Алексеев В.Б., Носов В.А.

NP-ПОЛНЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ. ОБЗОР.

Настоящая работа представляет собой обзор некоторых NP-полных (труднорешаемых) задач. Настоящее время характеризуется бурным ростом исследований в теории NP-полноты, постоянно открываются новые NP-полные задачи. При P $\neq$ NP для таких задач не существует разрешающего алгоритма полиномиальной сложности. Однако установление NP-полноты конкретной задачи не снимает необходимости ее алгоритмического решения. В связи с этим представляет практический интерес анализ NP-полных задач с точки зрения существования у них полимиально разрешимых подзадач. На это нацелена настоящая работа.

Данный обзор предназначен для практических работников - разработчиков алгоритмов и программного обеспечения. Для рассматриваемых NP-полных задач указываются случаи, при которых эта задача становится полиномиально разрешимой. Обзор не претендует на полноту. В него включены задачи, уже нашедшие приложения в теории управляющих систем и информатике. Из-за недостатка места многие важные разделы дискретной математики, например, из области теории расписаний и комбинаторных конфигураций, опущены. Литература, использованная при составлении обзора, приведена в его конце. Кроме того, были использованы некоторые результаты авторов. При изложении мы следуем терминологии известной монографии М.Гэри и Д.Джонсона «Вычислительные машины и труднорешаемые задачи» [1].

§ 1. Теория графов и сетей

В настоящем параграфе приведен список основных NP-полных задач из теории графов и сетей, имеющих полиномиально разрешимые варианты. Основное внимание уделено классификации слчаев, при которых соответствующая задача остается NP-полной, и при которых она полиномиально разрешима. Материал сгруппирован в два раздела (1а и 1б). В первом разделе указывается NP-полная задача и частные случаи, когда задача остается NP-полной или полиномиально разрешима. Во втором разделе рассмотрены важнейшие классы графов, для каждого из которых указана сложность решения десяти наиболее известных задач теории графов. Соответствующие результаты представлены в виде таблицы, из которой, в частности, следует наличие большого числа открытых проблем в этой области. Определения таких понятий, как планарный, регулярный, двудольный граф, дерево, турнир, ациклический ориентированный граф считаются известными и не приводятся. Определения таких понятий, как реберный граф, граф дуг, интервальный граф, хордовый граф, используемых в разделе 1а, можно найти в разделе 1б.

1а. NP-полные задачи с полиномиально

разрешимыми случаями

Вершинное покрытие.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k = |V |.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество вершин* V_1 *мощности, не превосходящей k, что каждое ребро инцидентно хотя бы одной вершине из* V_1*?*

NP-полные случаи: G - планарный граф; G - регулярный граф со степенью deg $v = 4$ для всех $v \in$ V.

Полиномиально разрешимые случаи: G - двудольный граф; G - реберный граф; G - граф дуг; G - интервальный граф; G - дерево.

Независимое множество.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k = |V |.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество вершин* V_1 *мощности не меньше k, что никакие две вершины из* V_1 *не соединены ребром из E?*

NP-полные случаи: G - планарный граф со степенью вершин deg $v = 3$ для всех $v \in$ V.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф с ограниченной степенью вершин deg $v = 2$ для всех $v \in$ V ; G -двудольный граф; G - реберный граф; G - граф дуг; G - интервальный граф; G - дерево.

Доминирующее множество.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k = |V |.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество вершин* V_1 *мощности не превосходящей k, что каждая вершина из* $V \setminus V_1$ *соединена ребром хотя бы с одной вершиной из* V_1 *?*

NP-полные случаи: G - планарный регулярный граф со степенью вершин deg $v = 4$ для всех $v \in$ V; G - граф с ограниченной степенью вершин deg $v = 3$ для всех $v \in$ V; G - двудольный граф; G - реберный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф дуг; G - интервальный граф; G - дерево.

Доминирующее множество ребер.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k = |E |.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *мощности, не превосходящей k, что каждое ребро из* $E \setminus E_1$ *смежно хотя бы с одним ребром из* E_1 *?*

NP-полные сдучаи: G - планарный граф со степенью вершин deg $v = 3$ для всех $v \in$ V; G - двудольный граф со степенью вершин deg $v = 3$ для всех $v \in$ V.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Ядро.

Д а н о. *Ориентированный граф G = (V, E).*

В о п р о с. *Существует ли в графе G ядро, т.е. такое подмножество вершин V_1 , что никакие две вершины из V_1 не соединены дугой из E и для каждой вершины v из V\ V_1 найдется такая вершина и из V_1 , что $(u, v) \in E$?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф .

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф отображения.

Клика.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k = |V |.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество вершин V_1 мощности, не превосходящей k, что любые две вершины V_1 соединены ребром?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - планарный граф; G - граф с ограниченной степенью вершин deg *v* = *k* для любого фиксированного k; G - двудольный граф; G - хордовый граф; G - реберный граф; G - граф дуг; G - интервальный граф; G - дерево.

Разбиение на клики.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k = |V |.*

В о п р о с. *Можно ли разбить вершины графа G на l = k непересекающихся подмножеств V_1 , V_2, ..., V_l так, чтобы для всех i (1 = i = l) подграф, порожденный множеством вершин V_i был полным?*

NP-полные случаи: *k* фиксированно и *k* = 3; G - реберный граф; G - граф без полных подграфов K_4.

Полиномиально разрешимые случаи: *k* = 2 и в G нет 3-клик; G - двудольный граф; G- граф дуг; G - интервальный граф; G - дерево.

Гамильтонов цикл.

Д а н о. *Граф G = (V, E).*

В о п р о с. *Существует ли в графе G гамильтонов цикл, т.е. цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз?*

NP-полные случаи: G - планарный граф со степенью вершин deg *v* = 3 для всех $v \in$ V; G - двудольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф с ограниченной степенью вершин deg *v* = 2 для всех $v \in$ V; G - интервальный граф.

Ориентированный гамильтонов цикл.

Д а н о. *Ориентированный граф G = (V, E).*

В о п р о с. *Существует ли в графе G ориентированный гамильтонов цикл?*

NP-полные случаи: G - планарный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф с ограниченной степенью захода (или выхода) вершин $\deg_i$ *v* = 1 ($\deg_0$ *v* = 1) для k. Любого $v \in$ V; G - реберный граф; G - граф турнира.

Гамильтонов путь.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$.*

В о п р о с. *Верно ли, что в графе G существует гамильтонов путь?*

NP-полные случаи: G - планарный регулярный граф со степенью вершин deg $v = 3$ для всех $v \in V$; G - двудольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф с ограниченной степенью вершин deg $v = 2$ для всех $v \in V$; G - реберный граф.

Гамильтоново пополнение.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, неотрицательное целое число $k = |V|$.*

В о п р о с. *Существует ли такое подмножество E_1, что $E_1 \supseteq E$, $|E_1 \backslash E|$ k и граф $G_1 = (V, E_1)$ имеет гамильтонов цикл?*

NP-полные случаи: любое фиксированное *k*.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Разбиение на гамильтоновы подграфы.

Д а н о. *Ориентированный граф $G = (V, E)$.*

В о п р о с. *Можно ли разбить вершины графа G на непересекающиеся подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_l$ так, чтобы для всех i ($1 = i = l$) было справедливо неравенство $|V_i| = 1$ и каждый подграф, порожденный множеством вершин V_i содержал гамильтонов путь?*

NP-полные случаи: $|V_i| = 6$.

