

Об одной алгебре булевых векторов с покомпонентными операциями

К. А. Казак

Введение

Рассматриваемая в данной работе проблема возникла при исследовании формальных моделей изображений и процессов их обработки. Имеют место различные подходы к таким исследованиям: от построений частных моделей для каждой практической задачи до более глубоких теоретических исследований чисто математических моделей. В частности, в работе [3] рассматривались растровые двухцветные (черно-белые) изображения как элементы универсальной алгебры с поточечными логическими операциями типа пересечения, объединения и дополнения. В настоящей работе рассматривается аналогичная алгебраическая структура на множестве многомерных булевых векторов. Заметим, что переход от растровых изображений к многомерным векторам не сузил задачу, рассматриваемую в работе [3], так как любое растровое изображение можно задать с помощью некоторого вектора. Такой переход позволил получить новые результаты в исследуемой проблеме. В частности, были получены исчерпывающие ответы на вопросы о возможности получения требуемого изображения из заданных при помощи операций данной алгебраической структуры, а также о нахождении базисного набора изображений для заданного класса. Отметим, что эти вопросы представляют собой частный случай проблем полноты и выразимости [2] для данной универсальной алгебры.

Перейдем к точному описанию изучаемой алгебраической структуры. Рассмотрим множество булевых векторов $E_2^n = \{(a^1, \dots, a^n) \mid a^i \in E_2\}$, где $n \geq 2$, $E_2 = \{0, 1\}$. Определим на множестве E_2^n опе-

рации $\Omega = \{\widehat{\&}, \widehat{\vee}, \widehat{\neg}\}$ — покомпонентные аналоги конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Пусть векторы $a, b \in E_2^n$, тогда

$$\begin{aligned} a \widehat{\&} b &= (a^1 \& b^1, \dots, a^n \& b^n), \\ a \widehat{\vee} b &= (a^1 \vee b^1, \dots, a^n \vee b^n), \\ \widehat{\neg} a &= (\neg a^1, \dots, \neg a^n). \end{aligned}$$

В соответствии с работой [3] множество E_2^n с операциями Ω будем называть алгеброй $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

Замыкание системы векторов $\{f_1, \dots, f_p\} \subseteq E_2^n$ будем обозначать через $[f_1, \dots, f_p]_\Omega$. Отметим, что полнота в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ данной системы означает, что $[f_1, \dots, f_p]_\Omega = E_2^n$. Очевидно, что множество $[f_1, \dots, f_p]_\Omega$ является подалгеброй алгебры $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

Примером полной в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ системы векторов является множество $\{e_1, \dots, e_n\} \subset E_2^n$, где $e_i^j = 1$, если $j = i$, и $e_i^j = 0$ в противном случае. Нетрудно заметить, что любой вектор $f \in E_2^n$ выражается через данную систему:

$$f = \widehat{\vee}_{i: f^i=1} e_i,$$

если f — ненулевой вектор, нулевой вектор получается отрицанием единичного.

1. Полнота системы векторов. Базисы

Рассмотрим систему векторов $\{f_1, \dots, f_p\} \subseteq E_2^n$. Построим матрицу $\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p}$ размера $n \times p$, столбцами которой являются векторы данной системы:

$$\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p} = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_p^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^n & \dots & f_p^n \end{pmatrix}.$$

Определение. *Весом* системы векторов $\{f_1, \dots, f_p\}$ называется количество классов эквивалентности в строках матрицы $\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p}$ по отношению равенства строк матрицы. Вес данной системы обозначим через $\omega(f_1, \dots, f_p)$.

Отметим, что $\omega(f_1, \dots, f_p) = n$ тогда и только тогда, когда в матрице $\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p}$ все строки различны.

