

О разрешимости обратимости клеточных автоматов*

И.В. Кучеренко

В данной работе рассматриваются задачи распознавания свойства обратимости в некоторых практически важных классах клеточных автоматов (КА). Для класса КА с фиксированным числом состояний ячейки установлено, что свойство обратимости становится неразрешимым при увеличении размерности множества ячеек до двух и более. Для класса КА с фиксированным шаблоном соседства получен критерий существования алгоритма, решающего проблему обратимости в данном классе.

Введение

Одним из основных типов задач, возникающих в теории клеточных автоматов (КА), является задача о связи локальных свойств, выражаемых в терминах шаблона соседства и локальной функции переходов, и глобальных свойств, то есть свойств основной функции переходов. В частности, такой задачей является задача алгоритмического распознавания свойства обратимости.

Первый результат в этой области был получен в работе [4], где описан алгоритм, определяющий по конечному описанию одномерного клеточного автомата является он обратимым или нет. Еще один алгоритм для решения той же задачи, основанный на другой идее и имеющий полиномиальную вычислительную сложность, описан в работе [5]. Как оказалось, при увеличении размерности пространства ячеек до двух и более свойство обратимости становится неразрешимым. В

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 02-01-00162.

работе [6] доказано, что не существует алгоритма для проверки обратимости клеточных автоматов с шаблоном соседства в форме креста $\{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$. Из этого результата вытекает, что для всех шаблонов, более богатых, чем «крест», свойство обратимости тоже не разрешимо. Тем не менее, для всех остальных шаблонов вопрос о существовании алгоритма оставался открытым.

Один из результатов данной работы является критерием того, что в классе клеточных автоматов с шаблоном соседства V свойство обратимости разрешимо. Как оказалось, решающим фактором здесь является ранг системы векторов, образующих V . Во всех «нелинейных» шаблонах соседства класс обратимых КА алгоритмической характеристики не поддается. Однако, во многих практических задачах сложность клеточного автомата не может быть увеличена за счет числа состояний ячейки. Следовательно, упоминавшиеся выше результаты для таких КА требуют уточнения. Возникает задача о распознавании обратимости в классах с фиксированным числом состояний ячейки. Автором установлено, что в общей постановке эта задача также не является разрешимой.

Основные понятия и результаты

Формально клеточный автомат σ представляет из себя четверку вида $(\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$, где \mathbb{Z}^k — совокупность всех k -мерных векторов с целочисленными координатами, E_n — конечное множество из n элементов, природа которых не существенна. Для простоты их можно считать числами из множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ — упорядоченный набор различных ненулевых векторов из \mathbb{Z}^k . $\varphi : (E_n)^{m+1} \mapsto E_n$, $\varphi(0, 0, \dots, 0) = 0$. Элементы множества \mathbb{Z}^k называются ячейками, E_n — состояниями ячеек, 0 — состояние покоя. При помощи шаблона соседства V каждой ячейке α ставится в соответствие набор векторов $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha + v_1, \alpha + v_2, \dots, \alpha + v_m\}$, который называется ее окрестностью. Функция φ называется локальной функцией переходов клеточного автомата.

Функции $g : \mathbb{Z}^k \mapsto E_n$ называются состояниями КА, множество всех состояний обозначается через $E_n^{\mathbb{Z}^k}$. Основная функция

переходов Φ задается как отображение множества всех состояний клеточного автомата σ в себя, причем если $g = \Phi(g')$, то $g(\alpha) = \varphi(g'(\alpha), g'(\alpha + v_1), g'(\alpha + v_2), \dots, g'(\alpha + v_m)), \forall \alpha$. Функционирование КА определяется как последовательность его состояний g_0, g_1, g_2, \dots , получающаяся в результате применения основной функции переходов к некоторому его состоянию g_0 , то есть $g_t = \Phi(g_{t-1}) = \Phi^t(g_0)$, $t \in \mathbb{N}$. Состояние клеточного автомата, в котором только конечное число ячеек находится в ненулевом состоянии, называется конфигурацией.

Клеточный автомат, основная функция переходов которого инъективна на множестве всех конфигураций, называется обратимым. По теореме Мура-Майхилла [1], [2] множество обратимых клеточных автоматов совпадает с множеством КА, основная функция переходов которых является сюръективной.

Рассмотрим класс всех клеточных автоматов с k -мерным пространством ячеек и n состояниями ячейки, имеющих шаблон соседства вида $V_{\vec{m}} = \{v = (v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_k) \in \mathbb{Z}^k \mid |v_i| \leq m_i, i = 1, 2, \dots, k\}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)$. Обозначим этот класс через $\overline{CA}(k, n)$. Заметим, что любой КА можно преобразовать в элемент из класса $\overline{CA}(k, n)$, добавив векторов в шаблон соседства и несущественных переменных в локальную функцию переходов.

