О полноте, A-полноте и τ-полноте в классе автоматных отображений

В. А. Буевич

Одной из важных проблем, рассматриваемых в математической кибернетике, является проблема полноты для различных функциональных систем. Каждая функциональная система (ф. с.) представляет собой множество функций и множество операций над этими функциями. Проблема полноты для ф. с. состоит в описании всех таких множеств функций, используя которые, с помощью операций данной ф. с. можно выразить все принадлежащие ей функции.

Центральное место среди ф. с. принадлежит итеративным ф. с., представляющим собой множество дискретных функций с операциями итерации — суперпозиции, обратной связи, а также их модификациями [1–14]. Важнейшими примерами итеративных ф. с. являются конечнозначные логики и ф. с. автоматных отображений.

Для конечнозначных логик — ф. с. P_k, усилиями многих авторов (Е. Пост, С. В. Яблонский, А. И. Мальцев, Ло-Чжу-Кай, И. Розенберг) проблема полноты была решена. В явном виде были построены все предполные классы в P_k, образующие минимальную критериальную систему для распознавания полноты множеств функций конечнозначнных логик [1–5, 7–11]. Важно отметить, что для явного задания предполных классов в P_k был использован аппарат сохранения функциями конечнозначных логик отношений (предикатов). Именно на этом пути было проведено завершающее построение множества всех предполных классов в конечнозначных логиках [7, 8].

Проблема полноты для ф. с. автоматных отображений исследовалась в работах [9–12, 15, 17–27]; при этом в качестве исходной модели рассматривалась ф. с. $P_{\text{о.д.}}$, элементами которой являются конечно-автоматные или ограниченно-детерминированные функции (о.-д.

функции), а операциями — операции суперпозиции и обратной связи. В силу того, что объекты ф. с. $P_{\text{о.д.}}$ и используемые в ней операции отражают реальную ситуацию, проблема полноты в классе автоматных отображений допускает много содержательных модификаций.

Проблема полноты в ее наиболее общей (и в наиболее абстрактной) постановке формулируется следующим образом. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_{\text{о.д.}}$ является полным тогда и только тогда, когда его замыкание относительно операций суперпозиции и обратной связи — множество $[\mathfrak{M}]$, совпадает с $P_{\text{о.д.}}$. В работах [9–12, 15] исследовался вопрос о существовании эффективного критерия полноты в ф. с. $P_{\text{о.д.}}$ Следует отметить, что ф. с. $P_{\text{о.д.}}$ является конечнопорожденной [9–12] и, так же, как в конечнозначных логиках, множество всех предполных в $P_{\text{о.д.}}$ классов образует минимальную критериальную систему. Отсюда следует, что в принципе критерий полноты в $P_{\text{о.д.}}$ может быть сформулирован в терминах предполных классов. Однако, как показано В. Б. Кудрявцевым [9–11], мощность множества предполных классов в $P_{\text{о.д.}}$ равна континууму и, таким образом, эффективного критерия полноты для о.-д. функций в этих терминах существовать не может. Более того, М. И. Кратко [15] установлено, что не существует алгоритма распознавания полноты конечных систем о.-д. функций.

В силу своего определения [2, 10, 11] о.-д. функции являются бесконечнозначными и даже континуумзначными функциями. Тем самым предполагается, что вычисляющие о.-д. функции автоматы «работают» бесконечно долго. Однако совершенно ясно, что каждое реальное кибернетическое устройство (в том числе, автомат) по истечение некоторого конечного промежутка времени прекращает свою «работу», то есть либо становится ненужным, либо переходит в начальное состояние. В связи с этим возникает

Проблема τ-полноты. *Пусть $\tau \geqslant 1$. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_{о.д.}$ называется τ-полным, если для любой о.-д. функции f из о.-д. функций множества $\mathfrak{M}$ с помощью операций суперпозиции и обратной связи можно получить о.-д. функцию f', совпадающую с f на всех наборах, составленных из слов длины τ.*

В [12, 21, 22] показано, что для решения проблемы τ-полноты операция «обратная связь» оказывается несущественной, то есть в данном случае эта операция выразима через операцию суперпозиции. Отсюда следует, что проблема полноты в конечнозначных логиках является частным случаем проблемы τ-полноты при $\tau = 1$. Вместе с тем, при $\tau \geqslant 2$ существует принципиальное различие между ф.с., элементами которой являются функции конечнозначных логик, с одной стороны, и отображения, осуществляемые о.-д. функциями на словах длины τ, с другой. Множество всех детерминированных отображений, рассматриваемых на словах длины τ, порождает специальное замкнутое подмножество в конечнозначной логике, существенно зависящее от параметра τ. Используя естественную аналогию между проблемой τ-полноты и проблемой полноты в конечнопорожденных замкнутых классах конечнозначных логик, можно ввести понятие τ-предполного класса и показать, что всякое множество о.-д. функций является τ-полным тогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном из τ-предполных классов; совокупность τ-предполных классов конечна, может быть описана эффективно и образует минимальную τ-критериальную систему [1], при этом множество 1-предполных классов изоморфно множеству предполных классов в конечнозначных логиках. Таким образом, для любого $\tau \geqslant 1$ существуют алгоритмы для распознавания τ-полноты конечных множеств о.-д. функций и каждый из этих алгоритмов может быть задан с использованием эффективно описываемых минимальных τ-критериальных систем.

С проблемой τ-полноты тесно связана

Проблема A-полноты (аппроксимационной полноты). *Множество $\mathfrak{M} \subseteq P_{о.д.}$ называется A-полным, если для любого $\tau \geqslant 1$ это множество является τ-полным.*

Из определения понятия A-полноты следует, что произвольную о.-д. функцию f можно «аппроксимировать» о.-д. функциями, принадлежащими замыканию A-полного множества $\mathfrak{M}$, то есть выбрать из $[\mathfrak{M}]$ последовательность о.-д. функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_\tau, \ldots$$

такую, что для любого $\tau \geqslant 1$ о.-д. функция f_τ совпадает с о.-д. функцией f на всех наборах, составленных из слов длины τ.

Очевидно, из полноты произвольного множества о.-д. функций следует его A-полнота и τ-полнота для любого $\tau \geqslant 1$. Обратное, вообще говоря, неверно. Существуют конечные τ-полные множества о.-д. функций, которые не являются A-полными и полными, а также существуют конечные A-полные множества о.-д. функций, не являющиеся полными.

Проблема A-полноты исследовалась в работах [19–23, 25–29]. Оказалось, что эта проблема алгоритмически неразрешима [19]. Тем не менее, критерий A-полноты может быть сформулирован в терминах A-предполных классов, число A-предполных классов счетно, множество A-предполных классов рекурсивно перечислимо, и каждый A-предполный класс может быть описан эффективно. Более того, каждый τ-предполный класс является A-предполным классом и наоборот: для любого A-предполного класса существует $\tau \geqslant 1$ такое, что этот A-предполный класс в то же время и τ-предполный. Отсюда следует, что проблема эффективного описания A-предполных классов сводится к проблеме эффективного описания τ-предполных классов для всех $\tau \geqslant 1$. Это позволяет вести поиск и находить примеры содержательных подклассов конечных систем о.-д. функций, для которых существует алгоритм для распознавания A-полноты [21, 22, 25].

Как было отмечено выше, для решения задачи о τ-полноте и, следовательно, для решения задачи об A-полноте операция «обратная связь» оказывается несущественной. Это означает, что если $\mathfrak{M}$ — A-полное множество, то для «аппроксимации» произвольной о.-д. функции достаточно использовать лишь о.-д. функции, являющиеся суперпозициями о.-д. функций из $\mathfrak{M}$. Вместе с тем, при «построении» самих о.-д. функций множества $\mathfrak{M}$, исходя из некоторой «канонической» полной системы о.-д. функций, может оказаться, что операция «обратная связь» должна быть использована по существу. В качестве такой «канонической» полной системы о.-д. функций обычно рассматривают [2, 12] систему, состоящую из двух о.-д. функций — о.-д. функции $g(x)$ («задержки») и о.-д. функции $f_{\text{и}}(x_1, x_2)$ (универсальной «истиностной» о.-д. функции).

Пусть $\tilde{P}_{\text{о.д.}} = [\{g(x), f_{\text{и}}(x_1, x_2)\}]$, где замыкание берется только относительно операции суперпозиции. О.-д. функции из множества $\tilde{P}_{\text{о.д.}}$

обычно называют *дефинитными ограниченно-детерминированными функциями* [12]. Таким образом, любая дефинитная о.-д. функция может быть получена из о.-д. функций $g(x)$ и $f_{\text{и}}(x_1, x_2)$ без использования операции «обратная связь». Заметим, что множество $\tilde{P}_{\text{о.д.}} \subseteq P_{\text{о.д.}}$ является A-полным и, следовательно, используя о.-д. функции из $\tilde{P}_{\text{о.д.}}$ можно «аппроксимировать» любую наперед заданную о.-д. функцию.

