

О некоторых характеристиках нейронных схем

В.С. Половников

В статье рассмотрена модель нейронных сетей как схем из функциональных элементов. Нейронные схемы строятся из элементов операциями суперпозиции и обратной связи. Доказано, что для построения произвольной нейронной схемы достаточно однократного использования операции обратной связи. Так же показана достаточность двухслойных нейронных сетей без обратных связей.

В последнее время, когда объем обрабатываемой информации растет и перебор становится не допустим, все чаще в качестве инструмента распознавания выступают нейронные сети [1], которые порой показывают хорошие результаты за приемлемое время. С помощью нейронных сетей производятся попытки приближенного решения NP-полных задач. Но нет единого подхода к нахождению вида нейронной сети, способной решать поставленную задачу, то есть существует проблема синтеза сети. Нет достаточно четкого математического аппарата, который предоставлял бы алгоритм построения универсальной сети. Автором рассмотрен функциональный базис пригодный для моделирования нейронных сетей схемами из функциональных элементов [2] над таким базисом. В этих условиях удалось дать определение процесса обучения нейронной сети и построить каноническую форму обучающейся нейронной сети.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — алфавит входных переменных.

Введем следующие функции:

- 1) постоянная функция $g_c \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$;
- 2) сумматор $\Sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$, где $x_i \in \mathbb{R}$ при $i = 1, 2, \dots, n$;

- 3) усилитель $f_\gamma(x) = \gamma x_1$, где $\gamma, x \in \mathbb{R}$;
 4) функция $\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$ где $z \in \mathbb{R}$;
 5) функция $F(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_2 > 0 \\ 0, & \text{если } x_2 \leq 0, \end{cases}$ где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Множество таких функций обозначим Δ' .

Заметим, что $F(x_1, x_2) = x_1 \theta'(x_2)$.

По аналогии с автоматными схемами [3] определим схемы из функциональных элементов.

Каждой функции $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ можно сопоставить графический объект S (рис. 1) с n входными стрелками и одной выходной (коротко входы и выход S). Входам объекта S приписаны слева направо переменные x_1, \dots, x_n функции f .

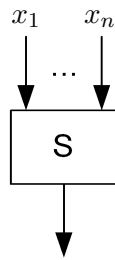


Рис. 1.

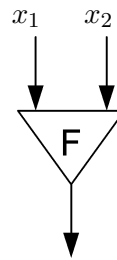
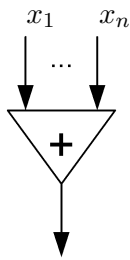


Рис. 2.

Функции из Δ' будем изображать особо (рис. 2). Пара, графический объект и соответствующая ему функция из Δ' , называется *функциональным элементом*. Элементы соответствующие функциям θ и F называются *нелинейными элементами*, остальные — *линейными*.

0. Каждый функциональный элемент — нейронная схема без памяти.

Пусть $(S, f(x_1, \dots, x_n))$ — нейронная схема без памяти. Таким образом, входам объекта S приписаны слева направо переменные x_1, \dots, x_n .

1. (добавление фиктивного входа). Пусть x_{n+1} — переменная отличная от x_1, \dots, x_n . Тогда объект S' (рис. 3) и сопоставленная ему

функция $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$ — нейронная схема без памяти, полученная из (S, f) добавлением фиктивного входа.

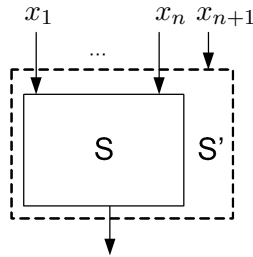


Рис. 3.

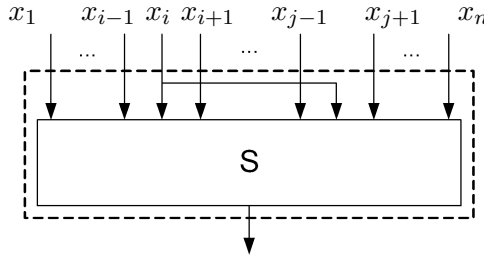


Рис. 4.

2. (изъятие фиктивного входа). Пусть $f(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда (S', f') , где $f'(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$, — нейронная схема без памяти, полученная из (S, f) изъятием фиктивного входа (соответствующего переменной x_i).

3. (склеивание входов). Пусть x_i и x_j приписаны i -му и j -му входам S соответственно. Тогда объект S' с $n - 1$ входами, изображенный на рис. 4, и функция $f'(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$ — есть нейронная схема без памяти полученная из (S, f) склеиванием входов (соответствующих переменным x_i и x_j).

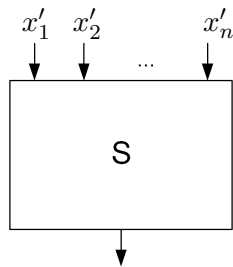


Рис. 5.

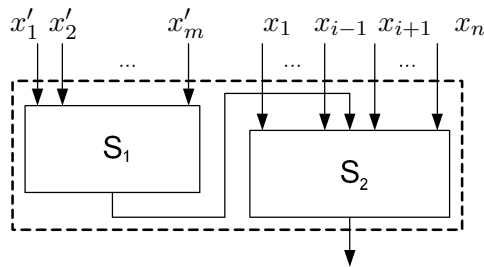


Рис. 6.

4. (переименование входов без склеивания). Если x'_1, \dots, x'_n — разные переменные, то объект с n входами, изображенный на рис. 5,

вместе с функцией $f'(x'_1, \dots, x'_n) = f(x'_1, \dots, x'_n)$ — нейронная схема без памяти, получающаяся из (S, f) переименованием входов.

5. (последовательное соединение). Пусть $(S_1, h(x'_1, \dots, x'_m))$ и $(S_2, f(x_1, \dots, x_n))$ — нейронные схемы без памяти, причем множества переменных $\{x'_1, \dots, x'_m\}$ и $\{x_1, \dots, x_n\}$ не пересекаются. Тогда объект S' (рис. 6) и функция $f'(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, h(x'_1, \dots, x'_m), x_{i+1}, \dots, x_n)$ составляют нейронную схему без памяти.

Правила 0–5 индуктивно определяют *нейронные схемы без памяти*.

Вместо записи (S, f) иногда будем говорить, что *схема S реализует функцию f* .

Число функциональных элементов называется *сложностью нейронной схемы*.

Путем в нейронной схеме назовем последовательность функциональных элементов $(S_1, F_1), \dots, (S_k, F_k)$, где $F_i \in \Delta'$. Причем один из входов S_1 является входом нейронной схемы, выход S_k является выходом нейронной схемы, а выход S_i — один из входов S_{i+1} , $i = 1, \dots, k - 1$. Рассмотрим все пути в нейронной схеме без памяти. *Длиной пути* называется число нелинейных элементов, содержащихся в нем. *Нелинейной глубиной нейронной схемы* называется длина самого длинного пути.

Множество функций $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, реализуемых нейронными схемами без памяти, обозначим \mathfrak{L} .

Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейной*, если найдутся $\bar{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $c \in \mathbb{R}$, что $f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{a} + c$, где под операцией « \cdot » понимается скалярное произведение векторов.

Пусть l_i — гиперплоскость, задаваемая уравнением $\bar{x} \cdot \bar{a}_i + c_i = 0$, $\bar{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$. Для каждой точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ рассмотрим вектор $\sigma(\bar{x}) = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ с компонентами из множества $\{-1, 0, 1\}$, $\sigma_i = \text{sgn}(\bar{x} \cdot \bar{a}_i + c_i)$, где

$$\text{sgn}(b) = \begin{cases} -1, & b < 0 \\ 0, & b = 0 \\ 1, & b > 0. \end{cases}$$

Две точки $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ эквивалентны относительно гиперплоскостей l_1, \dots, l_k тогда и только тогда, когда $\sigma(\bar{x}) = \sigma(\bar{y})$, что обозначается $\bar{x} \sim \bar{y}$.

Легко проверить, что отношение « \sim » действительно является отношением эквивалентности. Таким образом, пространство \mathbb{R}^n разбивается на классы эквивалентности R_1, \dots, R_s .

Сигнатурой класса R называется вектор $\sigma(R) = \sigma(\bar{x})$, где \bar{x} — точка класса R .

Пусть R_1, \dots, R_s — все классы эквивалентности, на которые гиперплоскости l_1, \dots, l_k разбивают \mathbb{R}^n .

Функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *кусочно-линейной*, если $\forall j \in \{1, \dots, s\}$ найдутся $\bar{b}_j \in \mathbb{R}^n$ и $d_j \in \mathbb{R}$, что для всех $\bar{x} \in R_j$ выполняется $f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{b}_j + d_j$.

Множество всех кусочно-линейных функций, обозначим L .

Лемма 1. *Имеет место равенство $\mathfrak{L} = L$.*

Доказательство. Сначала докажем включение

$$\mathfrak{L} \subseteq L. \quad (1)$$

Для этого рассмотрим произвольную функцию $S(\bar{x}) \in \mathfrak{L}$, $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. По определению множества \mathfrak{L} существует нейронная схема без памяти $(S, S(\bar{x}))$. Докажем, что $S(\bar{x})$ является кусочно-линейной. Проведем доказательство методом математической индукции по построению нейронной схемы $(S, S(\bar{x}))$.

Для проверки реализации функциональными элементами кусочно-линейных функций достаточно убедиться в том, что $\Delta' \subseteq L$.

Рассмотрим следующие случаи:

- а) $g_c \in L$, так как постоянная функция является кусочно-линейной;
- б) $\Sigma_n(x_1, \dots, x_n) = \bar{x} \cdot \underbrace{(1, \dots, 1)}_n \in L$;

в) $f_\gamma(x) = \gamma x \in L$;

г) прямая \mathbb{R} разбивается точкой $x = 0$ на 3 класса эквивалентности $R_1 = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$, $R_2 = \{x \in \mathbb{R} | x = 0\}$ и $R_3 = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

Функция $\theta(x)$ постоянна на каждом из них, а значит кусочно-линейна;

д) плоскость \mathbb{R}^2 разбивается прямой $x_2 = 0$ на 3 класса эквивалентности

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 < 0\}, R_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\} \text{ и} \\ R_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 > 0\}.$$

Функция $F(x_1, x_2)$ линейна на каждом из этих классов, а значит кусочно-линейна.

Теперь покажем, что операции 1–5 сохраняют кусочно-линейность функций нейронных схем.

Пусть $(S, f(x_1, \dots, x_n))$ — нейронная схема без памяти и функция $f(x_1, \dots, x_n)$ кусочно-линейна. То есть гиперплоскости $l_i: \bar{x} \cdot \bar{a}_i + c_i = 0$, где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^n)$, $i = 1, \dots, k$, разбивают \mathbb{R}^n на классы эквивалентности R_1, \dots, R_s , и для всех $\bar{x} \in R_j$ выполняется $f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{b}_j + d_j$, $\bar{b}_j = (b_j^1, \dots, b_j^n)$, $j = 1, \dots, s$.

1. Добавлением фиктивного входа получаем схему, реализующую кусочно-линейную функцию $f'(x_1, \dots, x_{n+1})$. Действительно гиперплоскости $l'_i: \bar{x}' \cdot \bar{a}'_i + c_i = 0$, где $\bar{x}' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ и $\bar{a}'_i = (a_i^1, \dots, a_i^n, 0)$, $i = 1, \dots, k$, разбивают \mathbb{R}^{n+1} на классы эквивалентности R'_1, \dots, R'_s , $R'_j = \{\bar{x}' \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1, \dots, x_n) \in R_j\}$, $j = 1, \dots, s$. Тогда для всех $\bar{x}' \in R'_j$ выполняется $f'(\bar{x}') = \bar{x}' \cdot \bar{b}'_j + d_j$, $\bar{b}'_j = (b_j^1, \dots, b_j^n, 0)$, $j = 1, \dots, s$.

2. Не ограничивая общности считаем, что вход, соответствующий переменной x_n , является фиктивным. Рассмотрим непустые множества, полученные сечением гиперплоскостей l_1, \dots, l_k гиперплоскостью $x_n = 0$. Обозначим их l'_1, \dots, l'_k . Они являются гиперплоскостями в \mathbb{R}^{n-1} и разбивают \mathbb{R}^{n-1} на классы эквивалентности, являющиеся сечениями R_1, \dots, R_s гиперплоскостью $x_n = 0$, а значит на них $f'(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ линейна.

3. Аналогично предыдущему случаю, сечения l_1, \dots, l_n гиперплоскостью $x_i - x_j = 0$ образуют гиперплоскости в \mathbb{R}^{n-1} (переменные $x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$), которые разбивают \mathbb{R}^{n-1} на классы эквивалентности, являющиеся не пустыми сечениями R_1, \dots, R_s гиперплоскостью $x_i - x_j = 0$. А значит на них $f'(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n)$ линейна.

4. Переименование входов нейронной схемы приводит к переиме-

нованию переменных функции, что сохраняет ее кусочно-линейный вид.

5. Пусть l'_1, \dots, l'_t — гиперплоскости в R^m задающие $h(x'_1, \dots, x'_m)$. Тогда добавим в (S_1, h) фиктивные входы x_1, \dots, x_n , а в (S_2, f) соответственно x'_1, \dots, x'_m . Таким образом, h и f — кусочно-линейные функции переменных $x'_1, \dots, x'_m, x_1, \dots, x_n$. Гиперплоскости $l_1, \dots, l_k, l'_1, \dots, l'_t$ разбивают \mathbb{R}^{m+n} на классы линейности функций h и f . Операция 5 на любом классе эквивалентности есть суперпозиция линейных функций, то есть линейна. Причем x_i является фиктивной переменной результирующей функции. Применим операцию 2.

Включение (1) доказано.