Теорема 1. *Для всех $n > 1$, $k > 1$ в классе клеточных автоматов $\overline{CA}(k, n)$ свойство обратимости алгоритмически неразрешимо.*

Фактически, эта теорема утверждает, что, если мы ограничимся рассмотрением локальных функций переходов фиксированной значности, устройство класса обратимых КА не упростится. Однако, сложность локального устройства клеточного автомата зависит не только от выбора локальной функции переходов. Хорошо известно, что любой КА может быть смоделирован в КА с шаблоном соседства $V_{(1,1,\dots,1)}$, но большим числом состояний ячейки. В связи с этим, возникает вопрос о том, какие шаблоны соседства обеспечивают разрешимость рассматриваемого свойства, а какие нет. Автором было получено окончательное решение этой задачи.

Теорема 2. *В классе клеточных автоматов с фиксированным k -мерным шаблоном соседства V свойство обратимости разрешимо тогда и только тогда, когда ранг системы векторов, образующих V , равен единице.*

В доказательстве теорем 1 и 2 будет использоваться специальный вариант проблемы домино, доказательство неразрешимости которого приводится в работе [7]. Для упрощения дальнейших рассуждений мы будем оперировать с покрытиями плоскости доминошками как с состояниями некоторого двумерного клеточного автомата. Дадим необходимые определения.

Пусть задано некоторое конечное множество C , элементы которого будут называться цветами. Без ограничения общности можно считать, что $C = \{0, 1, \dots, l - 1\}$, $l \in \mathbb{N}$. Из множества двумерных ячеек выделим два элемента $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Состояниями ячеек будем считать некоторое подмножество четверок цветов $T \subset C^4$. Удобно представлять себе, что каждой ячейке соответствует квадрат с единичным ребром, стороны которого окрашены в цвета из C . Элементы T далее будем называть доминошками. Введем вектор-функцию $\bar{c}(\alpha) = (c_1(\alpha), c_2(\alpha), c_3(\alpha), c_4(\alpha))$, $\bar{c} : \mathbb{Z}^2 \mapsto T$, ставящую в соответствие ячейке плоскости находящуюся в ней доминошку. Функцию \bar{c} будем называть укладкой, а функции c_1, c_2, c_3, c_4 цветами восточного, северного, западного и южного ребер доминошки соответственно. Будем говорить, что укладка корректна в ячейке α , если цвета ребер лежащей в ней доминошки совпадают с цветами прилегающих к ним ребер соседней доминошки, то есть $c_1(\alpha) = c_3(\alpha + e_1)$, $c_2(\alpha) = c_4(\alpha + e_2)$, $c_3(\alpha) = c_1(\alpha - e_1)$, $c_4(\alpha) = c_2(\alpha - e_2)$. Укладку будем называть корректной, если она корректна во всех ячейках.

Доказательства утверждений

Доказательство обратимости (или необратимости) заданного конкретного клеточного автомата, как правило, является весьма сложной задачей. Однако, в некоторых частных случаях эта задача допускает относительно простое решение. Примером такого случая являются клеточные автоматы, моделирующие своим поведением некото-

рые классы мозаичных автоматов. Мы будем использовать конструкцию, аналогичную описанной в работе [6]. В указанной работе при сведении проблемы обратимости для КА к финитной проблеме домино был использован «двухслойный» КА. Первый его слой состоял из доминошек и не менялся со временем, второй — из битовых компонент, закон изменения которых зависел от содержимого первого слоя. Используемый при этом класс доминошек обладал свойством, аналогичным свойству, сформулированному ниже в лемме 1.

Далее нам понадобятся множества доминошек специального вида. На содержательном уровне такие доминошки представляют из себя «гнезда» для установки конечных автоматов, задающие тип устанавливаемого автомата и способ коммутации его с соседями. Нам потребуется два различных типа коммутации: подающий информацию на вход и отправляющий информацию на выход. Все используемые нами автоматы имеют один вход и один выход, проходящие через разные ребра. Пару ребер с соединениями удобно представлять как стрелку, нарисованную на доминошке, идущую от входного ребра к выходному. На каждой доминошке используемой конструкции будет находиться не более одной стрелки. Формализуем приведенные рассуждения.