Рассмотрим функциональную систему $\tilde{P}_{\text{о.д.}}$, элементами которой являются дефинитные о.-д. функции, а в качестве операций рассматриваются только операции суперпозиции. Возникает вопрос: существует ли алгоритм для распознавания A-полноты конечных множеств в ф.с. $\tilde{P}$? Тем самым выясняется, каково влияние сугубо «автоматной» операции — операции «обратная связь» на наличие или отсутствие алгоритмов для решения задачи о полноте в функциональных системах автоматного типа. Имеет место

Теорема 1 ([27]). *Не существует алгоритма для распознавания A-полноты конечных множеств в функциональной системе $\tilde{P}_{o.\partial.}$*

Наряду с функциональной системой $\tilde{P}_{\text{о.д.}}$ рассмотрим функциональную систему $\hat{P}_{\text{о.д.}}$, элементами которой также являются дефинитные о.-д. функции, а операциями — не только операции суперпозиции, но и операция «обратная связь». Справедлива

Теорема 2 ([27]). *Не существует алгоритма для распознавания A-полноты конечных множеств в функциональной системе $\hat{P}_{o.\partial.}$*

Негативные с точки зрения эффективности результаты по проблемам полноты и A-полноты для о.-д. функций привели к необходимости более детального изучения проблемы τ-полноты. В отличие от проблем полноты и A-полноты в их общей постановке существуют эффективные процедуры для решения проблемы τ-полноты; критерий τ-полноты может быть сформулирован в терминах τ-предполных классов; множество τ-предполных классов для любого $\tau \geqslant 1$ конечно и может быть описано в терминах сохранения отношений; при этом совокупность отношений, классы сохранения которых совпадают с τ-предполными, распадается на семь семейств — семейства $\mathcal{Z}(\tau), \mathcal{J}(\tau), \mathcal{D}(\tau), \mathcal{M}(\tau), \mathcal{S}(\tau), \mathcal{L}(\tau)$ и $\mathcal{V}(\tau)$. Опишем эти семейства [20–23]. Заметим, что проблема τ-полноты для о.-д. функций и проблема τ-полноты для детерминированных функций эквивалентны. Поэтому проблему τ-полноты будем рассматривать в ф.с. $P_{\text{д}}^k$, элементами которой являются произвольные детерминированные функции (д. функции); при этом будем считать, что для $k \geqslant 2$ переменные д. функций принимают значения из E_k^∞ — множества всех бесконечных последовательностей, составленных из элементов $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Пусть $t \geqslant 1$, E_k^t — множество всех слов в алфавите E_k длины t. Каждое такое слово будем представлять в виде

$$a = (a(1) \ldots a(t)).$$

Пусть $E_k^* = \bigcup\limits_{t=1}^{\infty} E_k^t$. Очевидно, можно считать, что переменные д. функций, принадлежащих $P_{\text{д}}^k$, принимают значения из множества E_k^*. На множестве $P_{\text{д}}^k$ обычным образом вводятся операции суперпозиции, а также понятия замыкания подмножеств $P_{\text{д}}^k$ относительно этих операций.

Пусть $\tau \geqslant 1$. Д. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$ из $P_{\text{д}}^k$ называются *τ-эквивалентными*, если для любого набора $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов E_k^τ $f(a_1, \ldots, a_n)$ совпадает с $g(a_1, \ldots, a_n)$. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P_{\text{д}}^k$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *τ-полным*, если для любой д. функции $f \in P_{\text{д}}^k$ в замыкании множества $\mathfrak{M}$ содержится д. функция, τ-эквивалентная f. Множество $\mathfrak{N} \subset P_{\text{д}}^k$ называется *τ-предполным классом*, если $\mathfrak{N}$ не является τ-полным, но для любой д. функции $f \in P_{\text{д}}^k \setminus \mathfrak{N}$ множество $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ τ-полно.

Пусть $h \geqslant 1$, $T = (t_1, \ldots, t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел и $E_k^T = E_k^{t_1} \times \ldots \times E_k^{t_h}$. Любое непустое подмножество $R \subseteq E_k^T$ называется *отношением*, заданным на E_k^T, а число h — арностью этого отношения. Д. функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет отношение* R, если для любой совокупности $\{(a_1^1, \ldots, a_h^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_h^n)\}$ наборов из R набор $(f(a_1^1, \ldots, a_h^1), \ldots, f(a_1^n, \ldots, a_h^n))$ также принадлежит R. Множество всех д. функций, сохраняющих отношение R, обозначим через $U(R)$.

Пусть $k \geqslant 2$. Определим функцию π, отображающую множество $E_k^* \times E_k^*$ на $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть $a_1 \in E_k^{t_1}$, $a_2 \in E_k^{t_2}$, $t = \min\{t_1, t_2\}$. Тогда

$\pi(a_1, a_2) = 0$, если $a_1(1) = a_2(1), \ldots, a_1(t) = a_2(t)$;

$\pi(a_2, a_2) = i$ $(1 \leqslant i \leqslant t-1)$, если $a_1(1) = a_2(1), \ldots, a_1(t-i) = a_2(t-i)$, но $a_1(t-i+1) \neq a_2(t-i+1)$;

$\pi(a_1, a_2) = t$, если $a_1(1) \neq a_2(1)$.

Очевидно, если $\pi(a_1, a_2) = 0$ и $t_1 = t_2$, то $a_1 = a_2$, если $\pi(a_1, a_2) = 0$ и $t_1 < t_2$, то слово a_1 является «началом» слова a_2.

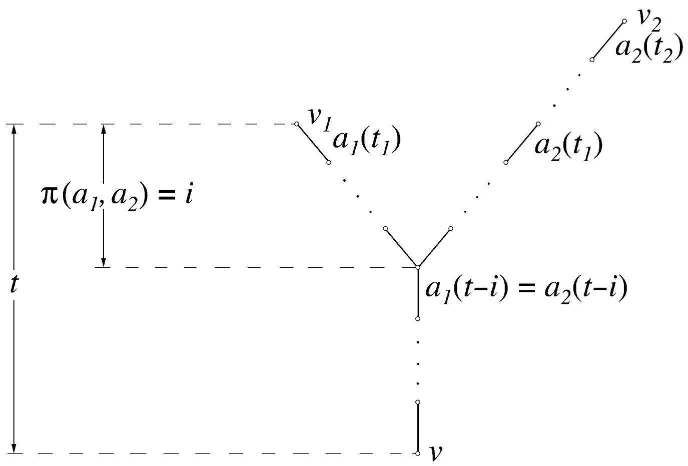

Рис. 1.

На рис. 1 представлена «геометрическая интерпретация» понятия функции π. Паре слов a_1 и a_2 такой, что $\pi(a_1, a_2) \neq 0$, поставлено в соответствие дерево D с корнем v и двумя концевыми вершинами v_1, v_2, причем каждому ребру дерева D приписано некоторое число из E_k. Цепь c_1, соединяющая корень дерева D с вершиной v_1, имеет длину t_1, а цепь c_2, соединяющая корень дерева D с вершиной v_2, имеет длину t_2. Ребрам $\rho_1^1, \ldots, \rho_{t_1}^1$ цепи c_1 и ребрам $\rho_1^2, \ldots, \rho_{t_2}^2$ цепи c_2 приписаны соответственно числа $a_1(1), \ldots, a_1(t_1)$ и $a_2(1), \ldots, a_2(t_2)$. Если $\pi(a_1, a_2) = t$, то цепи c_1 и c_2 не содержат общих ребер. Если $\pi(a_1, a_2) = i$ $(1 \leqslant i \leqslant t-1)$, то ребро ρ_1^1 совпадает с ребром ρ_1^2 и т. д., ребро ρ_{t-i}^1 совпадает с ребром ρ_{t-i}^2; однако ρ_{t-i+1}^1 и ρ_{t-i+1}^2 различны.

На множестве E_k^T определим *отношение предпорядка* «$\preccurlyeq$». Пусть $A = (a_1, \ldots, a_h)$, $A' = (a_1', \ldots, a_h')$ — элементы из E_k^T; $A' \preccurlyeq A$, если для любых i, j из $\{1, \ldots, h\}$ $\pi(a_i', a_j') \leqslant \pi(a_i, a_j)$; $A' \prec A$, если хотя бы для одной пары i,j из $\{1,\ldots,h\}$ $\pi(a'_i,a'_j) < \pi(a_i,a_j)$. Будем считать, что A' и A *совпадают по отношению предпорядка* «$\preccurlyeq$», если $A' \preccurlyeq A$ и $A \preccurlyeq A'$.

