Кодирование изображений, инвариантное относительно проективных преобразований

Д. В. Алексеев

Определение 1. Ориентированным углом $\angle AOB$ будем называть величину α, если поворот на угол $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ в положительном направлении (то есть против часовой стрелки) относительно точки O переводит луч OA в луч OB и $\angle AOB = -\alpha$ если поворот на угол α в отрицательном направлении (то есть по часовой стрелке) переводит луч OA в луч OB.

Кодирующая функция T задается с помощью двойного отношения:

Определение 2. Двойным отношением прямых OA, OB, OC и OD называют величину $[A, B, C, D]_O = \frac{\sin \angle AOC}{\sin \angle BOC} : \frac{\sin \angle AOD}{\sin \angle BOD}$, где все углы рассматриваются как ориентированные. Если же какой либо из знаменателей обращается в ноль будем обозначать это (формально) $[A, B, C, D]_O = \infty$.

Определение 3. Проективной плоскостью $\overline{\Pi}$будем называть множество $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, причем наборы (x, y, z) и (kx, ky, kz), $(k \neq 0)$ соответствуют одной и той же точке проективной плоскости. Геометрически проективная плоскость представляет собой объединение плоскости и множества бесконечно удаленных точек, образующих бесконечно удаленную прямую.

В дальнейшем везде будет использоваться проективная плоскость, а для обычной плоскости будут даны некоторые комментарии.

Определение 4. Проективное преобразование переводит $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)A$, $(\det A \neq 0)$.

Замечание 1. Корректность определения очевидна: $(kx, ky, kz) \mapsto (x, y, z)A \cdot k$

Замечание 2. Геометрически проективное преобразование соответствует следующему: Пусть заданы проективные плоскости Π и Π' и точка O, не принадлежащая ни одной из них. Выберем произвольную собственную точку $A \in \Pi$ и рассмотрим прямую OA. Возможны два случая:
1. $OA \cap \Pi' = A'$ — некоторая собственная точка Π'.
2. $OA \| \Pi'$. Тогда в качестве A' берем бесконечно удаленную точку, соответствующую направлению OA. Выберем произвольную бесконечно удаленную точку $A(\cos\alpha, \sin\alpha, 0) \in \Pi$ и рассмотрим прямую l, проходящую через точку A и имеющую направление α. Возможны два случая:
1. $l \cap \Pi' = A'$ — некоторая собственная точка Π'.
2. $l \| \Pi'$. Тогда в качестве A' берем бесконечно удаленную точку, соответствующую направлению прямой l. Таким образом для произвольной точки A строится ее образ A'.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечное множество точек проективной плоскости. Пусть задана биекция $M : \mathfrak{A} \leftrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ — нумерация точек и кодирующая функция $T : \overline{\Pi}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \cdot C_{n-1}^4}$, ставящая множеству $\mathfrak{A}$ в соответствие множество $\rho_{s;\, i,j,k,l} = [M^{-1}(i), M^{-1}(j), M^{-1}(k), M^{-1}(l)]_{M^{-1}(s)}$ — двойные отношения четверок прямых, для тех пятерок, для которых оно определено.

Определение 5. Кодом изображения $\mathfrak{A}$ будем называть пару $<M, T(\mathfrak{A}, M)>$.

Определение 6. Изображения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ будем называть эквивалентными относительно кодирующей функции T, если существуют нумерации M_1 и M_2, такие, что $T(\mathfrak{A}, M_1) = T(\mathfrak{B}, M_2)$.

Определение 7. Изображения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ будем называть проективно эквивалентными (π-эквивалентными), если существует проективное преобразование $\mathcal{P} : \mathfrak{A} \mapsto \mathfrak{B}$.

Определение 8. Изображение $\mathfrak{A}$ будем называть плоским проективным изображением, если не существует трех прямых l_1, l_2 и l_3 таких, что $\mathfrak{A} \subset l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

Теорема 1. *Плоские проективные изображения эквивалентны тогда и только тогда, когда они π-эквивалентны.*

Доказательство. В доказательстве используются следующие леммы:

Лемма 2. *(см. [3].) Пусть $\mathcal{P}$ — проективное преобразование, и точки O, A, B, C, D таковы, что никакие две прямые из OA, OB, OC и OD не совпадают. Тогда $[A, B, C, D]_O = [\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B), \mathcal{P}(C), \mathcal{P}(D)]_{\mathcal{P}(O)}$. Другими словами, двойное отношение инвариантно относительно проективных преобразований.*

Лемма 3. *(см. [7].) Пусть заданы две четверки точек $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \overline{\Pi}$ и $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \overline{\Pi}$ так, что никакие три не лежат на одной прямой. Тогда существует единственное проективное преобразование $\mathcal{P}$, такое, что $\mathcal{P}(A_i) = B_i$, i=1,2,3,4.*

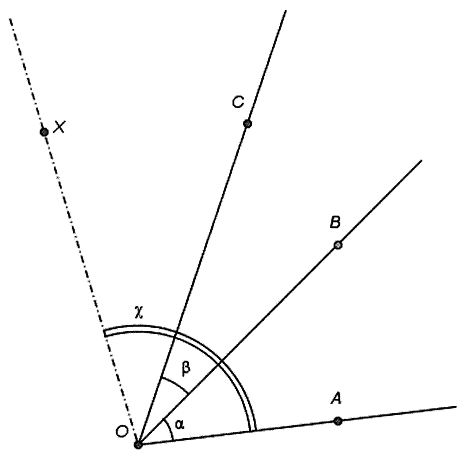

Рис. 1.

