О выразимости константных автоматов

А. А. Летуновский

Рассматриваются задачи выразимости и А-выразимости константных автоматных функций относительно суперпозиции. Показано, что нет алгоритма определения по конечному базису мощности множества выразимых (А-выразимых) через него констант. Приводятся достаточные условия, при которых мощности множества выразимых (А-выразимых) констант конечны, и достаточные условия, при которых мощности множества выразимых (А-выразимых) констант бесконечны.

Введение

Известно, что решение задачи о полноте относительно операции суперпозиции и обратной связи для систем автоматных функций наталкивается на существенные трудности. Так в работе [1] установлена континуальность всякой критериальной системы для этой задачи, в работе [2] алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте для конечных систем автоматных функций, а в работе [3] — алгоритмическая неразрешимость задачи об А-полноте. Вместе с тем, для систем автоматов, содержащих все истинностные функции, задача о полноте [4, 5] и А-полноте [6] алгоритмически разрешимы.

Для автоматов с операцией суперпозиции наибольший интерес представляет задача выразимости, так как все полные системы в этой алгебре бесконечны. Из работы Кратко М. И. [2] следует, что задача выразимости автоматных функций, вообще говоря, алгоритмически неразрешима. В данной работе изучается задача определения мощности множества константных автоматных функций, полученных суперпозициями конечного базиса.

1. Основные результаты

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, функции вида $g : E_k^n \to E_k$ называются функциями k-значной логики, их множество обозначается через P_k. Пусть E_k^∞ — множество всех сверхслов вида $a(1)a(2)\ldots$, где $a(j) \in E_k$, $j = 1, 2, \ldots$, E_k^τ — множество всех слов $a(1)\ldots a(\tau)$ длины τ. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество натуральных чисел. Пусть

$$f : (E_k^\infty)^n \to E_k^\infty \text{ —}$$

автоматная функция (a-функция), то есть она задается рекуррентно соотношениями (1)

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1, \ldots, a_n), \\ b(t) = \psi(q(t), a_1, \ldots, a_n), \end{cases} \tag{1}$$

где $q \in Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_r\}$. Параметр q называется состоянием a-функции f, q_1 — ее начальным состоянием, буквы $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и b называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\ldots$ и $b(1)b(2)\ldots$ — входным и выходным сверхсловами, соответственно. Функции φ и ψ называются функцией переходов и выходной функцией, соответственно, а шестерка

$$(E_k^n, Q, E_k, \varphi, \psi, q_1) \text{ —}$$

автоматом, порождающим функцию f. Класс всех a-функций обозначим через P.

В этом классе обычным образом введем операции суперпозиции. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [7]:

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1), \\ (\varepsilon f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n), \\ (\omega f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ (\delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}), \\ (f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots x_{m+n-1}). \end{cases}$$

Пусть $M \subseteq P$, обозначим через $[M]$ множество a-функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции. Пусть $\tau \in \mathbb{N}$, f — некоторая автоматная функция, обозначим через

$$f^\tau : (E_k^\tau)^n \to (E_k^\tau)$$

ограничение этой функции на множество слов длины τ. Скажем, что a-функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ τ-равны, если $f^\tau = g^\tau$. Обозначим через $[M]_\tau$ множество всех a-функций, τ-равных получающимся из M с помощью суперпозиции, пусть

$$[M]_A = \bigcap_{\tau=1}^{\infty} [M]_\tau,$$

назовем $[M]_A$ A-замыканием множества M.

Автоматная функция f называется константной, если для любого входного сверхслова $a(1)a(2)\ldots$ ее выходное сверхслово — это одно и то же периодическое сверхслово

$$f(a(1)a(2)\ldots) \equiv b(1)b(2)\ldots = \beta.$$

Когда это не приводит к недоразумению, мы будем отождествлять константную автоматную функцию f с ее выходным сверхсловом и обозначать той же буквой. Класс всех константных автоматных функций обозначим через K, через $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k-1}$ обозначим константные a-функции, выдающие сверхслова $\Gamma_0 = 00\ldots$, $\Gamma_1 = 11\ldots$, $\Gamma_{k-1} = k-1k-1\ldots$, соответственно. Когда это не приводит к недоразумению, будем обозначать через $E_k = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k-1}\}$.