Теорема 1 (Критерий полноты).

$$[f_1, \dots, f_p]_{\Omega} = E_2^n \iff \omega(f_1, \dots, f_p) = n.$$

Доказательство. Необходимость. Докажем от противного. Имеем, что $[f_1, \dots, f_p]_{\Omega} = E_2^n$. Предположим, что $\omega(f_1, \dots, f_p) \neq n$, тогда в матрице $\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p}$ найдутся две одинаковые строки. Пусть в матрице $\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p}$ совпадают i -ая и j -ая строки, тогда $f_l^i = f_l^j$ для каждого $l = 1, \dots, p$. В силу того, что операции Ω действуют покомпонентно, для любого вектора $g \in [f_1, \dots, f_p]_{\Omega}$ имеем, что $g^i = g^j$. То есть $[f_1, \dots, f_p]_{\Omega} \neq E_2^n$. Получили противоречие.

Достаточность. По условию теоремы имеем, что $\omega(f_1, \dots, f_p) = n$. Для доказательства полноты данной системы, достаточно доказать, что все векторы e_k , где $k = 1, \dots, n$, содержатся в множестве $[f_1, \dots, f_p]_{\Omega}$. Покажем, что каждый вектор e_k можно выразить через систему векторов $\{f_1, \dots, f_p\}$ следующим образом:

$$e_k = \bigwedge_{i=1}^p (f_i)^{f_i^k}, \tag{1}$$

где $(f_i)^{f_i^k} = f_i$, если $f_i^k = 1$, и $(f_i)^{f_i^k} = \neg f_i$, если $f_i^k = 0$. Действительно, вычислим значение выражения (1) в j -ой компоненте:

$$(f_1^j)^{f_1^k} \& \dots \& (f_p^j)^{f_p^k},$$

здесь конъюнкция и отрицание понимаются в обычном смысле. Полученное выражение принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $f_i^j = f_i^k$ для каждого $i = 1, \dots, p$ (см. [1]). То есть когда j -ая и k -ая строки в матрице $\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p}$ совпадают. В силу того, что в матрице $\mathcal{F}_{f_1, \dots, f_p}$ все строки различны, такое возможно тогда и только тогда, когда $j = k$. Таким образом, k -ая компонента выражения (1) равна 1, а остальные компоненты равны 0, то есть выражение (1) равно вектору e_k . Теорема доказана.

Определение. Система векторов $B \subset E_2^n$ называется базисом в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, если

- 1) $[B]_{\Omega} = E_2^n$,
- 2) $\forall B' \subsetneq B \quad [B']_{\Omega} \neq E_2^n$.

Очевидно, что в силу конечности множества E_2^n алгебра $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ всегда имеет базис.

Отметим, что выше был приведен пример полной в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ системы векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$, которая не является базисом, так как для любого $i = 1, \dots, n$ имеем $\omega(\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_i\}) = n$, то есть каждая система векторов $\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_i\}$ полна в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$. Аналогичным образом нетрудно проверить, что системы векторов вида $\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_i\}$ являются базисами в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

Теорема 2 (О спектре мощности базисов).

- 1) Если множество $B \subset E_2^n$ является базисом в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, то

$$\lceil \log_2 n \rceil \leq |B| \leq n - 1.$$

- 2) Для любого целого k из отрезка $[\lceil \log_2 n \rceil, n - 1]$ существует базис $B \subset E_2^n$ в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ такой, что $|B| = k$.

Доказательство. 1) Докажем сначала нижнюю оценку. В силу критерия полноты в матрице \mathcal{F}_B все строки должны быть различны. Строки матрицы \mathcal{F}_B состоят из нулей и единиц и имеют длину $|B|$. Количество всех таких строк равно $2^{|B|}$. Таким образом, так как в матрице \mathcal{F}_B — n строк, то для выполнения критерия полноты необходимо, чтобы выполнялось неравенство $2^{|B|} \geq n$, из которого получаем нижнюю оценку.

