Квазилемнискаты в задаче приближения формы кривых

Т. А. Ракчеева

Предложен и разработан метод фокусной аппроксимации гладких замкнутых кривых. Базисом фокусного метода является семейство многофокусных лемнискат, параметрами которых являются конечное число фокусов внутри кривой и радиус. Анализ более общего класса квазилемнискат выделяет семейство лемнискат как удовлетворяющее наиболее общим требованиям к функции расстояния и описанию геометрических форм и их инвариантов.

«Вся наука подчинена идее аппроксимации.»
Б. Рассел

Приближение кривых остается важной задачей современной прикладной математики. Большое число методов, разработанных для решения этой задачи, использует тот или иной класс аппроксимирующих функций в зависимости от требований прикладной области и соответствующих свойств кривых. Широко используемый в качестве аппроксимирующих функций класс тригонометрических полиномов адекватен таким свойствам сигналов, как периодичность и гладкость. В данной работе обсуждаются многофокусные лемнискаты как класс аппроксимирующих функций для аналитического приближения формы гладких замкнутых кривых, примеры которого приведены на рис. 1.

1. Kf-лемнискаты

Лемниската — фокусная кривая, полностью описывающаяся системой конечного числа k точек-фокусов внутри нее и числовым параметром R — радиусом. Определяющим инвариантом лемнискаты

Рис. 1. Примеры фокусной аппроксимации лемнискатами (крестиками отмечены фокусы).

является постоянное значение вдоль кривой произведения расстояний до всех k фокусов (рис. 2а), который можно записать в виде:

$$\prod_{j=1}^{k} r_j = R^k, \tag{1}$$

где $r_j = \sqrt{(x-a_j)^2 + (y-b_j)^2}$ — евклидово расстояние от произвольной точки лемнискаты с координатами (x, y) до j-го фокуса f_j с координатами (a_j, b_j).

Будем в дальнейшем называть: порядком лемнискаты полное число ее фокусов k, kf-системой или kf-структурой — фокусную систему из k фокусов $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ с их координатами $\{a_j, b_j\}$, $j = 1, \ldots, k$, и kf-лемнискатами — лемнискаты с kf-системой. Будем также называть расстояние до kf-системы в i-той точке кривой текущим радиусом в i-той точке и обозначать его через r_i, $i = 1, \ldots, n$.

Аппроксимационные возможности многофокусных лемнискат впервые исследовались Д. Гильбертом [1]. Им доказано, что для кусочно-гладкой замкнутой без самопересечений кривой C на плоскости всегда найдутся такая система фокусов и радиус, что для любого ε отвечающая им лемниската пройдет в ε-окрестности произвольной точки кривой C.

2. Семейство изофокусных лемнискат

Лемнискаты представляют собой гладкие замкнутые плоские кривые без самопересечений, необязательно односвязные. Для фиксированного набора k фокусов лемнискаты с разными радиусами образуют семейство вложенных кривых от k-связных, для малых значений радиуса R, до односвязных, для больших значений, причем кривые с большим радиусом охватывают кривые с меньшим радиусом без пересечений (рис. 2а). В определенном диапазоне значений радиуса лемнискаты обладают большой вариабельностью формы, обуславливающей применение их в качестве приближающих функций для широкого диапазона форм кривых [1–4].

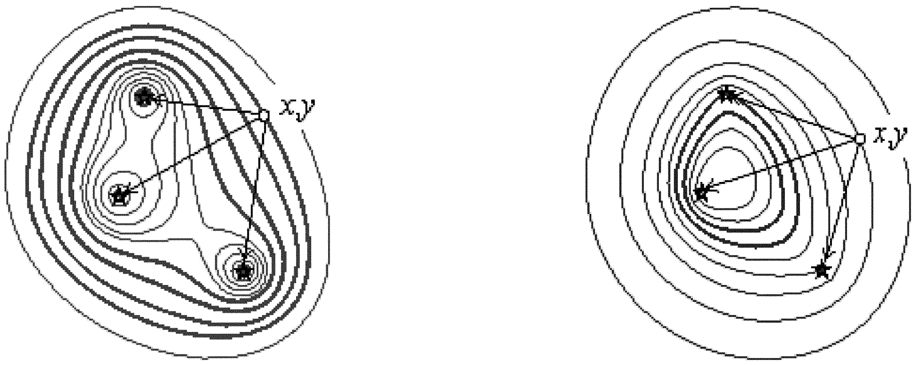


Рис. 2. Семейства изофокусных кривых: 1) лемнискат, 2) эллипсов.