Пусть цвет ребра доминошки представляет из себя пару (c, d) , $c \in C'$, $d \in E_3$, в которой первый элемент будет интерпретироваться собственно как цвет, а второй — как направление прохода стрелки через данное ребро доминошки. Значение 0 компоненты d цвета ребра ячейки α означает, что через соответствующее ребро доминошки в клетке α стрелка не проходит. В случае, если рассматриваемая укладка корректна в ячейках $\alpha, \alpha - e_1$ ($\alpha - e_2$), то значение 1 для восточного (северного) и 2 для западного (южного) ребер будет интерпретироваться как вход стрелки в клетку через это ребро, значение 2 для восточного (северного) и 1 для западного (южного) ребер — как выход стрелки наружу (смотри рисунок). Мы будем рассматривать только те множества доминошек $T \in \mathbb{T}$, в каждую из которых либо стрелка один раз входит и один раз выходит, либо это пустая доминошка вида $((0, 0), (0, 0), (0, 0), (0, 0))$. Для краткости укладку, в которой только конечное множество ячеек содержит доминошки, отличные от пустой, будем называть конечной укладкой.

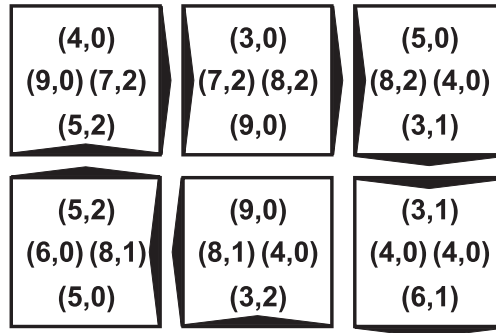


Рис. 1. Пример фрагмента правильной укладки доминошек со стрелками.

Пусть задана конечная укладка \bar{c} . Рассмотрим ориентированный граф $H(\bar{c})$, вершинами которого являются ячейки с непустыми доминошками из \bar{c} , а множество ребер соответствует парам ячеек (α_1, α_2) , таким, что укладка \bar{c} корректна в ячейках α_1 и α_2 , и из доминошки в ячейке α_1 идет стрелка в доминошку в ячейке α_2 . В силу ограничений, наложенных на T , компоненты связности графа $H(\bar{c})$ могут быть только циклами (длины не менее 2) или конечными последовательностями.

В работе [7] установлен результат, который будет использоваться в дальнейших рассуждениях. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. *Существует класс доминошек со стрелками $T' \subset T$, обладающий следующими свойствами:*

- 1) *Не существует алгоритма, который по элементу $T \in T'$ определяет, существует ли для T конечная корректная укладка.*
- 2) *У любой конечной укладки \bar{c} элементов из T в графе $H(\bar{c})$ имеются компоненты связности типа циклов тогда и только тогда, когда для T существует конечная корректная укладка.*

Связать факт наличия в графе $H(\bar{c})$ циклических компонент и свойство обратимости КА можно с помощью конструкции, которая

в работах [6], [7] моделировалась «на втором слое». Рассмотрим две системы уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = a_1, \\ x_1 \oplus x_2 = a_2, \\ x_2 \oplus x_3 = a_3, \\ \dots \\ x_{l-1} \oplus x_l = a_l \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_l \oplus x_1 = a_1, \\ x_1 \oplus x_2 = a_2, \\ x_2 \oplus x_3 = a_3, \\ \dots \\ x_{l-1} \oplus x_l = a_l \end{cases} \quad (2)$$

где $l > 1$, $x_i, a_i \in E_2$, $i \in 1, 2, \dots, l$, « \oplus » означает операцию сложения по модулю 2.

Лемма 2. *Для любой правой части система уравнений 1 имеет единственное решение. Существует правая часть a_1, a_2, \dots, a_l такая, что у системы уравнений 2 имеется как минимум два решения.*

Доказательство. Обе рассматриваемые системы являются системами линейных уравнений над полем \mathbb{Z}_2 . Матрица системы 1 является верхне-треугольной, следовательно система 1 не вырождена. То есть для любой правой части ее решение существует и единственно.

Возьмем правую часть вида $a_i = 0, i \in 1, 2, \dots, l$. Нетрудно убедиться, что тогда системе 2 будут удовлетворять решения $x_i = 0, i \in 1, 2, \dots, l$ и $x_i = 1, i \in 1, 2, \dots, l$.

Описание устройства слоистого КА с шаблоном соседства в форме креста можно найти в работе [6]. Ниже нам потребуется модификация этого КА на случай Т-образного шаблона соседства $V^\top = ((-1, 1), (0, 1), (1, 1), (0, -1))$.