Полиномиально разрешимые случаи: $|V_i| = 2$.

Раскрашиваемость графа (хроматическое число).

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительное целое число $k = |V|$.*

В о п р о с. *Верно ли, что граф G является k-раскрашиваемым (т.е. существует ли такая функция f из v в множество $\{1, 2, \ldots, k\}$, что если $(u, v) \in E$, то $f(u) \neq f(v)$) ?*

NP-полные случаи: G - планарный граф и k = 3; любое фиксированное k = 3.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф с ограниченной степенью вершин deg $v = 3$ для всех $v \in V$; G - двудольный граф; G - хордовый граф; k = 2; G - граф дуг и k - фиксированно; G - дерево.

Хроматический индекс.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительное целое число k.*

В о п р о с. *Можно ли раскрасить ребра графа G не более чем в k цветов так, чтобы смежные ребра имели разные цвета ?*

NP-полные случаи: G - графы, у которых хроматический индекс дополнения равен максимальной степени его вершин.

Полиномиально разрешимые случаи: G - планарный граф, в котором есть вершина v со степенью deg $v = 8$; G - внешнепланарный граф; G - двудольный граф.

Двудольный подграф.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *положительное целое число* $k = |V|$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *мощности, не меньше k, что* $G_1 = (V, E_1)$ - *двудольный подграф?*

NP-полные случаи: G - граф с ограниченной степенью вершин $\deg v = 3$ для всех $v \in V$.

Полиномиально разрешимые случаи: G - планарный грф; G - двудольный граф; G - дерево; $k = |E|$.

Полный двудольный подграф.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *положительное целое число* $k = |V|$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество вершин* V_1 *мощности k, что подграф, порожденный множеством вершин* V_1, *является полным двудольным графом ?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - двудольный граф; G - дерево.

Минимальное по мощности максимальное паросочетание.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *положительное целое число* $k = |E|$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *мощности, не превосходящей k, что* E_1 - *максимальное паросочетание?*

NP-полные случаи: G - планарный граф; G - двудольный граф с ограниченной степенью вершин $\deg v = 3$ для всех $v \in V$.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Паросочетание со многими вариантами.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *разбиение множества E на непересекающиеся подмножества* $E_1, E_2, \ldots E_l$ *и положительное целое число k.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *мощности не меньше k, что никакие два ребра из* E' *не имеют общей вершины и* $E' \cap E_i \neq \varnothing$ *для всех i* $(1 = i = l)$*?*

NP-полные случаи: G - двудольный граф, $|E_i|$ 2 для всех i и $k = |V|/2$.

Полиномиально разрешимые случаи: $|E_i| = 1$ для всех i.

Разбиение на совершенные паросочетания.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *положительное целое число* $k = |V|$.

В о п р о с. *Можно ли разбить вершины графа G на* $l = k$ *непересекающихся подмножеств* $V_1, V_2, \ldots, V_l$ *так, чтобы для всех i* $(1 =, i = l)$ *подграф, порожденный множеством вершин* V_l, *являлся совершенным паросочетанием ?*

NP-полные случаи: k = 2; G - планарный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Максимальный разрез.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, вес $w (e) \in$* Z^+ *каждого ребра $e \in$* E *и положительное целое число k.*

В о п р о с. *Существует ли разбиение множества V на два таких непересекающихся подмножества V_1 и V_2,, что сумма весов ребер, соединяющихся вершины из множества V_1 с вершинами из множества V_2 не меньше k?*

NP-полные случаи: $w (e) = 1$ для всех ребер; G - граф с ограниченной степенью вершин $deg\ v = k$ для любого фиксированного k и $w(e) = 1$ для всех ребер.

Полиномиально разрешимые случаи: G - планарный граф; G - двудольный граф и $w(e) = 1$ для всех ребер.

Линейное упорядочение с минимальным разрезанием.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительное целое число k.*

В о п р о с. *Существует ли такая взаимно однозначная функция f из V в множество $\{1, 2, ..., |V|\}$, что для всех i $(1 = i = |v|)$ выполняется $|\{(u, V) \in E: f(u) = i < f(v)\}| = k$?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Минимальный разрез с ограничениями.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$ с двумя выделенными вершинами $s, t \in V$, вес $w (e) \in$* Z^+ *каждого ребра $e \in$* E *и положительные целые числа B и k $(B = |V|)$*

В о п р о с . *Существует ли разбиение множества V на два таких непересекающихся подмножества V_1 и V_2, что $s \in V_1$, $t \in V_2$, $|V_1|$ B, $|V_2| = B$ и сумма весов всех ребер, соединяющих вершины из множества V_1 с вершинами из множества V_2, не превосходит k ?*

NP-полные случаи: $B = |V| / 2$ и $w(e) = 1$ для всех ребер.

Полиномиально разрешимые случаи: $B = |V|$.

Множество вершин, разрезающих контуры.

Д а н о. *Ориентированный граф $G = (V, E)$, положительное целое число $k = |V|$.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество вершин V_1 мощности, не превосходящей k, что V_1 содержит хотя бы одну вершину любого ориентированного цикла в G?*

NP-полные случаи: G - планарный граф со степенью захода вершин $deg_i\ v = 3$ для всех $v \in$ V или со степенью выхода вершин $deg_0\ v = 3$ для всех $v \in$ V; G - граф со степенью захода всех вершин $deg_i\ v = 2$ или со степенью выхода всех вершин $deg_0\ v = 2$.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф со степенью захода всех вершин $deg_i\ v = 1$ или со степенью выхода всех вершин $deg_0\ v = 1$; G - ориентированное дерево.

Множество дуг, разрезающих контуры.

Д а н о. *Ориентированный граф $G = (V, E)$, положительное целое число k* $= |V|$.

В о п р о с . *Существует ли в графе G такое подмножеств дуг E_1 мощности, не превосходящей k, что E_1 содержит хотя бы одну дугу любого ориентированного цикла в G?*

NP-полные сдучаи: G - орграф с ограниченными степенями захода и выхода всех вершин $deg_i\ v = 3$ и $deg_0\ v = 3$.

Полиномиально разрешимые случаи: G - планарный орграф.

Множество дуг, частично разрезающих циклы.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительные целые числа k и l, $k = |E|$, $l = |V|$.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество дуг E_1 мощности, не превосходящей k, что E_1 содержит хотя бы одну дугу любого ориентированного цикла в G, имеющего длину не более l ?*

NP-полные случаи: любое фиксированное $l = 3$; G - двудольный граф и $l = 4$.

Полиномиально разрешимые случаи: $l = |V|$.

Остов с ограниченной пропускной способностью.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$ с выделенной вершиной $v_0 \in V$, пропускные способности $c(e) \in Z^+_0$ и длина $l(e) \in Z^+_0$ каждого ребра $e \in E$, потребность $r(v) \in Z^+_0$ для каждой вершины $v \in V \setminus \{v_0\}$ и граница $B \in Z^+_{0.}$*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такой остов T, что сумма длин его ребер не превосходит B и для каждого $e \in T$ выполнено соотношение $\Sigma\, r(u) = c(e)$, где сумма берется по всем таким вершинам u, что путь в T, соединяющий эту вершину с u_0, содержит ребро e?*

NP-полные случаи: $r(v) = 1$ для всех $v \in V$ и $c(e) = 3$ для всех $e \in E$; $r(v) = 0$ либо 1 для всех $v \in V$, $c(e) = 2$ для всех $e \in E$ и $l(e) = 0$ или 1 для всех $e \in E$.