Пусть $A = (a_1,\ldots,a_h)$ — произвольный элемент из E_k^T. Множество всех A' из E_k^T таких, что $A' \preccurlyeq A$, *назовем π-множеством*, задаваемым элементом A, а число h — арностью этого π-множества. Для обозначения π-множеств будем использовать символ Δ. Любое π-множество Δ разбивается на два подмножества: $\Delta^{(M)}$ — множество всех максимальных по отношению предпорядка «$\preccurlyeq$» элементов из Δ, и $\Delta^{(m)}$ — множество всех оставшихся элементов. Таким образом, при $h = 1$ $\Delta^{(m)} = \varnothing$. Нетрудно видеть, что для любых i,j из $\{1,\ldots,h\}$ значение $\pi(a_i,a_j)$ не зависит от выбора элемента $(a_1,\ldots,a_h)$ из $\Delta^{(M)}$. Поэтому число $\pi(a_i,a_j)$ обозначим через $\pi_\Delta(i,j)$; π-множество Δ назовем *приведенным*, если для любых i,j из $(1,\ldots,h)$ таких, что $i \neq j$ имеет место неравенство $\pi_\Delta(i,j) \neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что всякое π-множество удовлетворяет следующему свойству:

$$\text{для любых } i,j,l \text{ из } \{1,\ldots,h\}, \text{ если } i \leqslant j \leqslant l, \text{ то} \\ \min\{t_i,t_l\} - \pi_\Delta(i,l) \leqslant \min\{t_i,t_j\} - \pi_\Delta(i,j). \quad \text{(I)}$$

Исходя из сформулированного выше свойства, каждому приведенному π-множеству можно дать наглядную «геометрическую интерпретацию». Пусть Δ — приведенное π-множество, причем $\Delta \subseteq E_k^T$. π-множеству Δ поставим в соответствие дерево D_Δ, ребрам которого приписаны числа из E_k. Дерево D_Δ имеет корень v и h концевых вершин — $v_1,\ldots,v_h$. Для любого $i \in \{1,\ldots,h\}$ длина цепи c_i, соединяющей корень дерева v с концевой вершиной v_i, равна t_i. Пусть i,j принадлежат $\{1,\ldots,h\}$, $t_{i,j} = \min\{t_i,t_j\}$. Тогда первые $t_{i,j}-\pi_\Delta(i,j)$ ребер в цепях c_i и c_j, считая от корня к концевым вершинам, совпадают, но $(t_{i,j} - \pi_\Delta(i,j) + 1)$-е ребро цепи c_i отлично от $(t_{i,j} - \pi_\Delta(i,j) + 1)$-ого ребра цепи c_j. Из неравенства (I) следует, что для любых i,j,l из $\{1,\ldots,h\}$ таких, что $i < j < l$, цепи c_i,c_j,c_l можно расположить на плоскости так, чтобы вершина v_i располагалась «левее» вершины v_j, а вершина v_l располагалась «правее» вершины v_j. Пусть ребрам цепи c_i приписаны числа $a_i(1),\ldots,a_i(t_i)$ соответственнно. Тогда цепи c_i соответствует слово $a_i = (a_i(1) \dots a_i(t_i))$. Легко видеть, что $A = (a_1, \dots, a_h)$ принадлежит π-множеству Δ; при этом, если для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$ $(t_{i,j} - \pi_\Delta(i,j) + 1)$-ым ребрам в цепях c_i и c_j соответствуют разные числа, то $A \in \Delta^{(M)}$, в противном случае $A \in \Delta^{(m)}$. Очевидно, таким способом может быть получен любой элемент из π-множества Δ.

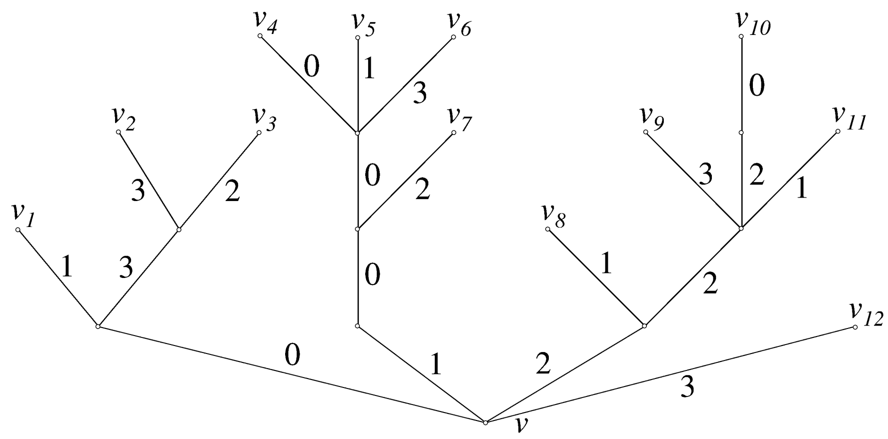

Рис. 2.

На рис. 2 для некоторого приведенного π-множества изображено соответствующее ему дерево D_Δ. Ребрам дерева приписаны числа из множества E_4 так, что данная разметка соответствует $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$ из $\Delta^{(M)}$ такому, что $a_1 = (01)$, $a_2 = (033)$, $a_3 = (032)$, $a_4 = (1000)$, $a_5 = (1001)$, $a_6 = (1003)$, $a_7 = (102)$, $a_8 = (21)$, $a_9 = (223)$, $a_{10} = (2220)$, $a_{11} = (221)$, $a_{12} = (3)$. Очевидно, π-множество Δ — подмножество множества E_4^T, где $T = (2, 3, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 3, 4, 3, 1)$.

Пусть $\Delta \subseteq E_k^T$. Подстановку γ чисел $1, \dots, h$ назовем Δ-подстановкой, если для любого элемента $(a_1, \dots, a_h)$ из Δ набор $(a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(h)})$ также принадлежит Δ.

Пусть $R \subseteq \Delta$. Отношение R назовем Δ-*рефлексивным*, если $\Delta^{(m)} \subseteq R$, и Δ-*симметричным*, если для всякого элемента $(a_1, \dots, a_h)$ из R и для любой Δ-подстановки γ набор $(a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(h)})$ также принадлежит R.

Пусть $R \subset \Delta$, причем Δ — приведенное π-множество. Для любых $A = (a_1, \ldots, a_h)$ из $\Delta \setminus R$, числа i из $\{1, \ldots, h\}$ определим подмножество $C_R^i(A)$ множества E_k: $\alpha \in C_R^i(A)$ тогда и только тогда, когда существует $\tilde{a} \in E_k^{t_i}$ такое, что $\pi(a_i, \tilde{a}) \leqslant 1$, $\tilde{a}(t_i) = \alpha$ и любой элемент $(a'_1, \ldots, a'_h)$ из Δ принадлежит R, если $a'_i = \tilde{a}$. Заметим, что для некоторых $A \in \Delta \setminus R$, $i \in \{1, \ldots, h\}$ множество $C_R^i(A)$, вообще говоря, может быть пустым.

Семейство отношений $\mathcal{Z}_k(\Delta)$. Пусть $k \geqslant 2$, Δ — приведенное π-множество арности h, $h \geqslant 1$. Отношение $R \subset \Delta$ принадлежит семейству $\mathcal{Z}_k(\Delta)$, если это отношение Δ-рефлексивно, Δ-симметрично и справедливо следующее. Пусть $m \geqslant 1$, $A_1 = (a_1^1, \ldots, a_h^1), \ldots, A_m = (a_1^m, \ldots, a_h^m)$ — произвольный набор элементов из $\Delta \setminus R$. Пусть $i_1 \in \{1, \ldots, h\}, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, h\}$. Тогда, если $t_{i_1} = \cdots = t_{i_m}$, $\pi(a_{i_1}^1, a_{i_2}^2) \leqslant 1, \ldots, \pi(a_{i_1}^1, a_{i_m}^m) \leqslant 1$, то имеет место соотношение

$$C_R^{i_1}(A_1) \cap \ldots \cap C_R^{i_m}(A_m) \neq \varnothing.$$

Семейство отношений $\mathcal{Z}_k(\tau)$ — есть объединение семейств $\mathcal{Z}_k(\Delta)$, взятое по всем приведенным π-множествам $\Delta \subseteq E_k^T$, где $T = (t_1, \ldots, t_h)$, $h \geqslant 1$, $\max\{t_1, \ldots, t_h\} \leqslant \tau$, таким, что $\mathcal{Z}_k(\Delta) \neq \varnothing$. $\mathcal{Z}_k(\tau) \neq \varnothing$ при любых $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$.

Пусть $\Delta \subseteq E_k^T$, $s \geqslant 1$. Множество $\{(a_1^1, \ldots, a_h^1), \ldots, (a_1^s, \ldots, a_h^s)\}$ элементов из $\Delta^{(M)}$ назовем Δ-*совместимым*, если существует совокупность Δ-подстановок $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ такая, что для любых q, r из $\{1, \ldots, s\}$, i, j из $\{1, \ldots, h\}$ имеет место соотношение

$$\pi_\Delta(i, j) \leqslant \pi(a^q_{\gamma_q(i)}, a^r_{\gamma_r(j)});$$

Пусть $R \subset \Delta$, причем Δ — приведенное π-множество. Отношение R назовем Δ-*элементарным*, если это отношение Δ-рефлексивно, Δ-симметрично, а множество $\Delta \setminus R$ Δ-совместимо.

Пусть R — Δ-элементарное отношение. Легко убедиться в том, что существуют множества

$$\widetilde{E}_1 \subseteq E_k^{t_1}, \ldots, \widetilde{E}_h \subseteq E_k^{t_h}$$

такие, что справедливо следующее:

а) если набор слов $(a_1, \dots, a_h)$ из Δ не принадлежит R, то для некоторой Δ-подстановки γ

$$a_{\gamma(1)} \in \widetilde{E}_1, \dots, a_{\gamma(h)} \in \widetilde{E}_h;$$

б) для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$, $a \in \widetilde{E}_i$, $a' \in \widetilde{E}_j$ имеет место неравенство

$$\pi_\Delta(i, j) \leqslant \pi(a, a').$$

Пусть R — Δ-элементарное отношение. Для любых $A = (a_1, \dots, a_h)$ из $\Delta \setminus R$, числа i из $\{1, \dots, h\}$ определим подмножество $Q^i_R(A)$ множества E_k: $\beta \in Q^i_R(A)$ тогда и только тогда, когда в $\Delta \setminus R$ существует элемент $(a_1, \dots, a_{i-1}, a', a_{i+1}, \dots, a_h)$ такой, что $\pi(a_i, a') \leqslant 1$, $a'(t_i) = \beta$. Очевидно, что для любых $A \in \Delta \setminus R$, $i \in \{1, \dots, h\}$ множество $Q^i_R(A)$ непусто.

