Свойства модели Марковица при задании параметров средствами теории нечетких множеств

А. Н. Тимирова

В работе представлена модель оценки доходности и риска в анализе формирования инвестиционных портфелей. Доходность ценных бумаг оценивается как нечеткое число, а риск — как мера неопределенности доходности.

Ключевые слова: нечеткие числа, степень нечеткости, модель Марковица, инвестиционный портфель.

1. Введение

Неопределенность является важным свойством рынка ценных бумаг. Частые изменения в экономических циклах, развитии технологий, политической ситуации и другие факторы одновременно влияют на характеристику доходности активов.

Управление инвестициями происходит в условиях неопределенности относительно будущего состояния как самих финансовых активов, так и экономического окружения. Неопределенность порождает риск неэффективного управления — такого, что намеченные цели управления не достигаются. Например, решение об инвестициях, первоначально признанное экономически обоснованным, может перестать быть таковым вследствие ухудшения рыночной ситуации.

В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Проблема выбора инвестиционного портфеля является классической и наиболее важной проблемой в различных областях инвестирования и финансовых исследованиях.

По Марковицу, инвестор должен считать уровень доходности портфеля нормальной случайной переменной с ожидаемым значением и стандартным отклонением. Однако, инвестор получает информацию из реального мира, а также опирается на субъективные прогнозы, основанные не только на статистическом анализе исторических данных, но и на многолетнем личном опыте инвестирования.

Поэтому, даже если инвестор располагает достаточной и надежной информацией из области инвестирования, очень сложно представить будущее случайным распределением каждой ценной бумаги. Поэтому, следует учитывать не только статистику рынка, но и субъективные прогнозы инвестора в проблеме выбора инвестиционного портфеля. Для моделирования субъективных оценок используется аппарат нечетких множеств [1].

В работе рассматривается обобщение модели Марковица, в рамках которого доходность формализуется как нечеткое число, а риск — как мера нечеткости доходности. Введение нечетких параметров позволяет оценивать портфели при отсутствии информации о распределениях случайных величин, определяющих доходности ценных бумаг: в качестве источника информации для оценки портфеля выступают прогнозы экспертов.

2. Модель Марковица. Классический случай

Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в момент времени $t = 0$ имеет конкретную сумму денег для инвестирования [2]. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени T, который называется периодом владения. Есть n типов ценных бумаг. Начальный капитал расходуется полностью на ценные бумаги типа $i, 1 \leqslant i \leqslant n$, цена покупки которых определена. В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего либо использует полученный доход на потребление, либо реинвестирует доход в различные ценные бумаги (либо делает и то, и другое одновременно).

Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, инвестиционное решение эквивалентно выбору оптимального портфеля из набора возможных портфелей. Такую проблему называют проблемой выбора инвестиционного портфеля.

В рамках модели Марковица, инвестор должен считать уровень доходности, связанный с любым из портфелей, случайной переменной, при этом математическое ожидание является аналогом ожидаемой доходности, а стандартное отклонение служит мерой риска. Марковиц утверждает, что инвестор должен основывать свое решение по выбору портфеля исключительно на ожидаемой доходности и стандартном отклонении. Это означает, что инвестор должен оценить ожидаемую доходность и стандартное отклонение каждого портфеля, а потом выбрать «лучший» из них, основываясь на соотношении этих двух параметров. Ожидаемая доходность может быть представлена как мера потенциального вознаграждения, связанная с конкретным портфелем, а стандартное отклонение — как мера риска, связанная с данным портфелем. Таким образом, после того, как каждый портфель был исследован в смысле потенциального вознаграждения и риска, инвестор должен выбрать портфель, который является для него наиболее подходящим.

Предполагается, что инвестор в выборе портфеля из двух портфелей с одинаковой ожидаемой доходностью предпочтет портфель с меньшим риском. Инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность (риск), имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы. Подход Марковица дает возможность учесть обе эти цели.