3. Многофокусные лемнискаты как класс аппроксимирующих функций

То обстоятельство, что аппроксимирующий класс лемнискат представляют собой *семейство гладких функций*, сближает рассматриваемый в данной работе метод фокусного приближения с такими классическими методами, как приближение степенными или тригонометрическими полиномами. Вместе с тем есть и принципиальное отличие фокусной аппроксимации от этих методов. Степенная и тригонометрическая аппроксимации, базируясь на параметрическом описании кривых, адекватны задачам анализа сигналов — одномерных кривых. Степени свободы их являются объектами других по отношению к кривой пространств и в общем случае не инвариантны относительно преобразований системы координат, сохраняющих форму кривой, таких как сдвиг, поворот, подобие. Фокусный метод более адекватен задачам, связанным с представлением формы кривой. Степени свободы лемнискат инвариантны относительно этих преобразований, в чем легко убедиться, поскольку и объект приближения, точки кривой, и свободы приближения, фокусы лемнискаты, принадлежат одному и тому же пространству.

Действительно, сдвиговое преобразование системы координат $x' = x + \Delta x$, $y' = y + \Delta y$ в равной степени относится ко всем точкам плоскости, оно переводит лемнискату в лемнискату со смещенной фокусной системой и тем же радиусом:

$$\prod_{j=1}^{k} \sqrt{((x+\Delta x) - (a_j + \Delta x))^2 + ((y+\Delta y) - (b_j + \Delta y))^2} = \\ = \prod_{j=1}^{k} \sqrt{(x-a_j)^2 + (y-b_j)^2} = R^k$$

Легко также показать и инвариантность относительно преобразований поворота системы координат — это преобразование поворачивает на один тот же угол и точки кривой, и фокусы. В уравнение (1) координаты кривой и фокусов входят в виде расстояний между точками и фокусами, а группа преобразований сдвига и поворота — группа движений — сохраняет, как известно, расстояние между точками. В результате поворотного преобразования получится повернутая лемниската с фокусной системой, повернутой на тот же угол, с прежним радиусом и той же формы.

Приближение лемнискатами с очевидностью инвариантно и относительно преобразования масштаба. Положив $x' = cx$ и $y' = cy$, и, преобразовав уравнение лемнискаты:

$$\prod_{j=1}^{k} \sqrt{(x'-a'_j)^2 + (y'-b'_j)^2} = c^k \prod_{j=1}^{k} \sqrt{(x-a_j)^2 + (y-b_j)^2},$$

где $a'_j = ca_j$, $b'_j = cb_j$, к виду:

$$\prod_{j=1}^{k} \sqrt{(x-a_j)^2 + (y-b_j)^2} = \frac{1}{c^k} R^k = R'^k,$$

получим снова лемнискату с пропорционально преобразованными фокусами и радиусом $R' = R/c$. Следовательно, лемнискаты инварианты с точностью до значения радиуса и относительно масштабного преобразования.

Таким образом, естественные требования, предъявляемые к классу функций, которые удобно использовать для аппроксимации формы кривых, являются выполненными для класса многофокусных лемнискат.

4. Постановка аппроксимационной задачи

Теперь, когда дано представление о свойствах семейства лемнискат, можно сформулировать задачу приближения замкнутых кривых многофокусными лемнискатами в качестве класса приближающих функций:

Пусть заданы произвольная замкнутая кривая на плоскости своими отсчетами $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ и некоторый критерий сходства. Требуется найти внутри этой кривой систему фокусов $\{f_j\}$, $j = 1, \ldots, k$, такую, что при определенном значении радиуса R соответствующая им лемниската будет близка к заданной кривой в смысле выбранного критерия. Такая постановка задачи по формулировке своей не отличается от классической аппроксимационной постановки. Различие состоит в особенностях лемнискат, как класса приближающих функций, проявляющихся в характеристиках исследуемого метода фокусного приближения и определяющих его место в ряду других традиционных аппроксимационных методов.