Пусть $K' \subseteq K$, обозначим через $A(K')$ множество сверхслов, которые получаются на выходе автоматной функции A при подаче сверхслов из K', для натурального τ через $K']_\tau$ обозначим множество начал длины τ слов из K'. Если Σ — множество автоматных функций, то определим

$$\Sigma(K') = \bigcup_{A \in \Sigma} A(K').$$

Для множества автоматных функций Σ определим последовательность множеств сверхслов:

$$L_0 = E_k, \;\; L_1(\Sigma) = P_k(L_0 \cup \Sigma(L_0)), \ldots, L_{i+1}(\Sigma) = P_k(L_i \cup \Sigma(L_i)), \ldots,$$

обозначим

$$L(\Sigma) = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i(\Sigma).$$

Здесь L_i — множество констант, получаемых схемами автоматной глубины i.

Для $i \neq j$ через $A_{ij} \subset K$ обозначим подмножество сверхслов $a(1)a(2)\ldots$, у которых $a(i) = a(j)$. Скажем, что автоматная функция A сохраняет множество A_{ij}, если $A(A_{ij}) \subseteq A_{ij}$, в противном случае будем говорить, что автомат отличает моменты времени i и j. Если все автоматные функции из Σ сохраняют множество A_{ij}, то скажем, что Σ сохраняет множество A_{ij}, в противном случае будем говорить, что Σ отличает моменты времени i и j.

Для автоматной функции A определим последовательность подмножеств состояний:

$$Q_0 = \{q_1\}, \;\; Q_1 = \{\varphi(q_1, a) | a \in E_k^n\}, \ldots,$$
$$Q_{i+1} = \{\varphi(q_i, a) | q_i \in Q_i, \; a \in E_k^n\}.$$

Это периодическая последовательность, пусть d — ее предпериод, а ρ_0 — период, $r = Q(A)$ — число состояний автомата A, тогда $\rho_0 < 2^r$, $d < 2^r$. Обозначим через $\rho(A) = d + \rho_0$, через

$$\rho(\Sigma) = \prod_{A \in \Sigma} \rho(A), \quad Q(\Sigma) = \prod_{A \in \Sigma} Q(A).$$

Мы будем рассматривать следующие задачи: по конечному базису автоматных функций Σ проверить, верно ли, что

$$|[\Sigma] \cap K| = \infty, \quad |[\Sigma]_A \cap K| = \infty,$$

которые назовем задачей проверки бесконечности множества выразимых (А-выразимых) констант. Имеют место

Теорема 1. *Задача бесконечности множества выразимых констант алгоритмически неразрешима.*

Теорема 2. *Задача бесконечности множества А-выразимых констант алгоритмически неразрешима.*

Теорема 3. *Пусть для некоторых* $i, j < \rho(\Sigma)$, $s = j \cdot |Q(\Sigma)|$ Σ *сохраняет множества* $A_{i,i+j+t}$, $t = 0, \ldots, s$, *тогда* $|[\Sigma] \cap K| < \infty$.

Теорема 4. *Пусть* $\Sigma \supseteq P_k$ *и для всех* $i, j < \rho(\Sigma)$, $i \neq j$ Σ *отличает моменты времени* i *и* j, *тогда* $|[\Sigma] \cap K| = \infty$ *и* $|[\Sigma] \cap K|_A = \infty$.

2. Доказательства теорем 1 и 2

Однородная система продукций Поста — это тройка $T = < D, V, w >$, где $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\}$ — конечный алфавит, $V : D \to D^*$, $R_i = V(d_i)$, $w \geqslant 1$ — натуральное число. Будем говорить, что система продукций T применима к слову

$$\xi = d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_l} \in D^*$$

при $l \geqslant w$, называть слово $\xi' \in D^*$ результатом применения T к ξ и обозначать $\xi' = T(\xi)$, если $\xi' = d_{i_{w+1}} \ldots d_{i_l} R_{i_1}$.