Введем основные обозначения:

n — всего типов ценных бумаг в портфеле, $\quad n \in \mathbb{N}$;

N_i — количество ценных бумаг i-го типа в портфеле, $\quad i = \overline{1, n}$;

N — количество всех ценных бумаг в портфеле, $\quad N = \sum\limits_{i=1}^{n} N_i$;

$x_i = \dfrac{N_i}{N}$ — доля ценной бумаги i-го типа в портфеле, $\quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$;

r_i — ожидаемая доходность ценной бумаги i-го типа;
c_i — цена ценной бумаги i-го типа на момент приобретения $t = 0$;
c_i' — ожидаемая цена ценной бумаги i-го типа на конец периода $t = T$ $c_i' = c_i(1 + r_i)$;
$K_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i c_i$ — начальный капитал портфеля;
$K_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i c_i'$ — капитал портфеля в конце периода;
$y_i = \dfrac{x_i c_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i c_i}$ — доля начального капитала портфеля, инвестированная в ценную бумагу i-го типа, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 1,\ 0 \leqslant y_i \leqslant 1$;
R_p — ожидаемая доходность портфеля

Вычисление ожидаемой доходности портфеля производится с использованием начального капитала и капитала на конец периода:

$$R_p = \frac{K_1 - K_0}{K_0}.$$

Из набора n типов ценных бумаг можно сформировать большое число портфелей. В рамках модели оценку всех портфелей производить нет необходимости. Объяснение того факта, что инвестор должен рассмотреть только некоторое подмножество возможных портфелей, содержится в теореме об эффективном множестве: Инвестор выберет свой оптимальный портфель из множества эффективных портфелей [2].

Эффективным множеством или эффективной границей называется набор портфелей, каждый из которых удовлетворяет следующим условиям:

1. Обеспечивает максимальную ожидаемую доходность для некоторого уровня риска.

2. Обеспечивает минимальный риск для некоторого значения ожидаемой доходности.

Достижимое множество — это комбинация всех портфелей из группы N ценных бумаг. Это означает, что все портфели могут лежать либо внутри достижимого множества, либо на его границе. Из достижимого множества может быть выделено эффективное множество [2].

Для выбора наиболее желательного портфеля используют так называемые кривые безразличия. Эти кривые отражают отношение инвестора к риску и доходности и представляются как двухмерный график, где по горизонтальной оси откладывается риск, мерой которого является стандартное отклонение, а по вертикальной оси — вознаграждение, мерой которого является ожидаемая доходность портфеля R_p. Каждая кривая отображает одну кривую безразличия инвестора и представляет все комбинации портфелей, которые обеспечивают заданный уровень желаний инвестора, то есть соотношение доходность/риск; все портфели, лежащие на одной заданной кривой безразличия, является равноценным для инвестора.

В рамках модели Марковица изучаются кривые безразличия и доказывается, что инвестор будет считать любой портфель, лежащий на кривой безразличия, которая находится выше и левее, более привлекательным, чем любой портфель, лежащий, на кривой безразличия, которая находится ниже и правее. Из множества эффективных портфелей инвестор будет выбирать оптимальный для себя. Все остальные достижимые портфели являются неэффективными портфелями

При использовании подхода Марковица делаются два предположения:

— ненасыщаемость — инвестор предпочитает более высокий уровень конечного благосостояния более низкому его уровню;

— избегание риска — инвестор выбирает портфель с меньшим стандартным отклонением; у разных инвесторов разная степень избегания риска.

Таким образом:

1) Подход Марковица к проблеме выбора портфеля предполагает, что инвестор старается решить две проблемы: максимизировать ожидаемую доходность при заданном уровне риска и минимизировать неопределенность (риск) при заданном уровне ожидаемой доходности.

2) Ожидаемая доходность служит мерой потенциального вознаграждения, связанного с портфелем. Стандартное отклонение рассматривается как мера риска портфеля.
3) Кривая безразличия представляет собой различные комбинации риска и доходности, которые инвестор считает равноценными.
4) Предполагается, что инвесторы рассматривают любой портфель, лежащий на кривой безразличия выше и левее, как более ценный, чем портфель, лежащий на кривой безразличия, проходящей ниже и правее.
5) Ожидаемая доходность портфеля является средневзвешенной ожидаемой доходностью ценных бумаг, входящих в портфель. В качестве весов служат относительные пропорции ценных бумаг, входящих в портфель.

3. Необходимые понятия и факты теории нечетких множеств

Основные понятия нечетких множеств были введены Лотфи Заде в 1965 году [3]. Ниже нам понадобятся следующие из них.