Пусть $m \geqslant 1$, $\mathcal{P} = \{R_1, \dots, R_m\}$ — произвольная система Δ-элементарных отношений. Систему отношений $\mathcal{P}$ назовем *T-совместимой*, если для любых $l \in \{1, \dots, m\}$, $l' \in \{1, \dots, m\}$, $A \in \Delta \setminus R_l$, $A' \in \Delta \setminus R_{l'}$, $i \in \{1, \dots, h\}$ множества $C^i_{R_l}(A)$, $C^i_{R'_l}(A)$ одновременно либо пусты, либо не пусты, причем, если $C^i_{R_l}(A) = \varnothing$, то $Q^i_{R_l}(A) \neq E_k$, но для всякого $\beta \in E_k$ существует $j \in \{1, \dots, h\}$ такое, что $t_i = t_j$, $\pi_\Delta(i, j) \leqslant 1$, $\beta \in Q^j_{R_l}(A)$.

Пусть R — Δ-элементарное отношение, $A \in \Delta \setminus R$, $i \in \{1, \dots, h\}$. *Через $\mathcal{E}^i_R(A)$ обозначим подмножество E_k*, совпадающее с $C^i_R(A)$, если $C^i_R(A)$ непусто, и совпадающее с $Q^i_R(A)$ в противном случае.

Семейство отношений $\mathcal{J}_k(\Delta)$. Пусть $k \geqslant 2$, Δ — приведенное π-множество арности h, $h \geqslant 3$. Отношение $R \subset \Delta$ принадлежит семейству $\mathcal{J}_k(\Delta)$, если для некоторого $m \geqslant 1$ R представимо как пересечение Δ-элементарных отношений $R_1, \dots, R_m$, система отношений $\{R_1, \dots, R_m\}$ T-совместима, для любого $A \in \Delta \setminus R_1$ множества $C^1_{R_1}(A)$, $C^2_{R_1}(A)$ пусты, существует по крайней мере одно $i \in \{3, \dots, h\}$ такое, что множество $C^i_{R_1}(A)$ пусто и справедливо следующее.

Пусть $l \geqslant 1$, числа $s_1, \dots, s_l$ принадлежат множеству $\{1, \dots, m\}$, $A_1 = (a^1_1, \dots, a^1_h), \dots, A_l = (a^l_1, \dots, a^l_h)$ — произвольный набор элементов из множеств $\Delta \setminus R_{s_1}, \dots, \Delta \setminus R_{s_l}$ соответственно. Пусть $i_1 \in \{1, \dots, h\}, \dots, i_l \in \{1, \dots, h\}$ и имеют место соотношения

$$t_{i_1} = \dots = t_{i_l}, \;\; \pi(a^1_{i_1}, a^1_{i_2}) \leqslant 1, \dots, \pi(a^1_i, a^l_{i_l}) \leqslant 1.$$

Тогда, если числа $s_1, \dots, s_l$ попарно различны, то

$$\mathcal{E}^{i_1}_{R_{s_1}}(A_1) \cap \dots \mathcal{E}^{i_l}_{R_{s_l}} \neq \varnothing.$$

Семейство отношений $\mathcal{J}_k(\tau)$ — есть объединение семейств $\mathcal{J}_k(\Delta)$, взятое по всем приведенным π-множествам $\Delta \subseteq E_k^T$, где $T = (t_1, \dots, t_h)$, $h \geqslant 3$, $\max\{t_1, \dots, t_h\} \leqslant \tau$, таким, что $\mathcal{J}_k(\Delta) \neq \varnothing$. $\mathcal{J}_k(\tau) \neq \varnothing$ при $\tau \geqslant 1$, если $k > 2$, и при $\tau \geqslant 2$, если $k = 2$.

Семейство отношений $\mathcal{D}_k(\Delta)$**.** Пусть $k \geqslant 2$, Δ — приведенное π-множество арности h, $h \geqslant 2$. Отношение $R \subset \Delta$ принадлежит семейству $\mathcal{D}_k(\Delta)$, если для некоторого $m \geqslant 1$ R представимо как пересечение Δ-элементарных отношений $R_1, \dots, R_m$, система отношений $\{R_1, \dots, R_m\}$ T-совместима, для любого $A \in \Delta \setminus R_1$ множества $C^1_{R_1}(A), C^2_{R_1}(A)$ пусты, при $h \geqslant 3$ для любого $i \in \{3, \dots, h\}$ множество $C^i_{R_1}(A)$ не пусто и справедливо следующее.

а) Пусть $h = 2$. Тогда $R_1 \cap \dots \cap R_m \cap \Delta^{(M)} \neq \varnothing$.

б) Пусть $h \geqslant 3$, $l \geqslant 1$, числа $s_1, \dots, s_l$ принадлежат множеству $\{1, \dots, m\}$, $A_1 = (a^1_1, \dots, a^1_h), \dots, A_l = (a^l_1, \dots, a^l_h)$ — произвольный набор элементов из множеств $\Delta \setminus R_{s_1}, \dots, \Delta \setminus R_{s_l}$ соответственно такой, что для любых i, j из $\{1, \dots, l\}$ $\pi(a^i_1, a^j_1) \neq 1$. Пусть $i_1 \in \{1, \dots, h\}, \dots, i_l \in \{1, \dots, h\}$. Тогда, если имеют место соотношения

$$t_{i_1} = \dots = t_{i_l}, \ \ \pi(a^1_{i_1}, a^2_{i_2}) \leqslant 1, \dots, \pi(a^1_{i_1}, a^l_{i_l}) \leqslant 1,$$
$$\mathcal{E}^{i_1}_{R_{s_1}}(A_1) \cap \dots \cap \mathcal{E}^{i_l}_{R_{s_l}}(A_l) = \varnothing,$$

то существуют $j_1, \dots, j_q$ из $\{1, \dots, l\}$ такие, что $i_{j_1} \in \{1, 2\}, \dots, i_{j_q} \in \{1, 2\}$, множество $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_q}\}$ является Δ-совместимым и

$$\mathcal{E}_{R_{s_{j_1}}}(A_{j_1}) \cap \dots \cap \mathcal{E}_{R_{s_{j_q}}}(A_{j_q}) = \varnothing.$$

Семейство отношений $\mathcal{D}_k(\tau)$ — есть объединение семейств $\mathcal{D}_k(\Delta)$, взятое по всем приведенным π-множествам $\Delta \subseteq E_k^T$, где $T = (t_1, \dots, t_h)$, $h \geqslant 2$, $\max\{t_1, \dots, t_h\} \leqslant \tau$, таким $\mathcal{D}_k(\Delta) \neq \varnothing$. $\mathcal{D}_k(\tau) \neq \varnothing$ при $\tau \geqslant 1$, если $k > 2$, и при $\tau \geqslant 2$, если $k = 2$.

Пусть $k \geqslant 2$, $t \geqslant 1$, $T = (t,t)$, $\Delta_t \subseteq E_k^T$, Δ_t — π-множество такое, что $\pi_{\Delta_t}(1,2) = 1$.

Семейство отношений $\mathcal{M}_k(\tau)$ ($\mathcal{M}_k(\tau) \neq \varnothing$ при любых $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$). Отношение $R \in \mathcal{M}_k(\tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset \Delta_t$, $t \leqslant \tau$, R совпадает с некоторым отношением частичного порядка, определенным на E_k^T и имеющим в точности k^{t-1} минимальных и k^{t-1} максимальных элементов.

Семейство отношений $\mathcal{S}_k(\tau)$ ($\mathcal{S}_k(\tau) \neq \varnothing$ при любых $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$). Отношение $R \in \mathcal{S}_k(\tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset \Delta_t$, $t \leqslant \tau$, существует подстановка σ_R, определенная на E_k^t, разлагающаяся в произведение циклов одинаковой простой длины $p \geqslant 2$, график которой совпадает с R, то есть для любого $a \in E_k^t$ $(a, \sigma_R(a)) \in R$ и, если $(a_1, a_2) \in R$, то $a_2 = \sigma_R(a_1)$.

Пусть $t \geqslant 1$, $\widetilde{\Phi}_t$ — совокупность всех отображений множества E_k^t в множество подстановок (перестановок), определенных на E_k. Подстановку, которую отображение $\varphi \in \Phi_t$ ставит в соответствие элементу $a \in E_k^t$, обозначим φ_a. Через Φ_t обозначим подмножество $\widetilde{\Phi}_t$, состоящее из всех отображений φ таких, что для любых a, a' из E_k^t φ_a совпадает с $\varphi_{a'}$, если $\pi(a,a') \leqslant 1$. Пусть $T_4 = (t,t,t,t)$, N — подмножество $E_k^{T_4}$, состоящее из всех наборов (a_1, a_2, a_3, a_4) таких, что для любых i, j из $\{1,2,3,4\}$ $\pi(a_i, a_j) \leqslant 1$.