Полиномиально разрешимые случаи: $r(v) = 1$ для всех $v \in V$ и $c(e) = 2$ для всех $e \in E$; $r(v) = 0$ или *2* для всех $v \in V$ и $c(e) = 1$ для всех $e \in E$.

Изоморфный остов.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, дерево $T = (V_1, E_1)$.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G остовное дерево, изоморфное T?*

NP-полные случаи: T - путь; T - полное бинарное дерево.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф паросочетания.

Остов ограниченной степени.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительное целое число k* $= |V|$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G остов, у которого степени всех вершин не превосходят k?*

NP-полные случаи: любое фиксированное $k = 2$.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

k наилучших остовов.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, вес $w(e) \in Z^+_0$ каждого ребра $e \in E$ и положительные целые числа B и k.*

В о п р о с. *Существуют ли в графе G k различных остовов, общий вес которых не превосходит B?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: любое фиксированное k.

Остов с максимальным числом висячих вершин.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительное целое число $k = |V|$.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G остов, у которого не менее k вершин степени 1?*

NP-полные случаи: G - планарный граф со степенью вершин $deg\ v = 4$ для всех $v \in V$; G - регулярный граф со степенью вершин $deg\ v = 4$ для всех $v \in V$.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Остов с кратчайшим полным путем.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительное целое число $k = |V|$.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такой остов T, что сумма (по всем парам вершин u, v графа G) длин путей от u до v в T не превосходит k?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Индуцированный путь.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$, положительное целое число $k = |V|$.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество вершин V_1 мощности не менее k, что подграф, порожденный множеством вершин V_1, является простым путем на $|V_1|$ вершинах?*

NP-полные случаи: G - двудольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Самый длинный путь.

Д а н о. *Граф $G = (V, E)$ с двумя выделенными вершинами $s, t \in V$, длина $l(e) \in Z^+$ каждого ребра $e \in E$ и положительное целое число k.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G простой путь длины не меньше k (т.е. путь с суммой длин ребер не меньше k)?*

NP-полные случаи: $l(e) = 1$ для всех $e \in E$; G - произвольный ориентированный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф турнира и *l(e) =1* для всех $e \in E$.

Кратчайший путь с ограничением по весу.

Д а н о. *Граф G = (V, E) с двумя выделенными вершинами s, t* $\in$ *V, длина* $l(e) \in Z^+$ *и вес* $w(e) \in Z^+_0$ *каждого ребра e* $\in$ *E и положительные целые числа B и k.*

В о п р о с. *Существует ли в графе G простой путь из s в t веса не более B и длины не более k?*

NP-полные случаи: G - произвольный ориентированный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: все веса равны между собой; все длины равны между собой; G - дерево.

***k* кратчайших путей.**

Д а н о. *Граф G = (V, E) с двумя выделенными вершинами s, t* $\in$ *V, длина* $l(e) \in Z^+$ *каждого ребра e* $\in$ *E и положительные целые числа B и k.*

В о п р о с. *Существуют ли в графе G k различных путей из s в t , веса которых не превосходят B?*

NP-полные случаи: $l(e) = 1$ для всех $e \in E$; G - произвольный ориентированный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: любое фиксированное *k*; G - дерево.

Ширина.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k* = |V |.

В о п р о с. *Существует ли такое линейное упорядочение множества V, что его ширина не превосходит k (т.е. существует ли такая взаимно однозначная функция f из V в множество {1, 2, ... |V |.}, что для всех (u, v)* $\in$ *E выполнено | f (u) - f (v) |= k)?*

NP-полные случаи: G - дерево со степенями *deg v* = *3* для всех $v \in V$.

Полиномиально разрешимые случаи: G - граф с ограниченной сте6пенью *deg v* = *2* для всех $v \in V$.

Оптимально линейное упорядочение.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k.*

В о п р о с. *Существует ли такая взаимно однозначная функция f из V в множестве {1, 2, ... |V |.}, что S | f (u) - f (v) |= k, где сумма берется по всем (u, v)* $\in$ *E?*

NP-полные случаи: G - двудольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Оптимальное линейное упорядочение орграфа.

Д а н о. *Граф G = (V, E), положительное целое число k* = |V |.

В о п р о с. *Существует ли такая взаимно однозначная функция {1, 2, ... |V |.}, что* $f(u) < f(v)$ *для всех* $(u, v) \in E$ *и* $\Sigma\, |f(u) - f(v)| = k$, *где сумма берется по всем* $(u, v) \in E$?

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - дерево.

Минимальный *k*-связный подграф.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *положительные целые числа* k *и* B ($k \le |V|$ ($k \le |V|$, $B \le |E|$).

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *мощности, не превосходящей B, что граф* $G_1 = (V, E_1)$ *является k-связным (т.е. он остается связным после удаления любых k-1 вершин и инцидентных им ребер)?*

NP-полные случаи: любое фиксированное $k \ge 2$.

Полиномиально разрешимые случаи: $k = 1$.

Связный подграф ограниченной степени.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *неотрицательное целое число* $d \le |V|$ *и положительное целое число* $k \le |E|$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *мощности не менее k, что граф* $G_1 = (V, E_1)$ *является связным и не имеет вершин степени более d?*

NP-полные случаи: любое фиксированное $d \ge 2$.

Полиномиально разрешимые случаи: без требования связности G_1.

Планарный подграф.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *положительное целое число* $k \le |E|$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *мощности не менее k, что граф* $G_1 = (V, E_1)$ *является планарным?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: $k = |E|$.

Наибольший общий подграф.

Д а н о. *Два графа* $G = (V_1, E_1)$, $H = (V_2, E_2)$, *положительное целое число k.*

В о п р о с. *Существуют ли такие подмножества ребер* $E'_1 \subseteq E_1$ *и* $E'_2 \subseteq E_2$ *мощности не менее k, что подграфы* $G' = (V_1, E'_1)$ *и* $H' = (V_2, E'_2)$ *изоморфны?*

NP-полные случаи: *G* и *H* -произвольные графы.

Полиномиально разрешимые случаи: *G* и *H* - деревья.

Изоморфизм подграфу.

Д а н о. *Два графа* $G = (V_1, E_1)$, $H = (V_2, E_2)$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G подграф, который изоморфен графу H?*

NP-полные случаи: G - планарный *n*- вершинный граф; *H* - *n*- вершинный цикл; G - произвольный граф, *H* - дерево; G - ориентированный ациклический граф, *H* - ориентированное дерево; G - дерево, *H* - лес.

Полиномиально разрешимые случаи: G - лес, *H* - дерево.

Дерево Штейнера на графе.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *подмножество* $R \subseteq V$ *и положительное целое число* $k = |V| - 1$.

В о п р о с. *Существует ли в графе G поддерево, содержащее все вершины из R и имеющие не более k ребер?*

NP-полные случаи: G - планарный граф; G - граф с ограниченной степенью вершин $deg\ v = k$ для любого фиксированного k; G - двудольный граф; G - реберный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: G - внешнепланарный граф; G - хордовый граф; G - дерево.

