Эффективный способ введения метрики на множестве непрерывных СММ-автоматов

И. Л. Мазуренко

В работе известное понятие непрерывной Скрытой марковской модели (СММ) изложено на языке вероятностных автоматов. Введена метрика на множестве непрерывных СММ-автоматов. Приведен способ эффективного вычисления метрики для широкого класса непрерывных СММ-автоматов, обобщающий результаты автора ([4], [5]) для дискретных СММ-автоматов.

1. Дискретные СММ-автоматы

Определение 1.1. *Дискретным СММ-автоматом* назовем четверку $\mathcal{A} = \langle A, Q, \pi, \Pi \rangle$, в которой A ($|A| = N$) — конечный алфавит выходных символов; Q ($|Q| = M$) — конечный алфавит состояний; π (размерности $M \times M$) — матрица вероятностей переходов, такая что $\pi_{ij} = 0$ при $i < j$ и $i = M$, $\pi_{ij} < 1$ для всех i и j и $\sum\limits_{j=1}^{M} \pi_{ij} \leqslant 1$ для всех i; Π (размерности $M \times N$) — матрица вероятностей выходных символов, такая что $0 \leqslant \Pi_{ij} < 1$ для всех i и j и $\sum\limits_{j=1}^{N} \Pi_{ij} \leqslant 1$ для всех i.

Функционирование автомата происходит следующим образом. Автомат начинает работу в состоянии q_1 и работает по тактам. Находясь в i-й момент времени состоянии q_{s_i}, автомат сначала с вероятностью $\Pi_{s_i j_i}$ подает на выход символ a_{j_i} (или «зависает» с вероятностью $1 - \sum\limits_{l=1}^{N} \Pi_{s_i l}$), а затем переходит в следующее состояние $q_{s_{i+1}}$ с вероятностью $\pi_{s_i s_{i+1}}$ (или «зависает» с вероятностью $1 - \sum_{l=1}^{M} \pi_{s_i l}$). Когда автомат переходит в финальное состояние q_M, он останавливает свою работу, не подавая при этом на выход никакой буквы. Таким образом, автомат, начав работу в состоянии q_1, либо на одном из шагов зависает, либо, пройдя за $n+1$ шаг последовательно через $n+1$ состояние и закончив работу в состоянии q_M, выдает слово $\alpha = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n} \in A^*$.

Приведенное выше определение СММ-автомата является, по сути, изложением на языке теории вероятностных автоматов ([11, 2, 12]) широко используемого в технической литературе по распознаванию речи понятия *Скрытой марковской модели* (СММ, [6, 9, 10, 8, 7]). СММ-автомат — это вероятностный автомат без входа, в котором переход в следующее состояние и выдача символов происходят независимо, матрица вероятностей переходов является верхнетреугольной, а каждая вероятностная операция — будь то переход в следующее состояние или подача в некотором состоянии символа на выход автомата, выполняется ненадежно (автомат может с некоторой определенной заранее вероятностью «зависнуть» и перестать работать). Автоматы, обладающие перечисленными свойствами, образуют класс монотонных автономных вероятностных автоматов Мура ([4]).

В [4, 5] приведен способ эффективного введения метрики на множестве дискретных СММ-автоматов. Ниже приведены без доказательства полученные в этих работах результаты. В настоящей работе предложено обобщение введенной метрики на случай непрерывных СММ-автоматов.

Через $ur(A)$ будем обозначать правый верхний угловой элемент матрицы A.

Через $\hat{\pi}$ будем обозначать *приведенную матрицу переходов* автомата, задающую вероятности того, что автомат, не зависнув при выдаче букв, переходит в следующее состояние: $\hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij} \sum_{l=1}^{N} \Pi_{il}$.

Замечание 1.1. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв (то есть для которых во всех состояниях q_i, кроме финального, выполнено свойство $\sum_{j=1}^{N} \Pi_{ij} = 1$), приведенная матрица переходов $\hat{\pi}$ совпадает с матрицей переходов π.