Замечание. Приведем пример базиса в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ с мощностью $\lceil \log_2 n \rceil$. Рассмотрим матрицу, строки которой образуют последовательность чисел $0, 1, \dots, n - 1$ в двоичной системе счисления. Обозначим данную матрицу через \mathcal{F}_{\min}^n . Количество столбцов в этой матрице равно количеству двоичных разрядов в числе $n - 1$, то есть равно $\lceil \log_2 n \rceil$. Столбцы матрицы \mathcal{F}_{\min}^n образуют полную в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ систему векторов, так как все строки матрицы различны. В силу того, что мощность данной системы векторов совпадает с нижней оценкой для мощностей базисов в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, данная система векторов является базисом минимальной мощности в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

Доказательство верхней оценки будем вести от противного. Предположим, что существует базис B такой, что $|B| \geq n$. Рассмотрим матрицу \mathcal{F}_B , соответствующую этому базису. Так как B — базис, то

все строки в матрице \mathcal{F}_B различны и, при удалении любого столбца из матрицы \mathcal{F}_B , в полученной матрице найдутся две одинаковые строки. Для каждого столбца выберем ровно одну пару строк, которые совпадают при отбрасывании данного столбца. Рассмотрим граф $G_B = (V_B, E_B)$, где множество вершин V_B соответствует строкам матрицы \mathcal{F}_B , а множество ребер E_B — множеству выбранных пар строк. В силу того, что $|V_B| = n$ и $|E_B| = |B| \geq n$, в графе G_B существует цикл

$$(v_{i_1}, v_{i_2}) (v_{i_2}, v_{i_3}) \dots (v_{i_{k-1}}, v_{i_k}) (v_{i_k}, v_{i_1}).$$

Ребру (v_{i_1}, v_{i_2}) соответствует пара строк в матрице \mathcal{F}_B с номерами i_1 и i_2 , которые отличаются только по некоторой p -ой компоненте, где p — номер столбца, для которого была выбрана данная пара строк. Далее, ребру (v_{i_2}, v_{i_3}) соответствует пара строк с номерами i_2, i_3 , которые отличаются только по некоторой q -ой компоненте, где $q \neq p$ в силу того, что для каждого столбца выбирается ровно одна пара строк. То есть p -ые компоненты строк i_2 и i_3 совпадают и, следовательно, строки i_1, i_3 отличаются по p -ой компоненте. Аналогичным образом, перебирая последующие ребра цикла, будем получать, что в каждой паре строк i_1 и i_t , где $t = 2, \dots, k$, p -ые компоненты различны. В итоге, рассмотрев ребро (v_{i_k}, v_{i_1}) , получим, что в паре строк i_1, i_1 p -ые компоненты также различны. Данное противоречие доказывает справедливость верхней оценки.

Замечание. В качестве примера базиса в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ с максимальной мощностью можно рассмотреть описанные выше системы векторов вида $\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_i\}$, которые являются базисами в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ с мощностью $n - 1$.

2) Рассмотрим систему векторов $B \subset E_2^n$ с матрицей \mathcal{F}_B , где

$$\mathcal{F}_B = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\min}^m & & & 0 \\ & & & 1 \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрица \mathcal{F}_{\min}^m , строки которой — двоичные записи чисел $0, 1, \dots, m - 1$, имеет размер $m \times \lceil \log_2 m \rceil$, где $2 \leq m \leq n$. Следо-

вательно, матрица \mathcal{F}_B имеет размер $n \times (\lceil \log_2 m \rceil + n - m)$. Нетрудно понять, что все строки в матрице \mathcal{F}_B различны и при удалении любого столбца из матрицы \mathcal{F}_B в полученной матрице найдутся две одинаковые строки:

- если удалить один из первых $\lceil \log_2 m \rceil$ столбцов, то в первых m строках полученной матрицы найдутся две одинаковые строки, так как матрица \mathcal{F}_{\min}^m соответствует базису в алгебре $\langle E_2^m, \Omega \rangle$,
- если удалить один из последних $n - m$ столбцов, то среди последних $n - m$ строк полученной матрицы найдется нулевая строка, совпадающая с первой.

