11-я лекция курса "Теория дискретных функций"

(1-й курс; лектор - проф. А.С.Подколзин)

Структурные автоматы

Конечные автоматы со многими входами и выходами можно соединять друг с другом, образуя схемы из автоматов. Такие схемы обычно называются структурными автоматами. Схема из автоматов сама является конечным автоматом и может рассматриваться как еще один способ задания автомата. До некоторой степени, задание автомата схемой похоже на задание функции формулой, однако есть и существенные отличия. Мы ограничимся лишь самым кратким знакомством с теорией структурных автоматов, избегая чрезмерной формализации изложения. Перейдем к определениям.

Будем рассматривать инициальные автоматы вида $V_{q_1} = (\{0,1\}^n, Q, \{0,1\}^m, \varphi, \psi, q_1)$, где $n \geq 0, m > 0$. Множество автоматных функций $f(\alpha) = \overline{\psi(q_1, \alpha)}$, которые они реализуют, обозначим $P_{\text{авт}}$. Аналогично тому, как функции k-значной логики задавались формулами, функции из $P_{\text{авт}}$ будем задавать схемами.

Автоматную функцию, реализуемую автоматом $V_{q_1} = (\{0,1\}^n, Q, \{0,1\}^m, \varphi, \psi, q_1)$, можно задать системой канонических уравнений. Всегда можно закодировать состояния автомата двоичными наборами и считать, что $Q \subseteq \{0,1\}^k$ для некоторого натурального k. Тогда начальное состояние q_1 представляет собой набор $(q_{11}, \ldots, q_{1k})$. Входной сигнал $a(t)$, состояние $q(t)$ и выходной сигнал $b(t)$ в момент времени t представляют собой наборы $(a_1(t), \ldots, a_n(t))$, $(q_1(t), \ldots, q_k(t))$, $(b_1(t), \ldots, b_m(t))$. Соответственно, функции φ и ψ становятся вектор функциями: $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$, где φ_i, ψ_j - функции алгебры логики. В этих обозначениях система канонических уравнений автомата V_{q_1} приобретает следующий вид:

$$q_i(1) = q_{1i} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

$$q_i(t+1) = \varphi_i(a_1(t), \ldots, a_n(t), q_1(t), \ldots, q_k(t)) \quad (i = 1, \ldots, k)$$

$$b_j(t) = \psi_j(a_1(t), \ldots, a_n(t), q_1(t), \ldots, q_k(t)) \quad (j = 1, \ldots, m)$$

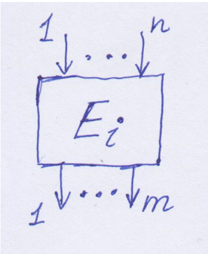
Автоматная функция $f(\alpha) = \overline{\psi(q_1, \alpha)}$ зависит от единственной переменной α. Однако, входным символом автомата служит двоичный набор длины n. Мы говорили, что в таком случае автомат имеет n входов. Поэтому можно считать, что на вход автомата поступают n различных двоичных слов - каждое по своему входу. Более подробно, рассмотрим какое-то входное слово $\alpha = \alpha(1) \ldots \alpha(l)$ в алфавите $\{0,1\}^n$. Его j-я буква имеет вид $\alpha(j) = (\alpha_1(j), \ldots, \alpha_n(j))$. Определим слова $\alpha_i = (\alpha_i(1) \ldots \alpha_i(l))$, образованные i-ми разрядами букв слова α; $i = 1, \ldots, n$. Тогда можно определить функцию $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha)$, которая зависит уже не от одной переменной, а от n. Значениями ее переменных служат двоичные слова, причем функция определена лишь при условии, что эти слова имеют одинаковую длину. Как и обычно, определяются понятие несущественной и существенной переменных функции g. Если i - я ее переменная оказывается существенной, то говорим, что i - й вход автоматной функции $\overline{\psi(q_1, \alpha)}$ является существенным.

Дадим еще одно определение. Если функция ψ_j в приведенной выше системе уравнений зависит от $a_i(t)$ фиктивным образом, то говорим, что j-й выход автоматной функции $\overline{\psi(q_1, \alpha)}$ зависит от i-го входа с задержкой. Это означает, что какая-то зависимость возможна, но только через посредство изменений в состояниях автомата, которые проявятся на j-м выходе не ранее как к следующему моменту.

