильтр B вида "контекст(...)" переброшен в указатели, то он регистрируется в списке F как "указатель(B)".

Создается спецификация "тип(единица)", "см(F)". Если в F имеется терм "контрольвывода(A)", то он исключается из F, а в спецификацию добавляется элемент "указатель(контрольвывода(A))". Пример:

$\forall_{ABCDEFGa}($куб(a) & ребро(отрезок$(AB), a)$ & ребро(отрезок$(AC), a)$ &
ребро(отрезок$(AD), a)$ & разныеточки(B, C) & разныеточки(B, D) &
разныеточки$(C, D) \rightarrow E$ – точка & F – точка & G – точка &
$K = (A, E, F, G)$ & прямкоорд(K) & $E \in$ прямая(AB) &
$F \in$ прямая(AC) & $G \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, B, E) &
точкалуча(A, C, F) & точкалуча$(A, D, G))$

Прием вводит прямоугольную систему координат при рассмотрении куба, если до этого такой системы не было, но рассматривался вектор с началом в точке A.

ii. Первичный ввод системы координат, в которой задается общий вид уравнения для координат множества объектов (характеристика "каноничвид").

Характеристика "каноничвид" указывает на кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, выполняющую первичный ввод канонической системы координат и определяющую общий вид уравнения для координат множества объектов.

Создается кванторная импликация, получаемая из теоремы заменой консеквента - квантора существования - на подкванторное утверждение. Она снабжается спецификацией "тип(символы)". Пример:

$\forall_{EKab}$(эллипс(E) & большаяось(E) $= a$ & малаяось(E) $= b \rightarrow$ прямкоорд(K) & $0 < a$ & $0 < b$ & $0 \leq a - b$ & коорд(E, K) $=$ $\mathrm{set}_{xy}(4x^2/a^2 + 4y^2/b^2 = 1$ & x – число & y – число))

(m) Задачи на преобразование, имеющие цель "класс".

i. Выражение через вспомогательные параметры координат объекта в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "место").

Характеристика "место" указывает на теорему приема, созданную для выражения через вспомогательные параметры координат объекта в задаче на преобразование, имеющей цель "класс".

Создается спецификация "тип(регистрациязадачи)". Пример:

$\forall_{ABCDKab}(K = (A, B, C)$ & D – точка & прямкоорд(K) $\rightarrow a$ – число & b – число & коорд(D, K) $= (a, b)$)

Антецеденты идентифицируются с посылками задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Прием вводит новые переменные a, b для определения координат рассматриваемой в задаче точки D.

ii. Вывод в посылках задачи на преобразование, имеющей цель "класс", равенства, выражающего текущий числовой атом через координаты (характеристика "значпарам").

Характеристика "значпарам(N)" указывает на тождество, выражающее невырожденный числовой атом через параметры координат. N - направление замены.

Рассматривается заменяемая часть A консеквента теоремы, и создается спецификация "тип(логарифм)", "терм(A)". Пример:

$\forall_{ABKabpq}$(прямкоорд(K) & коорд(A, K) $= (a, b)$ & коорд(B, K) $= (p, q) \rightarrow$ $l(AB) = \sqrt{(a - p)^2 + (b - q)^2}$)

Спецификация - "тип(логарифм)", "терм($l(AB)$)". Прием выводит следствие и срабатывает при усмотрении выражения $l(AB)$ в посылке задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Антецеденты идентифицируются с посылками.

iii. Ввод в рассмотрение системы координат в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "точкарасст").

Характеристика "точкарасст" указывает на теорему приема, вводящего вспомогательную систему координат в задаче на преобразование, имеющей цель "класс".

Создается спецификация "тип(нормкласс)". Пример:

$\forall_{ABCDEK}$(прямая(AB) $\perp$ прямая(AC) & разныеточки(A, B) & разныеточки(A, C) $\rightarrow D$ – точка & E – точка & $(A, D, E) = K$ & прямкоорд(K) & $E \in$ прямая(AC) & $D \in$ прямая(AB) & $\neg(A \in$ интервал(CE)) & $\neg(A \in$ интервал(BD)))

Прием вводит систему координат K в планиметрической задаче на преобразование, имеющей цель "класс", если пока системы координат в ней не введены.

iv. Вывод в посылках задачи на преобразование, имеющей цель "класс", равенства, выражающего координату через числовые атомы (характеристика "числкоэфф").

Характеристика "числкоэфф" указывает на тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат.

Проверяется, что консеквент - равенство, в одной из частей которого расположена переменная, не входящая в другую часть. Затем создается спецификация "тип(периметр)". Пример:

$\forall_{ABCDKa}(D -$ точка & прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ &
коорд$(D, K) = (x, 0)$ & $0 \leq x \to x = l(AD))$

v. Вычисление координат объекта в задаче на преобразование, имеющей цель "класс" (характеристика "наборзначений").

Характеристика "наборзначений" указывает на теоремуприема, вычисляющего координаты объекта в задаче на преобразование, имеющей цель "класс".

Создается спецификация "тип(алгебрвхождение)". Пример:

$\forall_{AKab}($прямкоорд(K) & $A -$ точка & коорд$(A, K) = (a, b) \to$
коорд$(A, K) = (a, b))$

Первые два антецедента идентифицируются с посылками задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Левая часть последнего антецедента, выделенного указателем "идентификатор", обрабатывается нормализатором "нормкоорд".

(n) Переход от координатного задания множества к бескоординатному в задаче на исследование, имеющей цель "точки" (характеристика "точкитела").

Характеристика "точкитела" указывает на теорему для перехода от координатного к бескоординатному описанию множества точек.

Создается спецификация "тип(узелвывода)". Пример:

$\forall_{ABCKab}($коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{xy}(x = a$ & $b < y$ & $y -$ число$) \to$
$B =$ тчкоорд$(K, (a, b))$ & $C =$ тчкоорд$(K, (a, b + 1))$ & $A =$ луч$(BC))$

5.4.5 Вывод в условиях задачи на описание

Разрешение относительно неизвестных

1. Вывод условия, разрешенного относительно неизвестного подвыражения (характеристика "значениепеременной").

Характеристика "значениепеременной"указывает на тождество, у которого в одной части находится пенеменная, не входящая в противоположную часть.

Рассматривается переменная x, расположенная в одной из частей тождества, и создается спецификация "тип(возрастает)", "неизвестная(x)". Пример:

$\forall_{abpqn}(a -$ целое & $\neg(p|b)$ & $b -$ целое & $n -$ целое & $0 \leq n$ & $ap^n = b \to n = 0)$

Спецификация - "тип(возрастает)", "неизвестная(n)". Последний антецедент идентифицируется с условием задачи на описание, причем выражение n содержит неизвестные. Переменная p идентифицируется с натуральной константой.

2. Вывод условия, выражающего неизвестную задачи через другие неизвестные (характеристика "значениепеременной").

   Рассматривается переменная x, расположенная в одной из частей тождества, и создается спецификация "тип(возрастаетвточке)", "неизвестная(x)". Пример:

   $\forall_{ABPQfpqst}(\mathrm{Dom}(f) = A \ \& \ \text{Фал}(f) \ \& \ \forall_x(Q(x) \to P(f(t(x))) = s(x)) \ \& \ (Q(x) \ \& \ t(x) = y) = (x = p(y)) \ \& \ (z - \mathrm{boolean} \ \& \ P(z) = s(x)) = (z = q(x)) \to f = \lambda_y(q(p(y)), y \in A))$

   Спецификация - "тип(возрастаетвточке)", "неизвестная(f)". Первые три антецедента идентифицируются с условиями задачи на описание, неизвестной которой служит переменная f. Переменные p, q, s, t, P, Q функциональные. Два последних антецедента выделены указателем "идентификатор". Левая часть первого из них разрешается задачей на описание относительно x, левая часть второго - относительно новой переменной z.

3. Вывод следствия условия, в котором исключено сложное понятие (характеристика "исклтангенс").

   Характеристика "исклтангенс" указывает на теорему которую можно использовать для вывода следствия условия задачи на описание, в котором исключено сложное понятие.

   Создается спецификация "тип(нормМаксимум)". Пример:

   $\forall_{abf}(\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=a}^{n} f(i), n - \text{натуральное})) \ \& \ b = \lim_{i\to\infty} f(i) \to b = 0)$

   Первый антецедент идентифицируется с содержащим неизвестные условием задачи на описание. Второй - выделен указателем "идентификатор". Его правая часть обрабатывается нормализатором "нормпредел". Результат b отличен от 0 и не содержит символа "предел".

4. Вывод условия, подготавливающий возможность исключения сложного подвыражения с неизвестными (характеристика "слож").

   Характеристика "слож" указывает на импликацию для приема вывода условия, подготавливающего возможность исключения сложного выражения с неизвестными.

   Создается спецификация "тип(архивзадачи)". Пример:

   $\forall_{abcdef}(a\sqrt[3]{d} + b\sqrt[3]{e} + c\sqrt[3]{f} = 0 \to a^3d + b^3e + c^3f - 3abc\sqrt[3]{d}\sqrt[3]{e}\sqrt[3]{f} = 0)$

   Прием применяется к условию задачи на описание. Выражения d, e, f содержат неизвестные.

5. Вывод условия, ограничивающего значения неизвестного подвыражения конечным множеством (характеристика "конечнпересек").

   Характеристика "конечнпересек(X)" указывает на импликацию для приема вывода условия, ограничивающего значения неизвестных списка X конечным множеством.

   Создается спецификация "тип(констцелое)", "неизвестная(X)". Пример:

   $\forall_{abcdmn}(n-$натуральное $\&\ 0 < a\ \&\ d = [(c-m)/a]\ \&\ m \leq b\ \&\ an+b = c \rightarrow n \leq d)$

   Спецификация - "тип(констцелое)", "неизвестная(n)". Первый и последний антецеденты идентифицируются с условиями задачи на описание. Выражение n содержит неизвестные. Четвертый антецедент использует пакетный синтезатор для нахождения численной нижней оценки m. Переменные a, c, d идентифицируются с целочисленными константами.

6. Вывод условия, подготавливающего ограничение значений неизвестного подвыражения конечным множеством (характеристика "конечнпересечения").

   Характеристика "конечнпересечения" указывает на теорему приема для вывода условия, подготавливающего возможность ограничения значений неизвестных конечным множеством.

   Создается спецификация "тип(мощности)". Пример:

   $\forall_{abcdp}((a+b)/c-$ целое $\&\ (a+d)/c-$ целое $\&\ p = b-d \rightarrow p/c-$ целое$)$

   Первые два антецедента идентифицируются с условиями задачи на описание, третий - выделен указателем "идентификатор". Выражение c содержит неизвестные, p - десятичная константа.

7. Вывод параметрического описания неизвестной (характеристика "заменанеизвестной").

   Характеристика "заменанеизвестной" либо "заменанеизвестной(A)" указывает на импликацию, выводящую параметрическое описание неизвестной в условиях задачи на описание. Во втором случае инициализация попытки применения приема осуществляется текущим выражением A.

   Создается спецификация "тип(суммаряда)", "указатель(контрольвывода(A))". Пример:

   $\forall_x(\exists_y(x = \cos(y)\ \&\ 0 \leq y\ \&\ y \leq \pi\ \&\ y-$ число$))$

   Спецификация "тип(суммаряда)", "указатель(контрольвывода($\sqrt{1-x^2}$))". Прием применяется при усмотрении в условии задачи на описание подвыражения вида "$Ax\sqrt{1-x^2}$". Переменная x - неизвестная.

Разбор случаев в условиях задачи на описание

1. Разбор случаев в условиях задачи на описание, связанный со значением неизвестного подтерма (характеристика "фиксконст").

   Характеристика "фиксконст(X)" указывает на импликацию, выводящую дизъюнкцию для разбора случаев по значениям неизвестных подтермов. X - список переменных, хотя бы одна из которых идентифицируется с неизвестным подтермом.

   Создается спецификация "тип(усмнатуральное)", "неизвестная(X)". Пример:

   $\forall_{mnp}(0 < p - 1$ & m – целое & n – целое & простое$(p^m + p^n) \rightarrow m = 0 \ \vee$
   $n = 0 \ \vee m < 0$ & $n < 0)$

   Спецификация - "тип(усмнатуральное)", "неизвестная(m, n)".

2. Разбор случаев по параметрическим описаниям неизвестной (характеристика "Альтернатива").

   Характеристика "Альтернатива(x)" указывает на импликацию для разбора случаев по параметрическим описаниям неизвестной x.

   Создается спецификация "тип(простойоперанд)", "неизвестная(x)". Пример:

   $\forall_{adnx}(a$ – целое & x – целое & $\neg(a - \text{even})$ & $ax^n/d - \text{even} \rightarrow$
   $\exists_k(k$ – целое & $x = 2k) \ \vee \ \exists_k(k$ – целое & $x = 2k + 1))$

   Спецификация - "тип(простойоперанд)", "неизвестная(x)". Последний антецедент идентифицируется с условием задачи на описание. Переменная x - неизвестная, n - натуральная константа. Четность либо нечетность x из контекста не усматривается.

3. Разбор случаев для исключения сложного подвыражения.

   (a) Разбор случаев в условиях задачи на описание, направленный на исключение сложного подвыражения (характеристика "Случай").

   Характеристика "Случай(t)" указывает на импликацию для разбора случаев с целью исключения сложного подвыражения t.

   Проверяется наличие антецедента, содержащего t, и создается спецификация "тип(диффильтр)". Пример:

   $\forall_{abcd}(a|b| + c = d \rightarrow 0 \leq b \ \vee \ b < 0)$

   Антецедент идентифицируется с диференциальным уравнением - условием задачи на описание. Выражение b содержит неизвестные, причем каждое слагаемое выражений c, d имеет своим сомножителем b либо $|b|$.

(b) Разбор случаев в условиях задачи на описание, направленный на исключение текущего сложного подвыражения (характеристика "Случай").

Пусть характеристика - "Случай(t)", причем t не встречается в антецедентах. Тогда создается спецификация "тип(нормобъединение)", "терм(t)". Пример:

$\forall_a(a < 0 \ \vee \ 0 \leq a)$

Спецификация - "тип(нормобъединение)", "терм($|a|$)". Текущее выражение $|a|$ встречается в условии задачи на описание и содержит неизвестные.

4. Разбор случаев в условиях задачи на описание, позволяющий установить связь между вспомогательными параметрами (характеристика "перем").

Характеристика "перем" указывает на теорему приема разбора случаев в условиях задачи на описание, позволяющего установить связь между вспомогательными параметрами.

Создается спецификация "тип(усмпринадлежит)". Пример:

$\forall_{abcdeghijkmn}(m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\ \&\ amb/c+d < i\ \&\ i \leq amb/c+e\ \&\ anb/c+g \leq i\ \&\ i \leq anb/c+h\ \&\ j = [(h-d)c/(ab)]\ \&\ k = [(e-g)c/(ab)] \rightarrow \exists_f(f \in \{0,\ldots,j+k\}\ \&\ n = m-j+f))$

Квантор существования разворачивается в дизъюнкцию, по которой выполняется разбор случаев. Переменная i - неизвестная. Прием осуществляет идентификацию двух различных целочисленных параметров m, n, определяющих серии промежутков для этой неизвестной. Переменные j, k - десятичные константы. Они определяются двумя последними антецедентами, выделенными указателем "идентификатор". Переменные a, c идентифицируются с натуральными константами. На переменную b ограничений нет, однако в примерах она идентифицировалась с числом π.

5. Специальный разбор случаев в условиях задачи на описание (характеристика "смцели").

Характеристика "смцели" указывает на теорему приема для специального разбора случаев в условии задачи на описание.

Создается спецификация "тип(учетконтекста)". Пример:

$\forall_a(a = 1 \ \vee \ \neg(a-1=0))$

Прием выполняет разбор случаев для сравнения с единицей выражения a, выбранного в качестве общего основания рассматриваемых в задаче логарифмов. Его применение инициируется усмотрением выражения вида "$\log_b c$" и комментарием (нормлогарифм a), указывающим на выбранное основание a. В случае $a = 1$ могут быть найдены особые решения, а в случае $\neg(a = 1)$ будут работать стандартные методы преобразования логарифмов.

Вывод ограничения на известные параметры

1. Вывод ограничения на известные параметры при редактировании ответа задачи на описание (характеристика "транзитоперанд").

   Характеристика "транзитоперанд" указывает на теорему, имеющую вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов.

   Рассматривается консеквент P и его заголовок f. Справочник "нормпарам" определяет по символу f наличие нормализатора R ограничений на параметры задач на описание, имеющих вид "$f(\ldots)$". Выбирается новая переменная X. Создается импликация, антецеденты которой суть все существенные антецеденты теоремы, перед которыми размещается равенство $X = P$. Консеквентом служит переменная X. Эта импликация сопровождается спецификацией "тип(одзоператора)", "оператор(R)". Пример:

   $\forall_{abcd}(d = (b \leq c)\ \&\ b \leq x\ \&\ x \leq c \rightarrow d)$

   Спецификация - "тип(одзоператора)", "оператор(стандменьшеилиравно)". Прием используется при редактировании ответа задачи на описание. x - неизвестная; выражения b, c не содержат неизвестных. Прием добавляет к ответу условие невырожденности промежутка.

2. Вывод ограничения на известные параметры при редактировании параметрического описания (характеристика "транзитоперанд").

   Аналогично предыдущему, но создается спецификация "тип(максимин)", теорема не изменяется и ссылка на нормализатор не добавляется. Пример:

   $\forall_{abx}(a \leq x\ \&\ x \leq b \rightarrow a \leq b)$

   Прием применяется в задаче на описание, имеющей цель "учетответа", т.е. редактирующей параметрическое описание. Переменная x - неизвестная; выражения a, b неизвестных не содержат. Переменная x в других условиях, кроме, быть может, условия "число(x)", не встречается. Выводимое неравенство имеет не менее двух целочисленных параметров.

Исключение несущественных неизвестных

1. Исключение несущественных неизвестных в задаче на описание при невырожденном ограничении (характеристика "общнорм").

   Характеристика "общнорм(N)" указывает на эквивалентность для общей стандартизации утверждения, не имеющего вида дизъюнкции либо конъюнкции. Заменяющее утверждение элементарное. N - направление замены.

