

Об автоматной сложности классов Поста булевых функций

М. А. Кибкало

В статье рассматривается сложность автоматной реализации булевых функций и устанавливаются точные значения и асимптотические оценки функции Шеннона для замкнутых классов булевых функций, входящих в решетку Поста.

Ключевые слова: булева функция, детерминированный конечный автомат, автоматная сложность, замкнутый класс Поста, решетка Поста, функция Шеннона.

Введение

Наборы, на которых функция $f : E^n \rightarrow E$ принимает значение 1, можно рассматривать как слова конечного языка \mathcal{L}_f . Минимальное число состояний автомата, представляющего язык \mathcal{L}_f , называется автоматной сложностью функции f . Автоматной сложностью множества булевых функций называется максимальная автоматная сложность функции из этого множества. Значением функции Шеннона для класса булевых функций \mathcal{K} называется автоматная сложность множества $\mathcal{K} \cap P_2^n$ функций от n переменных из \mathcal{K} . В статье рассматривается сложность автоматной реализации булевых функций и устанавливаются точные значения и асимптотические оценки функции Шеннона для замкнутых классов булевых функций, входящих в решетку Поста.

Автор выражает глубокую благодарность академику В.Б. Кудрявцеву и проф. Д.Н. Бабину за ценные замечания и внимание к работе.

1. Основные определения

Через E обозначим множество $\{0, 1\}$, E^n — двоичный куб размерности n , E_q^n ($E_q^n \subseteq E^n$, $q = 0, \dots, n$) — q -й слой куба E^n . Через α_i обозначим i -ю координату набора $\bar{\alpha} \in E^n$, $i = 1, \dots, n$. Через P_2^n обозначим множество всех булевых функций от n переменных.

Определим детерминированный конечный автомат (ДКА) и инициальный конечный автомат (ИКА) согласно [2].

В произвольном конечном алфавите A определим класс конечных языков, содержащих слова длины n : $\mathcal{L}_n(A) = \{L \subseteq A^n\}$. Каждой $f \in P_2^n$ можно взаимно однозначно сопоставить конечный язык $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$ по следующему правилу: слово $\alpha_1 \dots \alpha_n \in L(f) \Leftrightarrow f(\bar{\alpha}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$, $\alpha_i \in E$, $i = 1, \dots, n$.

Будем говорить, что ИКА $V_q(E, Q, E, \varphi, \psi, q)$ представляет $f \in P_2^n$, если он представляет $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$.

Сложностью $\mathbb{S}(V_q)$ ИКА V_q назовем число состояний в нем. Автоматной сложностью булевой функции $f \in P_2^n$ назовем наименьшую сложность ИКА, представляющего $L(f) \in \mathcal{L}_n(E)$: $\mathbb{S}(f) = \min_{V_q \sim L(f)} \mathbb{S}(V_q)$.

Пусть $\mathcal{K} \subseteq P_2$ — класс булевых функций, $\mathcal{K}(n) = \mathcal{K} \cap P_2^n$ — множество функций от n переменных из \mathcal{K} . Функцию $\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) = \max_{f \in \mathcal{K}(n)} \mathbb{S}(f, n)$

назовем функцией Шеннона класса \mathcal{K} . Заметим, что $\mathbb{S}(\mathcal{K}, n)$ также является функцией Шеннона соответствующего класса конечных языков $\mathcal{L}_n(E)$.

Приведем обозначения замкнутых классов, введенных Постом в [8, 9] и их описания, приведенные в [1]

- C_i , $i = 1, \dots, 4$ — все булевы функции, все функции, сохраняющие 0 и/или 1.
- A_i , $i = 1, \dots, 4$ — все монотонные функции, все монотонные функции, сохраняющие 0 и/или 1.
- D_i , $i = 1, 2, 3$ — все самодвойственные α -функции, все монотонные самодвойственные функции, все самодвойственные функции.

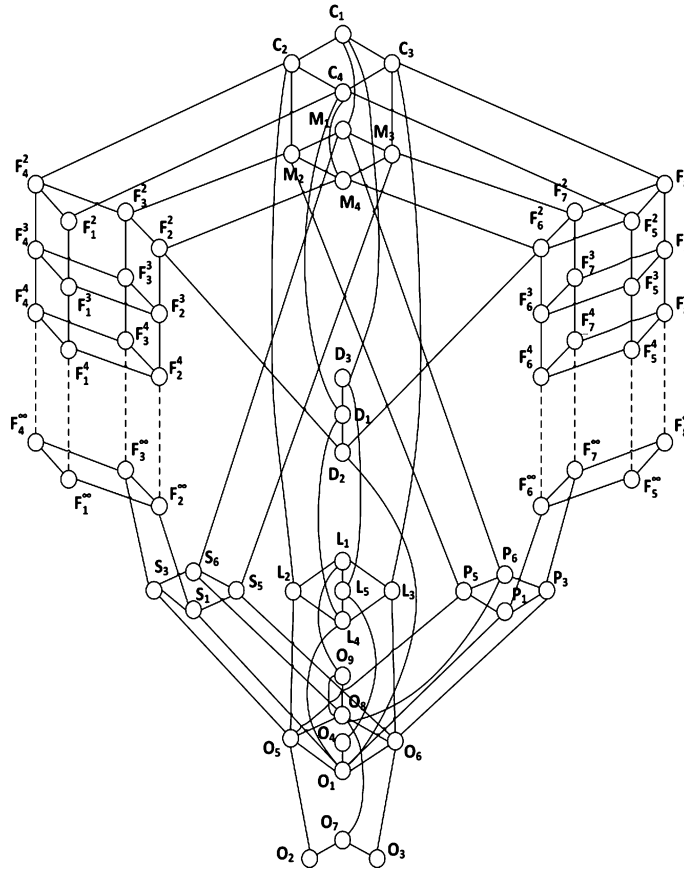


Рис. 1.

- $F_1^\mu, \mu = 2, \dots, \infty$ — все α -функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.
- $F_2^\mu, \mu = 2, \dots, \infty$ — все монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.
- $F_3^\mu, \mu = 2, \dots, \infty$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.
- $F_4^\mu, \mu = 2, \dots, \infty$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle \alpha^\mu \rangle$.