Пусть $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$, $G = \langle E_k \oplus \rangle$ — абелева группа, в которой каждый ненулевой элемент имеет порядок p.

Семейство отношений $\mathcal{L}_k(\tau)$ ($\mathcal{L}_k(\tau) \neq \varnothing$ для любого $\tau \geqslant 1$, если $k = p^m$, где p — простое число, $m \geqslant 1$). Отношение $R \in \mathcal{L}_k(\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторых $t \leqslant \tau$, $\varphi \in \Phi_t$ имеет место следующее. Пусть $k = p^m$. Тогда $R \subset N$; элемент (a_1, a_2, a_3, a_4) из N принадлежит R, если

$$\varphi_{a_1}(a_1(t)) \oplus \varphi_{a_1}(a_2(t)) = \varphi_{a_1}(a_3(t)) \oplus \varphi_{a_1}(a_4(t)),$$

и не принадлежит R в противном случае.

Пусть $t \geqslant 2$, $T = (t,t)$, $\widetilde{\Delta}_t \subset E_k^T$, $\widetilde{\Delta}_t$ — π-множество такое, что $\pi_{\tilde{\Delta}_t}(1,2) = 2$.

Семейство отношений $\mathcal{V}_k(\tau)$ ($\mathcal{V}_k(\tau) \neq \varnothing$ при любых $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 2$). Отношение $R \in \mathcal{V}_k(\tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset \widetilde{\Delta}_t$,

$t \leqslant \tau$, и имеет место следующее: (a_1, a_2) из $\widetilde{\Delta}_t^{(m)}$ принадлежит R, если $a_1(t) = a_2(t)$, и не принадлежит R в противном случае; существует $\varphi \in \Phi_t$ такое, что любой элемент (a_1, a_2) из $\widetilde{\Delta}_t^{(M)}$ принадлежит R, если для некоторого $\alpha \in E_k$ $a_1(t) = \varphi_{a_1}(\alpha)$, $a_2(t) = \varphi_{a_2}(\alpha)$ и не принадлежит R в противном случае.

Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $\mathcal{W}_k(\tau)$ — объединение семейств отношений $\mathcal{Z}_k(\tau), \mathcal{J}_k(\tau), \mathcal{D}_k(\tau), \mathcal{M}_k(\tau), \mathcal{S}_k(\tau), \mathcal{L}_k(\tau), \mathcal{V}_k(\tau)$.

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$. Произвольное множество $\mathfrak{M} \subseteq P_\partial^k$ является τ-полным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения R из $\mathcal{W}_k(\tau)$, то есть $\mathfrak{M} \nsubseteq U(R)$.*

Теорема 4. *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$. $\mathfrak{N}$ — произвольный τ-предполный класс в P_∂^k. Тогда существует отношение $R \in \mathcal{W}_k(\tau)$ такое, что $\mathfrak{N} = U(R)$.*

Теорема 5. *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$. Пусть отношения R, R' принадлежат $\mathcal{W}_k(\tau)$. Имеет место следующее.*

а) Пусть R, R' принадлежат различным семействам из множества семейств $\{\mathcal{Z}_k(\tau), \mathcal{J}_k(\tau), \mathcal{D}_k(\tau), \mathcal{M}_k(\tau), \mathcal{S}_k(\tau), \mathcal{L}_k(\tau), \mathcal{V}_k(\tau)\}$. Тогда $U(R) \neq U(R')$;

б) Пусть R, R' принадлежат объединению семейств $\mathcal{L}_k(\tau), \mathcal{V}_k(\tau)$, причем $R \neq R'$. Тогда $U(R) \neq U(R')$;

в) Пусть R, R' принадлежат объединению семейств $\mathcal{Z}_k(\tau), \mathcal{J}_k(\tau)$, $\mathcal{D}_k(\tau)$ и имеют разную арность. Тогда $U(R) \neq U(R')$;

г) Пусть R, R' принадлежат одному из семейств $\mathcal{M}_k(\tau), \mathcal{Z}_k(\tau)$, $\mathcal{J}_k(\tau), \mathcal{D}_k(\tau)$ и имеют одинаковую арность h. Тогда равенство $U(R) = U(R')$ равносильно существованию подстановки γ чисел $1, \ldots, h$ такой, что для любого элемента $(a_1, \ldots, a_h)$ из R набор $(a_{\gamma(1)}, \ldots, a_{\gamma(h)})$ принадлежит R'; для любого элемента $(a'_1, \ldots, a'_h)$ из R' набор $(a'_{\gamma^{-1}(1)}, \ldots, a'_{\gamma^{-1}(h)})$ принадлежит R;

д) Пусть R, R' принадлежат семейству $\mathcal{S}_k(\tau)$. Тогда равенство $U(R) = U(R')$ равносильно тому, что одна из подстановок $\sigma_R, \sigma_{R'}$, графики которых образуют отношения R, R' соответственно, является степенью другой.

Заметим, что $\mathcal{Z}_k(1), \mathcal{J}_k(1), \mathcal{D}_k(1), \mathcal{M}_k(1), \mathcal{S}_k(1), \mathcal{L}_k(1)$ совпадают соответственно с семействами отношений $\mathcal{Z}, \mathcal{J}, \mathcal{D}, \mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{L}$, с помощью которых описываются все предполные классы в k-значных логиках [7, 8, 11]. Кроме того, подход, возникший в [7, 8] при доказательстве теорем 3, 4, 5 позволил сделать существенно короче известное доказательство И. Розенберга критерия полноты в k-значных логиках [24].

При исследовании проблемы полноты в различных ф. с. часто бывает так, что либо вообще не существует эффективного критерия полноты произвольных множеств функций (например, для ф. с. $P_{\text{о.д.}}$, теоремы 1, 2), либо, если такой критерий существует, то он формулируется слишком громоздко (как, например, в k-значных логиках при достаточно большом k). Поэтому во многих работах [1, 2, 5, 11] на системы функций, полноту которых хотелось бы установить, накладываются некоторые ограничения. Так, в k-значных логиках при $k \geqslant 3$ был получен ставший классическим критерий полноты Слупецкого–Яблонского, позволяющий «достаточно просто» распознавать полноту систем, содержащих все одноместные функции k-значных логик. В связи с этим естественно рассмотреть аналогичную же задачу для ф. с. $P_{\text{о.д.}}$

Будем считать, что исследуемые на τ-полноту, A-полноту и полноту системы о.-д. функций содержат *множество* $P^k_{o.\partial.}(1)$ — множество всех о.-д. функций, зависящих не более, чем от одной переменной. *Совокупность всех таких систем обозначим через* M_k.

Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что критерий τ-полноты систем из M_k, также как и в общем случае, может быть сформулирован в терминах τ-предполных классов. Однако при этом достаточно рассматривать лишь те τ-предполные классы, которые содержат множество $P^k_{\text{о.д.}}(1)$. Поэтому для решения задачи о τ-полноте систем из M_k из множества отношений $\mathcal{W}_k(\tau)$ следует выделить все такие отношения, классы сохранения которых содержат все одноместные о.-д. функции [25, 26].

Пусть $k \geqslant 2$, $t \geqslant 1$, $h \geqslant k$, $T = \underbrace{(t, \ldots, t)}_{h}$, $\Delta \subseteq E_k^T$, Δ — приведенное π-множество. π-множество Δ назовем *k-симметричным*, если для некоторого $S \subseteq \{1, \ldots, t\}$ имеет место следующее: а) $t \in S$; б) для всякого $q \in S$ и для любого $l \in \{1, \dots, h\}$ в $\{1, \dots, h\}$ существует подмножество $\{l_1^q, \dots, l_k^q\}$ такое, что $l \in \{l_1^q, \dots, l_k^q\}$ и для любых m, n из $\{1, \dots, k\}$ $\pi_\Delta(l_m^q, l_n^q) = t - q + 1$, если $m \neq n$; в) если $S \neq \{1, \dots, t\}$, $p \in \{1, \dots, t\} \setminus S$, то $\pi_\Delta(i, j) \neq t - p + 1$ для любых i, j из $\{1, \dots, h\}$.

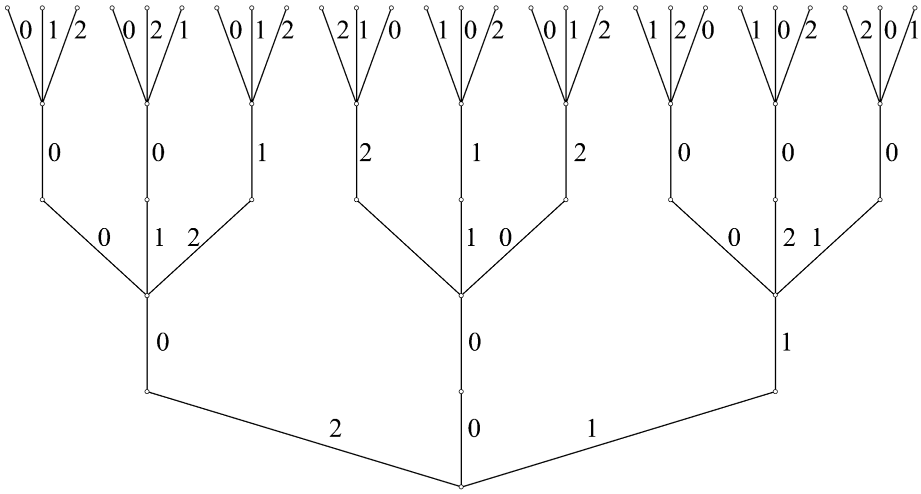

Рис. 3.

