Клеточные автоматы*

В. Б. Кудрявцев, А. С. Подколзин

Статья является обзором главных направлений теории однородных структур автоматов, составляющей один из важнейших разделов теории автоматов.

Однородные структуры представляют собой бесконечную сеть автоматов, функционирование которой позволяет описывать как логико-временные, так и пространственные характеристики реальных и абстрактных дискретных процессов, возникающих в естествознании, науках об обществе и в технике.

Обзор состоит из введения, описания модели однородной структуры, анализа и синтеза, экспериментов, полноты, сложности вычислений и др. для однородных структур.

Приводятся важнейшие результаты, полученные в этих направлениях у нас и за рубежом.

1. Введение

Одним из важнейших разделов теории автоматов является восходящая к работам Дж. Фон Неймана теория однородных структур, в которой исследуются функциональные возможности однородных бесконечных схем из одинаковых конечных автоматов. Эти автоматы предполагаются размещенными в узлах k-мерной целочисленной решетки так, что в каждом узле находится ровно один автомат, причем входы произвольного автомата подключаются к выходам некоторых «соседних» с ним автоматов одним и тем же образом (однородность строения). В то время как конечный автомат представляет собой дискретную математическую модель, описывающую лишь логико-временные характеристики различных процессов без учета

*Работа поддерживалась грантом РФФИ № 06-01-00240.

их пространственных особенностей, однородные структуры представляют собой дискретную математическую модель, описывающую как логико-временные, так и пространственные характеристики процессов, и в этом смысле представляют собой дискретную модель реальных физических объектов и процессов в них. Кроме того, однородные структуры могут рассматриваться как математическая модель однородных вычислительных систем, обладающих такими преимуществами, как простота технологии, надежность, практически неограниченная возможность распараллеливания обработки информации, что создает предпосылки для развития на их основе теории сложности параллельных вычислений.

Основные направления в теории однородных структур связаны с выделением как главных моделей таких структур, так и общих задач для них. К числу первых могут быть отнесены автономные однородные структуры и однородные структуры со входами и выходами, а к числу вторых — задачи анализа и синтеза однородных структур, а также задачи моделирования различных реальных процессов в таких структурах. Для автономных структур основным является изучение свойств конфигураций состояний ячеек в динамике их изменений, для структур со входами и выходами — зависимость этой динамики от входных воздействий, а также задача об усилении возможностей структур реализовывать отображения за счет рассмотрения их композиций. Эти вопросы требуют разработки специальных языков, позволяющих адекватно описывать функционирование однородных структур, что можно считать одним из направлений рассматриваемой теории.

Задача анализа однородных структур состоит в описании функционирования их по заданному формальному описанию, а задача синтеза, наоборот, — в восстановлении формального описания структуры по функционированию. Эти задачи допускают много модификаций. К их числу могут быть отнесены вопросы моделирования изменения геометрических форм в однородных структурах и теория экспериментов для них как примеры задачи анализа, а также вопросы моделирования одних структур в других и представления поведения их в композициях таких структур — как примеры задачи синтеза. Пограничное положение между этими задачами занимают вопросы эффективных параллельных вычислений, а также задачи моделирования процессов прикладного характера, возникающих в химии, биологии, технике [2, 3, 13].

Модель однородной структуры возникла в излагаемом виде в 60-х годах как формализация модели Дж. Фон Неймана [7], предложенной им ранее для описания явления самовоспроизведения в биологии. В изучении этой модели приняли участие как зарубежные, так и отечественные ученые.

Основные направления исследований в теории однородных структур мы проиллюстрируем на ряде конкретных задач, связанных с изучением поведений однородных структур.

2. Определения и примеры

Однородной структурой (сокращенно ОС) называется объект $\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$, у которого $\mathbb{Z}^k$ есть множество всех k-мерных векторов с целыми координатами, называемых ячейками ОС σ; $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ — множество состояний ячейки ОС σ; $V = (\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1})$ — упорядоченный набор ненулевых попарно различных k-мерных векторов с целыми координатами, называемый *шаблоном соседства* ОС σ; $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h-1})$ — функция, отображающая $(E_n)^h$ в E_n и называемая *локальной функцией переходов* ОС σ. Предполагается, что функция φ удовлетворяет условию $\varphi(0, \dots, 0) = 0$. Для каждой ячейки α ОС σ определяется окрестность $V(\alpha)$ этой ячейки, представляющей собой множество $\{\alpha, \alpha + \alpha_1, \dots, \alpha + \alpha_{h-1}\}$. *Состоянием однородной структуры* σ называется произвольная функция f, определенная на $\mathbb{Z}^k$ и принимающая значения из E_n. На множестве Σ всех состояний ОС σ определяется основная функция переходов Φ ОС σ, сопоставляющая каждому состоянию f из Σ такое состояние g ОС σ, что тождественно выполнено равенство

$$g(x) = \varphi(f(x), f(x + \alpha_1), \dots, f(x + \alpha_{h-1})).$$

Это равенство означает, что состояние $g(x)$ ячейки x ОС σ «после перехода» определяется при помощи локальной функции переходов φ по набору состояний «до перехода» ячеек $x, x + \alpha_1, \dots, x + \alpha_{h-1}$, образующих окрестность ячейки x.

Поведением ОС σ называется такая последовательность $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ее состояний, что при всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено $f_{i+1} = \Phi(f_i)$. В различных задачах оказывается целесообразным рассмотрение подкласса Σ' класса Σ всех состояний ОС σ, образованного всеми такими состояниями f, что условие $f(\alpha) \neq 0$ выполняется лишь для конечного числа ячеек α ОС σ. Элементы множества Σ' называются *конфигурациями* ОС σ. Нетрудно заметить, что для любого $f \in \Sigma'$ имеет место $\Phi(f) \in \Sigma'$, где Φ — основная функция переходов ОС σ. Для численной характеризации размеров окрестности $V(\alpha)$ ячейки α ОС σ будем в ряде случаев погружать эту окрестность в наименьший невырожденный прямоугольный k-мерный параллелепипед P с центром в ячейке α. Длины сторон этого параллелепипеда представляют собой нечетные натуральные числа $2m_1 + 1, \ldots, 2m_k + 1$; используем обозначение $P = V_{\bar{m}}(\alpha)$, где $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, $m_1 > 0, \ldots, m_k > 0$, а $V_{\bar{m}}$ — некоторый вспомогательный шаблон соседства.

Легко видеть, что без ограничения множеств поведений можно рассматривать только ОС σ вида $(\mathbb{Z}^k, E_n, V_{\bar{m}}, \varphi)$. Класс всех ОС такого вида обозначаем $S(k, n, \bar{m})$. Очевидно, $|S(k, n, \bar{m})| = n^{n^{h-1}}$, где $h = \prod\limits_{i=1}^{k} (2m_i + 1)$.

Рассмотрим два простых примера, связанных с анализом поведений однородных структур. Пусть $\sigma_1 = (\mathbb{Z}^2, E_2, V, \varphi)$, где $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) = x_0 \vee x_1 \ldots \vee x_{h-1}$; Φ — основная функция переходов ОС σ_1. Тогда, как нетрудно проверить, $\Phi^t(f_1 \vee \ldots \vee f_m) = \Phi^t(f_1) \vee \ldots \vee \Phi^t(f_m)$ для любых целых $t \geqslant 1$ и $m \geqslant 2$, так что достаточно исследовать поведение «одноклеточных» конфигураций f_i, принимающих значение 1 в единственной точке. Обозначим $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1})$; T — плоскую решетку, образованную целочисленными линейными комбинациями векторов $\alpha, \alpha + \alpha_1, \ldots, \alpha + \alpha_{h-1}$; P — выпуклую оболочку множества $Q = \{0, -\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}\}$; K — конфигурацию ОС σ_1, принимающую значение 1 в точке $(0, 0)$ и равную 0 в прочих точках. Тогда оказывается, что множество ячеек, имеющих в конфигурации $\Phi^t(K)$ состояние 1, представляет собой пересечение решетки T с областью tP, за исключением, быть может граничной полосы ограниченной ширины. Отсюда вытекает, что и произвольная ненулевая конфигурация f ОС σ_1 неограниченно растет, приобретая при росте очертания выпуклого многоугольника P («вытянутого» в t

раз и пересеченного с объединением некоторых классов смежности решетки T).

Приведенный пример иллюстрирует тенденцию к направленным, необратимым изменениям, возникающим в поведениях многих однородных структур. Проявляясь уже на первом такте функционирования ОС в виде так называемых локальных ограничений (см. ниже теорему Мура–Майхилла о неконструируемых конфигурациях), эта тенденция приводит к возникновению специального собственного подкласса «предельных», или «устойчивых», состояний ОС σ, которые могут встречаться в обобщенных ее поведениях вида $\ldots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \ldots$, где время t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

В качестве примера однородной структуры, поведения которой не обладают указанной тенденцией, укажем ОС $\sigma_2 = (\mathbb{Z}^k, E_p, V, \varphi)$, у которой p — простое число и $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) = x_0 + \ldots + x_{h-1} \pmod p$. Этот пример является классическим в связи с задачей самовоспроизведения конфигураций в однородных структурах [6], поскольку любая ненулевая конфигурация f ОС σ_2 через p^N тактов (для достаточно больших N) преобразуется в конфигурацию, изображающую (посредством ячеек, имеющих ненулевое состояние) h непересекающихся копий исходного изображения, определяемого конфигурацией f. В отличие от ОС σ_1 при переходах могут возникать любые состояния ОС σ_2.

Примером задачи на синтез конкретной однородной структуры является известная задача о синхронизации, заключающаяся в построении такой k-мерной ОС σ, что для любой конечной области P ячеек ОС σ, принадлежащей заданному семейству областей S и конфигурации K ОС σ, обращающейся в 1 на P и в 0 вне P, выполнены следующие условия:

а) $\Phi(K) = K$ (Φ — основная функция переходов ОС σ);

б) если состояние произвольной ячейки α некоторой выделенной подобласти P' области P заменить на 2, то конфигурация K преобразуется в такую конфигурацию K', что при некотором t_0 все ячейки конфигурации $\Phi^{t_0}(K')$ имеют состояние 3; при $t < t_0$ ни одна ячейка конфигурации $\Phi^t(K')$ не имеет состояние 3; при $t \leqslant t_0$ значения $\Phi^t(K')$ вне P равны 0.

