

О некоторых характеристиках нейронных схем

В. С. Половников

Нейронные сети рассматриваются с точки зрения структурной теории функциональных систем и реализуются схемами из функциональных элементов. Функции задаются схемами, которые являются суперпозициями следующих элементов:

- 1) константа $g_c \equiv c, c \in \mathbb{R}$;
- 2) сумматор с n входами $\Sigma_n, n \in \{2, 3, \dots\}, \Sigma_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$
 $\Sigma_n(a_1, \dots, a_n) = a_1 + \dots + a_n$;
- 3) усилитель $f_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}, f_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_\gamma(a) = \gamma a$;
- 4) функция $\theta, \theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \theta(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \geq 0; \\ 0, & \text{если } a < 0; \end{cases}$
- 5) функция $F, F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(a, b) = \begin{cases} a, & \text{если } b > 0; \\ 0, & \text{если } b \leq 0. \end{cases}$

Множество этих элементов обозначим Δ' , а множество всех функций, реализуемых схемами над Δ' , обозначим \mathcal{L} .

Рассмотрим все пути в некоторой схеме, ведущие от входа к выходу. Длиной пути назовем число нелинейных элементов (θ или F), содержащихся в нем. А нелинейной глубиной этой схемы назовем длину самого длинного пути.

Две схемы из элементов Δ' эквивалентны, если они реализуют одну и ту же функцию. Имеет место

Лемма 1. $\mathcal{L} = L$, где L — множество всех кусочно-линейных функций.

С использованием этой леммы доказывается

Теорема 1. *Для любой схемы над Δ' существует эквивалентная ей схема с нелинейной глубиной не больше двух.*

Далее будем рассматривать функции с памятью. Функцию, реализующую задержку с начальным состоянием a_0 , обозначим \mathfrak{Z}_{a_0} .

Положим $\Delta = \Delta' \cup \{\mathfrak{Z}_{a_0} | a_0 \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 2. *Пусть S — схема, построенная из элементов Δ с использованием операций композиции. Тогда из элементов Δ , используя лишь операции суперпозиции, можно построить схему, однократное применение к которой операции обратной связи приводит к схеме, реализующей ту же функцию с памятью, что и S .*

Автор выражает благодарность А. А. Часовских за постановку задачи.