Лемма 3. *В классе клеточных автоматов с шаблоном соседства V^\top свойство обратимости алгоритмически неразрешимо.*

Доказательство. Пусть задано множество доминошек $T \in \mathbb{T}'$, и укладка \bar{c} из него. Наша дальнейшая задача — согласовать операцию проверки на локальную корректность с геометрической формой окрестности, которую «видит» ячейка.

Разобьем проверку на корректность укладки в ячейке α на два этапа. На первом этапе проверим совпадение цветов горизонтальных ребер, $c_1(\alpha) = c_3(\alpha + e_1)$, $c_3(\alpha) = c_1(\alpha - e_1)$, на втором — вертикальных $c_2(\alpha) = c_4(\alpha + e_2)$, $c_4(\alpha) = c_2(\alpha - e_2)$. Заметим, что первый этап можно выполнить, зная состояние окрестности ячейки $\alpha - e_2$, и нельзя, зная только состояние окрестности ячейки α . Однако, так как вектор $-e_2$ принадлежит шаблону V^\top , информацию о результате «горизонтальной» проверки можно передать в ячейку α . Воспользуемся этой идеей для построения клеточного автомата $\sigma^\top(T)$.

Состоянием ячейки клеточного автомата $\sigma^\top(T)$ будем считать четверку (τ, bh, bv, bt) , в которой $\tau \in T$, $bh, bv, bt \in E_2$. Локальная функция переходов при этом будет являться вектор-функцией. Определим ее так, чтобы она не меняла «доминошной» компоненты состояния ячейки. Состоянием покоя будем считать пару, составленную из пустой доминошки и трех нулей.

Тип функции перехода битовых компонент состояния ячейки α будет зависеть от того, в какие ребра доминошек $\tau(\alpha)$ и $\tau(\alpha - e_2)$ входят стрелки. Для удобства изложения далее будем ассоциировать с ячейкой α доминошку $\tau(\alpha)$ и биты $bh(\alpha - e_2)$, $bv(\alpha)$, $bt(\alpha)$. Значение каждого бита будет либо оставаться неизменным, либо к нему будет прибавляться значение одного бита в соответствии с таблицей 1.

Ребро $\tau(\alpha)$	$bh_{t+1}(\alpha - e_2)$	$bv_{t+1}(\alpha)$	$bt_{t+1}(\alpha)$
Восточное	$bh_t(\alpha - e_2) \oplus bv_t(\alpha + e_1)$	$bv_t(\alpha) \oplus bh_t(\alpha - e_2)$	$bt_t(\alpha)$
Южное	$bh_t(\alpha - e_2) \oplus bv_t(\alpha - e_2)$	$bv_t(\alpha) \oplus bh_t(\alpha - e_2)$	$bt_t(\alpha)$
Западное	$bh_t(\alpha + e_1) \oplus bv_t(\alpha - e_1)$	$bv_t(\alpha) \oplus bh_t(\alpha - e_2)$	$bt_t(\alpha)$
Северное	$bh_t(\alpha + e_1) \oplus bt_t(\alpha)$	$bv_t(\alpha) \oplus bh_t(\alpha - e_2)$	$bt_t(\alpha) \oplus bv_t(\alpha + e_2)$

Таблица 1. Зависимость типа функции переходов для битов от ориентации ребра доминошки $\tau(\alpha)$, в которое входит стрелка.

Бит $bh(\alpha - e_2)$ будет меняться только в случае, если в ячейке α укладка корректна по горизонтали, $bv(\alpha)$ — если в ячейке α укладка

корректна по вертикали. bt будет предназначен для связи битовых компонент bv и bh ячеек $\alpha + e_2$ и $\alpha - e_2$, в случае, если в доминошку $\tau(\alpha)$ входит стрелка сверху.

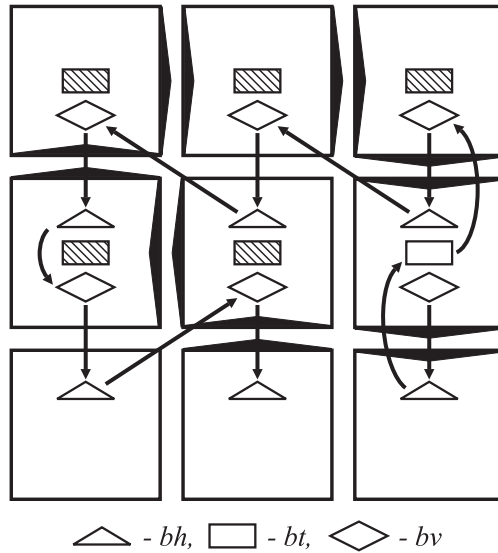


Рис. 2. Пример фрагмента состояния $\sigma^\top(T)$ со схемой вычисления битовых компонент. Штриховкой обозначены биты bt с постоянным значением.