Решение этой задачи за минимальное время $t_0 = 2l - 2$ для семейства отрезков P длин $l = 1, 2, 3, \ldots$ (P' — крайние точки отрезка P;

$k = 1$) было получено Гото [15] и далее модифицировалось в различных направлениях.

В качестве другого примера задачи на синтез однородной структуры рассмотрим моделирование в ОС движения частиц с постоянными скоростями. Каждая частица изображается некоторой ненулевой конфигурацией; положение частицы описывается множеством ячеек этой конфигурации, имеющих ненулевое состояние. Пусть σ — некоторая двумерная ОС и Φ — ее основная функция переходов. Если существует вектор $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ и константа c такие, что для любых натурального n и ячеек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, удовлетворяющих условию $K(\alpha) \neq 0$, $(\Phi^n(K))(\beta) \neq 0$, выполняется соотношение $\max\limits_{i=1,\ldots,k} |\beta_i - v_i n - \alpha_i| \leqslant c$, то говорим, что конфигурация K ОС σ *движется со скоростью* v.

Точную нижнюю грань всех допустимых значений c называем при этом *разбросом конфигурации* K. Если существует конфигурация ОС σ, движущаяся со скоростью v, то точную нижнюю грань разбросов всех таких конфигураций обозначим $\Delta_\sigma(v)$. Скажем, что ОС σ *позволяет* ε*-моделировать* движение частиц с разбросом d, если в множестве $V = \{(v_1, \ldots, v_k) | |v_1| \leqslant 1, \ldots, |v_k| \leqslant 1\}$ имеется ε-сеть Q, состоящая из скоростей, движения с которыми с которыми можно моделировать в σ, причем $d = \max\limits_{v \in Q} \Delta_\sigma(v)$. Задача заключается в построении по указанному ε такой ОС σ, в которой возможно ε-моделирование движения частиц, и минимизации соответствующего разброса. Наименьший разброс $\Delta(k, n, \bar{m}, \varepsilon)$, с которым возможно ε-моделирование движения частиц посредством ОС σ из класса $S(k, n, \bar{m})$, характеризуется следующим утверждением.

Утверждение 1 ([10]). *Для любого натурального k существует такое $c(k)$, что при $n \geqslant c(k)$, $m = (m_1, \ldots, m_k)$, $m_1 > 2, \ldots, m_k > 2$, $0 < \varepsilon < 1$, выполнено*

$$\sqrt[k]{k \log_n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \leqslant \Delta(k, n, \bar{m}, \varepsilon) \leqslant c_2 + \sqrt[k]{c_1 k \log_n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)},$$

где c_1, c_2 — некоторые константы.

3. Анализ поведений однородных структур

При описании свойств поведений однородных структур на макроуровне без учета структурных особенностей их состояний оказывается полезным традиционный для теории автоматов язык диаграмм переходов. С однородной структурой σ связываем граф переходов $G(\sigma)$, вершинами которых являются классы эквивалентных (получающихся друг из друга параллельным переносом) состояний ОС σ, а также подграф $G^*(\sigma)$ графа $G(\sigma)$, который порожден всеми вершинами графа $G(\sigma)$, соответствующими конфигурациям ОС σ. В обоих графах из каждой вершины v выходит единственное ребро, ведущее к вершине, соответствующей состоянию $\Phi(f)$, где f — какое-либо состояние ОС σ, отнесенное к вершине v; Φ — основная функция переходов ОС σ. Имеют место следующие простые утверждения, характеризующие графы $G(\sigma)$ и $G^*(\sigma)$.

Утверждение 2. *Существуют неизоморфные ОС с одинаковыми графами $G(\sigma)$ и $G^*(\sigma)$.*

Утверждение 3. *Существуют ОС σ и σ' с изоморфными графами $G(\sigma), G(\sigma')$, но не изоморфными графами $G^*(\sigma), G^*(\sigma')$.*

Утверждение 4. *Существуют ОС σ и σ' с изоморфными графами $G^*(\sigma), G^*(\sigma')$, но неизоморфными графами $G(\sigma), G(\sigma')$.*

Как видно из этих утверждений, при переходе от ОС σ к ее графам переходов $G(\sigma), G^*(\sigma)$ происходит существенная потеря информации об этой ОС. Несмотря на это ряд важных свойств поведений ОС σ все же допускает формулировку на языке графов $G(\sigma)$, $G^*(\sigma)$. Одним из примеров такого рода служит известная теорема Мура–Майхилла о неконструируемых конфигурациях. Введем ряд понятий, необходимых для ее формулировки.

Конечные множества ячеек ОС σ называем *блоками*; *конфигурацией блока B* называем функцию $f : B \to E_n$. Если известно состояние f окрестности $V(B) = \bigcup\limits_{\alpha \in B} V(\alpha)$ блока B в момент t, то локальная функция переходов ОС позволяет определить состояние g блока B в момент $t+1$. Таким образом, на множестве конфигураций f блока $V(B)$ определяется оператор $\Phi_B : \Phi_B(f) = g$. Конфигурации блока

B, не принадлежащие области значений оператора Φ_B, называются *неконструируемыми.* Конфигурации f, g блока $C = V(V(B))$ называются *взаимно стираемыми*, если для них выполняются условия:

1) $f|_B \neq g|_B$;
2) $f|_{C\setminus B} = g|_{C\setminus B}$;
3) $\Phi_{V(B)}(f) = \Phi_{V(B)}(g)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 ([6, 16])**.** *Для произвольной ОС σ вида $(\mathbb{Z}^k, E_n, V_{\bar{m}}, \varphi)$ существование блока, имеющего неконструируемую конфигурацию, эквивалентно существованию блока, имеющего пару взаимно стираемых конфигураций.*

Нетрудно видеть, что наличие у ОС σ неконструируемых конфигураций блоков эквивалентно существованию у графа $G(\sigma)$ такой вершины, в которую не ведет ни одно ребро, а наличие у этой ОС взаимно стираемых конфигураций эквивалентно существованию у графа $G^*(\sigma)$ вершины, к которой ведут не менее двух ребер. Поэтому теорема 1 допускает следующую формулировку на языке графов $G(\sigma), G^*(\sigma)$.

Теорема 2. *Для произвольной ОС σ существование в графе $G(\sigma)$ вершины, к которой не ведут ребра, эквивалентно существованию в графе $G^*(\sigma)$ вершины, в которую ведет не более чем одно ребро.*

Теорема 1 допускает следующее усиление.

Теорема 3 ([10])**.** *Взаимно стираемые конфигурации отсутствуют в ОС σ вида $(\mathbb{Z}^k, E_n, V_{\bar{m}}, \varphi)$ тогда и только тогда, когда для произвольного непустого блока B и произвольной конфигурации f этого блока $V(B)$, переводимых оператором Φ_B в f, не зависит от выбора f и равно $n^{|V(B)\setminus B|}$.*

Следствие. *Для отсутствия взаимно стираемых конфигураций у ОС σ вида $(\mathbb{Z}^k, E_n, V_{\bar{m}}, \varphi)$ необходимо, чтобы каждое значение из E_n принималось локальной функцией переходов $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1})$ в точности на n^{h-1} наборах значений переменных.*

Легко проверить, что последнее условие выполняется лишь для «малой» доли ОС класса $S(k, n, \bar{m})$, то есть «почти все» ОС σ имеют неконструируемые конфигурации блоков. В одномерном случае существует алгоритм распознавания по ОС σ из $S(1, n, \bar{m})$ наличия взаимно стираемых конфигураций блоков, основанный на верхней оценке длины отрезка, содержащего некоторый такой блок. В этом случае удается также получить нижнюю оценку n^{4m+1} числа ребер, ведущих в одну и ту же вершину графа $G(\sigma)$, при котором ОС σ обязательно имеет неконструируемые конфигурации блоков. Более детальное исследование класса ОС, не имеющих неконструируемых конфигураций, в особенности в многомерном случае, наталкивается на существенные трудности. Так, остается открытым вопрос о возможности алгоритмического распознавания существования в ОС неконструируемых конфигураций при размерности k, большей или равной 2.

Возможные мощности компонент связности (определяемых без учета ориентации ребер) графов $G(\sigma)$ и $G^*(\sigma)$ характеризуется следующими утверждениями.

Теорема 4 ([10]). *Для любой ОС σ выполнено одно из двух условий:*
1) существует такое p, что любое состояние ОС σ переходит в нулевое состояние не более чем за p шагов (в этом случае $G(\sigma)$, очевидно имеет одну компоненту связности);
2) множество компонент связности графа $G(\sigma)$ имеет мощность континуума.

Утверждение 5. *Для любой не более чем счетной ненулевой мощности M существует ОС σ, у которой $G^*(\sigma)$ имеет M компонент связности.*

Несмотря на простую альтернативу, определяемую теоремой 4, удается показать, используя алгоритмическую неразрешимость общей проблемы домино [14], что проблема нахождения мощности графа $G(\sigma)$ в классе всех ОС σ, имеющих фиксированные размерность k и шаблон соседства $V_{\bar{m}}$, алгоритмически неразрешима уже при $k \geqslant 2$. В случае $k = 1$ алгоритмическая разрешимость либо неразрешимость этой проблемы не установлены.

При анализе поведений ОС может оказаться полезным применение характеристик состояний этой ОС, инвариантных относительно основной функции переходов Φ. Каждое значение такой характеристики определяет некоторый класс K состояний ОС σ, удовлетворяющих условию $\forall\, f\ (f \in K \Rightarrow \Phi(f) \in K)$. Такие классы состояний ОС называем далее *замкнутыми.*

Приведем ряд утверждений, характеризующих возможность алгоритмического распознавания замкнутости некоторых классов состояний ОС.

Теорема 5 ([10]). *Проблема распознавания замкнутости класса всех ненулевых конфигураций ОС σ, характеризующихся фиксированными размерностью k и числом состояний ячейки n, алгоритмически разрешима только в случаях $k = 1$, либо $n = 1$.*

Чтобы указать примеры нетривиальных классов конфигураций ОС, для которых проблема распознавания замкнутости алгоритмически разрешима, введем ряд вспомогательных понятий. *Локальным ограничением на состояния* ОС σ назовем пару $\lambda = (A, F)$, где A — блок и F — некоторое множество конфигураций блока A. Состояние f ОС σ называется *удовлетворяющим локальному ограничению* λ, если для любой ячейки α ОС σ сужение g состояния f на блок $\alpha + A$ определяет конфигурацию $h(x) = g(x + \alpha)$ блока A, принадлежащую F.