Следовательно, система векторов B , соответствующая матрице \mathcal{F}_B , является базисом. При этом $|B| = \lceil \log_2 m \rceil + n - m$.

Таким образом, чтобы доказать теорему, осталось доказать, что для любого целого k из отрезка $[\lceil \log_2 n \rceil, n - 1]$ существует целое число m такое, что $2 \leq m \leq n$ и

$$\lceil \log_2 m \rceil + n - m = k. \quad (3)$$

Преобразуем данное выражение к виду

$$m - \lceil \log_2 m \rceil = n - k,$$

где $1 \leq n - k \leq n - \lceil \log_2 n \rceil$. Заметим, что при увеличении m на единицу значение целочисленной функции $m - \lceil \log_2 m \rceil$ не изменится, если m было степенью двойки, и увеличится на единицу в противном случае. Таким образом, когда m пробегает все значения от 2 до n , данная функция не убывает и принимает все целочисленные значения на отрезке $[1, n - \lceil \log_2 n \rceil]$. То есть для любого значения k , удовлетворяющего условиям теоремы, найдется целое m такое, что $2 \leq m \leq n$ и имеет место равенство (3). Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства данной теоремы можно извлечь следующий метод построения некоторого базиса любой допустимой мощности в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$:

- 1) для заданной мощности k из целочисленного уравнения (3) находим параметр m ,
- 2) по параметру m строим матрицу вида (2), которая соответствует искомому базису в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

2. Базисы из векторов с ограниченной нормой

Рассмотрим множество $V_n(k) = \{f \in E_2^n : \|f\| \leq k\}$, где $k = 1, \dots, n-1$, $\|f\|$ — норма вектора f , определенная как $\|f\| = \sum_{i=1}^n f^i$. Будем рассматривать базисы в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, принадлежащие множеству $V_n(k)$. Найдем минимальные и максимальные мощности таких базисов. Нетрудно понять, что максимальная мощность равна $n-1$ и достигается на базисах вида $\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_i\} \subset V_n(1) \subset V_n(k)$. Обозначим через $\varkappa_n(k)$ минимальную мощность базисов алгебры $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ из множества $V_n(k)$ и оценим ее.

Замечание. В рассмотренной выше матрице \mathcal{F}_{\min}^n , которая соответствует базису в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ минимальной мощности, принадлежащему множеству E_2^n , количество единиц в каждом столбце не превосходит $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Действительно, в каждом столбце количество единиц не превосходит количество нулей и их общее количество в столбце равно n , причем, заметим, что в столбце, соответствующем первому двоичному разряду, количество единиц в точности равно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Таким образом, соответствующий базис минимальной мощности принадлежит множеству $V_n(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$. То есть для оценки величины $\varkappa_n(k)$ имеет смысл рассматривать $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Для нахождения нижней оценки величины $\varkappa_n(k)$ воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. Пусть $A \subset E_2^n$ — некоторая система векторов и вектор $g \in E_2^n$, тогда

$$\omega(A \cup g) \leq \omega(A) + \min(\omega(A), \|g\|, n - \|g\|). \quad (4)$$

Доказательство. Данное неравенство вытекает из того, что при добавлении вектора-столбца g к матрице \mathcal{F}_A каждый класс эквивалентных строк в матрице \mathcal{F}_A разбивается не более чем надвое, а каждая единица вектора g разбивает не более одного класса эквивалентных строк и то же самое можно сказать про каждый ноль вектора g .