Как и формула, схема определяется по индукции. Но здесь нам придется одновременно определять и схему, и реализуемую ею автоматную функцию. В случае формул эти определения давались последовательно. В то время, как формула представляла собой слово в некотором алфавите, схема является ориентированным графом, вершины и ребра которого снабжены некоторыми пометками. Однако, во избежание громоздких формулировок, будем просто изображать "картинки", поясняющие, как новая схема строится из ранее определенных схем. Этого достаточно для однозначного восстановления определения схем как графов. Ввиду краткости знакомства с данной темой, такое определение выходит за рамки программы курса.

Прежде всего, выбирается сигнатура $\Sigma : E \to \{f_1, \ldots, f_p\} \subseteq P_{\text{авт}}$.

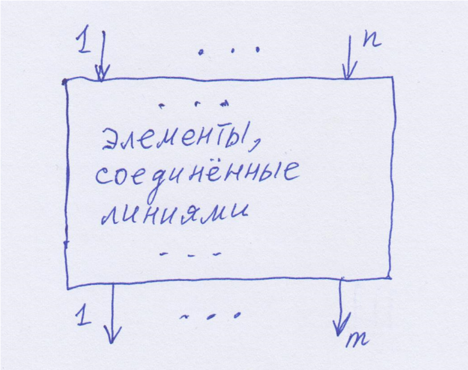
В качестве базиса индуктивного определения схемы в сигнатуре Σ будем рассматривать "элементарные" схемы, или, коротко, элементы, следующего вида:



Здесь $E_i \in E$ - символ, обозначающий элемент; n - число входов автомата, реализующего функцию f_i; m - число выходов этого автомата. Если на автомат поступает в качестве входного символа набор $(a_1, \ldots, a_n)$, то будем говорить, что на его j-й вход поступает символ a_j; $j = 1, \ldots, n$. Аналогично, если на выходе автомата появляется набор $(b_1, \ldots, b_m)$, то говорим, что на его k-м выходе появляется символ b_k; $k = 1, \ldots, m$.

Каждому элементу E_i сопоставляем систему канонических уравнений автомата, определяющего функцию f_i. Говорим, что элемент реализует функцию f_i. Предполагаем, что элементов каждого типа E_i имеется счетное множество, и при построении схемы каждый раз берется "новый" экземпляр элемента.

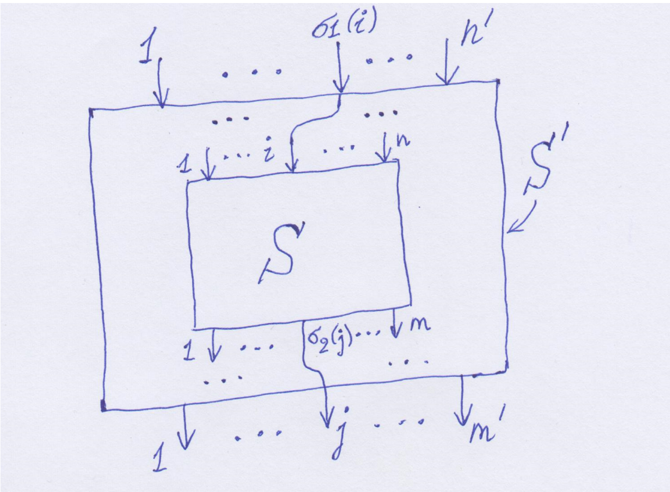
Прежде, чем перейти к описанию операций, позволяющих создавать новые схемы из ранее построенных, договоримся обозначать любую схему посредством прямоугольника, в который ведут n стрелок, пронумерованных числами $1, \ldots, n$, и из которого выходят m стрелок, пронумерованных числами $1, \ldots, m$ - соответственно числу входов и выходов автомата, реализуемого данной схемой. Заметим, что допускается случай $n = 0$, однако m всегда должно быть больше нуля.



Перейдем к описанию операций, дающих индуктивное определение схемы. Будем считать, что для тех схем, к которым она применяется, уже известны системы канонических уравнений автоматов, определяющих реализуемые данными схемами автоматные функции.

1. Операция переобозначения входов и выходов.

