МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Классификация автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты.

Д.Н. Бабин

Москва 2009 год

УДК 519.95; 519.7; 519.719
ББК 22.1

Рецензент
акад. Кудрявцев В.Б.

Классификация автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты.
Д.Н. Бабин. — М.: Изд-во ЦПИ, 2009. — 113с.

Рассматриваются базисы вида $\Phi \bigcup \nu$, где Φ некоторый замкнутый класс булевых функций, заданный своим конечным базисом, а ν конечная система автоматных функций. Описаны все классы Поста Φ, для которых разрешима проблема полноты и, соответственно, А-полноты базиса $\Phi \bigcup \nu$. Приведены аналогичные результаты для многозначных логик.
Для студентов, аспирантов и научных сотрудников, специализирующихся в области математической кибернетики и дискретной математики.

УДК 519.95; 519.7; 519.719
ББК 22.1

Оглавление

Введение.

Понятие автомата относится к числу важнейших в математике. Оно возникло на стыке разных ее разделов, а также в технике, биологии и других областях. Содержательно автомат представляет собой устройство с входными и выходными каналами. На его входы последовательно поступает информация, которая перерабатывается им с учетом строения этой последовательности и выдается через выходные каналы. Эти устройства могут допускать соединение их каналов между собой. Отображение входных последовательностей в выходные называют автоматной функцией, а возможность получения новых таких отображений за счет соединения автоматов приводит к алгебре автоматных функций.

Первый толчок к возникновению теории автоматов дала работа Поста Э. 1921 года [1]. В ней были получены фундаментальные результаты о строении решетки замкнутых классов булевых функций, которые были в дальнейшем методически переработаны и упрощены в книге Яблонского С.В., Кудрявцева В.Б., Гаврилова Г.П. "Функции алгебры логики и классы Поста"[2].

Сами автоматы и их алгебры начали исследоваться в тридцатые годы текущего столетия, но особенно активно в период с 50-х годов.

Основополагающую роль здесь сыграли работы Тьюринга, авторов знаменитого сборника "Автоматы"[3] Шеннона, Мура, Клини и других. Последующие работы по изучению алгебр автоматов велись под большим влиянием известных статей А.В. Кузнецова [4,5] и С.В. Яблонского [6] по теории функций k-значной логики. Эти функции могут рассматриваться как автоматы без памяти, к которым применяются операции суперпозиции. Возникшие для таких функций постановки задач о выразимости, полноте, базисах, решетке замкнутых классов и другие, а также развитый аппарат сохранения предикатов как ключевой для решения этих задач, оказались весьма действенными и для алгебр автоматных функций. При этом под выразимостью понимается возможность получения функций одного множества через функции другого с помощью заданных операций, а под полнотой — выразимость всех функций через заданные.

Основу результатов для функций k-значной логики составляет подход А.В. Кузнецова, опирающийся на понятие предполного класса. Для конечно-порожденных систем таких функций семейство предполных классов образует критериальную систему; другими словами, произвольное множество является полным точно тогда, когда не является подмножеством ни одного предполного класса. Множество этих предполных классов оказалось конечным и из их характеризации вытекает алгоритмическая разрешимость задачи о полноте. На этом пути С.В. Яблонским путем явного описания всех предполных классов была решена задача о полноте для функций трехзначной логики, а вместе с А.В. Кузнецовым найдены отдельные семейства предполных классов для логики произвольной конечной значности. Затем усилиями многих исследователей [7–11] последовательно были открыты новые такие семейства, а заключительные построения провел Розенберг [12].

Одновременно с изучением функций без памяти (без учета времени), были сделаны попытки применения аппарата предполных классов в задаче полноты для автоматов. Сначала для автоматов без обратных связей, называемых функциями с задержками, В.Б. Кудрявцев эффективно решил задачу о полноте и ее естественных модификациях [13]. После этого им было проведено рассмотрение общего случая и на этом пути был получен фундаментальный результат негативного характера, который показал континуальность множества предполных классов автоматных функций [14]. В дальнейшем, Кратко М.И. была показана алгоритмическая неразрешимость задачи о полноте для автоматных функций [15]. Нужны были новые методы исследования автоматных функций. Изменился характер задач в теории автоматов. Начался сбор положительных примеров и попытки различных вариаций этой задачи.

Как отмечается в работе [16] возникли четыре основных подхода к задаче о полноте.

Первый подход связан с расширением понятия равенства автоматов и их множеств. Возникли следующие понятия полноты:

— A-полнота (Буевич 1973 г. [17]). Для некоторого τ автоматные функции f и g считаются τ - равными, если они равны на словах длины τ. Автоматная функция f A-выразима через множество автоматных функций M, если для каждого τ найдется τ - равная f а-функция g, выразимая через M. Оказалась, что проблема A-полноты алгоритмически неразрешима.

— Клини - полнота (Дассов Ю. 1978 г. [18]). Автоматные функции считаются Клини - равными, если задаваемые ими регулярные множества совпадают. Проблема Клини-полноты также алгоритмически неразрешима.

— ϵ-полнота (Строгалов А.С. [19] 1986 г.). Предполагается, что автоматные функции ϵ - равны, если они отличаются на множестве меры меньшей ϵ. Проблема ϵ - полноты также алгоритмически неразрешима.

— Проблема полноты с учетом недостижимых состояний (Хазбун И.В. 1992 г. [20]) также алгоритмически неразрешима.

— N-полнота (автор 1994 г. [21]) - это выразимость относительно суперпозиции автоматов с не более, чем N-состояниями. Здесь независимо от N удалось обнаружить двухместную универсальную функцию. Проблема N - полноты также алгоритмически неразрешима.

Второй подход связан с вариацией операций, применяемых к автоматам. В.Б. Кудрявцев [13] для функций с задержками относительно операции суперпозиции описал все предполные классы, число которых оказалось счетным и нашел, тем не менее, алгоритм распознавания полноты конечных систем. С.В. Алешин [22] установил в каких случаях, в зависимости от мощностей алфавитов входного, выходного и состояний, существуют базисы для автоматов с операцией суперпозиции. С.С. Марченков [23] для автоматов с бесконечным числом состояний и операцией суперпозиции показал, что полные системы (естественно, бесконечные) имеют в совокупности еще и бесконечную арность (аналог 13 проблемы Гильберта для д.-функций).

Автор [24] для автоматов с конечным числом состояний и операцией суперпозиции показал, что существуют полные системы (естественно, бесконечные) арности два (аналог 13 проблемы Гильберта для о.д.-функций). Более того автору удалось показать, что система, состоящая из одноместных конечных автоматов и всех булевых функций, полна относительно суперпозиции. Общее построение, связанное с вариацией операций над автоматами, осуществлено В.Б. Кудрявцевым в книге "Функциональные системы"[25].

Третий подход связан с изучением полноты в подклассах автоматов. Часовских А.А. в 1985 г. [26] в классе линейных автоматов описал все предполные классы, число которых оказалось счетным и нашел, тем не менее, алгоритм распознавания полноты конечных систем. Тальхайм [27] установил свойства решетки замкнутых классов одноместных стабильных автоматов. Коляда К.В. в 1984 [28] рассматривал классы функций, определенных на регулярных множествах (функции сопряженные к автоматным) и обнаружил для одних классов алгоритмическую неразрешимость, а для других алгоритмическую разрешимость проблемы полноты. Автор в 1985 г. [29] показал неполноту относительно суперпозиции системы, состоящая из одноместных конечных автоматов и всех булевых функций в классе перестановочных автоматов.

Четвертый подход связан с ограничением на исследуемые системы автоматов. Еще в 1961 А.А. Летичевским [30] был получен алгоритм решения задачи о полноте для конечных систем автоматов, выдающих номер своего состояния (автоматов Медведева) при наличии всех булевых функций. А в 1986 В.А. Буевич [31] показал алгоритмическую разрешимость проблемы А-полноты для систем, содержащих все булевы функции. В 1992 г. автор [32] показал, что существует алгоритм распознавания полноты при наличии в рассматриваемой системе всех булевых функций.

Очевидно, что для распознавания полноты существенна роль функций без памяти, присутствующих в базисе. Если присутствуют все функции без памяти, то алгоритм распознавания полноты [32] и А-полноты [31] существует. Если присутствует, фактически, лишь тождественная функция x, то не существует алгоритма распознавания как полноты [15], так и А-полноты [17].

В.Б. Кудрявцевым была поставлена задача. Верно, ли что по части базиса автоматов, не содержащей памяти, можно однозначно определить разрешима ли проблема полноты для систем автоматов с этой частью, и, тем самым, вскрыть природу алгоритмической неразрешимости по булевой части базиса?

Решение этой задачи предполагает расслоение систем конечных автоматов на иерархию классов, образующих типы. В один тип входят все системы, которые содержат заданный класс Поста автоматов без памяти. Такие системы автор называет автоматными базисами Поста. До начала решения задачи классификации автоматных базисов Поста в иерархии типов были известны лишь свойства двух точек. Тип систем, содержащих все P_2 был рассмотрен автором, здесь была доказана разрешимость. Тип систем, содержащих, фактически, лишь тождественную функцию x был рассмотрен М.И.Кратко и для него была доказана алгоритмическая неразрешимость.

Автором последовательно в статьях [32-38] эта задача была решена, были установлены свойства всех классов диаграммы Поста. В результате на диаграмме Поста (см. рисунок 1) получилась явная граница, отделяющая алгоритмически разрешимые случаи от неразрешимых. Эта же граница оказывается верной и для случая A-полноты. Обозначения классов, взятые из [2], таковы: Классы типа L — суть

$$L_1 = [x+y, 1], L_2 = [x+y+1], L_3 = [x+y],$$
$$L_4 = [x+y+z], L_5 = [x+y+z+1],$$

Классы типов M, C, D, F^2 -

$$M_1 = [xy, x \vee y, 0, 1], M_2 = [xy, x \vee y, 1],$$
$$M_3 = [xy, x \vee y, 0], M_4 = [xy, x \vee y];$$
$$C_1 = [\bar{x} \vee \bar{y}], C_2 = [x \vee y, x+y+1],$$
$$C_3 = [xy, x+y], C_4 = [x \vee y, x(y+z+1)];$$
$$D_1 = [xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}], D_2 = [xy \vee xz \vee yz], D_3 = [x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}];$$
$$F_1^2 = [x \vee y\bar{z}, xy \vee xz \vee yz], F_2^2 = [x \vee yz, xy \vee xz \vee yz],$$
$$F_3^2 = [1, xy \vee xz \vee yz], F_4^2 = [x \vee \bar{y}, xy \vee xz \vee yz],$$

$$F_5^2 = [x(y \vee \bar{z}), xy \vee xz \vee yz], F_6^2 = [x(y \vee z), xy \vee xz \vee yz],$$
$$F_7^2 = [0, xy \vee xz \vee yz], F_8^2 = [x\bar{y}, xy \vee xz \vee yz],$$

Классы типов O, S, P, F^∞, F^μ при $\mu > 2$ — суть

$$O_1 = [x], O_2 = [1], O_3 = [0], O_4 = [\bar{x}], O_5 = [x, 1], O_6 = [x, 0],$$
$$O_7 = [0, 1], O_8 = [x, 0, 1], O_9 = [\bar{x}, 0],$$
$$S_6 = [x \vee y, 0, 1], S_5 = [x \vee y, 0], S_3 = [x \vee y, 1], S_1 = [x \vee y],$$
$$P_6 = [xy, 0, 1], P_5 = [xy, 1], P_3 = [xy, 0], P_1 = [xy],$$
$$F_1^\infty = [x \vee y\bar{z}], F_2^\infty = [x \vee yz], F_3^\infty = [1, x \vee yz], F_4^\infty = [x \vee \bar{y}],$$
$$F_5^\infty = [x(y \vee \bar{z})], F_6^\infty = [x(y \vee z)], F_7^\infty = [0, x(y \vee z)], F_8^\infty = [x\bar{y}],$$
$$F_1^\mu = [x \vee y\bar{z}, h_\mu^*(x_1, \ldots, x_{\mu+1})], F_2^\mu = [h_\mu^*(x_1, \ldots, x_{\mu+1})],$$
$$F_3^\mu = [1, h_\mu^*(x_1, \ldots, x_{\mu+1})], F_4^\mu = [x \vee \bar{y}, h_\mu^*(x_1, \ldots, x_{\mu+1})],$$
$$F_5^\mu = [x(y \vee \bar{z}), h_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1})\}], F_6^\mu = [h_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1})],$$
$$F_7^\mu = [0, h_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1})], F_8^\mu = [x\bar{y}, h_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1})],$$

где через

$$h_\mu^*(x_1, \ldots, x_{\mu+1})$$

обозначена функция, двойственная к функции

$$h_\mu(x_1, \ldots, x_{\mu+1}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_{\mu+1}.$$

Метод доказательства алгоритмической разрешимости конечных систем автоматных функций принципиально отличается от метода доказательства их неразрешимости. Для разрешимого случая конструктивно доказывается разрешимость выразимости автоматных функций счетчиков, затем безусловных селекторных функций и универсальной булевой функции, и, наконец, автоматной функции "задержки". Неразрешимость доказывается сведением к известной алгоритмически неразрешимой проблеме.

