Замечание к лекции 7

К сожалению, в конспекте лекции 7 была допущен описка в формулировке следствия к теореме Мучника. Вместо "Теорема. Для любого $k \geq 3$ в P_k имеется континуум предполных классов." следует читать "Теорема. Для любого $k \geq 3$ в P_k имеется континуум замкнутых классов." Собственно, это и доказывалось под формулировкой.

Описка пришлась кстати: заметим, что в $P_{\text{АВТ}}$ имеется континуум именно предполных классов. Это было установлено В.Б.Кудрявцевым.

Вероятно, в конспектах лекций будут обнаруживаться и другие описки. Просьба сообщать о них. По завершении курса исправления будут внесены сразу во все лекции. Кроме того, предполагается начать выкладывать конспекты тех лекций, прочитанных до режима дистанционного обучения, которые наиболее сильно расходятся с материалом учебников. В первую очередь - лекции 5.

12-я лекция курса "Теория дискретных функций"

(1-й курс; лектор - проф. А.С.Подколзин)

Однородные структуры

Этот раздел завершает курс лекций. В конспектах нежелательно было обрывать изложение "на середине", как часто случается при обычном чтении курса, и общее число лекций оказалось несколько меньшим.

Следующий шаг в рассмотрении дискретных процессов - переход к модели автомата, имеющего не только временные, но и пространственные параметры. Помимо дискретного времени $t = 1, 2, \ldots$, будет введено также дискретное пространство. Роль такого пространства играет k -мерная целочисленная решетка, узлы которой будут "точками" пространства автомата. Каждая точка в каждый дискретный момент времени t будет принимать состояние из заданного конечного множества E_n, одинакового для всех точек. Изменение состояния точки будет происходить при помощи некоторого локального детерминированного "закона", одинакового для всех точек. Роль такого закона станет играть функция n- значной логики, а значениями ее аргументов будут состояния точек из заданной окрестности текущей точки.

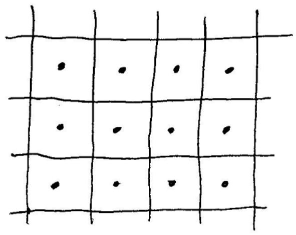
Эту модель, предложенную Дж.фон Нейманом, можно трактовать и иначе - как бесконечную однородную схему из одинаковых конечных автоматов, расположенных в узлах целочисленной решетки и соединенных между собой некоторым фиксированным, "одинаковым" для всех автоматов образом. Дж. фон Нейман назвал свою модель "клеточным автоматом", однако впоследствии она приобрела и другие названия - "однородная структура", "итеративная сеть", и т.п. Мы будем пользоваться термином "однородная структура".

Если модель конечного детерминированного автомата можно рассматривать как дискретный аналог обыкновенных дифференциальных уравнений, то однородная структура является дискретным аналогом дифференциальных уравнений в частных производных. Некоторые современные чипы имеют аналогичную архитектуру. Она оказывается удобной для обработки геометрических данных. Кроме того, она позволяет создавать "универсальные" чипы, которые можно перепрограммировать так, чтобы они моделировали (разумеется, с определенными потерями) работу других чипов. Такие чипы называются FPGA (Field Programmable Gates Array). Хотя они и не совсем однородные, но имеют с однородными структурами много общего.

Но перейдем к точным определениям.

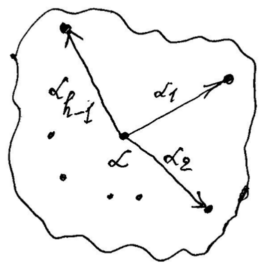
Однородной структурой (сокращенно - ОС) будем называть объект $\sigma = (Z^k, E_n, V, \varphi)$, где Z^k - множество k-мерных целочисленных векторов, $E_n = \{0, \ldots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$, $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ - упорядоченный набор попарно различных ненулевых k - мерных целочисленных векторов, $\varphi : (E_n)^h \to E_n$ - функция n-значной логики; $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}$. Эта функция сохраняет 0: $\varphi(0, \ldots, 0) = 0$.