Рассмотрим некоторую конфигурацию (τ, bh, bv, bt) КА $\sigma^\top(T)$. Сопоставим вершинам графа $H(\tau)$, определенного выше, тройки битовых компонент $bh(\alpha - e_2), bv(\alpha), bt(\alpha)$ состояний ячеек α , в которых находятся доминошки со стрелками. Тогда ребра графа $H(\tau)$ будут соответствовать зависимостям между значениями троек, приписанных вершинам.

Пусть требуется найти прообраз конфигурации (τ, bh, bv, bt) . Каждую компоненту связности графа $H(\tau)$ будем ассоциировать с отдельной системой уравнений, решением которой является значение некоторого множества битовых компонент. Покажем, что каждая система, составленная для битов, значения которых меняются в данной кон-

фигурации, имеет вид 1 или 2. Для этого достаточно показать, что от значения каждого бита зависит значение не более одного не совпадающего с ним бита. Действительно, уравнения, связывающие значения битов внутри тройки, этим свойством обладают (смотри таблицу 1). Далее, рассмотрим пару ячеек α и β , причем в $\tau(\beta)$ входит стрелка из ячейки α . Среди троек битов, связанных с ячейками α и β , только значение бита $bh(\beta - e_2)$ может зависеть от значения $bv(\alpha)$. Теперь справедливость нашего утверждения вытекает из того, что в доминошку набора доминошек из \mathbb{T}' может входить не более одной стрелки.

По лемме 1 имеем, что система типа 2 для определения значения битовых компонент прообраза некоторой конфигурации может возникнуть тогда и только тогда, когда у T имеется конечная корректная укладка. Из леммы 2 получаем, что клеточный автомат $\sigma^\top(T)$ обратим тогда и только тогда, когда T не допускает корректной конечной укладки. Так как КА $\sigma^\top(T)$ эффективно строится по множеству доминошек T , из отсутствия алгоритма для проверки существования конечной корректной укладки у T вытекает отсутствие алгоритма для проверки свойства обратимости для клеточных автоматов $\sigma^\top(T)$ и, как следствие, для всех КА с шаблоном соседства V^\top .

Из-за ограниченности числа состояний ячейки в классе $\overline{\text{CA}}(k, n)$ напрямую вложить в него слоистую конструкцию невозможно. Тем не менее, автору данной работы удалось построить подкласс класса $\overline{\text{CA}}(2, n)$, в котором эта конструкция может быть смоделирована без потери свойства обратимости. Однако, полученный способ моделирования не является универсальным. Сохранение обратимости гарантируется только для клеточных автоматов «слоистого» типа.

Заметим, что если добавить к состояниям ячеек рассмотренного выше КА дополнительный внешний механизм, позволяющий фиксировать их значения в процессе функционирования, то все свойства конструкции сохранятся. Это можно сделать, например, введя еще одну компоненту в состояние ячейки со значениями «совсем сломана» и «возможно функционирует». Тогда циклические системы уравнений 2 для битовых компонент будут появляться в корректных «возможно функционирующих» конфигурациях.

При моделировании одного клеточного автомата в другом обычно используется только небольшая доля конфигураций специального вида. Для остальных конфигураций поведение моделирующего КА задается произвольным образом. Сложность при моделировании с применением обратимых КА заключается в необходимости отслеживать поведения сразу всех конфигураций. Эту проблему можно решить, введя локальную проверку конфигурации на принадлежность к множеству моделирующих конфигураций, при этом рассматривая как «сломанные» ячейки, состояния окрестности которых эту проверку не проходят. Перейдем к формальному построению.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности перейдем к рассмотрению класса $\overline{CA}(2, n)$. Действительно, сопоставим каждому КА $\sigma = (\mathbb{Z}^2, E_n, V, \varphi)$ из класса $\overline{CA}(2, n)$ клеточный автомат $\sigma' \in \overline{CA}(k, n)$, $k > 2$ вида $(\mathbb{Z}^k, E_n, V', \varphi)$, у которого шаблон соседства составлен по следующему правилу:

$$v_i \in V, v_i = v_i^1 e_1 + v_i^2 e_2 \mapsto v'_i = v_i^1 e'_1 + v_i^2 e'_2, v'_i \in V',$$

где

$$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), e'_1 = (1, 0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-2}), e'_2 = (0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-2}).$$

Как нетрудно понять, обратимость σ эквивалентна обратимости σ' . Следовательно, из неразрешимости свойства обратимости в классе $\overline{CA}(2, n)$ вытекает неразрешимость в классе $\overline{CA}(k, n)$.