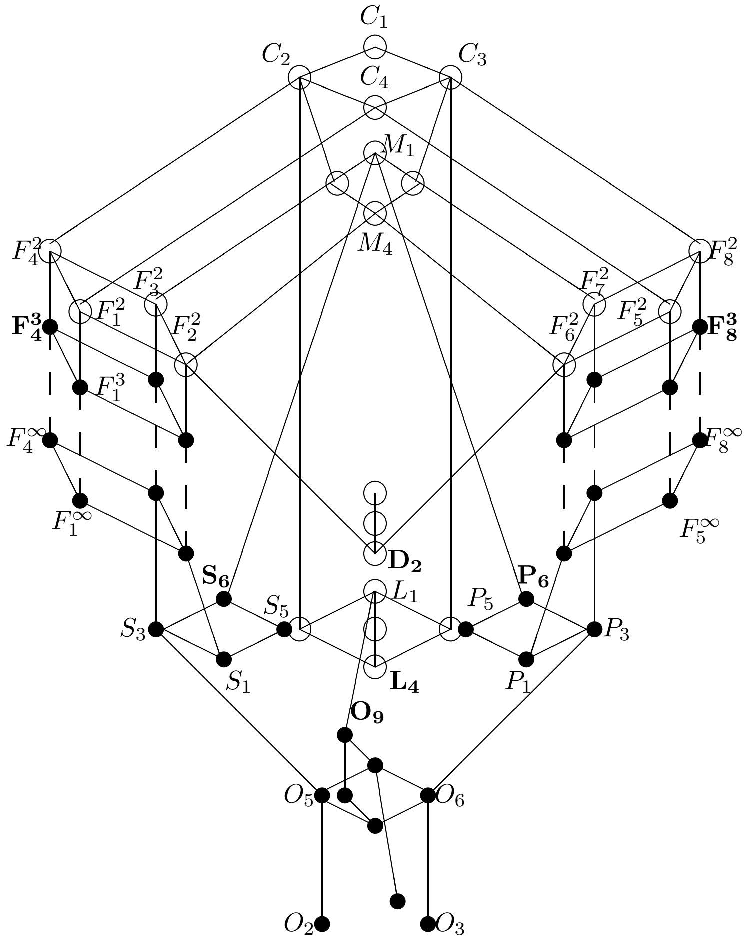

C_1
C_2
C_3
C_4
M_1
M_4
F_4^2
F_3^2
F_1^2
F_2^2
$\mathbf{F_4^3}$
F_1^3
F_4^∞
F_1^∞
F_8^2
F_7^2
F_5^2
F_6^2
$\mathbf{F_8^3}$
F_8^∞
F_5^∞
$\mathbf{D_2}$
$\mathbf{S_6}$
S_5
L_1
P_5
$\mathbf{P_6}$
S_3
P_3
S_1
$\mathbf{L_4}$
P_1
$\mathbf{O_9}$
O_5
O_6
O_2
O_3

Рис.1

Традиционно задачи полноты решаются проверкой сохранения отношений, то есть: верно ли что отношения между элементами входной информации также будут выполнены для элементов выходной информации. Автор рассматривает сохранение отношений на фрагментах диаграммы автомата: циклах, двойных циклах, тройных циклах. Оказывается, что не сохранение отношений на циклах длины N является критериальным условием для выразимости счетчика по модулю N, отсутствие соотношений на двойных циклах — условием выразимости селекторных функций, отсутствие отношений на тройных циклах — условием выразимости универсальной булевой функции.

Для задачи А-полноты рассматривается сохранение отношений на путях, двойных путях, тройных путях. При этом не сохранение отношений на путях длины τ является критериальным условием для τ-выразимости счетчика по модулю τ, отсутствие соотношений на двойных путях — условием А-выразимости селекторных функций, отсутствие отношений на тройных путях — условием выразимости универсальной булевой функции.

Возможность проверки циклов (путей) длины N при произвольном N обусловлена наличием рекуррентной зависимости предиката отношения на циклах (путях) длины меньшей l и на циклах (путях) длины l. В разрешимом случае удается за время t, такое что

$$\log\log\log\log t \leq |Q|^2 2^{n+m},$$

где $|Q|$ число состояний автоматной функции, n число входов, m число выходов, установить наличие или отсутствие соответствующих отношений на циклах длины N при всех натуральных N.

Для выразимости "задержки"строится аппарат, который описывает процессы запоминания, хранения и выдачи информации автоматной функцией. Информационный цикл предполагает возможность сначала запоминания, затем произвольного времени хранения и, наконец, выдачи информации о том какой сигнал поступил на вход. Информационный цикл обеспечивается работой схемы из автоматных функций, обменивающихся информацией. Выразимость "задержки это возможность построения схемы, обеспечивающей информационный цикл. Автор показал, что этот факт может быть проверен за время

$$(2^{|Q|})!(2^{2n(2^{|Q|})!}).$$

Для слабых классов Поста такую проверку провести не удается. Более того, удается свести проблему полноты и А-полноты к проблеме конечности числа продукций Поста, которая алгоритмически неразрешима.

Этот прием в задаче автоматной полноты встречался и раньше. В частности так был доказан факт алгоритмической неразрешимости произвольных конечных систем автоматов, что в нашем случае соответствует тривиальной истинностной части, состоящей из тождественной функции x. Новизна работы автора заключается в том, что был решен нетривиальный случай истинностной части, и более того истинностная часть в настоящей работе может иметь функции произвольной арности. Это существенно меняет метод сводимости автоматной схемы к цепочке продукций. Если раньше автоматная схема имела вид цепочки, копирующей цепочку продукций, то сейчас происходит соотнесение с цепочкой продукций автоматной схемы, имеющей вид дерева.

Очевидно, что, если проблема полноты (А -полноты) алгоритмически неразрешима для систем вида $F_1 \bigcup \nu$, то она неразрешима для систем вида $F_2 \bigcup \nu$ и $F_1' \bigcup \nu$, где $F_2 \subseteq F_1$, а F_1' двойственный к F_1 замкнутый класс. Поэтому для доказательства указанной классификации достаточно проверить ее на классах

$$L_4, D_2, F_3^4, S_6, O_9.$$

Монография состоит из 3 глав, первая глава посвящены разрешимому случаю в задачах полноты и А-полноты. В ней рассмотрен случай замкнутого класса всех булевых функций C_1. Доказательство алгоритмической разрешимости полноты и А-полноты конечных систем автоматных функций, содержащих истинностную функцию медиану $xy \vee xz \vee yz$, а также истинностную функцию $x+y+z$, проводится модификацией техники, представленной в первой главе. Читатель может найти полное доказательство этих фактов в работах автора [35,37].

Во второй главе главе доказывается алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты и А-полноты конечных систем автоматных функций с истинностной частью типов O, S, P, F^3. Доказательство неразрешимости принципиально отличается от доказательства разрешимости. Здесь не конструируется критериальное условие, а происходит сведение задачи к известной алгоритмически неразрешимой проблеме - проблеме остановки процесса порождения продукций Поста.

Тройка $T = \langle D, \rho, w\rangle$, где $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$, $\rho\colon D \to D^*$, $\rho(d_i) = R_i$, w — натуральное число, называется системой однородных продукций Поста. Если $l \geq w$, то скажем, что T применима к слову

$$\xi = d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_l}$$

и назовем слово

$$\xi' = d_{i_{w+1}} \ldots d_{i_l} R_{i_1}$$

результатом применения T к слову ξ. Таким образом, у слова ξ "стираются"первые w букв и к нему приписывается слово R_{i_1}, которое соответствует букве d_{i_1}. Если $l < w$, то T не применима к слову ξ. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такую, что $\xi_1 = \xi$, а ξ_{i+1} — результат применения T к слову ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, называется последовательностью продукций слова ξ. Последовательность продукций слова ξ конечна, если последнее слово имеет длину меньшую w. В этом случае будем говорить, что при применении к слову ξ система T останавливатся через конечное число шагов. Для каждой однородной системы продукций T можно поставить вопрос о разрешимости "проблемы остановки "этой системы: существует ли алгоритм A_T, который по любому наперед заданному слову ξ устанавливает, конечно или бесконечно множество T-продукций слова ξ, т.е. останавливается ли T при применении к слову ξ, или нет. Известно [39], что существует система однородных продукций Поста, для которой не существует алгоритма, по слову $\xi \in D^*$ решающего вопрос о конечности последовательности продукций слова ξ.

Во второй главе строятся параметрические системы функций с параметром $\xi \in D^*$.

$$\Sigma_1 = \{\bar{X} \vee Y, I_0, E_0, f_1, \ldots, f_k, f_\xi, G\}$$

$$\Sigma_2 = \{X \vee Y, \hat{0}, \hat{1}, I_{\bar{x}}, E_{\bar{x}}, f_1, \ldots, f_k, f_\xi, G\}$$

$$\Sigma_3 = \{\hat{0}, \bar{X}, I_{\&}, E_{\&}, f_1, \ldots, f_k, f_\xi, G\}$$

$$\Sigma_4 = \{\bar{X} \vee Y, I_0, E_0, f_1', \dots, f_k', f_\xi, G\}$$

$$\Sigma_5 = \{X \vee Y, \hat{0}, \hat{1}, I_{\bar{x}}, E_{\bar{x}}, f_1', \dots, f_k', f_\xi, G\}$$

$$\Sigma_6 = \{\hat{0}, \bar{X}, I_{\&}, E_{\&}'', f_1'', \dots, f_k'', f_\xi, G\}$$

$$\Sigma_7 = \{\overline{X} \vee Y, H, E, ff_1, \dots, ff_k, ff_\xi, GG\}$$

$$\Sigma_8 = \{\overline{X} \vee Y, H, E, ff_1{}', \dots, ff_k{}', ff_\xi, GG\}$$

Системы

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8$$

состоят из истинностной части и автоматной части. Истинностная часть систем такова:

$$\Sigma_1, \Sigma_4 - \bar{x} \vee y, \Sigma_2, \Sigma_5 - x \vee y, 0, 1, \Sigma_3, \Sigma_6 - 0, \bar{x}$$

$$\Sigma_7, \Sigma_8 - \bar{x} \vee y, x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4$$

Роль автоматной части — свести задачу полноты (системы $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_7$) или А-полноты (системы $\Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_8$) с данной истинностной частью к проблеме конечности числа продукций слова ξ.

Этот подход к задаче неразрешимости встречался и раньше. В частности так был доказан факт алгоритмической неразрешимости произвольных конечных систем автоматов, что в нашем случае соответствует тривиальной истинностной части, состоящей из тождественной функции x. Новизна работы заключается в том, что был решен нетривиальный случай истинностной части, и более того истинностная часть в настоящей работе может иметь функции произвольной арности. Это существенно меняет конструкцию сводимости автоматной схемы к цепочке продукций. Если раньше автоматная схема имела вид цепочки, копирующей цепочку продукций, то сейчас происходит сравнение схемы в виде дерева с цепочкой продукций.

Для сведения автоматной схемы к цепочке продукций предназначены утверждения 2.1, 2.2, 2.3, 2.4.

Вспомогательные результаты можно объединить в группы:
утверждение 2.2, лемма 2.4, лемма 2.7,
утверждение 2.3, лемма 2.5, лемма 2.8,
утверждение 2.4, лемма 2.6, лемма 2.9,
утверждение 2.1, лемма 2.10, лемма 2.11.

Следует отметить последнюю группу, в которой эти методом доказан факт алгоритмической неразрешимости систем с истинностной частью

$$\bar{x} \vee y, x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4,$$

порождающей класс F_4^3. Из лемм 2.10, 2.11 следует бесконечность числа алгоритмически неразрешимых случаев и конечность числа разрешимых случаев в рассматриваемой задаче.

Наконец, в третьей главе указанная классификация продолжается на функции из $P_k, k > 2$. В ней рассмотрена проблема полноты систем автоматных функций вида $\Phi \cup \nu$, где $\Phi \subseteq P_k$, ν - конечно, а $[\Phi]$ является замкнутым классом в P_k. Показано, что если Φ вложим в класс Слупецкого, то проблема полноты систем $\Phi \cup \nu$ неразрешима, а если Φ максимальный (предполный) класс сохранения константы, то имеет место алгоритмическая разрешимость указанной задачи. Уже на уровне максимальных (предполных) классов в P_k обнаружены противоположные случаи, чего не было в P_2.

Тем самым, возникает возможность классификации базисов в $P_k, k \geq 3$ по их способности в качестве добавки в автоматный базис обеспечивать алгоритмическую разрешимость полноты.

Автор выражает благодарность академику Кудрявцеву В.Б. за постановку задачи и ценные указания.

Глава 1

Алгоритмическая разрешимость полноты и А-полноты конечных систем а.-функций, содержащих полную систему истинностных функций.

Пусть $E_2 = \{0,1\}$, E_2^∞ - множество всех сверхслов $a(1)a(2)...$, где $a(j) \in E_2, j = 1,2,...; E_2^\tau$ - множество всех слов $a(1)...a(\tau)$ длины τ. Функцию $f : (E_2^\infty)^n \to (E_2^\infty)^m$ назовем автоматной функцией (а. - функцией), если она задается рекуррентно соотношениями (1),

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \\ b_j(t) = \psi_j(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \qquad j = 1, ..., m. \end{cases} \tag{1}$$

где $q \in Q = \{q_1, \ldots, q_r\}$. Параметр q называется состоянием a.-функции f, q_1 — ее начальным состоянием, вектор-буквы $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$ называются входной и выходной буквами, а сверхслова $a(1)a(2)\ldots$ и $b(1)b(2)\ldots$ — входным и выходным сверхсловами соответственно. Класс всех a.-функций обозначим через P_a. В этом классе введем операции суперпозиции и обратной связи. Для суперпозиции будем использовать модификации операций из [39]:

$$\begin{cases} (\eta f)(x_1, ..., x_n) = f(x_2, x_3, ..., x_n, x_1), \\ (\epsilon f)(x_1, ..., x_n) = f(x_2, x_1, x_3, ..., x_n), \\ (\Omega f)(x_1, ..., x_{n-1} = f(x_1, x_1, x_2, ..., x_{n-1}), \\ (\bigtriangledown f)(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = f(x_2, x_3, ..., x_{n+1}), \\ (f * g)(x_1, x_2, ..., x_{l+n-1}) = f(g(x_1, ..., x_l), x_{l+1}, ..., x_{l+n-1}). \end{cases}$$

Операция обратной связи (о.с.), примененная к i-ой входной и j-ой выходной переменным a-функции

$f(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_m)$, задает a.-функцию

$$g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_m),$$

вычисляемую алгоритмически следующим образом. Считаем, что о. с. применима к f в состоянии q, если ψ_j в уравнении (1) фиктивно зависит от a_i при $q(t)=q$, а вычисление $b_s(t)$ осуществляется по схеме

$$\begin{cases} q(1)=q_1, \\ q(t+1)=\varphi(q(t),a_1(t),...,a_{i-1}(t),\psi_j(q(t),a_1(t),...a_{i-1}(t), \\ \quad a_{i+1}(t),...,a_n(t)),a_{i+1}(t),...,a_n(t)), \\ b_s(t)=\psi_s(q(t),a_1(t),...,a_{i-1}(t),\psi_j(q(t),a_1(t),...,a_{i-1}(t), \\ \quad a_{i+1}(t),...,a_n(t)),a_{i+1}(t),...,a_n(t)), \\ s=1,2,...,j-1,j+1,...,m. \end{cases}$$

Считаем, что о.с. применима к f, если она применима в начальном состоянии q_1, и из ее применимости в состоянии $q(t)$ следует применимость в состоянии $q(t+1)$. Пусть $M\subseteq P_a$, обозначим через $[M]$ множество всех a-функций, получающихся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется полным, если $[M]=P_a$. Проблема полноты для P_a состоит в описании всех полных множеств M.

Пусть τ — натуральное число, $f(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторая автоматная функция,

$$f^\tau : (E_2^\tau)^n \to (E_2^\tau)^m$$

— ограничение этой функции на множество слов длины τ. Скажем, что a.-функции

$$f(x_1,\ldots,x_n) \qquad g(x_1,\ldots,x_n)$$

τ-равны, если

$$f^\tau = g^\tau.$$

Обозначим через $[M]_\tau$ множество всех a.-функций, τ-равных получающимся из M с помощью операций суперпозиции и обратной связи. Множество M называется τ-полным, если

$$[M]_\tau = P_a.$$

Через $[M]_A$ обозначается множество

$$[M]_A = \bigcap_{\tau=1}^{\infty}[M]_\tau.$$

Проблема A-полноты для P_a состоит в описании всех A-полных множеств M. Очевидно, что полное множество M является A-полным. Имеют место теоремы:

Теорема 1.