Теперь докажем включение

$$\mathfrak{L} \supseteq L. \tag{2}$$

Любая линейная функция $u(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{a} + c$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$, может быть реализована нейронной схемой без памяти как показано на рис. 7.

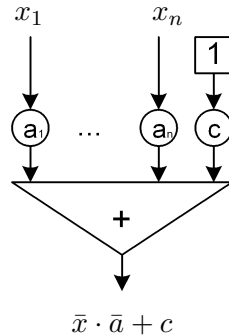


Рис. 7.

Пусть данная кусочно-линейная функция $S(\bar{x})$ задается гиперплоскостями $l_i : \bar{x} \cdot \bar{a}_i + c_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, разбивающими \mathbb{R}^n на классы эквивалентности R_1, \dots, R_s , и $S(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{b}_j + d_j$ при $\bar{x} \in R_j$, $j = 1, \dots, s$. Обозначим $\sigma(R_j)$ сигнатуру класса R_j , $\sigma(R_j) = (\sigma_j^1, \dots, \sigma_j^k)$, $j = 1, \dots, s$.

Выполнено равенство:

$$\begin{aligned}
S(\bar{x}) &= \sum_{j=1}^s \left((\bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j) \prod_{i=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = \sigma_j^i) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^s \left((\bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j) \theta' \left(\sum_{i=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = \sigma_j^i) - k + 1 \right) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^s F \left(\bar{b}_j \cdot \bar{x} + d_j, \sum_{i=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = \sigma_j^i) - k + 1 \right) \quad (3)
\end{aligned}$$

А также верны соотношения:

$$\chi(\operatorname{sgn}(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = 1) = \theta'(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = 1 - \theta(-\bar{a}_i \cdot \bar{x} - c_i) \quad (4)$$

$$\chi(\operatorname{sgn}(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = 0) = \theta(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) + \theta(-\bar{a}_i \cdot \bar{x} - c_i) - 1 \quad (5)$$

$$\chi(\operatorname{sgn}(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) = -1) = 1 - \theta(\bar{a}_i \cdot \bar{x} + c_i) \quad (6)$$

Учитывая соотношения (4), (5) и (6), по равенству (3) построим нейронную схему без памяти, реализующую функцию $S(\bar{x})$.

Блоком назовем векторное отображение, каждая компонента которого является кусочно-линейной.

Для начала реализуем блок Q , вычисляющий на векторе \bar{x} , $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ значения функций, задающих гиперплоскости l_1, \dots, l_k . То есть отображение $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\bar{x} \mapsto (q_1, \dots, q_k)$, где $q_i = \bar{x} \cdot \bar{a}_i + c_i$, $i = 1, \dots, k$.

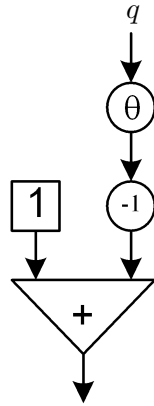
Схема A_1 (рис. 8) реализует функцию $A_1(q) = 1 - \theta(q)$ соответствующую соотношению (4). Схема A_0 (рис. 9) вычисляет $A_0(q) = \theta(q) + \theta(-q) - 1$, что соответствует (5). Схема A_{-1} , изображенная на рис. 10, реализует соответствующую (6) функцию $A_{-1}(q) = 1 - \theta(-q)$.

Схема B_j , которая вычисляет функцию

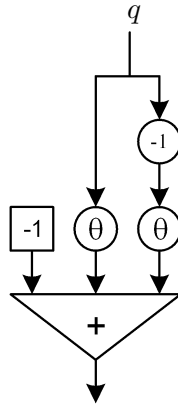
$$B_j(\bar{q}) = B_j(q_1, \dots, q_k) = \sum_{i=1}^k \chi(\operatorname{sgn}(q_i) = \sigma_j^i) - k + 1$$

изображена на рис. 11.

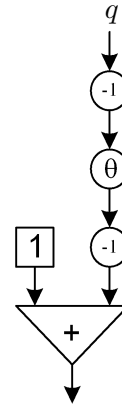
Схема S_j реализует линейную функцию $S_j(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{b}_j + d_j$, $j = 1, \dots, s$.



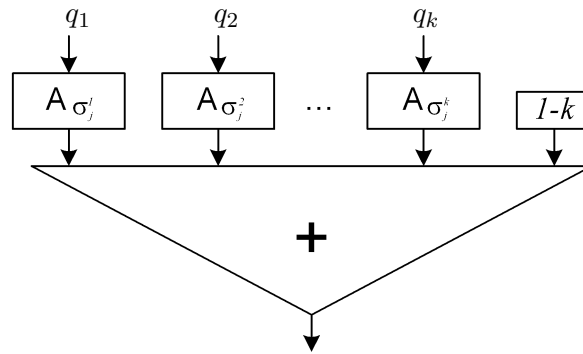
$A_1(q)$
Рис. 8.



$A_0(q)$
Рис. 9.



$A_{-1}(q)$
Рис. 10.



$B_j(q_1, q_2, \dots, q_k)$
Рис. 11.

Общая схема S , реализующая функцию $S(\bar{x})$ по формуле (3), изображена на рис. 12. Отметим, что нелинейная глубина нейронной схемы без памяти, построенной указанным способом, равна двум.

Лемма доказана.

Две нейронные схемы без памяти эквивалентны, если реализуемые ими функции совпадают.

Теорема 1. Для любой нейронной схемы без памяти существует эквивалентная ей схема с нелинейной глубиной не больше двух.

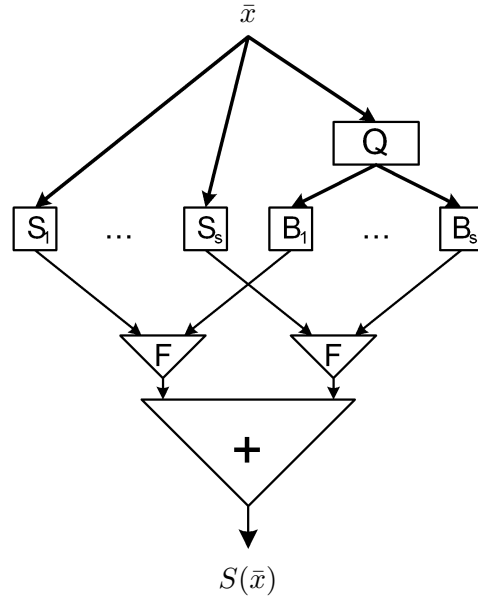


Рис. 12.

Доказательство. Действительно, как показано в лемме 1, функция нейронной схемы без памяти является кусочно-линейной. Эту кусочно-линейную функцию, согласно лемме 1, можно реализовать нейронной схемой без памяти нелинейной глубины два. По определению, исходная и полученные схемы эквивалентны.

Теорема доказана.

Отметим, что указанное в теореме 1 значение нельзя уменьшить.