   Проверяется отсутствие характеристики "усиление($\ldots$)" для направления, противоположного N. Проверяется, что заменяемая часть имеет своим заголовком квантор существования. Переменной x10 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. Проверяется, что никакой параметр элемента списка x10, не связанный квантором существования, не входит в этот элемент дважды. Проверяется, что все утверждения списка x10 и заменяющая часть теоремы элементарны. Тогда теорема сопровождается спецификацией "тип(удалениеусловия)". Пример:

$\forall_{ab}(\exists_c(c \in a \;\&\; c \in b) \leftrightarrow \neg(\text{непересек}(a, b)))$

Соответствующий прием имеет заголовок "связка" и предназначен для исключения несущественной неизвестной c.

2. Исключение несущественных неизвестных в задаче на описание при вырожденном ограничении (характеристика "допконтекст").

   Характеристика "допконтекст" указывает на кванторную импликацию, консеквент которой - квантор существования от конъюнкции элементарных утверждений.

   Создается спецификация "тип(обрывзадачи)". Пример:

   $\forall_{AB}(A - \mathrm{set} \;\&\; B - \mathrm{set} \;\&\; \neg(B = \emptyset) \to \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)))$

   Прием имеет заголовок "связка".

3. Исключение несущественных неизвестных в задаче на описание при вырожденном ограничении (характеристика "нормсуществует").

   Характеристика "нормсуществует" указывает на кванторную импликацию без существенных посылок с квантором существования в консеквенте.

   Создается спецификация "тип(обрывзадачи)". Пример:

   $\forall_e(\exists_a(a - \mathrm{set} \;\&\; e \in a))$

   Прием имеет заголовок "связка".

Обратный вывод

1. Непосредственный подбор примера значений неизвестных, не входящих в невырожденные условия.

   (a) Непосредственный подбор примера значений неизвестных, не входящих в невырожденные условия (характеристика "пример").

   Характеристика "пример" указывает на кванторную импликацию без существенных посылок, консеквент которой - элементарное утверждение $f(A_1 \ldots A_n)$ либо отрицание такого утверждения. Все A_i, кроме одного, - попарно различные переменные.

   Рассматривается консеквент, у которого отбрасывается отрицание, если оно есть. Получается терм вида $f(A_1 \ldots A_n)$. Находится такое A_i, которое либо не является переменной, либо совпадает с каким-либо другим A_j. Проверяется, что прочие операнды суть попарно различные переменные

$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Выбирается новая переменная y. Создается список S, полученный добавлением к антецедентам равенства $y = A_i$. Формируется утверждение T вида $f(x_1 \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Проверяется, что задача на описание не в состоянии определить для него явное параметрическое описание значений y. Переменной x14 присваивается кванторная импликация с антецедентами S, консеквентом которой служит T либо (если изначально в консеквенте было отрицание) отрицание утверждения T. Она сопровождается спецификацией "тип(подборзначений)", "неизвестная y", "подборзначений N", где N - список номеров антецедентов, имеющих параметры, не входящие в консеквент, а также номер последнего антецедента. Если список X переменных антецедентов, не входящих в консеквент, непуст, то к спецификации добавляется элемент "указатель(новаяпеременная(X))". Пример:

Из теоремы $\forall_b(b - \text{set} \to b \subseteq b)$ получается теорема приема $\forall_{ax}(x = a \to a \subseteq x)$. Спецификация - "тип(подборзначений)", "неизвестная x", "подборзначений(1)".

(b) Непосредственный подбор примера значений неизвестных, не входящих в невырожденные условия (характеристика "конст").

Характеристика "конст" указывает на теорему без переменных.

Проверяется, что заголовок теоремы отличен от символов "коммутативно", "ассоциативно", "не", а сама теорема имеет вид $P(s)$, где s - логический символ. Создается теорема вида "$\forall_a(a = s \to P(a))$". Она сопровождается спецификацией "тип(подборзначений)", "подборзначений(1)". Пример:

$\forall_a(a = \emptyset \to a - \text{set})$

(c) Непосредственный подбор примера значений неизвестных, не входящих в невырожденные условия (характеристика "попыткаспуска").

Характеристика "попыткаспуска" указывает на простую импликацию с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте.

Проверяется, что каждый существенный антецедент имеет единственный параметр, а консеквент - не менее двух параметров. Тогда создается спецификация "тип(подборзначений)", "подборзначений($n_1 \ldots n_k$)", где $n_1, \ldots, n_k$ - номера существенных антецедентов. Пример:

$\forall_{bc}(\neg(b = \emptyset) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \to \neg(b \cup c = \emptyset))$

Спецификация - "тип(подборзначений)", "подборзначений(1)".

(d) Непосредственный подбор примера значений неизвестных, не входящих в невырожденные условия (характеристика "подборзначений").

Характеристика "подборзначений(X)" указывает на импликацию для подбора значений. X - список реализуемых переменных.

Затем создается спецификация "тип(подборзначений)", "неизвестная(X)". Пример:

$\forall_{abcx}(0 < c \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ x = -b/a \to |ax + b| < c)$

Спецификация - "тип(подборзначений)", "неизвестная(x)".

(e) Непосредственный подбор примера значений неизвестных, не входящих в невырожденные условия (характеристика "нормализация").

Пусть характеристика - "нормализация(N)". Проверяется, что заменяемая часть бесповторна, а заменяющая - логический символ p. В заменяемой части выбирается вхождение v однобуквенного подтерма - логического символа s. Выбирается переменная y, не входящая в теорему. Определяется результат R замены в заменяемой части вхождения v на переменную y. Затем создается импликация, антецеденты которой - антецеденты исходной теоремы и равенство $y = s$. Консеквентом служит равенство $R = p$. Она сопровождается спецификацией "тип(подборзначений)", "неизвестная(y)". Пример:

$\forall_{ax}(x = 0 \to x \cdot a = 0)$

Спецификация - "тип(подборзначений)", "неизвестная(x)".

2. Подбор параметризованного примера значения неизвестных (характеристика "нормализация").

Пусть характеристика - "нормализация(N)". Проверяется, что заменяющее выражение - переменная, а заменяемая часть p имеет единственное подвыражение t максимальной сложности, причем это подвыражение является корневым операндом терма p. Выбирается переменная x, не входящая в теорему, и рассматривается результат q замены в терме p корневого операнда t на x. Составляется список Y параметров терма t, не вошедших в заменяющую часть r исходной теоремы и в терм q. Проверяется, что этот список непуст. Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения "$\exists_Y(x = t)$", а консеквентом служит равенство $q = r$. Она сопровождается спецификацией "тип(повтор)", "неизвестная(x)". Пример:

$\forall_{abf}(\exists_b(f = \text{конст}(a, b)) \to \text{Dom}(f) = a)$

Спецификация - "тип(повтор)", "неизвестная(f)".

3. Подбор параметризованного примера значения неизвестных (характеристика "общнорм").

Пусть характеристика "общнорм(N)", т.е. теорема - эквивалентность, выполняющая общую стандартизацию. Проверяется, что заменяемая часть T теоремы, после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть, имеет вид "$P(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n)$", где $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ - попарно различные переменные, t - неоднобуквенный терм, P отлично от равенства. Составляется непустой список Y параметров терма t, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Проверяется, что T содержит все переменные теоремы и что оценка сложности заменяющей части Q меньше оценки заменяемой. Проверяется, что Q - не конъюнкция. Поочередно рассматриваются случаи, когда A - список антецедентов теоремы, к которому добавлено утверждение Q, и когда A - список антецедентов теоремы, к которому добавлено отрицание Q. Выбирается переменная z, не входящая в теорему, и создается терм q вида "$P(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)$". Формируется результат T' замены в терме T подтерма $P(\ldots)$: на q, если в A входит Q, и на отрицание q, если в A входит отрицание Q. Составляются список B всех элементов списка A, содержащих переменные Y, и список C всех остальных элементов списка A. Проверяется, что список C непуст, и решается задача на описание, посылками которой служат утверждения C, а условиями - утверждения B. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "редакция", "неизвестные Y". Составляется список D конъюнктивных членов ответа H. Проверяется, что оценка сложности каждого содержащего параметры терма T' элемента списка D меньше оценки сложности терма T'. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения C, пополненные утверждением "$\exists_Y(H \ \& \ z = t)$". Консеквентом служит утверждение T'. Эта импликация сопровождается спецификацией "тип(повтор)", "неизвестная(z)". Пример:

По теореме

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(a, \{b\}) \leftrightarrow a \leq b)$

создается теорема:

$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ \exists_b(b - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ c = \{b\}) \rightarrow \text{нижняягрань}(a, c))$

Спецификация - "тип(повтор)", "неизвестная(c)".

4. Подбор параметризованного примера значения неизвестных (характеристика "смзнач").

   Характеристика "смзнач(x)" указывает на кванторную импликацию, которая может быть использована для параметризованного подбора значения неизвестной x.

   Создается спецификация "тип(повтор)", "неизвестная(x)". Пример:

   $\forall_x(\exists_y(x = \{y\}) \rightarrow \neg(x = \emptyset) \ \& \ x - \text{set})$

   Спецификация - "тип(повтор)", "неизвестная(x)".

5. Попытка подбора примера значения неизвестной задачи на описание (характеристика "нормализация").

   Пусть характеристика - "нормализация(N)". Проверяется, что заменяющее выражение - переменная, а заменяемая часть p имеет единственное подвыражение t максимальной сложности, причем это подвыражение является корневым операндом терма p. Выбирается переменная x, не входящая в теорему, и рассматривается результат q замены в терме p корневого операнда t на x. Проверяется, что все параметры терма t встречаются среди параметров заменяющей части r исходной теоремы и параметров терма q. Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения "$x = t$", а консеквентом служит равенство $q = r$. Она сопровождается спецификацией "тип(смешаннаядробь)", "неизвестная(x)". Пример:

Теорема "$\forall_a(a - \mathrm{set} \to \mathrm{Dom}(\text{тождфунк}(a)) = a)$" преобразуется в теорему приема:

$\forall_{af}(f = \text{тождфунк}(a) \to \mathrm{Dom}(f) = a)$

Спецификация - "тип(смешаннаядробь)", "неизвестная(f)".

6. Подбор примера значений неизвестных с помощью вычислений (характеристика "Подборзначений").

   Характеристика "Подборзначений(X)" указывает на теорему приема для подбора значений неизвестных списка X с помощью вычислений.

   Создается спецификация "тип(десзапись)", "неизвестная(X)". Пример:

   $\forall_{AGHfghpqry}(f = \lambda_x(p(x), A(x))$ & $\text{квадрканоничвид}(x, p(x), y, q, r)$ & $G = \text{числотобр}(x, y, r)$ & $H = \text{числфунк}(y, q)$ & $g = G$ & $h = H \to$ $\text{каноничвид}(f, g, h))$

   Спецификация "тип(десзапись)", "неизвестная(g, h)". Соответствующий прием имеет заголовок "подборзначений". Второй антецедент, выделенный указателем "значения", обращается к пакетному синтезатору для приведения квадратичной формы $p(x)$ к каноническому виду. При этом q - результирующее выражение, y - список переменных, относительно которых берется канонический вид, r - список равенств, выражающих переменные x через переменные y. Два последних антецедента выделлены указателем "подборзначений". Они дают явные значения для неизвестных g, h (линейного преобразования и результата приведения к каноническому виду) и замещают во вспомогательной задаче исходное условие "каноничвид(f, g, h)".

7. Обратный вывод с переходом к более простым понятиям при подборе примера (характеристика "подбор").

   Характеристика "подбор(t N)" указывает на кванторную импликацию, обеспечивающую попытку обратного вывода с переходом к более простым понятиям. t - переменная либо терм, указывающие неизвестное выражение. N - набор номеров заменяющих антецедентов.

   Если t - неоднобуквенный терм, то вместо него далее берется указатель его вхождения в консеквент теоремы. Создается спецификация "тип(перечислфрагментов)", "подборзначений(N)", "см(не(известно(t)))". Пример:

   $\forall_{mn}(m - \text{целое}$ & $n - \text{целое}$ & $0 < n - m$ & $0 < m \to \neg(n|m))$

   Спецификация - "тип(перечислфрагментов)", "подборзначений(3 4)", "см(не(известно($n|m$)))".

8. Обратный вывод для исключения кванторной импликации (характеристика "импликация").

   Характеристика "импликация(N)" указывает на теорему для исключения кванторной импликации при обратном выводе. N - список номеров заменяющих антецедентов.

Создается спецификация "тип(заменаоперанда)", "подборзначений(N)". Пример:

$\forall_{ab}(0 < a \ \& \ 0 \leq b - 1 \ \& \ a < b \rightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \neg(a = b^n)))$

Спецификация - "тип(заменаоперанда)", "подборзначений(3)".

9. Обратный вывод для декомпозиции условия задачи на описание (характеристика "разделить").

   Характеристика "разделить(N)" указывает на теорему, обеспечивающую декомпозицию условия при обратном выводе. N - набор номеров заменяющих антецедентов.

   Создается спецификация "тип(непересек)", "подборзначений(N)". Пример:

   $\forall_{ab}(0 < a \ \& \ 0 < b \rightarrow \neg(a + b = 0))$

   Спецификация - "тип(непересек)", "подборзначений(1 2)".

10. Обратный вывод с переходом к более простым понятиям в задаче с целью "длялюбого" (характеристика "незавсерия").

    Характеристика "незавсерия(N)" указывает на теорему, используемую для обратного вывода в задаче с целью "длялюбого". N - набор номеров заменяющих антецедентов.

    Создается спецификация "тип(принадлежит)", "подборзначений(N)". Пример:

    $\forall_{mnkx}(n - \text{целое} \ \& \ k - \text{целое} \ \& \ m = nk \ \& \ x = n \rightarrow x|m)$

    Спецификация - "тип(принадлежит)", "подборзначений(4)". Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "длялюбого". Третий антецедент идентифицируется с утверждением из контекста. Переменные терма n не входят в список запрещенных переменных, определяемый целью "независит ...".

11. Обратный вывод при попытке индуктивного построения (характеристика "обрнабор").

    Характеристика "обрнабор(N)" указывает на теорему, используемую для обратного вывода при попытке индуктивного построения. N - набор номеров заменяющих антецедентов.

    Создается спецификация "тип(перечень)", "подборзначений(N)". Пример:

    $\forall_{Afgnp}(\text{Dom}(f) = \{1, \ldots, n\} \ \& \ \text{Dom}(g) = \{1, \ldots, n\} \ \& \ \exists_{ihq}(h \in A \ \& \ h(n) = i \ \& \ f(i) = g(n) \ \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \text{Переводит}(q, \text{сужение}(\text{произведение}(f, h), \{1, \ldots, n-1\}), \text{сужение}(g, \{1, \ldots, n-1\})) \ \& \ \text{Val}(q) \subseteq \text{set}_u(\exists_v(v \in A \ \& \ v(n) = n \ \& \ u = \text{сужение}(v, \{1, \ldots, n-1\}))) \ \& \ p = \text{префикс}(h, \lambda_j(\text{таблица}(\{q(j), n \rightarrow n\}), j \in \text{Dom}(q)))) \rightarrow \text{Переводит}(p, f, g) \ \& \ \text{Val}(p) \subseteq A)$

Спецификация - "тип(перечень)", "подборзначений(3)". Прием предпринимает попытку совмещения последних элементов двух наборов при доказательстве по индукции.

12. Обратный вывод в задаче на описание, использующий кванторную импликацию из контекста (характеристика "длялюбого").

    Характеристика "длялюбого(N)" указывает на теорему приема для обратного вывода в задаче на описание, использующего кванторную импликацию из контекста. N - набор номеров заменяющих антецедентов.

    Создается спецификация "тип(тройнойинтеграл)", "подборзначений(N)". Пример:

    $\forall_{Aabcft}(A(t)\ \&\ \forall_x(A(x) \to 0 \le a + f(x))\ \&\ 0 \le b - ac\ \&\ 0 < c \to 0 \le b + cf(t))$

    Спецификация - "тип(тройнойинтеграл)", "подборзначений(3)". Второй антецедент идентифицируется с утверждением P из контекста. Переменные f, A функциональные. Указатель "контекст" определяет идентификацию в P и в заменяемом условии, соответственно, выражений вида $g(x)$ и $g(t)$ для некоторой обычной переменной g. Проверяется, что $f(t)$ содержит неизвестные, а b - не содержит.

13. Подбор примера значения неизвестной, устраняющий зависимость от запрещенных переменных (характеристика "незавгруппы").

    Характеристика "незавгруппы(x)" указывает на теорему приема для подбора примера значения неизвестной x, устраняющего зависимость от запрещенных переменных.

    Создается спецификация "тип(двойнойинтеграл)", "неизвестная(x)". Пример:

    $\forall_{abc}(0 \le a - b\ \&\ c = a \to b \le c)$

    Спецификация - "тип(двойнойинтеграл)", "неизвестная(c)". Первый антецедент идентифицируется с утверждением из контекста, второй - заменяет условие задачи. Выражение a не содержит "запрещенных" переменных, а выражение b - содержит.

14. Использование синтезатора для устранения зависимости от запрещенных переменных (характеристика "транзитоперанд").

    Характеристика "транзитоперанд" указывает на теорему, имеющую вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с двумя переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов.

    Рассматривается существенный антецедент A, допускающий обработку пакетным синтезатором. Проверяется, что его входная переменная не встречается в консеквенте теоремы, а выходная - встречается. Тогда создается спецификация "тип(Неизвестная)", "значения(i)", "подборзначений(N)". Здесь i - номер антецедента A, N - номер другого существенного антецедента. Пример:

$\forall_{abd}(d \leq a \,\&\, a \leq b \rightarrow d \leq b)$

Спецификация - "тип(Неизвестная)", "значения(2)", "подборзначений(1)". Прием применяется к условию задачи на описание, имеющей цель "независит X"и цель "длялюбого". Выражение b содержит переменные X. Второй антецедент определяет при помощи синтезатора "нижняяоценка" нижнюю оценку a выражения b, не зависящую от переменных X.

Пакетные операторы

1. Проверочный оператор.

   (a) Прием проверочного оператора (характеристика "спуск").

   Характеристика "спуск(P)" указывает на простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком P, причем все антецеденты также обрабатываются проверочными операторами.

   Для такой характеристики созданы два различных приема спецификатора, вводящих приемы проверочных операторов:

   i. Общий случай.
   Если консеквент - отрицание равенства выражений, для которых предусмотрен специальный проверочный оператор усмотрения их различий ("разныеточки", "разныепрямые" и т.п.), то отрицание равенства заменяется на соответствующее обращение к оператору. Вводится накопитель спецификации x7, в который заносятся элементы "тип(спуск)", "оператор(P)". Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент.