Аналогично конфигурацию f блока B называем *удовлетворяющей локальному ограничению* λ, если для любого блока вида $\alpha + A$, расположенного внутри B, сужение g конфигурации f на $\alpha + A$ определяет принадлежащую F конфигурацию $h(x) = g(x + \alpha)$.

Класс всех состояний ОС σ, удовлетворяющих локальному ограничению λ, обозначаем $S(\lambda)$; класс всех конфигураций, принадлежащих $S(\lambda)$, обозначаем $S^*(\lambda)$, а класс всех конфигураций блока B, удовлетворяющих λ, обозначим $S^*_B(\lambda)$. Локальное ограничение λ называем *непрерывным (сильно непрерывным)*, если при любом $\bar{m}$ любая конфигурация из $S^*_{V_{\bar{m}}(A)}(\lambda)$ может быть продолжена до состояния ОС σ, принадлежащего $S(\lambda)$ (соответственно $S^*(\lambda)$).

Утверждение 6. *Если λ — сильно непрерывное локальное ограничение на состояния k-мерных ОС, имеющих n состояний ячейки, то существует алгоритм распознавания замкнутости класса $S^*(\lambda)$ в произвольной ОС указанного вида.*

Утверждение 7 ([4]). *Существует такое локальное ограничение* λ *на состояния двумерных ОС, имеющих* n *состояний ячейки,* $n \geqslant 2$, *что проблема распознавания замкнутости класса* $S^*(\lambda)$ *в двумерных ОС с* n *состояниями ячейки алгоритмически неразрешима.*

Алгоритмически распознаваемой оказывается также инвариантность «интегральных» характеристик состояний ОС. Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6 ([10]). *Если на множестве* E' *целых чисел,* $E' \supseteq E_n$, *определена вычислимая групповая операция* $+$ *и нулем группы* E' *служит число* 0, *то существует алгоритм, распознающий по произвольной двумерной ОС* σ *с* n *состояниями ячейки инвариантность относительно переходов суммы состояний ячеек в конфигурациях этой ОС.*

Назовем состоянием-самородком g ОС σ с основной функцией переходов Φ такое состояние, отличное от тождественно нулевого, что $\Phi(g) = g$. Состояние-самородок g ОС σ, являющееся конфигурацией, назовем конфигурацией-самородком. ОС σ называем линейной, если ее локальная функция переходов линейна относительно абелевой группы G над E_n с нулевым элементом 0 из E_n.

Теорема 7 ([18]). *Существует алгоритм, который для любой линейной ОС* σ *устанавливает, есть ли в ней:*
а) конфигурации-самородки,
б) состояния-самородки.

Теорема 8 ([18]). *Не существует алгоритма, который для любой плоской ОС* σ *устанавливает, есть ли в ней:*
а) конфигурации-самородки,
б) состояния-самородки.

Уже простейшие «нелокальные» по времени свойства поведений ненулевых конфигураций в ОС, такие как неограниченный их рост или конечность времени «существования», оказываются алгоритмически нераспознаваемыми. Поэтому для распознавания их свойств целесообразно бывает ограничить класс рассматриваемых поведений, предполагая, что они уже обладают некоторыми априорными свойствами.

Проиллюстрируем такой подход на примере задачи распознавания конечности времени существования конфигураций. *Скоростью роста конфигурации* K в ОС σ будем называть функцию $N_K = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant t-1} |\Phi^t(K)|$, где Φ — основная функция переходов ОС σ; $|K'|$ — число ячеек α таких, что $K'(\alpha) \neq 0$. Наименьшее t, для которого $|\Phi^t(K)| = 0$ (если оно есть), называется *временем существования конфигурации* K в ОС σ; в противном случае время существования K в ОС σ бесконечно.

Будем рассматривать ОС, принадлежащие классу $S = S(2,2,(2,2))$. Конфигурацию K в ОС σ из S называем *связной*, если для любых α и β таких, что $K(\alpha) \neq 0$, $K(\beta) \neq 0$, существует последовательность ячеек $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \beta$; $\alpha_j = (a_{i1}, a_{i2})$, удовлетворяющая условиям:

а) $K(\alpha_i) \neq 0$ при $i = 1, \ldots, n$;

б) $|a_{i1} - a_{i+1,1}| \leqslant 1$, $|a_{i2} - a_{i+1,2}| \leqslant 1$ при всех $i = 1, \ldots, n-1$.

Конфигурацию K ОС σ называем *вполне связной*, если для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ конфигурация $\Phi^t(K)$ связна. Имеет место следующее утверждение, характеризующее границу скорости роста вполне связных конфигураций, при которой проблема распознавания конечности времени их существования становится алгоритмически разрешимой.

Теорема 9 ([9]). *Существует алгоритм, распознающий по произвольным ОС σ из S и вполне связной конфигурации K ОС σ, функция роста которой удовлетворяет условию $N_K(t) \leqslant \frac{1}{4}\log_2 t$, конечность времени существования конфигурации K в σ. Можно указать такую ОС σ_0, $\sigma_0 \in S$, что в классе всех вполне связных конфигураций K ОС σ_0, функция роста которых асимптотически не превосходит $4\log_2 t$, эта проблема уже алгоритмически неразрешима.*

Выделение подкласса ситуаций, в которых возможно алгоритмическое распознавание свойств поведений ОС, иногда может быть осуществлено неявно, путем задания некоторой процедуры, осуществляющей такое распознавание для части случаев, а в остальных ситуациях выдающей «отказ» от распознавания. При этом представляет интерес оценка «доли» ситуаций, в которых процедура осуществляет распознавание. Интересно то обстоятельство, что для некоторых алгоритмически неразрешимых в общей постановке задач удается выделять рекурсивные подмножества ситуаций, допускающих алгоритмическое решение, охватывающие «почти все» возможные случаи. Примером такого рода является задача распознавания неограниченного роста конфигураций в ОС (то есть неограниченного увеличения максимального расстояния между ячейками, в которых значения конфигурации отличны от 0). В общей постановке эта задача неразрешима; с другой стороны, имеют место следующие утверждения, гарантирующие неограниченный рост конфигураций в «почти всех» случаях.

Теорема 10 ([10]). *Доля ОС из $S(k, n, \bar{m})$, у которых все ненулевые конфигурации неограниченно растут, стремится к* 1 *равномерно по* n *и* k *при* $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k}(m_i) \to \infty$.

Теорема 11 ([10]). *Доля ОС из $S(k, n, \bar{m})$, у которых «почти все» конфигурации неограниченно растут, стремится к* 1 *равномерно по* $\bar{m}$ *и* k *при* $n \to \infty$.

Из доказательства этих теорем без труда извлекаются «эффективные» описания некоторых множеств пар (σ, K), где K — конфигурация ОС σ.

Натуральное число D назовем представимым ОС σ, если время жизни некоторой одноячеечной конфигурации g (то есть конфигурации, у которой неравенство $g(\alpha) \neq 0$ выполняется ровно для одной ячейки) в этой ОС равно D. Натуральное число D называем непрерывно представимым классом S ОС, если для любого натурального d, $d \leqslant D$, существует ОС $\sigma \in S$, которой представимо это число d. Пусть $S(k, n, V)$ — класс ОС размерности $k \geqslant 2$ с n состояниями ячейки и шаблоном соседства V, причем V включает все такие векторы α, что $\|\alpha\| = 1$. Пусть $L_V(x)$ — функция, обратная функции $x^{x^{|V|}}$, где $|V|$ — мощность множества V.

Теорема 12 ([18]). *Для непрерывного представления числа D классом $S(k, n, V)$ ОС необходимо выполнение условия $n \geqslant L_V(D)$ и достаточно выполнение условия $n \leqslant L_V(D) + c$, где c — константа, зависящая от V.*

4. Синтез однородных структур

Начнем с рассмотрения задачи о построении в однородных структурах самокорректирующихся моделей различных процессов. Поведения однородной структуры будем называть *самокорректирующимся*, если произвольная ненулевая начальная конфигурация ее через конечное число шагов приобретает некоторую заданную структуру и поведение ее далее удовлетворяет заданным наперед ограничениям. Общие принципы построения ОС, обладающих такой самокоррекцией, могут быть проиллюстрированы на примере построения такой ОС, в которой любая ненулевая конфигурация является неограниченно растущей и принимающей по мере роста некоторую заданную форму (например, форму круга); скорость роста при этом одинакова для всех ненулевых конфигураций и задана заранее. Введем ряд определений, необходимых для более формальной постановки задачи построения ОС указанного вида. Расстоянием $\rho(A,B)$ между замкнутыми множествами A и B точек плоскости называем величину

$$\max\left(\max_{x\in A}\min_{y\in B}\rho(x,y),\quad \max_{x\in B}\min_{y\in A}\rho(x,y)\right).$$

Для произвольной двумерной ОС σ и произвольной ненулевой конфигурации K этой ОС введем в рассмотрение множество $M_t = \{\alpha|\Phi^t(K)(\alpha) \neq 0\}$, где Φ — основная функция переходов ОС σ; $t=1,2,3,\ldots$ Если $\alpha_0=(x_0,y_0)$ — некоторая ячейка ОС σ, v — положительное вещественное число,

$$G_t = \left\{\left(\frac{x-x_0}{vt},\ \frac{y-y_0}{vt}\right)\ \middle|\ (x,y)\in M_t\right\}$$

и $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(G,G_t)=0$ для некоторого замкнутого множества G точек плоскости, то говорим, что конфигурация K является G-растущей из центра α_0 со скоростью v. Непрерывную вещественную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$, назовем *вычислимой*, если существует машина Тьюринга, вычисляющая по любому рациональному p из $[a,b]$ и любому натуральному n первые n двоичных знаков числа $f(p)$; вещественное число a называем *вычислимым*, если существует машина Тьюринга, вычисляющая по любому натуральному n первые n двоичных знаков этого числа. *Простыми областями* называем

замкнутые множества точек плоскости, ограниченные сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу — графиком функции $y = g(x)$, слева и справа — вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, причем числа a, b и функции $f(x), g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:
1) a, b — вычислимые вещественные числа, $a < 0 < b$;
2) $f(x), g(x)$ — вычислимые функции, определенные на $[a, b]$; на интервале (a, b) выполняются неравенства $f(x) > 0$, $g(x) < 0$ (в точках a, b функции f, g могут обращаться в нуль, как по отдельности, так и одновременно);
3) функция $f(x)$ не убывает при $x < 0$ и не возрастает при $x > 0$, а функция $g(x)$ не возрастает при $x < 0$ и не убывает при $x > 0$.