- F_5^μ , $\mu = 2, \dots, \infty$ — все α -функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$.
- F_6^μ , $\mu = 2, \dots, \infty$ — все монотонные α -функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$.
- F_7^μ , $\mu = 2, \dots, \infty$ — все монотонные функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$.
- F_8^μ , $\mu = 2, \dots, \infty$ — все функции, удовлетворяющие условию $\langle A^\mu \rangle$.
- L_i , $i = 1, \dots, 5$ — классы линейных функций.
- S_i , $i = 1, 3, 5, 6$ — классы логических сумм.
- P_i , $i = 1, 3, 5, 6$ — классы логических произведений.
- O_i , $i = 1, \dots, 9$ — классы констант и/или переменных.

Вышеперечисленные классы образуют решетку Поста, приведенную на рис. 1.

Теорема 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого класса $\mathcal{K} \in \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ существуют $p \geq 0$ и функция максимальной сложности $f \in \mathcal{K}(n)$, автоматная сложность которой равна

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{i=0}^p 2^{2^i} - p - 1,$$

где значение p для данного n однозначно вычисляется по формуле $p(n) = \min\{q \mid 2^{n-q-1} < 2^{2^{q+1}}\}$.

Теорема 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого класса $\mathcal{K} \in \{D_1, D_3\}$ существуют $p \geq 0$ и функция максимальной сложности $f \in \mathcal{K}$, автоматная сложность которой равна

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{i=0}^p 2^{2^i} - p - 1 - u(n, p),$$

где $p(n) = \min\{q \mid 2^{n-q-1} < 2^{2^{q+1}}\}$,
 $u(n, p) = \begin{cases} 2^{2^{p-1}-1} & \text{при } n = 2^p + p, p > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Следствие 1. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3\}$ выполнено

$$\frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim 2 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 2. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3\}$ при $n = p + (1 + \alpha) \cdot 2^p$, $\alpha \in (0, 1]$ выполнено

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim (1 + \alpha) \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 3. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого класса $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty, i = 1, 4, 5, 8\}$ существуют $p \geq 0$ и функция максимальной сложности $f \in \mathcal{K}$, автоматная сложность которой

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) = 2^{n-1-p} - 1 + \sum_{j=0}^p 2^{2^j - p - 1} + \max(2^{n-2-p}, 2^{2^p} - 1) + u(i, n, p),$$

$$\text{где } p(n) = \min\{q \mid 2^{n-q-2} < 2^{2^{q+1}}\},$$

$$u(i, n, p) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 1, 4, n = 2^p + p + 1, p > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следствие 3. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty, i = 1, 4, 5, 8\}$ выполнено

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{3}{2} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 4. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty, i = 1, 4, 5, 8\}$ при $n = (1 + \alpha) \cdot 2^p + p$, $\alpha \in (0, 1]$ выполнено

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim \frac{3(1 + \alpha)}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 5. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{F_i^\mu, \mu \geq 2, i = 1, 4, 5, 8\}$ выполнено

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim 2 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 4. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, D_2, F_i^2, i = 2, 3, 6, 7\}$ при $n = \alpha \binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor} + p$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ имеет место асимптотическая оценка

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim \frac{2\alpha c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad c = \sqrt{2/\pi},$$

где $p(n) = \min \left\{ q \mid 2^{n-q} \leq 2^{\binom{q}{\lfloor q/2 \rfloor} + q \bmod 2} \right\}$ для классов A_1, A_2, A_3, A_4, D_2 и $p(n) = \min \left\{ q \mid 2^{n-q} \leq 2^{\binom{q}{\lceil (q+1)/2 \rceil}} \right\}$ для классов $F_i^2, i = 2, 3, 6, 7$.

Следствие 6. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, D_2, F_i^2, i = 2, 3, 6, 7\}$ выполнено

$$\frac{c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{2c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Теорема 5. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty, i = 2, 3, 6, 7\}$ при $n = \alpha \binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor} + p$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ имеет место асимптотическая оценка

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \sim \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}, \quad c = \sqrt{2/\pi},$$

где $p(n) = \min \left\{ q \mid 2^{n-q-1} \leq 2^{\binom{q}{\lfloor q/2 \rfloor} + q \bmod 2} \right\}$.

Следствие 7. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{F_i^\infty, i = 2, 3, 6, 7\}$ выполнено

$$\frac{3c}{4\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{3c}{2\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Следствие 8. Для любого класса $\mathcal{K} \in \{F_i^\mu, \mu \geq 3, i = 2, 3, 6, 7\}$ выполнено

$$\frac{3c}{4\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \lesssim \frac{2c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Приведенные выше утверждения дополняет теорема 6, опирающаяся на известные оценки сложности. Доказательства этого утверждения в данной работе мы приводить не будем ввиду его простоты.

Теорема 6. Для следующих классов достижимы точные значения автоматной сложности:

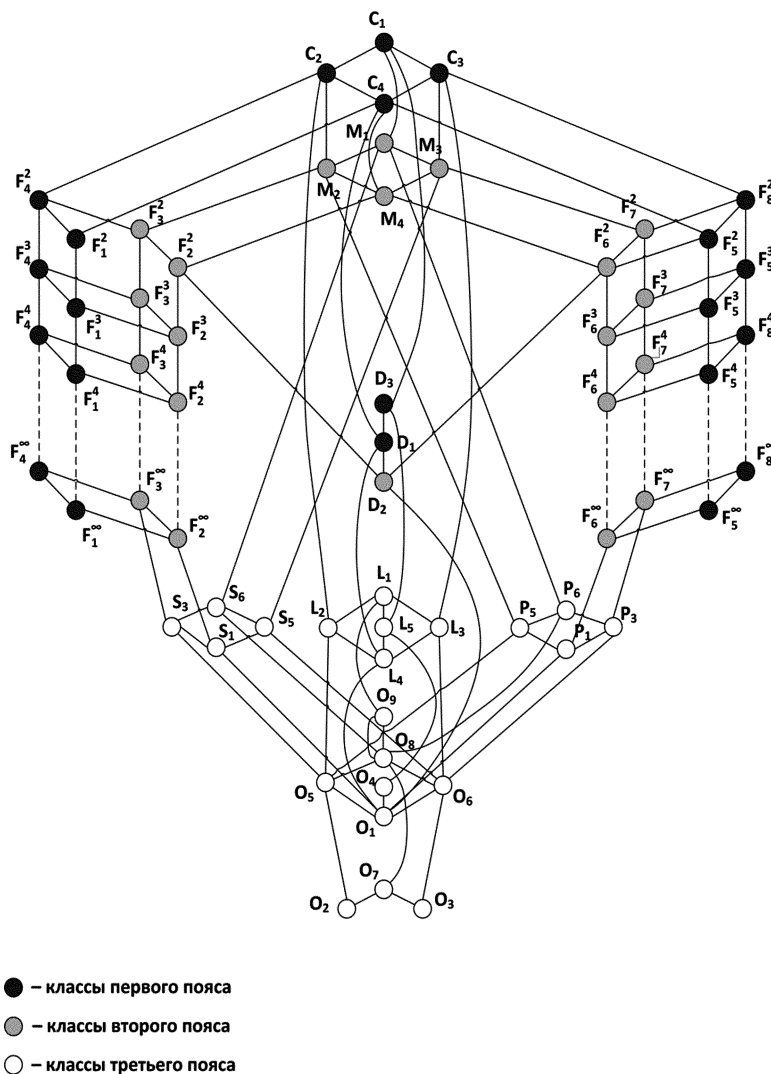


Рис. 2.

- 1) $S(L_i, n) = 2n, i = 1, 2, 3, 4, 5.$
- 2) $S(S_i, n) = 2n, i = 1, 3, 5, 6.$
- 3) $S(P_i(n)) = n + 1, i = 1, 3, 5, 6.$

$$4) \mathbb{S}(O_i(n)) = n + 1, \quad i = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

$$5) \mathbb{S}(O_3(n)) = 1.$$

Таким образом, имеет место разбиение решетки классов Поста на три пояса в соответствие с вышеприведенной асимптотикой автоматной сложности (на рис. 2 пояса обозначены черным, серым и белым цветами). Для классов первого и третьего пояса устанавливаются точные значения автоматной сложности (см. формулировки теорем выше).

2. Классы первого пояса: $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_3,$ $F_i^\infty, F_i^\mu, \mu \geq 2, i = 1, 4, 5, 8$

Назовем подавтоматом шестерку $V = (A, B, Q, P, \varphi, \psi)$, где $P \subseteq Q$, а $\varphi : P \times A \rightarrow Q$ и $\psi : P \times A \rightarrow B$ — частично определенные функции перехода и выхода.

Можно построить ИКА \tilde{V} из нескольких подавтоматов $V_i = (A, B, Q_i, P_i, \varphi_i, \psi_i)$, $i = 1, \dots, k$ с непересекающимися множествами P_i , положив $Q = \bigcup_{i=1}^k Q_i$, выбрав начальное состояние $\tilde{q} \in \tilde{Q}$ и доопределив функции φ и ψ на множество $\bigcup_{i=1}^k Q_i \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i$.

Назовем (полным) двоичным прямым деревом высоты l подавтомат T , диаграмма которого есть (полное) ориентированное двоичное дерево высоты l , переходы в котором делаются из состояний слоя T_i в состояния слоя T_{i+1} , $i = 0, \dots, l-1$.

Назовем обратным деревом высоты p подавтомат R , диаграмма которого есть ориентированное дерево высоты p , переходы в котором делаются из состояний слоя R_i в состояния слоя $R_{\max(i-1, 0)}$, $i = 0, \dots, p$.

При построении автомата путем объединения прямого и обратного деревьев начальным состоянием будет корень прямого дерева, а тупиковым состоянием — корень обратного дерева.

Для ИКА $V_q = (E, Q, E, \varphi, \psi, q)$ и $k \in \mathbb{N}$ доопределим функции φ и ψ на $Q \times A^k$ так, что для $p \in Q$, $\bar{\alpha} \in A^k$, $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ выполнено $\varphi(p, \bar{\alpha}) = \varphi(\dots \varphi(\varphi(p, \alpha_1), \alpha_2), \dots \alpha_k)$ и $\psi(p, \bar{\alpha}) = \psi(\dots \varphi(\varphi(p, \alpha_1), \alpha_2), \dots \alpha_k)$.

l -м слоем Q_l , $Q_l \subseteq Q$ автомата V_q назовем множество $\{\varphi(q, \bar{\alpha}), \bar{\alpha} \in E^l\}$.

Будем говорить, что состояние $p \in Q$ распознает набор $\bar{\alpha} \in E_2^l$, если $\psi(p, \bar{\alpha}) = 1$.

Назовем i -суффиксом набора $\bar{\alpha} \in E^n$, $\bar{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ набор $\bar{\beta} \in E^i$, $\bar{\beta} = \{\alpha_{n-i+1}, \dots, \alpha_n\}$ и i -суффиксом функции $f \in P_2^n$ функцию $g(x_{n-i+1}, \dots, x_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-i}, x_{n-i+1}, \dots, x_n)$ для $i = 0, \dots, n$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-i} \in E$.

Множество i -суффиксов функций из $\mathcal{K}(n) \subseteq P_2^n$ обозначим через $\underline{\mathcal{K}}_i(n)$.

Очевидна следующая верхняя оценка функции Шеннона для класса $\mathcal{K} \subseteq P_2$.

$$\mathbb{S}(\mathcal{K}, n) \leq \sum_{i=0}^n \min(2^i, \underline{\mathcal{K}}_{n-i}(n)) \quad (*)$$

Схема доказательства теорем для класса \mathcal{K} выглядит следующим образом:

- 1) Из двух подавтоматов строится автомат, представляющий специальную функцию из \mathcal{K} . Первый подавтомат является полным двоичным прямым деревом T высоты l , листья $t_l(\bar{\alpha})$ которого соответствуют наборам $\bar{\alpha} \in E^l$, а второй — обратным деревом R высоты p , листья которого $r_p(f)$ соответствуют функциям $f \in P_2^p$ — p -суффиксам функций из некоторого множества $\tilde{\mathcal{K}}(n) \subseteq \mathcal{K}(n)$.
- 2) Доказывается, что этот автомат имеет максимальную сложность в $\tilde{\mathcal{K}}(n)$. Для некоторых классов первого пояса решётки Поста $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ совпадает с $\mathcal{K}(n)$, и, следовательно, удается найти точное значение функции Шеннона. Для второго пояса $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ содержит функции, сложность которых близка к максимально возможной.
- 3) Находится асимптотика функции Шеннона класса \mathcal{K} и асимптотические значения некоторых параметров построенного автомата.