Элементы множества Z_k называются ячейками однородной структуры. Обычно их изображают не точками целочисленной решетки, а ее клетками. Это позволяет указывать внутри клетки состояние ячейки. Можно считать, что клетки на рисунке размещены таким образом, что узлы решетки - их центры:

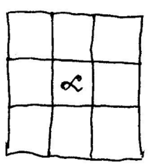


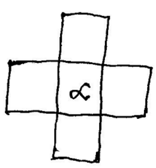
Элементы множества E_n называются состояниями ячейки ОС σ.

Набор $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$ называется шаблоном соседства ОС σ. С его помощью для каждой ячейки α определяется упорядоченный набор ячеек $V(\alpha) = (\alpha, \alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_{h-1})$, называемый окрестностью ячейки α:



Часто (но не обязательно) рассматривают девятиклеточную квадратную окрестность ячейки либо крестообразную пятиклеточную:





Функция φ называется локальной функцией переходов однородной структуры. По набору состояний ячеек из окрестности заданной ячейки она будет определять новое состояние этой ячейки.

Чтобы определить функционирование однородной структуры, сначала нужно условиться, что понимается под ее состоянием. Будем называть состоянием ОС σ произвольную функцию $f : Z^k \to E_n$. Такая функция ставит в соответствие каждой ячейке однородной структуры ее состояние. Она может изображаться (при $k = 2$) в виде бесконечной матрицы.

Основная (или глобальная) функция переходов Φ определена на множестве состояний ОС. Для произвольного ее состояния f она указывает новое состояние $g = \Phi(f)$, значения которого определяются следующим тождеством:

$g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_{h-1}))$; $\alpha \in Z^k$.

Поведением ОС σ называем последовательность $f_0, f_1, \dots$ ее состояний, такую, что $f_{i+1} = \Phi(f_i)$ при всех $i = 0, 1, \dots$.

Таким образом, однородную структуру можно рассматривать как бесконечный автомат, не имеющий входов и выходов. Изменяется только его текущее состояние. Существуют также модели со входами и выходами, но мы их не рассматриваем.

Ввиду того, что локальная функция переходов сохраняет 0, тождественно нулевое состояние ОС оказывается "состоянием покоя" - оно не изменяется. Часто ограничивают рассмотрение состояний ОС лишь конечными ненулевыми "островками", называемыми конфигруациями ОС. Более строго, конфигурацией ОС называется такое ее состояние f, которое имеет ненулевое значение лишь на конечном числе ячеек. Очевидно, что основная функция переходов переводит конфигурацию снова в конфигурацию. Если поведение ОС σ начинается с конфигурации, то его называют поведением этой конфигурации в ОС σ.

Рассмотрим простой пример однородной структуры. Пусть $\sigma = (Z^2, E_2, V, \varphi)$, где $V = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1})$ - какой-то произвольный шаблон соседства; $\varphi(x_0, \dots, x_{h-1}) = x_0 + x_1 + \dots + x_{h-1} \pmod 2$. Однородная структура двумерная, каждая ее ячейка имеет состояние 0 либо 1, причем состояние этой ячейки в следуюший момент времени равно сумме по модулю 2 состояний ячеек ее окрестности в текущий момент времени.

Предположим, что состояние f ОС σ является суммой по модулю 2 двух других состояний f_1, f_2: $f(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha)$ для каждого $\alpha \in Z^2$. Тогда, согласно определению основной функции переходов Φ, имеем:

$\Phi(f)(\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha + \alpha_1) + \dots + f(\alpha + \alpha_{h-1}) \pmod 2 = f_1(\alpha) + f_1(\alpha + \alpha_1) + \dots + f_1(\alpha + \alpha_{h-1}) + f_2(\alpha) + f_2(\alpha + \alpha_1) + \dots + f_2(\alpha + \alpha_{h-1}) \pmod 2 = \Phi(f_1)(\alpha) + \Phi(f_2)(\alpha) \pmod 2$.