Для конечной системы $M \subset P_a$ равенство $[M \cup \{\bar{x} \vee \bar{y}\}]_A = P_a$ алгоритмически проверяемо.

Теорема 2.

Для конечной системы $M \subset P_a$ равенство $[M \cup \{\bar{x} \vee \bar{y}\}] = P_a$ алгоритмически проверяемо.

§1.1. Основные понятия и леммы.

Пусть $\mathbf{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, обозначим через

$$\overline{X}, \mathbf{1}, \mathbf{0}, f_{\text{Ш}}, f_{\&}, f_{\vee}$$

—автоматные интерпретации соответствующих истинностных функций

$$\bar{x}, 1, 0, \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2.$$

Для $D \in \mathbf{N_0}, \mathrm{N} \in \mathbf{N}$ автоматную функцию с уравнениями (1), где $m = n = D + N, Q = \{1, ..., D + N\}$, и для любого $a \in E_2^{D+N}$

$$\varphi(i, a) = \begin{cases} i + 1 \text{ при } i < D + N, \\ D + 1 \text{ при } i = D + N \end{cases}$$

$$\psi(i, a) = \underset{i}{0 \dots 010 \dots 0},$$

назовем (D, N)-счетчиком и обозначим через $B_{D,N}$. Если же при этом еще

$$\psi(i, (a_1, \dots, a_{D+N})) = a_i,$$

где $a_1, \dots, a_{D+N} \in E_2$, то назовем ее (D, N) - селектором и обозначим через $C_{D,N}$. Множество всех счетчиков обозначим через **K**, а всех селекторов - через **C**.

Без ограничения общности, будем исследовать на полноту и А - полноту системы вида $\{f_{\text{Ш}}, f\}$, где f задается уравнениями (1). Для обозначения наборов 11...1 и 00...0 произвольной длины, там где это не приводит к недоразумению, будем использовать, соответственно, **1** и **0**.

Последовательность (2)

$$(a(1), b(1)), (a(2), b(2)), \dots, (a(s), b(s)) \qquad (2)$$

где

$$a(1), \dots, a(s) \in E_2^n; \quad q(1), \dots, q(s+1) \in Q; \quad b(1), \dots, b(s) \in E_2^m;$$
$$b(i) = \psi(q(i), a(i)); \qquad q(i+1) = \varphi(q(i), a(i)), \qquad i = 1, \dots, s;$$
$$q(1) = q_1,$$

назовем $s-$ экспериментом с а-функцией f. Если еще для некоторого $D, 0 \leq D \leq s$ имеем

$$\varphi(q(s), a(s)) = q(D + 1),$$

то (2) назовем (D, s) - экспериментом с а-функцией f(см. рис.2).

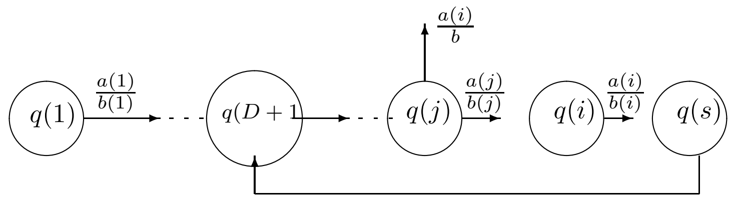


Рис.2

Пусть $P_0(D, s)$ и $P_0(s)$ суть множества всех (D, s)- и s-экспериментов, соответственно, с а-функцией f. Пусть $P \in \{P_0(D, s), P_0(s)\}, i, j$ натуральные числа, $1 \leq i, j \leq s, j \neq i$. Скажем, что на множестве экспериментов P а-функция f является (j, i) —зависимой, если для каждого эксперимента (2) выполнено соотношение (3)

$$(b = \psi(q(j), a(i))) \Rightarrow (b = b(i)) \tag{3}$$

(см. рис. 2). Для $s = D + kN$ скажем, что а.-функция f допускает счетчик $B_{D,N}$ на $P_0(D, s)$, если для любых $i, j,\ 1 \leq i, j \leq s, i \neq j$ а.-функция f не является (j, i)-зависимой на $P_0(D, s)$. Пусть s натуральное число, скажем, что а.-функция f А-допускает счетчик $B_{0,s}$, если для любых $i \neq j$ а.-функция f не является (j, i)-зависимой на $P_0(s)$. Имеют место следующие леммы.

Лемма 1.1.

Имеет место включение $[\{f, f_{\text{Ш}}\}] \supseteq\ \mathbf{K}$ точно тогда, когда для любого натурального N найдутся $D, s = D + kN$ такие, что f допускает счетчик $B_{D,N}$ на $P_0(D, s)$.

Лемма 1.2.

Имеет место включение $[\{f, f_{\text{Ш}}\}]_A \supseteq\ \mathbf{K}$ точно тогда, когда для любого натурального s а.-функция f А-допускает счетчик $B_{0,s}$.

Лемма 1.3.
Отношения включений $[\{f, f_{\text{Ш}}\}] \supseteq \mathbf{K}$ и $[f, f_{\text{Ш}}]_A \supseteq \mathbf{K}$ алгоритмически проверяемы.

Через $Q_i \subseteq Q$ обозначим множество состояний а.-функции f достижимых из начального за i тактов. Скажем, что а.-функция f с уравнениями (1) имеет память в j-тый момент, если для некоторого слова $\alpha \in E_2^n$ длины $j-1$ и некоторых букв $a, b, c \in E_2^n$ выполнено

$$\psi\left(\varphi(q,a),c\right) \neq \psi\left(\varphi(q,b),c\right),$$

где $q = \varphi(q_1, \alpha)$ (см. рис.3).

Соответственно, скажем, что а.-функция f с уравнениями (1) не имеет памяти в j-тый момент, если для любого слова $\alpha \in E_2^n$ длины $j-1$ и любых букв $a, b, c \in E_2^n$ выполнено

$$\psi\left(\varphi(q,a),c\right) = \psi\left(\varphi(q,b),c\right).$$

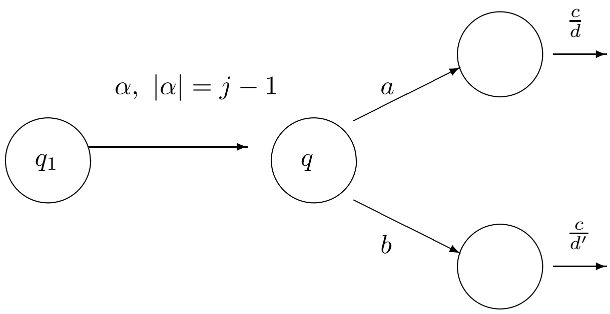


Рис.3

Обозначим множество всех а.-функций, не имеющих памяти в j-тый момент, через $U(j)$, $j = 0, 1, \ldots$.

Автоматная функция $G\colon E_2^* \to E_2^*$ с уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

называется "задержкой". Известно [14], что $[\{G, f_{\text{Ш}}\}] = P_a$. Диаграмма "задержки"приведена на рисунке 4.

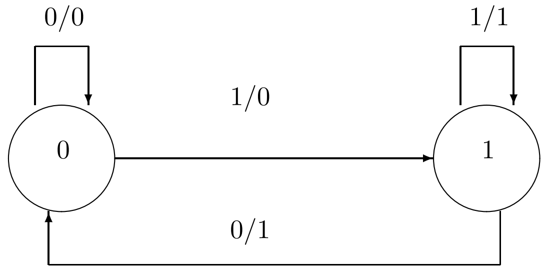


Рис.4

Через λ мы будем обозначать пустую букву. Пусть а.-функция f задается уравнениями (1) и $p, q, r, s \in Q$, определим бинарные отношения $\mathbf{OUT}, \mathbf{PAS}, \mathbf{INPUT}$ на множестве $Q \times Q$.

Скажем, что $((p,q),(r,s)) \in \mathbf{OUT}$ (см. рис.5), если

$$\exists a, b\,((\varphi(p,a) = r)\&(\varphi(q,b) = s)\&(\psi(p,a) \neq \psi(q,a)))\,.$$

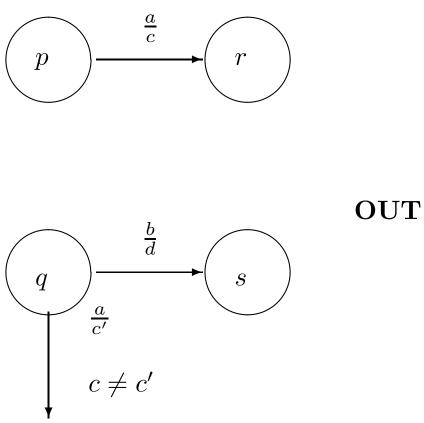
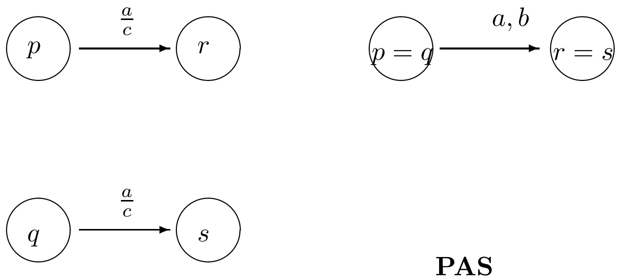


Рис.5

Скажем, что $((p,q),(r,s)) \in$ **PAS** (см. рис.6), если

$$\exists a \left((\varphi(p,a) = r)\&(\varphi(q,a) = s)\&(\psi(p,a) = \psi(q,a))\right) \bigvee$$

$$\bigvee \left((p = q)\&(r = s)\right).$$



PAS

Рис.6

Скажем, что $((p,q),(r,s)) \in$ **INPUT** (см. рис.7), если

$$\exists a, b((\varphi(p,a) = r)\&(\varphi(q,b) = s)\&(\psi(p,a) = \psi(q,a))\&$$

$$\&(\psi(p,b) = \psi(q,b)))$$

INPUT

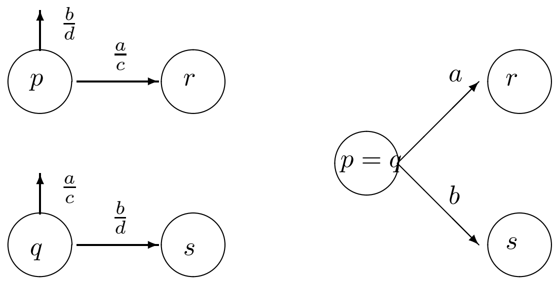


Рис.7

Определим отношение $\mathbf{ALL} = \mathbf{OUT} \cup \mathbf{PAS} \cup \mathbf{INPUT}$ и функцию

$$\eta\colon Q^2 \times Q^2 \to \{\lambda, 0, 1, 2\}$$

следующим образом

$$\eta\left((p,q),(r,s)\right) =$$

$$\begin{cases} \lambda, \text{ если } ((p,q),(r,s)) \notin \mathbf{ALL}, \\ 2, \text{ если } ((p,q),(r,s)) \in \mathbf{OUT}, \\ 0, \text{ если } ((p,q),(r,s)) \in \mathbf{PAS} \backslash \mathbf{OUT}, \\ 1, \text{ если } ((p,q),(r,s)) \in \mathbf{INPUT} \backslash \{\mathbf{PAS} \cup \mathbf{OUT}\}. \end{cases}$$

Пусть

$$\overline{\max}\colon \bigcup_{l=1}^{\infty} \{\lambda, 0, 1, 2\}^l \to \{\lambda, 0, 1, 2\}$$

максимум относительно порядка $\lambda \leq 1 \leq 0 \leq 2$, а именно:

$$\overline{\max}(d_1, d_2, \ldots, d_l) =$$

$$\begin{cases} 2, \text{ если } \exists i(d_i = 2), \\ 0, \text{ если } (d_1, d_2, \ldots, d_l \in \{\lambda, 0, 1\}) \& (\exists i(d_i = 0)), \\ 1, \text{ если } (d_1, d_2, \ldots, d_l \in \{\lambda, 1\}) \& (\exists i(d_i = 1)), \\ \lambda, \text{ если } d_1 = d_2 = \ldots = d_l = \lambda. \end{cases}$$

Для множества $Y = \{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$, где $d_1, d_2, \ldots, d_l \in \{\lambda, 0, 1, 2\}$ будем обозначать через

$$\overline{\max_{Y}} = \overline{\max}(d_1, d_2, \ldots, d_l).$$

Пусть

$$\max\colon \bigcup_{l=1}^{\infty} \{\lambda, 0, 1, 2\}^l \to \{\lambda, 0, 1, 2\}$$

функция максимум относительно порядка $0 \leq 1 \leq 2 \leq \lambda$, а именно:

$$\max(d_1, d_2, \ldots, d_l) =$$

$$\begin{cases} \lambda, \text{ если } \exists i(d_i = \lambda), \\ 2, \text{ если } (d_1, d_2, \ldots, d_l \in \{0, 1, 2\}) \& (\exists i(d_i = 2)), \\ 1, \text{ если } (d_1, d_2, \ldots, d_l \in \{0, 1\}) \& (\exists i(d_i = 1)), \\ 0, \text{ если } d_1 = d_2 = \ldots = d_l = 0. \end{cases}$$

Будем обозначать через

$$\max_{Y} = \max(d_1, d_2, \ldots, d_l).$$

Обозначим через I_f полный граф с помеченными ребрами и множеством вершин $Q \times Q$, где η — функция отметок ребер. Назовем I_f локальным информационным графом а.-функции f. Для

$$X_1, X_2 \in 2^{Q \times Q}, X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$$

будем обозначать через

$$E(X_1, X_2) \subseteq 2^{Q \times Q \times Q \times Q}$$

систему ребер графа I_f со следующим свойством однозначности:

$$(\forall x_1 \in X_1 (\exists x_2 \in X_2 \, ((x_1, x_2) \in E(X_1, X_2)))) \, \&$$

$$(\forall x_2 \in X_2 (\exists x_1 \in X_1 \, ((x_1, x_2) \in E(X_1, X_2)))) \, .$$

Множество всех систем ребер $E(X_1, X_2)$ со свойством однозначности обозначим через $\Upsilon(X_1, X_2)$. Определим функцию

$$\Theta \colon 2^{Q \times Q} \times 2^{Q \times Q} \to \{\lambda, 0, 1, 2\}$$

для $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$ следующим соотношением

$$\Theta(X_1, X_2) = \overline{\max_{\Upsilon(X_1, X_2)}} \left(\max_{E \in \Upsilon(X_1, X_2)} (\eta(E)) \right).$$

Для $X_1 = \emptyset$ или $X_2 = \emptyset$ определим

$$\Theta(X_1, X_2) = \lambda.$$

Полный граф $\widehat{I_f}$ с помеченными ребрами и множеством вершин $2^{Q \times Q}$, где Θ функция отметок, назовем глобальным информационным графом а.-функции f. Если $q \in Q_i$, то цикл

$$\{(q, q)\} \; E_1 \; X_1 \; E_2 \; X_2 \; \ldots \; X_{l-1} \; E_l \; \{(q, q)\}$$

в графе $\widehat{I_f}$ (соответственно I_f) назовем i-тым циклом, здесь через $E_1, \ldots E_l$ обозначены ребра. Если отметки ребер i-того цикла таковы, что

$$\Theta(E_1) = 1, \; \Theta(E_2) = 2, \; \Theta(E_3) \neq 1, \; \ldots \Theta(E_l) \neq 1,$$

соответственно,

$$\eta(E_1) = 1, \; \eta(E_2) = 2, \; \eta(E_3) \neq 1, \; \ldots \eta(E_l) \neq 1,$$

то назовем его i-тым информационным циклом в графе $\widehat{I_f}$ (соответственно I_f).