В частности, простой областью является круг с центром в точке $(0, 0)$, множество точек, ограниченное эллипсом, и т. п. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 13 ([10]). *Если G — простая область и $v > 0$ — вещественное вычислимое число, то существует ОС σ, в которой каждая ненулевая конфигурация G-растет со скоростью v.*

Некоторая модификация техники, использованной при доказательстве этого утверждения, позволяет существенно расширять класс областей G, для которых имеет место указанный рост, а также строить самокорректирующиеся модели в ОС ряда других процессов.

Возможно также рассмотрение выращивания конфигураций, форма которых указывается с точностью до ячейки. Рассмотрим формы, сопоставимые выпуклым фигурам.

Упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ попарно различных векторов из $\mathbb{Z}^k$, что $\|\alpha_{i+1} - \alpha_i\| = 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$ называем *ломаной*. Она называется *замкнутой*, если $\|\alpha_1 - \alpha_m\| = 1$. При $k = 2$ замкнутая ломаная выделяет из множества $\mathbb{Z}^k$ множества H_* и H^*, соответственно, внутреннее и внешнее по отношению к ломаной. Множество $X = H_* \cup \{\alpha_1\} \cup \{\alpha_2\} \cup \ldots \cup \{\alpha_m\}$ называем фигурой, ограниченной замкнутой ломаной, а саму ломаную — границей фигуры X. Фигуру X назовем невыпуклой, если существуют три вектора $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$, $\gamma = (c_1, c_2)$, такие, что $\alpha \in X$, $\beta \notin X$ и $\gamma \in X$, и выполняется либо условие $a_1 = b_1 = c_1$ и $a_2 < b_2 < c_2$, либо условие $a_1 < b_1 < c_1$ и $a_2 = b_2 = c_2$. В противном случае фигуру X назовем выпуклой. Отождествим конфигурацию g и фигуру X, обозначая это $g = X$, если для любого вектора α выполняется либо условие $\alpha \in X$ и $g(\alpha) = 1$, либо $\alpha \notin X$ и $g(\alpha) = 0$. Выпуклая фигура является m-угольником, если ровно m ячеек конфигурации, тождественной этой фигуре, имеют в своей окрестности двух соседей в нулевом состоянии.

Силуэтом состояния g ОС σ называем множество всех ее ячеек α в состояниях, отличных от нулевого. Обозначим силуэт конфигурации g через $A(g)$. Фигура X представима ОС σ, если существует последовательность состояний $g_0, g_1, \ldots, g_m, \ldots$ этой ОС, где g_0 — одноячеечная конфигурация, что $A(g_{m+i}) = X$ для некоторого m и всех $i \geqslant 0$. Величина m называется временем представления фигуры X. Класс $\mathcal{X}$ фигур представим классом ОС S, если для любой фигуры $X \in \mathcal{X}$ существует ОС $\sigma \in S$, в которой фигура X представима. Пусть $P(n)$ — класс плоских ОС с n состояниями ячейки и шаблоном соседства, состоящим из всех таких векторов α, что $\|\alpha\| = 1$. Обозначим через $\nu(p)$ класс всех выпуклых фигур периметра p, а через $\nu(p,m)$ — класс всех выпуклых m-угольников периметра p. Считаем, что всегда $p \geqslant p_0$, где p_0 — некоторая достаточно большая константа. Пусть $L(x)$ — функция обратная для x^{x^5}, и $F(p,m) = \sum_{i=\frac{m}{2}}^{\frac{p-m}{2}} C_{2i}^m \cdot C_{p-2i}^m$.

Теорема 14 ([18])**.** *Для представления класса $W = \nu(p)$ ($W = \nu(p,m)$) фигур классом $P(n)$ ОС необходимо, чтобы $n \geqslant L(2^p) - c$ ($n \geqslant L(F(p,m)) - c$) и достаточно, чтобы $n \leqslant L(2^p) + c$ ($n \leqslant L(F(p,m)) + c$). При этом время представления любой фигуры X из W не превосходит величины $c \cdot p$.*

Непосредственное вложение различных процессов в однородные структуры обычно приводит к сложным ОС, характеризующимися большими значениями параметров, в связи с чем и возникает задача построения более простых ОС, моделирующих исходную ОС, или, более общно, задача изучения взаимного моделирования ОС.

Будем рассматривать следующий естественный способ взаимного моделирования ОС. Пусть

$$\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi), \quad \sigma' = (\mathbb{Z}^k, E_{n'}, V', \varphi').$$

Выберем натуральный вектор $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_k)$ и рассмотрим разбиение множества $\mathbb{Z}^k$ на параллелепипеды

$$P_\nu = \{l_1\nu_1, l_1\nu_1 + 1, \ldots, l_1\nu_1 + l_1 - 1\} \times \ldots \\ \ldots \times \{l_k\nu_k, l_k\nu_k + 1, \ldots, l_k\nu_k + l_k - 1\},$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$, $\nu \in \mathbb{Z}^k$.

Конфигурацию f блока P_ν назовем *конгруэнтной конфигурации* g блока P_0, если выполняется тождество $f(x) = g(x - \lambda)$, где $\lambda = (l_1\nu_1, \ldots, l_k\nu_k)$. Рассмотрим некоторое взаимно-однозначное отображение ς множества E_n на подмножество M множества конфигураций блока P_0 ОС σ'. Сопоставим каждому состоянию h ОС σ такое состояние h' ОС σ', что для любого ν из $\mathbb{Z}^k$ сужение h' на P_ν конгруэнтно конфигурации $\varsigma(h(\nu))$. Это означает, что конфигурация блока P_ν в ОС ν' «изображает» состояние ячейки ν в ОС σ. Обозначим $h' = \theta(h)$. Если существует такое натуральное N, что для любого поведения $f_0, f_1, f_2, \ldots$ ОС σ поведение $g_0 = \theta(f_0), g_1, g_2, \ldots$ ОС σ' удовлетворяет соотношению $g_{Ni} = \theta(f_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, то говорим, что ОС σ представима в ОС σ' с замедлением N (в случае $N = 1$ — представима без замедления).

При моделировании без замедления ОС σ в ОС σ', имеющей меньшее число состояний ячейки, чем σ, происходит, вообще говоря, соответствующе увеличение размеров окрестности ячейки. Это увеличение характеризуется в двумерном случае следующими утверждениями.

Теорема 15 ([8]). *При $n \to \infty$ равномерно по $\bar{m}$ почти все ОС σ из $S(2, n, \bar{m})$ представимы без замедления лишь в ОС из таких классов $S(2, n', \bar{m}')$, что $m_i' \geqslant m_i$ $(i = 1, 2)$;*

$$\frac{(m_1' + 1)(m_2' + 1)}{(m_1 + 1)(m_2 + 1)} \geqslant \log_{n'} n.$$

Теорема 16 ([8]). *Если*

$$m_i' \geqslant m_i, \quad i = 1, 2;$$
$$\left[\frac{m_1' + 1}{m_1 + 1}\right] \left[\frac{m_2' + 1}{m_2 + 1}\right] \geqslant \log_{n'} n + \log_{n'} \log_{n'} n + 200,$$

то произвольная ОС из $S(2, n, \bar{m})$ представима без замедления в некоторой ОС из $S(2, n', \bar{m}')$.

Можно показать, что при $k>2$ в случае $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{m_j+1} \leqslant 1$ (если $k=2$, то это условие выполняется автоматически) имеет место аналог теоремы 15, утверждающий, что при $n \to \infty$ равномерно по k и $\bar{m}$ из указанного класса почти все ОС σ из $S(k,n,\bar{m})$ представимы без замедления лишь в ОС из таких классов $S(k,n',\bar{m}')$, что

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i'+1}{m_i+1} \geqslant \log_{n'} n.$$

Кроме того, при $k>2$ утверждение теоремы 16 выполнено в случае

$$m_i' \geqslant m_i, \quad i=1,\ldots,k,$$
$$\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i'+1}{m_i+1} \geqslant \log_{n'} n + 2\frac{k-1}{k}\log_{n'}\log_{n'} n + c(k).$$

Таким образом, если $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{m_j+1} \leqslant 1$, то имеются необходимое и достаточное условия представимости без замедления любой ОС из $S(k,n,\bar{m})$ в классе $S(k,n',\bar{m}')$, записанные в виде неравенств с асимптотически равными при $n \to \infty$ и $m_i'/m_i \to \infty$ соответсвующими частями. В этом смысле можно сказать, что найденные условия «асимптотически совпадают». Оказывается, что в случае $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{m_j+1} > 1$ необходимое условие можно ослабить. Именно имеет место утверждение.

Теорема 17 ([8]). *Если* $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{m_j+1} > 1$, *то существуют функции* $c(\bar{m},k)$ *и* $a(\bar{m},k) < 1$ *такие, что при* $\log_{n'} n > c(\bar{m},k)$ *все ОС из* $S(k,n,\bar{m})$ *представимы без замедления в некотором классе* $S(k,n',\bar{m}')$, *для которого*

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i'+1}{m_i+1} \leqslant a(\bar{m},k)\log_{n'} n.$$

В случае моделирования с замедлением можно указать некоторую величину Q, зависящую от параметров обеих ОС и обладающую тем свойством, что при замедлении, меньшем Q, существенного уменьшения (по сравнению с моделированием без замедления) величины окрестности, моделирующей ОС, не происходит, в то время как при замедлениях, несколько больших Q, ограничения на размеры окрестности, моделирующей ОС, практически не возникают. Следующие утверждения содержат более точную формулировку этого факта.

Теорема 18 ([8]). *При $n \to \infty$ равномерно по k и $\bar{m}$ почти все ОС $S(k, n, \bar{m})$ представимы с замедлением, не превосходящим величины*

$$Q = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m'_i} n^h \log_{n'} n(1 - \varepsilon(n))}$$

лишь в таких классах $S(k, n, \bar{m})$, $n' \leqslant n$, что

$$\frac{h'}{h} = \prod_{i=1}^{k} \frac{m'_i + 1}{m_i + 1} \geqslant (1 - \delta(n)) \log_{n'} n.$$

Здесь $\varepsilon(n)$ и $\delta(n)$ — некоторые функции такие, что $\varepsilon(n) > 0$, $\delta(n) > 0$; $\varepsilon(n) \to 0$, $\delta(n) \to 0$ при $n \to \infty$; h и h' — число ячеек в окрестности ячейки ОС σ и σ' соответственно.