5. Критерии близости кривых и точности приближения

Одной из основных проблем, решение которой связано со значительными трудностями, является определение понятия близости двух кривых. Трудности эти, в свою очередь, обусловлены неопределенностью установления соответствия между точками кривых. При параметрическом задании аппроксимируемой кривой такое соответствие определяется параметром — в этом случае, однако, расстояние получается также зависящим от параметризации. Фокусный метод свободен от параметризации, что и вызывает дополнительные трудности при определении близости аппроксимируемой и аппроксимирующей кривых. Поскольку, как указывалось выше, достижимость требуемого приближения лемнискатами обеспечивается утверждением о том, что при сформулированных в постановке задачи условиях лемниската, проходящая через ε-окрестность каждой точки кривой, существует, то соответствие между точками этих двух кривых можно установить следующим естественным образом: каждой точке p исходной кривой поставить в соответствие ближайшую к ней точку q аппроксимирующей лемнискаты, расстояние между которыми $\min d(p,q)$ можно использовать для определения близости между кривыми. Критерий близости двух кривых можно задать как некоторый функционал от этого расстояния, например, в метрике C:

$$\max_p \min_q d(p,q).$$

В дальнейшем этот критерий будет использоваться для оценки близости аппроксимируемой кривой и аппроксимирующей ее лемнискаты. Назовем его L-критерием.

Сформулированный таким способом критерий близости кривых эффективен, но представляет некоторые трудности, как в плане теоретического анализа, так и в вычислительном плане — L-критерий очень ресурсоемкий. В связи с этим в работе предложен еще один критерий, вытекающий из специфических свойств лемнискат. Заметим, что при точном совпадении аппроксимирующей лемнискаты с аппроксимируемой кривой исходная кривая будет удовлетворять уравнению лемнискаты (1), и поэтому вдоль нее произведение расстояний до фокусов будет сохранять постоянным свое значение. Есть основания полагать, что лемниската тем ближе к кривой, чем меньше отклонение текущего радиуса r_i, вдоль кривой от константы R^k.

Учитывая эту особенность лемнискат, критерий близости между аппроксимирующей лемнискатой и аппроксимируемой кривой можно задать на основе меры разброса значения радиуса вдоль кривой, например, в метрике C:

$$\max_i \left| r_i - R^k \right| = \max_i \left| \prod_{j=1}^{k} r_{i,j} - R^k \right|.$$

Определенный таким образом критерий будем называть R-критерием, Он используется в разработанных алгоритмах фокусной аппроксимации наряду с L-критерием [3–5].

Можно показать, что при стремлении к нулю расстояния между кривой и лемнискатой в смысле L-критерия стремятся к нулю и колебания значений радиуса на кривой относительно среднего его значения, то есть стремится к нулю и расстояние между кривыми в смысле R-критерия, и наоборот. L- и R-критерии топологически эквивалентны [4].

В принципе можно доказать в обратное утверждение, но для дальнейшей работы необходимо было обосновать использование наряду с L-критерием и R-критерия. Второй критерий с практической точки зрения проще первого, так как не требует построения лемнискаты, кроме того, он органически присущ фокусному методу, а аналитическая форма его задания позволяет надеяться на более успешное использование его и для получения теоретических выводов.

6. Компьютерные эксперименты по приближению кривых

Метод нахождения фокусного приближения произвольной кривой разработан в виде разветвленной алгоритмической конструкции, определяющей количество фокусов, расположение фокусов и радиус аппроксимирующей лемнискаты. Приводимые ниже результаты компьютерных экспериментов по приближению кривых получены в работе с различными вариантами алгоритма для вещественной плоскости [3–5]. Так как лемниската имеет естественное представление на комплексной плоскости, разработан также комплексный метод фокусной аппроксимации [7]. Процедуры поиска параметров приближающей лемнискаты используют в качестве рабочих критерии, связанные с отклонением значения радиуса на аппроксимируемой кривой (R-критерии). Точность же результирующего приближения оценивается по расстоянию на плоскости между исходной кривой и приближающей ее лемнискатой (L-критерии).

На рис. 1 представлены результаты приближения кривых с априорно заданным числом фокусов: семифокусной лемнискаты и эмпирической кривой. На этом и последующих рисунках крестиками (звездочками) отмечены положения фокусов, точками — отсчеты исходной кривой, составляющие входную информацию для алгоритма, сплошной линией — результат аппроксимации (лемниската). Приближение первой кривой (рис. 1) было выполнено с целью тестирования точности работы алгоритма, так как координаты фокусов были известны заранее. Внутренние линии — траектории движения фокусов от начального положения в центре кривой до конечного их размещения. Алгоритм показал высокую точность поиска фокусной системы. При работе с эмпирической кривой (второй на этом рисунке) алгоритм также показал хорошее приближение.

На рис. 3 приведены результаты работы алгоритма в условиях неизвестного числа фокусов k, то есть в условиях, когда кроме локализации фокусов и значения радиуса, неизвестным является и требуемое количество фокусов. Для работы в таких условиях в алгоритмах предусмотрена процедура размножения фокусов. На рис. 3 приведены промежуточные фазы приближения тестовой лемнискаты с наращиванием числа фокусов от заведомо недостаточного их количества до окончательного. Визуальная оценка свидетельствует о достаточно хорошем качестве приближения. Число фокусов, найденное алгоритмом, равно 9, что является верным.