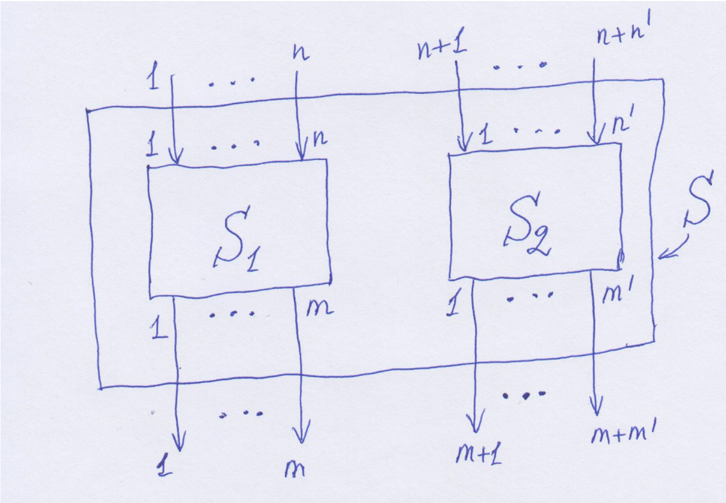
   Пусть уже имеется схема S, имеющая n входов и m выходов. Пусть f - реализуемая этой схемой автоматная функция. Рассмотрим произвольное (возможно, пустое) множество $M \subseteq \{1, \ldots, n\}$, содержащее номера всех существенных входов автоматной функции f. Пусть также m' - произвольное натуральное число. Рассмотрим отображения $\sigma_1 : M \to \{1, \ldots, n'\}; \sigma_2 : \{1, \ldots, m'\} \to \{1, \ldots, m\}$. Взаимная однозначность их не требуется. Построим новую схему S', имеющую следующий вид:



У этой схемы имеется n' входов, причем отображение σ_1 указывает номер $\sigma_1(i)$ того входа схемы S', к которому подключается i- й вход схемы S. Новая схема имеет m' выходов, и функция σ_2 определяет номер $\sigma_2(j)$ того выхода схемы S, к которому подключается j-й выход схемы S'. Фактически, данная операция состоит в "переподключении" входов и выходов исходной схемы к новым входам и выходам. Система канонических уравнений для автоматной функции f', определяемой схемой S, получается из системы канонических уравнений для f очевидными преобразованиями: "старые" входные переменные $a_i(t)$ заменяются на новые согласно отображению σ_1, причем вместо несущественных "старых" входов, не подключенных к "новым" входам, подставляется 0. Для каждой "новой" выходной переменной после этого преобразования берется определяющее ее значение уравнение - согласно отображению σ_2. Во избежание громоздких записей, более подробных описаний не приводим.

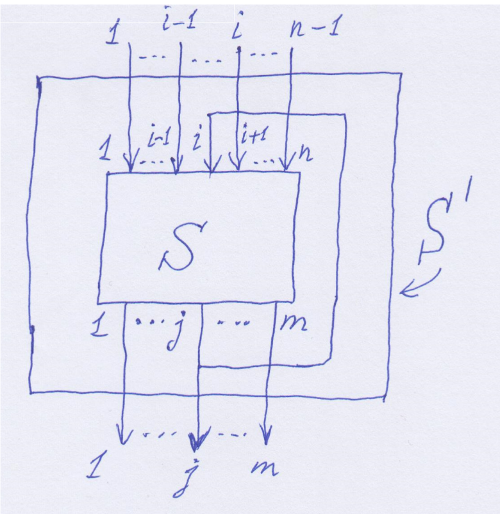
2. Операция объединения схем.

   Пусь даны две схемы S_1 и S_2 с не пересекающимися множествами элементов. Тогда можно построить схему S путем формального объединения схем S_1 и S_2. Соответствующие системы канонических уравнений объединяются, а входные и выходные переменные перенумеруются, как того требует нумерация входов и выходов новой схемы. Схема S изображается следующим образом:



3. Операция обратной связи.

   Пусть имеется схема S с n входами и m выходами, у которой j-й выход зависит от i - го входа с задержкой. Тогда можно построить новую схему S', присоединив j-й выход к i-му входу. Число входов этой схемы на единицу меньше, чем у исходной; число выходов - прежнее. Схема S' изображается следующим образом:



Заметим, что для определения возможности применения данной операции к схеме S необходимо было иметь автоматную функцию f, которую она реализует. Из-за этого индуктивное определение и дается таким образом, чтобы сразу вводить и новую схему, и реализуемую ею функцию.