Поток минимальный реберной стоимости.

Д а н о. *Ориентированный граф* $G = (V, E)$ *с двумя выделенными вершинами* $s, t \in V$, *пропускная способность* $c(e) \in Z^+$ *и стоимость* $p(e) \in Z^+$ *каждой дуги* $e \in E$, *потребность* $R \in Z^+$ *и граница* $B \in Z^+$.

В о п р о с. *Существует ли в G стационарный поток из s в t, удовлетворяющий ограничениям пропускных способностей, имеющий величину не мене R и такой, что сумма стоимости дуг, на которых поток не равен 0, не превосходит B?*

NP-полные случаи: $c(e) = 2$ и $p(e) \in \{0, 1\}$ для всех $e \in E$.

Полиномиально разрешимые случаи: $c(e) = 1$ для всех $e \in E$.

Ветвление со многими вариантами.

Д а н о. *Ориентированный граф* $G = (V, E)$, *вес* $w(e) \in Z^+$ *каждой дуги* $e \in E$, *разбиение множества E на непересекающиеся множества* $A_1, \ldots, A_n$ *и положительное целое число* k.

В о п р о с. *Существует ли в графе G такое подмножество ребер* E_1 *с суммой весов не менее k, что никакие две дуги из* E_1 *не оканчиваются в одной вершине,* E_1 *не имеет циклов и* E_1 *содержит не более одной дуги из каждого из множеств* A_i $(1 = i = n)$*?*

NP-полные случаи: G - сильно связный граф и $w(e) = 1$ для всех $e \in E$.

Полиномиально разрешимые случаи: $|Ai| = 1$ для всех i; G - симметрический орграф.

Род графа.

Д а н о. *Граф* $G = (V, E)$, *положительное целое число* $k = |V|$.

В о п р о с. *Существует ли укладка графа G без пересечения ребер на ориентируемой поверхности рода k?*

NP-полные случаи: G - произвольный граф.

Полиномиально разрешимые случаи: любое фиксированное *k*.

1б. Сложность решения задач на некоторых важных классах графов

В предыдущем разделе были рассмотрены конкретные NP-полны проблемы теории графов и обсуждались их варианты с точки зрения теории NP-полноты. В данном же разделе рассматриваются некоторые важнейшие классы графов и для каждого из них изучается сложность решения наиболее известных теоретико-графовых задач. Рассматриваются следующие классы графов.

1. Деревья.
2. Почти деревья с параметром *k* (это класс графов, для которых в каждой двусвязной компоненте можно удалить не более *k* ребер, чтобы получить дерево).
3. Графы ширины *k* (это класс графов, для которых можно так занумеровать вершины различными целыми числами, чтобы разность номеров любых двух вершин, соединенных ребром, не превосходила *k* .
4. Графы со степенью вершин , не большей *k* .
5. Планарные графы.
6. Внешнепланарные графы (это класс планарных графов, для которых существует такая укладка на плоскости, что все вершины лежат в одной грани).
7. Графы решетки (это подграфы двумерной прямоугольной решетки).
8. Графы без подграфов, гомеоморфных полному двудольному графу $K_{3,3}$..
9. Графы толщины *k* (т.е. графы, полученные объединением не более чем *k* планарных графов).
10. Графы рода *k* (это графы, допускающие укладку без пересечения ребер на ориентируемой поверхности рода *k)*.
11. Совершенные графы (это графы, в которых хроматическое число любого порожденного подграфа равно размеру его максимальной клики).
12. Хордовые графы (это графы, в которых для каждого цикла длины боле 3 имеется ребро между двумя не соседними вершинами цикла).
13. Графы сравнимости, или транзитивно ориентируемые графы (это графы, для которых существует ориентация ребер, при которой граф становится транзитивным).
14. Двудольные графы.
15. Интервальные графы (это графы, вершинами которых можно сопоставить интервалы на прямой так, что вершины графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие интервалы имеют непустое пересечение).

16. Графы дуг (это графы, вершинам которых можно сопоставить дуги на окружности так, что вершины графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие дуги имеют непустое пересечение).

17. реберные графы (это графы, вершинам которых можно взаимно однозначно сопоставить ребра некоторого другого графа так, что вершины исходного графа смежны тогда и только тогда, когда смежны соответствующие им ребра второго графа).

Для указанных классов графов рассматриваются следующие задачи (формулировки задач см. в разделе 1а).

1. Независимое множество (НМ). 2. Клика (Кл). 3. Разбиение на клики (РК). 4. Хроматическое число (ХЧ). 5. Хроматический индекс (ХИ). 6. Гамильтонов цикл (ГЦ). 7. Доминирующее множество (ДМ). 8. Максимальный разрез (МР). 9. Дерево Штейнера в графе (ДШ). 10. Изоморфизм графов (ИГ).

Результаты о сложности решения этих задач для указанных классов графов представлены в таб. 1. В ней используются следующие обозначения:

P - задача полиномиально разрешима;

N - задача NP-полна;

O - открытый вопрос;

I - открытая проблема, эквивалентная по сложности общей задаче об изоморфизме графов.

Таблица 1

	Задачи									
М	НМ	Кл	РК	ХЧ	ХИ	ГЦ	ДМ	МР	ДШ	ИГ
Деревья	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
Почти деревья (*k*)	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
Графы ширины *k*	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
Графы степени *k*	N	P	N	N	N	N	N	N	N	P
Планарные графы	N	P	N	N	O	N	N	P	N	P
Внешнепланарные	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
Графы решетки	P	P	P	P	P	N	N	P	N	P
Графы без $K_{3,3}$	N	P	N	N	O	N	N	P	N	O
Графы толщины *k*	N	P	N	N	N	N	N	N	N	I
Графы рода *k*	N	P	N	N	O	N	N	O	N	P
Совершенные графы	P	P	P	P	O	N	N	O	N	I
Хордовые графы	P	P	P	P	O	N	N	O	N	I
Графы сравнимости	P	P	P	P	O	N	N	O	N	I
Двудольные графы	P	P	P	P	P	N	N	P	N	I
Интервальные графы	P	P	P	P	O	P	P	O	P	P
Графы дуг	P	P	P	N	O	O	P	O	P	O
Реберные графы	P	P	N	N	O	N	N	O	N	I

§ 2. Булевы и *k*-значные функции

В этом параграфе приводится список основных NP-полных задач из булевой и k-значной логик, имеющих полиномиально разрешимые варианты. Как и в предыдущем параграфе, основное внимание уделено классификации случаев, при которых соответствующая задача остается NP-полной и при которых она полиномиально разрешима.

2а. Выполнимость формул

Выполнимость КНФ.

Д а н о. *Формула над булевыми переменными* $x_1, \ldots, x_n$, *имеющая вид:*

$$\Phi = (x_{i_1}^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\alpha_k})\ (x_{j_1}^{\beta_1} \vee \ldots \vee x_{j_1}^{\beta_1}) \ldots (x_{t_1}^{\gamma_1} \vee \ldots \vee x_{t_p}^{\gamma_p})$$

($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ *- булевы константы).*

В о п р о с. *Существует ли набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$, *обращающий* Φ *в единицу?*

Известно, что эта задача NP-полна. Рассмотрим некоторые ее ограничения.