По индукции отсюда получаем, что для любого n выполнено:

$\Phi^n(f)(\alpha) = \Phi^n(f_1)(\alpha) + \Phi^n(f_2)(\alpha) \pmod 2$.

Таким образом, для получения поведения ОС σ с начальным состоянием f достаточно найти ее поведения для начальных состояний f_1, f_2, а затем "сложить" их по модулю 2. Обобщая это правило на случай произвольного числа слагаемых, получаем, что для изучения поведений конфигураций в ОС σ достаточно изучить поведения в ней простейших "одноклеточных" конфигураций, имеющих лишь одну ячейку в состоянии 1.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z^2$ - некоторая ячейка. Обозначим f_α конфигурацию, принимающую значение 1 в точке α и равную 0 в остальных точках.

Рассмотрим конфигурацию $\Phi(f_\alpha)$. Очевидно, состояние 1 в ней будут иметь те и только те ячейки β, в окрестности которых расположена ячейка α. Иными словами, такие ячейки β, что $\alpha = \beta + \alpha_i$; $i = 0, \ldots, h-1$. Для удобства мы здесь обозначили нулевой вектор посредством α_0. Разрешая указанные равенства относительно β, получаем, что в состоянии 1 окажутся ячейки $\alpha - \alpha_i; i = 0, \ldots, h-1$. Это можно переписать в виде следующего равенства (*):

$$\Phi(f_\alpha) = f_{\alpha-\alpha_0} + f_{\alpha-\alpha_1} + \ldots + f_{\alpha-\alpha_{h-1}} \pmod 2$$

Применяя оператор Φ к обеим частям данного равенства, получим:

$$\Phi^2(f_\alpha) = \Phi(f_{\alpha-\alpha_0}) + \Phi(f_{\alpha-\alpha_1}) + \ldots + \Phi(f_{\alpha-\alpha_{h-1}}) \pmod 2.$$

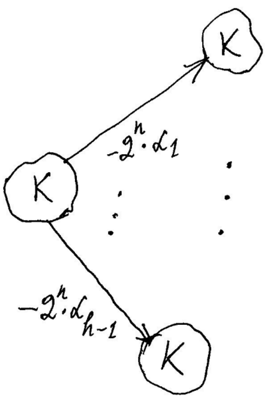
Воспользуемся теперь равенством (*) для преобразования каждого из слагаемых правой части. Получится сумма сосотяний вида $f_{\alpha-\alpha_i-\alpha_j}; i \in \{0, \ldots, h-1\}; j \in \{0, \ldots, h-1\}$. В этой сумме каждое состояние $f_{\alpha-\alpha_i-\alpha_j}$ при $i \neq j$ встречается дважды: один раз оно возникает из $\Phi(f_{\alpha-\alpha_i})$, другой раз - из $\Phi(f_{\alpha-\alpha_j})$. Поэтому такие слагаемые взаимно уничтожаются, и остаются лишь те из них, у которых $i = j$. Иными словами,

$$\Phi^2(f_\alpha) = f_{\alpha-2\alpha_0}) + f_{\alpha-2\alpha_1} + \ldots + f_{\alpha-2\alpha_{h-1}} \pmod 2.$$

Приведенное рассуждение позволяет доказать по индукции, что для любого натурального n выполнено равенство:

$$\Phi^{2^n}(f_\alpha) = f_{\alpha-2^n\alpha_0} + f_{\alpha-2^n\alpha_1} + \ldots + f_{\alpha-2^n\alpha_{h-1}} \pmod 2.$$