Утверждение 1. *Существует нейронная схема для которой нет эквивалентной схемы нелинейной глубины меньше двух.*

Доказательство. Рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ и } y = 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Будем доказывать утверждение от противного. Пусть $\delta(x, y)$ реализуется нейронной схемой без памяти нелинейной глубины 1. Тогда

для некоторого натурального r и линейных функций $l(x, y)$, $l_i^{(1)}(x, y)$, $l_i^{(2)}(x, y)$, $i = 1, \dots, r$, выполнено равенство

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^r F\left(l_i^{(1)}(x, y), l_i^{(2)}(x, y)\right) + l(x, y). \quad (7)$$

В качестве нелинейного элемента здесь рассматривается только F , так как $\theta(x) = 1 - F(1, -x)$.

Пусть $l_i^{(1)}(x, y) = a_i^{(1)}x + b_i^{(1)}y + c_i^{(1)}$, $l_i^{(2)}(x, y) = a_i^{(2)}x + b_i^{(2)}y + c_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, r$, а натуральное число k , таково что $c_i^{(2)} = 0$ при $i = 1, \dots, k$ и $c_i^{(2)} \neq 0$ при $i = k + 1, \dots, r$. Рассмотрим окрестность нуля $U \subset \mathbb{R}^2$ такую, что для всех точек $(x, y) \in U$ и всех $i = k + 1, \dots, r$ выполнено $|a_i^{(2)}x + b_i^{(2)}y| < |c_i^{(2)}|$. В этой окрестности $\theta'(a_i^{(2)}x + b_i^{(2)}y + c_i^{(2)}) = \theta'(c_i^{(2)})$, а следовательно $F(l_i^{(1)}(x, y), l_i^{(2)}(x, y))$ линейна и равенство (7) можно переписать в виде

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^k F\left(a_i^{(1)}x + b_i^{(1)}y + c_i^{(1)}, a_i^{(2)}x + b_i^{(2)}y\right) + l(x, y),$$

где $l(x, y)$ некоторая линейная функция. Пусть $l(x, y) = ax + by + c$. Тогда в силу того, что $\delta(0, 0) = 1$ получаем $c = 1$. Итак,

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^k F\left(a_i^{(1)}x + b_i^{(1)}y + c_i^{(1)}, a_i^{(2)}x + b_i^{(2)}y\right) + ax + by + 1. \quad (8)$$

Будем считать, что к полученному равенству применена операция упрощения:

$$F(u + v, w) = F(u, w) + F(v, \alpha w), \quad \alpha > 0.$$

Исследуем кусочно-линейную функцию, задаваемую равенством (8). Прямые $a_i^{(2)}x + b_i^{(2)}y$, $i = 1, \dots, k$ разбивают $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ на классы постоянства вектора $(\theta'(a_1^{(2)}x + b_1^{(2)}y), \dots, \theta'(a_k^{(2)}x + b_k^{(2)}y))$. Заметим, что не существует класса с нулевым вектором. Действительно, если бы

такой класс существовал, то рассмотрим равенство (8) в пределе при $(x, y) \rightarrow 0$, мы бы получили $0 = 1$. Так как среди прямых $a_i^{(2)}x + b_i^{(2)}y = 0$, $i = 0, \dots, k$ нет двух с одинаковым направляющим вектором (мы применили операцию упрощения), то для i -й прямой существует два класса, вектор которых различается лишь в i -й компоненте. Отметим, что вектор хотя бы одного из этих классов содержит не менее двух единиц, иначе бы существовал класс с нулевым вектором. Рассмотрим равенство (8) в пределе при $(x, y) \rightarrow 0$ по соответствующим i -й прямой классам. Получим систему уравнений относительно $c_1^{(1)}, \dots, c_k^{(1)}$:

$$\begin{cases} 0 = c_1^{(1)}\theta' \left(a_1^{(2)}x + b_1^{(2)}y \right) + \dots + c_i^{(1)} \cdot 0 + \dots + c_k^{(1)}\theta' \left(a_k^{(2)}x + b_k^{(2)}y \right) + 1, \\ 0 = c_1^{(1)}\theta' \left(a_1^{(2)}x + b_1^{(2)}y \right) + \dots + c_i^{(1)} \cdot 1 + \dots + c_k^{(1)}\theta' \left(a_k^{(2)}x + b_k^{(2)}y \right) + 1. \end{cases}$$

Откуда заключаем, что $c_i^{(1)} = 0$. Это верно для всех $i = 1, \dots, k$. Рассмотрим теперь произвольный класс. Уравнение (8) в пределе при $(x, y) \rightarrow 0$ по этому классу имеет вид $1 = 0$, что приводит к противоречию.

Утверждение доказано.

Далее будем рассматривать функции с памятью. Для этого нам потребуется элемент задержка [3]. Через \mathbb{R}^∞ обозначим, как принято, множество бесконечных последовательностей действительных чисел.

$$\mathbb{R}^\infty = \{ \tilde{x} : \tilde{x} = (x(1), x(2), \dots), x(t) \in \mathbb{R}, t = 1, 2, \dots \}$$

Детерминированную функцию, реализующую задержку с начальным состоянием a_0 , обозначим \mathfrak{Z}_{a_0} , $a_0 \in \mathbb{R}$.

$$\Delta = \Delta' \cup \{ \mathfrak{Z}_{a_0} | a_0 \in \mathbb{R} \}.$$

Функциональный элемент задержка с начальным состоянием a_0 изображен на рис. 13.

Так же как нейронные схемы без памяти индуктивно, исходя из функциональных элементов, реализующих детерминированные функции, определим *нейронные схемы (с памятью)*, добавив к операциям 1–5 операцию обратной связи 6.

6. (обратная связь). Пусть (S, f) — нейронная схема, $f(x_1, \dots, x_n)$ детерминированная функция от $n \geq 2$ переменных, зависящая от x_i с запаздыванием. Тогда объект, изображенный на рис. 14, реализует нейронную схему (S', f') , где $f'(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ — детерминированная функция, полученная из f применением операции обратной связи по переменной x_i .

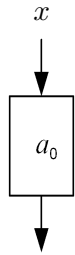


Рис. 13.

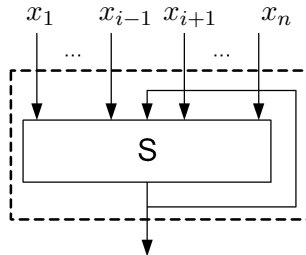


Рис. 14.

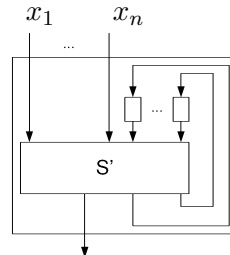


Рис. 15.

Итак, нейронная схема задает некоторую детерминированную функцию

$$f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) : (\mathbb{R}^\infty)^n \rightarrow \mathbb{R}^\infty.$$

Рассмотрим систему канонических уравнений

$$\begin{cases} \bar{d}(0) = (a_0^1, \dots, a_0^k) \\ \bar{d}(t+1) = \bar{\Phi}(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)) = (\Phi_1(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)), \dots, \Phi_k(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1))) \\ z(t+1) = Z(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)), \end{cases} \quad (9)$$

где Z, Φ_1, \dots, Φ_k — кусочно-линейные функции.