«Геометрическая иллюстрация» к понятию k-симметричного π-множества при $k = 3$, $h = 27$, $t = 5$, $S = \{1, 3, 5\}$ изображена на рис. 3.

Пусть $k = 2$, $t_1 > 1$, $t_2 > 1$, $t_2 < t_1$, $h_1 \geqslant 2$, $h_2 \geqslant 2$, $T = (\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{h_1}, \underbrace{t_2, \dots, t_2}_{h_2})$, $\Delta \subseteq E_2^T$, Δ — приведенное π-множество. π-множество Δ назовем *квазисимметричным*, если существуют 2-симметричные π-множества Δ_1 и Δ_2 такие, что $\Delta_1 \subseteq E_2^{T_1}$, $\Delta_2 \subseteq E_2^{T_2}$, $T_1 = (\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{h_1})$, $T_2 = (\underbrace{t_2, \dots, t_2}_{h_2})$ и для любых i, j из $\{1, \dots, h_1\}$, l, m из $\{h_1 + 1, \dots, h_1 + h_2\}$ имеют место соотношения:

$$\pi_\Delta(i, j) = \pi_{\Delta_1}(i, j), \quad \pi_\Delta(l, m) = \pi_{\Delta_2}(l - h_1, m - h_1), \quad \pi_\Delta(i, l) = \pi_\Delta(j, m),$$
$$\pi_\Delta(i, l) > \max\{\pi_\Delta(i, j), \pi_\Delta(l, m) + t_1 - t_2\} + t_2 - t_1.$$

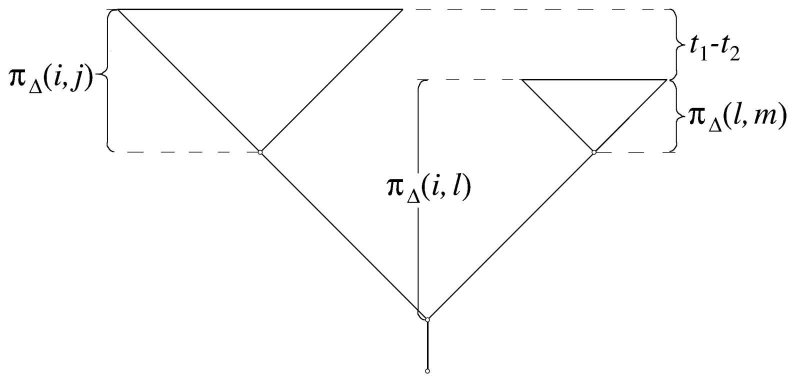

Рис. 4.

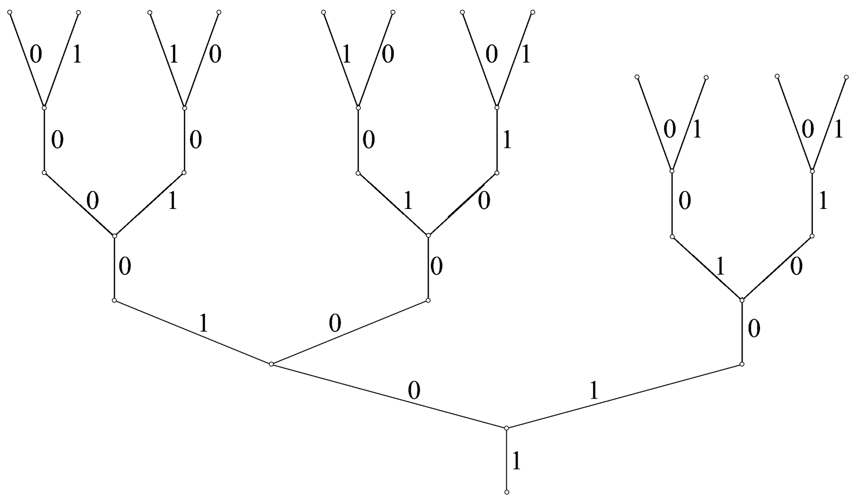

Рис. 5.

«Геометрическая иллюстрация» к понятию квазисимметричности π-множеств изображена на рис. 4, 5. На рис. 5 «изображен» один из элементов множества $\Delta^{(M)}$ при $h = 12$, $t_1 = 7$, $t_2 = 6$.

Пусть $k \geqslant 2$, $t \geqslant 1$. Определим
семейство отношений $\widetilde{\mathcal{C}}_k(t)$. Отношение R принадлежит семейству

$\widetilde{\mathcal{C}}_k(t)$ тогда и только тогда, когда для некоторого набора $T = (\underbrace{t, \dots, t}_{h})$, где $h \geqslant k$ при $k \geqslant 3$ и $h \geqslant 4$ при $k = 2$, существует k-симметричное π-множество Δ — подмножество E_k^T такое, что $R = \Delta^{(m)}$.

Пусть $k = 2$, $t_1 > 1$, $t_2 > 1$, $t_2 < t_1$. Определим **семейство отношений** $\widehat{\mathcal{C}}_2(t_1, t_2)$**.** Отношение R принадлежит семейству $\widehat{\mathcal{C}}_2(t_1, t_2)$ тогда и только тогда, когда для некоторого набора $T = (\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{h_1}, \underbrace{t_2, \dots, t_2}_{h_2})$, где $h_1 \geqslant 2$, $h_2 \geqslant 2$, существует квазисимметричное π-множество Δ — подмножество E_2^T такое, что $R = \Delta^{(m)}$.

Семейство отношений $\mathcal{C}_k(\tau)$ при $k \geqslant 3$ есть объединение семейств $\widetilde{\mathcal{C}}_k(t)$, взятое по всем $t \leqslant \tau$ ($\mathcal{C}_k(\tau) \neq \varnothing$ при любых $\tau \geqslant 1$).

Семейство отношений $\mathcal{C}_2(\tau)$ есть объединение семейств $\widetilde{\mathcal{C}}_2(t)$ и $\widehat{\mathcal{C}}_2(t_1, t_2)$, взятое по всем t, t_1, t_2 таким, что $t \leqslant \tau$, $t_1 > 1$, $t_2 > 1$, $t_2 < t_1$, $t_1 \leqslant \tau$. ($\mathcal{C}_2(\tau) \neq \varnothing$ лишь тогда, когда $\tau \geqslant 2$).

Нетрудно видеть, что классы сохранения отношений из семейств $\mathcal{C}_k(\tau)$ при любых k и τ содержат все одноместные о.-д. функции, то есть множество $P^k_{\text{о.д.}}(1)$. То же самое справедливо и для семейства $\mathcal{L}_2(\tau)$ (теоремы 3, 4, 5).

Теорема 6 ([25]). *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $\mathfrak{M} \in M_k$. Множество $\mathfrak{M}$ является τ-полным тогда и только тогда, когда имеет место следующее:*

- *а) если $k \geqslant 3$, то $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего семейству $\mathcal{C}_k(\tau)$;*
- *б) если $k = 2$, то $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего объединению семейств $\mathcal{C}_2(\tau)$ и $\mathcal{L}_2(\tau)$.*

Теорема 7 ([25]). *Пусть $k \geqslant 2$, $\tau \geqslant 1$, $\mathfrak{N}$ — произвольный τ-предполный класс, содержащий все одноместные о.-д. функции (или д. функции). Имеет место следующее:*

- *а) если $k \geqslant 3$, то существует отношение $R \in \mathcal{C}_k(\tau)$ такое, что $\mathfrak{N} = U(R)$.*
- *б) если $k = 2$, то существует отношение $R \in \mathcal{C}_2(\tau) \cup \mathcal{L}_2(\tau)$ такое, что $\mathfrak{N} = U(R)$.*

Как уже отмечалось (теорема 1), проблема A-полноты для о.-д. функций алгоритмически неразрешима. Однако критерий A-полноты может быть сформулирован в терминах A-предполных классов, и множество A-предполных классов совпадает с объединением множеств $\mathcal{W}_k(\tau)$, взятым по всем $\tau \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что справедлива

Теорема 8. *Пусть $k \geqslant 2$, $\mathfrak{M} \in M_k$. Множество $\mathfrak{M}$ является A-полным тогда и только тогда, когда для любого $\tau \geqslant 1$ имеет место следующее:*

а) если $k \geqslant 3$, то $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего семейству $\mathcal{C}_k(\tau)$;

б) если $k = 2$, то $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего объединению семейств $\mathcal{C}_2(\tau)$ и $\mathcal{L}_2(\tau)$.