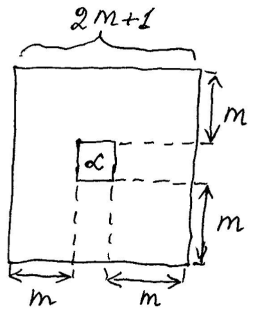
Рассмотрим теперь произвольную конфигурацию K нашей ОС. Разложив ее в сумму одноклеточных конфигураций и воспользовавшись приведенным выше равенством, получим, что к моменту 2^n она перейдет в конфигурацию, представляющую собой сумму по модулю 2 h конфигураций, полученных из K сдвигом на векторы $-2^n\alpha_i;\ i = 0, \ldots, h-1$. Если n достаточно велико, то эти копии конфигурации K не будут пересекаться друг с другом, так что исходная "картинка" окажется размножена в количестве h экземпляров. Каждый из них, в свою очередь, через некоторое число тактов 2^m создаст h своих копий, которые при достаточно больших n, m не будут пересекаться, т.е. всего уже будет h^2 копий исходной "картинки". И так далее, время от времени в поведении ОС будут возникать моменты, когда исходная картинка будет размножена в сколь угодно большом количестве экземпляров. Заметим, что в промежутках все изображения перемешаны, и наблюдаться будет полный хаос.



Как видим, даже простейшие примеры однородных структур обладают достаточно интересным поведением. К сожалению, исчерпывающий анализ свойств их поведений в более сложных ситуациях сталкивается с серьезными затруднениями. Для почти любых нетривиальных свойств поведений однородных структур удается доказать, что распознавание их "в общем виде" является алгоритмически неразрешимой задачей. Тем не менее, возможно изучение компьютерных моделей, воспроизводящих поведение однородных структур, и на эту тему написаны целые монографии (например, монография С.Вольфрама). Развивается что-то типа "экспериментальной физики" дискретных "миров".

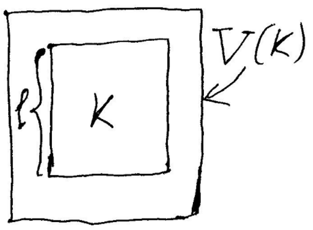
Несмотря на алгоритмические трудности, теория однородных структур имеет множество нетривиальных интересных результатов. Одним из первых таких результатов является теорема Мура, к изложению которой мы и переходим.

Начиная с этого момента, изображаем ячейки ОС не узлами плоской решетки, а ее клетками. Будем рассматривать однородные структуры $\sigma = (Z^2, E_k, V, \varphi)$, у которых $V(\alpha)$ - квадрат с центром в ячейке α:



Такие ОС назовем квадратными. Пусть $K \subseteq Z^2$ - квадрат. Определим его окрестность:

$$V(K) = \bigcup_{a \in K} V(\alpha)$$



Очевидно, $V(K)$ - квадрат с длиной стороны $l + 2m$.

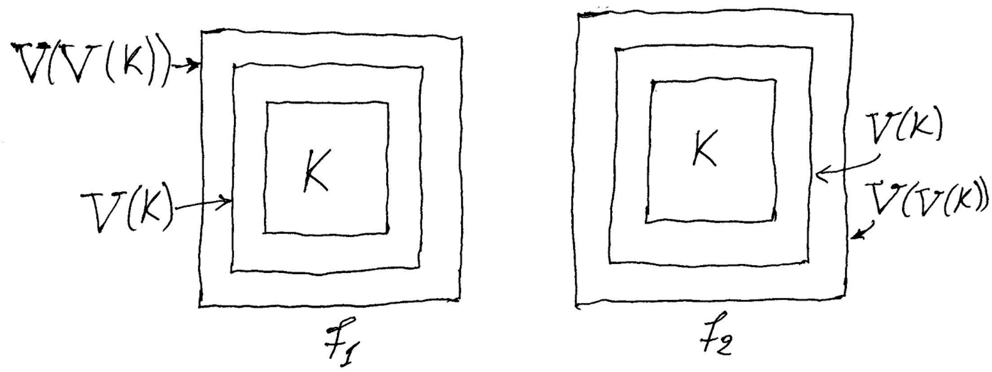
Состоянием квадрата в ОС σ будем называть функцию, соспоставляющую каждой его ячейке элемент множества E_k. Если известно состояние f квадрата $V(K)$ в момент t, то при помощи локальной функции переходов однозначно определяется состояние g квадрата K в момент $t + 1$. Введем обозначение $g = \Phi_K(f)$. Функция Φ_K определена на состояниях квадрата $V(K)$ и принимает в качестве своих значений состояния квадрата K. Как и при определении основной функции переходов Φ, имеем:

$g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha + \alpha_1), \ldots, f(\alpha + \alpha_{h-1}));\ \alpha \in K.$

Состояния квадрата будем называть также его конфигурациями.