Лемма 1.4.

Для системы $\{f, f_{\text{Ш}}\}$ такой, что $[\{f, f_{\text{Ш}}\}] \supseteq$ **K** имеет место $[\{f, f_{\text{Ш}}\}] \ni G$ точно тогда, когда

1)$f \notin U(i)$ при всех натуральных i,

2)найдется натуральное $N \leq 2^{|Q|^2}$ такое, что для всех $i > N$ в графе $\widehat{I_f}$ имеется i-тый информационный цикл.

Лемма 1.5.

Для системы $\{f, f_{\text{Ш}}\}$ такой, что $[\{f, f_{\text{Ш}}\}]_A \supseteq$ **K** имеет место $[\{f, f_{\text{Ш}}\}]_A \ni G$ точно тогда, когда $f \notin U(i)$ при всех натуральных i.

§1.2. Доказательство лемм 1.1, 1.2, 1.3.

Пусть $Q_p^t \subseteq Q$ множество состояний а.-функции f, достижимых из состояния p за t тактов, а R_l — множество состояний, из которых достижимо состояние l. Обозначим через

$$Q_{pl}^t = Q_p^t \cap R_l,$$

тогда

$$Q_{pl}^{t+1} = \{\varphi(p,a) | a \in E_2^m, p \in Q_{pl}^t\} \cap R_l.$$

Так определенное Q_{pl}^{t+1} может быть найдено по Q_{pl}^t и R_l. Последовательность

$$Q_{pl}^t, t = 1, 2, \ldots$$

будет детерминированной, а, значит, и периодической. Можно выбрать период и предпериод этой последовательности равный, для простоты, одному и тому же числу ρ при всех $p, l \in Q$. Очевидна грубая оценка

$$\rho \leq (2^{|Q|})!$$

Итак для любых $p, l \in Q$

$$Q_{pl}^t = Q_{pl}^{t+\rho}, \text{ при } t = 1, 2, \ldots.$$

Доказательство леммы 1.1. Необходимость.

Пусть $N \neq \rho$ и через а.-функции $f_{\text{Ш}}, f$ выражена а-функция g, равная $B_{0,N}$. Это значит что, найдутся $k, D, s = D + kN$ такие, что на множестве $P_0(D, s)$ а.-функция g не является (j,i)-зависимой при $i \neq j (\operatorname{mod} N)$. Зафиксируем $i, j, i \neq j (\operatorname{mod} N)$.

Пусть а-функция g получилась операцией обратной связи из а-функции $\widetilde{g}$ и пусть $\widetilde{P_0}(D, s)$ множество (D, s) - экспериментов с а-функцией $\widetilde{g}$. Покажем, что $\widetilde{g}$ на $\widetilde{P_0}(D, s)$ также не является (j,i)-зависимой. В самом деле: пусть эксперимент (2), получившийся из эксперимента (4), нарушал (j,i) зависимость (рис.8).

$$((a(1), e(1)), (b(1), e(1))), \ldots ((a(s), e(s)), (b(s), e(s))) \qquad (4)$$

Это означает, что $b = \psi(q(j), a(i)) \neq b(i)$ (рис.8 сверху). Пусть входная буква $a(i)$ в диаграмме g в состоянии $q(j)$ получилась из входной буквы $(a(i), e)$ в диаграмме $\widetilde{g}$ в состоянии $q(j)$.

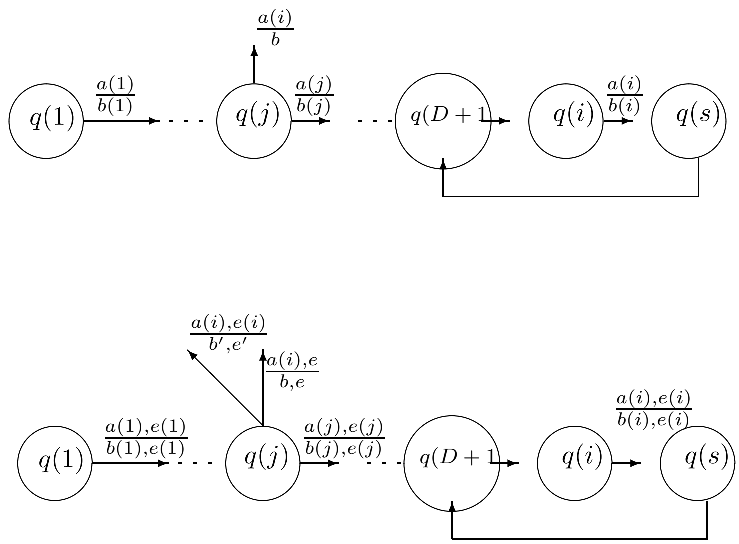


Рис.8

Обозначим через $\psi_{\widetilde{g}}$ выходную функцию а.-функции $\widetilde{g}$. Тогда имеем

$$\psi_{\widetilde{g}}(q(j),(a(i),e)) = (b,e), \qquad \psi_{\widetilde{g}}(q(j),(a(i),e(i))) = (b',e').$$

По правилу применимости о.с. имеем $e = e'$ и, если есть сохранение (j,i)-зависимости для $\widetilde{g}$, то $e' = e(i)$, откуда следует $b' = b = b(i)$, а это означает сохранение (j,i)-зависимости для g, что противоречит нашему предположению.

Пусть теперь g получилась суперпозицией а-функций g_1 и g_2 (рис. 9).

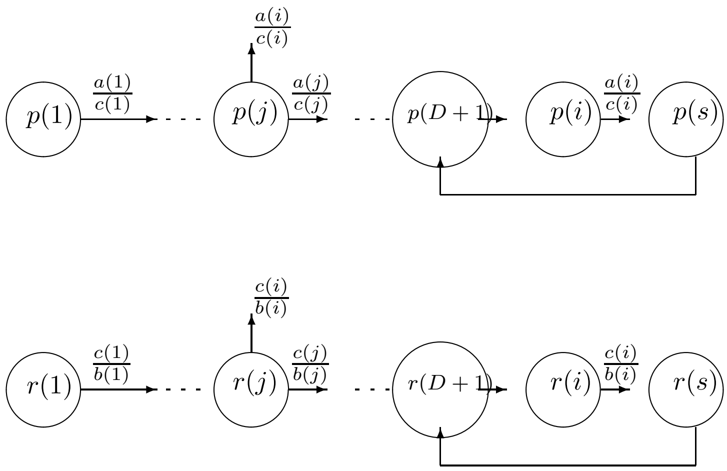


Рис.9

Пусть эксперимент (2) получился из экспериментов

$$\xi_1(i,j) = (a(1), c(1)), ..., (a(s), c(s)),$$

$$\xi_2(i,j) = (c(1), b(1)), ..., (c(s), b(s))$$

а-функций g_1 и g_2, соответственно. Если предположить, что g_1 и g_2 сохраняют (j,i)-зависимость, то получим, что g также сохраняет (j,i)-зависимость. Значит, хотя бы одна из а.-функций g_1 или g_2 не сохраняет (j,i)-зависимость на (D,s) экспериментах. Очевидно, что а-функция f_{III} сохраняет (j,i)-зависимости на (D,s) экспериментах.

Повторяя эти рассуждения, мы получим, что сама а-функция f не сохраняет (j,i)-зависимость на (D,s) экспериментах при $i \neq j (\operatorname{mod} N)$.

Если для (D, s)- экспериментов выполнена (j, i)-зависимость, то будет выполнена (j_1, i)-зависимость, где

$$j_1 = j(\operatorname{mod} \rho) \qquad j_1 \neq i(\operatorname{mod} N).$$

В самом деле: это следует из того, что для каждого $p \in Q_D$ и для каждого $r \in Q_{p,p}^{i-D}$ имеем $Q_{r,p}^{j-i} = Q_{r,p}^{j_1-i}$. Так как $N \neq \rho$ для $i = j(\operatorname{mod} N)$ а.-функция f также не будет (j, i)-зависимой. Получилось, что счетчик $B_{D,N}$ допустим системой $\{f_{\text{Ш}}, f\}$. Очевидно, что из допустимости $B_{0,2\rho}$ следует допустимость $B_{0,\rho}$. Необходимость доказана.

Достаточность.

Для фиксированных $N, D, k, s = D + kN$ и некоторого j рассмотрим множество всех (D, s)-экспериментов P с а-функцией f, допускающее счетчик $B_{D,N}$. Пусть $|P| = t$ и g_j параллельное соединение t копий а-функции f. Пусть g_j описывается уравнениями (1) и $\alpha_l \in P$ — l-тый эксперимент из P,

$$\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1))\ (a^{(l)}(2), b^{(l)}(2)), \ldots, (a^{(l)}(s), b^{(l)}(s)),$$

$l = 1, 2, ...t$,

$$a(i) = (a^{(1)}(i)...a^{(t)}(i)), b(i) = (b^{(1)}(i)...b^{(t)}(i)), i = 1, 2, \ldots, s.$$

Можно считать, что среди $a(1), a(2), \ldots, a(s)$ нет равных (в противном случае можно добавить фиктивные входы и выбрать $a(1), a(2), \ldots, a(s)$ попарно не равными). Рассмотрим (D, s)-эксперимент (2) с а-функцией g_j. Для $a \in E_2^n$ определим булевую вектор-функцию

$$h_j : E_2^{m+n} \to E_2^m,$$

$h_j \in [\{f_{\text{Ш}}\}]$, такую что

$$h_j(x, y) = \begin{cases} a(i) \text{ для } x = a(i), y = b(i), i = 1, \ldots, s \\ a(j) \text{ для } y = \psi(q(j), x), x \in E_2^n, y \in E_2^m. \end{cases}$$

Это можно сделать ввиду отсутствия $(j, i)-$ зависимостей. В состоянии $q(j)$ выходная функция а-функции

$$f_j(x) = h_j(x, g_j(x))$$

(см. рис. 10 и рис. 11) принимает значение $a(j)$ для всех входных букв, т.е. является константой.

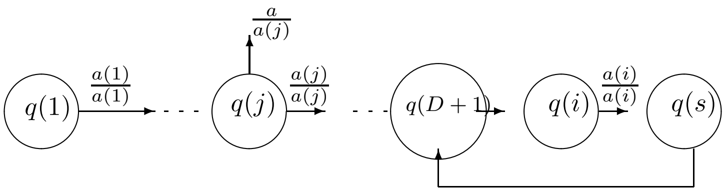


Рис.10

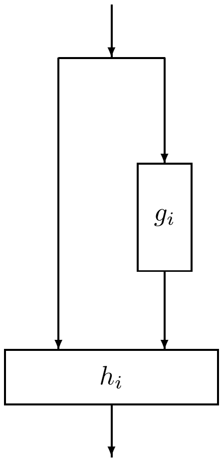


Рис.11

Рассмотрим а.-функцию (см. рис. 12)

$$F_{N,D,k}(x) = f_s(\ldots f_2(f_1(x))\ldots)$$

с начальным состоянием $(q(1), q(1), \ldots, q(1))$. Ее диаграмма имеет фрагмент, изображенный на рисунке 13. В каждом состоянии фрагмента (рис.13) реализуется константа, конкретно: в состоянии $(q(j), q(j), \ldots, q(j))$ — константа $a(j)$.

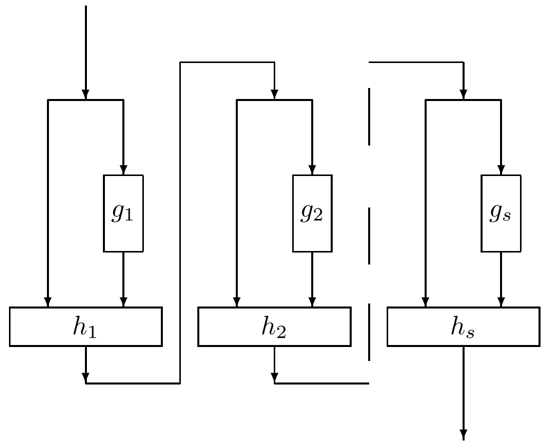


Рис.12

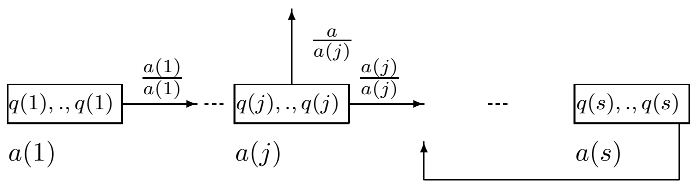


Рис.13

После n применений операции обратной связи получится а-функция, с точностью до булевой перекодировки, равная $B_{D,N}$. Достаточность доказана.

Доказательство леммы 1.2.Необходимость.

Пусть через $f_{\text{Ш}}, f$ А-выражена а-функция g, равная $B_{0,s}$. Функция g А-допускает счетчик $B_{0,s}$. Пусть g получилась суперпозицией а-функций g_1 и g_2, а s-эксперимент (2) получился из s-экспериментов

$$\xi_1(i,j) = (a(1), c(1)), ..., (a(s), c(s)),$$

$$\xi_2(i,j) = (c(1), b(1)), ..., (c(s), b(s)),$$

а-функций g_1 и g_2, соответственно. Если предположить, что g_1 и g_2 сохраняют (j,i)-зависимость, то получим, что g также сохраняет (j,i)-зависимость. Значит, хотя бы одна из а.-функций g_1

или g_2 не сохраняет (j,i)-зависимость на s экспериментах. Очевидно, что а-функция $f_{\text{Ш}}$ сохраняет все (j,i)-зависимости на s экспериментах. Повторяя эти рассуждения, мы получим, что а-функция f не сохраняет (j,i) -зависимости s-экспериментах и допускает счетчик $B_{0,s}$. Необходимость доказана.