Мы будем моделировать клеточный автомат $\sigma^\top(T)$ из доказательства леммы 3. Пусть в множестве T содержится d доминошек. Закодируем их словами $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_l$ из алфавита E_n длины $l = \lceil \log_n(d) \rceil$. Состояние ячейки КА $\sigma^\top(T)$ будем кодировать словом $bh bv bt \tau_1 \tau_2 \dots \tau_l$. Разобьем множество ячеек моделирующего КА $\sigma^\top(T)$ на прямоугольники размера $(l+7) \times (5)$. Прямоугольник, имеющий состояние, аналогичное изображенному на рисунке 3, будем называть клеткой. Состояния ячеек КА $\sigma^\top(T)$ будем представлять в клетках. Заметим, что по состоянию окрестности $V_{(l+7,5)}(\alpha)$ ячейки α моделирующего КА можно определить, принадлежит ли ячейка α к какой-нибудь

клетке и представляет ли ее состояние фрагмент кода состояния ячейки $\sigma^\top(T)$. Конфигурации, в которых будет осуществляться моделирование конфигураций $\sigma^\top(T)$, будут состоять из клеток, расположенных вплотную (смотри рисунок 3). Клетку будем называть моделирующей, если она представляет значение состояния ячейки $\sigma^\top(T)$ и прямоугольники, с которыми она соприкасается, являются клетками.

1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	...	0	0	1
1	0	<i>bh</i>	<i>bt</i>	<i>bv</i>	τ_1	τ_2	...	τ_l	0	1
1	0	0	0	0	0	0	...	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1

Рис. 3. Общий вид состояния клетки.

1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	...	1	1	1	
1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1
1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1	1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1	1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1
1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1
1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1
1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1
1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1	1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1	1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1
1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1
1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1
1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1
1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1
1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1	1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1	1	0	<i>bh</i>	...	τ_l	0	1
1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1	1	0	0	...	0	0	1
1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1

Рис. 4. Пример фрагмента моделирующей конфигурации.

Моделирующий КА будет иметь шаблон соседства вида $V_{(2l+14,10)}$. В процессе функционирования $\sigma^\top(T)'$ могут меняться только состо-

яния ячеек клеток, представляющих биты bh , bv , bt . Вычисление локальной функции переходов будет происходить последовательно в три этапа.

- 1) Проверяем, что окрестность ячейки принадлежит некоторой клетке и представляет состояние одной из битовых компонент, иначе полагаем значение состояния ячейки неизменным.
- 2) Проверяем, что клетка, в которой находится ячейка, является моделирующей, иначе полагаем значение состояния ячейки неизменным.
- 3) Вычисляем значение локальной функции переходов КА $\sigma^\top(T)$ для битовой компоненты в соответствии со значениями состояний ячеек $\sigma^\top(T)$, представленных в окрестных клетках.

Возьмем некоторую конфигурацию g КА $\sigma^\top(T)'$. Рассмотрим множество ячеек A КА $\sigma^\top(T)$, представленных в моделирующих клетках конфигурации g . Выберем некоторую связную компоненту A' в множестве A (соседними считаются ячейки, у которых координаты отличаются не более чем на единицу). Нетрудно видеть, что функционирование клеток, сопоставленных ячейкам A' , моделирует поведение конфигурации клеточного автомата $\sigma^\top(T)$ «с поломками», у которого в «возможно функционирующем» состоянии находятся ячейки, моделирующиеся в A' . В силу приведенного выше замечания, моделирующей КА $\sigma^\top(T)'$ будет обратим тогда и только тогда, когда обратим $\sigma^\top(T)$. Из того, что $\sigma^\top(T)'$ эффективно строится по $\sigma^\top(T)$ и свойство обратимости для КА вида $\sigma^\top(T)$ неразрешимо, получаем, что в классе $\overline{CA}(2, n)$ свойство обратимости также неразрешимо. Доказательство теоремы закончено.

Пусть заданы два клеточных автомата, действующих на одном и том же множестве состояний $E_n^{\mathbb{Z}^k}$. Для них можно определить операцию композиции, индуцируемую операцией композиции их основных функций переходов. Нам далее потребуется один частный случай такой композиции, при котором свойство обратимости сохраняется.