Теорема 19 ([8]). *Если $k \geqslant 2$, $n \geqslant c(k)$, $m'_i \geqslant 3$, то любая ОС из $S(k, n, \bar{m})$, представима с замедлением в некоторой ОС из $S(k, n, \bar{m})$. При $n \to \infty$, $n' \to \infty$, $n' < n$, $h' \leqslant h \log_{n'} n$ это замедление можно выбрать асимптотически равным величине*

$$Q = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m'_i} n^h \log_{n'} n}.$$

Как следствие из этих теорем, получаем, что при фиксированных $k \geqslant 2$ и $m'_i \geqslant 3$ $(i = 1, \ldots, k)$ в случае $n' \to \infty$, $\log_{n'} n \to \infty$ наименьшее замедление, с которым любая ОС из $S(k, n, \bar{m})$ представима в ОС из $S(k, n', \bar{m}')$, асимптотически равно

$$\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m'_i} n^h \log_{n'} n}.$$

Для воспроизведения в ОС различных процессов особый интерес представляют универсальные ОС, которые могут моделировать поведение любых ОС той же размерности. Более строго, k-мерная ОС σ называется *универсальной*, если в ней представима любая k-мерная ОС σ' (различным σ' при этом могут соответствовать различные величины замедления). Такое понятие универсальности является более сильным, чем универсальность в чисто вычислительном смысле. Первый пример универсальной двумерной ОС с 29 состояниями ячейки и шаблоном соседства $((0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0))$, определяющим крестообразную пятиклеточную окрестность ячейки, был предложен Дж. Фон Нейманом [7]. Приведем ряд дальнейших примеров универсальных ОС, удовлетворяющих в том или ином смысле требованиям «простоты» их устройства.

Теорема 20. *Для любого $k > 2$ существует универсальная k-мерная ОС с двумя состояниями ячейки и окрестностью, состоящей из всех единичных векторов.*

Теорема 21 ([11]). *Для любой размерности $k \geqslant 2$ существует $c(k)$ такое, что при $n \geqslant c(k)$ в любом классе $S(k,n,\bar{m})$ имеется универсальная ОС с симметрической функцией переходов.*

Теорема 22 ([12]). *Существует одномерная универсальная ОС с окрестностью $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha-1, \alpha+1\}$ ячейки α.*

В связи с распознаванием универсальности и взаимной представимости ОС введем ряд вспомогательных понятий. ОС σ называем *тождественной*, если для любого ее состояния f выполняется $\Phi(f) = f$, где Φ — основная функция переходов ОС σ. Пусть $\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$. Состояние α ячейки этой ОС называем *поглощающим*, если существует такое натуральное l, что для произвольных k-мерного куба Q с длиной стороны l', $l' \geqslant l$, и состояния f ОС σ такого, что $f|_Q \equiv \alpha$, выполнены условия:
1) $\Phi(f)|_Q \equiv \alpha$;
2) если $Q' \supseteq Q$ (Q' — блок), то существует $n \geqslant 1$ такое, что $\Phi^n(f)|_{Q'} \equiv \alpha$.

Теорема 23 ([11]). *Пусть $n \geqslant 2$, $n' \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, причем ОС σ из $S(k,n,\bar{m})$ не является тождественной и не имеет поглощающих* *состояний. Тогда не существует алгоритма, который по произвольной ОС σ' размерности k, имеющей n' состояний ячейки, устанавливал бы, представима ли σ в σ'.*

Как следствие из теоремы 23 вытекает алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания универсальности ОС, имеющих фиксированные размерность k ($k \geqslant 2$) и число n' состояний ячейки, $n' \geqslant 2$.

Представляет интерес вопрос о существовании критерия универсальности ОС, основанного на представимости в ней некоторого множества «простых» ОС. Как показывает следующая теорема, для рекурсивно перечислимых множеств неуниверсальных ОС такого критерия не существует.

Теорема 24 ([11]). *Для любого рекурсивно перечислимого множества M неуниверсальных k-мерных ($k \geqslant 2$) ОС существует неуниверсальная ОС, в которой представима каждая ОС из M.*

В связи с критериями универсальности ОС представляет интерес проблема оценки доли универсальных ОС, характеризующихся заданными параметрами, и, в частности, решение вопроса, какими являются «почти все» ОС — универсальными либо не универсальными.

Несмотря на алгоритмические трудности, возникающие при распознавании универсальности ОС, задача распознавания возможности реализации универсальной ОС посредством однородных бесконечных логических сетей, построенных из элементов, реализующих функции алгебры логики и некоторой системы $S = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ и элементов единичной задержки, оказывается *алгоритмически разрешимой.* Будем говорить, что система $S = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ функций алгебры логики *k-универсальна*, если в виде суперпозиции через S может быть выражена локальная функция переходов универсальной k-мерной ОС. Имеет место следующий критерий k-универсальности систем S.

Теорема 25 ([12]). *Для произвольного натурального k система S функций алгебры логики k-универсальна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов Поста $L_1, S_6, P_6, F_4^\infty, F_8^\infty$.*

Таким образом, понятия k-универсальности при всех $k = 1, 2, \ldots$ оказываются эквивалентными друг другу, и можно говорить просто об универсальности системы S функций алгебры логики, не уточняя значение k.

Более общий случай плоских и объемных ОС добавляет возможность разбиения пространства на другие по форме ячейки. Так, в плоском случае разбиения возможны не только на квадраты, но и на правильные треугольники и шестиугольники. Далее также как и выше, в такие ячейки помещаются одинаковые автоматы с определенным шаблоном соседства и аналогично «квадратному» случаю определяется функционирование такой структуры. Такие структуры автоматов называют плоскими i-мозаичными ОС (МОС) ($i = 3, 4, 6$).

Теорема 26 ([18]). *Для любого $i = 3, 4, 6$ существуют универсальные плоские i-мозаичные ОС с двумя состояниями ячейки и окрестностью, состоящей только из соседних ячеек.*

5. Однородные структуры со входами и выходами

Понятие ОС можно расширить, допуская наличие у каждой ячейки ОС внешних входов и выходов. Получающаяся в результате такого обобщения однородная бесконечная схема из одинаковых конечных автоматов, имеющих «внешние» входы и выходы, называется *однородной структурой со входами и выходами* (о. с. в. в.) Приведем в настоящем параграфе определение о. с. в. в. в форме структурного автомата (соответствующее определение о. с. в. в. в форме абстрактного автомата дается в следующем параграфе).

Будем называть однородной структурой со входами и выходами набор $(\mathbb{Z}^k, W, V)$, где $\mathbb{Z}^k$ — множество k-мерных векторов с целыми координатами, задающих узлы k-мерной целочисленной решетки; W — конечный автомат, помещенный в каждый узел этой решетки, имеющий $n + p$ входных двоичных каналов (n из них — основные и p — боковые) и $m + p$ выходных двоичных каналов (m основных и p боковых); $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ — набор векторов из $\mathbb{Z}^k$, называемый шаблоном соседства данной о. с. в. в.

Каждый вектор α_i из V $(i = 1, \dots, p)$ определяет для автомата W_α, помещенного в узел решетки с координатами α, координату $\alpha + \alpha_i$ того автомата («соседнего» с W_α), i-й боковой выход которого соединен с i-м боковым входом автомата W_α. Входные сигналы, поступающие на о. с. в. в. $(\mathbb{Z}^k, W, V)$, описываются отображениями $X : \mathbb{Z}^k \to E^n$, где $X(\alpha)$ — входной набор, поступающий на основные входы автомата W_α; аналогично состояния о. с. в. в. описываются отображениями $\Sigma : \mathbb{Z}^k \to S$ (S — множество состояний автомата W), а выходные сигналы — отображениями $Y : \mathbb{Z}^k \to E^m$. Если известны состояние Σ о. с. в. в. $(\mathbb{Z}^k, W, V)$ в момент t, а также входной сигнал X, поступающий на нее в этот момент, то функции переходов и выходов автомата W позволяют однозначно определить состояние Σ' о. с. в. в. $(\mathbb{Z}^k, W, V)$ в момент $t + 1$, а также ее выходной сигнал Y в момент t. В результате определяются функции Φ, Ψ:

$$\Sigma' = \Phi(\Sigma, X), \quad Y = \Psi(\Sigma, X),$$

называемые соответственно *функцией переходов* и *функцией выходов* данной о. с. в. в.

Как и в случае конечных автоматов, функции Φ, Ψ можно распространить на произвольные конечные последовательности входных символов:

$$\begin{gathered}\Phi(\Sigma, \Lambda) = \Sigma;\\ \Phi(\Sigma, X_1 \dots X_{n+1}) = \Phi(\Phi(\Sigma, X_1 \dots X_n), X_{n+1});\\ \Psi(\Sigma, X_1 \dots X_{n+1}) = \Psi(\Phi(\Sigma, X_1 \dots X_n), X_{n+1}),\end{gathered}$$

(Λ — пустое слово).

Далее обычным образом вводится функция $\bar{\Psi}$:

$$\begin{gathered}\bar{\Psi}(\Sigma, \Lambda) = \Lambda;\\ \bar{\Psi}(\Sigma, X_1 \dots X_{n+1}) = \bar{\Psi}(\Sigma, X_1 \dots X_n)\Psi(\Sigma, X_1 \dots X_{n+1}).\end{gathered}$$

Состояния Σ_1, Σ_2 о. с. в. в. A_1, A_2 называются *эквивалентными*, если для любого входного слова $\chi = X_1 \dots X_2$ этой о. с. в. в. выполняется $\bar{\Psi}_1(\Sigma_1, \chi) = \bar{\Psi}_2(\Sigma_2, \chi)$ (Ψ_i — функция выходов о. с. в. в. A_i). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 27 ([1]). *Проблема распознавания эквивалентности эффективным образом заданных состояний о. с. в. в. алгоритмически неразрешима.*

При этом оказывается, что алгоритмическая неразрешимость возникает уже для случая автономных о. с. в. в. (то есть таких, у которых автомат W не имеет основных входов), и удается построить конкретную о. с. в. в., для которой проблема распознавания эквивалентности ее состояний алгоритмически неразрешима.