Линейными функциями принадлежности $L-R$-типа называются функции принадлежности вида:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 \text{ при } u \leqslant a_L; \\ \frac{u-a_L}{a'-a_L} & \text{при} \quad a_L \leqslant u \leqslant a'; \\ 1 \text{ при } a' \leqslant u \leqslant a''; \\ \frac{a_R-u}{a_R-a''} & \text{при} \quad a'' \leqslant u \leqslant a_R; \\ 0 \text{ при } u \geqslant a_R. \end{cases} \tag{1}$$

Линейные функции принадлежности $L-R$-типа при $a' < a''$ называются трапецеидальными, обозначаются $\tilde{A} = (a^L, a', a'', a^R)$, при $a' = a'' = a$ — треугольными, обозначаются $\tilde{A} = (a^L, a, a^R)$.

3.1. Степень нечеткости множества

Пусть $\tilde{A}$ — нечеткое множество в универсальном множестве U.

$\mu_{\tilde{A}}(u)$ — степень принадлежности элемента u к $\tilde{A}$, $|U|$ — мощность универсального множества [1].

Определение 1. Степенью нечеткости множества называется величина

$$\xi(\tilde{A}) = \frac{1}{|U|}\int\limits_U (1 - |2\mu_{\tilde{A}}(u) - 1|)du.$$

Утверждение 1. *Пусть* $\tilde{a} = (a - \alpha_L,\ a,\ a + \alpha_R)$ *— нечеткое треугольное число в универсальном множестве* U*. Тогда его степень нечеткости равна:*

$$\xi(\tilde{a}) = \frac{\alpha_L + \alpha_R}{2|U|}.$$

Доказательство утверждения 1 приведено в [1].

Следствие 1. *Степени нечеткости двух нечетких треугольных чисел с одинаковыми основаниями равны:*

$\tilde{a} = (a - \alpha_L,\ a,\ a + \alpha_R)$, $\tilde{b} = (b - \beta_L,\ b,\ b + \beta_R)$ *— нечеткие треугольные числа и* $\alpha_L + \alpha_R = \beta_L + \beta_R$.

Тогда

$$\xi(\tilde{a}) = \xi(\tilde{b}).$$

3.2. Свойства степени нечеткости треугольных нечетких чисел

Докажем некоторые свойства для треугольных нечетких чисел. Далее будем считать, что для $U = [U_L, U_R]$, и для любых нечетких чисел $\tilde{a} = (a - \alpha_L,\ a,\ a + \alpha_R)$ и $\tilde{b} = (b - \beta_L,\ b,\ b + \beta_R)$, константы $y \in \mathbb{R}$ выполнено:

$a + b + (\alpha_R + \beta_R) \leqslant U_R, \quad ya + y\alpha_R \leqslant U_R$

$a + b - (\alpha_L + \beta_L) \geqslant U_L, \quad ya - y\alpha_L \geqslant U_L$

Определение 2. Для двух нечетких треугольных чисел $\tilde{a} = (a - \alpha_L,\ a,\ a + \alpha_R)$, $\tilde{b} = (b - \beta_L,\ b,\ b + \beta_R)$ и константы $k \in \mathbb{R}$ определены следующие операции:

1. Сумма двух нечетких треугольных чисел

$\tilde{c} = \tilde{a} + \tilde{b} = (a + b - (\alpha_L + \beta_L),\ a + b,\ a + b + (\alpha_R + \beta_R))$.

2. Умножение нечеткого числа на константу

$$k \cdot \tilde{a} = \begin{cases} (ka - k\alpha_L,\ ka,\ ka + k\alpha_R), k \geqslant 0; \\ (ka + k\alpha_R,\ ka,\ ka - k\alpha_L), k < 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. *Пусть даны два нечетких треугольных числа* $\tilde{a} = (a - \alpha_L,\ a,\ a + \alpha_R)$, $\tilde{b} = (b - \beta_L,\ b,\ b + \beta_R)$ *и константа* $y \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1. Степень нечеткости суммы двух треугольных чисел равна сумме степеней нечеткости этих чисел:

$$\xi(\tilde{a} + \tilde{b}) = \xi(\tilde{a}) + \xi(\tilde{b}).$$

2. Степень нечеткости произведения треугольного числа на константу равна:

$$\xi(k\tilde{a}) = |k|\xi(\tilde{a}).$$

Доказательство. 1. По определению $\tilde{a} + \tilde{b} = (a + b - (\alpha_L + \beta_L),\ a + b,\ a + b + (\alpha_R + \beta_R))$. Тогда:

$$\xi(\tilde{a} + \tilde{b}) = \frac{(\alpha_L + \beta_L) + (\alpha_R + \beta_R)}{2|U|} = \frac{\alpha_L + \alpha_R}{2|U|} + \frac{\beta_L + \beta_R}{2|U|} = \xi(\tilde{a}) + \xi(\tilde{b}).$$