   Определяются антецеденты x10, требующие непосредственной идентификации. Проверяется, что список параметров антецедента x10 такой же, как у терма x9. Проверяется, что x10 и x9 бесповторны. Переменной x11 присваивается список максимальных по включению подвыражений терма x10, переменной x12 - таких подвыражений терма x9. Проверяется, что существует такой элемент списка x11, который не входит в список x12 и не получается из подтермов выражений списка x12 отбрасыванием части операндов. Проверяется, что число вхождений в x9 коммутативных операций не менбше, чем в x10 и что оценка сложности утверждения x10 не меньше, чем для x9. Проверяется, что если x9 содержит символ "значение", то x10 тоже его содержит. Находится результат x14 упрощения терма x9 относительно антецедентов, отличных от A. Проверяется, что он отличен от x10. Тогда к x7 добавляется элемент "антецедент(n)", где n - номер антецедента x10.

   Если среди характеристик теоремы имеется терм "Спуск" либо "Спуск(N)", то к x7 добавляется элемент "указатель(спуск)" либо "указатель(спуск(N))".

   Далее теорема сопровождается спецификацией x7. Пример:

   $\forall_a(a \subseteq a)$

Спецификация - "тип(спуск)", "оператор(усмсодержится)".

ii. Переход от произвольной функции к конечному набору.

Начало приема программы повторяет предыдущий прием. Для удобства чтения повторим его. Если консеквент - отрицание равенства выражений, для которых предусмотрен специальный проверочный оператор усмотрения их различий ("разныеточки", "разныепрямые" и т.п.), то отрицание равенства заменяется на соответствующее обращение к оператору. Вводится накопитель спецификации x7, в который заносятся элементы "тип(спуск)", "оператор(P)". Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент.

Переменной x10 присваивается список вхождений символа "значение" в консеквент. Проверяется, что число его элементов равно 1 либо 2 и что каждое такое вхождение имеет вид "значение(f ...)" для одной и той же переменной f. Переменной x12 присваивается набор переменных - вторых операндов термов "значение(...)". Проверяется, что переменные x12 различны. Выбирается переменная x13, не входящая в теорему. Переменной x14 присваивается список утверждений "принадлежит(X область(f))", где X - всевозможные переменные списка x12. Проверяется, что все утверждения x14 входят в список антецедентов x8. Если x10 имеет два элемента x, y, причем в списке x8 содержится утверждение $\neg(x = y)$, то это утверждение добавляется к списку x14. Переменной x15 присваивается результат замены в консеквенте x9 вхождений x10 на переменные x12. Переменной x16 присваивается терм "префикс(x x13)" если x12 состоит из единственной переменной x, и терм "конкатенация(набор(x, y)x13)", если x12 состоит из двух переменных x, y. Переменной x17 присваивается список результатов подстановки терма x16 вместо переменной f в утверждения списка x8, не занесенные в список x14. Переменной x18 присваивается импликация с антецедентами x17 и консеквентом x15. Она сопровождается спецификацией x7. Пример:

По теореме "$\forall_{fx}(x \in \mathrm{Dom}(f)$ & f−функция & семействомножеств$(f) \to \bigcap(f) \subseteq f(x))$" создается теорема приема:

$\forall_{afx}$(семействомножеств(префикс$(x, a)) \to \bigcap(f) \subseteq x)$

Спецификация - "тип(спуск)", "оператор(усмсодержится)".

(b) Прием проверочного оператора (характеристика "легковидеть(...)").

Характеристика "легковидеть(P m)" указывает на простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком P, причем ее m -й антецедент - непосредственно идентифицируемый, а остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

Проверяется, что все антецеденты элементарны, и создается спецификация "тип(спуск)", "оператор(P)", "антецедент(m)". Если имеется характеристика "Спуск" либо "Спуск($n_1 \dots n_k$)", то к спецификации добавляется элемент "указатель(спуск)" либо, соответственно, "указатель(спуск($n_1 \dots n_k$))". Напомним, что такие характеристики указывают на возможность обрыва дальнейших попыток применения прочих приемов проверочного оператора при полной либо частичной идентификации антецедентов данного приема. Пример:

$\forall_{abc}(a < b \;\&\; b + c \leq 0 \rightarrow a + c < 0)$

Спецификация - "тип(спуск)", "оператор(усмменьше)", "антецедент(1)".

(c) Прием проверочного оператора (характеристика "блокпроверок(...)").

Характеристика "блокпроверок(P)" указывает на простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком P, причем более одного ее антецедента будут непосредственно идентифицируемыми.

Проверяется, что все антецеденты элементарны, и создается спецификация "тип(спуск)", "оператор(P)". Если имеется характеристика "Спуск" либо "Спуск($n_1 \dots n_k$)", то к спецификации добавляется элемент "указатель(спуск)" либо, соответственно, "указатель(спуск($n_1 \dots n_k$))". Пример:

$\forall_{ABCDKa}(K = (A, B, C) \;\&\;$ коорд$(D, K) = (0, a) \;\&\; D -$ точка $\rightarrow$
$D \in$ прямая$(AC))$

(d) Прием проверочного оператора (характеристика "элементарно").

Характеристика "элементарно" указывает на кванторную импликацию без существенных посылок, имеющую элементарный консеквент.

Проверяется, что заголовком консеквента является предикатный символ P, для которого создан проверочный оператор. Тогда создается спецификация "тип(спуск)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_b(b \in \{b\})$

Спецификация - "тип(спуск)", "оператор(усмпринадлежит)".

(e) Прием проверочного оператора (характеристика "конст").

Характеристика "конст" указывает на утверждение без переменных.

Проверяется, что для обработки утверждений заданного вида создан проверочный оператор P, и создается спецификация "тип(спуск)", "оператор(P)". Пример:

$\emptyset - \mathrm{set}$

Спецификация - "тип(спуск)", "оператор(усммножество)".

(f) Прием проверочного оператора (характеристика "отношение").

Характеристика "отношение" указывает на импликацию, выводящую отличный от равенства нечисловой двуместный предикат без новых объектов.

Проверяется, что консеквентом служит отрицание равенства двух выражений t_1, t_2, имеющих один и тот же заголовок s. Справочник "разныеточки" определяет проверочный оператор P, усматривающий различие объектов, определяемых выражениями с заголовком s. Тогда создается спецификация "тип(спуск)", "оператор(P)", причем консеквент теоремы заменяется на "$P(t_1, t_2)$. Пример:

Из теоремы

$\forall_{ABC}(A$ – точка & B – точка & C – точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(A = C)$ &
$\neg$(прямая(AC) = прямая(BC)) & $\neg(B = C) \rightarrow$
$\neg$(прямая(AB) = прямая(AC)))

получается теорема приема:

$\forall_{ABC}$(разныепрямые(прямая(AC), прямая(BC)) & разныеточки$(B, C) \rightarrow$ разныепрямые(прямая(AB), прямая(AC))))

Спецификация - "тип(спуск)", "оператор(разныепрямые)".

(g) Прием проверочного оператора (протокол "легковидеть").

Протокол "легковидеть(A P)" означает, что для проверки утверждений вида A введен проверочный оператор с заголовком P.

Проверяется, что A имеет единственный параметр x. Выбирается переменная y, не входящая в протокол, и определяется результат B замены в терме A переменной x на y. Создается импликация с антецедентами "$x = y$" и A. Консеквентом ее служит B. Эта импликация сопровождается спецификацией "тип(спуск)", "антецедент(1)", "оператор(P)". Пример:

По протоколу "легковидеть(множество(a) усммножество)" создается теорема приема "$\forall_{ab}(a = b$ & $a-\mathrm{set} \rightarrow b-\mathrm{set})$". Спецификация - "тип(спуск)", "антецедент(1)", "оператор(усмножество)". Прием использует равенство в посылках для усмотрения множества.

2. Нормализатор.

   (a) Нормализатор общей стандартизации выражений.

      i. Прием нормализатора общей стандартизации выражений (характеристика "нормализация").

      Характеристика "нормализация(N)" указывает на тождество, обеспечивающее общую стандартизацию. N - направление замены.

      Проверяется, что теорема не имеет характеристики вида "описатель(...)". Находится заголовок s заменяемой части. Определяется нормализатор P общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(норм)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

      $\forall_{ab}(a \cup (b \setminus a) = a \cup b)$

      Спецификация - "тип(норм)", "оператор(нормобъединение)", "направл(второйтерм)".

      ii. Прием нормализатора общей стандартизации выражений (характеристика "норм").

Характеристика "норм(N)" указывает на тождество, обеспечивающее общую стандартизацию, причем такое, что обратное преобразование в пакетах приведения к заданным заголовкам тоже является допустимым. N - направление замены.

Проверяется отсутствие характеристики "стандформа(M)", у которой M отлично от N. Находится заголовок s заменяемой части. Определяется нормализатор P общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(норм)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set} \to (a \times c) \cap (b \times c) = (a \cap b) \times c)$

Спецификация - "тип(норм)", "оператор(нормпересечение)", "направл(второйтерм)".

iii. Прием нормализатора общей стандартизации, использующий посылку (характеристика "стандимплик").

Характеристика "стандимплик(i)" указывает на теорему приема нормализатора общей стандартизации, идентифицирующего i-й антецедент с посылкой.

Определяется нормализатор P общей стандартизации выражений, заголовок которых совпадает с заголовком левой части консеквента. Затем создается спецификация "тип(нижнийпредел)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)", "антецедент(i)". Пример:

$\forall_{ab}(a = \text{обратныйпуть}(b) \to \text{обратныйпуть}(a) = b)$

Спецификация - "тип(нижнийпредел)", "оператор(нормобратныйпуть), "направл(второйтерм)", "антецедент(1)".

iv. Вычисления в нормализаторе общей стандартизации (характеристика "вычпрог").

Характеристика "вычпрог($N, F, t_1, \ldots, t_n$)" указывает на тождество либо эквивалентность, которые в случае применения в направлении N обеспечивают упрощение относительно констант, использующее вычисления ГЕНОЛОГа. F - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (в нее включаются указания на типы константных значений переменных). $t_1, \ldots, t_n$ - список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем непосредственных вычислений.

Для каждого выражения t_i выбирается новая переменная x_i; к антеценам теоремы добавляется равенство $x_i = t_i$, а все вхождения t_i в заменяющий терм теоремы (включая неявные вхождения кака части операндов ассоциативно-коммутативных операций) заменяются на x_i. Заменяемая и заменяющая части при необходимости переставляются так, чтобы заменяющая часть была справа. Определяется нормализатор общей стандартизации P для выражений, имеющих тот же заголовок, что и заменяемая часть теоремы. Из терма F для каждого типа s константных значений извлекаются все переменные $x_1, \ldots, x_k$, которые должны иметь данный тип значения, и составляется список S

термов "типданных($sx_1 \dots x_k$)". Затем теорема сопровождается спецификацией "тип(усмубывает)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)", S. Пример:

По теореме

$\forall_{abcdef}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $\neg(c = 0)$ & $\neg(d = 0)$ & $\neg(f = 0) \to ab/(cd) + ae/(cf) = a(bf + de)/(cdf))$

и характеристике "вычпрог(второйтерм, и(десчисло(d) десчисло(e) десчисло(b) десчисло(f)), $bf + de$, df)"

создается теорема приема:

$\forall_{abcdefgh}(h = df$ & $g = bf + de$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $\neg(c = 0)$ & $\neg(d = 0)$ & $\neg(f = 0) \to ab/(cd) + ae/(cf) = ag/(hc))$

Спецификация - "тип(усмубывает)", "оператор(нормплюс)", "направл(второйтерм)", "типданных(десчисло b, d, e, f)".

v. Вычисления в нормализаторе общей стандартизации (протокол "вычпрог").

Протокол "вычпрог($f(x_1, \dots, x_n)P_1(x_1) \dots P_n(x_n)$)" означает, что существует программа, вычисляющая значение операции f, если типы значений переменных $x_1, \dots, x_n$ суть $P_1, \dots, P_n$.

Проверяется, что f - символ ассоциативной и коммутативной операции. Находится нормализатор Q общей стандартизации выражений с заголовком f. Для каждого типа P значения переменной, упомянутого в списке $P_1, \dots, P_n$, находятся все переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, к которым он относится, и составляется список S термов "типданных($P, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$)". Выбираются новые переменные v, w, и создается импликация с антецедентом $v = f(x_1, \dots, x_n)$ и консеквентом $f(x_1, \dots, x_n, w) = f(v, w)$. Она сопровождается спецификацией "тип(усмубывает)", "оператор(Q)", "направл(второйтерм)", S. Пример:

По протоколу "вычпрог(умножение(x1 x2) десчисло(x1) десчисло(x2))" создается импликация $\forall_{abcd}(c = ab \to abd = cd)$. Спецификация - "тип(усмубывает)", "оператор(нормумножение)", "направл(второйтерм)", "типданных(десчисло a b)".

vi. Один шаг развертки операции над конечным семейством в нормализаторе общей стандартизации (протокол "развертка").

Протокол "развертка(h,g)" означает, что для двуместной ассоциативно-коммутативной операции g введена соответствующая операция h над конечными семействами операндов.

Создается импликация с антецедентами $P(a)$, $\neg(a \in \{;b\})$ и консеквентом $h(\lambda_i(f(i), i \in \{a;b\} \ \& \ P(i))) = g(f(a), h(\lambda_i(f(i), i \in \{;b\} \ \& \ P(i))))$. Определяется нормализатор Q общей стандартизации выражений с заголовком h. Затем указанная импликация сопровождается спецификацией "тип(облвхожд)", "оператор(Q)", "направл(второйтерм)", "указатель(очевидно(1))", "указатель(единица(истина P))". Пример:

$\forall_{abPf}(P(a) \to \bigcup_{i,i\in\{a;b\},P(i)} f(i) = f(a) \cup \bigcup_{i,i\in\{;b\},P(i)} f(i))$

Спецификация - "тип(облвхожд)", "оператор(нормобъединениевсех)", "направл(второйтерм)", "указатель(очевидно(1))", "указатель(единица(истина P))". Пример:

vii. Устранение вложенных операций в нормализаторе общей стандартизации (протокол "коммутативно").

Протокол "коммутативно(h)" означает, что h - символ коммутативной операции либо симметричного отношения.

Проверяется существование нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком h. Проверяется, что h - символ ассоциативной операции. Протокол берется в качестве теоремы приема, и создается спецификация "тип(нормцелаячасть)". В качестве примера можно взять протокол "коммутативно(плюс)".

viii. Лексикографическое упорядочение операндов в нормализаторе общей стандартизации (протокол "коммутативно").

Путь протокол - "коммутативно(h)". Проверяется существование нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком h. Протокол берется в качестве теоремы приема, и создается спецификация "тип(Сокращение)". В качестве примера можно взять протокол "коммутативно(плюс)".

ix. Прием "усмотрение из посылок" для прямой ориентации равенства (протокол "нормализация").

Протокол "нормализация(f P)" указывает название P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком f. Для нормализатора общей стандартизации равенств значением f служит тип объектов, соединяемых равенством.

Создается импликация "$\forall_{ab}(a = b \to a = b)$", которая сопровождается спецификацией "тип(поразныестороны)", "оператор(P)", "символ(f)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ab}(a = b \to a = b)$

Спецификация - "тип(поразныестороны)", "символ(область)", "оператор(нормобласть)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием нормализатора "нормобласть", усмотрев, что для обрабатываемого выражения с заголовком "область" имеется посылка - равенство с данным выражением в левой части, заменяет обрабатываемое выражение на правую часть равенства.

x. Прием "усмотрение из посылок" для произвольной ориентации равенства (характеристика "ориентация").

Характеристика "ориентация(P, f)" указывает на теорему приема нормализатора P общей стандартизации выражений с заголовком f, использующего равенство из контекста при произвольной его ориентации.

Создается спецификация "тип(частноемногочленов)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)", "символ(f)". Пример:

"$\forall_{ab}(a = b \rightarrow a = b)$".

Спецификация "тип(частноемногочленов)", "оператор(нормноситель)", "направл(второйтерм)", "символ(носитель)". Прием аналогичен приему предыдущего пункта, но заголовок "носитель" может располагаться как в левой части равенства из посылок, так и в правой.

xi. Прием нормализатора общей стандартизации, исключающий с помощью тождества из посылок заданные символы (характеристика "Исключприем").

Характеристика "Исключприем(S)" указывает на теорему приема нормализатора общей стандартизации, исключающего с помощью равенства из посылок символы списка S.

Определяется нормализатор P общей стандартизации выражений с тем же заголовком, что и выражение в левой части консеквента теоремы. Создается спецификация "тип(усмвозрастает)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)", "символы(S)". Пример:

"$\forall_{fABC}(\text{Отображение}(f, A, B)\ \&\ \text{Val}(f) = C \rightarrow \text{образ}(f, A) = C)$".

Спецификация - "тип(усмвозрастает)", "оператор(нормобраз)", "направл(второйтерм)", "символы(образ область значения)". Оба антецедента идентифицируются с посылками, причем выражение C выражает множество значений отображения, не используя для этог символы "образ", "область", "значения".

xii. Одновременная обработка всех корневых операндов в нормализаторе общей стандартизации (характеристика "корнвхожд").

Характеристика "корнвхожд" указывает на теорему приема нормализатора общей стандартизации, выполняющего одновременную обработку всех корневых операндов.

Создается спецификация "тип(интегрмногочлен)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ab}(-a - b = -(a + b))$

Указатель "набор(второйтерм)" определяет компиляцию приема, усматривающего, что каждое слагаемое преобразуемой суммы имеет своим заголовком знак "минус", и выносящего этот минус за скобку.

xiii. Прием нормализатора общей стандартизации, учитывающий дополнительную целевую установку (характеристика "допнеизв").

Характеристика "допнеизв(K)" указывает на теорему приема нормализатора общей стандартизации, срабатывающего при наличии специальных комментариев. K - список комментариев, наличие хотя бы одного из которых необходимо для срабатывания приема.

Определяется нормализатор P общей стандартизации выражений с тем же заголовком, что и выражение в левой части консеквента теоремы. Создается спецификация "тип(сигнум)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)", "замечание(K)". Пример:

$\forall_{abcd}(d + (a + b)c = d + ac + bc)$

Спецификация - "тип(сигнум)", "оператор(нормплюс)", "направл(второйтерм)", "замечание(стандплюс)". Прием нормализатора сумм раскрывает внутренние скобки лишь при наличии комментария "стандплюс".

xiv. Специальная стандартизация подвыражения в нормализаторе общей стандартизации (характеристика "стандтаблица").

Характеристика "стандтаблица" указывает на прием нормализатора общей стандартизации, использующий специальную стандартизацию подвыражения. Фактически, это указание на необходимость последующей доработки спецификатора.

