1 Формат дистанционного обучения

Один раз в неделю на сайте кафедры математической теории интеллектуальных систем (сокращенно МАТИС) будет выкладываться очередная лекция курса "Теория дискретных функций". Разбиение материала на лекции приблизительно будет соответствовать тому, которое сложилось за последние годы. Вопросы по лекциям можно пересылать на адрес электронной почты tdf2020@yandex.ru. Ответы на них будут размещаться перед началом текста очередной лекции. Практические занятия по курсу будут дистанционно проводиться в той форме, которую выберут руководители занятий. Фактически, они уже ведутся.

Лектор заранее извиняется за возможные описки при наборе текста.

2 Краткое содержание предыдущей лекции

На прошлой лекции было установлено существование алгоритма, распознающего полноту конечных систем функций k - значной логики. По заданному конечному множеству F таких функций строилась последовательность $G_1, G_2, \ldots$ множеств функций, зависящих от двух переменных. Каждая функция множества G_i определялась невырожденной формулой в сигнатуре Σ над F, имеющей только переменные x_1 и x_2. Было замечено, что эта последовательность (последовательность Кузнецова) стабилизируется: существует такое n, что $G_n = G_{n+1} = \ldots = G$. Множество G называется пределом последовательности Кузнецова. Алгоритм проверяет, принадлежит ли функция Вебба $V_k(x_1, x_2)$ пределу G. Было доказано, что если принадлежит, то система F полна, иначе - неполна.

Было введено понятие сохранения заданной функцией f k- значной логики некоторого множества функций. Для этого рассматривались так называемые селекторные функции, определяемые равенством $g_i^p(x_1, \ldots, x_p) = x_i$. Пусть K - множество функций $h(x_1, \ldots, x_p)$ от p переменных, содержащее все селекторные функции от p переменных. Говорим, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет множество K, если для любых функций $h_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_p)$ из K выполнено условие:
$f(h_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_p)) \in K$.

Класс всех функций k- значной логики, сохраняющих множество K, обозначим $U[K]$. Были доказаны следующие леммы:

Лемма 1. Если K - некоторое множество функций k-значной логики, зависящих от p переменных, то класс $U[K]$ замкнут.

Лемма 2. Пусть K - некоторое множество функций k-значной логики от двух переменных, содержащее обе селекторные функции, причем $\neg(V_k \in K)$. Если $F \subseteq U[K]$, то множество F неполно.

Лемма 3. Если множество F функций k-значной логики неполно, то существует такое множество K функций k-значной логики, зависящих от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции V_k, что $F \subseteq U[K]$.

3 Лекция 6

Оказывается, что в k-значных логиках существует аналог критерия полноты, доказанного ранее для алгебры логики. Он формулируется в терминах "максимальных" по включению замкнутых классов, отличных от P_k. Этот критерий, известный как теорема Розенберга, значительно сложнее своего двузначного аналога. Первым шагом в направлении к его получению явилось описание С.В.Яблонским всех предполных классов трехзначной логики. В дальнейшем различными исследователями были найдены многие семейства предполных классов для произвольного k, а завершающую картину дала теорема Розенберга. Число предполных классов в P_k крайне быстро растет с ростом k.

В нашем курсе мы ограничимся лишь теоремой о существовании критерия полноты в терминах предполных классов, аналогичного теореме Поста. Эта теорема принадлежит А.В.Кузнецову, и именно с нее началось продвижение к полному описанию таких классов.

Теорема(А.В.Кузнецов) Можно построить конечную систему M_1, M_s замкнутых классов k-значной логики, такую, что ни один из них не содержится в другом, причем система F функций k - значной логики полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов $M_1, \dots, M_s$.

Фактически, все доказательство сосредоточено в приведенных выше леммах 1 - 3. Рассмотрим всевозможные классы $N_1, \dots, N_q$ вида $U[K]$, где K - множество функций k-значной логики от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции V_k. Очевидно, множество таких классов конечно. По лемме 1, все эти классы замкнуты. Если система F неполна, то по лемме 3 существует класс N_i, в котором она содержится. Обратно, если существует класс N_i, в котором система F содержится, то по лемме 2 она неполна. Таким образом, система F полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов $N_1, \dots, N_q$. Однако, некоторые из данных классов могут оказаться подмножествами других. Удалив из списка $N_1, \dots, N_q$ те классы, которые содержатся в других классах того же списка, получим искомую систему $M_1, \dots, M_s$. Теорема доказана.