Заметим, что отношения из семейства $\mathcal{C}_k(\tau)$ имеют более «простое» и более «регулярное» представление, чем отношения, принадлежащие, например, семействам $\mathcal{Z}_k(\tau)$, $\mathcal{J}_k(\tau)$ и $\mathcal{D}_k(\tau)$. В [26] с использованием утверждения теоремы 8 доказана

Теорема 9. *Для любого $k \geqslant 2$ существует алгоритм распознавания A-полноты систем $\mathfrak{M}$ о.-д. функций из M_k таких, что множество $\mathfrak{M} \setminus P^k_{о.д.}(1)$ конечно.*

Рассмотрим теперь *задачу о полноте* систем о.-д. функций, принадлежащих множеству M_2, то есть всюду в дальнейшем будем считать, что $k = 2$. Получение эффективного критерия полноты для таких систем затруднено тем обстоятельством, что мощность множества предполных классов в $P^2_{\text{о.д.}}$, содержащих $P^2_{\text{о.д.}}(1)$, как и в общем случае равна континууму. Заметим также, что если в $P^2_{\text{о.д.}}$ ограничиться лишь использованием операции суперпозиции, то в полученной ф. с. вообще не существует конечных полных систем [2]. Тем не менее, Д. Н. Бабиным показано [17], что в этой ф. с. полным является множество, принадлежащее M_2 и содержащее, кроме $P^2_{\text{о.д.}}(1)$, лишь одну о.-д. функцию $f_u(x_1, x_2)$ — универсальную «истиностную» о.-д. функцию. Ниже будет сформулирован «достаточно эффективный» критерий полноты множеств о.-д. функций, содержащих $P^2_{\text{о.д.}}(1)$, который позволяет приводить многочисленные нетривиальные примеры полных систем из M_2; при этом не имеет значения, используется или не используется в $P^2_{\text{о.д.}}$ операция «обратная связь» [28].

Пусть о.-д. функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $P^2_{\text{о.д.}}$, $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_p\}$ — множество состояний о.-д. функции f, q_0 — ее начальное состояние. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n, z)$ — «обобщенная» функция переходов о.-д. функции f, $t \geqslant 1$. Будем считать, что состояние q_j о.-д. функции f *t-достижимо* из состояния q_i, если существуют $a_1, \ldots, a_n$ из E_2^t такие, что $\varphi(a_1, \ldots, a_n, q_i) = q_j$. Пусть $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$, $t \geqslant 1$. Через $Q_i(t)$ обозначим подмножество Q, состоящее из всех состояний, t-достижимых из состояния q_i; при этом $Q_i(0) = q_i$. Функции алгебры логики, реализуемые в состояниях $q_0, q_1, \ldots, q_p$ о.-д. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим через

$$F_{q_0}(x_1, \ldots, x_n),\ \ F_{q_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{q_p}(x_1, \ldots, x_n).$$

Множество всех о.-д. функций из $P^2_{о.д.}$ таких, что каждая из функций $F_{q_0}(x_1, \ldots, x_n), F_{q_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{q_p}(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит не более, чем от одной переменной обозначим $\mathcal{P}^2_{о.д.}$. Очевидно, $\mathcal{P}^2_{\text{о.д.}}$ — замкнутый класс в $P^2_{\text{о.д.}}$.

Пусть $m \geqslant 1$, $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $f(x_1, x_2) \in P^2_{\text{о.д.}}$. Не ограничивая общности, будем считать, что множество состояний о.-д. функции f совпадает с Q. *О.-д. функция $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет $B(m,l)$-свойству*, если для некоторого $\widetilde{Q} \subseteq Q$

а) существует $l' = l \pmod m$ такое, что $Q_0(l') \cap \widetilde{Q} \neq \varnothing$;

б) $Q_i(m) \subseteq \widetilde{Q}$ для любого $q_i \in \widetilde{Q}$ и существует $q_j \in Q_i(m)$ такое, что $F_{q_j}(x_1, x_2)$ — нелинейная функция алгебры логики, $0 \leqslant i, j \leqslant p$.

Нетрудно видеть, что любая о.-д. функция $\tilde{f}(x_1, x_2)$, в каждом состоянии которой реализуется нелинейная функция алгебры логики, удовлетворяет $B(1,0)$-свойству. Вместе с тем, любая о.-д. функция из $\mathcal{P}^2_{\text{о.д.}}(2)$ ни при каких m и l $B(m,l)$-свойству не удовлетворяет.

Пусть $\mathfrak{N} \subseteq P^2_{\text{о.д.}}$, $s \geqslant 1$. Через $\mathfrak{N}(s)$ обозначим множество всех о.-д. функций из $\mathfrak{N}$, зависящих от переменных

$x_1, \ldots, x_s$. Пусть $\mathfrak{N} \subseteq P^2_{\text{о.д.}}(s)$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in P^2_{\text{о.д.}}$. Будем считать, что *о.-д. функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет множество* $\mathfrak{N}$, *если для любых* $f_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_s)$ *из* $\mathfrak{N}$ *о.-д. функция* $f(f_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_s))$ *также принадлежит* $\mathfrak{N}$. *Множество* $\mathfrak{M} \subseteq P^2_{о.д.}$ *сохраняет* $\mathfrak{N}$, *если каждая о.-д. функция из* $\mathfrak{M}$ *сохраняет множество* $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим подмножества $G, H_0, H_1, D^0_0, D^0_1, D^1_0, D^1_1$ множества $P^2_{\text{о.д.}}(1)$.

О.-д. функция $g(x)$ принадлежит множеству G тогда и только тогда, когда в каждом ее состоянии реализуется функция алгебры логики, отличная от тождественной константы.

Произвольные о.-д. функции $h_0(x) = y_1$ из H_0, $h_1(x) = y_2$ из H_1 таковы, что:

при четных t $y_1(t) \neq \text{const}$ при любых значениях переменных $x(1), \ldots, x(t-1)$; значение переменной $y_2(t)$ для любого $i \in \{1, \ldots, \frac{t}{2}\}$ не зависит существенно от значения переменной $x(2i)$;

при нечетных t значение переменной $y_1(t)$ для любого $i \in \{1, \ldots, \frac{t-1}{2}\}$ не зависит существенно от значения переменной $x(2i+1)$; $y_2(t) \neq \text{const}$ при любых значениях переменных $x(1), \ldots, x(t-1)$.

Произвольные о.-д. функции $d^0_0(x_1) = y_1$, $d^0_1(x_1) = y_2$, $d^1_0(x_2) = y_3$, $d^1_1(x_2) = y_4$, принадлежащие множествам $D^0_0, D^0_1, D^1_0, D^1_1$ соответственно таковы, что:

$y_1(1) = \text{const}$, $y_2(1) = \text{const}$, $y_3(1) = x_2(1)$ или $y_3(1) = \overline{x_2}(1)$, $y_4(1) = \text{const}$. Пусть $t \geqslant 2$. Тогда

$y_1(t) = x_1(t)$ или $y_1(t) = \overline{x_1}(t)$, $y_2(t) = \text{const}$, если t четно и $x_1(t-1) = 0$;

$y_1(t) = \text{const}$, $y_2(t) = x_1(t)$ или $y_2(t) = \overline{x_1}(t)$, если t четно и $x_1(t-1) = 1$;

$y_3(t) = x_2(t)$ или $y_3(t) = \overline{x_2}(t)$, $y_4(t) = \text{const}$, если t нечетно и $x_2(t-1) = 0$;

$y_3(t) = \text{const}$, $y_4(t) = x_2(t)$ или $y_4(t) = \overline{x_2}(t)$, если t нечетно и $x_2(t-1) = 1$.

На рис. 6 представлены диаграммы переходов некоторых конкретных о.-д. функций $h_0(x), h_1(x), d^0_0(x), d^1_0(x), d^0_1(x), d^1_1(x)$, принадлежащих соответственно множествам $H_0, H_1, D^0_0, D^1_0, D^0_1, D^1_1$. Начальные

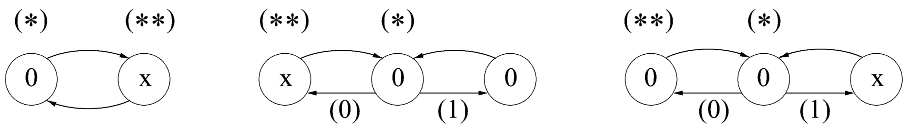

Рис. 6.

состояния о.-д. функций $h_0(x), d_0^0(x), d_1^0(x)$ отмечены одной, а начальные состояния о.-д. функций $h_1(x), d_0^1(x), d_1^1(x)$ — двумя звездочками.

Пусть $m \geqslant 1$, $l \in \{0, \ldots, m-1\}$, H, D_0, D_1 — семейства всех подмножеств $P^2_{\text{о.д.}}(1)$, а $\mathcal{B}(m,l)$ — семейства всех подмножеств $P^2_{\text{о.д.}}(2)$ такие, что:

для любого $\mathfrak{N} \in H$ $\mathfrak{N} \cap H_0 \neq \varnothing$, $\mathfrak{N} \cap H_1 \neq \varnothing$, но $\mathfrak{N} \cap G = \varnothing$;

для любого $\mathfrak{N} \in D_0$ $\mathfrak{N} \cap D_0^0 \neq \varnothing$, $\mathfrak{N} \cap D_1^0 \neq \varnothing$, но $\mathfrak{N} \cap H_0 = \varnothing$;

для любого $\mathfrak{N} \in D_1$ $\mathfrak{N} \cap D_0^1 \neq \varnothing$, $\mathfrak{N} \cap D_1^1 \neq \varnothing$, но $\mathfrak{N} \cap H_1 = \varnothing$;

для любого $\mathfrak{N} \in \mathcal{B}(m,l)$ множество $\widetilde{P}^2_{\text{о.д.}}(2)$ целиком содержится в $\mathfrak{N}$, но в $\mathfrak{N}$ не содержится ни одной о.-д. функции, удовлетворяющей $B(m,l)$-свойству;

для любых $\mathfrak{N} \in H \cup D_0 \cup D_1$, $\mathfrak{N}' \in \mathcal{B}(m,l)$, $f(x) \in \mathfrak{N}$, $f'(x_1,x_2) \in \mathfrak{N}'$, $\tilde{g}(x) \in P^2_{\text{о.д.}}(1)$ о.-д. функции $\tilde{g}(f(x))$, $\tilde{g}(f'(x_1,x_2))$ принадлежат множествам $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ соответственно.