Если $l < w$, то скажем, что система продукций T неприменима к слову ξ. Рассмотрим последовательность

$$\xi_1, \xi_2, \ldots,$$

такую что $\xi_1 = \xi$, и $\xi_{i+1} = T(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Если эта последовательность конечна, то будем говорить, что при применении к слову ξ система T останавливается через конечное число шагов. Для каждой однородной системы продукций Поста T можно поставить вопрос о разрешимости «проблемы остановки»: существует ли алгоритм, который по любому наперед заданному слову ξ устанавливает, конечно или бесконечно множество T-продукций слова ξ.

Лемма 1 ([7]). *Существует система однородных продукций Поста* $T = \ < D, V, w >$, *для которой не существует алгоритма, решающего проблему остановки.*

Зафиксируем систему $T = \ < D, V, w >$ продукций Поста с неразрешимой проблемой остановки. Пусть $k = |D|$, поставим в соответствие букве $d_i \in D$ слово $\tilde{d_i} \in E_2^{k+2}$ вида

$$\tilde{d_i} = \underbrace{1\,1 \ldots 1}_{i}\underbrace{0 \ldots 0}_{k-i+1}1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

На разных словах $\alpha(1)\alpha(2)\ldots\alpha(s)$ и $\beta(1)\beta(2)\ldots\beta(s)$ одинаковой длины s определим числовую функцию

$$t(\alpha,\beta)=\min(i|(\alpha(i)\neq\beta(i)).$$

Можно считать, что эта функция естественным образом доопределена на разные сверхслова

$$t:(E_2^{\infty})^2\to\mathbb{N}.$$

Через $\alpha]_t$ будем обозначать начало длины t сверхслова α. Сверхслово

$$\beta=\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{n(k+2)}\tilde d_i\tilde d_{j_1}\ldots\tilde d_{j_w}\ldots\tilde d_{j_l}\Gamma_0,$$

начинающееся с серии нулей длины, кратной $k+2$, и слова $\tilde d_i$, и заканчивающееся сверхсловом из нулей, назовем *правильным* сверхсловом i-того типа. Обозначим множество *правильных* сверхслов i-того типа через M_i. Множество сверхслов вида

$$\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{n(k+2)}\tilde d_i\tilde d_{j_1}\tilde d_{j_2}\ldots$$

обозначим через S_i. Для сверхслов $\gamma\notin M_i\cup S_i\cup\{\Gamma_0\}$ определим числовую функцию

$$c_i:E_2^{\infty}\to\mathbb{N},\quad c_i(\gamma)=\max\left\{t(\beta,\gamma)|\beta\in M_i\cup S_i\cup\{\Gamma_0\}\right\},$$

обозначим через $P_i(\gamma)=\gamma]_{c(\gamma)-1}=\beta]_{c(\gamma)-1}$ начало того сверхслова $\beta\in M_i\cup S_i\cup\{\Gamma_0\}$, на котором этот максимум достигается.

Определим функции $g_i(x\alpha)$ $i=1,\ldots,k$ и $g_\xi(x\alpha)$, $x\in E_2$, $\alpha\in E_2^{\infty}$ соотношениями а”–г”. Для правильного сверхслова i-го типа β

а”) $g_i(x\beta)=x\,\underbrace{0\ldots\ldots0}_{(n+w)(k+2)}\,\tilde d_{j_w}\ldots\tilde d_{j_l}\tilde R_i\Gamma_0\quad$ при $l\geqslant w-1$,

б”) $g_i(x\beta)=x\Gamma_0\quad$ при $l<w-1$,

в”) $g_i(x\Gamma_0)=x\Gamma_0$,

г”) $g_i(x\gamma)=xg_i(P_i(\gamma))\Gamma_1\quad$ при $\gamma\neq\beta$.

$$g_\xi(x\Gamma_0)=x\tilde\xi\Gamma_0,\quad g_\xi(x\alpha)=x(\tilde\xi\Gamma_0]_{t(\Gamma_0,\alpha)-1})\Gamma_1,\ \text{при } \alpha\neq\Gamma_0.$$

Лемма 2. *Пусть* $\Sigma'_\xi = \{\Gamma_0, g_i(x),\ i = 1, \ldots, k,\ g_\xi(x)\}$, *тогда множества выразимых относительно суперпозиции констант конечно точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *конечна.*

Доказательство достаточности. Пусть последовательность продукций слова ξ есть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots$$

и она бесконечна, пусть d_{is} — первая буква слова ξ_s. Рассмотрим последовательность константных автоматов:

$$\alpha_1 = \Gamma_0,\ \ \alpha_2 = g_{i1}(\alpha_1),\ \ \alpha_3 = g_{i2}(\alpha_2), \ldots, \alpha_{j+1} = g_{ij}(\alpha_j), \ldots$$

По построению функций g_i для всех s, j выполнено: $\alpha_s \neq \alpha_j$, значит, множество констант $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ бесконечно.