3.1 Задача об относительной полноте

Критерий полноты системы функций F может существенно упроститься, если предполагать, что в F уже содержится некоторое заданное множество функций M. Тогда задача ставится так: "что надо добавить к M, чтобы получить полную систему ? ". Это - так называемая задача об относительной полноте, т.е. полноте относительно системы M. Мы рассмотрим один частный случай задачи об относительной полноте, когда в качестве M фигурируют все одноместные функции k - значной логики. Она была решена Слупецким. Оказалось, что в случае $k > 2$ для полноты системы, содержащей все одноместные функции, необходимо и достаточно, чтобы она содержала принимающую все k значений функцию, существенно зависящую более чем от одной переменной. Мы приводим далее доказательство теоремы Слупецкого, предложенное С.В.Яблонским. Из доказательства будет следовать даже более сильное утверждение (теорема С.В.Яблонского): достаточно брать не все одноместные функции в P_k, а лишь те из них, которые принимают не более $k-1$ значения. Критерий Слупецкого в этом случае сохраняется. Заметим, что в случае $k = 2$ утверждение теоремы Слупецкого неверно. Здесь легко строится контрпример.

Формулировке и доказательству теоремы предпошлем определение и ряд лемм.

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ k - значной логики называется существенной, если она имеет более одной существенной переменной.

Лемма 1 (о трех наборах). Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ - существенная функция из P_k, принимающая l значений, где $l \geq 3$. Пусть x_1 - ее существенная переменная. Тогда существуют наборы $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения.

Так как x_1 - существенная переменная, то существуют такие значения $\alpha_2, \dots, \alpha_n$, что в следующем списке S:

$f(0, \alpha_2, \dots, \alpha_n), f(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \dots, f(k-1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

- имеется более одного значения. Рассмотрим два случая:

1. В списке S встречается меньше, чем l значений. Тогда можно рассмотреть набор, на котором функция f принимает значение, не встречающееся в списке S. Обозначим этот набор, например, $(\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Используемые здесь переменные пока не встречались, и их можно использовать, хотя на первый взгляд такие обозначения и выглядят несколько странно. Очевидно, $f(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Выберем в качестве β любое, такое, что $f(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Так как в списке S более одного элемента, то такое найдется. Но $f(\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ не входит в список S, так что получаем: $f(\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \neq f(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, и рассмотрение случая завершено.

2. В списке S встречаются все l значений. Так как функция f существенная, то существует такое α, что $f(\alpha, x_2, \dots, x_n)$ не является константой. Иначе значение функции f однозначно определялось бы значением переменной x_1. Следовательно, существуют такие значения $\gamma_2, \dots, \gamma_n$, что $f(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq f(a, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Так как $l \geq 3$, то в списке S имеется не менее трех значений. Поэтому найдется такое β, что $f(\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ отлично и от $f(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, и от $f(a, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Что и требовалось.

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ - существенная функция в P_k, принимающая хотя бы l значений, где $l \geq 3$, то существуют подмножества $G_1, \dots, G_n$ множества E_k, такие, что $1 \leq |G_1| \leq l-1, \dots, 1 \leq |G_n| \leq l-1$, причем на множестве $G_1 \times \dots \times G_n$ функция f принимает хотя бы l значений.

Забегая вперед, заметим, что лемма понадобится при доказательстве теоремы Слупецкого для обеспечения индуктивного перехода от функций, принимающих $l-1$ значение к функциям, принимающим l значений.

Без ограничения общности можно предположить, что x_1 - существенная переменная функции f. По лемме 1, существуют наборы $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения. Рассмотрим наборы $\delta_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$; $i = 1, \dots, l-3$, на которых функция f принимает остальные $l-3$ значения. В качестве G_j выберем множество j-х разрядов наборов $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \delta_1, \dots, \delta_{l-3}$. Как легко видеть, получим:

$G_1 = \{\alpha, \beta, \delta_{11}, \dots, \delta_{l-3,1}\}, G_2 = \{\alpha_2, \gamma_2, \delta_{12}, \dots, \delta_{l-3,2}\}, \dots, G_n = \{\alpha_n, \gamma_n, \delta_{1n}, \dots, \delta_{l-3,n}\}$

Таким образом, каждое из множеств G_j непусто и имеет не более $l-1$ элемента. Здесь важную роль сыграл тот факт, что для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ три набора $(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ имеют на j -й позиции лишь два различных значения.