Определяется нормализатор P общей стандартизации выражений с тем же заголовком, что и выражение в левой части консеквента теоремы. Создается спецификация "тип(монотонно)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abc}(0 < a \mathbin{\&} \neg(a-1 = 0) \mathbin{\&} 0 < b \mathbin{\&} \neg(b-1 = 0) \to \log_b c = \log_a c/\log_a b)$

Спецификация - "тип(монотонно)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Прием выполняет переход к тому основанию логарифма, которое указано в комментариях к текущей задаче.

xv. Лексикографическая стандартизация в нормализаторе общей стандартизации (характеристика "группировки").

Характеристика "группировки" указывает на тождество либо эквивалентность, обе части которых - элементарные бесповторные термы, имеющие одно и то же множество переменных.

Проверяется, что теорема - тождество, в одной части которого расположено выражение вида $f(p)$, а в другой - некоторое выражение q. Проверяется, что оценки сложности выражений p, q одинаковы, причем самый сложный подтерм терма p - он сам. Проверяется, что числа неодноместных операций в термах p, q совпадают, и это же верно для одноместных операций. Находится нормализатор R общей стандартизации выражений с тем же заголовком, что у выражения q, и создается спецификация "тип(Максимум)", "оператор(R)", "направл(N)", где N - направление замены от q к $f(p)$. Пример:

$\forall_{ab}(\sin(a - b) = -\sin(b - a))$

Спецификация - "тип(Максимум)", "оператор(нормсинус)", "направл(второйтерм)". Прием выполняет замену, если новый аргумент синуса лексикографически предшествует старому.

xvi. Стандартизация константного выражения в нормализаторе общей стандартизации (характерстика "константа").

Характеристика "константа(N, P, T)" указывает на теорему приема нормализатора P общей стандартизации, выполняющего стандартизацию константного выражения. N - направление замены, T - набор указателей "типданных(a, X)" типов a константных выражений, идентифицируемых с группами переменных X.

Создается спецификация "тип(регтеор)", "направл(N)", "оператор(P)", T. Пример:

$\forall_{abc}(c = a/b \leftarrow a/b = c)$

Спецификация "тип(регтеор)", "направл(второйтерм)", "оператор(нормдробь)", "типданных(десчисло a b)". Прием обрабатывает правую часть антецедента оператором "сокращдроби".

(b) Нормализатор общей стандартизации утверждений.

i. Непосредственное усмотрение истинности либо ложности в нормализаторе общей стандартизации утверждений (характеристика "элементарно").

Характеристика "элементарно" указывает на кванторную импликацию без существенных посылок, имеющую элементарный консеквент.

Рассматривается заголовок f консеквента, причем отрицание, если оно есть, отбрасывается. По этому заголовку при помощи справочника "декомпозиция" находится нормализатор P общей стандартизации утверждений с заголовком f. Затем создается спецификация "тип(первыйтерм)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_a(a - \text{число} \to a \in \mathbb{R})$

Спецификация - "тип(первыйтерм)", "оператор(нормпринадлежит)", "направл(второйтерм)".

ii. Прием нормализатора общей стандартизации утверждений (характеристика "или").

Характеристика "или(N)" указывает на теорему, выполняющую декомпозицию элементарного утверждения в дизъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

Определяется нормализатор P общей стандартизации утверждений, заголовок которых - тот же, что у заменяемой части теоремы. Затем создается спецификация "тип(второйтерм)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \;\vee\; a \in c)$

Спецификация - "тип(второйтерм)", "оператор(нормпринадлежит)", "направл(второйтерм)".

iii. Прием нормализатора общей стандартизации утверждений (характеристика "и").

Характеристика "и(N)" указывает на теорему, выполняющую декомпозицию элементарного утверждения в конъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

Определяется нормализатор P общей стандартизации утверждений, заголовок которых - тот же, что у заменяемой части теоремы. Затем создается спецификация "тип(второйтерм)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \;\&\; a \in c)$

Спецификация - "тип(второйтерм)", "оператор(нормпринадлежит)", "направл(второйтерм)".

iv. Прием нормализатора общей стандартизации утверждений (характеристика "общнорм").

Характеристика "общнорм(N)" указывает на теорему, выполняющую общую стандартизацию утверждения, не имеющего вида дизъюнкции либо конъюнкции. Заменяющее утверждение элементарное. N - направление замены.

Проверяется отсутствие характеристики с заголовком "усиление". Определяется нормализатор P общей стандартизации утверждений, заголовок которых - тот же, что у заменяемой части теоремы. Затем создается спецификация "тип(второйтерм)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(0 \leq a/b \leftrightarrow 0 \leq ab)$

Спецификация - "тип(второйтерм)", "оператор(нормменьшеилиравно)", "направл(второйтерм)".

v. Ориентация равенства с неизвестными (протокол "нормализация").

Протокол "нормализация($P\ Q$)" означает, что Q - название нормализатора общей стандартизации выражений либо утверждений с заголовком P. Для нормализатора общей стандартизации равенств значением P служит тип объектов, соединяемых равенством.

Создается теорема "$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow b = a)$". Она сопровождается спецификацией "тип(предпоследтерм)", "оператор(Q)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(b)". Пример:

$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow b = a)$

Спецификация - "тип(предпоследтерм)", "оператор(нормчисло)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(b)". Соответствующий прием нормализатора числовых равенств ориентирует их так, чтобы слева располагалось выражение с неизвестными, указанными при обращении к нормализатору, а справа - выражение без неизвестных.

(c) Нормализатор сокращенной перезаписи.

i. Прием нормализатора сокращенной перезаписи (характеристика "свертка").

Характеристика "свертка(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к сокращенной записи. N - направление замены.

Определяется нормализатор P сокращенной перезаписи выражений, заголовок которых такой же, как у заменяемой части t рассматриваемого тождества. Проверяется, что заменяющая часть r элементарна и что нормализатор P, в случае блокировки его приемов, основанных на текущей теореме, не в состоянии сократить терм t до длины терма r. Тогда создается спецификация "тип(нормупростить)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcd}(d \log_c a + d \log_c b = d \log_c (ab))$

Спецификация - "тип(нормупростить)", "направл(второйтерм)", "оператор(упрощплюс)".

ii. Общая стандартизация в нормализаторе сокращенной перезаписи (характеристика "нормализация").

Характеристика "нормализация(N)" указывает на тождество, обеспечивающее общую стандартизацию. N - направление замены.

Если существует нормализатор P сокращенной перезаписи выражений, заголовок которых такой же, как у заменяемой части рассматриваемого тождества, то создается спецификация "тип(указательтипа)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abc}(a \cdot (b/c) = ab/c)$

Спецификация - "тип(указательтипа)", "направл(второйтерм)", "оператор(упрощумножение)".

iii. Лексикографическое упорядочение операндов в нормализаторе сокращенной перезаписи (протокол "коммутативно").

Протокол "коммутативно(f)" означает, что f - символ коммутативной операции либо симметричного отношения.

Проверяется существование нормализатора сокращенной перезаписи выражений с заголовком f, и создается спецификация "тип(нормпроизводная)".

iv. Устранение вложенных операций в нормализаторе сокращенной перезаписи (протокол "коммутативно").

Пусть протокол - "коммутативно(f)". Проверяется ассоциативность символа f, а также существование нормализатора сокращенной перезаписи выражений с заголовком f. Затем создается спецификация "тип(вхождениемыши)".

v. Вычисления с константами в нормализаторе сокращенной перезаписи (характеристика "сокращднф").

Характеристика "сокращднф(N, P, K)" указывает на теорему приема для вычисления с константами в нормализаторе P сокращенной перезаписи. N - направление замены, K - набор указателей "типданных(a, x_i)" типов a константных значений переменных x_i.

Создается спецификация "тип(верхнийпредел)", "направл(N)", "оператор(P)", к которой добавляется элемент "см(...)", перечисляющий условия $a(x_i)$ на типы константных значений переменных. Пример:

$\forall_{ab}(a = b^2 \to \sqrt{a} = b)$

Спецификация - "тип(верхнийпредел)", "направл(второйтерм)", "оператор(упрощумножение)", "см(десчисло(a))".

vi. Одновременная обработка всех операндов в нормализаторе сокращенной перезаписи (характеристика "свертка").

Характеристика "свертка(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к сокращенной записи. N - направление замены.

Переменной x10 присваивается заголовок заменяемой части. Проверяется, что символ x10 ассоциативный и коммутативный, причем заменяемая часть имеет ровно два корневых операнда - x12 и x13. Проверяется, что x12, x13 бесповторны и декомпозируют заменяющую часть теоремы по ее переменным. Усматривается переобозначение переменных, переводящее каждый из термов x12, x13 в другой. Переменной x16 присваивается результат такого же переобозначения переменных в терме x9. Проверяется, что оператор "станд" отождествляет термы x9 и x16. Находится заголовок P оператора сокращенной перезаписи выражений с заголовком x10. Затем создается спецификация "тип(обозначение)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abc}(ab + ac = a(b + c))$

Спецификация - "тип(обозначение)", "направл(второйтерм)", "оператор(упрощплюс)". Соответствующий прием находит общий множитель a всех слагаемых суммы.

vii. Рекурсивное обращение в нормализаторе сокращенной перезаписи при измененном заголовке терма (протокол "нормупростить").

Протокол "нормупростить(f P)" указывает название P нормализатора сокращенной перезаписи выражений с заголовком f.

В том разделе, к которому относится символ f, рассматриваются одноместные функциональные символы g, тип значения и тип аргумента которых совпадают с типом значения операции f. Создается импликация с пустым списком антецедентов и консеквентом вида $g(f(x_1 \ldots x_n))$ $= g(f(x_1 \ldots x_n))$, где n - арность символа f. Она сопровождается спецификацией "тип(цельтеоремы)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{ab}(-ab = -ab)$

Спецификация - "тип(цельтеоремы)", "направл(второйтерм)", "оператор(упрощумножение)". Прием продолжает попытки сокращенной перезаписи произведения ab, если заголовком преобразуемого выражения, после срабатывания другого приема, оказался минус.

(d) Нормализатор приведения к заданным заголовкам.

i. Непосредственное преобразование к нужному заголовку (характеристика "нормзаголовок").

Характеристика "нормзаголовок(P, N)" указывает на тождество, которое можно использовать в нормализаторе P преобразования к заданным заголовкам. N - направление замены.

Проверяется, что теорема не имеет характеристики "стандэкстр", и создается спецификация "тип(нормзаголовок)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(a \cap c \cup b \cap c = c \cap (a \cup b))$

Спецификация - "тип(нормзаголовок)", "оператор(видобъединение)", "направл(первыйтерм)".

ii. Попытка группировки нескольких корневых операндов (характеристика "нормзаголовок").

Пусть характеристика - "нормзаголовок(P, N)". Справочник "внутрзаголовок" определяет по символу P список Q одноместных корневых операций заменяющего терма, которые можно отбросить перед проверкой принадлежности заголовка списку допустимых заголовков. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, причем заголовок f ее заменяемой части ассоциативен и коммутативен. Определяется вхождение v в заменяющую часть теоремы, полученное продвижение от корня этой части вглубь через одноместные операции списка Q, пока это возможно. Рассматривается символ g по вхождению v. Проверяется, что операция g дистрибутивна относительно f. Выбираются переменные x, y, z, не входящие в теорему. Пусть заменяемая часть теоремы имеет вид "$f(t_1, \dots, t_n)$", а заменяющая часть - s. Создается импликация, антецеденты которой суть равенство "$z = f(g(x, s), y)$" и все антецеденты теоремы, а консеквент - "$f(g(x, t_1), \dots, g(x, t_n), y) = z$". Она сопровождается спецификацией "тип(группировки)", "оператор(P)", "направл(вто818ройтерм)". Пример:

По теореме "$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\to a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$" и ее характеристике "нормзаголовок(видумножение второйтерм)" создается теорема:

$\forall_{abcde}(e = d + c(a+b)(a-b) \to ca^2 - cb^2 + d = e)$

Спецификация - "тип(группировки)", "оператор(видумножение)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием предпринимает попытку разложить на множители правую часть антецедента, полученную группировкой двух слагаемых исходного выражения, путем рекурсивного обращения к процедуре "видумножение".

iii. Изменение заголовка подвыражения, обеспечивающее возможность изменения заголовка всего выражения (характеристика "нормзаголовок").

Пусть характеристика - "нормзаголовок(P, N)". В заменяемой части A усматривается вхождение v двуместной операции $f(x, y)$, где x, y - переменные, встречающиеся в A однократно. Выбираются новые переменные z, v. Рассматривается выражение B, получаемое из A заменой вхождения v на переменную z. Проверяется, что нормализатор P не приводит выражение B к требуемым заголовкам. Находится заголовок Q нормализатора приведения к заголовку f. Рассматривается выражение C, получаемое из A заменой вхождения v на переменную v. Затем создается импликация с антецедентом $z = v$ и консеквентом $B = C$. Она сопровождается спецификацией "тип(числоповторений)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)", "норм(Q)". Пример:

По теореме "$\forall_{bcf}(b - \mathrm{set}$ & $c - \mathrm{set}$ & $f - \mathrm{set} \to b \cap c \cup c \cap f = c \cap (b \cup f)$" и характеристике "нормзаголовок(видобъединение первыйтерм)" создается теорема:

$\forall_{cda}(a = d \to c \cap d = c \cap a)$

Спецификация - "тип(числоповторений)", "оператор(видобъединение)", "направл(второйтерм)", "норм(видобъединение)". Соответствующий прием предпринимает попытку преобразовать d к виду объединения, чтобы затем можно было "раскрыть скобки" относительно пересечения.

iv. Дополнительное преобразование к требуемому заголовку корневых операндов после того, как само выражение уже имеет нужный заголовок (характеристика "корноперанды").

Характеристика "корноперанды(P)" указывает на теорему приема, выполняющего дополнительное преобразование корневых операндов выражения к требуемому заголовку после того, как это выражение уже имеет нужный заголовок. P - название нормализатора приведения к заданным заголовкам.

Создается спецификация "тип(внутрзамена)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abc}(a = b \to ac = bc)$

Спецификация - "тип(внутрзамена)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Предпринимается доразложение на множители сомножителя a.

v. Вынесение наружу общей одноместной операции в нормализаторе приведения к заданным заголовкам (характеристика "свертка").

Характеристика "свертка(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к сокращенной записи. N - направление замены.

Проверяется, что заменяемое выражение имеет вид $f(t_1, t_2)$, где f ассоциативно и коммутативно, а заменяющее - бесповторно. Находится подстановка S вместо параметров заменяемого выражения, переводящая каждое из выражений t_1, t_2 в другое, причем такая, что она лишь переобозначает переменные. Проверяется, что применение этой подстановки к заменяющему выражению не изменяет его, с точностью до простейших тождественных преобразований. Проверяется, что заменяющее выражение имеет вид $g(A)$, причем справочник "обобщзнак"определяет по символу g тройку $(A(x, y), f(g(x), y), g(h(x, y)))$, такую, что при выполнении условий $A(x, y)$ имеет место равенство $f(g(x), y) = g(h(x, y))$, где операция h имеет единицу по y. По символу h определяется название P нормализатора приведения к заголовку h, и теорема сопровождается спецификацией "тип(просмотрсимволов)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{ab}(-a - b = -(a + b))$

Спецификация - "тип(просмотрсимволов)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Прием имеет указатель "набор(второйтерм)", т.е. рассматривает сумму произвольного числа слагаемых и выносит наружу их общий знак "минус".

vi. Усиленное преобразование к заданному заголовку при наличии специальной цели (характеристика "цели").

Характеристика "цели(P, K)" указывает на теорему для усиленного приведения к заданным заголовкам в нормализаторе P, применяемую при наличии специального комментария. K - элементы, образующие комментарий.

Создается спецификация "тип(подобныечлены)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)", "см(не(коммент(K)))". Пример:

$\forall_{abcx}(c = x\sqrt[3]{a} \to ax^3 + b = (c + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}x^2 - \sqrt[3]{b}c + \sqrt[3]{b^2}))$

Спецификация - "тип(подобныечлены)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)", "см(не(коммент(нормИнтеграл x)))", "указатель(идентификатор(1))". Последний элемент вводится оператором "теоремаприема", выносящим вычисление повторяющегося выражения $x\sqrt[3]{a}$ в антецедент. Прием применяется при интегрировании, если x - переменная интегрирования, не встречающаяся в a, b.

vii. Вычисления с константами в нормализаторе приведения к заданным заголовкам (характеристика "нормплс").

Характеристика "нормплс(N, P, Q)" указывает на теорему приема для вычисления с константами в нормализаторе P приведения к заданным заголовкам. N - направление замены, Q - набор указателей "типданных(a x_i)" типов a константных значений переменных x_i.

Создается спецификация "тип(элементнабора)", "направл(N)", "оператор(P)", к которой добавляется элемент "см(...)", перечисляющий условия $a(x_i)$ на типы константных значений переменных. Пример:

$\forall_{abcdpqr}(a = pr \ \& \ c = qr \to ab + cd = r(pb + qd))$

Спецификация - "тип(элементнабора)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)", "см(натуральное(a)натуральное(c))". Прием выносит за скобку общий множитель натуральных коэффициентов.

viii. Преобразование в нормализаторе приведения к заданным заголовкам, подготавливающее возможность непосредственного перехода к этим заголовкам (характеристика "предоперанд").

Характеристика "предоперанд(P, N)" указывает на теорему приема для преобразования в нормализаторе P приведения к заданным заголовкам, подготавливающего переход к этим заголовкам. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(транзитивно)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}(c\sqrt{3}\sin a + c\cos a + b = 2c\sin(a + \pi/6) + b)$

Спецификация - "тип(транзитивно)", "оператор(видумножение)", "направл(второйтерм)". Остаточный член b либо равен 0, либо представляет собой удвоенное произведение c на синус либо косинус.

ix. Корневая свертка выражения в нормализаторе приведения к заданным заголовкам (характеристика "корнимн").

Характеристика "корнимн(P, N)" указывает на теорему приема корневой свертки в нормализаторе P приведения к заданным заголовкам. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(конгруэнтны)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(\sin a \sin b + \cos a \cos b = \cos(a - b)$

Спецификация - "тип(конгруэнтны)", "оператор(видумножение)", "направл(второйтерм)". Прием применяется к корневому вхождению в преобразуемое выражение, если других слагаемых нет.

x. Попытка варьирования выражения в нормализаторе приведения к заданным заголовкам (характеристика "выражения").