Необходимость. Пусть последовательность продукций слова ξ конечна и равна $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, и пусть d_{ij} — первая буква слова ξ_j. Заметим, что все автоматы системы Σ'_ξ одноместные, и все схемы, составленные из них, имеют вид одной цепочки. Кроме Γ_0, все они имеют в начальном состоянии тождественную выходную функцию. Если в схеме нет автомата Γ_0, то схема имеет в начальном состоянии тождественную выходную функцию, а не константу. Такими схемами константных a-функций получить нельзя.

Если в схеме есть автомат Γ_0, но нет g_ξ, то можно считать, что он стоит в начале цепочки, и других автоматов Γ_0 в схеме нет. Все автоматы g_i по построению таковы, что $g_i(\Gamma_0) = \Gamma_0$. Такими схемами можно получить лишь Γ_0.

Наконец, пусть в схеме есть автомат Γ_0 и автомат g_ξ. Можно считать, что Γ_0 стоит в начале цепочки, и других автоматов вида Γ_0 в схеме нет. Так как $g_i(\Gamma_0) = \Gamma_0$, то можно сразу считать, что выход Γ_0 непосредственно соединен со входом g_ξ. Схема

$$g_{is}(\ldots g_{i2}(g_{i1}(g_\xi(\Gamma_0)))\ldots)$$

последовательно преобразует константу Γ_0 следующим образом:

Если функции, стоящие ниже g_ξ, соответствуют продукциям, то получается снова константа Γ_0. Если последовательность стоящих ниже g_ξ функций такова, что g_j неправильно применяется к сверхслову, начинающемуся с $\tilde{d}_i$, то имеем

$$g_j(x\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{nw(k+2)}\tilde{d}_i\ldots\Gamma_0) = x\underbrace{00\ldots0}_{l}\Gamma_1 = \delta_l, \quad \delta_l \notin M_i \cup S_i \cup \{\Gamma_0\},$$

где l не кратно $k+2$ и не превосходит $sw(k+2)$. Множество слов, у которых с момента l встречаются лишь единицы, сохраняется всеми автоматами из $\Sigma_\xi \backslash \Gamma_0$.

Таким образом, мощность множества получаемых констант не превосходит $2^{sw(k+2)}$. Лемма доказана.

Теорема 1 непосредственно следует из лемм 1, 2.

Лемма 3. *Пусть* $\Sigma'_\xi = \{\Gamma_0, g_i(x),\ i = 1, \ldots, k,\ g_\xi(x)\}$*, тогда множество A-выразимых через* Σ'_ξ *констант конечно точно тогда, когда последовательность продукций слова* ξ *конечна.*

Доказательство. Будем использовать конструкцию леммы 4. Из бесконечности выразимых через Σ'_ξ констант прямо следует бесконечность А-выразимых через Σ'_ξ констант. Заметим, что любой автомат, реализуемый схемами в Σ'_ξ, начиная с момента $sw(k+2)$ выдает либо Γ_0, либо Γ_1. Значит, А-выразимых констант не более, чем $2^{sw(k+2)}$. Лемма доказана.

Теорема 2 непосредственно следует из лемм 1, 3.

3. Доказательства теорем 3, 4

Доказательство теоремы 3.

Без ограничения общности можно считать, что система Σ состоит из одного элемента A. Пусть для некоторых $i, j < \rho(A)$ множества $A_{i,i+j+t}$, $t = 0, \ldots, s$ сохраняются автоматом A. Очевидно, что $L_0 = \{00\ldots, 11\ldots\}$ содержится в каждом из множеств A_{ij} и для всех $a \in L_0$ выполнено $\alpha(i) = \alpha(i+j), \ldots, \alpha(i+s) = \alpha(i+s+j)$. Сверхслова $a \in L_0$ периодичны с периодом и предпериодом j.