Будем строить полную в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ систему векторов, поочередно добавляя к некоторой исходной системе векторы из множества $V_n(k)$. Положим в качестве исходной системы векторов систему, состоящую

из одного произвольного вектора (кроме единичного и нулевого), принадлежащего множеству $V_n(k)$, тогда вес исходной системы будет равен 2. По неравенству (4), вес строящейся системы будет максимально возрасти при добавлении векторов из $V_n(k)$, если мы будем добавлять векторы нормы k ($k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$), и для этих векторов неравенство (4) будет обращаться в равенство. Таким образом, если возрастание веса строящейся системы векторов будет наибольшим, то для построения полной в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ системы, вес которой равен n , нам потребуется минимальное число векторов. Предположим, что найдены векторы нормы k , при построении из которых полной системы в соотношении (4) выполняется равенство. Вычислив количество этих векторов, получим оценку снизу для $\varkappa_n(k)$:

$$\lceil \log_2 k \rceil + \left\lceil \frac{n - 2^{\lceil \log_2 k \rceil}}{k} \right\rceil \leq \varkappa_n(k).$$

Первое слагаемое равно количеству векторов, которые добавлялись к исходной системе вначале, и при добавлении которых вес строящейся системы не превосходил k , то есть, по неравенству (4), имело место экспоненциальное возрастание веса строящейся системы векторов. Второе слагаемое равно количеству векторов, которые добавлялись к строящейся системе после того, как ее вес превысил k и, соответственно, стал возрастать линейно, пока не достиг значения n .

Для нахождения верхней оценки величины $\varkappa_n(k)$ рассмотрим систему векторов $B^k \subset V_n(k)$ с матрицей \mathcal{F}_{B^k} , где

$$\mathcal{F}_{B^k} = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \hat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \hat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k} \\ 0 & & & \hat{\mathcal{F}}_{\min}^r \end{pmatrix}.$$

Матрица $\hat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k}$ получена из матрицы $\mathcal{F}_{\min}^{2k+1}$ удалением первой (нулевой) строки, то есть в $2k$ строках матрицы $\hat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k}$ записана последо-

вательность чисел $1, \dots, 2k$ в двоичной системе счисления. Следовательно, количество единиц в каждом столбце матрицы $\widehat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k}$ не превосходит k . Число r , где $0 \leq r < 2k$, выбирается таким, чтобы число строк в матрице \mathcal{F}_{B^k} было равным n , то есть r равно остатку от деления $n-1$ на $2k$. Если $r = 0$, то матрица $\widehat{\mathcal{F}}_{\min}^r$ отсутствует в представлении матрицы \mathcal{F}_{B^k} . Таким образом, $B^k \subset V_n(k)$. Нетрудно проверить, что система векторов B^k является базисом (проверяется аналогично тому, как это делалось в пункте 2 доказательства теоремы о спектре мощности базисов). Очевидно, что $\varkappa_n(k) \leq |B^k|$. Вычислим мощность базиса B^k .

Количество матриц $\widehat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k}$, вошедших в представление матрицы \mathcal{F}_{B^k} , равно $\lfloor \frac{n-1}{2k} \rfloor$. Отсюда вычислим

$$r = 2k \cdot \left\{ \frac{n-1}{2k} \right\}.$$

Количество столбцов в матрице $\widehat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k}$ равно

$$\lceil \log_2(2k+1) \rceil = \lceil \log_2(k+1) \rceil + 1.$$

Количество столбцов в матрице $\widehat{\mathcal{F}}_{\min}^r$ равно

$$\left\lceil \log_2 \left(2k \left\{ \frac{n-1}{2k} \right\} + 1 \right) \right\rceil.$$

Таким образом, мы вычислили $|B^k|$ и получили верхнюю оценку для величины $\varkappa_n(k)$:

$$\varkappa_n(k) \leq |B^k| = \left(\lceil \log_2(k+1) \rceil + 1 \right) \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2k} \right\rfloor + \left\lceil \log_2 \left(2k \left\{ \frac{n-1}{2k} \right\} + 1 \right) \right\rceil.$$

Данную оценку можно упростить, положив $r = 2k$. Тогда в представлении матрицы \mathcal{F}_{B^k} войдут только $\lfloor \frac{n-1}{2k} \rfloor$ матриц $\widehat{\mathcal{F}}_{\min}^{2k}$. Таким образом,

$$\varkappa_n(k) \leq \left(\lceil \log_2(k+1) \rceil + 1 \right) \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2k} \right\rfloor.$$

Лемма 2. Пусть система векторов $A \cup \{f\}$ полна в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, где $\|f\| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Тогда существует вектор f' , полученный из f заменой некоторого нуля на единицу, то есть $\|f'\| = \|f\| + 1$, такой, что система $A \cup \{f'\}$ является полной.