Детерминированная функция $f : (\mathbb{R}^\infty)^n \rightarrow \mathbb{R}^\infty : f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \tilde{z}$, для которой существуют $k \in \mathbb{N}, a_0^1, \dots, a_0^k \in \mathbb{R}$ и кусочно-линейные функции $Z, \Phi_1, \dots, \Phi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, что выполнены канонические уравнения (9), называется *нейронной функцией*.

Докажем лемму:

Лемма 2. 1) Если (S, f) — нейронная схема, то f является нейронной функцией. 2) Для любой нейронной функции f существует нейронная схема (S, f) .

Доказательство. 1) Пусть k — количество задержек в нейронной схеме S . Занумеруем их каким-либо образом. Обозначим $\bar{d}(t)$ — вектор значений на задержках в момент времени t . Отделим задержки, как показано на рис. 15. Блок S' реализует вектор функцию $(Z, \Phi_1, \dots, \Phi_k)$, компоненты которой кусочно-линейны по лемме 1 ввиду отсутствия в S' задержек.

2) Пусть данная нейронная функция $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ удовлетворяет каноническим уравнениям (9). В силу леммы 1, кусочно-линейные функции Z, Φ_1, \dots, Φ_k можно реализовать нейронными схемами без памяти: $(S_Z, Z), (S_{\Phi_1}, \Phi_1), \dots, (S_{\Phi_k}, \Phi_k)$. Нейронная схема S , изображенная на рис. 16, получается из этих схем и k задержек с начальными значениями a_0^1, \dots, a_0^k , применением операций 1–6. Легко видеть, что полученная схема реализует данную нейронную функцию $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$.

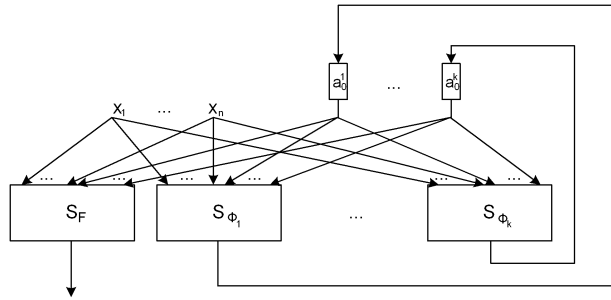


Рис. 16.

Лемма доказана.

Так же как нейронные схемы без памяти, нейронные схемы эквивалентны, когда они реализуют одну и ту же нейронную функцию.

S — нейронная схема без обучения, если задает нейронную функцию f , удовлетворяющую каноническим уравнениям:

$$\begin{cases} \bar{d}(0) = (a_0^1, \dots, a_0^k) \\ \bar{d}(t+1) = \bar{d}(t) \\ z(t+1) = Z(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)). \end{cases}$$

Пусть схема S задает нейронную функцию $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y})$.

S — нейронная схема с обучением тогда и только тогда, когда для

всех $p \in \mathbb{N}$ и любых слов $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^p$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, существует нейронная схема $S'_{\tilde{\alpha}}$ без обучения, задающая функцию $f'_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{\alpha}\tilde{0})$, где $\tilde{\alpha}\tilde{0} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$.

Докажем вспомогательную лемму:

Лемма 3. *Для любой нейронной схемы (S, f) можно построить эквивалентную ей схему, которая получена из функциональных элементов с помощью операций суперпозиции и не более чем двух применений операции обратной связи.*

Доказательство. Пусть данная схема реализует нейронную функцию $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, удовлетворяющую каноническим уравнениям

$$\begin{cases} \bar{d}(0) = (a_0^1, \dots, a_0^k) \\ \bar{d}(t+1) = \bar{\Phi}(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)) = (\Phi_1(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)), \dots, \Phi_k(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1))) \\ z(t+1) = Z(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)). \end{cases}$$

В дальнейшем блоком будем называть любое векторное отображение, каждая компонента которого является нейронной функцией. Таким образом, для любого блока T найдутся натуральное m и нейронные функции f_1, \dots, f_m такие, что $T = (f_1, \dots, f_m)$.

Для начала построим некоторые вспомогательные блоки.

Блоки F_i задаются равенствами

$$F_i(x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_k) = (Z(\bar{d}, \bar{x}), \Phi_1(\bar{d}, \bar{x}), \dots, \Phi_k(\bar{d}, \bar{x})), \\ i = 1, \dots, k-2.$$

В частности отметим, что при $t = k \cdot s + i$, $s = 0, 1, 2, \dots$, выполнено

$$F_i(\bar{x}(t), \bar{d}(t-1)) = (Z(\bar{d}(t-1), \bar{x}(t)), \bar{d}(t)), \\ i = 1, \dots, k-2. \quad (\text{Свойство 1})$$

Блок F_{k-1} зададим равенством

$$F_{k-1}(x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_k) = (Z(\bar{d}, \bar{x})).$$

Для доказательства заметим, что при $t = k \cdot s + k - 1$, $s = 0, 1, 2, \dots$, выполнено

$$F_{k-1}(\bar{x}(t), \bar{d}(t-1)) = (Z(\bar{d}(t-1), \bar{x}(t))). \quad (\text{Свойство 2})$$

Блоки $\Phi^i(\bar{d}, \bar{x}^i, \dots, \bar{x}^1)$, $i = 1, 2, \dots$ определим индуктивно:

$$\begin{aligned}\Phi^1(\bar{d}, \bar{x}^1) &= \bar{\Phi}(\bar{d}, \bar{x}^1) \\ \Phi^2(\bar{d}, \bar{x}^2, \bar{x}^1) &= \bar{\Phi}(\Phi^1(\bar{d}, \bar{x}^1), \bar{x}^2) \\ \dots \\ \Phi^{i+1}(\bar{d}, \bar{x}^{i+1}, \dots, \bar{x}^1) &= \bar{\Phi}(\Phi^i(\bar{d}, \bar{x}^i, \dots, \bar{x}^1), \bar{x}^{i+1}) \\ \dots\end{aligned}$$

Аналогично определим блоки $F^i(\bar{d}, \bar{x}^i, \dots, \bar{x}^1)$, $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}F^1(\bar{d}, \bar{x}^1) &= Z(\bar{d}, \bar{x}^1) \\ F^2(\bar{d}, \bar{x}^2, \bar{x}^1) &= Z(\Phi^1(\bar{d}, \bar{x}^1), \bar{x}^2) \\ \dots \\ F^{i+1}(\bar{d}, \bar{x}^{i+1}, \dots, \bar{x}^1) &= Z(\Phi^i(\bar{d}, \bar{x}^i, \dots, \bar{x}^1), \bar{x}^{i+1}) \\ \dots\end{aligned}$$

Блок Φ зададим следующим образом

$$\begin{aligned}\Phi(x_1^1, \dots, x_n^1, \dots, x_1^k, \dots, x_n^k, d_1, \dots, d_k) &= \\ &= (F^k(\bar{d}, \bar{x}^k, \dots, \bar{x}^1), \Phi_1^k(\bar{d}, \bar{x}^k, \dots, \bar{x}^1), \dots, \Phi_k^k(\bar{d}, \bar{x}^k, \dots, \bar{x}^1)).\end{aligned}$$

В частности заметим, что при $t = k \cdot s$, $s = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\Phi(\bar{x}(t), \bar{x}(t-1), \dots, \bar{x}(t-k+1), \bar{d}(t-k)) = (Z(\bar{d}(t-1), \bar{x}(t)), \bar{d}(t)).$$

(Свойство 3)

Блок B , изображенный на рис. 17, задается равенствами:

$$b_i(t) = x(t-i+1), \text{ где } i = 1, \dots, k.$$

Выполнено свойство:

Если на вход B в момент времени $t = k \cdot s + i$, $s = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, k$ подается значение $d_i(k \cdot s)$, то на выходах в момент времени $t = k \cdot s + k$, получаем $\bar{d}(k \cdot s)$.