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1.1. *Для разных слов $\alpha \in A^*$ события, связанные с тем, что СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi \rangle$ дойдет до финального состояния и выдаст слово α, несовместны. Вероятность этого события для заданного слова $\alpha = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n} \in A^*$ равна*

$$P(\alpha) = ur(\pi'(a_{j_1})\pi'(a_{j_2}) \dots \pi'(a_{j_n})),$$

где $\pi'(a_k)_{ij} = \pi_{ij}\Pi_{ik}$.

Лемма 1.2. *Для разных $n \in \mathbb{N}$ события, связанные с тем, что СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi \rangle$ проработает, не зависнув, ровно n тактов и перейдет в финальное состояние, несовместны. Для заданного n вероятность такого события равна*

$$\sum_{\alpha \in A^*, |\alpha| = n} P(\alpha) = ur(\hat{\pi}^n).$$

Лемма 1.3. *Вероятность того, что СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi \rangle$ дойдет, не зависнув, до финального состояния, равна*

$$\sum_{\alpha \in A^*} P(\alpha) = ur((E - \hat{\pi})^{-1}) \leqslant 1,$$

где E — единичная $M \times M$-матрица.

Замечание 1.2. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв и при переходе в следующее состояние, вероятность дойти за конечное число шагов до финального состояния равна 1.

Определение 1.2. Функцию $P_{\mathcal{A}}(\alpha) : A^* \to [0, 1]$, вычисляющую вероятность того, что дискретный СММ-автомат $\mathcal{A}$, не зависнув, выдал слово α, назовем *стохастической словарной функцией автомата $\mathcal{A}$*.

Определение 1.3. Декартовым произведением дискретных СММ-автоматов $\langle A, Q', \pi', \Pi' \rangle$ ($|Q'| = M'$, $|A| = N$) и $\langle A, Q'', \pi'', \Pi'' \rangle$ ($|Q''| = M''$) назовем СММ-автомат $\langle A, Q, \pi, \Pi \rangle$, такой что $Q = Q' \times Q''$, π — $M'M'' \times M'M''$-матрица: $\pi_{(i',i'')(j',j'')} = {\pi'}_{i'j'}{\pi''}_{i''j''}$, Π — $M'M'' \times N$-матрица: $\Pi_{(i',i'')j} = \Pi'_{i'j}\Pi''_{i''j}$.

Замечание 1.3. Приведенное определение декартового произведения автоматов корректно, то есть для любых двух СММ-автоматов их декартово произведение также являеся СММ-автоматом.

Лемма 1.4. *Пусть СММ-автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть декартово произведение СММ-автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда вероятность того, что автомат $\mathcal{A}$, не зависнув, перейдет в финальное состояние, равна скалярному произведению стохастических словарных функций $P_{\mathcal{A}_1}$ и $P_{\mathcal{A}_2}$ в Евклидовом пространстве l_2.*

Здесь и далее будем говорить, что некоторая величина может быть вычислена *эффективно*, если она может быть задана формулой, состоящей из конечного числа операций умножения, сложения чисел и матриц, взятия модуля, возведения в степень, вычисления тригонометрических функций, экспоненты и логарифма и т. п.

Справедлива

Теорема 1.1. *Пусть СММ-автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть декартово произведение СММ-автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда скалярное произведение стохастических словарных функций $P_{\mathcal{A}_1}$ и $P_{\mathcal{A}_2}$ в Евклидовом пространстве l_2 эффективно вычисляется по формуле*

$$(P_{\mathcal{A}_1}, P_{\mathcal{A}_2})_{l_2} = ur((E - \hat{\pi})^{-1}),$$

где E — единичная матрица, $\hat{\pi}$ — приведенная матрица переходов автомата $\mathcal{A}$.