2. Рассмотрим $k\tilde{a}$ для $k \geqslant 0$ и $k < 0$:

$$k \cdot \tilde{a} = \begin{cases} (ka - k\alpha_L,\ ka,\ ka + k\alpha_R), k \geqslant 0; \\ (ka + k\alpha_R,\ ka,\ ka - k\alpha_L), k < 0. \end{cases}$$

1) Для $k \geqslant 0$ справедливо:

$$\xi(k\tilde{a}) = \frac{k\alpha_L + k\alpha_R}{2|U|} = \frac{k(\alpha_L + \alpha_R)}{2|U|} = k\xi(\tilde{a}).$$

2) Для $k < 0$ справедливо:

$$\xi(k\tilde{a}) = \frac{-k\alpha_L - k\alpha_R}{2|U|} = \frac{-k(\alpha_L + \alpha_R)}{2|U|} = -k\xi(\tilde{a}).$$

В итоге получили, что

$$\xi(k\tilde{a}) = |k|\xi(\tilde{a}).$$

Утверждение доказано.

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{a}_i = (a_i - \alpha_i^L,\ a_i,\ a_i + \alpha_i^R)$ *— нечеткие треугольные числа,* $k_i \in \mathbb{R}$ *— константы,* $i = \overline{1,n}$. *Тогда*

$$\xi(\sum_{i=1}^{n} k_i \tilde{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} |k_i| \xi(\tilde{a}_i).$$

Доказательство теоремы следует из утверждений 1 и 2.

4. Модель Марковица. Нечеткий случай

Определим основные понятия модели Марковица на языке теории нечетких множеств.

Рассмотрим случай, когда доходность ценной бумаги представлена в виде нечеткого треугольного числа: $\widetilde{r}_i = (r_i - \alpha_i^L,\ r_i,\ r_i + \alpha_i^R)$

По определению, нечеткая цена i-ой ценной бумаги в конце периода $\widetilde{c}_i'$ выражается через цену в начале периода c_i: $\widetilde{c}_i' = c_i(\tilde{1} + \widetilde{r}_i)$.

Утверждение 3. *a) Нечеткая доходность i-ой ценной бумаги равна* $\widetilde{r}_i = (r_i - \alpha_i^L,\ r_i,\ r_i + \alpha_i^R)$, *а ее степень нечеткости:*

$$\xi(\widetilde{r}_i) = \frac{\alpha_i^L + \alpha_i^R}{2|U|}.$$

b) Нечеткая цена i-ой ценной бумаги в конце периода равна:

$$\widetilde{c}_i' = (c_i' - c_i\alpha_i^L,\ c_i',\ c_i' + c_i\alpha_i^R).$$

Степень нечеткости цены i-ой ценной бумаги в конце периода равна:

$$\xi(\widetilde{c}_i') = c_i \xi(\widetilde{r}_i).$$

Доказательство. a) Следует из утверждения 1.

b) Справедливы следующие соотношения:

$\widetilde{c}_i' = c_i\ ((1,\ 1,\ 1) + (r_i - \alpha_i^L,\ r_i,\ r_i + \alpha_i^R)) = c_i\ (1 + r_i - \alpha_i^L,\ 1 + r_i,\ 1 + r_i + \alpha_i^R) = (c_i(1 + r_i) - c_i\alpha_i^L,\ c_i(1 + r_i),\ c_i(1 + r_i) + c_i\alpha_i^R) = (c_i' - c_i\alpha_i^L,\ c_i',\ c_i' + c_i\alpha_i^R)$.

В итоге получаем: $\widetilde{c}_i' = (c_i' - c_i\alpha_i^L,\ c_i',\ c_i' + c_i\alpha_i^R)$.

Теперь вычислим степень нечеткости:

$$\xi(\widetilde{c}_i') = \frac{c_i\alpha_i^L + c_i\alpha_i^R}{2|U|} = c_i\frac{\alpha_i^L + \alpha_i^R}{2|U|} = c_i\xi(\widetilde{r}_i).$$

Утверждение доказано.