Доказательство. Предположим противное. Пусть при замене в векторе f любого нуля на единицу полученная система векторов $A \cup \{f'\}$ не полна, то есть в матрице $\mathcal{F}_{A \cup \{f'\}}$ есть две одинаковые строки. Очевидно, что совпасть могут только измененная строка с одной из тех, где в векторе-столбце f была единица. Так как $\|f\| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то в векторе f количество нулей больше количества единиц. Таким образом, найдутся две строки с нулями в векторе-столбце f такие, что при замене этих нулей на единицы данные строки совпадут с одной и той же строкой, в которой в векторе-столбце f была единица. Следовательно, изначально эти строки совпадали, то есть система векторов $A \cup \{f\}$ была не полна. Получили противоречие.

Используя данную лемму, нетрудно показать, что для любого натурального $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ существует полная в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ система векторов и, следовательно, существует базис в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, принадлежащие множеству $\bar{V}_n(k) = V_n(k) \setminus V_n(k-1)$. Для этого возьмем произвольную полную систему из векторов множества $V_n(k)$ и, по лемме, норму каждого вектора этой системы увеличим до k , сохранив при этом полноту системы. В свою очередь легко видеть, что для любого $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ также существует базис в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ из множества $\bar{V}_n(k)$, который может быть получен отрицанием всех векторов некоторого базиса, принадлежащего множеству $\bar{V}_n(n-k)$.

Обозначим через $\hat{\varkappa}_n(k)$, где $k = 1, \dots, n-1$, минимальную мощность базисов, принадлежащих множеству $\bar{V}_n(k)$. Очевидно, что $\hat{\varkappa}_n(k) = \hat{\varkappa}_n(n-k)$.

Утверждение 1. Пусть $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, тогда $\hat{\varkappa}_n(k) = \varkappa_n(k)$.

Доказательство. Очевидно, что $\hat{\varkappa}_n(k) \geq \varkappa_n(k)$ в силу того, что $\bar{V}_n(k) \subset V_n(k)$. Нетрудно понять, что верно и обратное неравенство. Действительно, по предыдущей лемме, существует полная в $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ система векторов мощности $\varkappa_n(k)$, принадлежащая множеству $\bar{V}_n(k)$, которая может быть построена из некоторого базиса минимальной мощности, принадлежащего множеству $V_n(k)$. То есть $\hat{\varkappa}_n(k) \leq \varkappa_n(k)$. Таким образом, утверждение доказано.

3. Подалгебры. Системы образующих

Далее будем рассматривать свойства подалгебр алгебры $\langle E_2^n, \Omega \rangle$, то есть подмножеств $M \subset E_2^n$ таких, что $[M]_\Omega = M$. Системой образующих подалгебры $\langle M, \Omega \rangle$ называется любое множество векторов $C \subseteq M$ такое, что $[C]_\Omega = M$. Очевидно, что $\omega(C) = \omega(M)$, так как операции Ω действуют покомпонентно, то есть разбиение строк на классы эквивалентности в матрицах \mathcal{F}_C и \mathcal{F}_M будет совпадать.

Опишем максимальные подалгебры через их вес. Напомним, что подалгебра $\langle M, \Omega \rangle \subsetneq \langle E_2^n, \Omega \rangle$ называется максимальной (предполной), если для любого вектора $f \in E_2^n \setminus M$ замыкание $[M \cup f]_\Omega = E_2^n$ (см. [2, 4]).