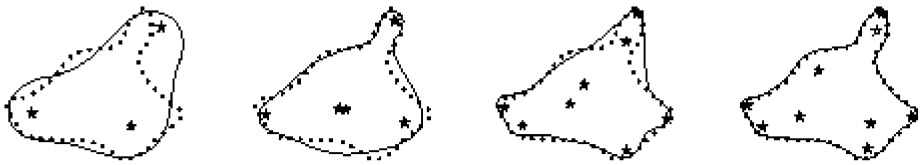


Рис. 3. Фокусная аппроксимация с размножением фокусов: 3, 5, 8, 9 фокусов.

В работе был выполнен также сравнительный анализ гармонического и фокусного методов в трех вариантах: кривая гармонического происхождения (представленная суммой гармоник) приближалась лемнискатами, кривая фокусного происхождения (лемнискаты) приближалась тригонометрическими рядами и, наконец, произвольная (эмпирическая) кривая приближалась и тем, и другим методом. Приближения, полученные обоими методами, можно считать удовлетворительными и приблизительно равнозатратными. Так, в случае эмпирической кривой, результаты эксперимента с которой приведены на рис. 4, ошибка составила 0.026 для фокусного приближения (рис. 4а), и 0.061 для гармонического (рис. 4б). При этом гармоническому методу потребовалось 22 параметра (5 гармоник), а фокусному — 17 параметров (8 фокусов).

Проведенный сравнительный анализ фокусного метода с класси-

а) б)

Рис. 4. Приближение эмпирической кривой: а) фокусами, б) гармониками.

ческим гармоническим методом свидетельствует об эффективности фокусного приближения. В связи с этим возникает естественный вопрос о возможности фокусной аппроксимации в классе других, близких к лемнискатам, фокусных кривых. Представляет, в частности, интерес рассмотреть более общий класс функций с точки зрения задачи приближения формы кривых и определить тем самым место многофокусных лемнискат в ряду аналогичных семейств аппроксимирующих функций.

7. Аддитивный инвариант

Инвариант многофокусной лемнискаты в форме (1) позволяет определить его как мультипликативный инвариант евклидовых расстояний между любой ее точкой и всеми фокусами. Рассмотрим более широкий класс функций, включающий класс многофокусных лемнискат как частный случай.

Уравнение лемнискаты (1) можно привести к аддитивному инварианту логарифмических функций расстояний в виде:

$$\sum_{j=1}^{k} \ln r_j(x,y) = S, \tag{2}$$

где $S = k \ln R$. Аналогичным аддитивным инвариантом можно представить и класс кривых, являющихся многофокусным обобщением эллипсов, для которых инвариантна сумма расстояний до двух ее фокусов внутри кривой:

$$\sum_{j=1}^{k} r_j(x,y) = S. \tag{3}$$

Многофокусные кривые с аддитивным инвариантом (3) назовем, по аналогии с лемнискатами, многофокусными эллипсами с радиусом S. Параметризованное семейство изофокусных эллипсов представлено на рис. 1б для той же системы фокусов, что и семейство лемнискат на рис. 1а. Предельным случаем больших значений S является также окружность, для малых же значений S связность кривых, в отличие от лемнискат, не нарушается — кривые, оставаясь выпуклыми, стягиваются в точку (в данном случае к одному фокусу в вершине тупого угла) с наименьшим суммарным расстоянием до фокусов. Сравнение двух семейств на рис. 1 показывает, что многофокусным лемнискатам свойственно значительно большее разнообразие форм, чем многофокусным эллипсам с теми же фокусами. В частности, в случае k-фокусов, образующих правильную систему, расположенных в вершинах правильного k-угольника, kf-эллипсы стягиваются к центру описанной окружности, что хорошо иллюстрирует семейство $6f$-эллипсов на рис. 5в (и аналогичное семейств $7f$-эллипсов на рис. 5б).

