

# Метод расчета числа пакетов, проходящих через АТМ коммутатор, на основе $Z$ -преобразования

М.В. Симонов, А.Н. Назаров

На построение коммутационных устройств для широкополосных сетей интегрального обслуживания (ШЦСИО) на технологии АТМ существенное влияние оказывают два основных фактора:

- высокая скорость работы коммутатора;
- стохастический характер потоков пакетов АТМ (ячеек), обслуживаемых коммутационной системой.

Перенос пакета АТМ внутри коммутатора от входа к выходу (коммутация) может сочетаться с концентрацией (мультиплексированием) или деконцентрацией (демультиплексированием) трафика пакетов АТМ.

Таким образом, основными функциями коммутационного оборудования в широкополосных сетях интегрального обслуживания являются:

- коммутация;
- концентрация (мультиплексирование);
- деконцентрация (демультиплексирование).

Под термином «коммутация» будем понимать передачу (транспортирование) пакетов АТМ от входящего логического канала коммутатора к исходящему логическому каналу, требующую выбора нужного логического канала из множества исходящих логических каналов.

При этом логический канал характеризуется:

- физическим входом или выходом, определяемым номером физического порта;
- логическим каналом физического порта, определяемым идентификатором виртуального канала и идентификатором виртуального пути.

Для обеспечения коммутации физический вход и идентификаторы входящего виртуального канала и входящего виртуального пути должны соотноситься с физическим выходом и идентификаторами исходящего виртуального канала и исходящего пути.

Таким образом, в коммутационной системе АТМ должны быть реализованы две функции, которые можно условно сравнить с функциями, выполняемыми классическими коммутационными системами.

Первую функцию можно сравнить с пространственной коммутацией.

Второй функцией современных коммутаторов в цифровых сетях является обмен временными интервалами, то есть временная коммутация.

Так как в коммутационных системах АТМ концепция заранее установленного временного интервала отсутствует, то при одновременном соревновании ячеек двух и более логических каналов за один временной интервал, естественно, возникает ситуация состязания. Она может быть решена путем организации очередей из пакетов АТМ. Поэтому организация и ведение очередей является второй важнейшей функцией коммутаторов АТМ.

Если количество входов превышает количество выходов, то информация мультиплексируется в меньшее количество выходов.

При технологии АТМ разница между мультиплексированием и концентрацией достаточно условна. При использовании термина «концентрация» подчеркивается, что число выходов коммутационного устройства меньше числа входов. При использовании термина «мультиплексирование» акцент ставится на статистическое слияние потоков ячеек от различных пользователей в единый поток пакетов АТМ в цифровом тракте.

Если при пространственной коммутации может возникать эффект блокировок, приводящий к потере пакетов, то основными характе-

ристиками, которые определяются организацией и дисциплиной ведения очередей, является производительность коммутатора, то есть пропускная способность, временные задержки и вариации задержки пакетов, а также потеря пакетов из-за конечной емкости буферных устройств.

Статистическое мультиплексирование множества логических каналов, транспортирующих трафик различных пользователей в едином цифровом тракте, повышает эффективность использования цифровых трактов, а перенос всех видов информации в виде пакетов АТМ фиксированной длины делает коммутационное оборудование ПЩСИО однородным.

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  в выходной очереди находилось  $q_0$  пакетов АТМ. Пусть пакеты, находящиеся в очереди, пронумерованы по порядку, начиная с «головы» очереди, номерами  $1, 2, \dots, q_0$ . Предположим, кроме того, что началось обслуживание пакета с номером 1. Обслуживание производится в порядке поступления по правилу «первым пришел — первым обслужен».

За время передачи пакета в очередь могут поступить пакеты с номерами  $q_0 + 1, q_0 + 2$  и т.д. Обозначим через  $q_n$  число пакетов, находящихся в очереди в момент окончания обслуживания  $n$ -го пакета, и через  $\xi_n$  — число требований, поступивших за время передачи в линию пакета с номером  $n$ . Величины  $q_n$  и  $\xi_n$  являются случайными величинами. Очевидно, что  $\xi_1, \xi_2, \dots$  независимы и одинаково распределены. Более того,  $\xi_n$  не зависит от  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ .

Последовательность  $\{q_n\}$  может быть задана соотношением [1]

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + \xi_{n+1}, & q_n > 0, \\ \xi_{n+1}, & q_n = 0. \end{cases}$$

Первое равенство для  $q_n > 0$  означает, что очередь, оставленная при передаче  $(n + 1)$ -го пакета, складывается из очереди из  $n$  пакетов, уменьшенной на единицу (пакет с номером  $n + 1$ ) и увеличенную на число пакетов, которые поступят за время передачи  $(n + 1)$ -го пакета. Равенство для  $q_n = 0$  основывается на соображении, что если  $(n + 1)$ -й пакет застает выход свободным, то очередь, которую он оставляет, состоит только из тех пакетов  $\xi_{n+1}$ , которые поступят за время его передачи.

При использовании ступенчатой функции

$$u(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0) \\ 0, & (x \leq 0) \end{cases}$$

оба равенства для  $q_{n+1}$  могут быть объединены в одно [1]

$$q_{n+1} = q_n - u(q_n) + \xi_{n+1}. \quad (1)$$

Чтобы найти стационарное распределение длины очереди, обозначим производящую функцию случайной величины  $q_{n+1}$  через  $Q(Z) = M[Z^{q_{n+1}}]$ . В этом случае, согласно соотношению (1) и так как  $\xi_{n+1}$  не зависит от  $q_n$

$$Q(Z) = M[Z^{q_n - u(q_n) + \xi_{n+1}}] = P(Z)M[Z^{q_n - u(q_n)}], \quad (2)$$

где  $P(Z)$  — производящая функция случайной величины  $\xi_{n+1}$  [1].

При нагрузке в системе меньшей 1 существует стационарное распределение вероятностей  $\{\pi_k\}$ , то есть существует предел на интервале наблюдения  $T$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{q_n = k\} = \pi_k.$$

Вероятности  $\pi_k$  имеют наглядную интерпретацию, а именно: среди большого числа обслуженных требований доля тех, которые оставляют позади себя очередь длиной  $k$ , равна  $\pi_k$ . Более того, если случайная величина  $q_0$  выбрана в соответствии со стационарным распределением вероятностей  $\{\pi_k\}$ , то

$$P\{q_n = k\} = \pi_k$$

для всех  $n$ . Это значит, что процесс, описывающий поведение очереди, стационарен.

Чтобы определить стационарное распределение вероятностей, воспользуемся основным соотношением (1) и свойствами случайных величин  $\xi_n$ . В стационарном режиме вероятностные свойства величин  $q_{n+1}$  и  $q_n$  одинаковы. Следовательно, в частности,  $M[q_n] = M[q_{n+1}]$ , и, проведя операцию математического ожидания выражения (1), получаем

$$M[u(q_n)] = M[\xi_{n+1}] = P'(1). \quad (3)$$

Но  $M[u(q_n)]$  численно совпадает с  $P\{q_n \neq 0\}$ , так что в случае стационарной очереди вероятность события, что пакет, покидающий систему оставит обслуживающий прибор свободным (или вероятность того, что в момент освобождения обслуживающего прибора к нему не будет очереди), равна  $\pi_0$ .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} M[Z^{q_n - u(q_n)}] &= \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n Z^{n-1} = \pi_0 + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n Z^n}{Z} = \\ &= \pi_0 + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n Z^n - \pi_0}{Z} = [1 - P'(1)] + \frac{Q(Z) - [1 - P'(1)]}{Z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если данное выражение подставить в (2) и произвести элементарное преобразование, то получим  $Z$ -преобразование числа пакетов АТМ в системе

$$Q(Z) = [1 - P'_\xi(1)] \frac{(1 - Z)P(Z)}{P(Z) - Z}. \quad (5)$$

Введем следующие обозначения:

$$A(Z) = (1 - Z)P(Z); \quad \lim_{Z \rightarrow 1} A(Z) = A(1) = 0; \quad (6)$$

$$B(Z) = P(Z) - Z; \quad \lim_{Z \rightarrow 1} B(Z) = B(1) = 0. \quad (7)$$

В этом случае

$$A'(Z) = (1 - Z)P'(Z) - P(Z); \quad \lim_{Z \rightarrow 1} A'(Z) = A'(1) = -1; \quad (8)$$

$$B'(Z) = P'(Z) - 1; \quad \lim_{Z \rightarrow 1} B'(Z) = B'(1) = -[1 - P'(1)]. \quad (9)$$

В этом случае первая производная по  $Z$  от  $Q(Z)$  имеет вид

$$Q'(Z) = [1 - P'(1)] \frac{A'(Z)B(Z) - A(Z)B'(Z)}{[B(Z)]^2}. \quad (10)$$

Первый начальный момент количества пакетов АТМ в системе [1] может быть получен из (10) как предел при  $Z \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} M[q] = q_1 &= \lim_{Z \rightarrow 1} Q'(Z) = \\ &= \lim_{Z \rightarrow 1} [1 - P'(1)] \frac{A'(Z)B(Z) - A(Z)B'(Z)}{[B(Z)]^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Однако при подстановке найденных соотношений (6), (7), (8) и (9) в (11), получаем неопределенность типа 0/0. Раскрывая данную неопределенность с помощью правила Лопиталя, получаем

$$M[q] = q_1 = Q'(1) = P'(1) + \frac{1}{2} \frac{P''(1)}{1 - P'(1)}. \quad (12)$$

Аналогично может быть найдена и вторая производная по  $Z$  от  $Q(Z)$  и ее предел при  $Z \rightarrow 1$ .

$$Q''(1) = \frac{1}{3} \frac{P'''(1)}{1 - P'(1)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{P''(1)}{1 - P'(1)} \right]^2 + P''(1) + \frac{P'(1)P''(1)}{1 - P'(1)}. \quad (13)$$

Второй начальный момент количества ячеек может быть найден как сумма первой и второй производных от  $Q(Z)$  при  $Z \rightarrow 1$ .

$$\begin{aligned} q_2 = Q''(1) + Q'(1) &= \frac{1}{3} \frac{P'''(1)}{1 - P'(1)} + \frac{1}{2} \left[ \frac{P''(1)}{1 - P'(1)} \right]^2 + \\ &+ P''(1) + \frac{P'(1)P''(1)}{1 - P'(1)} + P'(1) + \frac{1}{2} \frac{P''(1)}{1 - P'(1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из соотношений (12) и (14) может быть получено искомое соотношение для дисперсии числа ячеек в системе

$$\begin{aligned} D[q] = q_2 - q_1^2 &= \frac{1}{3} \frac{P'''(1)}{1 - P'(1)} + \frac{1}{4} \left[ \frac{P''(1)}{1 - P'(1)} \right]^2 + \\ &+ P''(1)[1 - P'(1)] + \frac{1}{2} \frac{P''(1)[3 - 2P'(1)]}{1 - P'(1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом при моделировании процесса прохождения ячеек в АТМ коммутаторе с помощью формализма производящей функции

разработан общий метод на основе  $Z$ -преобразований, с помощью которого для конкретных производящих функций могут быть получены аналитические соотношения для среднего значения и дисперсии числа ячеек, находящихся в системе для стационарного режима. Данные соотношения позволяют производить расчет необходимой емкости буферных устройств и времени задержки в них ячеек АТМ. При достаточно общих предположениях могут быть получены расчетные соотношения для концентраторов, мультиплексоров и сетевого коммутационного оборудования АТМ.

### Список литературы

- [1] 1 Назаров А.Н., Симонов М.В. АТМ: технология высокоскоростных сетей. М.: Эко-Трендз, 1997.