В случае операции обратной связи преобразования канонических уравнений схемы S таковы. Во-первых, в уравнение

$$b_j(t) = \psi_j(a_1(t), \ldots, a_n(t), q_1(t), \ldots, q_k(t))$$

подставляем ноль вместо $a_i(t)$, от которого правая часть зависит фиктивно. Во-вторых, подставляем правую часть данного уравнения во все остальные уравнения вместо $a_i(t)$. Наконец, выполняем необходимую перенумерацию входных переменных. Никаких доказательств здесь не требуется, так как это - определение автоматной функции, реализуемой схемой S'.

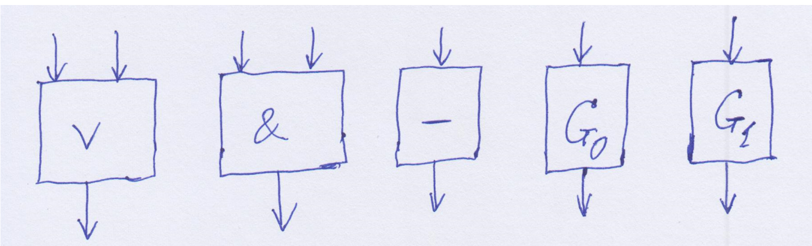
Операция обратной связи приводит к появлению циклов в схемах, что делает их существенно отличающимися от формул. Формулы оказываются своего рода частным случаем схем - без циклов и разветвлений выходов элементов.

Заметим также, что само по себе наличие цепочки "мгновенной зависимости" по элементам схемы, ведущей от i-го входа к j-му выходу, вовсе не означает, что j-й выход не является зависящим с задержкой от i-го входа. Например, в формуле $(x \vee \overline{x}) \cdot y$ переменная x несущественная, однако, если эту формулу представить в виде схемы, легко прослеживается цепочка элементов, ведущих от x к выходу, у которых каждый вход - существенный.

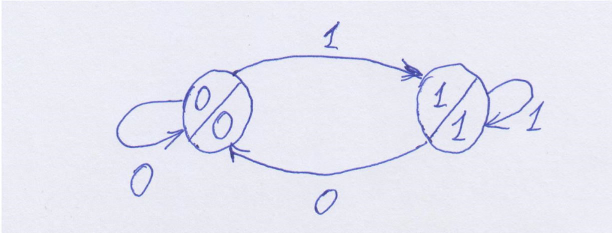
Заметим, что операция "последовательного соединения" двух схем оказывается избыточной, так как она сводится к последовательному применению операций объединения двух схем и обратной связи.

Если функция f реализуется схемой в сигнатуре Σ, то говорим, что она получена операциями композиции (или просто - композициями) из функций $\{f_1, \ldots, f_p\}$ данной сигнатуры. Множество всех функций, полученных операциями композиции из функций множества $F \subseteq P_{\text{авт}}$, обозначаем $[F]$. Систему $F \subseteq P_{\text{авт}}$ называем полной, если $[F] = P_{\text{авт}}$.

Приведем пример конечной полной системы для $P_{\text{авт}}$. Рассмотрим следующие 5 типов элементов:



Первые три из них реализуют автоматные функции с единственным состоянием, передающие на выход, соответственно, дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание входных значений. По существу, это просто операции из алгебры логики. Последние две представляют собой автоматы Мура, диаграмма которых имеет следующий вид:



У элемента G_0 начальным состоянием служит состояние 0, у элемента G_1 - состояние 1. Первый элемент называется единичной задержкой с нулевым начальным состоянием, второй - единичной задержкой с единичным начальным состоянием. Канонические уравнения первого элемента имеют вид:

$q(0) = 0$

$q(t+1) = a(t)$

$b(t) = q(t)$

Уравнения второго имеют вид:

$q(0) = 1$

$q(t+1) = a(t)$

$b(t) = q(t)$

В обоих случаях $b(t+1) = a(t)$; $t = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, элемент передает на выход значение, поступивашее на его вход в предыдущий момент времени - иными словами, реализует задержку на один такт времени. Такие элементы широко используются в чипах как элементы памяти.