Характеристика "выражения(P, N)" указывает на теорему приема, выполняющего попытку варьирования выражения в нормализаторе P приведения к заданным заголовкам. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормлогарифм)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcde}(d = \cos(b/2)\ \&\ e = 2ad^2 - a + c \to a \cos b + c = e)$

Спецификация - "тип(нормлогарифм)", "оператор(видумножение)", "направл(второйтерм)". Прием предпринимает попытку разложения на множители путем перехода к половинному аргументу, если выражение c кратно $\cos(b/2)$. Попытка реализуется при обработке правой части второго антецедента.

xi. Блокировка дальнейших преобразований выражения с неизвестными (протокол "блокнеизвестных").

Протокол "блокнеизвестных(T, P, F)" указывает шаблон T выражения, обрабатываемого нормализатором P приведения к заданным заголовкам, для которого блокируются дальнейшие преобразования ввиду того, что текущий результат достаточен для внешних целей. F - фильтр, уточняющий контекст.

Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит равенство $T = T$. Она сопровождается спецификацией "тип(веществмногочлен)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)", "см(F)". Пример:

По протоколу "блокнеизвестных($a \sin b{+}c \cos b{+}d$, видумножение, и(не(известно(b)) известно(c) известно(d) не(входит(числитель комментарии)) входит(синус корень)))" создается теорема приема:

$\forall_{abcd}(a \sin b + c \cos b + d = a \sin b + c \cos b + d)$

Спецификация - "тип(веществмногочлен)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)", "см(не(известно(b)) известно(c) известно(d) не(входит(числитель комментарии)) входит(синус корень))". Соответствующий прием прекращает попытки разложения на множители, так как получена левая часть уравнения с нулем в правой части, допускающего непосредственное разрешение относительно b.

xii. Обращение к вычислительному пакету в нормализаторе приведения к заданным заголовкам (характеристика "преобразовать").

Характеристика "преобразовать(P)" указывает на теорему приема, обращающегося к вычислительному пакету в нормализаторе P приведения к заданным заголовкам.

Создается спецификация "тип(учетнормализаторов)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcfgnxy}(a + b = f(x)$ & $f =$ многочлен$(y,$ Целые$, c)$ &
$f =$ произведениевсехмн(g) & $l(g) = n$ & $p = \prod_{i=1}^{n} g(i)(x) \to a + b = p)$

Спецификация - "тип(учетнормализаторов)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Третий антецедент обращается к пакету "множителимн" для разложения на множители многочлена f с целыми коэффициентами. Этот пакет реализует процедуру Берлекэмпа-Гензеля.

xiii. Предварительная стандартизация в нормализаторе приведения к заданным заголовкам (характеристика "Стандартизация").

Характеристика "Стандартизация(P)" указывает на теорему приема предварительной стандартизации в нормализаторе P приведения к заданным заголовкам.

Создается спецификация "тип(стандартизация)", "направл(второйтерм)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcdef}(f = c$ & $d -$ rational & $\neg($знаменатель$(d) -$ even$) \to a + bc^d/e = a + bf^d/e)$

Спецификация - "тип(стандартизация)", "направл(второйтерм)", "оператор(видумножение)". Прием выполняет попытку разложения на множители числителя дробного выражения перед сложением дробей. Напомним, что данный нормализатор, в качестве своего результата, допускает выражения с заголовками "дробь", "умножение", "степень", быть, может со знаком минус.

(e) Нормализатор стандартной формы.

i. Преобразование к стандартной форме (характеристика "стандформа").

Характеристика "стандформа(P, N)" указывает на теорему, используемую для приведения выражений к виду стандартной формы P. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(стандлогарифм)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abc}((a \cup b) \setminus c = a \setminus c \cup b \setminus c)$

Спецификация - "тип(стандлогарифм)", "оператор(стандобъединение)", "направл(второйтерм)".

ii. Упрощение в стандартной форме (характеристика "станд").

Характеристика "станд(P, N)" указывает на теорему, которая может быть использована для упрощения выражений в стандартной форме P. N - направление замены.

Проверяется, что уже имеющиеся приемы нормализатора P не изменяют заменящего выражения теоремы. Затем создается спецификация "тип(общаяплоскость)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ab}(a \cup (b \setminus a) = a \cup b)$

Спецификация - "тип(общаяплоскость)", "направл(второйтерм)", "оператор(стандобъединение)".

iii. Устранение вложенных операций в нормализаторе стандартной формы (протокол "коммутативно").

Пусть протокол - "коммутативно(f)". Проверяется ассоциативность символа f. Находится нормализатор P стандартной формы с корневой операцией f. Затем создается спецификация "тип(нормминимум)", "оператор(P)".

iv. Лексикографическое упорядочение в нормализаторе стандартной формы (протокол "коммутативно").

Аналогично предыдущему, но тип приема - "норминфимум".

v. Вычисления с константами в нормализаторе стандартной формы (характеристика "стандномера").

Характеристика "стандномера(N, P, K)"указывает на теорему приема для вычисления с константами в нормализаторе P стандартной формы. N - направление замены, K - набор указателей "типданных(a, x_i)" типов a константных значений переменных x_i.

Создается спецификация "тип(многочлен)", "направл(N)", "оператор(P)", к которой добавляется элемент "см($\ldots$)", перечисляющий условия $a(x_i)$ на типы константных значений переменных. Пример:

$\forall_{abc}(c = a^b \rightarrow a^b = c)$

Спецификация - "тип(многочлен)", "направл(второйтерм)", "оператор(стандплюс)", "см(десчисло(a)натуральное(b))". Для вычисления значения a^b используется оператор "натурстепень", реализованный непосредственно на ЛОСе.

vi. Специальная стандартизация в нормализаторе стандартной формы (характеристика "стандкомпл").

Характеристика "стандкомпл(P, N)" указывает на теорему приема, выполняющего специальную стандартизацию в нормализаторе P стандартной формы. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормугол)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcd}((a \cap b) \times (c \cap d) = (a \times c) \cap (b \times d))$

Спецификация - "тип(нормугол)", "оператор(стандобъединение)", "направл(второйтерм)".

(f) Нормализатор упрощения относительно неизвестных.

i. Прием нормализатора упрощения относительно неизвестных (характеристика "глубина").

Характеристика "глубина(x, N)" указывает на тождество перестановочного типа, уменьшающее глубину переменной x до единицы. N - направление замены.

Проверяется отсутствие характеристики "нормализация(...)". Находится заголовок s заменяемой части и определяется нормализатор P упрощения неизвестных выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(сокращнеизв)", "оператор(P)", "направл(N)", "неизвестные x". Пример:

$\forall_{abc}(c \subseteq b \to c \cup (a \cap b) = b \cup (a \cup c))$

Спецификация - "тип(сокращнеизв)", "оператор(уравнобъединение)", "направл(второйтерм)", "неизвестные b".

ii. Прием нормализатора упрощения относительно неизвестных (характеристика "склейка").

Характеристика "склейка(x, N)" указывает на тождество либо эквивалентность, позволяющие перейти от терма с несколькими вхождениями переменной x к терму с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

Проверяется, что теорема - тождество. Определяется список X всех выделенных характеристикой "склейка" переменных для того же направления N, что у исходной характеристики. Проверяется, что глубина вхождения в заменяющий терм любой из этих переменных меньше, чем в заменяемый. Находится заголовок s заменяемой части и определяется нормализатор P упрощения неизвестных выражений с заголовком s. Тогда создается спецификация "тип(сокращнеизв)", "направл(N)", "оператор(P)", "неизвестные(X)". Пример:

$\forall_{abc}(0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \to a^c b^c = (ab)^c)$

Спецификация - "тип(сокращнеизв)", "направл(второйтерм)", "оператор(уравнумножение)", "неизвестные(c)".

iii. Стандартизация операнда в нормализаторе упрощения относительно неизвестных (протокол "упрощнеизв").

Протокол "упрощнеизв$(s\ P)$" указывает название P нормализатора упрощения относительно неизвестных выражений с заголовком s.

Определяется арность k символа s. Проверяется, что она больше нуля и меньше 6. Рассматриваются первые k переменных $x_1, \ldots, x_k$ и создается выражение $s(x_1, \ldots, x_k)$. Выбирается произвольная переменная x_i списка $x_1, \ldots, x_k$, и формируется список A всех содержащих эту переменную утверждений из числа сопровождающих выражение $s(x_1, \ldots, x_k)$ по о.д.з., отличных от указателей типа объекта. Выбирается отличная от $x_1, \ldots, x_k$ переменная y. Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения A и равенство $y = x_i$, а консеквент - равенство $s(x_1, \ldots, x_k) = s(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_k)$. Она сопровождается спецификацией "тип(унисборка)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abc}(c = a \to a/b = c/b)$

Спецификация - "тип(унисборка)", "оператор(уравндробь)", "направл(второйтерм)". Антецедент обращается к оператору "нормуравн" для обработки числителя a. Этот оператор, в зависимости от заголовка выражения a, обращается к соответвтующему конкретному нормализатору упрощения относительно неизвестных.

iv. Общая стандаризация в нормализаторе упрощения относительно неизвестных (характеристика "нормализация").

Характеристика "нормализация(N)" указывает на тождество, обеспечивающее общую стандартизацию. N - направление замены.

Проверяется отсутствие характеристики "описатель(...)". Проверяется также, что заменяемая часть бесповторна. Находится заголовок s заменяемой части и определяется нормализатор P упрощения неизвестных выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(лексупорядочение)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{cde}(0 < d \to e \log_c d = \log_c(d^e))$

Спецификация "тип(лексупорядочение)", "направл(первыйтерм)", "оператор(уравнлогарифм)".

v. Устранение вложенных операций в нормализаторе упрощения относительно неизвестных (протокол "коммутативно").

Протокол "коммутативно(f)" означает, что f - символ коммутативной операции либо симметричного отношения.

Проверяется, что f ассоциативно. Находится заголовок s заменяемой части и определяется нормализатор P упрощения неизвестных выражений с заголовком f. Затем создается спецификация "тип(вывод)", "оператор(P)".

(g) Нормализатор упрощения выражений путем перебора группировок (характеристика "свертка").

Характеристика "свертка(N)" указывает на тождество, обеспечивающее переход к сокращенной записи. N - направление замены.

Определяется тип t значения заменяемой части, а по этому типу справочник "нормгрупп" находит название P нормализатора группировки для выражений, тип значений которых - t. Затем создается спецификация "тип(нормгрупп)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abc}(\text{прообраз}(a, c \setminus b) = \text{прообраз}(a, c) \setminus \text{прообраз}(a, b))$

Спецификация - "тип(нормгрупп)", "направл(первыйтерм)", "оператор(группмножество)".

(h) Нормализатор явного разрешения утверждений с неизвестными

i. Общая стандартизация утверждения в нормализаторе явного разрешения относительно неизвестных (характеристика "общнорм").

Характеристика "общнорм(N)" указывает на теорему, выполняющую общую стандартизацию утверждения, не имеющего вида дизъюнкции либо конъюнкции. Заменяющее утверждение элементарное. N - направление замены.

Проверяется отсутствие характермстики "усиление(...)" для направления замены, отличного от N. По заголовку Q заменяемой части определяется нормализатор P уменьшения глубины неизвестных в утверждениях с заголовком Q. Проверяется, что заменяемая часть не имеет связанных переменных, а параметры заменяющей части включаются в параметры заменяемой. Проверяется, что если кakя-либо переменная заменяемой части имеет в ней глубину 1, причем входит в заменяющую часть, то ее глубина вхождения в последнюю тоже равна 1. Тогда создается спецификация "тип(контрсерия)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{ab}(0 < a/b \leftrightarrow 0 < ab)$

Спецификация - "тип(контрсерия)", "направл(второйтерм)", "оператор(уравнменьше)".

ii. Явное разрешение утверждения относительно неизвестных в нормализаторе уравнений (характеристика "глуб").

Характеристика "глуб(x N)" указывает на эквивалентность, заменяемая часть которой - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x, глубина которых (с отбрасыванием внешнего отрицания) более 1, а заменяющая часть построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x, и притом глубины 1. N - указатель направления замены.

Проверяется отсутствие характеристики "общнорм(N)", а также характеристик с заголовками "и", "или". Рассматривается заголовок Q заменяемой части, и определяется нормализатор P уменьшения глубины неизвестных в утверждениях с заголовком Q. Затем создается спецификация "тип(внешкадр)", "направл(N)", "неизвестные(x)", "заголовок(P)". Пример:

$\forall_{abc}(b - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&\ \neg(\text{числитель}(b) - \text{even})\ \&\ 0 < b \rightarrow a^b < c \leftrightarrow a < c^{1/b})$

Спецификация - "тип(внешкадр)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(a)", "заголовок(P)".

iii. Группировка всех неизвестных в одной части двуместного отношения (характеристика "группировка").

Характеристика "группировка(N)" указывает на эквивалентность, позволяющую группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. N - направление замены.

Находится заголовок Q заменяемой части, и определяется нормализатор P уменьшения глубины неизвестных в утверждениях с заголовком

Q. Проверяется, что заменяющая часть имеет такой корневой операнд T, число параметров которого равно 2, и ни один из корневых операндов заменяемой части не содержит оба эти параметра. Тогда создается спецификация "тип(русшрифт)", "направл(N)", "оператор(P)", "неизвестные(x, y)", где x, y - параметры терма T. Пример:

$\forall_{abc}(a \setminus b \subseteq c \leftrightarrow a \subseteq b \cup c)$

Спецификация - "тип(русшрифт)", "оператор(уравнсодержится)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(b, c)".

iv. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция утверждения в нормализаторе явного разрешения (характеристика "и").

Характеристика "и(N)" указывает на эквивалентность, декомпозирующую элементарное утверждение в конъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

Рассматривается заголовок Q заменяемой части. Если этот заголовок - равенство, то в качестве Q берется тип объектов, связанных равенством. Справочник "нормуравнение" определяет по Q название P соответствующего нормализатора уменьшения глубины неизвестных. Затем создается спецификация "тип(внешконтроль)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abc}(a \cup b \subseteq c \leftrightarrow a \subseteq c \ \& \ b \subseteq c)$

Спецификация - "тип(внешконтроль)", "направл(второйтерм)", "оператор(уравнсодержится)". Соответствующий прием блокирует преобразование, если c содержит неизвестные, а a, b - не содержат.

v. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция утверждения в нормализаторе явного разрешения (характеристика "или").

Характеристика "или(N)" указывает на эквивалентность, декомпозирующую элементарное утверждение в дизъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

Рассматривается заголовок Q заменяемой части. Если этот заголовок - равенство, то в качестве Q берется тип объектов, связанных равенством. Справочник "нормуравнение" определяет по Q название P соответствующего нормализатора уменьшения глубины неизвестных. Затем создается спецификация "тип(внешконтроль)", "направл(N)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcd}(a \times b = c \times d \leftrightarrow (a = \emptyset \vee b = \emptyset) \ \& \ (c = \emptyset \vee d = \emptyset) \vee a = c \ \& \ b = d)$

Спецификация - "тип(внешконтроль)", "направл(второйтерм)", "оператор(уравнмножество)".

vi. Группировка относительно неизвестного подвыражения (характеристика "склейка").

Характеристика "склейка(x, N)" указывает на тождество либо эквивалентность, позволяющую перейти от терма с несколькими вхождениями переменной x к терму с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Рассматривается заголовок Q заменяемой части. Справочник "нормуравнение" определяет по Q название P соответствующего нормализатора уменьшения глубины неизвестных. Затем создается спецификация "тип(операндномер)", "направл(N)", "неизвестные(x)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcde}(ab + ac + d < e \leftrightarrow a(b + c) + d < e)$

Спецификация - "тип(операндномер)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(a)", "оператор(уравнменьше)".

vii. Преобразование утверждения с неизвестными с помощью нормализатора стандартной формы (характеристика "Стандплюс").

Характеристика "Стандплюс(P, N)" указывает на эквивалентность, использующую нормализатор стандартной формы P для разгруппировки подвыражения с неизвестными. N - направление замены.

Рассматривается заголовок s заменяемой части. Справочник "нормуравнение" определяет по s название R соответствующего нормализатора уменьшения глубины неизвестных. Затем создается спецификация "тип(контроль)", "оператор(R)", "направл(N)", "норм(P)". Пример:

$\forall_{abcdefg}(f = a(b + c)^d + e \to a(b + c)^d + e \leq g \leftrightarrow f \leq g)$

Спецификация - "тип(контроль)", "оператор(уравнменьшеилиравно)", "направл(второйтерм)", "норм(стандплюс)". Правая часть антецедента обрабатыватся нормализатором стандартной формы "стандплюс", выполняющим раскрывание скобок.

viii. Преобразование условия к виду, для которого существует стандартный разрешающий прием (характеристика "уравнмодуль").

Характеристика "уравнмодуль(P, N, x)" указывает на теорему приема, выполняющего в нормализаторе уравнений P преобразование к виду, допускающему стандартный разрешающий прием. N - направление замены, x - неизвестная.

Создается спецификация "тип(выч)", "оператор(P)", "направл(N)", "неизвестные(x)". Пример:

$\forall_{abcx}(a \sin x + a \cos x + b \sin x \cos x \leq c \leftrightarrow 2sqrt2a \sin(x + \pi/4) + 2b \sin(x + \pi/4)^2 \leq b + 2c)$

Спецификация - "тип(выч)", "оператор(уравнменьшеилиравно)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x)".

ix. Непосредственное усмотрение истинности либо ложности условия (характеристика "уравнцелое").

Характеристика "уравнцелое(P)" указывает на теорему приема для непосредственного усмотрения истинности или ложности в нормализаторе уравнений P.

Создается спецификация "тип(Выч)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abc}(c < a \;\&\; 0 \leq b - a \to \neg(b < c))$

Спецификация - "тип(Выч)", "оператор(уравнменьше)", "направл(второйтерм)". Первый антецедент идентифицируется с посылкой, второй - обрабатывается проверочным оператором. Выражение c содержит неизвестные, а выражения a, b - нет.

x. Эквивалентное преобразование условия, приводящее к цепи упрощений для подвыражений с неизвестными (характеристика "станддн").

Характеристика "станддн(P, N, x)" указывае на эквивалентность, использующую нормализатор P для стандартизации неизвестных подвыражений условия задачи на описание. N - направление замены, x - неизвестная.

