5-я лекция курса "Теория дискретных функций"

(1-й курс; лектор - проф. А.С.Подколзин)

5-я лекция была прочитана до введения дистанционного обучения. Она посвящена доказательству алгоритмической разрешимости проблемы полноты для k-значных логик, а также доказательству существования для них критерия полноты в терминах предполных классов. Ниже приводится конспект этих доказательств. По сравнению с версией, излагавшейся на лекции, он несколько изменен. Другое определение последовательности Кузецова позволило упростить рассуждения. На экзамене можно пользоваться любой из версий.

Прежде всего, дадим одно новое определение. Пусть $\Sigma : S \to F$; $F \subseteq P_k$ - некоторая сигнатура. Определение формулы в сигнатуре Σ, данное на первой лекции, таково:

1. Если x_i - символ переменной, то однобуквенное слово x_i - формула в Σ.
2. Если $s \in S$, функция $f = \Sigma(s)$ зависит от n переменных, $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ - формулы в сигнатуре Σ, то слово $s(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ.

Индукцией по данному определению формулы определяем глубину формулы:

1. Если x_i - символ переменной, то глубина формулы x_i равна 0.
2. Если $s \in S$, функция $f = \Sigma(s)$ зависит от n переменных, $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ - формулы в сигнатуре Σ, причем m - наибольшая из глубин этих формул, то глубина формулы $s(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - равна $m + 1$.

Глубину формулы Φ будем обозначать $d(\Phi)$. Очевидно, что глубина формулы - это максимальная из длин цепочек "вложенных" друг в друга "операций" для нее.

Перейдем к задаче распознавания полноты в P_k.

Теорема. Существует алгоритм, распознающий полноту конечных систем функций в P_k.

Пусть $F \subseteq P_k$ - конечная система функций. Рассмотрим для нее какую-либо сигнатуру $\Sigma : S \to F$.

Определим последовательность $G_1, G_2, \dots$ множеств функций в P_k, зависящих от двух переменных. В качестве G_i берется множество всех функций, определяемых в сигнатуре Σ невырожденными формулами, содержащими только переменные x_1, x_2 и имеющими глубину, меньшую i. При определении функции каждая такая формула рассматривается относительно переменных x_1, x_2. Эту последовательность называем последовательностью Кузнецова.

Очевидно, $\emptyset = G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$. Так как число всех функций в P_k, зависящих от двух переменных, равно k^{k^2}, то $|G_i| \leq k^{k^2}$ для всех i, и указанная последовательность стабилизируется начиная с некоторого номера m: $G_m = G_{m+1} = \dots = G$. Будем называть G пределом последовательности Кузнецова.

При построении последовательности Кузнецова будем связывать с каждой функцией из G_i некоторую формулу, содержащую только переменные x_1, x_2 и имеющую глубину, меньшую i, которая эту функцию реализует. Рассмотрим произвольную функцию f из G_{i+1}, не вошедшую в G_i. Она должна определяться некоторой формулой Φ вида $s(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, содержащей только переменные x_1, x_2 и имеющей глубину, меньшую $i + 1$. Тогда глубина каждой формулы Φ_j меньше i, т.е. она является либо переменной, либо определяет функцию $g_j \in G_i$. Но с этими функциями при построении G_i мы уже связали какие-то определяющие их формулы Φ'_j, возможно, отличающиеся от формул Φ_j. Очевидно, что при замене в формуле Φ отличных от переменных формул Φ_j на реализующие те же самые функции формулы Φ'_j мы получим формулу Φ', определяющую ту же самую функцию, что и формула Φ.

Это означает, что для получения G_{i+1} из G_i нам достаточно рассмотреть только всевозможные формулы Φ' вида $s(\Phi'_1, \ldots, \Phi'_n)$, где $s \in S$, а $\Phi'_1, \ldots, \Phi' n$ - переменные либо формулы, сопоставленные функциям из G_i. Те из формул Φ', которые дадут новые функции, не встречавшиеся в G_i, сопоставляются этим функциям, а сами функции добавляются к G_i. Повторения отбрасываются.

Таким образом, получаем алгоритм построения множеств $G_i; i = 1, 2, 3, \ldots$. Так как G_{i+1} однозначно определяется по G_i, эту последовательность достаточно прослеживать до первого совпадения ее членов. Далее она стабилизируется. Очевидно, первое совпадение произойдет за конечное число шагов, т.е. получаем алгоритм определения предела G последовательности Кузнецова.