По выбору множеств G_j, те указанные выше l наборов, на которых функция f принимает l различных значений, принадлежат прямому произведению $G_1 \times \ldots \times G_n$. Вообще говоря, на этом произведении функция f может принимать и другие значения. Лемма доказана.

Для формулировки следующей леммы введем понятие квадрата в k- значной логике. Будем называть квадратом любую четверку наборов вида $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, y, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) | x \in \{p_1, p_2\}, y \in \{q_1, q_2\}\}$. Иными словами, все разряды, кроме i-го и j-го, в квадрате зафиксированы, а i-й и j-й разряды могут принимать каждый одно из двух значений. В случае i-го разряда это значения p_1, p_2; в случае j-го - q_1, q_2.

Лемма 3. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - существенная функция в P_k, принимающая l значений, причем $l \geq 3$. Тогда существует квадрат, на котором f принимает некоторое свое значение ровно в одной точке.

Забегая вперед, заметим, что такой квадрат позволит нам "извлечь" из функции f некоторый аналог дизъюнкции, которая как раз и характеризуется свойством принимать значение 0 ровно в одной точке.

Снова без ограничения общности предполагаем, что x_1 - существенная переменная функции f. По лемме 1, существуют три набора $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения. Рассмотрим последовательность пар:

$P_1 = \{(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$,

$P_2 = \{(\alpha, \gamma_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n), (\beta, \gamma_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)\}$,

$\ldots \; \ldots \quad \ldots \; \ldots$

$P_i = \{(\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)\}$

$\ldots \; \ldots \quad \ldots \; \ldots$

$P_n = \{(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), (\beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)\}$.

Принцип построения пар очевиден: в паре P_i значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_i$ заменяются на $\gamma_2, \ldots, \gamma_i$.

На наборах пары P_1 функция f принимает два различных значения - a и b. На первом наборе пары P_n она принимает значение, отличное от a, b. Значение, принимаемое ею на втором элементе пары P_n, может совпасть с a либо с b, но не одновременно с обоими. Следовательно, на паре P_n функция f не принимает хотя бы одно из значений a, b. Двигаясь по приведенному выше списку пар сверху вниз, мы должны достигнуть такого i, что на паре P_i функция f принимает оба значения a, b, а на паре P_{i+1} уже не принимает хотя бы одного из них.

Заметим теперь, что объединение пар P_i, P_{i+1} представляет собой квадрат $\{(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_i, y, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n) | x \in \{\alpha, \beta\}, y \in \{\alpha_{i+1}, \gamma_{i+1}\}\}$. То из значений a, b, которое не принимается функцией f на паре P_{i+1}, и будет приниматься ею на указанном квадрате ровно в одной точке. Лемма доказана.

Теорема (Слупецкий) Пусть система F функций k-значной логики, где $k \geq 3$, содержит все функции одной переменной. Тогда для полноты F необходимо и достаточно, чтобы она содержала существенную функцию, принимающую все k значений.

Докажем сначала необходимость. Пусть F не содержит существенной функции, принимающей все k значений. Покажем, что операции суперпозиции не позволяют получить такую функцию из функций, которые либо не принимают все k значений, либо не являются существенными:

1. Операция подстановки переменных.

   Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_n$ определена как $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Если функция f не принимает все k значений, то и g не будет их принимать. Если f имела единственную существенную переменную x_m, то g будет иметь единственную существенную переменную x_{i_m}.

2. Операция подстановки одной функции в другую.

   Пусть функция $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1})$ определена как $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$. Если f не принимает все k значений, то и h их не принимает. Если f принимает все k значений, то она должна иметь единственную существенную переменную. Если ее существенная переменная - не x_n, то она же будет единственной существенной переменной у h. Если единственной существенной переменной функции f служит x_n, то рассматриваем функцию g. Если она принимает не все k значений, то и h не будет принимать k значений. Если функция g принимает все k значений, то она имеет единственную существенную переменную. Но тогда она окажется единственной существенной переменной и для h.