***k*-выполнимость КНФ.**

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, \ldots, x_n$, *имеющая в каждой скобке фиксированное число* k *переменных.*

В о п р о с. *Существует ли набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$, *обращающий формулу в единицу?*

Задача k-выполнимости является NP-полной для всех фиксированных $k \geq 3$. Она остается NP-полной, даже если $k = 3$ и каждая скобка содержит либо все переменные без отрицания, либо все переменные с отрицанием. При $k = 2$ задача 2-выполнимости полиномиально разрешима. В литературе имеется ряд алгоритмов полиномиальной сложности для задачи 2-выполнимости, в том числе имеющих и линейную сложность. Индивидуальные задачи для 2-выполнимости называются биюнктивными формулами. Имеется критерий биюнктивности произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ биюнктивна в том и только в том случае, когда для любых трех наборов переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$, $(z_1, \ldots, z_n)$ выполнено условие (операции покоординатные):

$$\overline{f}\,(xy + yz + xz)\; f(x)\; f(y)\; f(z) \equiv 0.$$

Это дает полиномиальный алгоритм проверки биюнктивности, если f задана таблицей, СДНФ или СКНФ.

k-выполнимость при различных литералах.

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, \ldots, x_n$ *, имеющая в каждой скобке фиксированное число* k *переменных.*

В о п р о с. *Существует ли такой набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$*, обращающий формулу в единицу, что в каждой скобке для этого набора есть хотя бы один истинный литерал и хотя бы один ложный литерал?*

Задача k-выполнимости при различных литералах является NP-полной для всех фиксированных $k \geq 3$. При $k = 2$ задача 2-выполнимости при различных литералах полиномиально разрешима.

k-выполнимость при одном истинном литерале.

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, \ldots, x_n$ *, имеющая в каждой скобке фиксированное число* k *переменных.*

В о п р о с. *Существует ли такой набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$*, обращающий формулу в единицу, что в каждой скобке для этого набора есть в точности один истинный литерал?*

Задача k-выполнимости при одном истинном литерале является NP-полной для всех фиксированных $k \geq 3$. При $k = 2$ задача 2-выполнимости при одном истинном литерале полиномиально разрешима.

k-выполнимость при ложном литерале.

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, \ldots, x_n$ *, имеющая в каждой скобке фиксированное число* k *переменных.*

В о п р о с. *Существует ли такой набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$*, обращающий формулу в единицу, что в каждой скобке для этого набора есть, по крайней мере, один ложный литерал?*

Задача k-выполнимости при одном истинном литерале является NP-полной для всех фиксированных $k \geq 3$. При $k = 2$ задача 2-выполнимости при ложном литерале полиномиально разрешима.

Приведенные выше задачи полиномиально разрешимы при $k = 2$. В то же время, в задаче 2-выполнимости может появляться труднорешаемость. Следующая задача NP-полна.

Максимальная 2-выполнимость.

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, \ldots, x_n$ *, имеющая в каждой скобке 2 переменных , и натуральное число* k*.*

В о п р о с. *Существует ли такой набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$*, что для этого набора не менее* k *скобок истинны?*

Задача становится полиномиально разрешимой при k , равном числу скобок в формуле.

(r, s) - выполнимость КНФ.

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, ..., x_n$ *, в которой каждая скобка содержит* r *переменных и каждая переменная входит самое большее в* s *скобок.*

В о п р о с. *Существует ли такой набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, ..., x_n = \sigma_n$*, обращающий формулу в единицу?*

Доказано, что (3,4) - выполнимость есть наиболее сильное ограничение для задачи выполнимости, при которой она остается NP-полной. Доказано также, что каждая формула класса (r, r)- выполнимость является выполнимой. Представляет интерес следующий результат, полученный в [24]. Пусть r_0, s_0 таковы, что каждая формула класса (r_0, s_0)-выполнимости является выполнимой. Тогда выполнима каждая формула класса $(r_0 + 1, \; s_0 + [s_0 / r_0])$-выполнимости, где $[x]$ - целая часть числа x. Существовала гипотеза, что любая формула класса (r, s)- выполнимости при $s = 2^{r-1}$ является выполнимой. В работе [24] был построен соответствующий контрпример с $r = 5$, $s = 11$. В то же время, данная гипотеза справедлива при $r < 4$.

Выполнимость слабоотрицательных формул.

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, ..., x_n$ *, в которой каждая скобка содержит только переменные с отрицаниями, кроме, быть может, одной, т.е. формула вида:*

$$\Phi = (x_{i_1}^{\alpha} \vee \bar{x}_{i_2} \vee ... \vee \bar{x}_{i_k})\;(x_{j_1}^{\beta} \vee \bar{x}_{j_2} \vee ... \vee \bar{x}_{j_1}) ... (x_{t_1}^{\gamma} \vee \bar{x}_{t_2} \vee ... \vee \bar{x}_{t_m})$$

($\alpha, \beta, ... \gamma$ *- булевы константы).*

В о п р о с. *Существует ли такой набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, ..., x_n = \sigma_n$ *, обращающий Φ в единицу?*

Полиномиальная разрешимость задачи выполнимости для данного класса формул установлена Шефером. Имеется следующий критерий слабоотрицательности произвольной булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$ Булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ слабоотрицательна в том и только в том случае, когда для любых двух наборов переменных $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ выполнено условие (операции покоординатные):

$$\overline{f}\,(x \wedge y)\; f(x)\; f(y) \equiv 0.$$

Это дает полиномиальный алгоритм проверки слабоотрицательности, если f задана таблицей, СДНФ или СКНФ.

Выполнимость слабоположительных формул.

Д а н о. *Формула КНФ над булевыми переменными* $x_1, ..., x_n$ *, в которой каждая скобка содержит только переменные без отрицаний, кроме, быть может, одной, т.е. формула вида:*

α β γ

$$\Phi = (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_k})(x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee \ldots \vee x_{j_1}) \ldots (x_{t_1} \vee x_{t_2} \vee \ldots \vee x_{t_p})$$

(α, β, ... γ *- булевы константы).*

В о п р о с. *Существует ли такой набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$*, обращающий Ф в единицу?*

Полиномиальная разрешимость задачи выполнимости для данного класса формул установлена Шефером. Имеется следующий критерий слабоположительности произвольной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ слабоположительна в том и только в том случае, когда для любых двух наборов переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$ выполнено условие (операции покоординатные):

$$\overline{f}(x \vee y)\, f(x)\, f(y) \equiv 0.$$

Это дает полиномиальный алгоритм проверки слабоположительности, если f задана таблицей, СДНФ или СКНФ.

Выполнимость мультиаффинных формул.

Д а н о. *Формула над булевыми переменными* $x_1, \ldots, x_n$*, представляющая собой конъюнкцию линейных форм, т.е. формула вида:*

$$\Phi = (a_1x_1 + \ldots a_nx_n + a_0)(b_1x_1 + \ldots b_nx_n + b_0)(c_1x_1 + \ldots c_nx_n + c_0)$$

($a_i, b_i, \ldots, c_i$ *- булевы константы).*

В о п р о с. *Существует ли набор значений переменных* $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$*, обращающий Ф в единицу?*

Ясно, что данная задача выполнимости полиномиально разрешима и имеет ту же сложность, что и задача проверки совместности системы линейных уравнений над **GF** (2).