Покажем, что при помощи указанных пяти типов элементов можно построить схему, реализующую произвольную функцию из $P_{\text{авт}}$. Пусть эта функция задается системой канонических уравнений:

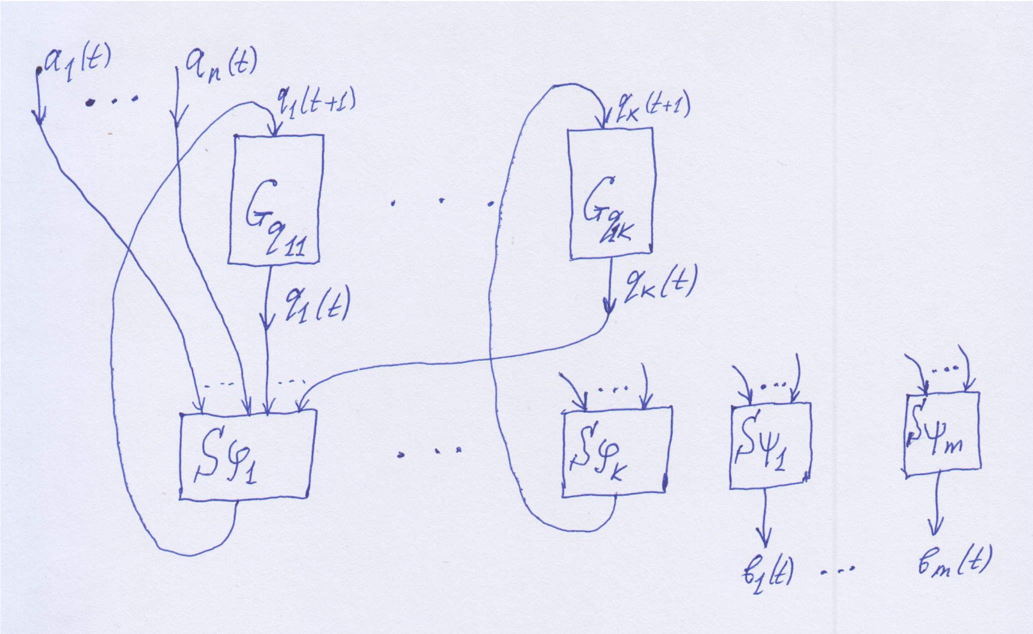
$q_i(1) = q_{1i} \quad (i = 1, \ldots, k)$

$q_i(t+1) = \varphi_i(a_1(t), \ldots, a_n(t), q_1(t), \ldots, q_k(t)) \quad (i = 1, \ldots, k)$

$b_j(t) = \psi_j(a_1(t), \ldots, a_n(t), q_1(t), \ldots, q_k(t)) \quad (j = 1, \ldots, m)$

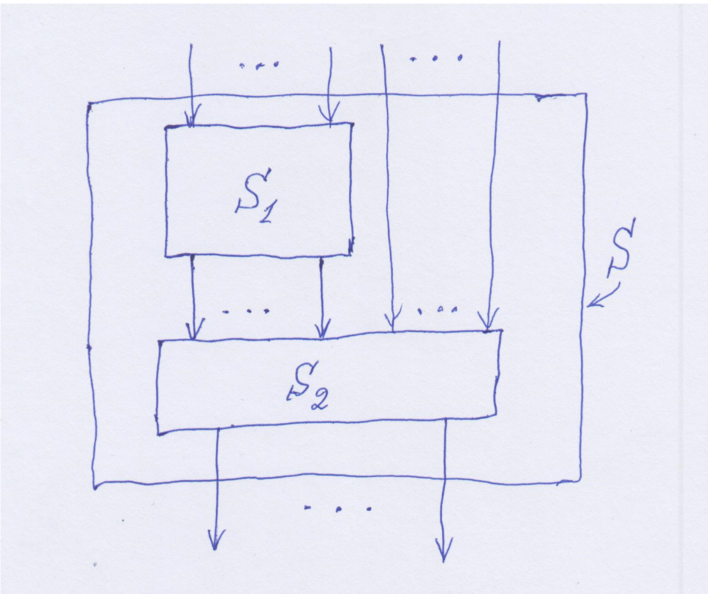
Текущее состояние автомата, определяемого данной системой, представляет собой двоичный набор $(q_1(t), \ldots, q_k(t))$. Рассмотрим набор элементов $G_{q_{11}}, \ldots, G_{q_{1k}}$. Будем строить схему S так, чтобы на выходах этих элементов в каждый момент t были значения $q_1(t), \ldots, q_k(t)$. Для начального момента $t = 1$ это выполнено в силу выбора начальных состояний элементов. Чтобы это же выполнялось в момент $t+1$, на вход каждого элемента $G_{q_{1i}}$ нужно подать в момент t значение $\varphi_i(a_1(t), \ldots, a_n(t), q_1(t), \ldots, q_k(t))$. Функция φ_i представляет собой функцию алгебры логики. Поэтому ее можно задать формулой, содержащей только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Эту формулу, используя первые три элемента нашей системы автоматов, преобразуем в автоматную схему S_{φ_i}, реализующую функцию φ_i. На входы схемы S_{φ_i} подадим значения $a_1(t), \ldots, a_n(t)$, проведя линии от соответствующих входов схемы S. Кроме того, ко входам схемы S_{φ_i} проведем линии от выходов элементов $G_{q_{11}}, \ldots, G_{q_{1k}}$. Тогда на выходе схемы S_{φ_i} окажется значение $q_i(t+1)$. Используя операцию обратной связи, соединим этот выход со входом элемента S_{φ_i}. Зависимость с задержкой здесь очевидна. Для завершения построения схемы S создадим для каждого выхода $b_j(t)$