Следствие 1.1. *Порождаемая скалярным произведением метрика $\rho(A, B) = \sqrt{((A, A) + (B, B) - 2(A, B))}$ также эффективно вычислима, что дает способ эффективного введения метрики на множестве дискретных СММ-автоматов.*

2. Непрерывные СММ-автоматы

Определение 2.1. *Непрерывным СММ-автоматом* назовем четверку $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$, в которой $\mathbb{R}^N$ — N-мерное континуальное пространство выходов автоматов; Q ($|Q| = M$) — конечный алфавит состояний; π — $M \times M$-матрица вероятностей переходов, такая что

$\pi_{ij} = 0$ при $i < j$ и $i = M$, $\pi_{ij} < 1$ для всех i и j и $\sum\limits_{j=1}^{M} \pi_{ij} \leqslant 1$ для всех i; $\Pi = \{\Pi_i : \mathbb{R}^N \to [0,1], i = 1 \ldots M\}$ — множество многомерных плотностей вероятности, задающих распределение независимых друг от друга выходов автомата в каждом из состояний, такое что $\Pi_i(x) \geqslant 0$ для всех $i = 1 \ldots N$ и $x \in \mathbb{R}^N$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_i(x)dx \leqslant 1$ для всех i.

Функционирование непрерывного СММ-автомата определяется аналогично функционированию дискретного СММ-автомата. Автомат начинает работу в состоянии q_1 и работает по тактам. Находясь в i-й момент времени состоянии q_{s_i}, автомат подает на выход действительный вектор $x_{j_i} \in \mathbb{R}^N$ согласно непрерывному распределению вероятностей, плотность которого равна $\Pi_{s_i}(x)$ (или «зависает» с вероятностью $1 - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_{s_i}(x)dx$), а затем переходит в следующее состояние $q_{s_{i+1}}$ с вероятностью $\pi_{s_i s_{i+1}}$ (или «зависает» с вероятностью $1 - \sum\limits_{l=1}^{M} \pi_{s_i l}$). Когда автомат переходит в финальное состояние q_M, он останавливает свою работу, не подавая при этом ничего на выход. Таким образом, автомат, начав работу в состоянии q_1, либо на одном из шагов зависает, либо, пройдя за $n+1$ шаг последовательно через $n+1$ состояние и закончив работу в состоянии q_M, выдает «слово» $\chi = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_n} \in (\mathbb{R}^N)^*$.

Посмотрим, каким будет вероятностное распределение слов на выходе непрерывного СММ-автомата. Сначала зафиксируем путь $\overline{q} = q_{s_1} q_{s_2} \ldots q_{s_{n+1}}$ (где $q_{s_1} = q_1$, $q_{s_{n+1}} = q_M$) из начального состояния автомата в финальное. Тогда по формуле условной плотности вероятности совместное вероятностное распределение выходов автомата на этом пути будет равно: $p(x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{q}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n | \overline{q}) P(\overline{q}) = \prod\limits_{j=1}^{n} \Pi_{s_j}(x_j) \prod\limits_{j=1}^{n} \pi_{s_j s_{j+1}} = \prod\limits_{j=1}^{n} \Pi_{s_j}(x_j) \pi_{s_j s_{j+1}}$. Просуммировав эти функции распределения по всем таким путям, мы получаем распределение слов на выходе автомата $\mathcal{A}$:

$$p_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\overline{q} = q_{s_1} q_{s_2} \ldots q_{s_{n+1}} \\ q_{s_1} = q_1,\ q_{s_{n+1}} = q_M}} \prod_{j=1}^{n} \Pi_{s_j}(x_j) \pi_{s_j s_{j+1}}. \qquad (*)$$

Формулу (*) можно записать в матричном виде:

Лемма 2.1. $p_{\mathcal{A}}(x_1x_2\dots x_n) = ur(\pi'(x_1)\pi'(x_2)\dots\pi'(x_n))$, *где* $\|\pi'(x)_{ij}\| = \|\pi_{ij}\Pi_i(x)\|$.

Через $\hat{\pi}$ будем обозначать *приведенную матрицу переходов* автомата, задающую вероятности того, что автомат, не зависнув при выдаче букв, переходит в следующее состояние: $\hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Pi_i(x)dx$.

Замечание 2.1. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв (то есть для которых во всех состояниях q_i, кроме финального, выполнено свойство $\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Pi_i(x)dx = 1$), приведенная матрица переходов $\hat{\pi}$ совпадает с матрицей переходов π.

Замечание 2.2. В общем случае для непрерывных СММ-автоматов приведенная матрица переходов вычисляется неэффективно.