Теорема 1 и следствия 1, 2 для P_2 (C_1 в нотации Поста) доказаны в [3]. При этом строится автомат, представляющий самую сложную функцию из P_2^n . Автомат представляет собой полное прямое дерево T высоты l , листья которого соединены с листьями об-

ратного дерева R высоты p , $n = l + p + 1$. Обратное дерево также является полным, то есть $\tilde{\mathcal{K}}(n) = P_2^n$ и $|\underline{\mathcal{K}}_p(n)| = |P_2^p| - 1$. Листья T (состояния слоя T_l) соединяются с листьями R (состояниями слоя R_p) так, что все состояния построенного автомата являются достижимыми, и автомат не содержит эквивалентных состояний за исключением состояния, эквивалентного тупиковому, в каждом из $p + 1$ слоев обратного дерева. Обозначим множество таких состояний через Z_p .

Для такого автомата доказаны следующие свойства и соотношения (f — функция, представляемая этим автоматом):

$$\mathbb{S}(f) = \mathbb{S}(C_1(n)) = 2^{n-p} - 1 + \sum_{i=0}^p 2^{2^i} - p - 1,$$

$$\frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(C_1, n) \lesssim 2 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Обратное дерево высоты p используется при $2^p + p \leq n < 2^{p+1} + p + 1$. Число листьев прямого и обратного деревьев связаны соотношением $|R_p|/2 \leq T_l < |R_p|^2$.

Для $n = p + (1 + \alpha) \cdot 2^p$, $\alpha \in (0, 1]$ выполнено $\mathbb{S}(C_1, n) \sim (1 + \alpha) \cdot \frac{2^n}{n}$.
Для числа переменных и высоты обратного дерева выполнено:

$$p = \log n - \log(1 + \alpha) + O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

Очевидно, что эти рассуждения применимы и к классам C_2, C_3 и C_4 . Достаточно положить $\varphi(t_l(\bar{0}), 0) = r_p(0)$ и $\varphi(t_l(\bar{1}), 1) = r_p(1)$, то есть, соединить нулевым ребром состояние из T_l , соответствующее нулевому набору из E^l с состоянием из R_p , соответствующим тождественному нулю из P_2^p , и единичным ребром — состояние из T_l , соответствующее единичному набору из E^l с состоянием из R_p , соответствующим тождественной единице из P_2^p .

Доказательство теоремы 2 (классы D_1, D_3).

Используется та же конструкция автомата, что и в теореме 1. Самодвойственность функций из D_3 накладывает ограничения на способ соединения состояний из T_l и R_p . Состояния из T_l , соответствующие двойственным наборам $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}^*$ из E^l должны соединяться с

состояниями из R_p , соответствующими двойственным функциям из P_2^n : $\varphi(t_l(\bar{\alpha}), \beta) = \varphi(t_l(\bar{\alpha}^*), \beta^*)^*$, $\beta \in E$. При этом, для достижимого состояния $r_p(f) \in T_l$, где $f \in D_3(p)$, существует такой набор $\bar{\alpha} \in E_2^l$, что $\varphi(t_l(\bar{\alpha}), 0) = \varphi(t_l(\bar{\alpha}), 1) = r_p(f)$. То есть, такое состояние должно соединяться, по крайней мере, с двумя состояниями из T_l .

Утверждение 1. *При $|R_p|/2 < T_l < |R_p|^2$ ($2^p + p < n < 2^{p+1} + p + 1$) можно построить такое соединение T_l и R_p , что все состояния из R_p будут достижимы, и автомат не будет содержать бесполезных и эквивалентных состояний вне множества Z_p .*

Утверждение 2. *При $|R_p|/2 = T_l$ ($2^p + p = n$) число недостижимых состояний в R_p не меньше максимума из числа недостижимых состояний, соответствующих функциям из $D_3(p)$ и числа достижимых состояний, соответствующих функциям из $D_3(p)$.*

Следовательно, число недостижимых состояний в R_p не меньше $|D_3(p)|/2 = 2^{2^p-1}$. Для таких p и n можно построить соединение T_l и R_p , оставляющее недостижимыми ровно $|D_3(p)|/2$ состояний из R_p , соответствующих функциям из $D_3(p)$. Следующее утверждение обеспечивает достижимость всех состояний из R_{p-1} .

Утверждение 3. *Любая функция $f \in P_2^{p-1}$ является $(p-1)$ -суффиксом некоторой функции $f \in P_2^p \setminus D_3(p)$.*

Для класса D_1 проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям для классов C_2, C_3 и C_4 . Теорема 2 доказана.

Очевидно, что следствия 1, 2 верны и для классов D_1, D_3 .

Доказательство теоремы 3, следствий 3, 4, 5 (классы D_1, D_3).

Обозначим через $\mathcal{H}_t^{n,i} : P_2^n \rightarrow P_2^{n+1}$, $i = 0, 1$, $t = 1, \dots, n+1$ отображение, для которого выполнено

$$\mathcal{H}_t^{n,i}(f)(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_{t-1}, x_{t+1}, \dots, x_{n+1}), & x_{t-1} = i; \\ 1 - i, & x_{t-1} = 1 - i. \end{cases}$$

Для $\mathcal{K} \subseteq P_2^n$ обозначим $\mathcal{H}_t^{n,i}(\mathcal{K}) = \{\mathcal{H}_t^{n,i}(f), f \in \mathcal{K}(n)\}$, $i = 0, 1$ и $\mathcal{H}^{n,i}(\mathcal{K}) = \bigcup_{t=1}^{n+1} \mathcal{H}_t^{n,i}(\mathcal{K})$.

Операция $\mathcal{H}_t^{n,i}$ вызывает вставку дополнительной переменной после x_t (в начале при $t = 0$), причем функция $\mathcal{H}_t^{n,i}(f)$ может быть равна i , только если значение этой переменной равно i .

Если Q_t — t -й слой автомата V_q , через Q'_t обозначим множество $Q_t \setminus Q_n$ нетупиковых состояний из Q_t , $t = 0, \dots, n-1$. Считаем $Q_n = Q'_n$.