3. Операция добавления либо удаления несущественных переменных. Этот случай очевиден.

Так как суперпозициями из F нельзя получить существенной функции, принимающей все k значений, то она неполна.

Перейдем к доказательству достаточности.

Пусть F имеет существенную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающую все k значений. По лемме 3, существует квадрат

$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{j-1}, y, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) | x \in \{p_1, p_2\}, y \in \{q_1, q_2\}\}$,

на котором функция f принимает некоторое свое значение ровно в одной точке. Обозначим это значение a. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi_0(x)$, равную 0 при $x = a$ и равную 1 в остальных случаях. Так как она зависит от одной переменной, то принадлежит множству F. Заметим, что все константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{j-1}$, $\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$, как функции одной переменной, тоже принадлежат F. Поэтому следующая функция

$g(x_1, x_2) = \varphi_0(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_1, \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{j-1}, x_2, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n))$

- получена суперпозициями над F.

Функция g на квадрате $\{(p_1, q_1), (p_2, q_1), (p_2, q_1), (p_2, q_2)\}$ принимает значения 0 и 1, причем значение 0 она принимает в единственной точке. Без ограничения общности можно считать, что $g(p_1, q_1) = 0$. В остальных точках квадрата функция g равна 1.

Введем вспомогательную функцию $\varphi_1(x)$, равную p_1 при $x = 0$ и равную p_2 в остальных случаях. Введем также функцию $\varphi_2(x)$, равную q_1 при $x = 0$ и равную q_2 в остальных случаях. Обе эти функции зависят от одной переменной и принадлежат F.

Поэтому функция $g'(x_1, x_2) = g(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ получается суперпозициями над F. Она обращается в 0 при $x_1 = x_2 = 0$, а в остальных случаях она равна 1. Таким образом, данная функция совпадает с дизъюнкцией, если значения ее аргументов ограничить множеством $\{0, 1\}$. Будем обозначать ее $x_1 \vee_{01} x_2$.

Функция $j_i(x)$, равная 1 при $x = i$ и равная 0 в остальных случаях, зависит от одной переменной и поэтому входит в F. В частности, функция $j_0(x)$, совпадающая с отрицанием на множестве $\{0, 1\}$, входит в F.

Используя законы Моргана, нетрудно теперь получить функцию в P_k, ограничение которой на множество $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ совпадает с конъюнкцией:

$g''(x_1, x_2) = j_0(j_0(x_1) \vee_{01} j_0(x_2)) \quad (\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}})$

Будем обозначать эту функцию $x_1 \&_{01} x_2$.

Пусть теперь $h(x_1, \ldots, x_m)$ - произвольная функция в P_k, принимающая только значения 0 и 1. Покажем, что ее можно получить суперпозициями над F. Используем обобщение совершенной дизъюнктивной нормальной формы для P_k:

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} j_{\sigma_1}(x_1) \& \ldots \& j_{\sigma_m}(x_m) \& h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$$

Здесь символом $\bigvee$ обозначен максимум, символом & - минимум. Максимум берется по всем наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ элементов E_k.

Заметим, что все значения $j_{\sigma_i}(x_i)$ и $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ равны 0 либо 1. Поэтому в выражении для h можно вместо функций максимума и минимума использовать $\vee_{01}$ и $\&_{01}$:

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{\substack{01 \\ (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)}} j_{\sigma_1}(x_1) \&_{01} \ldots \&_{01} j_{\sigma_m}(x_m) \&_{01} h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$$

С учетом того, что константы $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ принадлежат F, приведенная формула выражает h через функции, которые получены суперпозициями над F. Таким образом, любая функция из P_k, принимающая только значения 0 и 1, получается суперпозициями над F. Если теперь $h(x_1, \ldots, x_m)$ - функция из P_k, принимающая только какие-то два заданные значения a и b, то можно рассмотреть функцию $h'(x_1, \ldots, x_m)$, принимающую значение 0, если $h(x_1 \ldots x_m)$ равно a, и значение 1 в противном случае. Рассмотрим также принадлежащую F функцию $\psi(x)$, равную a, если $x = 0$, и равную b в противном случае. Очевидно, $h(x_1, \ldots, x_m) = \psi(h'(x_1, \ldots, x_m))$, причем как h', так и ψ получены суперпозициями над F. Это означает, что любая функция в P_k, принимающая не более двух значений, получается суперпозициями над F.