Лемма 2.2. *Для разных $n \in \mathbb{N}$ события, связанные с тем, что СММ-автомат $\langle\mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi\rangle$ проработает, не зависнув, ровно n тактов и перейдет в финальное состояние, несовместны. Для заданного n вероятность такого события равна*

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n = ur(\hat{\pi}^n).$$

Доказательство. Несовместность событий следует из того, что для разного числа тактов работы автомата никакой из путей в автомате из начального состояния в финальное не является частью другого.

$$\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n =$$

$$= \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} ur\left(\pi'(x_1)\pi'(x_2)\dots\pi'(x_n)\right)dx_1dx_2\dots dx_n =$$

$$= ur\left(\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} \pi'(x_1)\pi'(x_2)\dots\pi'(x_n)dx_1dx_2\dots dx_n\right) =$$

$$= ur\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\pi'(x_1)dx_1\int\limits_{\mathbb{R}^N}\pi'(x_2)dx_2\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\pi'(x_n)dx_n\right)=$$

$$= ur\left(\underbrace{\hat{\pi}\hat{\pi}\dots\hat{\pi}}_{n}\right) = ur\left(\hat{\pi}^n\right),$$

поскольку $\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\pi'(x_k)dx_k\right)_{ij} = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\pi'(x_k)_{ij}\,dx_k =$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\pi_{ij}\Pi_i(x_k)\,dx_k = \hat{\pi}_{ij} \text{ (по определению).}$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть π — верхнетреугольная квадратная матрица, такая что все элементы на ее диагонали неотрицательные и меньше 1. Тогда матричный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\pi^n$ сходится к матрице $E+(E-\hat{\pi})^{-1}$, где E — единичная матрица.*

Доказательство леммы приведено в [5].

Лемма 2.4. *Вероятность того, что непрерывный СММ-автомат $\langle\mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi\rangle$ дойдет, не зависнув, до финального состояния, равна:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n = ur\left((E-\hat{\pi})^{-1}\right).$$

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1,\dots,x_n)dx_1dx_2\dots dx_n = \sum_{n=1}^{\infty} ur(\hat{\pi}^n) = ur\left(\sum_{n=1}^{\infty}\hat{\pi}^n\right) =$$

(по лемме 2.3 этот матричный ряд сходится)

$$= ur\left((E-\hat{\pi})^{-1}+E\right) = ur\left((E-\hat{\pi})^{-1}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание 2.3. Для СММ-автоматов, которые не зависают при выдаче букв и при переходе в следующее состояние, вероятность дойти за конечное число шагов до финального состояния равна 1.

Определение 2.2. Функцию плотности вероятности $p_{\mathcal{A}}(x) : (\mathbb{R}^N)^* \to [0,1]$ назовем *стохастической словарной функцией непрерывного автомата* $\mathcal{A}$.

Для систем автоматов, используемых на практике, без ограничения общности можно считать, что все функции плотности распределения $\Pi_i(x)$, $i = 1\dots M-1$, где Π_i — плотность распределения выходов в i-м состоянии автомата $\mathcal{A}$, ограничены сверху константой 1. Действительно, обозначим через $\varkappa_{\mathcal{A}}$ величину $\varkappa_{\mathcal{A}} = \max\limits_{i=1\dots M-1} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \Pi_i(x)$. Если Ω — некоторый класс автоматов, для которого $\varkappa_{\mathcal{A}}$ ограничена сверху некоторой общей для всех автоматов из этого класса константой (это справедливо, например, если $|\Omega| < \infty$), существует и конечна величина $\varkappa_\Omega = \sup\limits_{\mathcal{A}\in\Omega} \varkappa_{\mathcal{A}} < \infty$. Если теперь перейти к другим единицам измерения выходных значений автоматов из Ω, выполнив замену $x \to x \times \sqrt[N]{\varkappa_\Omega}$, будет с очевидностью выполнено условие $\Pi_i(x) \leqslant 1 \ \ \forall i = 1\dots M, x \in \mathbb{R}^N$.