(Свойство 4)

Блок A представляет собой совокупность n блоков B , что показано на рис. 18. Алгебраически можно записать так:

$$A(x_1, \dots, x_n) = (B(x_1), \dots, B(x_n)).$$

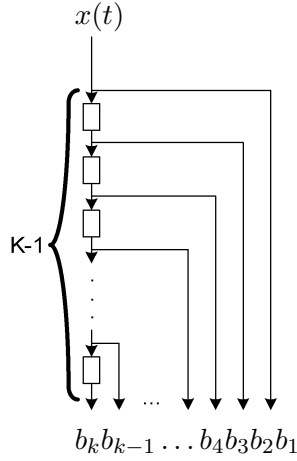


Рис. 17.

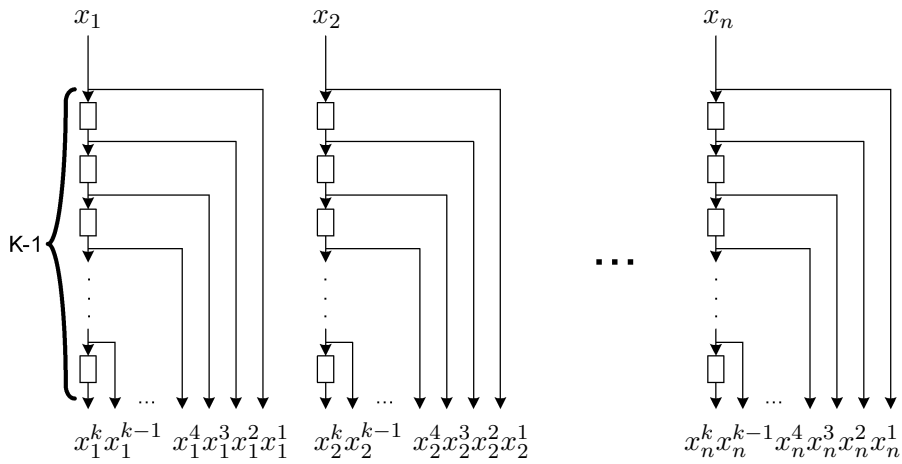


Рис. 18.

Если на входы A в момент времени $t = 1, 2, \dots$ подаются значения $\bar{x}(t)$, то на выходе в момент времени $t = k \cdot s, s = 1, 2, \dots$ получаем $\bar{x}^1 = \bar{x}(t), \bar{x}^2 = \bar{x}(t - 1), \dots, \bar{x}^k = \bar{x}(t - k + 1)$.

(Свойство 5)

Блок C (см. рис. 19) задается равенствами

$$c_i(t) = x_i(t - i + 1), \text{ где } i = 1, \dots, k.$$

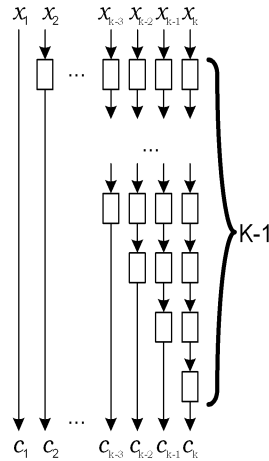


Рис. 19.

Отметим, что выполняется:

Если на входы C в момент времени $t = k \cdot s + 1, s = 0, 1, 2, \dots$, подаются значения $\bar{d}(k \cdot s)$, то на выходах в момент времени $t = k \cdot s + i, i = 2, 3, \dots$, получаем $d_i(k \cdot s)$.

(Свойство 6)

Блоки $D_i, i = 0, \dots, k - 2$ изображены на рис. 20 и задаются равенствами

$$d_i(t) = x_i(t - 1), \text{ где } i = 1, \dots, k.$$

В частности:

Если на входы $D_i, i = 0, \dots, k - 2$ в момент времени $t = k \cdot s + i, s = 0, 1, 2, \dots$, подаются значения $\bar{d}(t)$, то на выходах в момент времени $t = k \cdot s + i + 1$ получаем $\bar{d}(t - 1)$.

(Свойство 7)

Блок G , изображенный на рис. 21, задается равенствами

$$G(g_1, \dots, g_k, v_1, \dots, v_k) = F(g_1, v_1) + \dots + F(g_k, v_k).$$

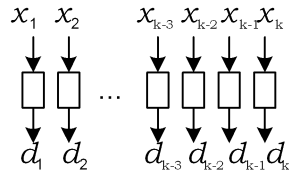
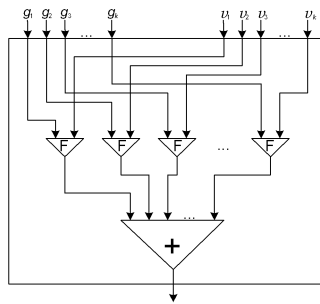


Рис. 20.

На общей схеме (рис. 23) блоки идентичные G для удобства доказательства занумерованы.



$$G(g_1, \dots, g_k, v_1, \dots, v_k)$$

Рис. 21.

Отметим, что в момент времени $t = k \cdot s + i, s = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, k$ выполнено

$$G(d_1(k \cdot s), \dots, d_k(k \cdot s), \delta_{i1}, \dots, \delta_{ik}) = d_i(k \cdot s). \quad (\text{Свойство 8})$$

А так же верно, что если $g_i = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)(t), v_j = \delta_{ij}, j = 1, \dots, k,$ получаем

$$G(g_1, \dots, g_k, v_1, \dots, v_k) = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)(t). \quad (\text{Свойство 9})$$

Как видно из рис. 22, для построения блока H использована одна операция обратной связи.

Значения на выходах схемы H в момент времени $t = k \cdot s + i, s = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, k$ есть $v_j = \delta_{ij}, j = 1, \dots, k.$

$$(\text{Свойство 10})$$

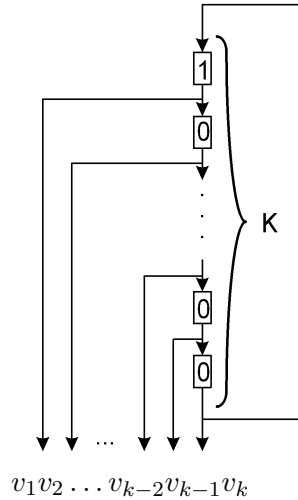


Рис. 22.