Доказанное утверждение можно рассматривать как базис индукции. Предположим теперь, что для некоторого l, $3 \leq l \leq k$, установлено, что все функции из P_k, принимающие не более, чем $l - 1$ значение, получаются суперпозициями над F. Покажем, что это же верно и для всех функций, принимающих не более, чем l значений.

Снова рассмотрим в F существенную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающую k значений. По лемме 2, существуют подмножества $G_1, \ldots, G_n$ множества E_k, такие, что $1 \leq |G_1| \leq l - 1, \ldots, 1 \leq |G_n| \leq l - 1$, причем на множестве $G_1 \times \ldots \times G_n$ функция f принимает хотя бы l значений. Обозначим эти l значений $a_1, \ldots, a_l$. Рассмотрим наборы из $G_1 \times \ldots \times G_n$, на которых функция f принимает данные значения:

$a_1 = f(a_{11}, \ldots, a_{1n})$

$\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$

$a_l = f(a_{l1}, \ldots, a_{ln})$

Заметим, что $\{a_{11}, \ldots, a_{l1}\} \subseteq G_1, \ldots, \{a_{1n}, \ldots, a_{ln}\} \subseteq G_n$.

Возьмем теперь произвольную функцию $h(x_1, \ldots, x_m)$ из P_k, принимающую только значения $a_1, \ldots, a_l$, и попробуем подобрать вспомогательные функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$ так, чтобы имело место тождество $h(x_1, \ldots, x_m) = f(\psi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_m))$. Будем делать это, используя указанные выше l равенств.

Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ значений переменных $x_1, \ldots x_m$. На этом наборе функция h принимает какое-то значение a_i. Определим значения $\psi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \psi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ равными, соответственно, $a_{i1}, \ldots, a_{in}$. Тогда получим: $f(\psi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \ldots, \psi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)) = f(a_{i1}, \ldots, a_{in}) = a_i$.

Таким образом, значения функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ определены для всех наборов значений их аргументов. При этом тождество $h(x_1, \ldots, x_m) = f(\psi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_m))$ выполнено "по построению".

Заметим, что функция ψ_i принимает в качестве своих значений только элементы $\{a_{1i}, \ldots, a_{li}\}$, которые принадлежат множеству G_i. Поэтому данная функция принимает не более чем $l-1$ значение, и по предположению индукции получается суперпозициями над F. Ввиду указанного тождества, функция h тоже получается суперпозициями над F.

Итак, любая функция из P_k, принимающая только значения $a_1, \ldots, a_l$, получается суперпозициями над F. Если $l = k$, то это уже означает, что любая функция из P_k получается суперпозициями над F.

Пусть $l < k$. Рассмотрим произвольную функцию h из P_k, принимающую не более чем l значений. Пусть ее значения принадлежат списку $b_1, \ldots, b_l$. Рассмотрим функцию h', значение которой на произвольном наборе получается из значения функции h на этом же наборе заменой b_i на a_i. Функция h' получается суперпозициями над F. Определим функцию $\psi(x)$, принимающую в точке a_i значение b_i, а в остальных точках равную 0. Легко видеть, что $h(x_1, \ldots, x_m) = \psi(h'(x_1, \ldots, x_m))$, т.е. h получается суперпозициями над F.

Это завершает доказательство шага индукции. При $l = k$ получаем, что система F полна. Теорема доказана.

Предложенное С.В. Яблонским доказательство выявило тот факт, что в действительности для обеспечения полноты F использовались не все одноместные функции, а только те, которые принимают не более $k-1$ значения. Заметим, что "переходники" ψ, переводящие a_i в b_i, были нужны лишь при $l < k$. Отсюда получается следующий результат:

Теорема(С.В.Яблонский) Пусть система F функций k-значной логики, где $k \geq 3$, содержит все функции одной переменной, принимающие не более $k-1$ значения. Тогда для полноты F необходимо и достаточно, чтобы она содержала существенную функцию, принимающую все k значений.