Определение 2.3. Декартовым произведением непрерывных СММ-автоматов $\langle \mathbb{R}^N, Q_1, \pi', \Pi' \rangle$ $(|Q'| = M')$ и $\langle \mathbb{R}^N, Q'', \pi'', \Pi'' \rangle$ $(|Q''| = M'')$ назовем непрерывный СММ-автомат $\langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$, такой что $Q = Q' \times Q''$, $\pi_{(i',i'')(j',j'')} = {\pi'}_{i'j'}{\pi''}_{i''j''}$, $\Pi_{(i',i'')}(x) = \Pi'_{i'}(x)\Pi''_{i''}(x)$.

Замечание 2.4. Определение 2.3 корректно, поскольку $\forall\ (i',i'')$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi_{(i',i'')}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi'_{i'}(x)\Pi''_{i''}(x)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Pi''_{i''}(x)dx \leqslant 1.$$

Обозначим через $\left(L_2{}^N\right)^*$ следующее пространство счетных наборов функций

$$\left\{ \left\{ f_n : \left(\mathbb{R}^N\right)^n \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} : \forall n \in \mathbb{N} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} \left(f_n(x)\right)^2 dx < \infty \right.$$

$$\left. \text{и } \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} \left(f_n(x)\right)^2 dx < \infty \right\}.$$

Несложно показать, что это пространство является евклидовым [3] со скалярным произведением

$$(\{f_n\},\{g_n\})_{\left(L_2{}^N\right)^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} f_n(x) g_n(x) dx.$$

Каждый счетный набор функций $\{f_n\} \in \left(L_2{}^N\right)^*$ можно представлять себе как единственную функцию $f : \left(\mathbb{R}^N\right)^* \to \mathbb{R}$.

Лемма 2.5.

а) Стохастическая словарная функция $p_{\mathcal{A}}$ любого непрерывного СММ-автомата $\mathcal{A}$ лежит в пространстве $\left(L_2{}^N\right)^*$.

б) Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — два произвольных непрерывный СММ-автомата, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ — их декартово произведение. Тогда скалярное произведение стохастических словарных функций $p_{\mathcal{A}_1}$ и $p_{\mathcal{A}_2}$ в Евклидовом пространстве $\left(L_2{}^N\right)^*$ равно вероятности того, что автомат $\mathcal{A}$, не зависнув, перейдет в финальное состояние.

Доказательство. Докажем сначала утверждение б), под равенством рядов подразумевая, что они либо одновременно расходятся, либо сходятся к одному и тому же числу.

$$\begin{aligned}
(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{\left(L_2{}^N\right)^*} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} p_{\mathcal{A}_1}(x) p_{\mathcal{A}_2}(x) dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} \sum_{\overline{q}_1} p_{\mathcal{A}_1}(x|\overline{q}_1) \sum_{\overline{q}_2} p_{\mathcal{A}_2}(x|\overline{q}_2) dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} \sum_{\overline{q}_1 \times \overline{q}_2} p_{\mathcal{A}_1}(x|\overline{q}_1) p_{\mathcal{A}_2}(x|\overline{q}_2) dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} \sum_{\overline{q}_1 \times \overline{q}_2} p_{\mathcal{A}}(x|\overline{q}_1 \times \overline{q}_2) dx = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left(\mathbb{R}^N\right)^n} p_{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.
\end{aligned}$$

По лемме 2.4 последний ряд сходится для любых стохастических словарных функций непрерывных СММ-автоматов. Если взять два одинаковых автомата $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, получим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\mathbb{R}^N)^n} p_{\mathcal{A}}(x)^2 dx$$

для произвольного автомата $\mathcal{A}$, что доказывает утверждение а) леммы. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть непрерывный СММ-автомат $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ есть декартово произведение СММ-автоматов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Тогда скалярное произведение стохастических словарных функций $p_{\mathcal{A}_1}$ и $p_{\mathcal{A}_2}$ в Евклидовом пространстве $\left(L_2{}^N\right)^*$ вычисляется по формуле:*

$$(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{\left(L_2{}^N\right)^*} = ur\left((E - \hat{\pi})^{-1}\right),$$

где E — единичная $M \times M$-матрица, $\hat{\pi}$ — приведенная матрица переходов автомата $\mathcal{A}$.