Будем далее предполагать, что у рассматриваемых о. с. в. в. $(\mathbb{Z}^k, W, V)$ выделено «состояние покоя» s_0 автомата W, сохраняющееся, если все соседние (согласно шаблону V) с ним автоматы также имеют состояние s_0, а на основные входы поступают нули.

Пусть $M(l, r, p)$ — класс всех о. с. в. в. вида $(\mathbb{Z}^k, W, V)$, у которых автомат W имеет l состояний; $|V| = p$ и

$$r = \max_{\alpha \in V} \|\alpha\|, \quad \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\alpha_i|.$$

Размерность k здесь и далее предполагается фиксированной. По аналогии с понятием T-отличимости состояний конечного автомата будем называть состояния Σ_1, Σ_2 о. с. в. в. A T-эквивалентными, если для любого входного слова χ длины T имеем $\bar{\Psi}_1(\Sigma_1, \chi) = \bar{\Psi}_2(\Sigma_2, \chi)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 28 ([1]). *При $l_0 \geqslant 3$, $r_0 \geqslant 1$ и $p_0 \geqslant 1$ для любого натурального T найдется такая о. с. в. в. A из $M(l_0, r_0, p_0)$, некоторые два состояния которой T-эквивалентны, но не $(T+1)$-эквивалентны.*

Состояния о. с. в. в. A, у которых лишь конечное число автоматов W, расположенных в ее узлах, имеют отличное от s_0 состояние, называем *конфигурациями о. с. в. в. A*. *Диаметром конфигурации* называется диаметр множества ее узлов, в которых находятся автоматы, не имеющие состояния s_0.

Теорема 29 ([1]). *При любых $d_0 \geqslant 1$, $r_0 \geqslant 1$, $p_0 \geqslant 1$ и натуральном T найдутся такие l_0, о. с. в. в. A из $M(l_0, r_0, p_0)$ и конфигурации f, g о. с. в. в. A, диаметры которых не превосходят d_0, что f и g T-эквивалентны, но не $(T+1)$-эквивалентны.*

Теорема 30 ([1]). *При любых $d_0 \geqslant 1$, $l_0 \geqslant 3$, $p_0 \geqslant 2$ и натуральном T найдутся такие r_0, о. с. в. в. A из $M(l_0, r_0, p_0)$ и конфигурации f, g о. с. в. в. A, диаметры которых не превосходят d_0, что f и g T-эквивалентны, но не $(T+1)$-эквивалентны.*

Перечисленные теоремы означают, что для установления такого наименьшего τ, что из τ-эквивалентности конфигураций не превосходящего d_0 диаметра в о. с. в. в. в $M(l_0, r_0, p_0)$ следует их эквивалентность, необходим каждый из параметров d_0, l_0, r_0, p_0.

Для произвольной вычислимой функции $v(d, l, r, p)$ четырех натуральных аргументов введем класс M_v всех таких о. с. в. в. A, что для любых двух конфигураций f, g этой о. с. в. в. из их $v(d, l, r, p)$-эквивалентности, где $A \in M(l, r, p)$ и d — наибольший из диаметров конфигураций f, g вытекает эквивалентность этих конфигураций.

Теорема 31 ([1]). *Проблема распознавания эквивалентности конфигураций о. с. в. в. A алгоритмически разрешима тогда и только тогда, когда для некоторой вычислимой функции v о. с. в. в. A принадлежит классу M_v.*

Будем говорить, что о. с. в. в. A_1 *сводится* к о. с. в. в. A_2, если любое состояние о. с. в. в. A_1 эквивалентно некоторому состоянию о. с. в. в. A_2. Такое понятие сводимости для о. с. в. в. является аналогом понятия вложимости для конечных автоматов. Проблема распознавания сводимости для о. с. в. в. оказалась алгоритмически неразрешимой. Если, однако, от рассмотрения сводимости отдельных о. с. в. в. перейти к рассмотрению сводимости классов о. с. в. в. (определяемой как сводимость каждой о. с. в. в. одного класса к некоторой о. с. в. в. другого класса), то ситуация несколько упрощается. Именно, имеют место следующие примыкающие друг к другу утверждения.

Теорема 32 ([1]). *Пусть $l_i \geqslant 2$; $p_i \leqslant 4r_i(r_i+1)$; $i = 1, 2$. Класс $M(l_1, r_1, p_1)$ сводится к классу $M(l_2, r_2, p_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1 \leqslant l_2$, $r_1 \leqslant r_2$, $p_1 \leqslant p_2$.*

Теорема 33 ([1]). *Пусть $M(l_1, r_1, p_1)$ и $M(l_2, r_2, p_2)$ — классы о. с. в. в. $(\mathbb{Z}^k, W, V)$, у которых автомат W имеет n основных входов и m основных выходов. При $p_i \leqslant m2^n$; $l_i \geqslant 2^{p_i+1}$; $i = 1, 2$, класс $M(l_1, r_1, p_1)$ сводится к классу $M(l_2, r_2, p_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1 \leqslant l_2$, $r_1 \leqslant r_2$, $p_1 \leqslant p_2$.*

Из утверждений видно, что увеличение хотя бы одного из параметров r, k, p (при некоторых дополнительных ограничениях) увеличивает множество отображений, реализуемых о. с. в. в., причем такого же увеличения нельзя добиться при увеличении других параметров.

Пусть $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$ — некоторая о. с. в. в. Состояния s_1 и s_2 автомата W назовем *сильно неотличимыми*, если при изменении в произвольном состоянии f о. с. в. в. A состояния s_1 любого экземпляра автомата A на s_2 получается состояние f', эквивалентное f. Если существуют такие эквивалентные состояния f, f' о. с. в. в. A, что некоторый экземпляр автомата W в одном из них имеет состояние s_1, а в другом — состояние s_2, то говорим, что s_1 и s_2 *слабо неотличимы.*

Теорема 34 ([1]). *О. с. в. в. $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$, имеющая хотя бы два сильно неотличимых состояния автомата W, сводится к некоторой о. с. в. в. $(\mathbb{Z}^k, W', V')$ с меньшим, чем у W, числом состояний состояний автомата W'. Если никакие два состояния автомата W не являются слабо неотличимыми, то такое сведение невозможно.*

Как видно из приведенных результатов, развитие теории экспериментов для о. с. в. в. оказывается связанным с преодолением существенных алгоритмических трудностей, отсутствовавших в аналогичных задачах для конечных автоматов.

Интерес представляет нахождение числа попарно различимых о. с. в. в., имеющих заданные параметры. Этот вопрос остается открытым.

По аналогии с конечными автоматами можно рассматривать схемы из инициальных (с выделенным начальным состоянием) о. с. в. в., применяя для этого операции суперпозиции и обратной связи. Здесь рассматриваются операции следующих типов.

1) Добавление или удаление фиктивных основных входов о. с. в. в.
2) Перестановка (перенумерация) основных входов о. с. в. в.
3) Выделение основного выхода у о. с. в. в. $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$ (возникает новая о. с. в. в. $A' = (\mathbb{Z}^k, W', V')$, у которой автомат W' получен из W удалением всех основных выходов, кроме одного).
4) Склеивание основных входов о. с. в. в. $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$ (происходит отождествление некоторых двух основных входов автомата W).

5) Объединение о. с. в. в. $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$ и $A' = (\mathbb{Z}^k, W', V')$ (о. с. в. в., возникающая при одновременном независимом размещении автоматов обеих о. с. в. в. в узлах одной и той же прямоугольной k-мерной решетки).
6) Подстановка о. с. в. в. $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$, автомат W которой имеет единственный основной выход, вместо j-го основного входа о. с. в. в. $A' = (\mathbb{Z}^k, W', V')$ (одновременное независимое размещение автоматов обеих о. с. в. в. в узлах одной и той же прямоугольной k-мерной решетки — как и в п. 5 — и последующее отождествление основного выхода каждого автомата W с j-м основным входом размещенного в том же узле автомата W').
7) Обратная связь 1-го типа (если о. с. в. в. $A = (\mathbb{Z}^k, W, V)$ такова, что j-й основной выход автомата W зависит с задержкой от i-го основного входа этого автомата, то в каждом узле решетки о. с. в. в. A осуществляется отждествление j-го основного выхода автомата W с его i-м основным входом).
8) Обратная связь 2-го типа (если о. с. в. в. $A = (\mathbb{Z}^k, W, (v_1, \ldots, v_p))$ такова, что j-й основной выход автомата W зависит с задержкой от всех его основных входов и β — вектор из $\mathbb{Z}^k$, то j-й основной выход автомата W преобразуется в $(|V|+1)$-й боковой выход, а некоторый основной вход этого автомата преобразуется в $(|V|+1)$-й боковой вход; в результате возникает новая о. с. в. в. $(\mathbb{Z}^k, W, (v_1, \ldots, v_p, \beta))$.

Операции 1–6 называются *операциями суперпозиции*; операции 1–8 — *операциями композиции*. Как и обычно, вводятся операторы замыкания множества $\mathfrak{M}$ о. с. в. в. относительно операций суперпозиции и композиции; они обозначаются через $[\mathfrak{M}]_c$ и $[\mathfrak{M}]_k$ соответственно. Совокупность всех инициальных о. с. в. в. размерности k (рассматриваемых с точностью до реализуемых ими отображений) обозначим $\tilde{O}_k$.

Обычным образом вводятся понятия полного (замыкание которого равно $\tilde{O}_k$), замкнутого и предполного множеств о. с. в. в., а также понятие базиса относительно этих операторов замыкания. Легко устанавливается существование конечных полных систем о. с. в. в. для случая $[\ ]_k$, критериальность системы всех предполных классов и континуальность множества замкнутых классов для о. с. в. в.

Имеют место следующие аналоги известным теорем из теории структурных конечных автоматов.

Теорема 35 ([1]). *Мощность множества предполных классов для о. с. в. в. в случаях* $[\,]_k$ *и* $[\,]_c$ *равна континууму.*

Теорема 36 ([1]). *Не существует алгоритма, устанавливающего полноту или неполноту произвольного конечного множества о. с. в. в. в случае* $[\,]_k$.