Лемма 4. *Пусть заданы точки O, A, B, C, так, что никакие три не лежат на одной прямой и число $\varkappa \in \mathbb{R}$. Тогда геометрическим местом точек X таких, что $[A, B, C, X]_O = \varkappa$ является $l \setminus \{O\}$, где l — некоторая прямая, проходящая через точку O.*

Доказательство. Обозначим $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$ и $\angle AOX = \chi$ (см. рис.1). Проводя преобразования, получим, что $[A, B, C, X]_O = \varkappa$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{ctg} \chi = \frac{\varkappa \cdot \cos\alpha \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)}{\varkappa \cdot \sin(\beta) \sin(\alpha+\beta)} \equiv const$. Геометрическое место таких точек — прямая l, проходящая через O образующая с OA угол $\chi = \operatorname{arcctg} \frac{\varkappa \cdot \cos\alpha \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)}{\varkappa \cdot \sin(\beta) \sin(\alpha+\beta)}$.

Лемма 5. *1) Если $[A, B, C, D]_O = 1$, то точки A, O, B, или C, O, D лежат на одной прямой. 2) Если $[A, B, C, D]_O = 0$, то точки A, O, C или B, O, D лежат на одной прямой. 3) Если $[A, B, C, D]_O$ не определено, то точки B, O, C или A, O, D лежат на одной прямой.*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из определения двойного отношения.

Лемма 6. *Пусть известен код плоского проективного изображения $\mathfrak{A}$. Тогда существует алгоритм, позволяющий для любой тройки точек определить, лежат ли они на одной прямой или нет.*

Доказательство. Обозначим эти три точки O, A, и D. Если они лежат на одной прямой, то для всех $B, C \in \mathfrak{A}$ величина $[A, B, C, D]_O$ не определена (по лемме 5). Таким образом, если указанная величина определена хотя бы для одной пары точек $B, C \in \mathfrak{A}$, то гарантированно точки O, A, и D не коллинеарны.

Пусть теперь $\forall B, C \in \mathfrak{A}$ величина $[A, B, C, D]_O$ не определена. Предположим, что O, A, и D не коллинеарны. Тогда, по лемме 5 коллинеарны O, B и C. Из произвольности $B, C \in \mathfrak{A}$ вытекает, что если зафиксировать B и брать произвольные $C_i \in \mathfrak{A}$ то все точки C_i лежат на прямой OB (см рис. 2). Но в этом случае $\mathfrak{A} \subset OB \cup AD$, что противоречит определению плоского проективного изображения. Следовательно, точки O, A, и D обязательно лежат на одной прямой.

Доказательство (теоремы).

Из леммы 2 сразу же вытекает, что если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ проективно эквивалентны, то они эквивалентны и относительно кодирующей функции T.

Докажем в обратную сторону. Рассмотрим точки A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ никакие три из которых не лежат на одной прямой. Такая четверка

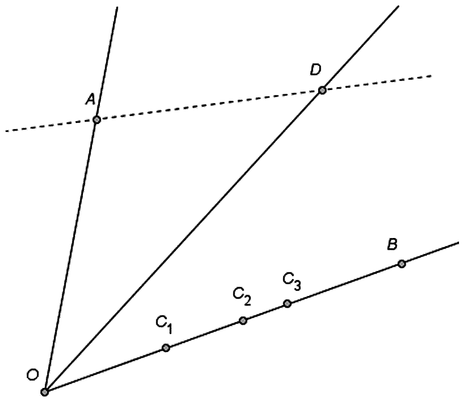

Рис. 2.

всегда существует, так как $\mathfrak{A}$ — плоское проективное изображение. Пусть им соответствуют точки B_i i=1,2,3,4. По лемме 3 найдется проективное преобразование $\mathcal{P}$, переводящее A_i в B_i, i=1,2,3,4. Рассмотрим произвольную точку $A' \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим следующие случаи:

1. A' не лежит на прямых A_1A_2, A_1A_3 и A_1A_4. Тогда двойное отношение $\varkappa = [A'A_2A_3A_4]_{A_1}$ определено и не равно 0. По лемме 2 таким же будет и $[\tilde{B}B_2B_3B_4]_{B_1} = \varkappa$, где $\tilde{B}$ — образ A' при проективном преобразовании $\mathcal{P}$. Но по лемме 4 из этого следует, что точка $\tilde{B}$ должна лежать на прямой $l' = B_1B'$, где $B' \in \mathfrak{B}$ — точка, соответствующая A'. Если точка $\tilde{B}$ лежит на какой-либо прямой $\tilde{l}$, соединяющих данные точки, но не проходящей, через A_1, то точка B' тоже должна лежать на этой прямой $\tilde{l}$. Таким образом $\tilde{B} = B' = l' \cap \tilde{l}$, что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] Горшкова Л. С., Паньженский В. И., Марина Е. В. Проективная геометрия: учебное пособие. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

[2] Ефимов Н. В. Высшая геометрия, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[3] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2, Геометрия, М.: Наука, 1987, С. 44–45.

[4] Козлов В. Н. Элементы математической теории зрительного восприятия, М.: Изд. ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2001.

[5] Козлов В. Н. О кодировании дискретных фигур // Дискретная математика. Т. 8. Вып. 4. 1996, С. 57–61.

[6] Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959.

[7] Юнг Дж. В. Проективная геометрия, М.: ИЛ, 1949.