Если конфигурация h квадрата K не принадлежит множеству значений функции Φ_K, то она называется неконструируемой. Такие состояния, очевидно, могут возникать лишь в начальный момент поведения однородной структуры. Наличие неконструируемых конфигураций у однородной структуры означает, что в процессе ее функционирования "хаотичность" состояний ограничивается - вид конфигураций начинает подчиняться определенным законам. Можно показать, что у большинства однородных структур неконструируемые конфигурации имеются. Примером однородной структуры без неконструируемых конфигурации может служить рассмотренная выше ОС, локальная функция переходов которой - сумма по модулю 2.

Мур установил связь между наличием в однородной структуре неконструируемых конфигураций и явлением потери информации - невозможностью восстановить предысторию по текущей конфигурации. Дадим точное определение последнего свойства. Пусть f_1, f_2 - две конфигурации квадрата $V(V(K))$:



Предположим, что для них выполнены следующие требования:

1. $f_1|_K \neq f_2|_K$ (т.е. сужения конфигураций f_1, f_2 на квадрат K не совпадают).

2. $f_1|_{V(V(K))\setminus K} = f_2|_{V(V(K))\setminus K}$ (сужения f_1, f_2 на двойное "окаймление" квадрата K совпадают).

3. $\Phi_{V(K)}(f_1) = \Phi_{V(K)}(f_2)$ (в следующий момент времени состояния окрестности квадрата K совпадают)

Тогда конфигурации f_1, f_2 называются взаимно стираемыми. Информация о различии конфигураций f_1, f_2 на квадрате K могла перейти к следующему моменту времени только на квадрат $V(K)$. Однако, состояния этого квадрата оказываются одинаковыми, и информация о различии f_1, f_2 безвозвратно утеряна.

Теорема (Мур) Если в квадратной ОС существуют взаимно стираемые конфигурации, то в ней существуют и неконструируемые конфигурации.

Сразу заметим, что обратное утверждение тоже верно - оно было установлено Дж.Майхиллом. Хотя доказательство этого утверждения мало отличается от доказательства теоремы Мура, мы его не рассматриваем.

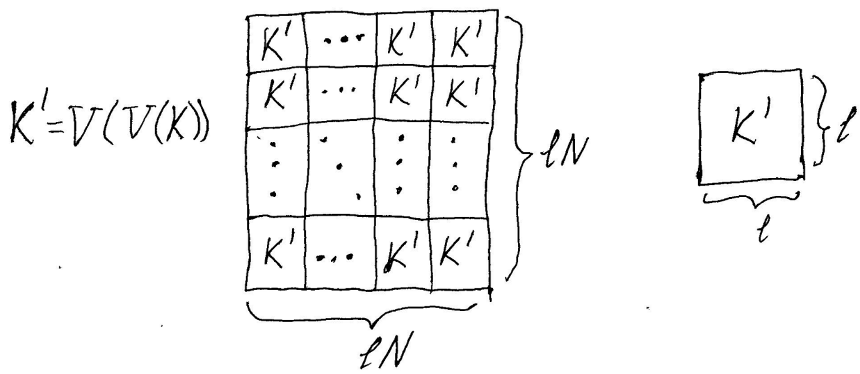
Заметим также, что требование "квадратности" ОС введено лишь для упрощения рассуждений и обязательным не является.