Теорема 37 ([1]). *Для любого натурального* n *существует счетное множество базисов, состоящих ровно из* n *о. с. в. в. в случае* $[\,]_k$.

Теорема 38 ([1]). *Существуют счетные базисы и полные системы, не содержащие базисов, в случае* $[\,]_c$.

Представляет интерес вопрос о полноте системы всех отображений из $\tilde{O}_k$, ячейки которых имеют заданное число $n \geqslant 1$ входов для случая $[\,]_c$, а также вопрос о полноте внутри классов внутри отображений из $\tilde{O}_k$, например, линейных, квазилинейных, монотонных и других отображений в случае $[\,]_k$.

6. Вычисления в однородных структурах

Однородную структуру, содержательно интерпретируемую как бесконечная однородная схема из одинаковых конечных автоматов, размещенных в узлах целочисленной решетки, можно рассматривать также как один бесконечный автономный автомат, состояниями которого являются бесконечные k-мерные матрицы. Обобщая эту модель на бесконечные автоматы (A, Q, B, φ, ψ) с невырожденными входными и выходными каналами, приходим к понятию однородной структуры со входами и выходами в форме абстрактного автомата.

Введем ряд вспомогательных понятий, необходимых для формального определения таких однородных структур. Будем называть *k-мерной n-слойной мозаикой* отображение $f : \mathbb{Z}^k \to \{0,1\}^n$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $n \geqslant 1$. Элементы $\mathbb{Z}^k$ называем *ячейками мозаики* f. Если множество $\{\alpha | f(\alpha) \neq (0, \dots, 0)\}$ конечно, то мозаика f

называется *конфигурацией*; множество всех k-мерных n-слойных конфигураций обозначаем $\mathcal{M}_n^k$. Если f есть n-слойная мозаика, то значения $f(\alpha)$ можно представить в виде $(f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha))$, где $f_1, \dots, f_n$ — однослойные мозаики. Мозаику f_i называем *i-ым слоем мозаики f* $(i = 1, \dots, n)$. Отображение $\varphi : \mathcal{M}_n^k \to \mathcal{M}_l^k$ называется *однородным*, если существуют такие набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ $(s \geqslant 0)$ попарно различных элементов $\mathbb{Z}^k$ и функция $\varphi' : \{0,1\}^n \times \ldots \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}^l$, что для произвольной мозаики $f \in \mathcal{M}_n^k$ выполняется $[\varphi(f)](\alpha) = \varphi'(f(\alpha + \alpha_1), \dots, f(\alpha + \alpha_s))$ при всех $\alpha \in \mathbb{Z}^k$.

Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ называем *шаблоном соседства* однородного отображения φ, а функцию φ' — *локальной функцией отображения* φ. Если $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ — шаблон соседства однородного отображения φ, причем

$$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}), \quad b_j = \max_{i=1,\dots,s} |\alpha_{ij}|, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, k,$$

вектор $(b_1, \dots, b_k)$ будем называть *размером однородного отображения φ*.

Бесконечный автомат

$$\mathcal{U} = (\mathcal{M}_p^k, \mathcal{M}_n^k, \mathcal{M}_q^k, \varphi, \psi, q_0),$$

у которого: $\mathcal{M}_p^k$ — входной алфавит; $\mathcal{M}_n^k$ — алфавит состояний; $\mathcal{M}_q^k$ — выходной алфавит; $\varphi : \mathcal{M}_n^k \times \mathcal{M}_p^k = \mathcal{M}_{n+p}^k \to \mathcal{M}_n^k$ — однородная функция переходов; $\psi : \mathcal{M}_{n+p}^k \to \mathcal{M}_q^k$ — однородная функция выходов; $q_0 \in \mathcal{M}_n^k$; называем *инициальной однородной структурой со входами и выходами* (как и в предыдущем параграфе, сокращенно обозначаемой о. с. в. в.)

p называется числом входов о. с. в. в. $\mathcal{U}$; q — числом выходов; n — *толщиной*. Размером о. с. в. в. $\mathcal{U}$ называется вектор $(\max(b_1, c_1), \dots, \max(b_k, c_k))$, где $(b_1, \dots, b_k), (c_1, \dots, c_k)$ — размеры однородных отображений φ и ψ.

Как обычно, поведение о. с. в. в. рассматриваем в дискретном времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ Если $\chi \in \mathcal{M}_n^k$ — состояние о. с. в. в. $\mathcal{U}$ в некоторый момент t, то двоичный набор $\chi(\alpha) = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ называем *состоянием ячейки α* в данный момент времени t; χ_i называем *значением i-го слоя состояния ячейки α*. Аналогично, если χ — входной либо выходной сигнал о. с. в. в. $\mathcal{U}$, то набор $\chi(\alpha)$ называем входным (выходным) сигналом в ячейке α для рассматриваемого момента t, а χ_i — значением i-го входа (выхода) в ячейке α.

Рассмотрим ряд оценок, связанных с вычислениями в о. с. в. в. Введем необходимые для этого понятия и обозначения. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_l^k$. Обозначим через $[\mu]$ класс всех последовательностей $\chi : \chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$, элементов M_{l+1}^k, удовлетворяющих следующим условиям:
1) существует единственная конфигурация χ_{i0}, у которой $(l+1)$-ый слой не равен тождественно 0; этот слой имеет значение 1 в точке $(0, \ldots, 0)$ и значение 0 в остальных точках;
2) при $i \geqslant i_0$, первые l слоев конфигурации χ_i образуют конфигурацию μ.

Величину i_0, соответсвующую последовательности χ указанного вида, обозначаем $\iota(\chi)$. Будем говорить, что инициальная о. с. в. в. $\mathcal{U} = (\mathcal{M}_{l_2+1}^k, \mathcal{M}_l^k, \mathcal{M}_{l_2+1}^k, \varphi, \psi, q_0)$ вычисляет отображение $F : M \to \mathcal{M}_{l_2}^k$, где $M \subseteq \mathcal{M}_{l_1}^k$, если для любой конфигурации $\mu \in M$ произвольная последовательность $\chi \in [\mu]$ преобразуется автоматом $\mathcal{U}$ в последовательность $\chi' \in [F(\mu)]$. Наибольшее значение выражения $\iota(\chi') \to \iota(\chi)$ называется *временем вычисления* посредством о. с. в. в. $\mathcal{U}$ значения отображения F в точке μ (если такое наибольшее значение отсутствует, то время вычисления полагается равным ∞).

Наибольшее время вычисления посредством о. с. в. в. $\mathcal{U}$ значений отображения F называется *временем вычисления* этой о. с. в. в. отображения F и обозначается $T_{\mathcal{U}}(F)$. Обозначим

$$T_{m_1,\ldots,m_k,l}(F) = \min_{\mathcal{U} \in A} T_{\mathcal{U}}(F),$$

где A — класс всех вычисляющих F о. с. в. в. толщины l и размера $(m_1, \ldots, m_k)$. Для произвольного класса K отображений F указанного вида (значения k, l_1, l_2 у всех отображений из K предполагаются одинаковыми), определенных на конечных множествах M, рассматриваем функцию Шеннона

$$T_{m_1,\ldots,m_k,l}(K) = \max_{F \in K} T_{m_1,\ldots,m_k,l}(F),$$

характеризующую время вычисления операторов из K посредством о. с. в. в. толщины l и размера $(m_1, \ldots, m_k)$.

Для простоты ограничимся далее рассмотрением случая $k = 2$ и приведем ряд оценок величины $T_{m_1,m_2,l}(K)$ для различных классов K. Будем далее обозначать через $\mathcal{M}^2_{l,n}$ множество всех конфигураций $\mu \in \mathcal{M}^2_{l,n}$, у которых все ячейки α такие, что $\mu(\alpha) \neq 0$, расположены в квадрате $Q_n = \{(\alpha_1, \alpha_2) \mid |\alpha_1| \leqslant n,\ |\alpha_2| \leqslant n\}$. Такие конфигурации μ изображают квадратные матрицы, элементы которых суть двоичные наборы длины n.

Пусть $\{K_n\}$ — последовательность таких классов отображений, что каждое отображение $F \in K_n$ определено на некотором подмножестве M_n множества $\mathcal{M}^2_{l,n}$ и принимает значения в $\mathcal{M}^2_{l_2,n}$. Последовательность $\{j_n\}$ натуральных чисел называем $\{K_n\}$-*допустимой*, если $j_n \to \infty$:

$$\frac{j_n \max(n^2, 2^{j_n})}{\log_2 |K_n|} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 39. *Если K_n — класс всех отображений множества $\mathcal{M}^2_{l_1,n}$ в множество $\mathcal{M}^2_{l_2,n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) и $\{j_n\}$ есть $\{K_n\}$-допустимая последовательность, то*

$$T_{m_1,m_2,j_n}(K_n) \sim \frac{(2n+1)\sqrt{l_2}}{\sqrt{2m_1m_2j_n}} 2^{\frac{l_1(2n+1)^2}{2}}.$$

Нетрудно видеть, что $\{K_n\}$-допустимой в данном случае является, например, любая растущая последовательность $\{j_n\}$, удовлетворяющая условию $j_n \leqslant 4\alpha l_1 n^2$, где α — некоторая константа, $\alpha < 1$.

Обозначим через ε однослойную двумерную конфигурацию, принимающую значение 1 в точке $(0, 0)$ и значение 0 в прочих точках. Отображения $F : \mathcal{M}^2_{l_1,n} \to \{0, \varepsilon\}$ можно рассматривать как функции алгебры логики, зависящие от $l_1(2n+1)^2$ переменных.

Теорема 40. *Если K_n — класс всех отображений множества $\mathcal{M}^2_{l_1,n}$ в множество $\{0, \varepsilon\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) и $\{j_n\}$ есть $\{K_n\}$-допустимая последовательность, то*

$$T_{m_1,m_2,j_n}(K_n) \sim \frac{1}{\sqrt{2m_1m_2j_n}} 2^{\frac{l_1(2n+1)^2}{2}}.$$

Как и в теореме 27, выполнение условия $j_n \leqslant 4\alpha l_1 n^2$ ($\alpha < 1$) для растущей последовательности $\{j_n\}$ обеспечивает ее $\{K_n\}$-допустимость.