Рассмотрим клеточный автомат σ_v , который сдвигает свое состояние на вектор $v \in \mathbb{Z}^k$. Формально $\sigma_v = (\mathbb{Z}^k, E_n, V_1, \varphi_1)$, где $V_1 = (v)$, $\varphi_1(\alpha_0, \alpha_1) = \alpha_1$. Пусть задан КА $\sigma = ((\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$

и $v = v_i \in V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$. Тогда композицией $\sigma_v \circ \sigma$ будет клеточный автомат $\sigma' = (\mathbb{Z}^k, E_n, V', \varphi')$, где $V' = (-v, v_1 - v, v_2 - v, \dots, v_{i-1} - v, v_{i-1} - v, \dots, v_m)$, $\varphi'(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m) = \varphi(\alpha_i, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)$.

Заметим, что число векторов в шаблоне соседства при этом останется прежним, и окрестность ячейки получившегося КА отличается от окрестности ячейки исходного КА сдвигом на вектор v . Операцию композиции КА $\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$ с клеточным автоматом σ_v , $v \in V$ будем называть собственным сдвигом окрестности ячейки.

Лемма 4. *Свойство обратимости клеточных автоматов инвариантно относительно операции собственного сдвига окрестности ячейки.*

Доказательство. По теореме Мура-Майхилла свойство обратимости для клеточного автомата эквивалентно сюръективности его основной функции переходов. Как нетрудно видеть, основная функция переходов КА σ_v является биекцией. Следовательно, композиция КА σ и σ_v будет обратима тогда и только тогда, когда σ обратим.

Введем еще одну операцию, которая позволяет строить новые обратимые КА. Рассмотрим ее в случае двумерного пространства ячеек.

Пусть заданы два вектора $w, d \in \mathbb{Z}^2$, такие, что любая ячейка $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ может быть представлена их целочисленной комбинацией $\alpha = \alpha_w \cdot w + \alpha_d \cdot d$, $\alpha_w, \alpha_d \in \mathbb{Z}$. Разобьем \mathbb{Z}^2 на пары ячеек (α, β) , такие, что $\alpha_d = \beta_d$, $\alpha_w = 2 * n$, $\beta_w = 2 * n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию $p : (\mathbb{Z}^2)^2 \mapsto \mathbb{Z}^2$, которая паре ячеек (α, β) ставит в соответствие ячейку $n \cdot w + \alpha_d \cdot d$.

По данному КА $\sigma = (\mathbb{Z}^2, E_n, V, \varphi)$ определим клеточный автомат σ^w , который получается склейкой двух ячеек КА σ с помощью функции p . Формально он описывается следующей четверкой $\sigma^w = (\mathbb{Z}^2, (E_n)^2, V', (\varphi_1, \varphi_2))$, где $(E_n)^2 = (c_1, c_2)$, $c_1, c_2 \in E_n$, c_1 соответствует состоянию ячейки α , $c_2 = \beta$. V' — шаблон соседства, соответствующий окрестности ячейки 0 , полученной проекцией p объединения множеств $V(0)$ и $V(0) + w$, функции φ_1 и φ_2 существенно зависят от значений первой и второй компонент пар (c_1, c_2) соответственно и получаются из φ добавлением несущественных переменных

так, чтобы функционирование ячейки $a \cdot w + b \cdot d$ соответствовало функционированию пары $(2 \cdot a \cdot w + b \cdot d, (2 \cdot a + 1) \cdot w + b \cdot d)$.

Операцию построения по паре векторов w, d и клеточному автомату σ нового КА σ' указанным выше способом будем называть операцией (w, d) -группировки ячеек.

Лемма 5. *Свойство обратимости клеточных автоматов инвариантно относительно операции (w, d) -группировки ячеек.*

Доказательство. Рассмотрим отображение Π , которое ставит в соответствие состоянию клеточного автомата σ состояние КА σ' . Нетрудно видеть, что Π является биекцией множеств конфигураций КА σ и σ' , причем $\Pi^{-1}\Phi'\Pi(c) = \Phi(c)$, где Φ и Φ' — основные функции переходов σ и σ' , c — конфигурация σ . Следовательно, обратимость клеточного автомата σ эквивалентна обратимости σ' .

Доказательство теоремы 2. Пусть ранг системы векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ шаблона соседства V КА $\sigma = (\mathbb{Z}^k, E_n, V, \varphi)$ равен единице. Далее мы будем считать, что множество ячеек \mathbb{Z}^k вложено в евклидово пространство \mathbb{R}^k . Рассмотрим прямую L с направляющим вектором v_1 вида $L = \{v_1 \cdot t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Выберем на ней ненулевой вектор x с целочисленными координатами минимальной длины. Как нетрудно показать, любой целочисленный вектор $y \in L$ может быть представлен в виде $y = s \cdot x$, $s \in \mathbb{Z}$.