Доказательство теоремы получается последовательным применением лемм 2.4 и 2.5.

Замечание 2.5. В общем случае для непрерывных СММ-автоматов формула скалярного произведения стохастических словарных функций не является эффективной, поскольку в ней используется приведенная матрица переходов $\hat{\pi}$ автомата $\mathcal{A}$, для которой нет эффективной вычислимости.

3. Полунепрерывные СММ-автоматы

Определение 3.1. Непрерывный СММ-автомат $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^N, Q, \pi, \Pi \rangle$ будем называть *полунепрерывным*, если в каждом его состоянии плотность распределения выходов задана в виде линейной комбинации K многомерных Гауссовых плотностей вероятностей («Гауссовой смеси»): $\forall i = 1 \dots n$ $\Pi_i(x) = \sum\limits_{k=1}^{K} \omega_{(i,k)} \Gamma_{\mu_{(i,k)}, \Sigma_{(i,k)}}(x)$, где $K \in \mathbb{N}$, $\forall\ k = 1\dots K$ $\omega_{(i,k)} \geqslant 0$; $\sum\limits_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)} \leqslant 1$ — весовые коэффициенты линейной комбинации, $\Gamma_{\mu_{(i,k)},\Sigma_{(i,k)}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_{(i,k)}|}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_{(i,k)})^T\Sigma_{(i,k)}{}^{-1}(x-\mu_{(i,k)})}$ — плотность многомерного нормального распределения с вектором средних $\mu_{(i,k)}$ и матрицей ковариации $\Sigma_{(i,k)}$.

Замечание 3.1. Для каждого полунепрерывного СММ-автомата распределение выходных символов Π полностью задается конечным множеством векторов и матриц $\Pi = \{\omega_{(i,k)}, \mu_{(i,k)}, \Sigma_{(i,k)}, i = 1\dots M, k = 1\dots K\}$, (где $\omega_{(i,k)}$ — k-й весовой коэффициент гауссовой смеси для i-го состояния автомата, $\mu_{(i,k)}$ — N-мерные векторы средних значений для k-й компоненты гауссовой смеси в i-м состоянии, $\Sigma_{(i,k)}$ — $N \times N$-матрица ковариации для k-й компоненты Гауссовой смеси в состоянии q_i).

Лемма 3.1. *Для полунепрерывного СММ-автомата приведенная матрица переходов эффективно вычисляется по формуле* $\hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij}\sum\limits_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}$.

Доказательство.

$$\hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Pi_i(x)dx = \pi_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}\Gamma_{\mu_{(i,k)},\Sigma_{(i,k)}}(x)dx =$$

$$= \pi_{ij}\sum_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Gamma_{\mu_{(i,k)},\Sigma_{(i,k)}}(x)dx = \pi_{ij}\sum_{k=1}^{K}\omega_{(i,k)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* $\Gamma_{(\mu_1,\Sigma_1)}(x)$ *и* $\Gamma_{(\mu_2,\Sigma_2)}(x)$ — *две N-мерные плотности нормального распределения, такие что матрицы* Σ_1, Σ_2, $\Sigma_1 + \Sigma_2$, $\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}$ — *невырожденные. Тогда произведение этих плотностей вероятности есть с точностью до множителя многомерная нормальная плотность вероятности:* $\Gamma_{(\mu_1,\Sigma_1)}(x)\Gamma_{(\mu_2,\Sigma_2)}(x) = \Gamma_{(\mu_1-\mu_2,\Sigma_1+\Sigma_2)}(0)\Gamma_{(\mu,\Sigma)}(x)$, *где* $\Sigma = \left(\Sigma_1{}^{-1} + \Sigma_2{}^{-1}\right)^{-1}$, $\mu = \Sigma\left(\Sigma_1{}^{-1}\mu_1 + \Sigma_2{}^{-1}\mu_2\right)$.