8. Квазилемнискаты

Имея в виду общность представлений семейств многофокусных лемнискат (2) и эллипсов (3), естественно рассмотреть уравнение:

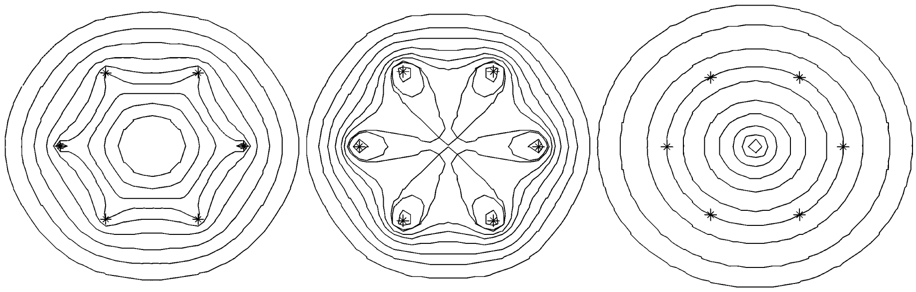
$$\sum_{j=1}^{k} \varphi(r_j(x,y)) = S \tag{4}$$

с произвольной функцией φ, являющееся их обобщением. Кривые, определяемые уравнением (4), назовем квазилемнискатами. Обычные многофокусные лемнискаты получаются, если положить $\varphi(r) = \ln r$, а многофокусные эллипсы, если взять в качестве φ тождественное отображение.

Настоящая работа посвящена изучению возможностей использования квазилемнискат в качестве класса аппроксимирующих кривых. Основной вывод состоит в том, что лемнискаты в некотором смысле являются наиболее подходящими для приближения формы произвольных кривых среди всех квазилемнискат при определенных требованиях к аппроксимационному аппарату и к функции φ, а именно:

- функция φ должна быть монотонно возрастающей, поскольку представляет собой в некотором смысле аналог расстояния;
- функция φ должна обеспечивать сложность аппроксимационного аппарата, достаточную для приближения гладких кривых произвольной формы;
- аппроксимационный аппарат должен быть инвариантным относительно преобразований, сохраняющих форму кривой — сдвига, поворота и подобия.

Последнее требование разбивается на два: инвариантность относительно движения твердого тела — сдвиги и повороты, и инвариантность относительно подобия.



а) б) в)

Рис. 5. Семейство изофокусных $6f$-квазилемнискат с гексагональной системой фокусов: а) $\varphi(r) = r^{1/3}$; б) $\varphi(r) = \ln(r)$ (лемнискаты); в) $\varphi(r) = r$ (эллипсы).

9. Выпуклые функции

Первый результат состоит в том, что, если функция φ выпуклая, то и соответствующие ей квазилемнискаты, задаваемые уравнением (4), являются выпуклыми кривыми (имеется в виду выпуклость ограниченного ею множества). Доказательство этого факта очевидно следует из следующих утверждений:

1. Если φ — выпуклая монотонно возрастающая функция, то функция $\varphi(r(x,y))$ точки (x,y) также выпукла (здесь $r(x,y)$ — как и прежде, евклидово расстояние от точки (x,y) до некоторой фиксированной точки плоскости.

2. Сумма выпуклых функций есть выпуклая функция;

3. Линия уровня выпуклой функции есть выпуклая кривая.

Приведем доказательства этих несложных утверждений.

1. Воспользуемся следующим определением выпуклости функций:

$$F(\alpha p+\beta q)\leqslant \alpha F(p)+\beta F(q),$$

для любых точек p и q плоскости и любых чисел α и β таких, что $\alpha+\beta=1$. (Точки p и q рассматриваются как векторы с обычными операциями сложения и умножения на скаляр). Требуется, следовательно, доказать выпуклость функции $F(p)=\varphi(r(p))$. Можно, без ограничения общности, считать, что $r(p)$ — расстояние от точки p до начала координат, то есть $r(p)=|p|$. Согласно неравенству треугольника имеем для любых p,q,α,β:

$$|\alpha p+\beta q|\leqslant |\alpha p|+|\beta q|=\alpha|p|+\beta|q|,$$

откуда, в силу монотонности и выпуклости функции φ, заключаем:

$$\begin{aligned}\varphi(r(\alpha p+\beta q))=\varphi(|\alpha p+\beta q|)\leqslant \varphi(\alpha|p|+\beta|q|)\leqslant&\\ \leqslant \alpha\varphi(|p|)+\beta\varphi(|q|)=\alpha\varphi(r(p))+\beta\varphi(r(q)).&\end{aligned}$$

2. Для доказательства второго утверждения рассмотрим функцию:

$$F(p)=\sum F_j(p).$$

Используя то же определение, получим:

$$F(\alpha p+\beta q)=\sum F_j(\alpha p+\beta q)\leqslant \sum(\alpha F_j(p)+\beta F_j(q))=\alpha F(p)+\beta F(q).$$

3. Наконец, для доказательства последнего утверждения рассмотрим множество $P:\ \ P=\{p:\ \ F(p)\leqslant S\}$ — внутренность линии уровня $F(p)=S$ и докажем его выпуклость. Пусть $p,q\in P$, то есть $F(p)\leqslant S$ и $F(q)\leqslant S$. Тогда всякая точка $\alpha p+\beta q$ отрезка $[p,q]$ лежит в P, так как:

$$F(\alpha p+\beta q)\leqslant \alpha F(p)+\beta F(q)\leqslant \alpha S+\beta S=S.$$

Это и есть условие выпуклости множества.