Утверждение 4. Для любой $f \in P_2^n$ выполнено

$$\mathbb{S}(\mathcal{H}_t^{n,1}(f)) = \mathbb{S}(f) + \min_{V_q \sim L(f)} \max_{t=0, \dots, n} |Q'_t|.$$

Доказательство. Рассмотрим приведенный автомат $V_q(E, Q, E, \varphi, \psi, q) \sim L(f)$ и $t = 0, \dots, n$. Автомат \bar{V}_q , представляющий $\mathcal{H}_t^{n,1}(f)$ можно построить из V_q добавлением слоя $\overline{Q'_{t+1}}$ после слоя Q'_t , причем переходы из состояний Q'_t по 1 будут делаться в состояния $\overline{Q'_{t+1}}$, а по 0 — в тупиковое состояние.

При $t < n$ автомат $\bar{V}_q(E, \bar{Q} = Q \cup \overline{Q'_{t+1}}, E, \bar{\varphi}, \bar{\psi}, q) \sim L(\mathcal{H}_t^{n,1}(f))$ строится следующим образом: для любого $r \in Q'_t$ в автомат добавляется состояние $h(r) \in \overline{Q'_{t+1}}$. Функции перехода $\bar{\varphi}$ и выхода $\bar{\psi}$ определяются так:

$$\bar{\varphi}(r, i) = \begin{cases} h(r), & \text{если } r \in Q'_t, i = 1, \\ r_{n,0}, & \text{если } r \in Q'_t, i = 0, \\ \varphi(h^{-1}(r), i), & \text{если } r \in \overline{Q'_{t+1}}, \\ \varphi(r, i), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\bar{\psi}(r, i) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \in Q'_t, \\ \psi(h^{-1}(r), i), & \text{если } r \in \overline{Q'_{t+1}}, \\ \psi(r, i), & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $t = n$ тупиковое состояние $r_{n,0} \in Q_n$ дублируется и перестает быть тупиковым. Новым тупиковым состоянием становится $h(r_{n,0})$. Функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ определяются так:

$$\bar{\varphi}(r, i) = \begin{cases} h(r_{n,0}), & \text{если } r = r_{n,0}, h(r_{n,0}), \\ h(r_{n,0}), & \text{если } \varphi(r, i) = r_{n,0}, \psi(r, i) = 0, r \in Q \setminus Q_n, \\ r_{n,0}, & \text{если } \varphi(r, i) = r_{n,0}, \psi(r, i) = 1, r \in Q \setminus Q_n, \\ \varphi(r, i), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\bar{\psi}(r, i) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = r_{n,0}, i = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что построенный автомат также будет приведенным. Сложность построенного автомата будет наибольшей, если мы дублируем слой, содержащий наибольшее число состояний, то есть при таком t , что $|Q'_t| = w(V_q)$. Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Для любой $f \in P_2^n$ выполнено*

$$\mathbb{S}(\mathcal{H}_t^{n,0}(f)) \leq \mathbb{S}(f) + \min_{V_q \sim L(f)} \max_{t=0, \dots, n} |Q'_t| + n.$$

Доказывается аналогично предыдущему утверждению. Но, в силу несимметричности относительно 0 и 1 определения представимости функции конечным автоматом, может потребоваться добавление цепочки состояний, компенсирующих эту несимметричность. Несимметричность состоит в том, что состояние, не распознающее ни один из суффиксов набора из P_2^n , считается эквивалентным тупиковому состоянию. В то же время для состояний, распознающих все возможные суффиксы наборов из P_2^n , вообще говоря, не определяется эквивалентное «антитупиковое» состояние.

Доказательство теоремы 3.

Автоматы, рассматриваемые в статье, содержат полные прямые и обратные деревья, и применение операций $\mathcal{H}_t^{n,1}$ и $\mathcal{H}_t^{n,0}$ вызывает одинаковые изменения их топологии.

Очевидно, что отображения $\mathcal{H}^{n,0}$ и $\mathcal{H}^{n,1}$ сохраняют такие свойства булевых функций, как монотонность и сохранение нуля или единицы. Следовательно,

$$\begin{aligned} F_1^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,0}(C_4(n)), & F_2^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,0}(A_4(n)), \\ F_3^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,0}(A_1(n)), & F_4^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,0}(C_1(n)), \\ F_5^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,1}(C_4(n)), & F_6^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,1}(A_4(n)), \\ F_7^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,1}(A_1(n)), & F_8^\infty(n+1) &= \mathcal{H}^{n,1}(C_1(n)). \end{aligned} \tag{**}$$

Утверждение 6. *Для $\tilde{f} \in P_2^n$, представляемой автоматом максимальной сложности (доказательство теоремы 1) существует такое $\tilde{t} \in [0, n]$, что*

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,1}(\tilde{f}), n+1) &= \mathbb{S}(F_8^\infty(n+1)) = \mathbb{S}(F_5^\infty(n+1)) \quad u \\ \mathbb{S}(\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,0}(\tilde{f}), n+1) &= \mathbb{S}(F_4^\infty(n+1)) = \mathbb{S}(F_1^\infty(n+1)).\end{aligned}$$

Доказательство. Из (*) следует, что автомат максимальной сложности, построенный при доказательстве теоремы 1, содержит слой максимальной мощности среди автоматов, представляющих функции из P_2^n . Возможны два случая:

а) $n = p + 2^p$ — максимальным будет последний слой обратного дерева $Q'_{\tilde{t}}$, $\tilde{t} = n - p$, содержащий $2^{2^p} - 1$ состояние (и одно эквивалентное тупиковому);

б) $n \neq p + 2^p$ — максимальным будет последний слой прямого дерева $Q'_{\tilde{t}}$, $\tilde{t} = n - p - 1$, содержащий 2^{n-p-1} состояний.

Добавление к самому сложному приведенному автомату, представляющему функцию из P_2^n , слоя максимальной мощности дает самый сложный автомат, представляющий функцию из $F_8^\infty(n+1)$. Следовательно, $\mathbb{S}(\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,1}(\tilde{f}), n+1) = \mathbb{S}(F_8^\infty(n+1))$.

Аналогично для $\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,0}$ и класса $F_4^\infty(n+1)$ с той разницей, что в случае а) к слою $Q'_{\tilde{t}}$ будет добавлено одно состояние, из которого переход по 0 делается в тупиковое состояние, а по 1 — в состояние, распознающее все наборы из P_2^{n-t} . Следовательно, $\mathbb{S}(\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,0}(\tilde{f})) = \mathbb{S}(F_4^\infty(n+1))$.