Доказательство.

$$\Gamma_{(\mu_1,\Sigma_1)}(x)\Gamma_{(\mu_2,\Sigma_2)}(x) = \\
= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_1|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T{\Sigma_1}^{-1}(x-\mu_1)} \times \\
\times \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_2|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T{\Sigma_2}^{-1}(x-\mu_2)} = \\
= \frac{1}{(2\pi)^{N}\sqrt{|\Sigma_1||\Sigma_2|}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-\mu_1)^T{\Sigma_1}^{-1}(x-\mu_1)+(x-\mu_2)^T{\Sigma_2}^{-1}(x-\mu_2)\right)} =$$

(приводим к полному квадрату квадратичную форму в показателе экспоненты)

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N}\sqrt{|\Sigma_1||\Sigma_2|}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)+(\mu_1-\mu_2)^T(\Sigma_1+\Sigma_2)^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right)} = \\
= \frac{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma|}}{(2\pi)^{N}\sqrt{|\Sigma_1||\Sigma_2|}} e^{-\frac{1}{2}\left((\mu_1-\mu_2)^T(\Sigma_1+\Sigma_2)^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right)} \times \\
\times \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}\left((x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)} = \\
= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\Sigma_1+\Sigma_2|}} e^{-\frac{1}{2}\left((\mu_1-\mu_2)^T(\Sigma_1+\Sigma_2)^{-1}(\mu_1-\mu_2)\right)} \Gamma_{(\mu,\Sigma)}(x) = \\
= \Gamma_{(\mu_1-\mu_2,\Sigma_1+\Sigma_2)}(0)\Gamma_{(\mu,\Sigma)}(x).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{R}^N, Q_1, \pi_1, \Pi_1\rangle$, $|Q_1| = M_1$, $\Pi_1 = \{\omega^1_{(i,k)}, \mu^1_{(i,k)}, \Sigma^1_{(i,k)}, i = 1\ldots M_1, k = 1\ldots K_1\}$ *и* $\mathcal{A}_2 = \langle \mathbb{R}^N, Q_2, \pi_2, \Pi_2\rangle$, $|Q_2| = M_2$, $\Pi_2 = \{\omega^2_{(i,k)}, \mu^2_{(i,k)}, \Sigma^2_{(i,k)}, i = 1\ldots M_2, k = 1\ldots K_2\}$ *— полунепрерывные СММ-автоматы,* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ *— непрерывный СММ-автомат, являющийся их декартовым произведением. Тогда автомат* $\mathcal{A}$ *является полунепрерывным СММ-автоматом с функциями плотности выходов, заданными в виде гауссовой смеси с весовыми коэффициентами*

$$\omega_{(i,i')(k,k')} = \omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{(\mu^1_{(i,k)}-\mu^2_{(i',k')},\Sigma^1_{(i,k)}+\Sigma^2_{(i',k')})}(0)$$

и гауссовыми функциями плотности $\Pi_{(i,i')(k,k')} = \Gamma_{(\mu_{(i,k,i',k')},\Sigma_{(i,k,i',k')})}$, *где*

$$\Sigma_{(i,k,i',k')} = \left({\Sigma^1_{(i,k)}}^{-1} + {\Sigma^2_{(i',k')}}^{-1}\right)^{-1},$$
$$\mu_{(i,k,i',k')} = \Sigma_{(i,k,i',k')} \left({\Sigma^1_{(i,k)}}^{-1} \mu^1_{(i,k)} + {\Sigma^2_{(i',k')}}^{-1} \mu^2_{(i',k')}\right).$$

Доказательство.

$$\Pi_{(i,i')}(x) = \Pi^1_i(x)\Pi^2_{i'}(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{K_1}\sum_{k'=1}^{K_2} \omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{\mu_{(i,k)},\Sigma_{(i,k)}}(x)\Gamma_{\mu_{(i',k')},\Sigma_{(i',k')}}(x) =$$

(по лемме 3.2)

$$= \sum_{k=1}^{K_1}\sum_{k'=1}^{K_2} \omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{(\mu^1_{(i,k)}-\mu^2_{(i',k')},\Sigma^1_{(i,k)}+\Sigma^2_{(i',k')})}(0)\Gamma_{(\mu_{(i,k,i',k')},\Sigma_{(i,k,i',k')})}(x).$$

Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Скалярное произведение* $(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{\left(L_2{}^N\right)^*}$ *стохастических словарных функций полунепрерывных СММ-автоматов* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *эффективно вычисляется по формуле:*

$$(p_{\mathcal{A}_1}, p_{\mathcal{A}_2})_{\left(L_2{}^N\right)^*} = ur\left((E-\hat{\pi})^{-1}\right),$$

где E *— единичная* $M \times M$*-матрица,* $\hat{\pi}$ *— приведенная матрица переходов автомата* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$*, такая что*

$$\hat{\pi}_{(i,i')(j,j')} = (\pi_1)_{ij}(\pi_2)_{i'j'} \sum_{k=1}^{K_1}\sum_{k'=1}^{K_2} \omega^1_{(i,k)}\omega^2_{(i',k')}\Gamma_{(\mu^1_{(i,k)}-\mu^2_{(i',k')},\Sigma^1_{(i,k)}+\Sigma^2_{(i',k')})}(0).$$

Доказательство. По лемме 3.3 декартово произведение полунепрерывных СММ-автоматов является полунепрерывным СММ-автоматом, поэтому для вычисления приведенной матрицы переходов можно применить леммы 3.1 и 3.3. Далее по теореме 2.1 получаем требуемый результат.

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Теорема 3.1 позволяет утверждать, что существует способ введения эффективно вычислимой метрики на множестве полунепрерывных СММ-автоматов.*

4. Заключение

Предложенный способ введения метрики на множестве непрерывных СММ-автоматов отличается тем, что для широкого класса таких автоматов (названных в работе *полунепрерывными*) есть формула вычисления расстояния между автоматами, в которую входит конечное число элементарных операций над векторами и матрицами. На практике метод «*скрытых марковских моделей*» используются для моделирования таких объектов, как монофоны и трифоны в задачах распознавания речи, рукописные символы в задачах распознавания изображений, голос диктора в задачах идентификации диктора и т. п. Плотности многомерных распределений вероятностей в большинстве практических приложений задаются в виде «гауссовых смесей», с помощью которых можно приблизить с требуемой точностью любую непрерывную многомерную функцию плотности вероятности. Поэтому, по сути, мы имеем дело с полунепрерывными СММ-автоматами. Это позволяет надеяться на то, что результаты, полученные в настоящей работе, будут иметь большое практическое значение.

Автор выражает благодарность за постановку задачи своему научному руководителю д.ф.-м.н. Бабину Дмитрию Николаевичу.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

[2] Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов. М.: Наука, 1985.

[3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

[4] Мазуренко И. Л. Автоматные методы распознавания речи / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (на правах рукописи). М., 2001.

[5] Мазуренко И. Л. Модель распознавания речи на основе монотонных вероятностных автоматов // Интеллектуальные системы в производстве: Период. науч.-практ. журн. 2003. № 1. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2003. С. 4–65.

[6] Марков А. А. Пример статистического исследования над текстом «Евгения Онегина», иллюстрирующий связь испытаний в цепь // Известия Академии наук. СПб. VI. Т. 7. 1913. №3. С. 153–162.

[7] Рабинер Л. Р. Скрытые марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи: обзор // ТИИЭР. Т. 77. № 2. Февраль 1989 г.

[8] Bakis R. Continuous speech word recognition via senti-second acoustic states // Proc. ASA Meeting (Washington, DC). Apr. 1976.

[9] Baum L. E., Petrie T. Statistical inference for probabilistic functions of fin state Markov chains // Ann. Math. Stat. Vol. 37. P. 1554–1563. 1966.

[10] Baum L. E., Egon J. A. An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of a Markov process and to a model for ecology // Bull. Amer. Meteorol. Soc. Vol. 73. P. 360–363. 1967.

[11] Carlyle J. W. Reduced forms for stochastic sequencial machines // J. Math. Analysis and Applic. 1963. № 7. P. 167–175.

[12] Starke P. H. Theorie Stochastischen Automaten. I, II // Elektron Informationsverarb. und Kybern. 1965. 1. № 2.