Инициализация.

Начальные значения задержек блока D_0 должны соответствовать вектору $\bar{d}(0)$. Начальные значения остальных задержек схемы (не входящие в блоки H и D_0) произвольны.

Докажем теперь, что нейронная схема, изображенная на рис. 23, будет эквивалентна исходной. То есть реализует нейронную функцию $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$.

Для начала докажем индукцией по s , что в моменты времени $t = k \cdot s + 1$, $s = 0, 1, 2, \dots$ на выходах блока D_0 будут значения $d_1(k \cdot s), \dots, d_k(k \cdot s)$, а в моменты $t = k \cdot s + k$, $s = 0, 1, 2, \dots$, выход всей схемы равен $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)(k)$.

Базой индукции является случай $s = 0$, то есть $t = 1$. Ввиду инициализации схемы, на выходе блока D_0 получаем $\bar{d}(0)$.

Пусть для любых $s < s'$ утверждение верно, докажем для $s = s'$. По предположению индукции, в момент времени $k \cdot (s' - 1) + 1$ с выходов D_0 на входы блока C поступает $\bar{d}(k \cdot (s' - 1))$. Тогда, по свойству 6, в моменты времени $k \cdot (s' - 1) + i$, $i = 1, \dots, k$, на вход g_i блока G_1 подается значение $d_i(k \cdot (s' - 1))$. Но, ввиду свойства 10, в эти моменты времени $v_j = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, k$, и по свойству 8, $d_i(k \cdot (s' - 1))$

подается на вход блока B . А это по свойству 4 значит, что в момент времени $t = k \cdot s'$ на выходе B мы получаем вектор $\bar{d}(k \cdot (s' - 1))$. По свойству 5, на входы блока Φ поступают $\bar{x}(k \cdot (s' - 1) + 1), \dots, \bar{x}(k \cdot (s' - 1) + k)$. По свойству 3, вход g_k блока G_2 равен $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)(1)$, а, по свойствам 10 и 9, выход всей схемы равен g_k . Так же, по свойству 3, на вход D_0 подается значение $d(k \cdot s')$. Наконец, по свойству 7, в момент времени $t = k \cdot s' + 1$ на выходе блока D_0 получаем вектор $\bar{d}(k \cdot s')$.

Докажем теперь индукцией по i , что в любой момент времени $t = k \cdot s + i$, $s = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, k - 2$ на входы блока D_i подается вектор $\bar{d}(k \cdot s + i)$, а на выходе блока G_2 в моменты времени $t = k \cdot s + i$, $s = 0, 1, 2, \dots, i = 1, \dots, k - 1$ получаем $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)(t)$, то есть значение выхода исходной схемы в момент времени t .

Итак, при $i = 1$, $t = k \cdot s + 1$ мы показали, что на выходе блока D_0 получается $\bar{d}(k \cdot s)$, а значит по свойству 1 на входы D_1 поступает $\bar{d}(k \cdot s + 1)$, вход g_1 блока G_2 равен $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)(1)$. А используя свойства 10 и 9, получаем значение входа g_1 на выходе G_2 .

Пусть при $i < i'$ утверждение верно, докажем для $i = i'$, $t = k \cdot s + i'$. По предположению индукции и свойству 7 на выходе блока $D_{i'-1}$ получается $\bar{d}(k \cdot s + i' - 1)$, а значит по свойству 1 на входы $D_{i'}$ поступает $\bar{d}(k \cdot s + i')$, вход $g_{i'}$ блока G_2 равен $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)(t)$. А используя свойства 10 и 9, получаем значение входа $g_{i'}$ на выходе G_2 .

Для построения использовались две операции обратной связи: в общей схеме и в блоке H . От одной из них (в H) можно отказаться различными способами, например, описанным ниже.

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть (S, f) — нейронная схема. Тогда из элементов Δ , используя лишь операцию суперпозиции, можно построить схему, однократное применение к которой операции обратной связи приводит к нейронной схеме эквивалентной S .

Доказательство. Пусть данная схема реализует нейронную функцию $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, удовлетворяющую каноническим уравнениям

$$\begin{cases} \bar{d}'(0) = (a_0^1, \dots, a_0^{k'}) \\ \bar{d}'(t+1) = \Phi'(\bar{d}'(t), \bar{x}(t+1)) = \\ \quad \quad \quad = (\Phi_1'(\bar{d}'(t), \bar{x}(t+1)), \dots, \Phi_k'(\bar{d}'(t), \bar{x}(t+1))) \\ z(t+1) = Z'(\bar{d}'(t), \bar{x}(t+1)). \end{cases}$$

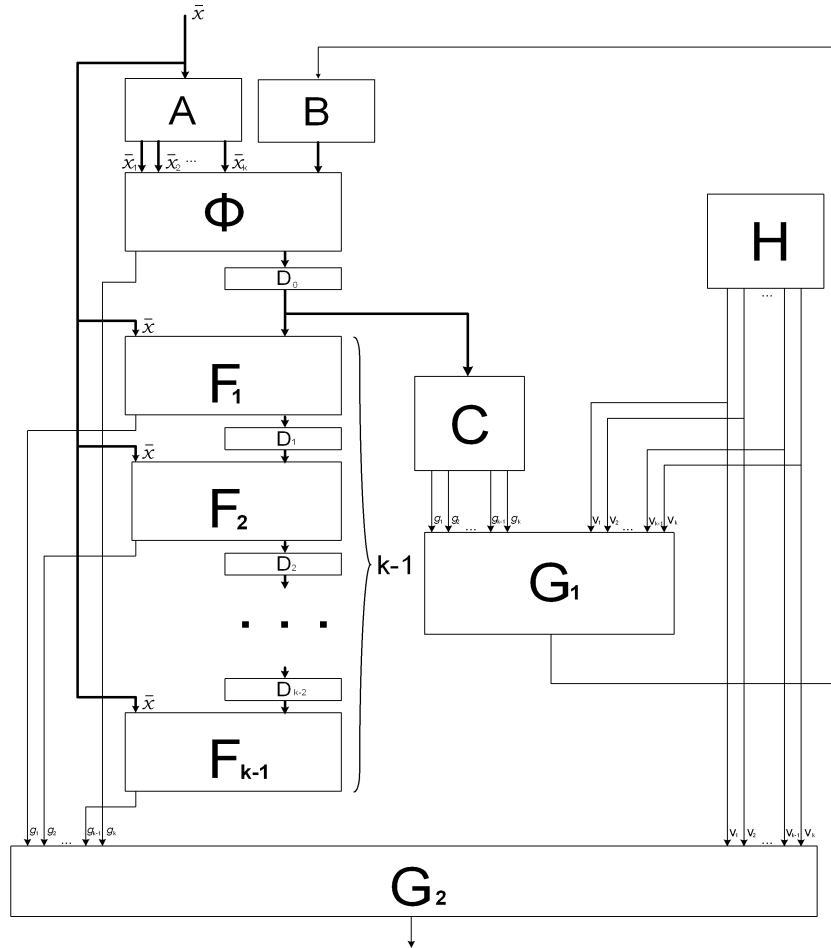


Рис. 23.