Теорема 3 (Критерий предполноты). *Подалгебра $\langle M, \Omega \rangle$ в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ является максимальной тогда и только тогда, когда $\omega(M) = n - 1$.*

Доказательство. Необходимость. Докажем от противного. Имеем, что подалгебра $\langle M, \Omega \rangle$ максимальна. Предположим, что $\omega(M) \neq n - 1$, следовательно, $\omega(M) < n - 1$. Очевидно, что существует вектор $e_i \notin M$, в противном случае $M = E_2^n$. В силу соотношения (4) имеем, что $\omega(M \cup e_i) \leq n - 1$, то есть подалгебра $\langle M, \Omega \rangle$ не является максимальной. Получили противоречие.

Достаточность. Имеем, что $\omega(M) = n - 1$, следовательно, в матрице \mathcal{F}_M существуют ровно две одинаковые строки. Пусть это строки с номерами i и j . В силу соотношения (1) векторы $(\{e_1, \dots, e_n\} \setminus \{e_i, e_j\}) \cup \{e_i \widehat{\vee} e_j\} \subset M$, то есть множество M содержит все векторы, у которых совпадают i -ая и j -ая компоненты. Рассмотрим произвольный вектор $f \in E_2^n \setminus M$. Так как $f \notin M$, следовательно, $f^i \neq f^j$. Таким образом, в матрице $\mathcal{F}_{M \cup f}$ все строки различны, то есть $[M \cup f]_\Omega = E_2^n$. Следовательно, $\langle M, \Omega \rangle$ является максимальной подалгеброй. Теорема доказана.

Пусть $\langle M, \Omega \rangle$ — произвольная подалгебра в алгебре $\langle E_2^n, \Omega \rangle$.

Определение. Вектор $g \in M$ назовем нижним элементом подалгебры $\langle M, \Omega \rangle$, если $g \neq \mathbf{0}$ и для любого $f \in M$ либо $g \widehat{\&} f = \mathbf{0}$, либо $g \widehat{\&} f = g$.

Через $D_{\langle M, \Omega \rangle}$ обозначим множество всех нижних элементов подалгебры $\langle M, \Omega \rangle$. Нетрудно проверить, что $D_{\langle E_2^n, \Omega \rangle} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Следующее утверждение показывает, что нижние элементы существуют в любой подалгебре.

Утверждение 2. Пусть $\langle M, \Omega \rangle \subseteq \langle E_2^n, \Omega \rangle$, тогда $|D_{\langle M, \Omega \rangle}| = \omega(M)$.

Доказательство. Построим изоморфизм $\varphi : \langle M, \Omega \rangle \rightarrow \langle E_2^{\omega(M)}, \Omega \rangle$. Для этого в матрице \mathcal{F}_M занумеруем классы эквивалентности строк от 1 до $\omega(M)$ и зададим отображение $\varphi : f \mapsto h$, где каждое h^i равно значению представителя i -го класса эквивалентных строк в вектор-столбце f . Очевидно, что построенное отображение является изоморфизмом, «склеивающим» одинаковые строки в матрице \mathcal{F}_M . То есть при данном отображении множество нижних элементов алгебры $\langle M, \Omega \rangle$ перейдет во множество нижних элементов алгебры $\langle E_2^{\omega(M)}, \Omega \rangle$. Таким образом, можно найти множество $D_{\langle M, \Omega \rangle}$:

$$D_{\langle M, \Omega \rangle} = \varphi^{-1} \left(D_{\langle E_2^{\omega(M)}, \Omega \rangle} \right) = \left\{ \varphi^{-1}(e_1), \dots, \varphi^{-1}(e_{\omega(M)}) \right\}.$$

Следовательно, $|D_{\langle M, \Omega \rangle}| = \omega(M)$. Утверждение доказано.