Пусть в квадратной ОС σ длина стороны квадратной окрестности ячейки равна $2m+1$, множество состояний ячейки - E_k. Пусть также в этой ОС на некотором квадрате $V(V(K)) = K'$ существуют две взаимно стираемые конфигурации f_1, f_2. Определим на множестве состояний квадрата K' отношение эквивалентности. Будем считать два состояния f_1 и f_2 эквивалентными, если они либо совпадают, либо взаимно стираемые. Пусть l - длина стороны квадрата K'. Число состояний этого квадрата равно k^{l^2}. Хотя бы один из классов эквивалентности содержит два элемента f_1, f_2, так что число p классов эквивалентности не превосходит $k^{l^2} - 1$.

Заметим, что если две конфигурации f, g квадрата K' эквивалентны, то, согласно пункту 3 определения взаимной стираемости, имеет место соотношение (*):

$\Phi_{V(K)}(f) = \Phi_{V(K)}(g)$.

Выберем теперь произвольное натуральное N и рассмотрим квадрат $\tilde{K}$ с длиной стороны lN. Он распадается на N^2 квадратов, равных K':



Очевидно, квадрат $\tilde{K}$ является окрестностью некоторого квадрата K''. Длина стороны квадрата K'' равна $lN - 2m$. Предположим, что $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ - два состояния квадрата $\tilde{K}$, причем на каждом из указанных на рисунке "подквадратов" K' их сужения эквивалентны. Для краткости, условимся их тоже называть эквивалентными. Покажем, что тогда $\Phi_{K''}(\tilde{f}_1) = \Phi_{K''}(\tilde{f}_2)$.

Рассмотрим произвольную ячейку α в квадрате K''. Возможны два случая. Если она попадает в какой-либо из "подквадратов" $V(K)$, то, согласно (*) ее состояния в $\Phi_{K''}(\tilde{f}_1)$ и $\Phi_{K''}(\tilde{f}_2)$ совпадают. Если же ячейка α оказывается лежащей в какой-либо из областей $V(V(K)) \setminus V(K)$ то ее окрестность не "дотягивается" до квадратов K, на которых только и могут отличаться конфигурации $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$. Поэтому состояния ее окрестности в данных конфигурациях равны, а следовательно, и перейдет она в одно и то же состояние.

Итак, имеем $\Phi_{K''}(\tilde{f}_1) = \Phi_{K''}(\tilde{f}_2)$. Это означает, что число элементов в множестве значений оператора $\Phi_{K''}$ не превосходит числа классов эквивалентности состояний квадрата $\tilde{K}$, т.е. не превосходит $p^{N^2} \leq (k^{l^2} - 1)^{N^2}$.

С другой стороны, общее число состояний квадрата K'' равно $k^{lN-2m)^2}$. Рассмотрим отношение q верхней оценки числа элементов в множестве значений отображения $\Phi_{K''}$ к числу состояний квадрата K'':

$$q = \frac{(k^{l^2}-1)^{N^2}}{k^{(lN-2m)^2}} = \left(\frac{k^{l^2}-1}{k^{(l-2m/N)^2}}\right)^{N^2}.$$

Пусть $N \to \infty$. Тогда $l - 2m/N \to l$, и существует такое N, что $k^{l^2} - 1 < k^{(l-2m/N)^2}$, т.е. существует такое N, что $q < 1$. Для такого N не все состояния квадрата K'' попадут в множество значений оператора $\Phi_{K''}$, т.е. на этом квадрате будет иметься неконструируемая конфигурация. Теорема доказана.

Заметим, что если какие-то два состояния однородной структуры, переходят в одно и то же состояние, это еще не означает наличие у нее взаимно стираемых конфигураций. Контрпримером может служить переход в тождественно нулевое состояние как его самого, так и состояния, у которого все ячейки имеют значение 1, если функция переходов - сумма по модулю 2, а число ячеек в окрестности четное. Для наличия взаимной стираемости необходимо и достаточно, чтобы два различных "конечных" состояния, т.е. две конфигурации, перешли в одну и ту же конфигурацию.