Достаточность.

Для фиксированных $s, j, 1 \leq j \leq s$ рассмотрим множество всех s-экспериментов P с а-функцией f, допускающее счетчик $B_{0,s}$. Пусть $|P| = t$ и g_j параллельное соединение t копий а-функции f. Пусть g_j описывается уравнениями (1) и $\alpha_l \in P$ — l-тый эксперимент из P,

$$\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1))\ (a^{(l)}(2), b^{(l)}(2)), ..., (a^{(l)}(s), b^{(l)}(s)),$$

$l = 1, 2, ...t,$

$$a(i) = (a^{(1)}(i)...a^{(t)}(i)), b(i) = (b^{(1)}(i)...b^{(t)}(i)), i = 1, \ldots, s.$$

Можно считать, что среди $a(1), a(2), \ldots, a(s)$ нет равных (в противном случае можно добавить фиктивные входы и выбрать их попарно не равными). Рассмотрим s-эксперимент (2) с а-функцией g_j. Для $a \in E_2^n$ определим булевую вектор-функцию

$$h_j : E_2^{m+n} \to E_2^n,$$

$h_j \in [\{f_{\text{Ш}}\}]$, такую что

$$h_j(x,y) = \begin{cases} a(i) \text{ для } x = a(i), y = b(i), i = 1, \ldots, s, \\ a(j) \text{ для } y = \psi(q(j), x), x \in E_2^n, y \in E_2^m. \end{cases}$$

Это возможно ввиду отсутствия (j,i) зависимостей. В состоянии $q(j)$ выходная функция а-функции

$$f_j(x) = h_j(x, g_j(x))$$

(см. рис. 11, рис. 14) принимает значение $a(j)$ для всех входных букв, т.е. является константой.

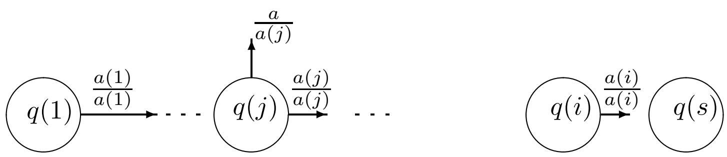


Рис.14

Рассмотрим а.-функцию (см. рис. 12)

$$F_s(x) = f_s(\dots f_2(f_1(x))\dots)$$

с начальным состоянием $(q(1), q(1), \dots, q(1))$. Ее диаграмма имеет фрагмент, изображенный на рисунке 15. В каждом состоянии (рис.15) реализуется константа, конкретно: в состоянии

$$(q(j), q(j), \dots, q(j)) - \text{ константа } a(j).$$

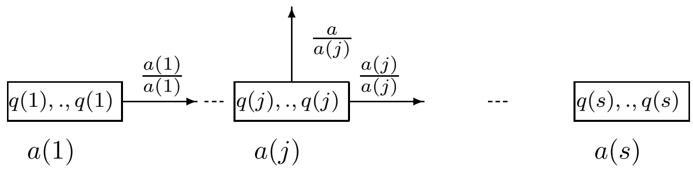


Рис.15

Функция $F_s(F_s(\dots F_s(x)\dots))$, где F_s взято τ раз, с точностью до булевой перекодировки, τ - равна $B_{0,s}$. Лемма 1.2 доказана.

Доказательство леммы 1.3.

Возьмем такой случай расположения чисел

$$D < D + \rho < i < i + \rho < j < s - \rho < s$$

Если для (D, s)- экспериментов выполнена (j, i)-зависимость, то для (D_1, s_1)- экспериментов, будет выполнена (j_1, i_1)-зависимость, где

$$D_1 < D_1 + \rho < i_1 < D + 2\rho < j_1 < s_1 < j_1 + \rho,$$

и

$$D_1 = D, \qquad i_1 = i, \qquad \text{æ}_1 = j, \qquad s_1 = s,$$

по модулю ρ. Это следует из того, что (см. рис. 16) для каждого $p \in Q^D_{q_1,p}$ имеем

$$Q^D_{q_1,p} = Q^{D_1}_{q_1,p} \qquad Q^i_{p,p} = Q^{i_1}_{p,p};$$

для каждого $r \in Q_{p,p}^{i-D}$ имеем $Q_{r,p}^{j-i} = Q_{r,p}^{j_1-i_1}$; для каждого $l \in Q_{r,p}^{j-i}$ имеем $Q_{l,p}^{s-j} = Q_{l,p}^{s_1-j_1}$.

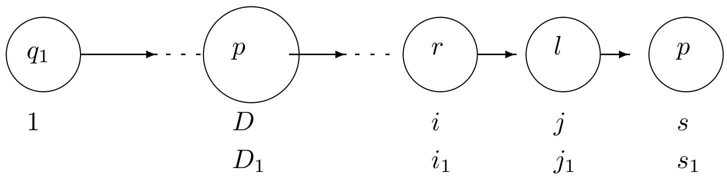


Рис.16

В случае другого расположения чисел D, i, j мы таким же способом сократим интервалы между числами $1, D, i, j$. Следовательно, наличие или отсутствие (j, i)-зависимости на (D, s) - экспериментах равносильно, соответственно, наличию или отсутствию (j_1, i_1)-зависимости на (D_1, s_1)-экспериментах при $D_1 \leq s_1 \leq 5\rho$. Последний факт проверяется перебором всех (D_1, s_1)-экспериментов.

Таким образом, условие выразимости системой $\{f_{\text{Ш}}, f\}$ всех константных а.-функций алгоритмически проверяемо.

В случае А-полноты заметим, что последовательность

$$Q_p^t, t = 1, 2, \ldots, p \in Q$$

будет периодической и пусть ее период и предпериод также равен ρ. Пусть для $i + \rho < j$ выполнена (j, i)-зависимость на s-экспериментах, тогда на s_1- экспериментах, будет выполнена (j_1, i_1)-зависимость при $i_1 < 2\rho < j_1 < 3\rho$,где $i_1 = i$ æ$_1 = j$ по модулю ρ. Это следует из того, что

$$Q_{q_1}^i = Q_{q_1}^{i_1},$$

и для каждого $r \in Q_{q_1}^i$ имеем (см. рис. 17) $Q_r^{j-i} = Q_r^{j_1-i_1}$;

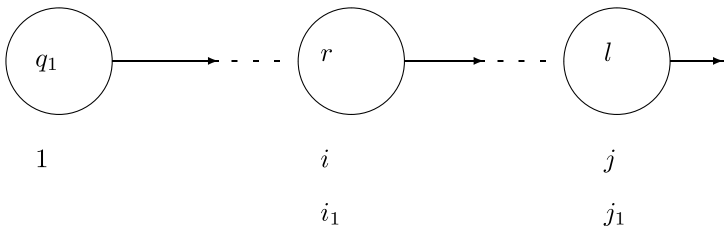


Рис.17

В случае $i \geq j$ мы таким же способом сократим интервалы между числами $1, i, j$. Следовательно, наличие или отсутствие (j, i)-зависимости на s-экспериментах равносильно, соответственно, наличию или отсутствию (j_1, i_1)-зависимости на s_1-экспериментах при $s_1 \leq 3\rho$. Последний факт проверяется перебором всех s_1-экспериментов.

Таким образом, условие А-выразимости системой $\{f_{\text{Ш}}, f\}$ всех константных а.-функций алгоритмически проверяемо. Лемма 1.3 доказана.

§1.3. Доказательство лемм 1.4, 1.5.

Пусть I_1, I_2 полные графы с множеством вершин
$P_1 \times P_1, P_2 \times P_2$ и функциями отметок ребер

$$\chi_1\colon P_1 \times P_1 \to \{\lambda, 0, 1, 2\}, \chi_2\colon P_2 \times P_2 \to \{\lambda, 0, 1, 2\},$$

соответствено. Полный граф с множеством вершин
$(P_1 \times P_2) \times (P_1 \times P_2)$ и функцией отметок

$$\chi\colon (P_1 \times P_2) \times (P_1 \times P_2) \to \{\lambda, 0, 1, 2\},$$

где

$$\chi(((p_1{}^1, p_1{}^2), (p_2{}^1, p_2{}^2)), ((p_3{}^1, p_3{}^2), (p_4{}^1, p_4{}^2))) =$$
$$\max(\chi_1((p_1{}^1, p_2{}^1), (p_3{}^1, p_4{}^1)), \chi_2((p_1{}^2, p_2{}^2), (p_3{}^2, p_4{}^2)))$$

назовем прямым произведением графов I_1, I_2 и обозначим через $I_1 \times I_2$. Граф $\underbrace{I \times \ldots \times I}_{l}$ будем называть l-той степенью графа I и обозначать через I^l.

Утверждение 1.1

В графе $\widehat{I_f}$ существует i - тый информационный цикл точно тогда, когда для некоторого натурального $l \leq 2^n |Q| 2^{|Q|^2}$ i - тый информационный цикл существует в графе $(I_f)^l$.

Доказательство.

Пусть f а.-функция, определенная уравнениями (1), I_f — ее локальный информационный граф, $\widehat{I_f}$ — ее глобальный информационный граф, $q \in Q_i, X_0 = \{(q, q)\}$,

$$X_0 \overset{x_0}{\to} X_1 \overset{x_1}{\to} \ldots X_{s-1} \overset{x_{s-1}}{\to} X_0$$

i-тый информационный цикл в $\widehat{I_f}$. Длина s этого цикла не превосходит числа состояний графа $\widehat{I_f}$, которое не превосходит $2^{|Q|^2}$.

Пусть

$$\Upsilon_j = \Upsilon(X_j, X_{j+1}), \qquad j = 0, 1, \ldots, s-1$$

система ребер графа I_f, по которым выбрана отметка

$$x_j = \max_{E \in \Upsilon_j} \chi(E)$$

ребра X_j, X_{j+1} графа $\widehat{I_f}$. Пусть l число разных цепей, идущих по ребрам систем $\Upsilon_j, j = 0, 1, \ldots, s-1$ из X_0 в X_0, тогда в $(I_f)^l$

будет i-тый информационный цикл, составленный из указанных цепей. Заметим, что

$$l \leq |Q| 2^n s = 2^n |Q| 2^{|Q|^2}$$

Обратно. Пусть в $(I_f)^l$ имеется i-тый информационный цикл, $q \in Q_i$

$$(q_1^0, \ldots, q_l^0) \overset{x_0}{\to} \ldots \to (q_1^{s-1}, \ldots, q_l^{s-1}) \overset{x_{s-1}}{\to} (q_1^0, \ldots, q_l^0),$$

$$q_j^r \in Q \times Q, \qquad r = 1, \ldots, s-1, j = 1, \ldots, l,$$

$$(q_1^0, \ldots, q_l^0) = ((q, q), \ldots, (q, q)),$$

Пусть

$$X_i = \{q_j^i | j = 1, 2, \ldots, l\},$$

тогда цикл

$$(X_0) \overset{y_0}{\to} (X_1) \overset{y_1}{\to} \ldots \overset{y_{s-1}}{\to} (X_0)$$

будет глобальным информационным циклом в $\widehat{I_f}$. В самом деле: $y_0 = x_0 = 1$ (см. рис. 7 справа); $y_1 = x_1 = 2$ не может измениться так как она уже максимальна. Если $x_j = 0$ и возникла ситуация, когда для одной системы ребер отметка равна 0, а для другой — 1, тогда функция $\overline{\max}$ выберет отметку 0. Отметка λ возникнуть здесь не может. Утверждение 1.1 доказано.

Пусть $g(x) = y$ одноместная а.-функция с уравнениями (1), I_g ее локальный информационный граф. Путь

$$(p(1), q(1)) \overset{x_1}{\to} (p(2), q(2)) \overset{x_2}{\to} \ldots \overset{x_{l-1}}{\to} (p(l), q(l))$$

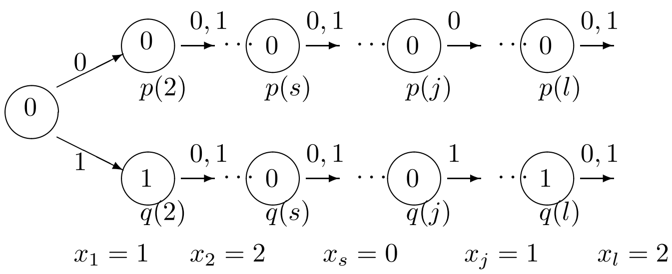


Рис.18

в графе I_g, между отметками которого и функциями φ и ψ выполнено соотношение (5), назовем *приведенным* (см. рис. 18). Здесь $\psi_p(a) = \psi(p, a)$.

$$\begin{cases} \psi_{p(i)} \equiv \psi_{q(i)} \equiv 0, \text{ при } x_i \neq 2; \\ \psi_{p(i)} \equiv 0, \psi_{q(i)} \equiv 1, \text{ при } x_i = 2; \\ \varphi(p(i), 0) = \varphi(p(i), 1) = p(i+1), \text{ при } x_i \neq 1; \\ \varphi(q(i), 0) = \varphi(q(i), 1) = q(i+1), \text{ при } x_i \neq 1; \\ \varphi(p(i), 0) = p(i+1), \varphi(q(i), 1) = q(i+1) \text{ при } x_i = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Утверждение 1.2.

Пусть в графе I_f имеется i-тый цикл длины l с отметками $x_1, x_2, \ldots x_l$, тогда через $\{f, f_{\text{Ш}}\} \cup \mathbf{K}$ выразима одноместная а.-функция g, в графе I_g которой имеется i-тый *приведенный* цикл с теми же отметками $x_1, x_2, \ldots x_l$.

Доказательство.

Пусть указанный цикл в графе I_f имеет вид (рис.19). Состояния $p_2, p_3, \ldots p_l$ образуют верхнюю ветвь, а состояния $q_2, q_3, \ldots q_l$ — нижнюю ветвь цикла, $p_i, q_i \in Q, a_i, b_i \in E_2^n, c_i, d_i \in E_2^m$.