Определяется заголовок s заменяемой части, и справочник "нормуравнение" определяет по s название R соответствующего нормализатора уменьшения глубины неизвестных. Затем создается спецификация "тип(второйсимвол)", "оператор(R)", "направл(N)", "норм(P)", "неизвестные(x)". Пример:

$\forall_{abcde}(c = a \;\&\; e = d/2 \to a < b \leftrightarrow \neg(\cos e = 0) \;\&\; c < b \vee \cos e = 0 \;\&\; a < b)$

Спецификация - "тип(второйсимвол)", "оператор(уравнменьше)", "направл(N)", "норм(половинныйугол)", "неизвестные(d)". Первый антецедент преобразует содержащую неизвестные часть a неравенства при помощи оператора "половинныйугол", выражающее синусы и косинусы d через тангенс половинного угла.

xi. Дизъюнктивно-конъюнктивная декомпозиция для последующей расшифровки условия принадлежности неизвестному множеству (характеристика "и").

Характеристика "и(N)" указывает на эквивалентность, декомпозирующую элементарное утверждение в конъюнкцию бескванторных утверждений. N - направление замены.

В заменяющей части рассматриваются такие отношения принадлежности $t \in x$, что x - переменная, а заголовками надтермов данного отношения (в рамках заменяющей части) служат только символы "и". "или", "не". Составляется список X указанных переменных x. Определяется заголовок s заменяемой части, и справочник "нормуравнение" определяет по s название R соответствующего нормализатора уменьшения глубины неизвестных. Затем создается спецификация "тип(правыйкрай)", "оператор(R)", "направл(N)", "неизвестные(X)". Пример:

$\forall_{abc}(\{a; b\} \subseteq c \leftrightarrow \{; b\} \subseteq c \;\&\; a \in c)$

Спецификация - "тип(правыйкрай)", "оператор(уравнсодержится)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(c)". Прием применяется, если выражение c не является переменной и содержит неизвестные.

xii. Преобразование с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам, обеспечивающее декомпозицию утверждения (протокол "нормразделение").

Протокол "нормразделение($A(x)$ x P)" означает, что A - вид утверждения либо выражения, которое с помощью нормализатора приведения к заданным заголовкам P, применяемого к идентифицируемому с переменной x выражению, преобразуется к виду, допускающему декомпозицию.

Выбирается переменная y, не входящая в протокол, и создается импликация Q, антецедентом которой служит равенство $y = x$, а консеквентом - эквивалентность "$A(x) \leftrightarrow A(y)$". Определяется заголовок s утверждения $A(x)$, и справочник "нормуравнение" определяет по s название R соответствующего нормализатора уменьшения глубины неизвестных. В случае равенства в качестве s берется тип объектов - значений частей равенства. Находятся заголовки $p_1, \dots, p_k$, к которым осуществляет приведение оператор P. Затем создается спецификация "тип(сложить)", "направл(второйтерм)", "оператор(R)", "норм(P)", "см(не(известно(x)) не(переменная(x)) не(заголовок(x p_1)) $\dots$ не(заголовок(x p_k)) или(короче(y x) заголовок(y p_1) $\dots$ заголовок(y p_k)) длина(контрольглубины))". Пример:

По протоколу "нормразделение(содержится(a b) a видобъединение)" создается импликация

$\forall_{abc}(c = a \to a \subseteq b \leftrightarrow c \subseteq b)$

Спецификация - "тип(сложить)", "направл(второйтерм)", "оператор(уравнсодержится)", "норм(видобъединение)", "см(не(известно(a)) не(переменная(a)) не(заголовок(a объединение)) или(короче(c a) заголовок(c объединение)) длина(контрольглубины))".

xiii. Группировка относительно сложного подвыражения с неизвестными (характеристика "группа").

Характеристика "группа(P N)" указывает на теорему приема для группировки в нормализаторе уравнений P относительно сложного выражения с неизвестными. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(собствектор)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcdefghpq}(a = fg \,\&\, e = fh \to ab^{c/d} + eb^{c/d} + p < q \leftrightarrow f(g+h)b^{c/d} + p < q)$

Спецификация - "тип(собствектор)", "оператор(уравнменьше)", "направл(второйтерм)". Выражение b содержит неизвестные, выражения c и d - не содержат.

xiv. Исключение сложных подвыражений с неизвестными (характеристика "исключслова").

Характеристика "исключслова(P, N)" указывает на теорему приема, исключающего сложные выражения в нормализаторе уравнений P. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(учетприменения)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcde}(0 \leq c \,\&\, e = a^2c - (d-b)^2 \,\&\, a < 0 \to b < a\sqrt{c} + d \leftrightarrow b < d \,\&\, e < 0)$

Спецификация - "тип(учетприменения)", "оператор(уравнменьше)", "направл(второйтерм)". Прием исключает радикал с неизвестными.

xv. Стандартная схема вычислений в нормализаторе разрешения относительно неизвестных (характеристика "вычтерм").

Характеристика "вычтерм(P, N, X)" указывает на теорему приема, реализующего один шаг некоторой стандартной схемы вычислений в нормализаторе уравнений P. N - направление замены, X - неизвестные.

Создается спецификация "тип(смрасст)", "оператор(P)", "направл(N)", "неизвестные(X)". Пример:

$\forall_{abkmnrx}(r \in \{1, \ldots, \min(m, n)\} \mathbin{\&} \neg(a(r, r) = 0) \to x\lambda_{ij}(a(i, j), i \in \{1, \ldots, m\} \mathbin{\&} j \in \{1, \ldots, n\}) = \lambda_{pq}(b(p, q), p \in \{1, \ldots, k\} \mathbin{\&} q \in \{1, \ldots, n\}) \leftrightarrow x\lambda_{ij}(((a(i, j)a(r, r) - a(i, r)a(r, j))/a(r, r)$ при $\neg(j = r),$ иначе $a(i, j)), i \in \{1, \ldots, m\} \mathbin{\&} j \in \{1, \ldots, n\}) = \lambda_{pq}(((b(p, q)a(r, r) - a(r, q)b(p, r))/a(r, r)$ при $\neg(q = r),$ иначе $b(p, q)), p \in \{1, \ldots, k\} \mathbin{\&} q \in \{1, \ldots, n\}))$

Спецификация - "тип(смрасст)", "направл(второйтерм)", "неизвестные(x)", "оператор(уравнматр)". Прием вычитает кратные заданного столбца при решении матричного уравнения по стандартной схеме приведения матрицы в левой части к диагональному виду.

(i) Нормализатор вычисления.

Как правило, нормализатор вычисления - это нормализатор общей стандартизации, позволяющий избавляться от некоторой сложной операции (интеграл, производная, мощность и т.п.). Хотя сам факт необходимости специального рассмотрения нормализаторов вычисления не вызывает сомнений, сколь-нибудь серьезного анализа признаков, отличающих их от прочих нормализаторов, пока не предпринималось.

i. Непосредственное вычисление (характеристика "числатом").

Характеристика "числатом" указывает на тождество, выражающее числовой атом через более простые числовые атомы либо полностью их исключающее.

Проверяется, что одна из частей тождества - невырожденный числовой атом A, для заголовка s которого предусмотрен нормализатор вычисления. Проверяется, что другая часть B не содержит символа s. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. По умолчанию, он и рассматривается как нормализатор вычисления. Затем создается спецификация "тип(буква)", "оператор(P)", "направл(N)". Здесь N - направление от A к B. Пример:

$\forall_n(0 \leq n \to \mathrm{card}(\{1, \ldots, n\}) = n)$

Спецификация - "тип(буква)", "оператор(норммощность)", "направл(второйтерм)".

ii. Непосредственное вычисление (характеристика "нормализация").

Пусть характеристика - "нормализация(N)". Проверяется, что заменяемая часть тождества имеет заголовок s, для которого предусмотрен нормализатор вычисления, а заменяющая часть не содержит символа s. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(буква)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{mn}(0 \leq m - n \rightarrow \sum_{k=n}^{m} k = (m - n + 1)(m + n)/2)$

Спецификация - "тип(буква)", "оператор(нормсуммавсех)", "направл(второйтерм)".

iii. Непосредственное вычисление (характеристика "систкоорд").

Характеристика "систкоорд" указывает на тождество для определения координат объекта.

Находится та часть равенства в консеквенте теоремы, которая является названием координат s, и определяется нормализатор P общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(буква)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, D)$ & $A \in$ отрезок$(BE) \rightarrow$ коорд$(E, K) = (-l(AE)/l(AB), 0, 0))$

Спецификация - "тип(буква)", "оператор(нормкоорд)", "направл(второйтерм)".

iv. Непосредственное вычисление (характеристика "функперех").

Характеристика "функперех(i)" указывает на теорему, представляющую собой частный случай определения функциональной характеристики. i - номер операнда консеквента, на котором расположена характеризуемая функция.

Проверяется, что заголовок R консеквента теоремы - символ двуместного отношения. Справочник "функперех"определяет номер j того операнда отношения R, который обычно рассматривается как "входное данное" в задаче нахождения другого операнда. Справочник "упрощинтеграл" определяет пару (f, P), где P - нормализатор вычисления другого операнда, применяемый к терму $f(A)$, где A - входной операнд. Например, при вычислении первообразной нормализатором "нормИнтеграл" входной терм A преобразуется в "Интеграл(A)". Проверяется, что теорема не имеет антецедента с заголовком R. Затем создается импликация с теми же антецедентами, что у исходной теоремы, и консеквентом "равно($f(A)$ B)". Здесь B - отличный от A операнд консеквента теоремы. Данная импликация сопровождается спецификацией "тип(буква)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ab}(\neg(b = 0)$ & $0 < a$ & $\neg(a - 1 = 0) \rightarrow \int a^{bx}dx = \lambda_x(a^{bx}/(b \ln a), x -$ число))

Спецификация - "тип(буква)", "оператор(нормИнтеграл)", "направл(второйтерм)".

v. Сведение к вычислению более простого выражения (характеристика "числатом").

Характеристика "числатом" указывает на тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые.

Проверяется, что консеквент теоремы - равенство, левая часть которого является числовым атомом, причем этот атом - один из имеющих максимальную сложность подтермов консеквента. Находится заголовок s левой части и проверяется, что он имеет единственное вхождение в правую часть. Проверяется, что для s предусмотрен нормализатор вычисления. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(переменная)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ab}(\neg(a \in \{;b\}) \to \mathrm{card}\{a;b\} = \mathrm{card}\{;b\} + 1)$

Спецификация - "тип(переменная)", "оператор(нормощность)", "направл(второйтерм)".

vi. Сведение к вычислению более простого выражения (характеристика "сокращ").

Характеристика "сокращ(N)" указывает на тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. N - направление замены.

Проверяется, что оценки сложности заменяемой и заменяющей частей равны. Единственный имеющий максимальную сложность подтерм заменяемой части - сама эта часть. Заголовок s заменяемой части имеет единственное вхождение в заменяющую. Проверяется, что для s предусмотрен нормализатор вычисления. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(переменная)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{fg}(\sum_{x,f(x)}(-g(x)) = -\sum_{x,f(x)} g(x))$

Спецификация - "тип(переменная)", "оператор(нормсуммавсех)", "направл(второйтерм)".

vii. Сведение к вычислению более простого выражения (характеристика "упрощэкв").

Характеристика "упрощэкв" указывает на теорему, позволяющую выполнить упрощающий переход от характеристики класса к характеристикам других классов. N - направление замены.

Рассматривается заголовок s заменяемой части. Проверяется, что для s предусмотрен нормализатор вычисления. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(переменная)", "оператор(P)", "направл(N
Пример:

$\forall_{APn}(\forall_g(P(g) \to \mathrm{card}(A(g)) = n) \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_{fg}(\text{перестановка}(f, A(g))\ \&\ P(g))) = n!\mathrm{card}(\mathrm{set}_g(P(g))))$

Спецификация - "тип(переменная)", "оператор(нормощность)", "направл(второйтерм)".

viii. Сведение к вычислению более простого выражения (характеристика "нормализация").

Характеристика "нормализация(N)" указывает на тождество, обеспечивающее общую стандартизацию. N - направление замены.

Действия те же, что в предыдуще пункте. Дополнительно проверяется, что s имеет единственное вхождение в заменяющую часть. Пример:

$\forall_{be}(e \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{card}(\mathrm{set}_a(a + b \in e\ \&\ a - \text{число})) = \mathrm{card}(e))$

Спецификация - "тип(переменная)", "оператор(нормэмощность)", "направл(второйтерм)".

ix. Сведение к вычислению более простого выражения (характеристика "функперех").

Характеристика "функперех(i)" указывает на теорему, представляющую собой частный случай определения функциональной характеристики. i - номер операнда консеквента, на котором расположена характеризуемая функция.

Проверяется, что заголовок R консеквента теоремы - символ двуместного отношения. Справочник "функперех"определяет номер j того операнда отношения R, который обычно рассматривается как "входное данное" в задаче нахождения другого операнда. Справочник "упрощинтеграл" определяет пару (f, P), где P - нормализатор вычисления другого операнда, применяемый к терму $f(A)$, где A - входной операнд. Например, при вычислении первообразной нормализатором "нормИнтеграл" входной терм A преобразуется в "Интеграл(A)".

Формируется равенство Q вида "$f(A) = B$", где B - "выходной" операнд консеквента теоремы. Среди антецедентов теоремы имеется единственное утверждение U с заголовком R. Находятся его входной операнд C и выходной операнд D. Если D - переменная, то в равенстве Q находится подвыражение вида $D(T)$. Определяется тип H значений выражения T. Находится надтерм "отображение($X\ldots$)" подвыражения $D(T)$, и далее в качестве D рассматривается терм "$\lambda_X(D(X), H(x))$".

Создается импликация, получаемая из исходной заменой антецедента U на "$f(C) = D$". Если теорема имела характеристику "упрощинтеграл" (т.е. обработка антецедента U проще обработки консеквента), то создается спецификация "тип(переменная)". "оператор(P)", "направл(второйтерм)". В противном случае проверяется наличие характеристики "контрольвывода(M)", выбирается новая переменная Y, и к спецификации добавляется элемент "указатель(контекст(подчинено(Y фикс(0 1 1))вид(Y M)))". Пример:

$\forall_{fg}(\int f(x)dx = \lambda_x(g(x), x-\text{число}) \rightarrow \int -f(x)dx = \lambda_x(-g(x), x-\text{число}))$

Спецификация - "тип(переменная)", "оператор(нормИнтеграл)", "направл(второйтерм)".

x. Декомпозиция вычисляемого выражения (характеристика "числатом").

Характеристика "числатом" указывает на тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые.

Проверяется, что консеквент теоремы - равенство, левая часть которого является числовым атомом, причем этот атом - один из имеющих максимальную сложность подтермов консеквента. Находится заголовок s левой части и проверяется, что он имеет больше одного вхождения в правую часть. Проверяется, что для s предусмотрен нормализатор вычисления. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(менее)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{AB}(\text{непересек}(A, B) \to \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B))$

Спецификация - "тип(менее)", "оператор(норммощность)", "направл(второйтерм)".

xi. Декомпозиция вычисляемого выражения (характеристика "сокращ").

Характеристика "сокращ(N)" указывает на тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. N - направление замены.

Проверяется, что оценки сложности заменяемой и заменяющей частей равны. Единственный имеющий максимальную сложность подтерм заменяемой части - сама эта часть. Заголовок s заменяемой части имеет более одного вхождения в заменяющую. Проверяется, что для s предусмотрен нормализатор вычисления. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(менее)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_A(\text{конечное}(A) \to \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in A \ \& \ j \in A \setminus \{i\})) = \text{card}(A)(\text{card}(A) - 1))$

Спецификация - "тип(менее)", "оператор(норммощность)", "направл(второйтерм)".

xii. Декомпозиция вычисляемого выражения (характеристика "нормализация").

Пусть характеристика - "нормализация(N)". Рассматривается заголовок s заменяемой части. Проверяется, что для s предусмотрен нормализатор вычисления и что s имеет более одного вхождения в заменяющую часть. Определяется заголовок P нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком s. Затем создается спецификация "тип(менее)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{ABa}(\text{конечное}(B) \ \& \ \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \to \text{card}(\text{set}_f(\text{Отображение}(f, A, B) \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f))) = \text{card}(B)!/(\text{card}(B) - \text{card}(A))!)$

Спецификация - "тип(менее)", "оператор(норммощность)", "направл(второйтерм)".

xiii. Попытка варьирования выражения в нормализаторе вычисления (характеристика "Варотр").

Характеристика "Варотр(P, N)" указывает на теорему приема, выполняющего попытку варьирования выражения в нормализаторе вычисления P. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(клавиатура)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcfgx}(0 < f(x)\ \&\ c = \lim_{x\to b\backslash a}(\ln f(x)g(x)) \to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)^{g(x)}) = \exp(c))$

Спецификация - "тип(клавиатура)", "оператор(нормпредел)", "направл(второйтерм)".

xiv. Разбор случаев в нормализаторе вычисления (характеристика "откат").

Характеристика "откат(P)" указывает на теорему приема, инициирующего разбор случаев в нормализаторе вычисления P.

Создается спецификация "тип(кодтекста)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{abcfx}(\lim_{x\to b\backslash a}f(x) = 0 \to \lim_{x\to b\backslash a}(f(x)^c) =$ разборслучаев$(0 < c \vee c < 0\ \&\ c = 0))$

Спецификация - "тип(кодтекста)", "оператор(нормпредел)", "направл(второйтерм)".

Разбор случаев в нормализаторе осуществляется в процессе вычислений, если оказывается, что для их продолжения нужна некоторая дополнительная информация. Тогда реализуется откат к началу вычислений, где и происходит разбор случаев. Для каждого подслучая вычисления повторяются. Наличие буферов обычно позволяет сразу извлекать готовые результаты промежуточных действий, и повторение почти не замедляет работы. Безоткатный разбор случаев наталкивается на приниципиальные трудности: для некоторых подслучаев вычисления могут оказаться успешными, а для других - невозможны, так как сама ветвь, в которой инициирован разбор случаев, для этих подслучаев тупиковая. Чтобы в нормализаторе был возможен разбор случаев с откатами, в указании его формата должен присутствовать элемент "разборслучаев".

xv. Стандартизация в нормализаторе вычисления (характеристика "стандстепень").

Характеристика "стандстепень(P, N)" указывает на теорему приема, выполняющего стандартизацю в нормализаторе вычисления.

Создается спецификация "тип(указатель)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_{ab}(\mathrm{set}_{xy}(y = ax/b\ \&\ x -$ число$) = \mathrm{set}_{xy}(ax - by = 0\ \&\ x -$ число $\&$ $y -$ число$))$

Спецификация "тип(указатель)", "оператор(нормкоорд)", "направл(второйтерм)". Прием приводит уравнение прямой на плоскости к стандартному виду.

xvi. Ввод комментария, передающего информацию внешнему процессу (характеристика "комментарий").

Характеристика "комментарий(P)" указывает на теорему приема, передающего комментарий внешнему процессу в нормализаторе вычисления P.