Очевидно, что функцию \tilde{f} можно выбрать так, чтобы она была α -функцией. Получаем $\mathbb{S}(\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,1}(\tilde{f})) = \mathbb{S}(F_5^\infty(n+1))$ и $\mathbb{S}(\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,0}(\tilde{f})) = \mathbb{S}(F_1^\infty(n+1))$. Утверждение доказано.

Из утверждения 6 непосредственно следует теорема 3.

Очевидно следующее утверждение, из которого выводятся следствия 3–5.

Утверждение 7. Для $\tilde{f} \in P_2(n)$, представляемой автоматом максимальной сложности выполнено

$$\mathbb{S}(\tilde{f}) \sim 2 \cdot |Q'_{\tilde{t}}| + |Q'_{\tilde{t}+1}| \quad u \quad \mathbb{S}(\mathcal{H}_{\tilde{t}}^{n,i}(\tilde{f})) \sim 3 \cdot |Q'_{\tilde{t}}| + |Q'_{\tilde{t}+1}|, \quad i \in E.$$

Следствие 5 выводится из следствий 1, 3 и того, что $F_i^\mu \supseteq F_i^\infty$ для всех $\mu \geq 2$, $i = 1, 4, 5, 8$.

3. Классы второго пояса: $A_1, A_2, A_3, A_4, D_2, F_i^2, F_i^\infty, F_i^\mu, \mu \geq 3, i = 2, 3, 6, 7$

Для построения автоматов с большой сложностью, представляющих монотонные функции, введем понятие монотонного вложения — специального отображения двоичного куба в множество монотонных булевых функций.

Для $l, p \in \mathbb{N}$ назовем монотонным (l, p) -вложением отображение $\mu_{l,p} : E^l \rightarrow A_1(p)$, такое что для любых $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in E^l, \bar{\alpha} \geq \bar{\beta}, \bar{\gamma} \in E^p$ выполнено $\mu_{l,p}(\bar{\alpha})(\bar{\gamma}) \geq \mu_{l,p}(\bar{\beta})(\bar{\gamma})$. $A_1(p)$ — множество монотонных булевых функций от p аргументов в нотации Поста.

Утверждение 8. Пусть $\mu_{l,p}$ — монотонное (l, p) -вложение. Тогда функция $f_{l,p} : E^{l+p} \rightarrow E, f_{l,p}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \gamma_1, \dots, \gamma_p) = \mu_{l,p}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ будет монотонной.

Назовем монотонное (l, p) -вложение $\mu_{l,p}$ (l, p, F) -вложением, если $\mu_{l,p}(E^l) \subseteq F$ для некоторого множества $F \subseteq A_1(p)$ и (l, p, F_0, F_1) -вложением, если $\mu_{l,p}(\{\bar{\alpha} \in E^l \mid \alpha_1 = i\}) \subseteq F_i$ для некоторых множеств $F_i \subseteq A_1(p), i = 0, 1$.

Для (l, p, F_0, F_1) -вложения $\mu_{l,p}$ естественным образом определяются $(l-1, p, F_0)$ -вложение $\mu_{l,p,0}$ и $(l-1, p, F_1)$ -вложение $\mu_{l,p,1}$. Для всех $\alpha_j, \gamma_k \in E, j = 2, \dots, l, k = 1, \dots, p$ верно

$$\mu_{l,p,0}(\alpha_2, \dots, \alpha_l)(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \leq \mu_{l,p,1}(\alpha_2, \dots, \alpha_l)(\gamma_1, \dots, \gamma_p). \quad (***)$$

И наоборот, если для $(l-1, p, F_0)$ -вложения $\mu_{l,p,0}$ и $(l-1, p, F_1)$ -вложения $\mu_{l,p,1}$ выполнено (***), можно определить монотонное (l, p, F_0, F_1) -вложение $\mu_{l,p}$.

Для множества $F \subseteq E_q^p, q = 0, \dots, p$ положим $F^> = \bigcup_{\bar{\beta} \in F} \{\bar{\alpha} \in E^p \setminus F \mid \bar{\alpha} > \bar{\beta}\}$ и $F^< = \bigcup_{\bar{\beta} \in F} \{\bar{\alpha} \in E^p \setminus F \mid \bar{\alpha} < \bar{\beta}\}$. Обозначим через $\mathcal{F}(F) \subseteq P_2^p$ множество булевых функций, все нижние единицы которых лежат в F . Через $\mathcal{G}(F) \subseteq P_2^p$ обозначим множество функций вида $\mathcal{G}(f) = f \vee \chi(F^>)$, где $f \in F$, а χ — характеристическая функция.

Перенумеруем элементы множества F от $\bar{\gamma}_1$ до $\bar{\gamma}_{|F|}$. Обозначим через $\nu_{\bar{\gamma}}^p \in A_1(p)$ функцию, для которой $\bar{\gamma} \in E^p$ является единственной нижней единицей. Для $l = 1, \dots, |F|$ назовем монотонное

$(l, p, \mathcal{F}(F))$ -вложение $\mu_{l,p}$ каноническим, если для любого $\bar{\alpha} \in E^l$ выполнено $\mu_{l,p}(\alpha_1, \dots, \alpha_l)(\gamma_1, \dots, \gamma_p) = \bigvee_{\alpha_i=1} \nu_{\gamma_i}^p(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$.

Назовем монотонное $(l, p, \mathcal{F}(F_0), \mathcal{F}(F_1))$ -вложение $\mu_{l,p}$ каноническим ($|F_0| = |F_1|$, F_0 и F_1 могут лежать в разных слоях E^p), если вложения $\mu_{l,p,0}$ и $\mu_{l,p,1}$ являются каноническими и выполнено условие (***)).

Аналогично определяются канонические $(l, p, \mathcal{G}(F))$ - и $(l, p, \mathcal{G}(F_0), \mathcal{G}(F_1))$ -вложения.