Таким образом, если расстояние задается выпуклыми функциями (в данном случае это выпуклость вниз), то функционал (4) порождает только выпуклые (вниз) семейства функций, которые не могут быть в общем случае использованы в качестве класса приближающих функций при разработке аппроксимационного аппарата. Выпуклыми функциями расстояния определяются и многофокусные эллипсы (3), поэтому их использование возможно только, если априорно известно, что сама аппроксимируемая кривая является выпуклой.

10. Масштабная инвариантность

Второй результат относится к инвариантности относительно преобразований движения. Он обеспечивается инвариантностью относительно этих преобразований евклидова расстояния, стоящего в аргументе функционала (4). Что касается преобразования подобия, то лемнискаты, как ,было показано выше, этому требованию удовлетворяют с точностью до значения радиуса R. Интересно рассмотреть с позиций требования инвариантности к преобразованию подобия и произвольные квазилемнискаты. Утверждение состоит в том, что если

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi(r_j(x,y)) = \mathrm{const}, \text{ то и } \sum_{j=1}^{k}\varphi(\alpha(r_j(x,y))) = \mathrm{const},$$

которая, вообще говоря, может иметь другое значение.

Предположим, что функция $\varphi(r)$ определяет класс квазилемнискат, инвариантных относительно преобразования подобия. Для получения необходимых условий можно рассмотреть случай двух фокусов.

Утверждение состоит в том, что:

$$\text{если } \varphi(r_1)+\varphi(r_2) = \mathrm{const}, \text{ то и } \varphi(\alpha r_1)+\varphi(\alpha r_2) = \mathrm{const}.$$

Для доказательства его зафиксируем фокусы и определим функцию $F(\alpha, S)$ следующим образом: значением этой функции будем считать радиус квазилемнискаты, получающейся из квазилемнискаты радиуса S в результате растяжения с коэффициентом α. Таким образом, для любой точки, лежащей на квазилемнискате радиуса S, выполнено равенство:

$$\varphi(\alpha r_1) + \varphi(\alpha r_2) = F(\alpha S) = F(\alpha, \varphi(r_1) + \varphi(r_2)).$$

Дифференцируя крайние члены этого равенства по r_1 и r_2, получим:

$$\alpha\varphi'(\alpha r_1) = \frac{\partial F}{\partial S}(\alpha, \varphi(r_1) + \varphi(r_2))\varphi'(r_1)$$
$$\alpha\varphi'(\alpha r_2) = \frac{\partial F}{\partial S}(\alpha, \varphi(r_1) + \varphi(r_2))\varphi'(r_2).$$

Последние уравнения можно переписать в виде:

$$\frac{\varphi'(\alpha r_1)}{\varphi'(r_1)} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial S}, \quad \frac{\varphi'(\alpha r_2)}{\varphi'(r_2)} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial F}{\partial S}.$$

Приравнивая левые части получим, что отношение производных на новой кривой и на исходной в одной и той же точке не зависит от этой точки, а зависит только от α. Обозначим это отношение через $g(\alpha)$:

$$\frac{\varphi'(ar_1)}{\varphi'(r_1)} = \frac{\varphi'(ar_1)}{\varphi'(r_2)} = g(a).$$

Дифференцируя далее по a, получим:

$$\frac{r\varphi''(\alpha r_1)}{\varphi'(r_2)} = g'(\alpha).$$

При $a = 1$ правая часть уравнения обращается в константу $G = g(1)$. В результате получим следующее уравнение:

$$r\varphi''(r) = G\varphi'(r).$$

Приняв обозначение $\psi = \varphi'$, получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$r\psi'(r) = G\psi(r),$$

решением которого, как известно, будет:

$$\psi = C_1 r^G.$$

Возвращаясь к функции ψ, получим окончательно:

$$\varphi(r) = C_1 \int r^G dr + C_2 = \begin{cases} \frac{C}{G+1} r^{G+1} + C_2, & \text{при } G \neq -1, \\ C_1 \ln r + C_2, & \text{при } G = -1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем класс функций, для которых заданный выше функционал инвариантен по отношению к преобразованию подобия:

$$\varphi(r) = c \ln r \tag{5}$$

или

$$\varphi(r) = cr^{\alpha}, \tag{6}$$

первый из которых представляет лемнискаты (2).