Теорема 41. *Если K_n — класс всех отображений множества $\mathcal{M}^2_{l_1,n}$ в множество $\{0,\varepsilon\}$, принимающих значение ε ровно на k_n конфигурациях; $\{j_n\}$ есть $\{K_n\}$-допустимая последовательность, удовлетворяющая условию $k_n/j_n \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Если $\log_2 k_n = o(n^2)$, то

$$T_{m_1,m_2,j_n}(K_n) \sim n\sqrt{\frac{2lk_n}{m_1 m_2 j_n}}.$$

Если $\log_2 k_n = o(n^2)$ и $\frac{k_n}{2^{l(2n+1)^2}} \to 0$, то

$$T_{m_1,m_2,j_n}(K_n) \sim n\sqrt{\frac{(2l - \frac{\log_2 k_n}{2n^2})k_n}{m_1 m_2 j_n}}.$$

Наконец, при $k_n \sim \alpha 2^{l(2n+1)^2}$, $0 < \alpha < 1$, выполняется

$$T_{m_1,m_2,j_n}(K_n) \sim n\sqrt{\frac{H(\alpha)}{m_1 m_2 j_n}2^{\frac{l(2n+1)^2}{2}}},$$

где $H(\alpha) = -(\alpha \log_2 \alpha + (1-\alpha)\log_2(1-\alpha))$.

Нетрудно проверить, что в случае $\log_2 k_n = o(n^2)$ для растущей последовательности $\{j_n\}$ достаточно потребовать выполнения условий $j_n = o(k_n)$; $j_n \leqslant 2\beta \log_2 n$ при некотором $\beta < 1$.

Теорема 42. *Пусть K_n — класс всех отображений множества M_n, удовлетворяющих локальному ограничению λ конфигураций из $\mathcal{M}^2_{l,n}$ в множество $\{0,\varepsilon\}$, принимающих значение ε ровно на k_n конфигурациях; $\log_2 |M_n|$ порядка n^2; $\log_2 k_n = o(n^2)$; $j_n = o(k_n)$ при $n \to \infty$, причем $\{j_n\}$ есть $\{K_n\}$-допустимая последовательность.*

Тогда существует константа α ($0 < \alpha \leqslant 1$) такая, что

$$\log_2 |M_n| \sim 4\alpha l n^2,$$

$$T_{m_1,m_2,j_n}(K_n) \sim n\sqrt{\frac{2\alpha l k_n}{m_1 m_2 j_n}}.$$

Как и в теореме 29, для растущей последовательности $\{j_n\}$ здесь достаточно выполнения условий $j_n = o(k_n)$; $j_n \leqslant 2\beta \log_2 n$ при некотором $\beta < 1$.

Получение перечисленных оценок было связано с использованием принципа локального кодирования [5]. Задача реализации в о. с. в. в. булевых отображения с минимальной временной сложностью, решавшаяся при получении этих оценок, сводится по существу к задаче хранения информации в о. с. в. в., обеспечивающего наименьшее время ее считывания. Основное отличие от аналогичной задачи для обычных логических сетей заключается в необходимости учета геометрических аспектов. Интересной особенностью является то, что для получения асимптотически наименьшего времени считывания информации оказывается необходимой ее периодическая циркуляция по ячейкам о. с. в. в.; хранение информации «неподвижным образом» приводит к увеличению наименьшего времени считывания в $\sqrt{2}$ раз.

Реализация в ОС различных вычислительных процессов оказывается в большинстве случаев основанной на непосредственном «вложении» в них схем из конечных автоматов некоторого базиса B. Поэтому представляется целесообразным рассматривать однородную структуру как однородный процессор некоторой вычислительной системы, «настраиваемый» в ходе выполнения программы (внешний по отношению к данному процессору) на те или иные схемы автоматов в базисе B. Такие схемы, осуществляющие параллельную обработку информации, могут рассматриваться как аналоги команд обычных ЭВМ с последовательной обработкой информации. Здесь возникают задачи разработки алгоритмических языков для вычислительных систем однородного типа, позволяющих описывать процессы изменения «вложенных» в них схем автоматов, а также задачи оптимальной реализации вычислительных процедур при помощи схем из размещенных в узлах прямоугольной решетки автоматов базиса B.

В качестве примера такого базиса будем рассматривать набор B_0 элементов, реализующих с задержкой на один такт функции $x_1 \vee x_2$, $x_1 \& x_2$ и $\bar{x}_1$, элементов задержки на один такт с нулевым и единичным начальными состояниями, а также соединительных элементов, осуществляющих мгновенную передачу двоичного сигнала и пересечение двух линий передачи таких сигналов.

Эти элементы размещаются в узлах плоской прямоугольной решетки внутри некоторого прямоугольника P, причем элемент, расположенный в узле с координатами (a_1, a_2), может быть соединен только с элементами, расположенными в узлах (a_1-1, a_2), (a_1+1, a_2), (a_1, a_2-1), (a_1, a_2+1). Будем называть схемы указанного вида *прямоугольными логическими сетями*; число узлов решетки в наименьшем прямоугольнике P, содержащем сеть S, называем *площадью сети* S.

Вычисление функций вещественной переменной при помощи прямоугольных логических сетей можно осуществлять, кодируя числовые значения последовательностями двоичных разрядов, возникающих в моменты $t = t_0, t_0+1, \ldots, t_0+n+1$ на том или ином входе либо выходе сети. При этом оказывается возможным «конвейерный» режим вычислений, когда n-разрядные двоичные записи аргументов вычисляемой операции поступают на входы сети без временных промежутков между ними, а двоичные записи результатов появляются на выходе также без промежутков с постоянным временным сдвигом по отношению к моменту подачи на входы младших разрядов соответствующих аргументов. Так, например, обычная схема умножения чисел «столбиком» и основанная на разложении в степенной ряд схема деления позволяют умножать и делить n-разрядные двоичные дроби из отрезка $[0, 1]$ в конвейерном режиме, причем величины временного сдвига τ оказываются не превосходящими асимптотически соответственно $9n$ и $9n \log_2 n$, а площади прямоугольных логических сетей — $135n$ и $533n^2$.

Так как двоичные разряды N пар n-разрядных аргументов поступают на входы сети в течении Nn тактов времени, а результаты появляются на выходах в течение $Nn + \tau$ тактов, считая с начального момента подачи сигналов на входы, при достаточно больших N величина τ практически не сказывается на времени вычислений (при $N \to \infty$ вычисления происходят по существу в реальном времени), и основной становится задача уменьшения площади сети. Интересно отметить то обстоятельство, что по сравнению с обычной процедурой умножения известные процедуры быстрого умножения чисел приводят к существенно большим по площади сетям и даже к большим значениям произведения времени вычисления на площадь сети, минимизация которого представляет интерес при однократном вычислении в однородном процессоре.

ОС как достаточно универсальная модель использовалась в решении целого ряда задач биологии, социологии, обработки эксперимента, микроэлектроники, криптографии и др. Упомянем здесь работу Н. Б. Лупановой [21] по моделированию развития дрожжевых колоний в замкнутом пространстве; работу И. Корнева [22] моделирования распространения напряженности в социально-разнородных слоях общества; работу О. Смирнова [23] по выделению космических частиц из космического излучения; работу А. В. Галатенко по автоматизации процесса оптимальной укладки графа на плоскости [24]; работу А. В. Степаненкова по проверке с помощью ОС простоты натурального числа [25] и др.

Список литературы

[1] Болотов А. А. О задачах сводимости и выразимости для однородных структур со входами и выходами // ДАН СССР. Т. 254. № 1. С. 14–16.

[2] Варшавский В. И., Мараховский В. Б., Песчанский В. А., Розенблюм Л. Я. Однородные структуры. М.: Энергия, 1973.

[3] Колотов А. Т. Автоматная модель сердца // Проблемы кибернетики. Вып. 20. М.: Наука, 1968. С. 241–255.

[4] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[5] Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих схем – принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 31–110.

[6] Мур Э. Ф. Математические модели самовоспроизведения // Математические проблемы в биологии. М.: Мир, 1966. С. 36–62.

[7] фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971.

[8] Подколзин А. С. О сложности моделирования в однородных структурах // Проблемы кибернетики. Вып. 30. М.: Наука, 1975. С. 199–225.

[9] Подколзин А. С. О времени существования конфигураций в однородных структурах // ВмиМФ. 1975. № 3. С. 737–748.

[10] Подколзин А. С. О поведениях однородных структур // Проблемы кибернетики. Вып. 31. М.: Наука, 1974. С. 133–166.

[11] Подколзин А. С. Об универсальных однородных структурах // Проблемы кибернетики. Вып. 34. М.: Наука, 1978. С. 109–131.

[12] Подколзин А. С. Об одномерных универсальных однородных структурах // Annales Univer. Scien. Budap. De Rolando Eötvös nominatae, sectio computatorica, II. 1979. С. 49–61.

[13] Прангишвили И. В., Абрамова Н. А., Бабичева Е. В., Игнатущенко В. В. Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств. М.: Наука, 1967.

[14] Berger R. The undecidability of the domino problem // Memoirs Amer. Math. Soc. 1966. V. 66.

[15] Goto E. A. A minimum time solution of the firing squad problem. Harvard, 1962. (Dittoed course note for applied mathematics, 218).

[16] Myhill G. A converse to Moore's Garden of Eden theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14. P. 685–686.

[17] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

[18] Думов А. С. О моделировании роста выпуклых и древовидных конфигураций в однородных структурах // Дискретная математика. Т. 7. Вып. 2. 1995. С. 61–79.

[19] Думов А. С. О простых универсальных мозаичных однородных структурах // Дискретная математика. Т. 8. Вып. 4. 1996.

[20] Думов А. С. О существовании устойчивых конфигураций в однородных структурах // Интеллектуальные системы. Т. 1. Вып. 1. 1996.

[21] Лупанова Н. Б. Об автономном моделировании некоторых биологических систем // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1066–1069.

[22] Корнев И. М. Об одной модели этнических отношений // Интеллектуальные системы. Т. 3. Вып. 1–2. 1998.

[23] Смирнов О. Применение однородных структур для обнаружения космических частиц на астрономических изображениях // Интеллектуальные системы. Т. 8. Вып. 1–4. 2004.

[24] Галатенко А. В. Выделение циклов в графе клеточными автоматами // Интеллектуальные системы. Т. 6. Вып. 3–4. 2001.

[25] Степаненков А. В. О сложности проверки простоты числа однородными структурами // Интеллектуальные системы. Т. 7. Вып. 1–4. 2002.