Создается спецификация "тип(набор)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abdefgh}(\neg(a = 0) \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq h \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ \lim_{c \to g \backslash f} d(c) = \infty \ \& \ (c \to g \backslash f) \to \text{контекст}(ab^{d(c)} + eh^{d(c)}))$

Спецификация - "тип(набор)", "оператор(асимптоценка)". Прием усматривает необходимость сравнить два основания степени - b и h. Для этого он передает текущей задаче комментарий (Случай $b = h \ \vee \ 0 < b - h \ \vee \ b - h < 0$). После того, как нормализатор завершит работу (его результатом будет некоторое выражение, не дающее искомой асимптотической оценки), текущая задача организует разбор случаев с повторным запуском вычислений.

xvii. Выдача отказа в нормализаторе вычисления (характеристика "отказ").

Характеристика "отказ(P)" указывает на прием выдачи отказа в нормализаторе вычисления P.

Создается спецификация "тип(новаяпосылка)", "оператор(P)", "направл(второйтерм)". Пример:

$\forall_a(a = \text{отказ})$

Спецификация - "тип(новаяпосылка)", "оператор(асимптоценка)", "направл(второйтерм)". Соответствующий прием заменяет преобразуемое нормализатором "асимптоценка" выражение на символ "отказ", если это выражение содержит символ "O". Прием применяется на максимальном уровне, по исчерпании прочих средств.

xviii. Устранение вложенных операций в нормализаторе вычисления (характеристика "спускоперандов").

Характеристика "спускоперандов(P)" указывает на теорему "коммутативно(s)", такую, что для ассоциативной и коммутативной операции s в нормализаторе вычисления P создается прием устранения вложенных операций.

Создается спецификация "тип(внутренность)", "оператор(P)". Пример:

"коммутативно(плюс)"

Спецификация - "тип(внутренность)", "оператор(значскалумнож)".

xix. Лексикографическое упорядочение в нормализаторе вычисления (характеристика "лексупорядочение").

Характеристика "лексупорядочение(P)" указывает на теорему "коммутативно(s)", такую, что для коммутативной операции s в нормализаторе вычисления P создается прием лексикографического упорядочения ее операндов.

Создается спецификация "тип(усмдвоичное)", "оператор(P)". Пример:

"коммутативно(скалумнож)"

Спецификация - "тип(усмдвоичное)", "оператор(значскалумнож)".

(j) Нормализатор выделения заданных подтермов (характеристика "извлечение").

Характеристика "извлечение(P, N)" указывает на теорему приема нормализатора P извлечения заданных подтермов. N - направлениезамены.

Создается спецификация "тип(дискрвеличина)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_{abcn}(n = a/b \ \& \ n -$ целое $\rightarrow c^a = (c^b)^n)$

Спецификация - "тип(дискрвеличина)", "оператор(извлечение)", "направл(второйтерм)". Во входных комментариях нормализатора указывается необходимость преобразований, выявляющих вхождения подтерма c^b. Нормализатор "извлечение" используется при усмотрении возможности перехода к новым неизвестным в системах уравнений элементарной алгебры.

(k) Нормализатор ограничений на известные параметры (характеристика "известны").

Характеристика "известны(P, N)" указывает на теорему приема нормализатора P стандартизации ограничений на известные параметры. N - направление замены.

Создается спецификация "тип(нормквадратура)", "оператор(P)", "направл(N)". Пример:

$\forall_a(0 \leq a \rightarrow 0 < ab \leftrightarrow 0 < a \ \& \ 0 < b)$

Спецификация - "тип(нормквадратура)", "оператор(стандменьше)", "направл(второйтерм)". Нормализатор применяется к строгим неравенствам, не содержащим неизвестных и входящим в ответ задачи.

3. Синтезатор

(a) Прием синтезатора (характеристика "синтезатор").

Характеристика "синтезатор(P)" указывает на теорему приема пакетного синтезатора P.

Создается спецификация "тип(синтезатор)", "оператор(P)". Пример:

$\forall_{abcd}(a \in b \ \& \ c \in d \rightarrow (a, c) \in b \times d)$

Спецификация - "тип(синтезатор)", "оператор(выборточки)". Для выбора элемент прямого произведения выбираются элементы сомножителей.

(b) Прием синтезатора (характеристика "спуск").

Характеристика "спуск(P)" указывает на простую импликацию, которую можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком P, причем все ее антецеденты тоже можно обработать проверочными операторами.

Проверяется, что для обработки консеквента теоремы имеется подходящий пакетный синтезатор P. Создается спецификация "тип(синтезатор)", "оператор(P)", причем дополнительно проверяется, что компилятор спецификаций создает прием по этой спецификации. Пример:

$\forall_{abcd}(a \leq b \;\&\; c \leq d \rightarrow a + c \leq b + d)$

Спецификация - "тип(синтезатор)", "оператор(верхняяоценка)". Для получения верхней оценки суммы $a+b$ находятся верхние оценки слагаемых.

4. Пакетный анализатор.

   (a) Прием анализатора, выводящий следствия (характеристика "анализатор").

   Характеристика "анализатор(P)" указывает на прием анализатора P, предназначенный для вывода следствий.

   Создается спецификация "тип(Неизвестные)", "оператор(P)". Пример:

   $\forall_{ABCpq}(\text{актив}(\angle(ACB)) \;\&\; \text{актив}(l(AC)) \;\&\; \text{актив}(l(BC)) \;\&\; p = \sin(\angle(ACB) + \angle(ABC)) \;\&\; q = \sin(\angle(ABC)) \rightarrow pl(AC) = ql(BC))$

   Спецификация - "тип(Неизвестные)", "оператор(синусы)". Прием выводит соотношение пропорциональности, используя теорему синусов.

   (b) Прием анализатора, выполняющий тождественное либо эквивалентное преобразование (характеристика "внутрпреобр").

   Характеристика "внутрпреобр(P)" указывает на прием анализатора P, предназначенный для тождественной либо эквивалентной замены.

   Создается спецификация "тип(быстрхарактеристика)", "оператор(P)". Пример:

   $\forall_{ABC}(0 \leq \pi/2 - \angle(ABC) \;\&\; \neg(a = 0) \rightarrow a\sin(\angle(ABC)) = b \leftrightarrow \angle(ABC) = \arcsin(b/a))$

   Спецификация - "тип(быстрхарактеристика)", "оператор(синусы)". Прием преобразует равенство, получая явное выражение для угла.

5.5 Примеры автоматического создания спецификаций по теореме

Создание спецификации является первым шагом на пути от теоремы к приему. Теорема с характеристиками - это еще элемент базы теорем, никак не связанный с каким-либо конкретным применением. В то же время, теорема со спецификацией - это уже остов приема, указывающий на то, как теорема будет применяться при решении задачи.

Цепочка шагов по преобразованию этого остова в прием была подробно рассмотрена в предыдущем, седьмом томе монографии. Спецификатор обычно создает для одной теоремы несколько различных спецификаций. Часть их отсеивается на различных этапах перехода к приему, ввиду избыточности либо неэффективности. Многие приемы спецификатора явно требуют доработки, так как не предоставляют достаточной для создания полноценного приема информации. Они лишь обозначают сам факт наличия приема определенного типа. Тем не менее, уже сейчас пробный цикл работы генератора приемов оказался сопособен предложить более 2000 вполне разумных приемов, пополнивших базу приемов решателя.

В заключение данного тома приведем несколько примеров работы спецификатора на теоремах из различных разделов. Вместо логического символа, кодирующего тип приема, ниже приводим развернутое название этого типа.

1. Включение объединения:

   $\forall_{bce}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set}\ \&\ e - \mathrm{set} \to b \cup c \subseteq e \leftrightarrow b \subseteq e\ \&\ c \subseteq e)$

   Характеристики - "и(второйтерм)", "глуб(b второйтерм)", "глуб(c второйтерм)", "упрощпрог(e второйтерм)", "сокращнеизв(e первыйтерм)", "сборка(первыйтерм)". Созданы следующие спецификации:

   (a) Дизъюнктивно - конъюнктивная декомпозиция условия задачи на описание относительно неизвестных; направл(второйтерм).

   (b) Дизъюнктивно - конъюнктивная декомпозиция утверждения в нормализаторе явного разрешения; направл(второйтерм); оператор(уравнсодержится).

   (c) Конъюнктивная декомпозиция элементарного утверждения; направл(второйтерм).

   При создании приема данного типа он снабжается множеством ограничений, делающих приемы других приводимых в рассматриваемом списке типов тоже необходимыми.

   (d) Конъюнктивная декомпозиция посылки; направл(второйтерм).

   (e) Конъюнктивная декомпозиция под корневым отрицанием в посылке задачи на доказательство или задачи на исследование, имеющей цель "противоречие"; направл(второйтерм).

   (f) Свертка группы явно разрешенных относительно неизвестных условий в одно, тоже явное разрешенное относительно неизвестных; неизвестные(e); направл(первыйтерм).

   (g) Свертка группы неизвестных условий в одно условие, явно разрешенное относительно неизвестного выражения; неизвестные(e); направл(второйтерм).

   Отличие от предыдущего в том, что там e - неизвестная, а здесь - произвольное выражение с неизвестными.

   (h) Группировка элементов описания класса, явно разрешенных относительно переменной связывающей приставки; переменная(e); направл(первыйтерм).

   (i) Свертка всех содержащих заданную неизвестную условий задачи на поиск примера в единственное условие, дающее непосредственный подбор примера; неизвестные(e); направл(первыйтерм).

   (j) Свертка группы условий задачи на описание при редактировании ответа; неизвестные(e); направл(первыйтерм).

   (k) Дизъюнктивно - конъюнктивная свертка в условии задачи на свертку; направл(первыйтерм).

   (l) Сокращенная переформулировка группы условий задачи на свертку; направл(первыйтерм).

   Отличие от предыдущего пункта в том, что там была преобразована конъюнкция в рамках одного условия, а здесь - несколько условий.

   (m) Свертка группы известных условий задачи на описание при редактировании ответа; направл(первыйтерм).

2. Транзитивность включения:

   $\forall_{ade}(a - \mathrm{set}\ \&\ d - \mathrm{set}\ \&\ e - \mathrm{set}\ \&\ a \subseteq d\ \&\ d \subseteq e \to a \subseteq e)$

   Характеристики - "исключ", "вывод", "отношение", "транзитивно", "транзитоперанд", "легковидеть(усмсодержится 4)", "легковидеть(усмсодержится 5)". Созданы следующие спецификации:

   (a) Вывод следствий в задаче на исследование, имеющей цель "исключ".

   (b) Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте; антецедент(1). Антецеденты для типов данных в теореме приема отброшены.

   (c) Усмотрение истинности либо ложности из утверждений, содержащихся в контексте; антецедент(2). Антецеденты для типов данных в теореме приема отброшены. Этот прием необходимо дополняет предыдущий, так как в контексте может оказаться любое из двух включений.

   (d) Использование синтезаторов для устранения зависимости от исключаемых переменных в задаче на исследование, имеющей цели "длялюбого", "независит"; указатель(значения(4)); см(независит(a)не(независит(d))).

   (e) Использование синтезатора для устранения зависимости от запрещенных переменных; значения(4); подборзначений(5).

   (f) Проверочный оператор; оператор(усмсодержится); антецедент(1). Антецеденты для типов данных в теореме приема отброшены.

   (g) Проверочный оператор; оператор(усмсодержится); антецедент(2). Антецеденты для типов данных в теореме приема отброшены.

3. Параметрическое описание условия непересечения:

   $\forall_{ca}(c - \mathrm{set}\ \&\ a - \mathrm{set} \to \text{непересек}(c, a) \leftrightarrow \exists_b(a = b \setminus c\ \&\ b - \mathrm{set}))$

   Характеристики - "общнорм(первыйтерм)", "развертка(существует второйтерм)", "параметризация", "связпарам(первыйтерм)". Созданы следующие спецификации:

   (a) Исключение несущественных неизвестных в задаче на описание при невырожденном ограничении; направл(первыйтерм).

   (b) Общая стандартизация с исключением квантора; направл(первыйтерм).

   (c) Кванторная свертка; направл(первыйтерм).

   (d) Попытка использования явного параметрического описания при получении частичного ответа; направл(первыйтерм).

4. Образ объединения:

   $\forall_{def}(d - \mathrm{set}\ \&\ e - \mathrm{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ d \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&\ e \subseteq \mathrm{Dom}(f) \to \text{образ}(f, d) \cup \text{образ}(f, e) = \text{образ}(f, d \cup e))$

Характеристики - "дистрибразвертка(первыйтерм)", "разбивает(первыйтерм)", "декомпозиция(первыйтерм)", "Равно", "свертка(второйтерм)", "стандформа(стандобъединение первыйтерм)", "склейка(f второйтерм)", "нормзаголовок(видобъединение первыйтерм)", "группмножитель(второйтерм)", "группшаг(второйтерм)", "сокращ(первыйтерм)", "коммутативно(первыйтерм)". Созданы следующие спецификации:

(a) Попытка исключения сложного понятия путем общей стандартизации после дистрибутивной развертки; направл(второйтерм); символ(образ)". Теорема преобразуется к виду:

$$\forall_{abdef}(a = \text{образ}(f, d)\ \&\ b = \text{образ}(f, e) \rightarrow \text{образ}(f, d \cup e) = a \cup b)$$

(b) Дизъюнктивно-конъюнктвиная декомпозиция условия задачи на описание путем анализа экстремальных значений; направл(первыйтерм). У теоремы приема все антецеденты отброшены. По умолчанию, это предполагается и в дальнейших пунктах.

(c) Нормализатор упрощения выражений путем перебора группировок; направл(второйтерм); оператор(группмножество).

(d) Прием нормализатора сокращенной перезаписи; направл(второйтерм); оператор(упрощобединение).

(e) Свертка константного выражения; направл(второйтерм).

(f) Обновременная обработка всех операндов в нормализаторе сокращенной перезаписи; направл(второйтерм); оператор(упрощобъединение).

(g) Преобразование к стандартной форме; оператор(стандобъединение); направл(первыйтерм).

(h) Упрощение выражения под описателем относительно варьируемой переменной; направл(второйтерм); переменная(f).

(i) Группировка относительно выражения с неизвестными; направл(второйтерм); неизвестные(f).

(j) Прием нормализатора упрощения относительно неизвестных; направл(второйтерм); неизвестные(f); оператор(уравнобъединение).

(k) Непосредственное преобразование к нужному заголовку; оператор(видобъединение); направл(первыйтерм).

(l) Изменение заголовка неизвестного подвыражения, обеспечивающее возможность изменения заголовка всего выражения; оператор(видобъединение); направл(первыйтерм); норм(видобъединение). Теорема приема имеет вид:

$$\forall_{abf}(a = b \rightarrow \text{образ}(f, a) = \text{образ}(f, b))$$

Антецедент предпринимает попытку преобразовать a к виду объединения, чтобы после этого воспользоваться теоремой про образ объединения.

(m) Группировка сложных операций; направл(второйтерм).

5. Решение простейшего линейного уравнения:

$$\forall_{abx}(b - \text{число} \rightarrow ax = b \leftrightarrow \neg(a = 0)\ \&\ x = b/a\ \vee\ a = 0\ \&\ b = 0)$$

Характеристики - "глуб(x второйтерм)". Созданы следующие спецификации:

(a) Разрешение условия задачи на описание либо посылки задачи на исследование относительно заданных неизвестных; неизвестные(x); направл(второйтерм)".

(b) Разрешение относительно значения неизвестной функции при решении функционального уравнения; неизвестные(x); направл(второйтерм).

(c) Явное разрешение относительно варьируемой переменной при вычислении операции над семейством; неизвестная(x); направл(второйтерм).

(d) Явное выражение параметра известного условия задачи на описание через другие параметры; переменная(x); направл(второйтерм).

(e) Явное выражение параметра посылки через другие параметры; переменная(x); направл(второйтерм).

(f) Явное выражение численного параметра посылки задаи на исследование через другие численные параметры при контроле разбора случаев; переменная(x); направл(второйтерм).

(g) Разрешение элементарного утверждения относительно переменной, связываемой внешним квантором; неизвестная(x); направл(второйтерм).

(h) Разрешение посылки задачи на доказательство либо на исследование относительно заданных параметров; неизвестные(x); направл(второйтерм).

(i) Разрешение относительно неконстантного выражения; терм(x); направл(второйтерм).

(j) Разрешение сопровождающего утверждения ответа задачи на описание относительно неконстантного выражения; переменные(x); направл(второйтерм).

6. Сложение дробных выражений:

$\forall_{abcdef}(a$ – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & $\neg(c=0)$ & $\neg(d=0)$ & $\neg(f=0) \rightarrow ab/(cd)+ae/(cf) = a(bf+de)/(cdf))$

Характеристики: "нормзаголовок(видумножение второйтерм)", "вычпрог(второйтерм, и(десчисло(d)десчисло(e) десчисло(b) десчисло(f)), $bf{+}de$, df)", "нормплс(второйтерм, видумножение, типданных(десчисло b), типданных(десчисло f), типданных(десчисло d), типданных(десчисло e))".

(a) Непосредственное преобразование к нужному заголовку; оператор(видумножение); направл(второйтерм).

(b) Стандартизация с помощью вычислений; направл(второйтерм); см(десчисло(d)десчисло(e)десчисло(b)десчисло(f)).

Теорема преобразуется к виду: "$\forall_{abcdefgh}(h=df$ & $g=bf+de \rightarrow ab/(cd)+ae/(cf)=ag/(hc))$".

(c) Вычисления в нормализаторе общей стандартизации; оператор(нормплюс); направл(второйтерм); типданных(десчисло b d e f).

Теорема такая же, как в предыдущем пункте.

   (d) Вычисления с константами в нормализаторе приведения к заданным заголовкам; направл(второйтерм); оператор(видумножение); см(десчисло(d) десчисло(e)десчисло(b)десчисло(f)).

      Теорема не преобразована. Заметим, что этот прием поглощается первым из приемов данной цепочки, однако в ситуации с константами он предпочтительнее, так как сразу дает упрощение. Поэтому нужны оба приема, но уровень срабатывания данного будет меньше, чем у первого приема.