Аналогично классическому случаю (раздел 2) определим **нечеткую доходность портфеля** $\widetilde{R}_p$ следующим образом:

$$\widetilde{R}_p = \frac{\widetilde{K}_1 - K_0}{K_0},$$

где K_0 — начальный капитал портфеля, $\widetilde{K}_1$ — капитал портфеля в конце периода.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *a) Нечеткая доходность портфеля равна:*

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^n y_i\widetilde{r}_i = \left(\sum_{i=1}^n y_i r_i - \sum_{i=1}^n y_i\alpha_i^L,\ \sum_{i=1}^n y_i r_i,\ \sum_{i=1}^n y_i r_i + \sum_{i=1}^n y_i\alpha_i^R\right).$$

b) Степень нечеткости доходности портфеля равна:

$$\xi(\widetilde{R}_p) = \sum_{i=1}^n y_i\xi(\widetilde{r}_i).$$

Доказательство. *a)* Найдем нечеткую доходность портфеля

$$\widetilde{R}_p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i\widetilde{c}_i' - \sum_{i=1}^n x_i c_i}{\sum_{i=1}^n x_i c_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\widetilde{c}_i' - c_i)}{\sum_{i=1}^n x_i c_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i c_i\widetilde{r}_i}{\sum_{i=1}^n x_i c_i}.$$

Так как $y_i = \dfrac{x_i c_i}{\sum_{i=1}^n c_i x_i}$ — доля начальной стоимости портфеля, инвестированная в ценную бумагу, тогда нечеткая доходность портфеля запишется в следующем виде:

$$\widetilde{R}_p = \sum_{i=1}^{n} y_i \widetilde{r}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i (r_i - \alpha_i^L, r_i, r_i + \alpha_i^R) = \sum_{i=1}^{n} y_i (r_i - \alpha_i^L, r_i, r_i + \alpha_i^R).$$

После преобразований получаем:

$$\widetilde{R}_p = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i r_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i^L,\ \sum_{i=1}^{n} y_i r_i,\ \sum_{i=1}^{n} y_i r_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i^R \right).$$

b) Вычислим степень нечеткости доходности портфеля.

Так как $0 \leqslant y_i \leqslant 1$, то $|y_i| = y_i$. Используя теорему 1 и полученную формулу для нечеткой доходности портфеля $\widetilde{R}_p = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \widetilde{r}_i$, вычисляем степень нечеткости доходности портфеля:

$$\xi(\widetilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} y_i \xi(\widetilde{r}_i).$$

Теорема доказана.

Таким образом, риск портфеля является линейной комбинацией рисков входящих в него ценных бумаг с учетом долей ценных бумаг в начальном капитале портфеля. Эта теорема позволяет получить верхние и нижние оценки риска портфеля.

Утверждение 4. *Пусть*

$\overline{\xi}(\widetilde{r}) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi(\widetilde{r}_i)$ *— максимальная степень нечеткости среди ценных бумаг,*

$\underline{\xi}(\widetilde{r}) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi(\widetilde{r}_i)$ *— минимальная степень нечеткости среди ценных бумаг*

Тогда

$$\underline{\xi}(\widetilde{r}) \leqslant \xi(\widetilde{R}_p) \leqslant \overline{\xi}(\widetilde{r}).$$

Доказательство. С одной стороны имеем:

$$\xi(\widetilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} y_i \xi(\widetilde{r}_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{\xi}(\widetilde{r}) = \overline{\xi}(\widetilde{r}) \sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{\xi}(\widetilde{r}).$$

С другой стороны:

$$\xi(\widetilde{R}_p) = \sum_{i=1}^{n} y_i \xi(\widetilde{r}_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i \underline{\xi}(\widetilde{r}) = \underline{\xi}(\widetilde{r}) \sum_{i=1}^{n} y_i = \underline{\xi}(\widetilde{r}).$$

Утверждение доказано.

Таким образом для каждого портфеля существуют границы риска, определяемые степенью нечеткости входящих в него бумаг.

Список литературы

[1] Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. М.: Диалог-МГУ, 1998.

[2] Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции / Пер. с англ. М.: ИНФРА-М, 2001.

[3] Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 8 (1). 1965. P. 338–353.