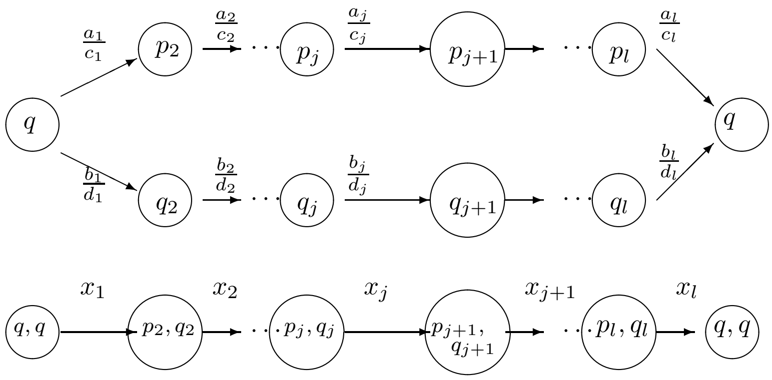


Рис.19

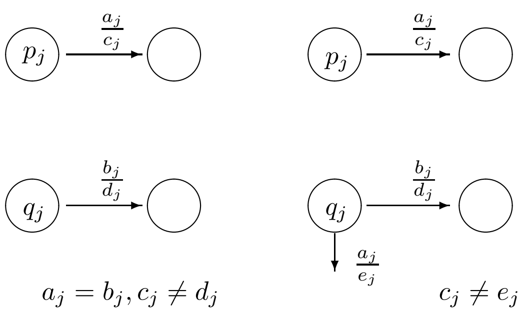
Определим функции

$$\gamma_j \colon E_2 \to E_2^n, \qquad \delta_j \colon E_2^n \times E_2^m \to E_2$$

по a_j, b_j, c_j, d_j (см. рис. 18), $j = 1, 2, \ldots l$, следующим образом:

$$\gamma_j(z_1) = \begin{cases} a_j \text{ при } x_j = 0; \\ a_j \text{ при } x_j = 1, z_1 = 0; \\ b_j \text{ при } x_j = 1, z_1 = 1; \\ a_j \text{ при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j; \\ a_j \text{ при } x_j = 2, z_1 = 0; \\ b_j \text{ при } x_j = 2, z_1 = 1; \end{cases},$$

$$\delta_j(z_2, y_1) = \begin{cases} 0 \text{ при } x_j = 0, x_j = 1; \\ 0 \text{ при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j, z_2 = c_j, y_1 = a_j; \\ 1 \text{ при } x_j = 2, a_j = b_j, c_j \neq d_j, z_2 = d_j, y_1 = b_j; \\ 0 \text{ при } x_j = 2, a_j \neq b_j, e_j \neq c_j, z_2 = c_j, y_1 = a_j; \\ 1 \text{ при } x_j = 2, a_j \neq b_j, e_j \neq c_j, z_2 = e_j, y_1 = a_j; \\ 1 \text{ при } x_j = 2, a_j \neq b_j, e_j \neq c_j, y_1 = b_j. \end{cases}$$



а б

Рис.20

Пусть а.-функции $D_1, D_2 \in [\{\mathbf{K}, f_{\text{Ш}}\}]$ и имеют уравнения (6),(7), соответственно,

$$D_1 \colon E_2^* \to (E_2^n)^*, \qquad D_2 \colon (E_2^m \times E_2^n)^* \to E_2^*.$$

S_1, S_2 множества состояний а.-функций D_1, D_2, соответственно, и $S_1 = S_2 = \{1, 2, \ldots, l\}$. Здесь $z_1 \in E_2, y_1 \in E_2^n, z_2 \in E_2^m, y_2 \in E_2, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$.

$$\begin{cases} s_1(1) = 1, \\ s_1(t+1) = s_1(t) + 1 \pmod{l}, \\ y_1(t) = \gamma_{s_1(t)}(z_1) \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} s_2(1) = 1, \\ s_2(t+1) = s_2(t) + 1 \pmod{l}, \\ y_2(t) = \delta_{s_2(t)}(z_2, y_1) \end{cases} \qquad (7)$$

В графе одноместной а.-функции (рис.21) $h = D_2(f(D_1(z_1)), D_1(z_1))$

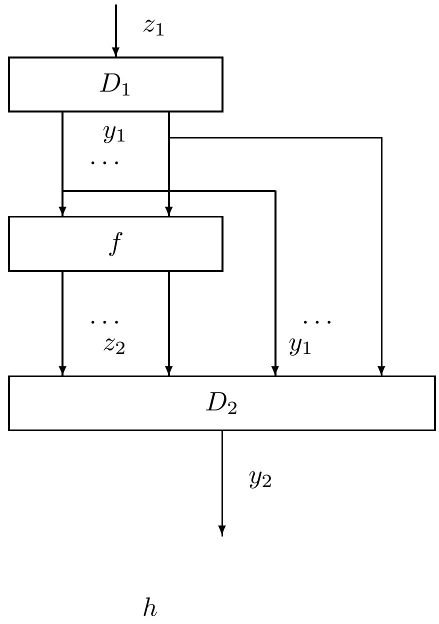


Рис.21

будет "почти приведенный"цикл с такими же отметками $x_1, \ldots x_l$ с той разницей, что для $x_i = 2$ могут быть два варианта переходов а) и б) (рис. 22), соответствующих случаям а) и б) рисунка 20.

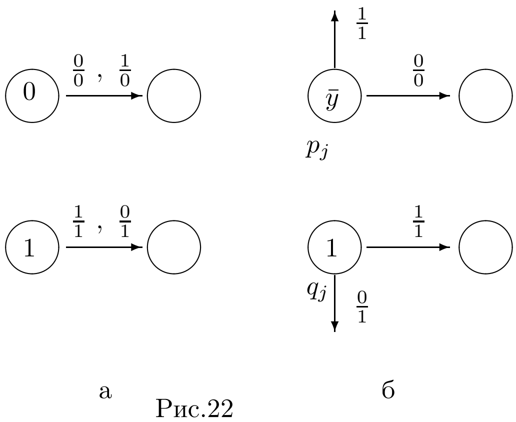


Рис.22

Далее мы сведем случай б) к случаю а). Пусть а.-функция $H_j(u,v,z), H_j\colon (E_2^3)^* \to E_2^*$ имеет множество состояний $S = \{1,2,\ldots,l\}$ и уравнения,

$$\begin{cases} s(1) = 1, \\ s(t+1) = s(t) + 1 \pmod l, \\ H_j(t) = \begin{cases} u(t) \text{ для } s(t) \neq j, \\ u(t) + v(t) + z(t) \text{ для } s(t) = j. \end{cases} \end{cases}$$

Если номер j соответствует случаю (рис.20б, 22б), тогда а.-функция (рис.23)

$$F_j(y) = H_j(h(y), \overline{h(\bar{y})}, \bar{y}),$$

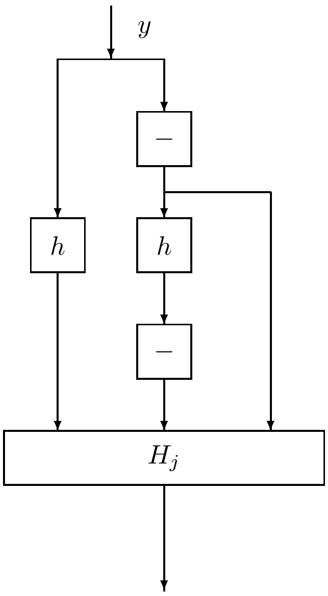


Рис.23

имеет фрагмент диаграммы (рис.24)

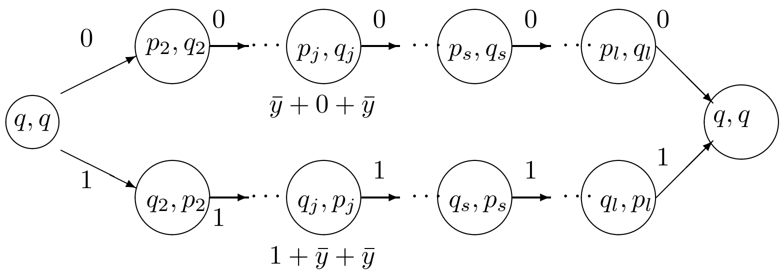


Рис.24

и приведенный цикл с теми же отметками $x_1, x_2, \ldots x_l$. В самом деле: для $s(t) \neq j$ выполнено $F_j \equiv h(y)$, а также условия (5). Если имеет место случай рис. 22 б, то выходная функция в состоянии (p_j, q_j) (рис.24) будет такова

$$\bar{y} + 0 + \bar{y} = 0,$$

в состоянии (q_j, p_j) будет выходная функция

$$1 + \bar{y} + \bar{y} = 1.$$

Таким образом, для $F_j(y)$ будут выполнены все условия (5), кроме:

$$\varphi(p(j), 1) = p(j+1) \qquad \varphi(q(j), 0) = q(j+1)$$

в случае б. При помощи срабатывающей в j-тый момент обратной связи указанный недостаток исправляется и фрагмент диаграммы приводится к виду (рис.18), схемой изображенной на рисунке 25, где а.-функция $w_j(x, y)$

$$w_j : (E_2^2)^* \to E_2$$

имеет множество состояний S и уравнения

$$\begin{cases} s(1) = 1, \\ s(t+1) = s(t) + 1 \pmod{l}, \\ w_j(t) = \begin{cases} x(t) \text{ для } s(t) \neq j, \\ y(j) \text{ для } s(t) = j. \end{cases} \end{cases}$$

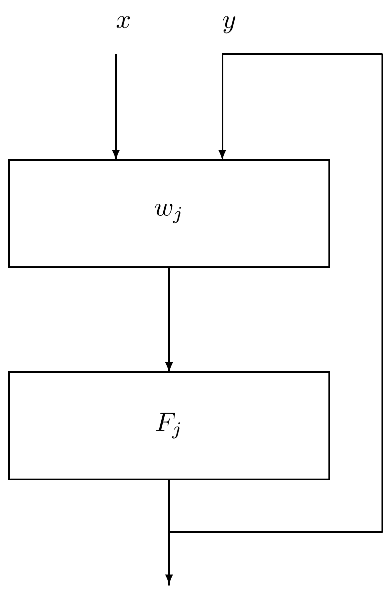


Рис.25

Утверждение 1.2 доказано.

Утверждение 1.3.

Пусть а.-функция $f = G$, тогда найдется натуральное $N \leq |Q|^2$ такое, что для любого $i > N$, в графе I_f имеется i-тый информационный цикл.

Доказательство.

Пусть f одноместная а.-функция с уравнениями (1), и $f = G$, (см. рис.4). Напомним, что последовательность

$$\{q_1\}, Q_1, Q_2, \ldots$$

имеет предпериод ρ и период ρ. Пусть $i > \rho$ и $q \in Q_i$ — такое состояние, что для любого слова $\beta \in E_2^*$ найдется слово $\gamma \in E_2^*$ такое, что $\varphi(q, \beta\gamma) = q$ (q — состояние из сильносвязной компаненты). Пусть слова $\alpha, \bar{\alpha} \in E_2^*$ таковы, что

$$\alpha = a_1 a_2 \ldots a_\rho, \qquad \bar{\alpha} = \overline{a_1}\ \ \overline{a_2} \ldots \overline{a_\rho}.$$

Рассмотрим путь (рис. 26) в графе I_f. В состояние p_j из q ведет путь $a_1 a_2 \ldots a_{j-1}$, в состояние q_j — путь $\overline{a_1}\ \ \overline{a_2} \ldots \overline{a_{j-1}}$.

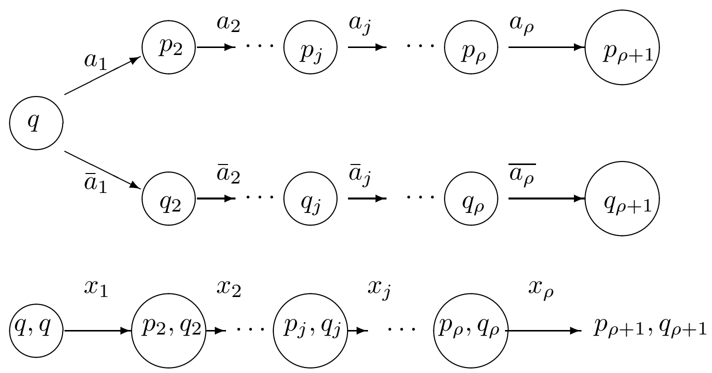


Рис.26

Так как в а.-функции $f = G$, в состоянии p_j реализуется константа a_{j-1}, а в состоянии q_j — константа $\overline{a_{j-1}}$, получаем, что

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = \ldots = x_\rho = 2.$$

Из того, что $Q_i = Q_{i+\rho}$, имеем $p_{\rho+1}, q_{\rho+1} \in Q_i$. Для натурального s рассмотрим множество

$$H_s = \{\alpha^{s-l}(\bar{\alpha})^l | l = 1, 2, \ldots, s\} \subset E_2^*$$

слов длины $s\rho$, составленных из слов α и $\bar{\alpha}$. Пусть $\gamma, \beta \in H_s$ таковы, что

$$\gamma = \alpha^l(\bar{\alpha})^{s-l}, \qquad \beta = \alpha^j(\bar{\alpha})^{s-j},$$

где $l < j$, состояния $r_\beta, r_\gamma, p \in Q$, такие что

$$r_\beta = \varphi(q, \beta), \qquad r_\gamma = \varphi(q, \gamma), \qquad p = \varphi(q, \alpha^l).$$

В графе I_f из пары (q, q) в пару (r_β, r_γ) ведет путь (рис.27), определяемый парой слов (β, γ) с отметками

$$y_1 = \ldots = y_{l\rho} = 0, y_{l\rho+1} = 1,$$

$$y_{l\rho+2} = \ldots = y_{j\rho+1} = 2,$$

$$y_{j\rho+2} = \ldots = y_{s\rho} = 0.$$

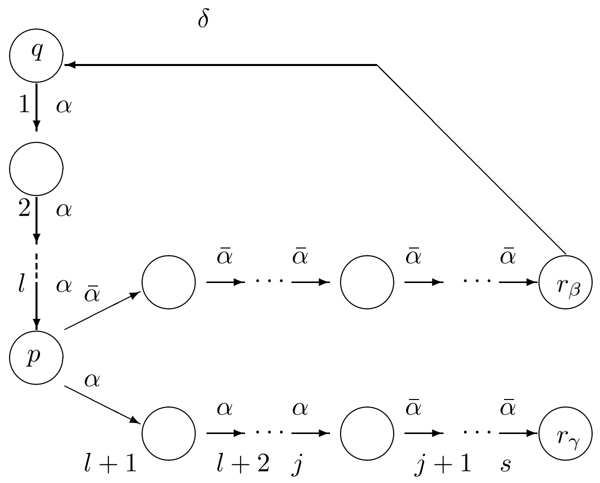


Рис.27

Если предположить, что для любого s и любых $\gamma, \beta \in H, \gamma \neq \beta$ выполнено, что $r_\beta \neq r_\gamma$, то получим противоречие с конечностью множества состояний а.-функции f. Следовательно, найдется такое s и такие слова $\gamma, \beta \in H, \gamma \neq \beta$ длины $s\rho$, что выполнено $r_\beta = r_\gamma$. Заметим, что $r_\beta, r_\gamma, p, q \in Q_i$. Пусть δ такое слово, что $\varphi(r_\beta, \delta) = q$, тогда из пары (p, p) начинается искомый i-тый информационный цикл (рис.27). Утверждение 1.3 доказано.