Схема доказательства теорем для класса из второго пояса \mathcal{K} выглядит следующим образом:

- 1) Из двух подавтоматов строится автомат, представляющий специальную функцию из \mathcal{K} . Первый подавтомат является полным двоичным прямым деревом T высоты l , листья $t_l(\bar{\alpha})$ которого соответствуют наборам $\bar{\alpha} \in E^l$, а второй — обратным деревом R высоты p , листья которого $r_p(f)$ соответствуют монотонным функциям $f \in A_1(p)$. При этом листья прямого дерева из слоя T_l отождествляются с листьями обратного дерева из слоя R_p при помощи канонического монотонного вложения. В качестве множества $\tilde{\mathcal{K}}(n)$ выбирается подмножество монотонных функций с p -суффиксами из некоторого множества (например, $\mathcal{F}(F)$, $F \subseteq E_q^p$).
- 2) Доказывается, что для большинства значений n сложность этого автомата асимптотически равна функции Шеннона для \mathcal{K} , а для некоторых значений n , в принципе, можно построить вдвое более сложный автомат, представляющий функцию из $\mathcal{K}(n)$.
- 3) Находится асимптотика функции Шеннона класса \mathcal{K} и асимптотические значения некоторых параметров построенного автомата.

Доказательство теоремы 4 и следствия 6 (классы $A_1, A_2, A_3, A_4, D_2F_i^2$, $i = 2, 3, 6, 7$).

Для классов A_1 – A_4 построим следующее вложение: $(l, p, \mathcal{F}(E_{p/2}^p))$ при четных p (вложение E^l в множество функций, имеющих нижние единицы в среднем слое) и $(l, p, \mathcal{F}(E_{\lfloor p/2 \rfloor}^p), \mathcal{F}(E_{\lceil p/2 \rceil}^p))$ при нечетных

p (вложение E^l в множество функций, имеющих нижние единицы в одном из средних слоев).

Утверждение 9. Для нечетного p можно выбрать нумерацию наборов в слоях $E_{\lfloor p/2 \rfloor}^p$ и $E_{\lceil p/2 \rceil}^p$ так, что для вложения $(l, p, \mathcal{F}(E_{\lfloor p/2 \rfloor}^p), \mathcal{F}(E_{\lceil p/2 \rceil}^p))$ будет выполнено свойство (***)

Следует из возможности покрытия двоичного куба цепями Анселя [10].

То есть, построенный автомат представляет монотонную булеву функцию $\hat{f} \in A_1(n)$, $n = l + p$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выбираем минимально возможное значение p . Высота обратного дерева будет равна p при $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p)$, где $\hat{n}(p) = \binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor} + p \bmod 2 + p$.

Для сложности функции \hat{f} очевидна оценка

$$2^{n-p+1} - 1 \leq \mathbb{S}(\hat{f}) \leq 2^{n-p+1} - p - 1 + \sum_{i=0}^{p-1} |A_1(i)|.$$

Из оценок числа монотонных функций Коршунова [6] следует, что для некоторого $\beta(n) = o(1)$ при $\hat{n}(p-1)(1 + \beta(n)) < n \leq \hat{n}(p)$ выполнено $2^{n-p} \gg \sum_{i=0}^{p-1} |A_1(i)|$, а при $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p-1)(1 + \beta(n))$ имеем $2^{n-p} \gg \sum_{i=0}^{p-2} |A_1(i)|$.

Из (*) следует, что в первом случае сложность построенного автомата будет асимптотически равна функции Шеннона для класса A_1 , а во втором — сложность автомата, представляющего монотонную функцию, может быть увеличена не более чем вдвое за счет увеличения высоты прямого дерева на 1.

Оценим высоту обратного дерева и сложность построенного автомата:

Утверждение 10. При $n = p + \alpha \binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor}$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ выполнено $p = \log n + \frac{1}{2} \log \log n - \log c - \log \alpha + O(\frac{\log \log n}{\log n})$ и $\mathbb{S}(\hat{f}) \sim \mathbb{S}(A_1, n) \sim \frac{2\alpha c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$, $c = \sqrt{2/\pi}$.

Так как на интервалах $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p-1)(1 + \beta(n))$ выполнено $\mathbb{S}(\hat{f}) \sim \frac{c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$, верно следствие 6 — для всех n выполнено $\frac{c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n} \lesssim \mathbb{S}(A_1, n) \lesssim \frac{2c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$.

Так как функция \hat{f} сохраняет 0 и 1, вышесказанное применимо и к классам A_2, A_3, A_4 .

Через $E_{q,i}^p$ обозначим множество наборов из E_q^p , первый элемент которых равен $i \in E$. Для класса самодвойственных монотонных функций D_2 построим следующее вложение: $(l, p, \mathcal{G}(E_{p/2,1}^p), \mathcal{G}(E_{p/2,0}^p))$ при четных p и $(l, p, \mathcal{G}(E_{\lfloor p/2 \rfloor}^p), \mathcal{G}(E_{\lfloor p/2 \rfloor}^p))$ при нечетных p . На множестве $E_{p/2,1}^p$ ($E_{\lfloor p/2 \rfloor}^p$) задана некоторая нумерация наборов. Двойственные им наборы в том же порядке нумеруются в множестве $E_{p/2,0}^p$ ($E_{\lfloor p/2 \rfloor}^p$).

В силу выбора множества функций \mathcal{G} для любого $\bar{\gamma} \in E^p$ верно

$$\max_{\alpha_2, \dots, \alpha_l} \mu_{l,p,0}(\alpha_2, \dots, \alpha_l)(\gamma_1, \dots, \gamma_p) = \min_{\alpha_2, \dots, \alpha_l} \mu_{l,p,1}(\alpha_2, \dots, \alpha_l)(\gamma_1, \dots, \gamma_p).$$

Поэтому, вложения будут монотонными.

Утверждение 11. *Функция \check{f} , представляемая построенным автоматом, является самодвойственной.*

Покажем, что при четном p двойственным наборам $\{0, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ и $\{1, 1 - \alpha_2, \dots, 1 - \alpha_l\}$ из E^l соответствуют двойственные функции $g_0 \in \mathcal{G}(E_{p/2,1}^p)$ и $g_1 \in \mathcal{G}(E_{p/2,0}^p)$. Куб E^p распадается на 4 непересекающихся множества $E_{p/2,0}^{p<}, E_{p/2,0}^p, E_{p/2,1}^p, E_{p/2,1}^{p>}$.