схему S_{ψ_j}, вычисляющую функцию алгебры логики $\psi_j(a_1(t), \dots, a_n(t), q_1(t), \dots, q_k(t))$. Линии ко входам этой схемы проводятся так же, как ко входам схем S_{φ_i}. В итоге получается схема S следующего вида:



На рисунке, чтобы избежать путаницы линий, мы ограничились проведением их только ко входам схемы S_{φ_1}.

Иногда вместо операции обратной связи рассматривают операцию последовательного соединения схем:



Легко заметить, что такая операция сводится к операции объединения схем S_1, S_2 и нескольким применениям операции обратной связи. Однако, обратное сведение операции обратной связи к операциям переобозначения входов и выходов, объединения схем и их последовательного соединения невозможно. Если функция f реализуется схемой в сигнатуре Σ, построенной только при помощи операций переобозначения входов и выходов, объединения схем и их последовательного соединения, то говорим, что она получена операциями суперпозиции (или просто - суперпозициями) из функций $\{f_1, \ldots, f_p\}$ данной сигнатуры. Множество всех функций, полученных операциями суперпозиции из функций множества $F \subseteq P_{\text{авт}}$, обозначаем $[F]_c$. Систему $F \subseteq P_{\text{авт}}$ называем полной относительно суперпозиций, если $[F]_c = P_{\text{авт}}$.

Теорема. В $P_{\text{авт}}$ не существует конечной полной относительно суперпозиций системы функций.

Предположим противное. Пусть M - конечная полная относительно суперпозиций система. Для каждой функции f из M рассмотрим реализующий ее автомат V_q - элемент некоторой сигнатуры Σ для M. Пусть n - наибольшее число состояний таких автоматов. Рассмотрим произвольную схему S в сигнатуре Σ, построенную только при помощи операций суперпозиции. Подадим на ее входы периодическую последовательность, длина наименьшего периода которой представляется в виде произведения степеней простых чисел, не превосходящих n. Если эта последовательность поступает на входы элемента V_q, то, согласно ранее доказанной теореме, на его выходах будет наблюдаться периодическая последовательность, наименьший период которой представим в виде произведения делителя периода входной последовательности на некоторое число, не превосходящее числа состояний автомата V_q, т.е. не превосходящее n. Таким образом, наименьший период выходной последовательности элемента тоже будет представим в виде произведения степеней простых чисел, не превосходящих n. Индукцией по построению схемы S теперь несложно доказать, что на ее выходах будет наблюдаться периодическая последовательность с тем же свойством. Следовательно, никакая схема в сигнатуре Σ не сможет выдавать в ответ на константную входную последовательность выходную последовательность с простой длиной периода, большей n. Очевидно, что в $P_{\text{авт}}$ существует функция, реализующая такое преобразование. Таким образом, M неполно. Теорема доказана.

Доказанная теорема устанавливает несводимость операции обратной связи к операциям суперпозиции.