Имеет место

Теорема 10. *Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P^2_{o.д.}$, $P^2_{o.д.}(1) \subseteq \mathfrak{M}$. Для того, чтобы $\mathfrak{M}$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}$ являлось A-полным, не сохраняло ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H, D_0, D_1 и для некоторого $m \geqslant 1$ не сохраняло ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств $\mathcal{B}(m,0), \ldots, \mathcal{B}(m,m-1)$.*

Теорема 11. *Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P^2_{o.д.}$, $P^2_{o.д.}(1) \subseteq \mathfrak{M}$. Для того, чтобы множество $\mathcal{P}^2_{o.д.}$ содержалось в замыкании $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{M}$ не сохраняло ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H, D_0, D_1.*

Теорема 12. *а) существует континуум предполных классов в $P^2_{o.д.}$, содержащих множество $\mathcal{P}^2_{o.д.}$, в частности, все одно-*

местные о.-д. функции, и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H, D_0, D_1*;*

б) *существует континуум предполных классов в* $P^2_{о.д.}$*, содержащих все одноместные о.-д. функции и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств* D_0, D_1*, и для любого* $m > 1$ *не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств* $\mathcal{B}(m, 0), \ldots, \mathcal{B}(m, m-1)$*;*

в) *существует континуум предполных классов в* $P^2_{о.д.}$*, содержащих все одноместные о.-д. функции и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств* H, D_1*, и для любого* $m > 3$ *не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств* $\mathcal{B}(m, 0), \ldots, \mathcal{B}(m, m-1)$*;*

г) *существует континуум предполных классов в* $P^2_{о.д.}$*, содержащих все одноместные о.-д. функции и не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств* H, D_0*, и для любого* $m > 3$ *не сохраняющих ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств* $\mathcal{B}(m, 0), \ldots, \mathcal{B}(m, m-1)$*.*

Выше утверждалось, что критерий, даваемый теоремой 10, является «достаточно эффективным». Приведем один из примеров, подтверждающий этот тезис.

Пусть $f(x_1, x_2)$ — произвольная о.-д. функция, обладающая следующими свойствами:

– в каждом состоянии о.-д. функции $f(x_1, x_2)$ реализуется либо $x_1 \vee x_2$, либо $\overline{x_1} \& \overline{x_2}$, либо $x_1 + x_2$, либо $x_1 + x_2 + 1$;
– существует $m \geqslant 1$ такое, что из любого состояния о.-д. функции $f(x_1, x_2)$ m-достижимо состояние, в котором реализуется либо $x_1 \vee x_2$, либо $\overline{x_1} \& \overline{x_2}$;
– для любого $l \in \{0, \ldots, m-1\}$ существует состояние, l-достижимое из начального, в котором реализуется либо $x_1 \vee x_2$, либо $\overline{x_1} \& \overline{x_2}$.

Покажем, что множество $\{f(x_1, x_2)\} \cup P^2_{\text{о.д.}}(1)$ полно в $P^2_{\text{о.д.}}$.

Действительно, так как в любом состоянии о.-д. функции $f(x_1, x_2)$ реализуется функция алгебры логики, существенно зависящая от двух переменных, то для любого $\tau \geqslant 1$ $f(x_1, x_2)$ не сохраняет ни одного отношения из семейства $\mathcal{C}_2(\tau)$. Кроме того, для любого $t \geqslant 0$ из начального состояния о.-д. функции $f(x_1, x_2)$ t-достижимо состояние, в котором реализуется нелинейная функция алгебры логики. Поэтому для любого $\tau \geqslant 1$ $f(x_1, x_2)$ не сохраняет ни одного отношения из семейства $\mathcal{L}_2(\tau)$. Следовательно, множество $P^2_{\text{о.д.}}(1) \cup \{f(x_1, x_2)\}$ является A-полным. Вместе с тем, о.-д. функция $f(x_1, x_2)$ для любого $l \in \{0, \ldots, m-1\}$ удовлетворяет $B(m, l)$-свойству. Поэтому $f(x_1, x_2)$ не сохраняет ни одного множества из объединения семейств $\mathcal{B}(m, 0), \ldots, \mathcal{B}(m, m-1)$. Функции алгебры логики $x_1 \vee x_2$, $\overline{x_1} \& \overline{x_2}$, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_2 + 1$ таковы, что $x_1 \vee 0 = x_1$, $\overline{x_1} \& \overline{0} = \overline{x_1}$, $x_1 + 0 = x_1$, $x_1 + 0 + 1 = \overline{x_1}$, $0 \vee x_2 = x_2$, $\overline{0} \& \overline{x_2} = \overline{x_2}$, $0 + x_2 = x_2$, $0 + x_2 + 1 = \overline{x_2}$. Используя это обстоятельство, легко установить, что $f(x_1, x_2)$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H, D_0, D_1. Таким образом, множество $\{f(x_1, x_2)\} \cup P^2_{\text{о.д.}}(1)$ является полным.

Замечание. Справедливость утверждений теорем 10 и 11 не зависит от того, используется или не используется в $P^2_{\text{о.д.}}$ операция «обратная связь». Вместе с тем, очевидно, что множество $\mathcal{P}^2_{\text{о.д.}} \cup \{f_u(x_1, x_2)\}$, где $f_u(x_1, x_2)$ — универсальная истиностная о.-д. функция, является полным. Из приведенного выше примера следует, что $f_u(x_1, x_2)$ не сохраняет ни одного из множеств, принадлежащих объединению семейств H, D_0, D_1. Таким образом, утверждение теоремы 11 можно считать некоторым усилением известного результата Д. Н. Бабина [17].

Список литературы

[1] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. Т. 51. М.: АН СССР, 1958.

[2] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

[3] Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // ДАН СССР. Т. 95. № 6. 1954.

[4] Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logic. Prinston, 1941.

[5] Slupeski J. Kryterium petnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan // Comptes rendus des seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie. Cl. III. 32. 1939.

[6] Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: СО АН СССР, 1976.

[7] Rosenberg J. La structure des fonctions de plusieurs variables sur ensemble fini // Comptes Rendus de Acad. Paris. 260. 1965.

[8] Rosenberg J. Über die funktionale Vollstandigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rospravy Cescoslovenska Academie Ved. V. 80. N 4. Praha, 1970.

[9] Кудрявцев В. Б. Вопросы полноты для автоматов // ДАН СССР. Т. 130. № 6. 1960.

[10] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. Вып. 13. М.: Наука, 1965.

[11] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: МГУ, 1982.

[12] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[13] Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k-значных логиках // ДАН СССР. Т. 136. № 3. 1969.

[14] Lo Czukai. Maximal closed sets in the set of partical manyvalued logic functions // Acta Math. Sinica. V. 27. N 6. 1984.

[15] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН АСССР. Т. 155. № 1. 1964.

[16] Гаврилов Г. П. О функциональной полноте в счетно-значной логике // Проблемы кибернетики. Вып. 15. М.: Наука, 1965.

[17] Бабин Д. Н. О полноте двухместных о.-д. функций относительно суперпозиции // Дискретная математика. Т. 1. № 4. 1989.

[18] Марченков С. С. О классах Слупецкого для детерминированных функций // Дискретная математика. Т. 10. № 2. 1998.

[19] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания A-полноты для ограниченно-детерминированных функций // Математические заметки. Вып. 6. 1972.

[20] Буевич В. А. О τ-полноте в классе автоматных отображений // ДАН СССР. Т. 252. № 5. 1980.

[21] Буевич В. А. Условия A-полноты для конечных автоматов. Ч. 1. М.: МГУ, 1986.

[22] Буевич В. А. Условия A-полноты для конечных автоматов. Ч. 2. М.: МГУ, 1987.

[23] Буевич В. А. О τ-полноте в классе детерминированных функций // Доклады РАН. Т. 326. № 3. 1992.

[24] Буевич В. А. Вариант доказательства критерия полноты для функций k-значной логики // Дискретная математика. Т. 8. № 4. 1996.

[25] Буевич В. А. О τ-полноте систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. 1999.

[26] Буевич В. А., Клиндухова Т. Э. О существовании алгоритма для распознавания A-полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции // Математические вопросы кибернетики. Вып. 8. 1999.

[27] Буевич В. А., Клиндухова Т. Э. Об алгоритмической неразрешимости задач об A-полноте и полноте для дефинитных ограниченно-детерминированных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 10. 2001.

[28] Буевич В. А. Критерий полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции // Дискретная математика. Т. 12. № 4. 2000.