Значение классов мультиаффинных, слабоположительных, слабоотрицательных, биюнктивных формул заключается в том, что они играют роль предполных классов. Точнее, пусть $S = \{F_1, \ldots, F_m\}$ - любое конечное множество формул (функциональных символов). Определим S-формулу как конъюнкцию

$$F_{i_1}(\cdot)\, F_{i_2}(\cdot) \ldots F_{i_k}(\cdot)$$

с переменными $x_1, \ldots, x_n$, расставленными некоторым образом. Проблема *S*- выполнимости - это проблема выполнимости *S*-формул. Важный результат Шефера состоит в следующем.

Проблема *S*- выполнимости полиномиально разрешима, если все функции F_i из множества S одновременно удовлетворяют, по крайней мере, одному из условий:

1) $F_i(0, \ldots, 0) = 1;$
2) $F_i(1, \ldots, 1) = 1;$
3) F_i *- мультиаффинна;*
4) F_i *- биюнктивна;*

5) F_i - *слабоположительна;*

6) F_i - *слабоотрицательна.*

В противном случае проблема *S*- выполнимости является NP-полной.

Булевы формулы с кванторами.

Д а н о. *Множество переменных* $U = \{u_1, \dots , u_n\}$ *и правильно построенная булева формула с кванторами* $F = (Q_1 u_1) (Q_2 u_2) \dots (Q_n u_n)E$, *где E - булево выражение, а Q есть либо* $\forall$, *либо* $\exists$.

В о п р о с. *Верно ли, что F истинна?*

Задача PSPACE-полна. Остается PSPACE-полной, если E есть КНФ и каждая скобка содержит не более трех литералов. Задача разрешима за полиномиальное время, если в каждой скобке содержится не более двух литералов.

Выполнимость конъюнкций выражений, включающих в себя функции и неравенства.

Д а н о. *Множество переменных* $U = \{u_1, \dots , u_n\}$, *множество F одноместных символов функций и набор C выражений вида* $U * V$, *где* $*$ *- один из символов* $=$, $>$, $=$ *или,* $\neq$, *а U и V представляют собой один из символов 0, 1, u, f (0) или f(u) для некоторого f из F и u из U.*

В о п р о с. *Можно ли так присвоить всем переменным из U и всем f(u) целочисленные значения, что все выражения из C будут истинны при стандартной интерпретации отношений* $=$, $>$, $=$ *или,* $\neq$*?*

Задача остается NP-полная, даже если не используются отношения $=$ или $\neq$. Задача разрешима за полиномиальное время, если не используются отношения $=$ и $>$ или если не используются отношения $=$ или $\neq$ и отсутствуют символы функций. Задача NP-полна, если U и V имеют вид *u* или *u + c*. Для этого варианта задача является полиномиально разрешимой, если разрешается использовать только одну из пар отношений: $=$ и $>$ или $=$ и $\neq$.

2б. Свойства булевых функций.
Равномерность булевой функции

Д а н о. *Булева функция f от переменных* $x_1, \dots, x_n$, *представленная в виде КНФ.*

В о п р о с. *Является ли функция f равномерной, т.е. равен ли ее вес* 2^{n-1} *?*

Задача NP-полна, если функция *f* - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция *f* выбирается из класса T_o или T_1 (здесь T_o (T_1) - класс булевых функций, сохраняющих нуль (единицу)). Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция *f* выбирается из класса линейных функций, и вырождается, если дополнительно известно, что функция *f* выбирается из класса самодвойственных функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача является полиномиально разрешимой.

Линейность булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ.*

В о п р о с. *Является ли функция* f *линейной ?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима.

Существенная зависимость переменных.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ, натуральное число* k .

В о п р о с. *Верно ли, что переменная* x_k *существенна?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных или монотонных функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима.

Линейная зависимость от переменной.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *линейно зависит от* x_k *?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса монотонных функций, и вырождается, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных функций.. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима.

Монотонность булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *монотонна?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде

ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима.

Верхний нуль.

Д а н о. *Монотонная булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная формулой в базисе* $\{0, x_1, x_2, x_1 \vee x_2\}$*, и натуральное число* k..

В о п р о с. *Существует ли верхний нуль функции* f *веса больше* k*?*

Задача NP-полна, но становится полиномиально разрешимой, если k - фиксированное число или формула является КНФ.

Самодвойственность булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *самодвойственна?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиальна.

Функциональная полнота.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *образует функционально полную систему?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача вырождается, если дополнительно известно, что функция f выбирается из некоторого замкнутого класса булевых функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима.

T_o-полнота (T_1-полнота).

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *образует* T_o*-полную (*T_1*-полную) систему?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача вырождается, если дополнительно известно, что функция f выбирается из некоторого замкнутого класса булевых функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима.

Четность веса булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Верно ли, что вес функции* f *четен?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача вырождается, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных или самодвойственных функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима.

Мультиаффинность булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ .*

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *мультиаффинна, т.е. представима мультиаффинной формулой?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса монотонных или самодвойственных функций, и вырождается, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных функций. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима [5].

Биюнктивность булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ .*

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *биюнктивна, т.е. представима биюнктивной формулой?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных функций, и вырождается, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных или самодвойственных функций. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима [5].

Слабоположительность булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ .*

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *слабоположительна, т.е. представима слабоположительной формулой?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных функций, и вырождается, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса монотонных функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима [5].

Слабоотрицательность булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Верно ли, что функция* f *слабоотрицательна, т.е. представима слабоотрицательной формулой?*

Задача NP-полна, если функция f - любая булева функция. Задача остается NP-полной, если даже дополнительно известно, что функция f выбирается из класса T_o или T_1 . Задача становится полиномиально разрешимой, если дополнительно известно, что функция f выбирается из класса линейных или монотонных функций. Те же утверждения справедливы, если функция представляется в виде ДНФ. При табличном задании функций общая задача полиномиально разрешима [5].

NP-полнота булевой функции.

Д а н о. *Булева функция* f *от переменных* $x_1, ..., x_n$ *, представленная в виде КНФ* .

В о п р о с. *Является ли NP-полной функция* f *?*

Напомним, что функция f называется NP-полной, если множество выполнимых конъюнкций вида $f(\cdot)\ f(\cdot) \cdot\cdot\cdot f(\cdot)$ от переменных $x_1, ..., x_n$, является NP-полным множеством в обычном смысле.

Указанная задача NP-полна. При табличном задании функций задача полиномиально разрешима [5].

2в. Свойства систем булевых и *k*-значных формул и функций

Равномерность системы формул.

Д а н о. *Система* $f_1, ..., f_k$ *из* k *булевых формул в виде КНФ над переменными* $x_1, ..., x_n,$ *где* $k = n$.

В о п р о с. *Является ли система* $f_1, ..., f_k$ *равномерной?*

Система $f_1, ..., f_k$ называется равномерной, если для любых $\alpha_1, ..., \alpha_k$ система уравнений

$$
\begin{gathered}
f_1\,(x_1, ..., x_n) = \alpha_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_k\,(x_1, ..., x_n) = \alpha_k
\end{gathered}
$$

имеет точно 2^{n-k} решений. Задача остается труднорешаемой при $k = 1$ и для некоторых частных случаев формул; например, если $f_1 = x_1, ..., f_{k-1} = x_{k-1}$, $f_k = f\,(x_1, ..., x_n)$ - произвольная формула КНФ. При табличном задании функций задача полиномиально разрешима.