$E_{p/2,0}^{p<}$ содержит наборы, двойственные наборам из $E_{p/2,1}^{p>}$. Для любого $\bar{\alpha} \in E_{p/2,0}^{p<}$ $g_0(\bar{\alpha}) = g_1(\bar{\alpha}) = 0$ и для любого $\bar{\alpha} \in E_{p/2,1}^{p>}$ $g_0(\bar{\alpha}) = g_1(\bar{\alpha}) = 1$. $E_{p/2,0}^p$ содержит наборы, двойственные наборам из $E_{p/2,1}^p$. Для любого $\bar{\alpha} \in E_{p/2,0}^p$ $g_0(\bar{\alpha}) = 0$ и для любого $\bar{\alpha} \in E_{p/2,1}^p$ $g_1(\bar{\alpha}) = 1$. В силу выбранной нумерации наборов из $E_{p/2,0}^p$ и $E_{p/2,1}^p$ для любого $\bar{\alpha} \in E_{p/2,0}^p$ и, соответственно, $\bar{\alpha}^* \in E_{p/2,1}^p$ выполнено $g_1(\bar{\alpha}) = i \Leftrightarrow g_0(\bar{\alpha}^*) = 1 - i$.

Аналогично доказывается и для нечетного p . Утверждение 11 доказано.

Топология построенного автомата для всех n совпадает с топологией автомата, представляющего функцию \hat{f} . Следовательно, все рассуждения и оценки для \hat{f} и классов A_i применимы также для \check{f} и класса D_2 .

Для классов F_6^2 и F_7^2 построим монотонное вложение $\left(l, p, \mathcal{F}\left(E_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}^p\right)\right)$, для классов F_2^2 и $F_3^2 - \left(l, p, \mathcal{F}\left(E_{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}^p\right)\right)$. Доказывается аналогично случаю классов A_1-A_4 . Отличие состоит в том, что изменяются интервалы значений n , при которых используются фиксированные значения p . Четные p выбираются при $\hat{n}(p-1) \leq n \leq \binom{p}{\frac{p}{2}+1} + p$, нечетные — при $\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}+1} + p - 1 < n < \hat{n}(p)$. Соответственно, расширяются интервалы, на которых, в принципе, может быть построена более сложная функция из класса: для четных p — при $\hat{n}(p-1) \leq n < \hat{n}(p-1)(1 + \beta(n))$, для нечетных — при $\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}+1} + p - 1 < n < \hat{n}(p-1)(1 + \beta(n))$. Утверждение 10 остается без изменения.

Теорема 4 доказана.

Следствие 6 очевидно из доказанной теоремы.

Доказательство теоремы 5 и следствий 7, 8 (классы F_i^∞ , $i = 2, 3, 6, 7$).

Из (**) и утверждения 4 следует, что сложность автомата, представляющего функцию $\mathcal{H}_i^{n,1}(\hat{f})$ увеличится в $\frac{3}{2}$ раза при добавлении одной переменной. Поэтому, получаем $\mathbb{S}(\hat{f}) \sim \frac{3\alpha c}{2\sqrt{\log n}} \cdot \frac{2^n}{n}$ при $n = \alpha \binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor} + p$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$.

При $\hat{n}(p-1)(1 + \beta(n)) < n \leq \hat{n}(p) \mathbb{S}(\hat{f})$ будет асимптотически равна функции Шеннона для класса F_7^∞ . При $\hat{n}(p-1) < n < \hat{n}(p-1)(1 + \beta(n))$ максимально возможная сложность монотонной функции тоже увеличится не более, чем в $\frac{3}{2}$ раза при добавлении одной переменной (при возможном дублировании слоя R_{p-1}). Значит, следствие 7 верно для класса F_7^∞ .

Аналогично рассуждения применимы к классам F_i^∞ , $i = 2, 3, 6$. Теорема 5 и следствие 7 доказаны.

Следствие 8 выводится из следствий 6, 7 и того, что $F_i^\mu \supseteq F_i^\infty$ для всех $\mu \geq 3$, $i = 2, 3, 6, 7$.

Заключение

В статье получены оценки функции Шеннона автоматной сложности для всех замкнутых классов из P_2 и построены сложные функции из этих классов.

Для классов $C_1-C_4, D_1, D_3, F_i^\infty, i = 1, 4, 5, 8$ найдены точные значения функции Шеннона, и построенные функции являются самыми сложными в классах. Следует отметить, что для этих классов известны точные количества функций от n переменных.

Оценки и сложные функции для классов монотонных функций $A_1-A_4, D_2, F_i^\infty, F_i^2, i = 2, 3, 6, 7$ также, в определенном смысле, являются неулучшаемыми. Асимптотика сложности построенных функций совпадает с асимптотикой функции Шеннона за исключением небольших интервалов. На этих интервалах, в принципе, может быть построена вдвое более сложная функция из класса. Для этого нужно построить более эффективное монотонное вложение. Для этих классов точные количества функций от n переменных неизвестны. Следует также отметить, что асимптотика функции Шеннона для классов монотонных функций хорошо согласуется с асимптотикой числа функций из этих классов, полученной Коршуновым [6] и Сапоженко [7].

Оценки функции Шеннона для оставшихся классов Поста $F_i^\mu, \mu \geq 3, i = 2, 3, 6, 7$ и $F_i^\mu, \mu \geq 2, i = 1, 4, 5, 8$ получены из оценок для меньших (F_i^∞) и объемлющего (C_1) классов и, в принципе, могут быть улучшены.

Список литературы

- [1] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
- [2] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [3] Кибкало М. А. О сложности представления коллекции языков в конечных автоматах // Интеллектуальные системы. Т. 13, вып. 1–4. 2009. С. 347–360.

- [4] Кибкало М. А. Об автоматной сложности некоторых классов булевых функций // Интеллектуальные системы. Т. 14, вып. 1–4. 2010. С. 319–322.
- [5] Кузьмин А. Д. Реализация функций алгебры логики автоматами, нормальными алгорифмами и машинами Тьюринга // Проблемы кибернетики. Вып. 13. М.: Наука, 1955. С. 75–96. (РЖМат, 1966, 1В223).
- [6] Коршунов А. Д. О числе монотонных функций // Проблемы кибернетики. 1981. Вып. 38. С. 5–109.
- [7] Сапоженко А. А. О числе антицепей в многослойных ранжированных множествах // Дискретная математика. 1989. Т. 1, вып. 2. С. 110–128.
- [8] Post E. Two-valued iterative systems. 1941.
- [9] Post E. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 43 (1921). P. 163–185.
- [10] Hansel G. Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables. C. R. Acad Sci. Paris. 1966. 262. P. 1088–1090. (Русский перевод: Ансель Ж. О числе монотонных булевых функций от n переменных // Кибернетич. сб. Нов. серия. Вып. 5. М.: Мир, 1968. С. 53–57.)