7. Переход к новому основанию логарифма:

   $\forall_{abc}(\neg(a-1=0)\ \&\ \neg(c-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ 0<b\ \&\ 0<c\ \&\ a-$ число $\&$ $b-$ число $\&$ $c-$ число $\rightarrow \log_a b/\log_a c = \log_c b)$

   Характеристики - "стандлогарифм(c a первыйтерм)", "свертка(второйтерм)", "группмножитель(второйтерм)". Созданы следующие спецификации:

   (a) Выбор более короткой версии стандартизируемого операнда, уже имеющейся в задаче на преобразование; направл(второйтерм); внутрзамена(c, a).
   (b) Отождествление стандартизируемых операндов неизвестных подвыражений условия задачи на описание; направл(первыйтерм); терм(логарифм(a e)).
   (c) Свертка константного выражения; направл(второйтерм).
   (d) Переход в задаче на преобразование к уже имевшимся подтермам; направл(первыйтерм); исключение($\log_c b$); терм($\log_a b$, $\log_a c$).

8. Сумма синусов:

   $\forall_{ab}(a-$ число $\&$ $b-$ число $\rightarrow \sin a + \sin b = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2))$

   Характеристики: "тригаргумент(второйтерм)", "нормзаголовок(видумножение второйтерм)". Созданы следующие спецификации:

   (a) Преобразование двух неизвестных унифицируемых аргументов, приводящее к единственному неизвестному унифицируемому аргументу; направл(второйтерм).

      Теорема преобразуется к виду: "$c = \sin((a+b)/2)\ \&\ d = \cos((a-b)/2) \rightarrow \sin a + \sin b = 2cd$". Прием проверяет, что одно из выражений c, d содержит неизвестные, а другое - нет.

   (b) Непосредственное преобразование к нужному заголовку; оператор(видумножение); направл(второйтерм).
   (c) Попытка группировки нескольких корневых операндов; оператор(видумножение); направл(второйтерм).

      Теорема преобразуется к виду: "$\forall_{abcde}(e = d + 2c\sin(a/2+b/2)\cos(a/2 - b/2) \rightarrow c\sin a + c\sin b + d = e)$". Антецедент предпринимает попытку разложить на множители выражение, возникшее после группировки суммы синусов.

9. Синус суммы:

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   Характеристики: "декомпозиция(второйтерм)", "стандформа(стандплюс второйтерм)", "свертка(первыйтерм)", "склейка(a первыйтерм)", "склейка(b первыйтерм)", "сокращ(второйтерм)", "группмножитель(первыйтерм)", "вычпрог(первыйтерм, и(десчисло(a) десчисло(b)), $a+b$)". Созданы следующие спецификации:

   (a) Декомпозиция неизвестного подвыражения в условии задачи на описание; направл(второйтерм). Здесь и далее, по умолчанию, в теореме приема антецеденты отброшены.

   (b) Преобразование, подготавливающее возможность исключения сложного понятия, расположенного в терме, идентифицированнном с переменной; направл(второйтерм); см(или(контекст(вид(a умножение(x3 x4)) символ(x3 арксинус арккосинус арктангенс) единица(1 x4) заменазнака(минус x4)) контекст(вид(a дробь(x3 x4)) или(заголовок(x4 2) и(заголовок(x4 минус) первыйсимвол(x4 2))) символ(x3 арксинус арккосинус арктангенс) заменазнака(минус x4)))).

   (c) Преобразование к стандартной форме; оператор(стандплс); направл(второйтерм).

   (d) Прием нормализатора сокращенной перезаписи; направл(первыйтерм); оператор(упрощплюс).

   (e) Переход в задаче на преобразование к уже имевшимся подтермам; направл(второйтерм); исключение($\sin(a+b)$); терм($\sin a$, $\cos b$, $\cos a$, $\sin b$).

   (f) Упрощение выражения под описателем относительно варьируемой переменной; направл(второйтерм); переменная(a).

   (g) Группировка всех вхождений унифицируемого аргумента в условие задачи на преобразование; направл(первыйтерм); символ(тригаргумент); терм(a); терм(b).

   (h) Шаг сведения условия задачи на описание к кратным вхождениям единственного неизвестного подтерма; направл(первыйтерм); терм($\sin(a+b)$).

   (i) Прием нормализатора упрощения относительно неизвестных; направл(первыйтерм); неизвестные(a b); оператор(уравнплюс).

   (j) Упрощение выражения под описателем относительно варьируемой переменной; направл(первыйтерм); переменная(b).

   (k) Сведение неизвестного унифицируемого аргумента к другим уже имеющимся в задаче неизвестным унифицируемым аргументам; направл(второйтерм).

   (l) Стандартизация с помощью вычислений; направл(второйтерм); см(десчисло(a)десчисло(b). Теорема преобразована к виду:

   $\forall_{abc}(c = a + b \to \sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin c)$

   (m) Вычисления в нормализаторе общей стандартизации; оператор(нормплюс); направл(второйтерм); типданных(десчисло a b). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

   (n) Группировка сложных операций: направл(первыйтерм).

10. Теорема Пифагора:

    $\forall_{ABC}(A -$ точка $\& \ B -$ точка $\& \ C -$ точка $\& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2)$

    Характеристики - "антецедент", "числовойатом". Созданы следующие спецификации:

    (a) Соотношение для старых числовых атомов. Теорема преобразуется к виду:

    $\forall_{ABC}($актив$(l(AC))$ $\&$ актив$(l(AB))$ $\&$ актив$(l(BC))$ $\&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2)$

    (b) Соотношение связывает числовой атом "неизв" с определимыми атомами. Теорема преобразуется к виду:

    прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2)$

    (c) Общий случай соотношения для числовых атомов. Теорема та же, что в предыдущем пункте.

    В действительности для этой теоремы можно было бы создать множество других спецификаций, согласно описанным в седьмом томе монографии подтипам указанных выше трех типов приемов. Однако, создавать такие спецификации сразу же нецелесообразно. Они оказываются востребованы лишь доводчиком, уточняющим в процессе примерки приема на задачах необходимую степень мотивированности его срабатывания. Это же замечание относится и к другим геометрическим приемам.

11. Вписанные углы, опирающиеся на общую хорду:

    $\forall_{ABCDEF}(A -$ точка $\& \ B -$ точка $\& \ C -$ точка $\& \ D -$ точка $\& \ E -$ точка $\&$ $F -$ точка $\& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(C = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(C = D) \ \&$ $\neg(A = B) \ \& \ C \in$ окружность(AB) $\&$ $D \in$ окружность(AB) $\&$ $E \in$ окружность(AB) $\&$ $F \in$ окружность(AB) $\&$ однасторона$(E, F,$ прямая$(CD)) \rightarrow \angle(CED) = \angle(CFD))$

    Характеристики - "равны", "числовойатом". Созданы следующие спецификации:

    (a) Соотношение для старых числовых атомов. Теорема преобразуется к виду:

    $\forall_{ABCDEF}($актив$(\angle(CED))$ $\&$ актив$(\angle(CFD))$ $\&$ $C \in$ окружность(AB) $\&$ $D \in$ окружность(AB) $\&$ $E \in$ окружность(AB) $\&$ $F \in$ окружность(AB) $\&$ однасторона$(E, F,$прямая$(CD)) \rightarrow \angle(CED) = \angle(CFD))$

    (b) Соотношение связывает числовой атом "неизв" с определимыми атомами. Теорема преобразуется к виду:

    $\forall_{ABCDEF}($разныеточки(D, F) $\&$ разныеточки(C, F) $\&$ разныеточки(D, E) $\&$ разныеточки(C, E) $\&$ $C \in$ окружность(AB) $\&$ $D \in$ окружность(AB) $\&$ $E \in$ окружность(AB) $\&$ $F \in$ окружность(AB) $\&$ однасторона$(E, F,$прямая$(CD)) \rightarrow \angle(CED) = \angle(CFD))$

   (c) Равенство двух невырожденных числовых атомов. Теорема та же, что в предыдущем пункте.
   (d) Равенство двух старых числовых атомов. Теорема та же, что в первом пункте данного списка.

12. Уравнение прямой, проходящей через две точки:

    $\forall_{ABKabcd}(A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд(K) & $\neg(A = B)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}((d - b)x + (a - c)y + cb - ad = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

    Характеристики - "Равно", "уравнмножество". Созданы следующие спецификации:

   (a) Вывод уравнения для координат множества объектов. В теореме приема неравенство $\neg(A = B)$ заменено на "разныеточки(A, B)".
   (b) Выражение координат множества объектов через описатель "класс". Теорема такая же, как в предыдущем пункте.
   (c) Вывод уравнения для текущих координат множества объектов; терм(коорд(прямая$(AB), K)$). Теорема преобразуется к виду:

       $\forall_{ABKabcd}($коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d) \rightarrow$ коорд(прямая(AB), $K) = \mathrm{set}_{xy}((d - b)x + (a - c)y + cb - ad = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

13. Усмотрение эллипса:

    $\forall_{EKabcdef}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & прямкоорд(K) & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $0 < 4ac - b^2$ & $(a + c)(4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2) < 0 \rightarrow$ эллипс(E))

    Характеристики - "видобъекта", "уравндробь". Созданы следующие спецификации:

   (a) Усмотрение вида исследуемого множества объектов по параметрам уравнения для его координат; цель(линия).
   (b) Усмотрение вида множества объектов по уравнению для его координат.

14. Определение предела последовательности:

    $\forall_{ab}(a -$ число & последовательность$(b, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(b) = a \leftrightarrow \forall_e(e -$ число & $0 < e \rightarrow \exists_n(n -$ натуральное & $\forall_m(m -$ натуральное & $n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$

    Характеристики - "определение($\lim(b) = a$)", "Существует(первыйтерм)", "развертка(длялюбого второйтерм)", "уменьшение(второйтерм)". Созданы следующие спецификации:

   (a) Вывод определения. Теорема преобразуется к виду:

       $\forall_{ab}(a -$ число & последовательность$(b, \mathbb{R})$ & $\lim(b) = a \rightarrow \forall_e(e -$ число & $0 < e \rightarrow \exists_n(n -$ натуральное & $\forall_m(m -$ натуральное & $n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$

(b) Свертка квантора существования в консеквенте кванторного условия задачи на описание; направл(первыйтерм); указатель(блокпроверок(1)); указатель(занесениепосылки(1 натуральное(m))). Теорема преобразуется к виду:

$\forall_{abm}(b(m) - \text{число} \rightarrow \lim(\lambda_m(b(m), m - \text{натуральное})) = a \leftrightarrow \forall_e(e - \text{число}\ \&\ 0 < e \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное}\ \&\ \forall_m(m - \text{натуральное}\ \&\ n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$

(c) Кванторная расшифровка; направл(второйтерм). Исходная теорема не преобразуется.

(d) Кванторная расшифровка; направл(второйтерм); указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема преобразуется к виду:

$\forall_{abm}(a - \text{число}\ \&\ b(m) - \text{число} \rightarrow \lim(\lambda_m(b(m), m - \text{натуральное})) = a \leftrightarrow \forall_e(e - \text{число}\ \&\ 0 < e \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное}\ \&\ \forall_m(m - \text{натуральное}\ \&\ n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$

(e) Кванторная расшифровка в режиме развертки; направл(второйтерм); указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(f) Кванторная расшифровка в условии задачи на доказательство; направл(второйтерм); указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(g) Кванторная расшифровка под квантором; направл(второйтерм); указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(h) Расшифровка неизвестного подутверждения условия задачи на описание; указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(i) Кванторная расшифровка посылки, приводящая к квантору существования; указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(j) Кванторная расшифровка посылки, приводящая к квантору общности; указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(k) Кванторная расшифровка в условии задачи на описание, не имеющей неизвестных; указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(l) Преобразование условия задачи на доказательство, исключающее сложное выражение; указатель(блокпроверок(2)); указатель(занесениепосылки(2 натуральное(m))). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

(m) Явное разрешение относительно переменных кванторной приставки отрицания кванторной импликации, возникающей при расшифровке условия задачи на описание и содержащей функцию, определенную в контексте; направл(второйтерм); функция(b). Теорема преобразуется к виду:

$\forall_{ab}((e - \text{число} \ \& \ 0 < e \ \& \ \neg(\exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ n \leq m \to |b(m) - a| < e)))) = c(e) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \to \lim(b) = a \to \neg_{(}\exists_e(c(e))))$

15. Производная произведения:

$\forall_{aeg}(\mathrm{Dom}(e) = \mathrm{Dom}(g) \ \& \ \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \mathrm{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \mathrm{Dom}(g) \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(e, a) \ \& \ \text{дифференцируема}(g, a) \to \text{производная}(\lambda_c(e(c)g(c), c \in \mathrm{Dom}(g)), a) = e(a)\text{производная}(g, a) + g(a)\text{производная}(e, a))$

Характеристики - "нормализация(второйтерм)", "описатель(второйтерм)", "сокращ(второйтерм)", "отображение", "функции". Создана единственная спецификация:

Декомпозиция вычисляемого выражения; направл(второйтерм); оператор(нормпроизводная). Теорема преобразована к виду:

$\forall_{abdeg}(a - \text{число} \ \& \ dg(a)/da = b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ de(a)/da = d \ \& \ d - \text{число} \to d(e(a)g(a))/da = e(a)b + g(a)d)$

16. Определение условной вероятности:

$\forall_{ABC}(A - \mathrm{set} \ \& \ B - \mathrm{set} \ \& \ \neg(\text{вероятность}(A, C) = 0) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \to \text{услвероятн}(B, A, C) = \text{вероятность}(A \cap B, C)/\text{вероятность}(A, C))$

Характеристики - "определение(услвероятн(B, A, C))", "числовойатом", "числатом", "числзнач", "упрощение(второйтерм)2. Созданы следующие спецификации:

(a) Выражение числового атома через численные параметры с помощью обращений к нормализаторам; направл(второйтерм). Теорема преобразуется к виду:

$\forall_{abABC}(a = \text{вероятность}(A \cap B, C) \ \& \ b = \text{вероятность}(A, C) \to \text{услвероятн}(B, A, C) = a/b)$

(b) Непосредственное исключение сложной операци; направл(второйтерм). Теорема преобразуется к виду:

$\forall_{ABC}(\text{услвероятн}(B, A, C) = \text{вероятность}(A \cap B, C)/\text{вероятность}(A, C))$

(c) Сведение неизвестного подвыражения условия задачи на описание, имеющей несколько неизвестных, к более простым неизвестным выражениям, хотя бы одно из которых уже встречалось в этой задаче; направл(второйтерм); терм(вероятность$(A \cap B, C)$); терм(вероятность(A, C)). Теорема та же, что в предыдущем пункте.

Список литературы

1. А.Черч. Введение в математическую логику. Том 1. М.: ИЛ, 1960, с.484.

2. С.К.Клини. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. 526с.

3. С.К.Клини. Математическая логика. М.: Мир, 1973, 480с.
4. Ч.Чень, Р.Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1983, 360 с.
5. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971, с.320.
6. Г.Метакидес, А Нероуд. Принципы логики и логического программирования. М.: Факториал, 1998, 288с.
7. И.Братко. Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. М.: Мир, 1990, 560 с.
8. Дж.Малпас. Реляционный язык Пролог и его применение. М.: Наука, 1990, 464 с.
9. Э.Хант. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1978, 558с.
10. Ж.-Л. Лорьер. Системы искусственного интеллекта. М.: Мир, 1991, 568с.
11. E.A.Bender. Mathematical methods in artificial intelligence. Los Alamitos, IEEE, Comp.Society Press, 1996, 638p.
12. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975, 463с.
13. Д. Пойа. Математическое открытие. М.: Наука, 1976, 448с.
14. Лавров И.А., Максимова Л.Л., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., "Наука", 1975, 232 с.
15. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И.. Сборник задач по элементарной математике, М., "Наука", 1964, 528 с.
16. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. М., "Наука", 1988, 431 с.
17. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., "Наука", 1988, 237 с.
18. Губницкий С.Б., Хануков М.Г., Шедей С.А. Полный курс шахмат. М., "Фолио", 2004.
19. Еремин В.В., Кузьменко Н.Е. Сборник задач и упражнений по химии. Школьный курс. М., "Мир и Образование", 2003.
20. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике. М., "Наука", 1992, 478 с.
21. Сканави М.И. Сборник задач по математике. М., "Высшая школа", 1988, 431 с.
22. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике. М., "Наука", 1971, 360 с.
23. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И., Федосов Б.В. Задачи по элементарной математике. М., 1973, 415 с.

24. Сергеев И.Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. М., "Высшая школа", 2003, 336 с.

25. Шарыгин И.Ф. Геометрия, 9-11 классы. М., "Дрофа", 1997, 396 с.

26. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. М., Астрель, 2001, 396 с.

27. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., "Наука", 1969, 544 с.

28. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. т.1. М., "Высшая школа", 2000, 722 с.

29. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., "Наука", 1976, 384 с.

30. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., "Наука", 1965, 100 с.

31. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М., "Высшая школа", 2000, 364 с.

32. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М., "Высшая школа", 2001, 445 с.

33. Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями. М., Книжный дом "Университет", 2001, 335.

34. Подколзин А.С. Об организации баз знаний, ориентированных на автоматическое решение задач. "Дискретная математика", 1990, т.2., вып.1., с. 13-30.

35. Подколзин А.С. Система автоматического решения задач по элементарной алгебре. "Дискретная математика", 1994, т.6., вып.4., с. 35-57.

36. Подколзин А.С. Компьютерный решатель математических задач. ДАН РФ, 1994, т.335, № 4.

37. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование процессов решения математических задач. Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2001. 235 с.

38. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 1. Архитектура и языки решателя задач. М., "Физматлит", 2008. 1022 с.

39. Подколзин А.С. О самообучении интеллектуальной системы. "Интеллектуальные системы", 2014, том 18, выпуск 2, с. 197 - 266.

40. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 2. Опыт обучения компьютерного решателя задач: логические приемы, алгебра множеств, комбинаторика и элементарная алгебра. МГУ. - М., 2015. 1153 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 09.11.2015, № 184-В2015.

41. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия. МГУ. - М., 2015. 1320 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 09.11.2015, № 185-В2015.

42. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 4. Опыт обучения компьютерного решателя задач: аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория вероятностей, комплексный анализ и другие разделы. МГУ. - М., 2017. 969с. Деп. в ВИНИТИ РАН 27.02.2017, № 18-В2017.

43. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 5. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Элементарные физика и химия, шахматы. МГУ. - М., 2019. 939с. Деп. в ВИНИТИ РАН 12.08.2019, № 66-В2019.

44. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 6. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Понимание естественного языка и анализ рисунков. МГУ. - М., 2019. 758с. Деп. в ВИНИТИ РАН 12.08.2019, № 67-В2019.

45. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 7. Автоматическое создание приемов логической системы: классификация приемов решателя; логический ассемблер; компилятор спецификаций; создание тестовых примеров и доводка приемов. МГУ. - М., 2021. 739с.