Непосредственной подстановкой проверяется, что найденные функции действительно определяют классы квазилемнискат, инвариантных относительно подобия, причем уже для любого числа фокусов.

Таким образом, интерес для целей аппроксимации, кроме обычных лемнискат, даваемых решением (5), могут представлять квазилемнискаты, определяемые степенными функциями вида (6), причем только для значений α в пределах $0 < \alpha < 1$. Действительно, при $\alpha \geqslant 1$ функция $\varphi(r)$ получается выпуклой, что, как нетрудно показать, приводит к выпуклости всего класса аппроксимирующих функций, сильно сужая класс аппроксимируемых функций, При $\alpha < 0$ функция $\varphi(r)$ оказывается убывающей, что противоречит требованию монотонного возрастания функции, имеющей смысл расстояния.

11. Семейства квазилемнискат

По материалам этой работы проводился сравнительный компьютерный эксперимент. Для одной и той же системы фокусов строились семейства квазилемнискат с инвариантом (4) для разных φ-функций расстояния и для широкого диапазона значений радиуса S (рис. 6).

На рис. 6а (вверху) представлено семейство кривых с логарифмической функцией расстояния $\varphi(r) = \ln r$, — семейство лемнискат (5). Здесь, как и на рис. 2а, также проявились рассмотренные выше свойства, в частности, удерживание лемнискатами всех своих фокусов внутри. На рис. 6а (внизу) изображено другое семейство класса квазилемнискат, задаваемое решением (6) для $\alpha = 1$: $\varphi(r) = r$ — семейство многофокусных эллипсов. Все кривые этого семейства, как и на рис. 2б, выпуклые, форма их бедна и при уменьшении радиуса они «теряют» свои фокусы, оставляя их за пределами кривой (и чем больше $\alpha > 1$, тем ярче проявляются эти свойства).

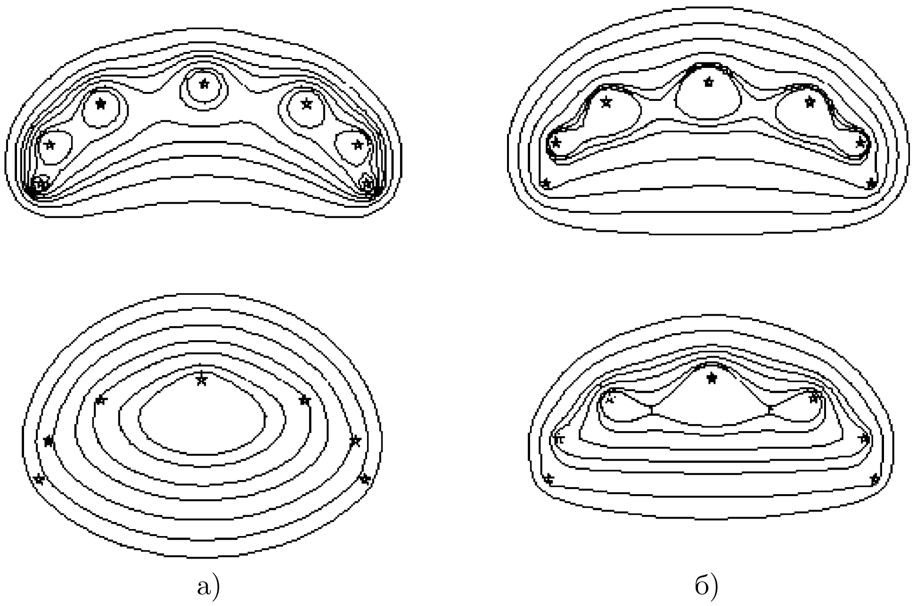


Рис. 6. Семейства многофокусных квазилемнискат с разной φ-функцией расстояния: а) лемнискаты (вверху), эллипсы (внизу); б) функция расстояния: $\varphi(r) = r^{1/4}$ (вверху), $\varphi(r) = r^{1/2}$ (внизу).