Сюръективность системы формул.

Д а н о. *Система* $f_1, ..., f_k$ *из* k *булевых формул в виде КНФ над переменными* $x_1, ..., x_n,$ *где* $k = n$.

В о п р о с. *Верно ли, что система* $f_1, \ldots, f_k$ *осуществляет сюръективное отображение* E_n *в* E_k *, т.е. разрешима ли система уравнений*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_k$$

для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *?*

Задача остается труднорешаемой при $k = 1$ и для некоторых частных случаев формул; Например, если $f_1 = x_1, \ldots, f_{k-1} = x_{k-1}$, $f_k = f(x_1, \ldots, x_n)$ - произвольная формула КНФ. При табличном задании функций задача полиномиально разрешима.

Инъективность системы формул.

Д а н о. *Система* $f_1, \ldots, f_k$ *из* k *булевых формул в виде КНФ над переменными* $x_1, \ldots, x_n$, *где* $k = n$.

В о п р о с. *Верно ли, что система* $f_1, \ldots, f_k$ *осуществляет инъективное отображение* E_n *в* E_k *, т.е. существуют ли такие различные наборы* $(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $(y_1, \ldots, y_n)$ *, что выполнено*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_1(y_1, \ldots, y_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = f_k(y_1, \ldots, y_n) \ ?$$

Задача остается труднорешаемой при $k = 1$ и для некоторых частных случаев формул; Например, если $f_1 = x_1, \ldots, f_{n-1} = x_{n-1}$, $f_n = f(x_1, \ldots, x_n)$ - произвольная формула КНФ. При табличном задании функций задача полиномиально разрешима.

Тривиальность группы инерции в группе сдвигов.

Д а н о. *Система* $f_1, \ldots, f_k$ *из* k *булевых формул в виде КНФ над переменными* $x_1, \ldots, x_n$.

В о п р о с. *Тривиальна ли группа инерции системы* $f_1, \ldots, f_k$ *в группе сдвигов, т.е. существует ли такой неединичный набор* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *, что выполнено*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = f_k(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}) \ ?$$

Задача остается труднорешаемой при $k = 1$ и для некоторых частных случаев формул; Например, если $f_1 = x_1, \ldots, f_{k-1} = x_{k-1}$, $f_k = f(x_1, \ldots, x_n)$ - произвольная формула КНФ. При табличном задании функций задача полиномиально разрешима.

Выразимость в *k*-значной логике.

Д а н о. *Система* k*-значных функций* $f_o, f_1 \ldots, f_s$ *,заданных таблицами.*

В о п р о с. *Можно ли функцию* f_o, *выразить суперпозицией функций* $f_1 \ldots, f_n$ *?*

Задача NP-полна при любом фиксированном $k = 3$, но полиномиально разрешима, если $k = 2$ [7], [8].

α-выразимость в *k*-значной логике.

Д а н о. *Система k-значных функций* $f_o, f_1 \ldots, f_s$ *,заданных таблицами.*

В о п р о с. *Принадлежит ли* α*-замыканию системы* $f_1 \ldots, f_s$ *функция* f_o *?*

(Понятие α-замыкания связано с автоматными функциями и основано на ограничении суперпозиции до α-суперпозиций, при которых подстановку функций в другие функции можно производить только вместо первой переменной.)

Задача NP-полна при любом фиксированном $k = 3$. Сложность ее при $k = 2$ неизвестна [9].

Представимость конечной функции.

Д а н о. *Конечное множество A, набор F функций* $f: A \Rightarrow A$ *и выделенная функция* $h: A \Rightarrow A$.

В о п р о с. *Может ли функция h быть представлена в виде композиции функций из семейства F?*

Задача PSPACE-полна [1].

§ 3. Свойства автоматов

Существование эквивалентных состояний.

Д а н о. *Автомат* (A, B, Q, φ, ψ) *задан в булевской параметризации, т.е.* $A = E_{n1}$, $B = E_{n2}$, $Q = E_{n3}$, $\varphi : E_{n1} \times E_{n3} \Rightarrow E_{n2}$ *есть система* n_2 *булевых функций от* $n_1 + n_3$ *переменных* $\psi : E_{n1} \times E_{n3} \Rightarrow E_{n3}$ *есть система* n_3 *булевых функций от* $n_1 + n_3$ *переменных, заданных формулами.*

В о п р о с. *Существуют ли в автомате эквивалентные состояния?*

Задача NP-полна, если в качестве формул используются КНФ. Задача полиномиально разрешима, если в качестве формул используются только линейные функции. При табличном задании функций задача полиномиально разрешима.

Неэквивалентность конечных автоматов.

Д а н о. *Два недетерминированных автомата* G_1 *и* G_2 *с общим входным алфавитом A.*

В о п р о с. *Верно ли, что* G_1 *и* G_2 *распознают различные языки?*

Задача PSPACE-полна даже в том случае, когда *A* содержит два символа и G_2 - тривиальный автомат, принимающий все слова. Задача полиномиально разрешима, если G_1 и G_2 - детерминированные конечные автоматы.

Пересечение для конечных автоматов.

Д а н о. *Последовательность* G_1, G_2 , ... , G_n *детерминированных конечных автоматов с общим входным алфавитом А.*

В о п р о с. *Существует ли входное слово, допускаемое всеми автоматами* G_i *?*

Задача PSPACE-полна. Задача полиномиально разрешима для любого фиксированного *n*.

Редукция не полностью определенного автомата.

Д а н о. *Не полностью определенный автомат и положительное целое число k.*

В о п р о с. *Можно ли функцию переходов* ψ *доопределить так, что у получающегося в результате полностью определенного автомата имеется эквивалентный приведенный автомат, число состояний которого не превосходит k ?*

Задача NP-полна при любом фиксированном $k = 6$. Если на вход поступают только полностью определенные детерминированные автоматы, то задача полиномиально разрешима. Если при этом рассматриваются недетерминированные автоматы, то задача PSPACE-полна.

Минимальный разделяющий конечный автомат.

Д а н о. *Конечный алфавит А, два конечных подмножества S, T слов в алфавите А и положительное целое число k.*

В о п р о с. *Существует ли такой детерминированный конечный автомат, который принимает все слова из S и отвергает все слова из T ?*

Задача NP-полна. Задача полиномиально разрешима, если для некоторого *n* множество $S \cup T$ содержит все слова длины *n*.

§ 4. Множества, разбиения, подстановки

Трехмерное сочетание.

Д а н о. *Подмножество* $M \subset W \times X \times Y$, *где W, X, Y - непересекающиеся множества, содержащие по q элементов.*

В о п р о с. *Верно ли, что в M содержится 3-сочетание, т.е. существует ли такое подмножество* M_1, *содержащее q элементов, что никакие два элемента в нем не имеют ни одной одинаковой координаты?*

Задача NP-полна и остается NP-полной, если ни один элемент не входит более, чем в три тройки, однако если нет элементов, содержащихся более, чем в двух тройках, то задача полиномиально разрешима. Близкая задача о паросочетаниях (в которой $M \subseteq W \times X$) также полиномиально разрешима.

Точное покрытие 3-множествами.

