

Некоторые замечания о формулах сложности минимальных объектов

М. В. Носов

В работе приводятся рассуждения о выводе формул длины минимального теста и числа элементов в минимальной схеме, состоящей из функций Шеффера. Представление формул в законченном виде приводит к сложным арифметико-комбинаторным выражениям.

1. Длина минимального теста

Пусть n — размерность пространства, T — таблица сравнения, $|T| = m$. Пусть $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Определим функцию $g(\tau)$

$$g(\tau) = \sum_{t \in T} \prod_{i=1}^n (1 - \tau_i t_i).$$
$$g(\tau) = 0, \quad \text{если } \tau \text{ — тест,}$$
$$g(\tau) \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{если } \tau \text{ не тест.}$$

Определим функцию $h(d, \tau)$, $d \in \{1, \dots, n\}$

$$h(d, \tau) = g(\tau) + (m + 1)(\tau_1 + \dots + \tau_n - d).$$
$$h(d, \tau) = 0, \quad \text{если } \tau \text{ — тест и длина его равна } d.$$
$$h(d, \tau) \in \{-(m + 1)(n + 1), \dots, -1, 1, \dots, (m + 1)(n + 1)\},$$

если τ не тест или длина τ не равна d .

Если $K(d)$ — число тестов длины d , то

$$K(D) = \frac{(-1)^{(n+1)(m+1)}}{(((n+1)(m+1))!)^2} \sum_{\tau \in E_2^n} \prod_{j=1}^{(n+1)(m+1)} (h^2 - j^2).$$

Длина минимального текста задается формулой

$$\ell_{\min}(T) = \sum_{d=0}^n \frac{1}{(2^n)!} \prod_{s=1}^{2^n} (K(d) - s).$$

2. Сложность минимальной схемы

Базис состоит из функции Шеффера. Выходная функция $y_m = f(y_1, \dots, y_n)$, зависящая от переменных y_1, \dots, y_n , $y_m \neq y_i$, $i = 1, \dots, n$, имеет индекс больший, чем какая-нибудь верхняя граница числа элементов в схеме для реализации любой функции в этом базисе, например, $m = 9n^2 2^{2n} + n + 1$, и задается формулой

$$y_m = \sum_{\beta, \beta \in \{1, \dots, n\}} a_\beta \prod_{i \in \beta} y_i. \quad (1)$$

Например, по табличному заданию коэффициенты a_β находятся несложно. Схема имеет $m - n$ элементов с выходами y_{n+1}, \dots, y_m , выход последнего элемента и есть выход схемы. К каждому i -ому элементу подходит две группы входов от всех входов и элементов, имеющих меньший номер. Таким образом, работа схемы определяется формулой (1) и нижеследующими условиями

$$y_i = 1 - \left(\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} y_j \right) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} y_j \right), \quad i = n+1, \dots, m, \quad (2)$$

$$t_{1i}, \dots, t_{i-1,i}, \tau_{1i}, \dots, \tau_{i-1,i} \in \{0, 1\}.$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} \in \{0, 1\}. \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} \in \{0, 1\}. \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} + \sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} \in \{0, 2\}. \quad (5)$$

Если в условиях (3) и (4) соответствующие суммы равны 0, то выходом элемента является 1, для реализации которой нужно две функции Шеффера. С учетом условий (3), (4), (5) определим функцию $g(x, y)$, где x, y — неотрицательные целые числа не большие m

$$g(x, y) = \frac{1}{(m!)^2} \prod_{i=1}^m (x - i) \prod_{i=1}^m (y - i) + \frac{1}{((m-1)!)^2} x \prod_{i=2}^m (x - i) y \prod_{i=2}^m (y - i).$$

Функция g равна 1 только в точках (0,0) и (1,1), во всех остальных 0. Сформируем функцию F

$$F = \sum_{i=n+1}^m \left(y_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji} y_j \right) \left(\sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} y_j \right) \right)^2 g \left(\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji}, \sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} \right) + \left(y_m - \sum_{\beta, \beta \in \{1, \dots, n\}} a_{\beta} \prod_{i \in \beta} y_i \right)^2 + \sum_{i=n+1}^m \left(1 - g \left(\sum_{j=1}^{i-1} t_{ji}, \sum_{j=1}^{i-1} \tau_{ji} \right) \right).$$

Если переменные y_1, \dots, y_m считать независимыми, то выражение F равно 0 тогда и только тогда, когда выполняются соотношения (1)–(5), в противном случае принимает значения из множества $\{1, \dots, 2(m - n) + 1\}$.

Сформируем интерполяционный многочлен

$$\chi(F) = \frac{1}{(2(m - n) + 1)!} \prod_{r=1}^{2(m-n)+1} (F - r).$$

Зафиксируем все переменные t и τ с любыми индексами, тогда $\chi(F)$ функция переменных $(y_m, \dots, y_{n+1}, y_n, \dots, y_1)$. Если значения t и τ таковы, что соответствующие функции реализуют функцию y_m , то функция $\chi(F)$ имеет 2^n единиц, так как значения (y_m, \dots, y_{n+1}) находятся по (y_n, \dots, y_1) однозначно, в противном случае $\chi(F)$ имеет строго меньше 2^n единиц. Пусть

$$\varphi(t, \tau) = \sum_{(y_m, \dots, y_1) \in E_2^m} \chi(F).$$

$$\varphi(t, \tau) = 2^n \iff \text{схема реализует } y_m.$$

$$\varphi(t, \tau) \in \{0, \dots, 2^n - 1\} \iff \text{схема не реализует } y_m.$$

Далее рассуждение аналогично рассуждениям в первой части. Пусть

$$\psi(t, \tau) = \frac{1}{(2^n - 1)!} \prod_{q=0}^{2^n - 1} (\varphi(t, \tau) - q).$$

$$h(d, t, \tau) = (1 - \psi(t, \tau)) + 2 \left(\sum_{j=n+1}^m \sum_{i=1}^{j-1} (t_{ji} + \tau_{ji}) - 2d \right).$$

$h(d, t, \tau) = 0$, если переменные t и τ распределены так, что схема реализует y_m и число фактически используемых элементов d (при этом может быть использована тождественная 1).

$h(d, t, \tau) \in \{-(n+m-1)(m-n-1) - 1, \dots, -1, 1, \dots, (n+m-1)(m-n-1) + 1\}$, в противном случае.

Если $K(d)$ — число схем, в которых использовано d элементов, то

$$K(d) = \frac{(-1)^{(n+m-1)(m-n-1)+1}}{(((n+m-1)(m-n-1)+1)!)^2} \cdot \sum_{(t, \tau) \in E_2^{(n+m-1)(m-n-1)+1}} \prod_{j=1}^{(n+m-1)(m-n-1)+1} (h^2 - j^2).$$

Если появились схемы, начиная с некоторого числа элементов, то и для большего числа обязательно есть схемы, реализующие требуемую функцию. Для этого достаточно в первой реализуемой схеме расположить все существенно используемые элементы в верхней части и один в самом низу и к группе верхних элементов присоединять новые, выходы которых фактически не использовать. С учетом того, что может быть использована тождественная 1, которая не подсчитана, получаем для произвольной функции $f(y_1, \dots, y_n)$, отличной от селектора, в базисе, состоящем из функции Шеффера,

$$L(f) = 1 + \frac{1}{2^{(m-n)!}} \sum_{d=1}^{(n+m-1)(m-n-1) 2^{m-n}} \prod_{s=1}^{2^{m-n}} (K(d) - s) + \delta, \quad \delta \in \{0, 2\}.$$