Пусть все слова из $L_p(A)$ имеют период и предпериод j, покажем, что это свойство выполнено и для $L_{p+1}(A)$. Рассмотрим в $L_p(A)$ сверхслово $\alpha = a_1 a_1 \ldots$, где $|a_1| = j$. Подадим α на автомат A, находящийся в начальном состоянии, последовательность

$q_1, q_2 = \varphi(q_1, a_1)$, $q_3 = \varphi(q_2, a_1), \dots$ содержит не более r состояний. Значит выходное сверхслово $A(\alpha)$ будет периодично с периодом и предпериодом в сумме не большим jr. По свойству сохранения множеств

$$A_{i,i+j+t}, \quad t = 0, \dots, s,$$

$A(\alpha)$ будет еще периодично с периодом j и предпериодом j на начальном куске длины jr, значит $A(\alpha)$ периодично с периодом j. После применения истинностных функций к сверхсловам с одинаковыми периодами и предпериодами их период и предпериод не изменяется, значит, $L_{p+1}(A)$, а следовательно и

$$L(A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i(A)$$

состоит из слов с периодом j и предпериодом j. Значит $L(A) = |[\Sigma] \cap K| < \infty$.

Теорема 3 доказана.

Имеют место леммы 4, 5.

Лемма 4. *Пусть для всех $i \neq j$, $i, j \leqslant \tau$ моменты времени i и j отличимы автоматом A, тогда $L(A)]_\tau = E_k^\tau$.*

Лемма 5. *Пусть для всех $i \neq j$, $i, j < \rho(A)$ автомат отличает моменты времени i и j, тогда автомат отличает моменты времени i и j для всех $i \neq j$.*

Доказательство теоремы 4 следует из лемм 4, 5.

В самом деле, по лемме 5 имеем, что все моменты $i \neq j$ отличимы, а по лемме 4 — для любого τ выполнено $L(A)]_\tau = E_k^\tau$. Значит $|[\Sigma] \cap K| = \infty$ и $|[\Sigma] \cap K|_A = \infty$.

Доказательство леммы 4.

Доказывать будем по индукции.

1) При $\tau = 2$ у нас есть константы $00\dots, 11\dots, \dots, (k-1)(k-1)\dots$ Так как первые два момента времени отличимы, то мы можем получить некоторую константу $ab\dots$, $a \neq b$. Ее с помощью $h(x) \in P_k$, такой что $h(a) = c$, $h(b) = d$ можно преобразовать в константу $cd\dots$

при всех c и d, а значит на начале длины 2 есть все константы длины 2, или $L(A)]_2 = E_k^2$.

2) Покажем, что если $L(A)]_\tau = E_k^\tau$, то выполнено $L(A)]_{\tau+1} = E_k^{\tau+1}$.

У нас есть все константы до длины τ, и $\tau + 1$-й момент времени отличим от всех предыдущих t-тых при всех $t \leqslant \tau$. Покажем, что $|L(A)]_{\tau+1}| > k^\tau$. В самом деле, если это не так, то продолжение $x_{\tau+1}$ константы $x_1 x_2 \dots x_\tau \dots$ на $\tau + 1$ момент функционально зависит от ее значений в предыдущие τ моментов, и есть функция $h(x_1, x_2, \dots, x_\tau) = x_{\tau+1}$, такая что для любых двух наборов $y_1 y_2 \dots y_\tau, z_1 z_2 \dots z_\tau \in E_k^\tau$ и любой функции $W(y, z) \in P_k$ будет выполнено (2)

$$h(W(y_1, z_1), W(y_2, z_2), \dots, W(y_\tau, z_\tau)) = \\ = W(h(y_1, y_2, \dots, y_\tau), h(z_1, z_2, \dots, z_\tau)). \quad (2)$$

При $W \equiv 0$ получаем, что $h(0, 0, \dots, 0) = 0$, при $W \equiv p$ получаем, что $h(p, p, \dots, p) = p$.