Предположим, что функция Вебба $V_k(x_1, x_2)$ принадлежит пределу G. Тогда, по определению последовательности Кузнецова, она задается формулой в сигнатуре Σ, т.е. получается суперпозициями из F, и F полно.

Обратно, пусть F полно. Тогда функция Вебба задается некоторой формулой в сигнатуре Σ, имеющей ровно две существенные переменные. Переобозначим эти переменные на x_1, x_2, а все несущественные переменные заменим на x_1. Если эту формулу рассматривать относительно x_1, x_2, то, очевидно, она снова будет определять функцию Вебба. Однако, по нашему определению, такая формула определяет функцию из множества G_{i+1}, где i - глубина формулы. Следовательно, функция Вебба попадает в множество G.

Итак, алгоритм распознавания полноты конечной системы функций в P_k состоит в построении по ней последовательности Кузнецова и проверке вхождения функции Вебба в предел этой последовательности. Если входит, то система полна, иначе - неполна. Теорема доказана.

Заметим, что операции переобозначения переменных и подстановки вместо несущественных переменных, все-таки, должны быть определены, а соответствующие эквивалентности формул - доказаны. Однако, такие доказательства являются предметом математической логики, где они известны как лемма о замене и лемма о подстановке. Они выходят за рамки данного курса, и мы будем считать свойства этих операций очевидными.

Заметим также, что почти все приведенные выше рассуждения сохраняются и для бесконечных систем F, так что полнота системы оказывается эквивалентна вхождению функции Вебба в предел последовательности Кузнецова. Однако, в этом случае говорить об алгоритме нельзя, так как входные данные и промежуточные результаты бесконечны.

Теорема. Из каждой полной в P_k системы функций можно выделить конечную полную подсистему.

Это утверждение очевидно. Если система F полна, то функцию Вебба можно выразить формулой в сигнатуре для F. Рассматриваем конечное подмножество функций, использованных в данной формуле. Оно и будет полным.

Переходим к установлению того, что в P_k существует критерий полноты в терминах предполных классов, аналогичный критерию полноты в алгебре логики. Впервые описание предполных классов для $k > 2$ было получено С.В.Яблонским который нашел все предполные классы в P_3. В дальнейшем различными исследователями находились отдельные серии предполных классов в $P_k, k > 3$. Окончательное описание всех предполных классов в P_k было получено И.Розенбергом. Даже одно лишь их перечисление слишком громоздко для данного курса. Число этих классов быстро растет с ростом k. Поэтому мы приведем лишь результат А.В.Кузнецова о существовании конечной системы предполных классов в P_k, дающей критерий полноты. Он явился стартовой точкой на пути к их явному описанию.

Начнем с определений.

Функции $g_i^p(x_1, \ldots, x_p)$; $i = 1, \ldots, p$, - называются селекторными функциями. Они выбирают заданный разряд из набора значений аргументов.

Пусть K - некоторое множество функций $h(x_1, \ldots, x_p)$ из P_k, зависящих от заданного числа переменных p и содержащее все селекторные функции от p переменных. Скажем, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет множество K, если для любых функций $h_1, \ldots, h_n$ из K выполнено:

$f(h_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_p)) \in K$.

Пример. Пусть $k = 2, p = 1, K = \{x, \bar{x}\}$. Иными словами, в K входят функции $x^\sigma; \sigma \in \{0, 1\}$. Свойство сохранения множества K функцией f означает, что для любых $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ из E_2 имеет место:

$f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}) = x^\sigma$

при некотором σ. Подставим в это тождество поочередно значения 1 и 0:

$f(1^{\sigma_1}, \ldots, 1^{\sigma_n}) = 1^\sigma$, что эквивалентно равенству:

$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sigma$;

$f(0^{\sigma_1}, \ldots, 0^{\sigma_n}) = 0^\sigma$, что эквивалентно равенству:

$f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = \overline{\sigma}$).

Объединяя полученные два равенства, имеем:

$f(\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = \overline{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)}$, т.е. свойство соахранения класса K эквивалентно свойству самодвойственности функции.

Пусть K - некоторое множество функций $h(x_1, \ldots, x_p)$ из P_k, зависящих от заданного числа переменных p и содержащее все селекторные функции от p переменных. Через $U[K]$ обозначим множество всех функций в P_k, сохраняющих K.

Лемма 1. Класс $U[K]$ замкнут.

Лемма доказывается точно так же, как доказывалась лемма о замкнутости класса T_0. Рассматриваются операции суперпозиции: операция подстановки переменных, операция подстановки одной функции в другую, а также операция добавления и удаления несущественных переменных. В каждом случае свойство новой функции сохранять класс K очевидным образом вытекает из этого свойства для исходных функций.