Замечание. В доказательстве данного утверждения был построен «склеивающий» изоморфизм, с помощью которого можно более подробно описать подалгебры и их элементы. В частности, там же с помощью данного изоморфизма было найдено множество нижних элементов некоторой произвольной подалгебры. Аналогичным образом можно найти системы образующих и базисы в любой подалгебре. Также, используя «склеивающий» изоморфизм, нетрудно показать, что мощности всех подалгебр алгебры $\langle E_2^n, \Omega \rangle$ образуют множество чисел вида 2^t , где $t = 1, \dots, n$.

Утверждение 3. Множество векторов D является множеством нижних элементов некоторой подалгебры $\langle M, \Omega \rangle$ тогда и только тогда, когда $[D]_{\Omega} = M$ и $\mathbf{0} \notin D$, а также выполнены условия:

- 1) $g_1 \widehat{\&} g_2 = \mathbf{0}$ для любых $g_1, g_2 \in D$, $g_1 \neq g_2$;
- 2) $\widehat{\bigvee}_{g \in D} g = \mathbf{1}$.

Доказательство. В силу существования «склеивающего» изоморфизма данное утверждение достаточно доказать для алгебры $\langle E_2^k, \Omega \rangle$, где k — произвольное натуральное число. Для алгебр такого вида необходимость очевидна. Докажем достаточность. В силу условий 1 и 2, в каждой строке матрицы \mathcal{F}_D ровно одна единица. Так как $[D]_\Omega = E_2^k$, то есть в матрице \mathcal{F}_D все строки различны, и $\mathbf{0} \notin D$, следовательно, в каждом столбце матрицы \mathcal{F}_D также ровно одна единица, в противном случае, если в некотором столбце больше одной единицы, в матрице \mathcal{F}_D найдутся одинаковые строки. Таким образом, $D = \{e_1, \dots, e_k\}$. Утверждение доказано.

Замечание. Множество $D_{\langle M, \Omega \rangle}$ для подалгебры $\langle M, \Omega \rangle$ представляет собой аналог полных ортогональных систем в евклидовых пространствах. Полностью следуя этой аналогии, каждый вектор $f \in M$ может быть представлен следующим образом:

$$f = \widehat{\bigvee}_{g_i \in D_{\langle M, \Omega \rangle}} (\sigma_i \widehat{\&} g_i),$$

где $\sigma_i = \mathbf{1}$, если $f \widehat{\&} g_i = g_i$, и $\sigma_i = \mathbf{0}$, если $f \widehat{\&} g_i = \mathbf{0}$. Учитывая данное представление, множество векторов $D_{\langle M, \Omega \rangle}$ можно назвать канонической системой образующих подалгебры $\langle M, \Omega \rangle$ (см. [3]).

Используя «склеивающий» изоморфизм, нетрудно получить обобщение доказанных выше теорем на случай произвольной подалгебры.

Теорема 4. Система векторов $\{f_1, \dots, f_p\} \subseteq M$ является системой образующих подалгебры $\langle M, \Omega \rangle$ тогда и только тогда, когда $\omega(f_1, \dots, f_p) = \omega(M)$.

Теорема 5. Спектр мощности базисов в подалгебре $\langle M, \Omega \rangle$ равен всем целочисленным значениям на отрезке $[\lceil \log_2 \omega(M) \rceil, \omega(M) - 1]$.

Теорема 6. Подалгебра $\langle M', \Omega \rangle$ в подалгебре $\langle M, \Omega \rangle$ является максимальной тогда и только тогда, когда $\omega(M') = \omega(M) - 1$.

В заключение автор выражает свою признательность А. С. Строгалову, под руководством которого была выполнена эта работа, и А. Е. Панкратьеву за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
- [2] Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [3] Харин К. В. Об одной алгебре изображений // Дискретная математика. 1996. Т. 8, вып. 4.
- [4] Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В., Гаврилов Г. П. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
- [5] Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: Научное изд-во ТВП, 2000.