На двух других рисунках (6б) представлены еще два семейства квазилемнискат, порождаемых решением (6), с функциями расстояния: $\varphi(r) = \sqrt{r}$ (рис. 6б, внизу) и $\varphi(r) = \sqrt[4]{r}$ (рис. 6б, вверху). Кривые этих семейств уже не все выпуклые, в отличие от эллипсов, но форма их беднее, чем форма лемнискат, и они, как и эллипсы, «теряют» свои фокусы, хотя и не так «легко». Сравнение же семейств кривых со степенными функциями расстояния (рис. 6б) между собой показывает, что степень, проявляющаяся в таких характеристиках, как удерживание фокусов и вариабельность формы, у семейства с меньшим значением степени (рис. 6б, вверху) больше, чем у семейства с большим значением.

Отсюда можно сделать вывод, что с возрастанием степени корня n в функции расстояния $f(r) = \sqrt[n]{r}$ соответствующее семейство квазилемнискат будет отдаляться по своим свойствам от семейства эллипсов и приближаться к семейству лемнискат. Что естественно, имея в виду соотношение, связывающее корни с логарифмом:

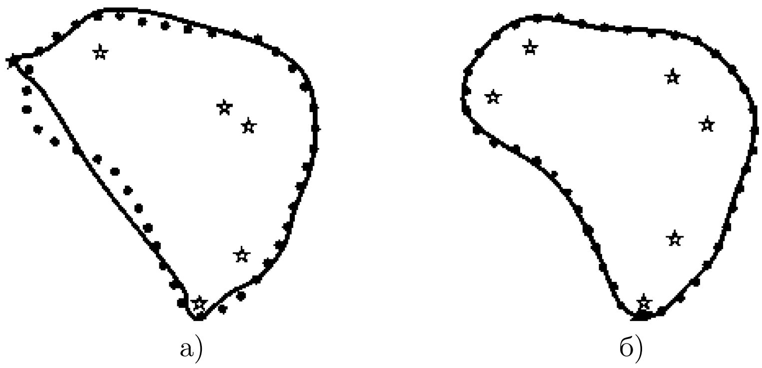
$$n(1 - \sqrt[n]{r}) \to \ln r \text{ при } n \to \infty. \tag{7}$$

Сравнительные свойства квазилемнискат с разными функциями расстояния приведены в таблице:

	Эллипсы $\varphi = r$	Корни $\varphi = r^{1/n}$	Лемнискаты $\varphi = \ln r$
Связность	связная всегда	теряет связность	теряет связность
Фокусы	теряет фокусы	теряет фокусы	сохраняет фокусы
Выпуклость	выпуклая всегда	выпуклая в основном	выпукло-вогнутая

12. Компьютерный эксперимент по приближению кривых

Рассмотренные свойства квазилемнискат, задаваемые различными функциями расстояния, отражаются и на их аппроксимационных свойствах. В качестве иллюстрации на рис. 7 приведены примеры приближения одной и той же эмпирической кривой шестифокусными квазилемнискатами: с $f(r) = \sqrt{r}$ (рис. 7а) и лемнискатами (рис. 7б).



а) б)

Рис. 7. Приближение эмпирической кривой: а) квазилемнискатами, $\alpha = 1/2$; б) лемнискатами.

Как хорошо видно из сравнения рисунков, квазилемнискаты не в состоянии приблизить заданную кривую, в то время как приближение, осуществленное с тем же числом фокусов лемнискатами, может быть признано вполне удовлетворительным [3].

Таким образом, анализ класса kf-квазилемнискат выделяет семейство лемнискат как удовлетворяющее наиболее общим требованиям к функции расстояния и описанию геометрических форм и их инвариантов.

Список литературы

[1] Hilbert D. Gessamelte Abhandlungen. Berlin: Springer, 1935. Bd. 3.

[2] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967.

[3] Ракчеева Т. А. Приближение кривых многофокусными лемнискатами // Человеко-машинные системы и анализ данных: Сб. науч. трудов. / Отв. ред. И. А. Овсеевич. М.: Наука. 1992. С. 93–110.

[4] Ракчеева Т. А. Фокусная аппроксимация плоских кривых. Заключительный отчет. Гос. рег. № 10.9.10011069. 1992.

[5] Ракчеева Т. А. Приближение кривых: фокусы или гармоники // Математика, компьютер, образование: Сб. науч. трудов. Том 2 / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007.

[6] Ракчеева Т. А. Квазилемнискаты в задаче приближения // Третьи Курдюмовские чтения. Синергетика в естественных науках: Материалы международной междисциплинарной научной конференции. Тверь, 2007. С. 113–117.

[7] Ракчеева Т. А. Приближение кривых многофокусными лемнискатами на комплексной плоскости // Математика, компьютер, образование: Сб. науч. трудов. Вып. 15. Том 2 / Под ред. Г. Ю. Ризниченко. М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.