Эта же нейронная функция удовлетворяет измененным каноническим уравнениям

$$\begin{cases} \bar{d}(0) = (1 + \|\bar{d}'(0)\|, a_0^1, \dots, a_0^{k'}) \\ \bar{d}(t+1) = (d_1(t) + \|\bar{d}'(t+1)\|, \bar{\Phi}'(\bar{d}'(t), \bar{x}(t+1)) = \bar{\Phi}(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)) \\ z(t+1) = Z'(\bar{d}'(t), \bar{x}(t+1)) = Z(\bar{d}(t), \bar{x}(t+1)), \end{cases} \quad (10)$$

где $||\vec{d}|| = |d_1| + \dots + |d_k|$, $k = k' + 1$.

Заметим, что $d_1(t)$ — возрастающая последовательность. Причем в любой момент времени t выполнено неравенство $d_1(t) > d_j(\tau)$, $j = 2, \dots, k$, $\tau \leq t$.

Используя лемму 2, построим по измененным каноническим уравнениям (10) нейронную схему, эквивалентную исходной, дважды применяя операцию обратной связи.

Попытаемся получить действие блока H из общей схемы. То есть реализуем блок k нейронных функций, который в момент времени $t = k \cdot s + i$ выдает 1 на выходе i , а на остальных выходах — 0.

Для этого рассмотрим выходы блока B . По свойству 8 на вход блока B в момент $t = k \cdot s + i$, $s = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, k$ подаются значения $d_i(k \cdot s)$. А значит, ввиду строения блока, в момент времени t на выходах получаем $d_{i+1}(k \cdot s - k), \dots, d_k(k \cdot s - k), d_1(k \cdot s), \dots, d_i(k \cdot s)$. Если изначально значения на задержках блока B положить равными 0, то в момент времени $t = i$, $i = 1, \dots, k$, значения на выходах равны $0, \dots, 0, d_1(0), \dots, d_i(0)$. По свойству последовательности $d_1(t)$, в произвольный момент времени $t = k \cdot s + i$, $s = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, k$, существует единственное максимальное значение на выходе с номером $k - i + 1$.

Построим схемы H_j , $j = 1, \dots, k$, реализующие кусочно-линейные функции

$$h_j(b_1, \dots, b_k) = \begin{cases} 1, & b_{k-j+1} = \max\{b_1, \dots, b_k\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По лемме 1, эти схемы можно построить из функциональных элементов Δ' , а значит без использования операции обратной связи.

Объединим построенные схемы H_j в блок H' , заменяющий H в схеме:

$$H' = (H_1, \dots, H_j).$$

Таким образом, схема, изображенная на рис. 24, реализует нейронную функцию $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ и построена лишь с однократным применением операции обратной связи на завершающем этапе.

Теорема доказана.

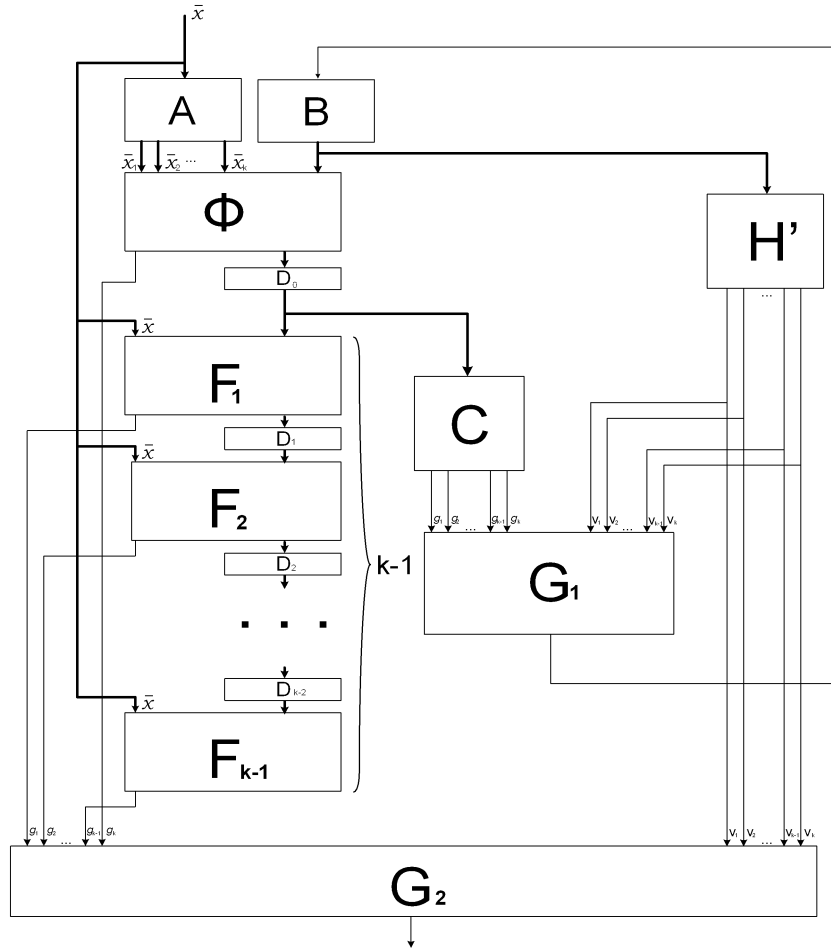


Рис. 24.

Следствие 1. Для любой нейронной схемы с обучением можно построить эквивалентную ей схему, которая получена из элементов Δ с помощью операций суперпозиции и не более одного применения операции обратной связи. При этом, в случае необходимости, операция обратной связи применяется последней.

Нейронную схему без обучения можно рассматривать как схему с независимыми от времени значениями на задержках. Нейронная схема с обучением имеет выделенный вход. Когда обучение схемы заканчивается, на выделенный вход подается значение 0 и схема функционирует как нейронная схема без обучения. Присутствие же обратной связи в обучающейся нейронной схеме соответствует изменению значений на задержках по результату работы части схемы. Теорема 2, доказанная в статье, о том что необходима лишь одна обратная связь на последнем этапе, означает, что для обучения сети не важны промежуточные результаты работы сети, а только выход всей схемы. Таким образом, в дискретном случае приведен метод, аналогичный непрерывному методу обратного распространения ошибок [5].

Автор выражает благодарность Часовских А.А. за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

- [1] Автоматы. Сборник статей / Под ред. К.Э. Шеннона и Дж. Маккарти. Пер. с англ. под ред. А.А. Ляпунова. М.: Изд. иностр. лит., 1956.
- [2] Лупанов О.Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: МГУ, 1984.
- [3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.
- [4] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
- [5] Уосермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. М.: Мир. 1992.