Предположим, что $h(x_1, x_2, \dots, x_\tau) = x_{\tau+1}$ существенно зависит от x_1, тогда найдутся наборы $(a, c_2, \dots, c_\tau)$, $(b, c_2, \dots, c_\tau)$, $a \neq b$, такие что

$$h(a, c_2, \dots, c_\tau) = c \neq d = h(b, c_2, \dots, c_\tau).$$

Для функции $W_0(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$ соотношение (2) даст

$$h(1, 0, \dots, 0) = h(W_0(a, b), W_0(c_2, c_2), \dots, W_0(c_\tau, c_\tau)) = \\ = W_0(h(a, c_2, \dots, c_\tau), h(b, c_2, \dots, c_\tau)) = W_0(c, d) = 1.$$

Если предположить, что $h(x_1, x_2, \dots, x_\tau) = x_{\tau+1}$ зависит существенно от двух переменных, то получим, без ограничения общности,

$$h(1, 0, \dots, 0) = 1, \quad h(0, 1, 0, \dots, 0) = 1.$$

Если далее взять $W_1(x, y) = \max(x, y)$, $W_2(x, y) = x + y$, то получим противоречивые равенства:

$$h(1, 1, 0, \dots, 0) = h(W_1(1, 0), W_1(0, 1), W_1(0, 0), \dots, W_1(0, 0)) = \\ = W_1(h(1, 0, \dots, 0), h(0, 1, 0, \dots, 0)) = W_1(1, 1) = 1,$$

$$h(1,1,0,\dots,0) = h(W_2(1,0), W_2(0,1), W_2(0,0), \dots, W_2(0,0)) = \\ = W_2(h(1,0,\dots,0), h(0,1,0,\dots,0)) = W_2(1,1) = 2.$$

Следовательно, $h(x_1, x_2, \dots, x_\tau) = x_{\tau+1}$ — функция одного переменного, сохраняющая все константы, то есть $h(x_1, x_2, \dots, x_\tau) = x_i$ при некотором i, что означает неотличимость моментов i и τ и противоречит условию леммы. Значит $|L(A)]_{\tau+1}| > k^\tau$ и найдутся наборы $(c_1, c_2, \dots, c_\tau, c)$, $(c_1, c_2, \dots, c_\tau, d) \in L(A)]_{\tau+1}$, из которых с помощью функции W_0 можно получить набор $(0, 0, \dots, 1)$ длины $\tau+1$, складывая который с другими наборами получим все наборы длины $\tau + 1$. $L(A)]_{\tau+1} = E_k^{\tau+1}$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5.

Пусть моменты i и j отличимы, значит, найдутся входные слова α, β, $|\alpha| = i$, $|\beta| = j - 1$ и входная буква a, такие что

$$q_i = \varphi(q_1, \alpha), \;\; q_j = \varphi(q_1, \alpha a \beta), \;\; \psi(q_i, a) \neq \psi(q_j, a), \quad q_i \in Q_i, \;\; q_j \in Q_j.$$

По построению $\rho = \rho(A)$ для $d_0 < i < j < \rho$ имеем $Q_i = Q_{i+\rho}$, $Q_j = Q_{j+\rho}$,

$$Q_{i+\rho} = Q_{i+2\rho}, \;\; Q_{j+\rho} = Q_{j+2\rho}, \dots,$$

можно считать, что $|\alpha| = i + l\rho$, $|\beta| = j + l\rho$, откуда следует, что моменты $i + l_1\rho$ и $j + l_2\rho$ при $i < j$ отличимы. Лемма 5 доказана.

Автор выражает благодарность академику Кудрявцеву В. Б. и проф. Бабину Д. Н. за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Кудрявцев В. Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // ДАН СССР. Т. 151, № 3. 1963. С. 493–496.

[2] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. 1964. Т. 155, № 1. С. 35–37.

[3] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.д.-функций // Математические заметки. Т. 12, № 6. 1972. С. 687–697.

[4] Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. 1992. Т. 4, вып. 4. С. 41–56.

[5] Бабин Д. Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // ДАН. Т. 367, № 4. 1999. С. 439–441.

[6] Буевич В. А. Условия А-полноты для автоматов. М.: Изд-во МГУ, 1986.

[7] Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразие Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.

[8] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.