Д а н о. *Заданы множество X (такое, что* $|X| = 3_q$*), набор C подмножества X, содержащих по 3 элемента.*

В о п р о с. *Верно ли, что* C *содержит точное покрытие множества* X, *т.е. такой поднабор* $C_1 \subseteq C$, *что любой элемент из* X *принадлежит ровно одному подмножеству семейства* C_1?

Задача NP-полна и остается NP-полной, если ни один элемент не входит более, чем в три подмножества семейства C , однако если нет элементов, содержащихся более, чем в двух подмножествах (тройках), то задача полиномиально разрешима. Близкая задача о точном покрытии 2-множествами также полиномиально разрешима.

Упаковка множеств.

Д а н о. *Набор* C *конечных множеств и натуральное число* k.

В о п р о с. *Верно ли, что множество* C *содержит, по крайней мере,* k *непересекающихся множеств?*

Задача NP-полна и остается NP-полной, если каждое множество в C содержит не более трех элементов. В случае, если каждое множество в C содержит не более двух элементов, задача полиномиально разрешима.

Расщепление множества.

Д а н о. *Набор* C *подмножеств множества* S.

В о п р о с . *Существует ли такое разбиение множества* S *на два подмножества* S_1 *и* S_2 , *что ни одно подмножество из* C *не содержится целиком ни в* S_1, *ни в* S_2 ?

Задача NP-полна и остается NP-полной, если каждое множество в C содержит не более трех элементов. В случае, если каждое множество в C содержит не более двух элементов, задача полиномиально разрешима.

Минимальное покрытие.

Д а н о. *Набор* C *конечных множеств и натуральное число* k.

В о п р о с. *Верно ли, что множество* C *содержит покрытие мощности не более* k?

Задача NP-полна и остается NP-полной, если каждое множество в C содержит не более трех элементов. В случае, если каждое множество в C содержит не более двух элементов, задача полиномиально разрешима.

Базис семейства множеств.

Д а н о. *Набор* C *конечных множеств и натуральное число* k.

В о п р о с. *Существует ли такой набор* B *из* k *подмножеств множества* S , *что для каждого подмножества* $c \in C$ *в* B *существует такой поднабор, что объединение множеств этого поднабора совпадает с* c?

Задача NP-полна и остается NP-полной, если каждое множество в C содержит не более трех элементов. В случае, если каждое множество в C содержит не более двух элементов, задача полиномиально разрешима.

Модель пересечения множеств.

Д а н о. *Матрица* $A= (a_{ij})$ *порядка* n *с неотрицательными целочисленными элементами.*

В о п р о с. *Существует ли такой набор множеств* $S_1, S_2, \dots, S_n$, *что для всех* i, j *мощность пересечения* $C_i \cap C_j$ *равна* a_{ij} *?*

Задача NP-полна и остается NP-полной, если $a_{ij} = 3$ для всех i. В случае, если все $a_{ij} = 2$,задача полиномиально разрешима.

Разложение подстановки.

Д а н о. *Подстановка* σ *на множестве* $\{1, 2, \dots , N\}$ *и последовательность* $S_1, S_2, \dots, S_m$ *подмножеств множества* $\{1, 2, \dots , N\}$.

В о п р о с. *Можно ли представить подстановку* σ *в виде композиции* $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdot \cdot \cdot \sigma_m$ *таких подстановок, что каждая подстановка* σ_i *оставляет неподвижными все элементы, не входящие в* S_i *?*

Общая задача NP-полна, но полиномиальна разрешима при любом фиксированно N.

Расширение частичного латинского квадрата.

Д а н о. *Квадратная матрица* M, *частично заполненная элементами множества* $\{1, 2, \dots , n\}$ *так, что в любой строке и в любом столбце нет одинаковых элементов.*

В о п р о с. *Можно ли матрицу* M *расширить до полного латинского квадрата ?*

Задача NP-полна. Задача остается NP-полной и для варианта симметричных латинских квадратов. Если в матрице M имеется менее n элементов, то задача полиномиально разрешима.

Минимальная длина порождающей последовательности.

Д а н о . *Множество* $\{q_i: 1 = i = k\}$ *образующих группы подстановок множества* $\{1, 2, \dots , N\}$, *некоторая подстановка* P *и натуральное число* k.

В о п р о с. *Можно ли представить подстановку* P *в виде композиции не более, чем* k *подстановок* q_i *?*

Общая задача NP-полна. Задача полиномиально разрешима при $k = 1$. Задача также полиномиально разрешима, если потребовать совпадения P и соответствующей композиции как операторов на любом фиксированном конечном множестве элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. *Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.

3. *Попадимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.

4. *Носов В.А.* Основы теории алгоритмов и анализа их сложности. М.: 1990.

5. *Гизунов С.А., Носов В.А.* Сложность распознавания классов Шефера. - Вестник МГУ, сер. 1, 1995.

6. *Гизунов С.А., Носов В.А.* О классификации всех булевых функций четырех переменных по классам Шефера. - Обозрение прикл. промышл. матем., сер. дискретн. матем., 1995, т. 2, в. 3, с. 440-467.

7. *Емельянов Н.Р.* О сложности задачи выразимости в многозначных логиках. - Докл. АН СССР, 1985, т. 282, № 3, с. 525-529.

8. *Алексеев В.Б., Емельянов Н.Р.* Об алгоритмической сложности некоторых задач распознавания в многозначных логиках. - В сб.: Тезисы докладов 7-ой Всесоюзной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Иркутск, 1985). Ч. 1, с. 8-9.

9. *Емельянов Н.Р.* О сложности решения задачи α-выразимости в k-значной логике. - Дискретн. матем., 1985, т. 282, № 3, с. 525-529.

10. *Носов В.А., Сачков В.Н., Тараканов В.Е.* Комбинаторный анализ (Неотрицательные матрицы, алгоритмические проблемы). - Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятн., матем. статист., теор. киберн., т. 21, с. 120-178.

11. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1987, v. 8, p. 438-448.

12. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1988, v. 9, p. 426-444.

13. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1990, v. 11, p. 144-151.

14. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1985, v. 6, p. 145-159.

15. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1984, v. 5, p. 147-160.

16. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1985, v. 6, p. 434-451.

17. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1987, v. 8, p. 285-303.

18. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1982, v. 3, p. 288-300.

19. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1983, v. 4, p. 87-100.

20. *Johnson D.* The NP-completeness column: An ongoing guide. - J. Algorithms, 1983, v. 4, p. 397-411.

21. *Schaefer Th.* The complexity of satisfiability problems. - In: Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computinf Machinery. New York, 1978, p. 216-226.

22. *Blass A., Gurevich Y.* On the unigue satisfiability problems. - Information and Control, 1982, v. 55, p. 80-88.

23. *Tovey C.,* A simplified NP-complete satisfiability problems.- Discrete Appl. Math., 1984, v. 8, p. 85-89.

24. *Dubois O.*, On the *r, s*- satisfiability problems and a conjecture of Tovey. - Discrete Appl. Math., 1990, v. 26, p. 51-60.

25. *Cot N., Bellaiche C.,* Une nouvelle approche du probleme SAT. - C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, 1991, [1] 11, p. 801-804.

26. *van Leeuwen J.* Graph Algorithms. Handbook of Theoretical Computer Science. Amsterdam, 1990, p. 527-631.