Утверждение 1.4.

Пусть а.-функция h получается суперпозицией а.-функций h_1, h_2, при этом в графах I_h, I_{h_1}, I_{h_2}, соответственно, есть ребра с отметками

$$((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \xrightarrow{x} ((r_1, r_2), (s_1, s_2)),$$

$$(p_1, q_1) \xrightarrow{y} (r_1, s_1), (p_2, q_2) \xrightarrow{z} (r_2, s_2),$$

тогда отметки x, y, z связаны соотношениями:

$$(x = 2) \to ((y = 2) \vee (z = 2)),$$

$$(x = 0) \to ((y = 2) \vee (y = z = 0)).$$

Доказательство.

Рассмотрим фрагмент диаграммы а.-функции h (рис.28),

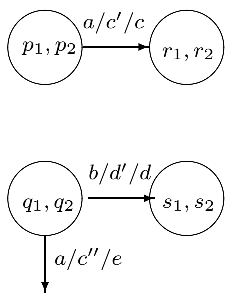


Рис.28

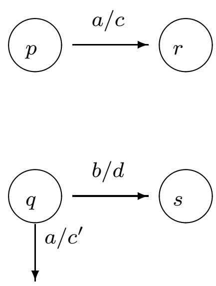


Рис.29

где показаны выходы а.-функций h_1, h_2. Пусть $x = 2$ и $c \neq e$, тогда, если $c'' \neq c'$, то $y = 2$, если $c'' = c'$, то $z = 2$. Пусть $x = 0, a = b, c = d$, тогда при $c' \neq d'$ имеем $y = 2$, а при $c' = d'$ имеем $y = z = 0$. Если при $x = 0$ выполнено $p_1 = q_1, p_2 = q_2, r_1 = s_1, r_2 = s_2$, то $y = z = 0$. Утверждение 1.4 доказано.

Утверждение 1.5.

Пусть а.-функция h получена из а.-функции g при помощи операции обратной связи и в графе I_h есть ребро $(p, q) \xrightarrow{x} (r, s)$, тогда в графе I_g есть ребро $(p, q) \xrightarrow{y} (r, s)$, и при этом отметки ребер связаны соотношениями:

$$(x = 2) \to (y = 2);$$

$$(x = 0) \to (y \neq 1).$$

Доказательство.

Пусть а.-функция h получена из а.-функции g с уравнениями (1) операцией обратной связи примененной от последнего выхода к последнему входу. На рисунке 29 изображен фрагмент диаграммы а.-функции h, на рисунке 30 — соответствующий ему фрагмент диаграммы а.-функции g, где

$$e, l, e', e'' \in E_2, a, b \in E_2^{n-1}, c, d, c', c'' \in E_2^{m-1}.$$

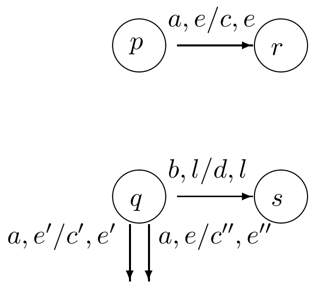


Рис.30

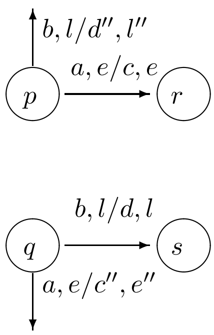


Рис.31

Пусть $x = 2, c' \neq c$ и предположим противное $y = 2$, то есть выполнено

$$(c'', e'') = (c, e).$$

Так как последний выход а.-функции g не зависит от ее последнего входа, а первая компанента у букв (a, e') и (a, e) одна и та же, значит (см. рис. 30 состояние q) выполнено

$$e'' = e' = e.$$

Но тогда $(a, e') = (a, e)$ это один и тот же входной сигнал и

$$(c', e') = (c'', e'') = (c, e).$$

Получилось противоречие с тем, что $c' \neq c$, значит $y = 2$.

Пусть теперь $x = 0, a = b, c = d$ (см. рис.31), предположим противное, что $y = 1$, и $(a, e) \neq (b, e)$, тогда выполнено

$$e'' = e, c'' = c, d'' = d, l'' = l.$$

Так как (по определению обратной связи) последний выход не зависит от последнего входа, имеем соотношение: $e'' = l, l'' = e$, значит $e = l$, откуда получаем противоречивое равенство $(a, e) = (b, l)$, значит $y \neq 1$. Утверждение 1.5 доказано.

Пусть $g(x) = y$ одноместная а.-функция с уравнениями (1), имеющая память в j-тый момент. Фрагмент диаграммы g вида (рис. 32) назовем j-тым *приведенным* фрагментом.

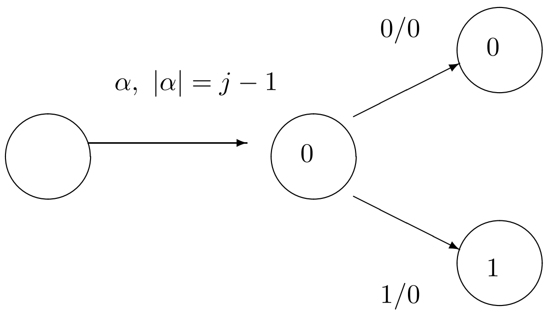


Рис.32

Здесь в состояниях помеченных $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ реализуются выходные функции $0, 1$, соответственно.

Утверждение 1.6.

Пусть а.-функция f имеет память в j-тый момент тогда через $\{f, f_{\text{Ш}}\} \cup \mathbf{K}$ A - выразима одноместная а.-функция g, имеющая j-тый приведенный фрагмент.

Доказательство.

Пусть а.-функция f имеет фрагмент (рис.33), где $b_{j+2} \neq d_{j+2}$

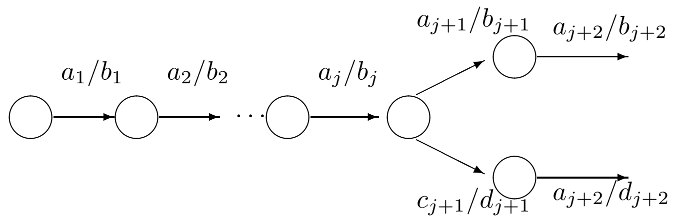


Рис.33

Определим функции

$$\gamma_j\colon E_2 \to E_2^n, \qquad \delta_j\colon E_2^n \times E_2^m \to E_2$$

по a_i, b_i следующим образом:

$$\gamma_i(z_1) = \begin{cases} a_i \text{ при } i \le j; \\ a_{j+1} \text{ при } i = j+1, z_1 = 0; \\ c_{j+1} \text{ при } i = j+1, z_1 = 1; \\ a_{j+2} \text{ при } i = j+2; \end{cases},$$

$$\delta_i(z_2, y_1) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \le j+1; \\ 0 \text{ при } i = j+2, y_1 = b_{j+2}; \\ 1 \text{ при } i = j+2, y_1 = d_{j+2}. \end{cases}$$

Тогда а.-функция g (рис.21) имеет j-тый приведенный фрагмент, где диаграммы а.-функций D_1, D_2 изображены на рисунке 34.

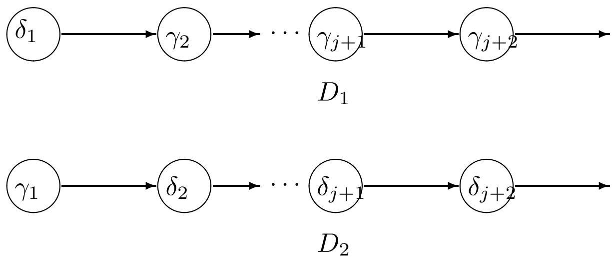


Рис.34

Очевидно, что

$$D_1, D_2 \in [\{f_{\text{Ш}}\} \cup \mathbf{K}]_A, g \in [\{f, D_1, D_2\}]_A.$$

Утверждение 1.6 доказано.

Утверждение 1.7.

Пусть а.-функция h получается суперпозицией а.-функций h_1, h_2 и для некоторого i выполнено $h \notin U(i)$, тогда $h_1 \notin U(i)$ или $h_2 \notin U(i)$.

Доказательство.

Рассмотрим фрагмент а.-функции h (см. рис. 35)

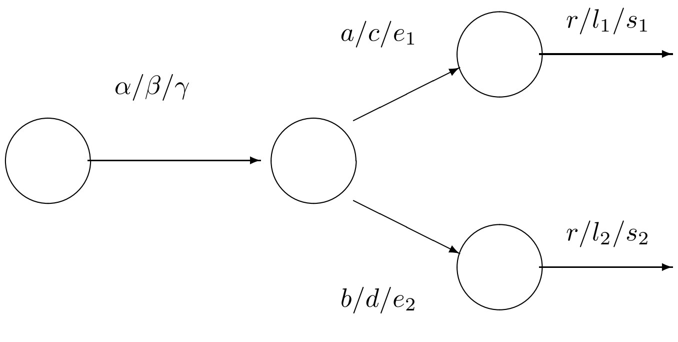


Рис.35

на котором нарушается свойство $h \in U(i)$. Здесь $s_1 \neq s_2$. Если $l_1 \neq l_2$, то $h_1 \notin U(i)$; если $l_1 = l_2$, то $h_2 \notin U(i)$. Утверждение 1.7 доказано.

Утверждение 1.8.

Пусть а.-функция h получена из а.-функции g операцией обратной связи и для некоторого i выполнено $h \notin U(i)$, тогда $g \notin U(i)$.

Доказательство.

Пусть фрагмент а.-функции h (см. рис. 3) получился при операции обратной связи из фрагмента а.-функции g (см. рис. 36)

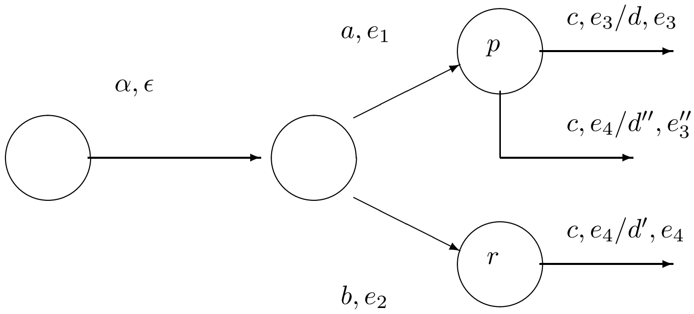


Рис.36

Здесь $d \neq d'$. Если $e_3 = e_4$, то $g \notin U(i)$. Предположим, что $e_3 \neq e_4$, тогда по определению обратной связи $e_3 = e_3''$ и, значит по сигналу (c, e_4) в состояниях p и r будут получаться разные выходные буквы (d'', e_3) и (d_2', e_4). Значит, $g \notin U(i)$. Утверждение 1.8 доказано.

Доказательство леммы 1.4. Достаточность.

Зафиксируем $i > N$. Выберем в графе $\widehat{I_f}$ i-тый информационный цикл длины p. По утверждению 1.1 в графе $(I_f)^l$ для некоторого l существует i-тый информационный цикл длины p, j-тая проекция которого имеет отметки

$$x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^p, \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$

$$\max_j x_{ij}^1 = 1, \qquad \max_j x_{ij}^2 = 2, \qquad \max_j x_{ij}^s \neq 1, \qquad s = 3, 4, \ldots, p.$$

По утверждению 1.2 найдется одноместная а.-функция

$$g_{ij} \in [\mathbf{K} \cup \{f, f_{\text{Ш}}\}],$$

в источнике которой существует приведенный цикл с теми же отметками

$$x_{ij}^1, \ldots, x_{ij}^p, \qquad j = 1, 2, \ldots, l$$

(см. рис. 18). Пусть $\{j | x_{ij}^s = 1\} = \epsilon_i(s), 1 \leq s \leq p$. Из определения информационного цикла следует, что при

$s > 2, \epsilon_i(s) \neq \emptyset$, или при $s = 2$ существует натуральное $\xi_i(s)$ такое, что

$$x_{i,\xi_i(s)}^s = 2.$$

Рассмотрим схему (рис.37), где H_1 и H_2-булевые вектор-функции

$$H_1(z_1, z_2, s) = (x_1, x_2, \ldots, x_l);$$

$$H_2(y_1, y_2, \ldots, y_l, s) = (u, v);$$

$$u = \begin{cases} y_{\xi_i(2)}, \text{ при } s = 2; \\ y_{\xi_i(s)}, \text{ при } \epsilon_i(s) \neq \emptyset; \\ 0, \text{ при } \epsilon_i(s) = \emptyset; \end{cases},$$

$$v = \begin{cases} y_{\xi_i(2)} \text{ при } s = 2; \\ 0 \text{ при } s \neq 2; \end{cases},$$

$$x_j = \begin{cases} z_1 \text{ при } j = \xi_i(2), s = 2; \\ z_1 \text{ при } j \in \epsilon_i(s), s > 2, \epsilon_i(s) \neq \emptyset; \\ z_2 \text{ при } j \in \epsilon_i(s), s = 1; \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

А.-функции $B_{0,p}, g_{ij}, j = 1, 2, \ldots, l,$ — муровские, следовательно применима операция обратной связи. Каждая из а.-функций g_{ij} имеет диаграмму (рис.38) с той лишь разницей, что для отметки $x_{ij}^s = 1$ переход не является безусловным. Схема (рис.37) реализует а.-функцию $f_{p,i}$ с диаграммой (рис.38).

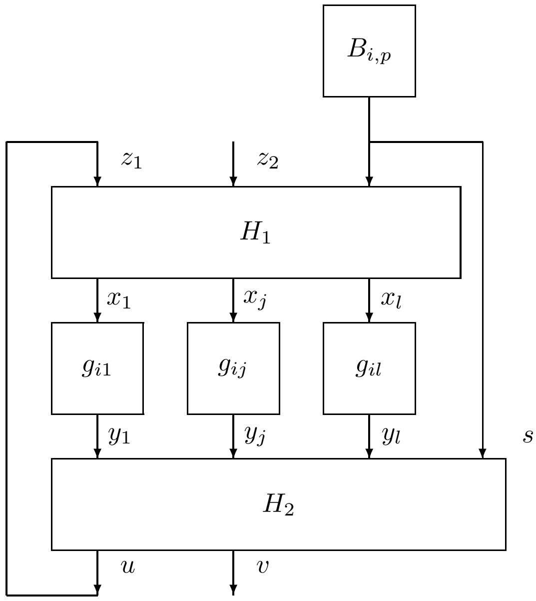


Рис.37

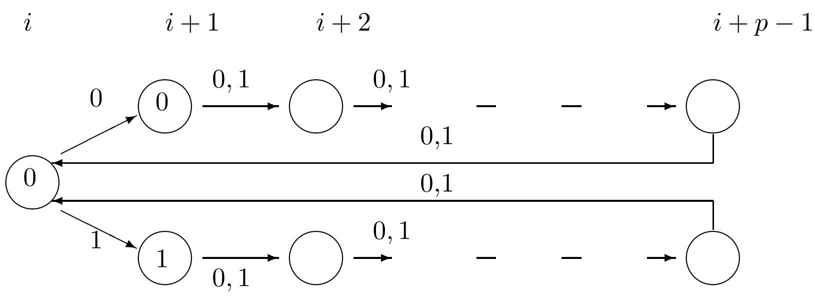


Рис.38

Без ограничения общности можно выбрать длину цикла p не зависящую от i. В самом деле: к каждой ветви i-того цикла (см.