Введем на \mathbb{Z}^k отношение эквивалентности следующим образом: $\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff \exists q \in \mathbb{Z} : \alpha_1 - \alpha_2 = q \cdot x$. Множество ячеек распадется на классы эквивалентности, причем в процессе функционирования КА σ состояния ячеек различных классов не зависят друг от друга. Пусть $v_i = \hat{v}_i \cdot x$, $i = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим КА $\sigma_1 = (\mathbb{Z}, E_n, \hat{V}, \varphi)$, у которого $\hat{V} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_m)$. Внутри каждого класса эквивалентности функционирование КА σ соответствует функционированию σ_1 . Следовательно, клеточный автомат σ обратим тогда и только тогда, когда обратим σ_1 . В работе [4] установлено, что существует алгоритм проверки свойства обратимости одномерных КА. Следовательно, так как КА σ_1 эффективно строится по КА σ , существует алгоритм проверки на обратимость клеточных автоматов с шаблоном соседства ранга 1.

Дальнейшее доказательство проведем от противного. Предположим, что для класса КА с шаблоном соседства V существует алгоритм для проверки свойства обратимости. Пусть ранг системы векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, образующих V , больше единицы. Из этого следует, что в шаблоне соседства V найдутся два не коллинеарных вектора. Без ограничения общности можно считать, что это v_1 и v_2 . Рассмотрим класс КА с шаблоном соседства $V_2 = (v_1, v_2)$. Из существования алгоритма для шаблона соседства V следует существование алгоритма для шаблона соседства V_2 .

Введем на множестве ячеек отношение эквивалентности: $\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} : \alpha_1 - \alpha_2 = q_1 \cdot v_1 + q_2 \cdot v_2$. Аналогично рассмотренному выше одномерному случаю, получим, что из существования алгоритма для клеточных автоматов с шаблоном соседства V_2 , следует существование алгоритма для двумерного КА с шаблоном $V^\Gamma = ((1, 0), (0, -1))$.

Исходный шаблон	Операция	Результат
$((-1, 1), (0, 1), (1, 1), (0, -1))$	собственный сдвиг на $(0, 1)$	$((0, -1), (-1, 0), (1, 0), (0, -2))$
$((1, 0), (-1, 0), (0, -1), (0, -2))$	$((0, -1), (1, 0))$ -группировка	$((1, 0), (-1, 0), (0, -1))$
$((1, 0), (-1, 0), (0, -1))$	$((1, 1), (1, 0))$ -группировка	$((1, 0), (-1, 0), (-1, -1))$
$((1, 0), (-1, 0), (-1, -1))$	собственный сдвиг на $(-1, 0)$	$((1, 0), (2, 0), (0, -1))$
$((1, 0), (2, 0), (0, -1))$	$((1, 0), (0, 1))$ -группировка	$((1, 0), (0, -1))$

Таблица 2. Последовательность операций, переводящая КА с шаблоном соседства V^Γ к эквивалентному КА с шаблоном соседства V^Γ .

Сведем проблему обратимости от шаблона V^Γ к шаблону V^Γ . Подходящая последовательность применения операций группировки и собственного сдвига указана в таблице 2. В силу того, что каждая операция реализует эффективное построение, из неразрешимости свойства обратимости для шаблона V^Γ вытекает неразрешимость для шаблона V^Γ . Получаем противоречие с предположением существова-

ния алгоритма проверки обратимости для шаблона V . Следовательно, для любого шаблона V , образованных системой векторов ранга более единицы, свойство обратимости неразрешимо в классе КА с шаблоном соседства V . Доказательство закончено.

Список литературы

- [1] Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Болотов А.А. Основы теории однородных структур. М.: Наука, 1990.
- [2] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [3] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2002.
- [4] Amoroso S., Patt Y.N. Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures // Journal of Computer and System Sciences. (1972). **6**. № 5. P. 448–464.
- [5] Sutner K. Linear cellular automata and De Bruijn automata // Cellular Automata: a parallel model / Delorme M., Mazoyer J. (eds.) Kluwer, 1998. P. 303–319.
- [6] Kari J. Reversibility of 2D cellular automata is undecidable // Physica D. (1994). **45**. P. 379–385.
- [7] Durand B. Inversion of 2D cellular automata: some complexity results // Theoretical Computer Science. (1994). **134**. № 2. P. 387–401.