Лемма 2. Пусть K - некоторое множество функций от двух переменных, содержащее все селекторные функции от двух переменных и не содержащее функции Вебба. Если $F \subseteq U[K]$, то F неполна.

Введем для F какую-либо сигнатуру Σ и рассмотрим последовательность Кузнецова $G_1, G_2, \ldots$. Покажем, что для всех i выполнено $G_i \subseteq K$. Имеем: $G_1 = \emptyset \subseteq K$. Пусть уже доказано $G_i \subseteq K$.

Рассмотрим функцию h из G_{i+1}, не входящую в G_i. Она задается формулой глубины i в сигнатуре Σ, имеющей вид $f(A_1 \ldots A_n)$, где $f \in F$, а каждое A_j - либо формула, глубина которой меньше i, либо переменная x_1, либо переменная x_2. В первом случае A_j реализует некоторую функцию $h_j(x_1, x_2)$ из G_i. Во втором случае положим $h_j(x_1, x_2) = g_1^2(x_1, x_2)$, в третьем - $h_j(x_1, x_2) = g_2^2(x_1, x_2)$. Так как $G_i \subseteq K$, то при всех $j = 1, \ldots, n$ получаем, что $h_j \in K$. Но формула $f(A_1 \ldots A_n)$ реализует функцию $h(x_1, x_2) = f(h_1(x_1, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2))$. Так как f сохраняет множество K, то и функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит K. Таким образом, $G_{i+1} \subseteq K$.

Из доказанного вытекает, что предел последовательности Кузнецова - подмножество множества K, т.е. не содержит функции Вебба. Следовательно, система F неполна. Лемма доказана.

Лемма 3. Если система F функций k-значной логики неполна, то в P_k существует множество K функций от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции Вебба, такое, что $F \subseteq U[K]$.

Снова введем для F какую-либо сигнатуру Σ и рассмотрим последовательность Кузнецова $G_1, G_2, \ldots$. Пусть $G_m = G_{m+1} = \ldots$. Так как F неполна, то $\neg(V_k \in K)$. Положим $K = G_m \cup \{g_1^2, g_2^2\}$. Очевидно, K не содержит функции Вебба V_k.

Покажем, что F сохраняет K. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$; $h_1, \ldots, h_n \in K$. Рассмотрим функцию $h(x_1, x_2) = f(h_1(x_1, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2))$. Пусть s - символ, обозначающий функцию f в сигнатуре Σ. Если $h_j(x_1, x_2) \in G_m$, то она определяется некоторой формулой A_j в сигнатуре Σ, глубина которой меньше m. Если $h_j(x_1, x_2)$ - селекторая функция $g_1^2(x_1, x_2)$, то возьмем в качестве A_j переменную x_1; если $h_j(x_1, x_2)$ - селекторая функция $g_2^2(x_1, x_2)$, то возьмем в качестве A_j переменную x_2. Тогда функция $f(h_1(x_1, x_2), \ldots, h_n(x_1, x_2))$ будет определяться формулой $s(A_1, \ldots, A_n)$. Глубина этой формулы меньше $m + 1$, так что реализуемая ею функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит G_{m+1}. Однако, $G_{m+1} = G_m \subseteq K$, и $h \in K$. Таким образом, F сохраняет K, и $F \subseteq U[K]$. Лемма доказана.

Теорема (А.В.Кузнецов) Можно построить систему $M_1, \ldots, M_s$ замкнутых классов k - значной логики, такую, что ни один из них не содержится в других, причем произвольная система $F \subseteq P_k$ полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов $M_1, \ldots, M_s$.

Рассмотрим все классы $N_1, \ldots, N_q$ вида $U[K]$, где K - множество функций от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции Вебба. По лемме 1 они замкнуты. Если система $F \subseteq P_k$ неполна, то по лемме 3 существует такой класс N_i, что $F \subseteq N_i$. Если для некоторого класса N_i имеет место $F \subseteq N_i$, то по лемме 2 система F неполна. Таким образом, полнота системы F эквивалентна невключению ее ни в один из классов $N_1, \ldots, N_q$. Удалив из системы $N_1, \ldots, N_q$ те классы, которые содержатс в других, получим искомую систему $M_1, \ldots M_s$.

Заметим что $M_1, \dots, M_s$ - все предполные классы в P_k. Это доказывается так же, как доказывалось, что T_0, T_1, L, S, M - все предполные классы в P_2.