рис. 19) можно добавить верхнюю ветвь, взятую произвольное число раз, тем самым, выбрать p кратным длинам всех i-тых информационных циклов, где $\rho \le i \le 2\rho$. Для каждого $i < N$ по условию леммы 1.4 $f \notin U(i)$, значит по утверждению 1.6 найдется а.-функция $g_i \in [\{f, f_{\text{Ш}}, \mathbf{K}]$, имеющая i-тый приведенный фрагмент. Тогда схема (рис. 39) равна "задержке"G. Здесь а.-функция

$$D\colon (E_2^{N+p})^* \to E_2^*,$$

имеет диаграмму, изображенную на рисунке 40.

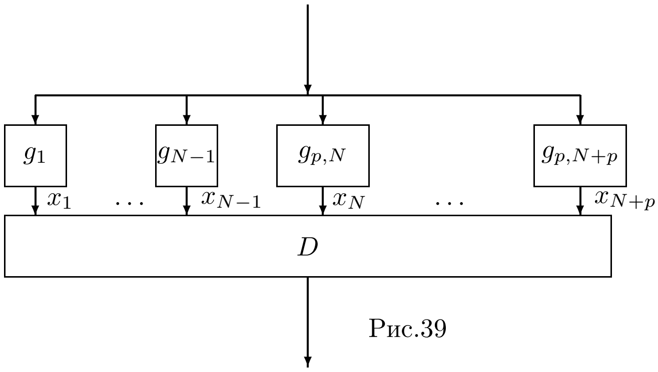


Рис.39

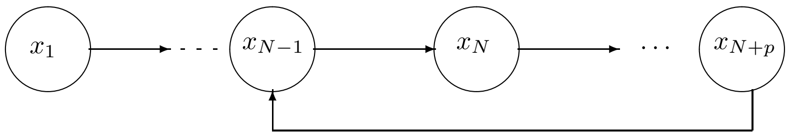


Рис.40

Достаточность доказана.

Необходимость.

Пусть
$$[\{f, f_{\text{Ш}}\}] \supseteq \mathbf{K} \text{ и } [\{f, f_{\text{Ш}}\}] \ni G.$$
Покажем, что
$$f \notin U(i)$$
для любого натурального i. В самом деле: $G \notin U(i)$, и если G получена некоторой схемой h, последняя операция которой суперпозиция двух функций h_1, h_2, то по утверждению 1.7
$$h_1 \notin U(i) \qquad \text{или} \qquad h_2 \notin U(i).$$
Если последняя операция указанной схемы —операция обратной связи, то а.-функция g, из которой получена G, по утверждению 1.8, обладает тем же свойством:
$$g \notin U(i).$$
Применяя эти рассуждения к одной из подходящих а.-функций g, h_1, h_2, мы через конечное число шагов (равное числу операций в указанной схеме) придем к тому что
$$f \notin U(i),$$
потому что
$$f_{\text{Ш}} \in U(i),$$
при всех i.

По утверждению 1.3 найдется такое N, что в схеме h, где $h = g$, для любого $i > N$ в графе I_h имеется i-тый информационный цикл. Если h получилась операцией суперпозиции из а.-функций h_1, h_2, то согласно утверждению 1.4 в графе $I_{h_1} \times I_{h_2}$ имеется i -тый информационный цикл. Если h получилась из g операцией обратной связи, то согласно утверждению 1.5, в I_g имеется i-тый информационный цикл. Поскольку в графе $I_{f_{\text{Ш}}}$ нет i-тых информационных циклов при всех i, получаем, что i-тый информационный цикл найдется в графе $(I_f)^l$ для некоторого l. По утверждению 1.1 следует, что в графе $\widehat{I_f}$ также имеется i-тый информационный цикл. Необходимость доказана. Лемма 1.4 доказана.

Доказательство леммы 1.5. Достаточность.

По утверждению 1.6 из условия $f \notin U(i)$ найдется а.-функция

$$g_i \in [\{f, f_{\text{Ш}}\} \cup \mathbf{K}]_A$$

имеющая в i - тый момент приведенный фрагмент. Тогда схема (рис.41) τ - равна "задержке"G. Здесь а.-функция

$$D\colon (E_2^{\tau})^* \to E_2^*$$

имеет диаграмму, изображенную на рисунке 42.

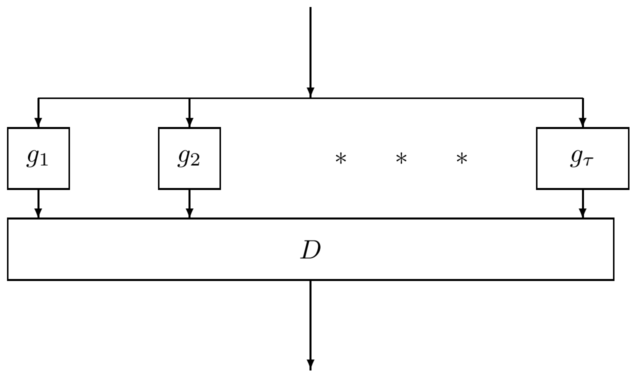


Рис.41

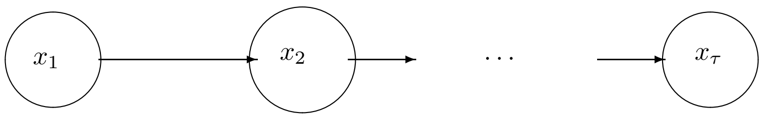


Рис.42

Необходимость.

Пусть
$$[\{f, f_{\text{Ш}}\}] \supseteq \mathbf{K} \text{ и } [\{f, f_{\text{Ш}}\}] \ni G.$$

Покажем, что $f \notin U(i)$ для любого натурального i. В самом деле: $G \notin U(i)$, и если G получена некоторой схемой h, последняя операция которой суперпозиция двух функций h_1, h_2, то по утверждению 1.7 $h_1 \notin U(i)$ или $h_2 \notin U(i)$. Если последняя операция указанной схемы —операция обратной связи, то а.-функция g, из которой получена G, по утверждению 1.8, обладает тем же свойством: $g \notin U(i)$. Применяя эти рассуждения к одной из подходящих а.-функций g, h_1, h_2, мы через конечное число шагов (равное числу операций в указанной схеме) придем к тому что $f \notin U(i)$, потому что $f_{\text{Ш}} \in U(i)$, при всех i. Лемма 1.5 доказана.

§1.4. Доказательство теорем 1, 2.

Доказательство теоремы 1.

Без ограничения общности случай конечной системы

$$M = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$$

сводится к случаю, когда M состоит из одного элемента

$$M = \{f\},$$

как это показано на рисунке 43.

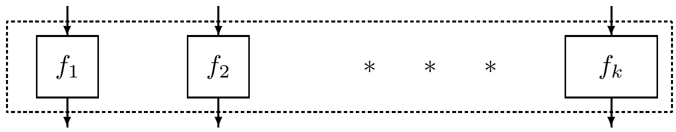


Рис.43

В лемме 1.3 доказана алгоритмическая проверяемость включения

$$[\{f, f_{\text{Ш}}\}]_A \supseteq \mathbf{K}$$

Ввиду периодичности последовательности

$${Q_{q_1}}^t, t = 1, 2, \dots$$

проверка условия

$$f \notin U(i)$$

сводится к перебору значений $i < 2\rho$ и всех путей длины не большей $i + 1$, проходящих по состояниям а.-функции f. Число таких путей не превосходит

$$(2^n)^{2\rho}.$$

Общее число операций при переборе не превосходит

$$2\rho 2^{2n\rho},$$

где $\rho < (2^{|Q|})!$. Таким образом, общее число операций не превосходит числа

$$2(2^{|Q|})!(2^{2n(2^{|Q|})!}).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Без ограничения общности случай конечной системы

$$M = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$$

сводится к случаю, когда M состоит из одного элемента

$$M = \{f\}$$

как это показано на рисунке 43.

В лемме 1.3 доказана алгоритмическая проверяемость включения

$$[\{f, f_{\text{Ш}}\}] \supseteq \mathbf{K}.$$

Рассмотрим проверяемость условия 1 леммы 1.4. Ввиду периодичности последовательности

$$Q_{q_1}{}^t, t = 1, 2, \dots$$

проверка условия $f \notin U(i)$, как это показано в теореме 1 занимает не более

$$2(2^{|Q|})!(2^{2n(2^{|Q|})!}).$$

операций. Оценим размеры графа $\widehat{I_f}$. Он имеет множество вершин мощности

$$R = 2^{|Q|^2}.$$

Для проверки наличия i-того информационного цикла необходимо проверить простые пути из вершин, достижимых из вершины $\{(q_1, q_1)\}$ за $i + 2$ такта. Число таких путей не превосходит $R!$. Вместо проверки счетного числа значений i, достаточно проверить состояния из множеств R_i — достижимых за i тактов вершин графа $\widehat{I_f}$. Если $\rho\rho$ — период и предпериод последовательности

$$R_1, R_2, \dots,$$

то необходимо проверить вершины из множеств

$$R_1, R_2, \dots, R_{2\rho\rho}.$$

Очевидно, что $\rho\rho \leq (2^R)!$. Таким образом, общее число операций при проверке условия 2) леммы 1.4 не превосходит числа

$$(2^{2^{|Q|^2+1}})!.$$

Теорема 2 доказана.

Глава 2

Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты и А-полноты конечных систем автоматов с истинностной частью типа O, S, P, F^3.

Пусть Φ — замкнутый класс истинностных функций. Рассмотрим проблемы полноты и A-полноты для систем вида $\Phi \cup \nu$, которые будем называть проблемами Φ-полноты и Φ-A-полноты, соответственно. В этой главе рассматривается случай, когда Φ является классом Поста типа

$$F^{\mu} \quad \mu > 2, \quad F^{\infty}, \quad S, \quad P, \quad O.$$

При этом классы

$$O_1 = [\{x\}], \quad O_2 = [\{1\}], \quad O_3 = [\{0\}],$$
$$O_4 = [\{\bar{x}\}], \quad O_5 = [\{x, 1\}], \quad O_6 = [\{x, 0\}],$$
$$O_7 = [\{0, 1\}], \quad O_8 = [\{x, 0, 1\}], \quad O_9 = [\{\bar{x}, 0\}]$$

называются классами типа O.

Классы

$$S_6 = [\{x \vee y, 0, 1\}], \quad S_5 = [\{x \vee y, 0\}],$$
$$S_3 = [\{x \vee y, 1\}], \quad S_1 = [\{x \vee y\}]$$

называются классами типа S,

классы

$$P_6 = [\{xy, 0, 1\}], \quad P_5 = [\{xy, 1\}], \quad P_3 = [\{xy, 0\}], \quad P_1 = [\{xy\}]$$

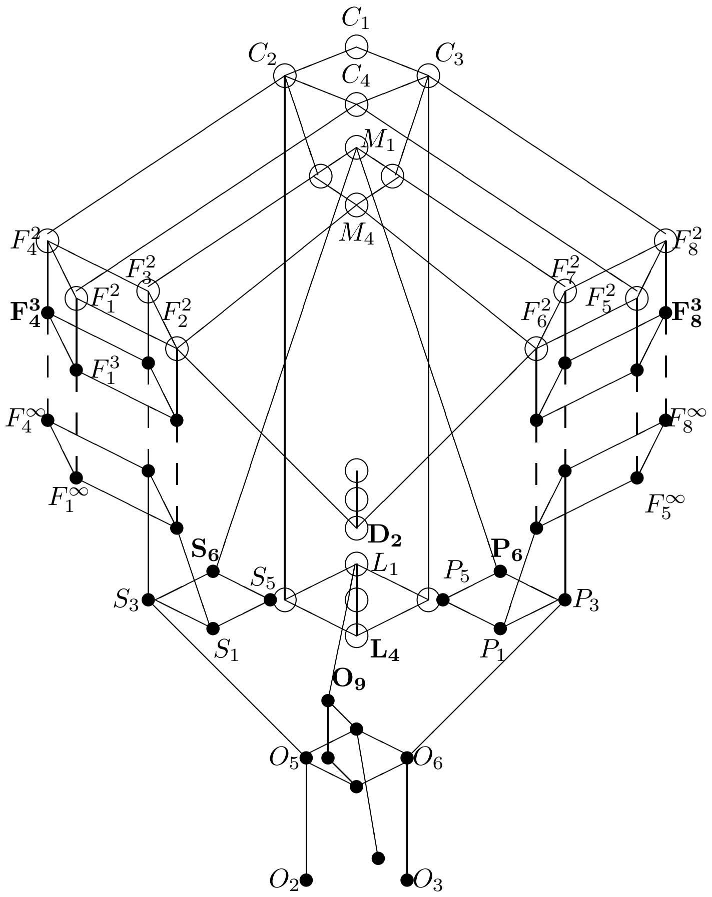

C_1
C_2
C_3
C_4
M_1
M_4
F_4^2
F_8^2
F_3^2
F_7^2
F_1^2
F_5^2
F_2^2
F_6^2
$\mathbf{F_4^3}$
$\mathbf{F_8^3}$
F_1^3
F_4^∞
F_8^∞
F_1^∞
F_5^∞
$\mathbf{D_2}$
$\mathbf{S_6}$
$\mathbf{P_6}$
S_5
L_1
P_5
S_3
P_3
S_1
$\mathbf{L_4}$
P_1
$\mathbf{O_9}$
O_5
O_6
O_2
O_3

Рис.44

называются классами типа P.

Классы

$$F_1^\infty = [\{x \vee y\bar{z}\}], \quad F_2^\infty = [\{x \vee yz\}],$$
$$F_3^\infty = [\{1, x \vee yz\}], \quad F_4^\infty = [\{x \vee \bar{y}\}],$$
$$F_5^\infty = [\{x(y \vee \bar{z})\}], \quad F_6^\infty = [\{x(y \vee z)\}],$$
$$F_7^\infty = [\{0, x(y \vee z)\}], \quad F_8^\infty = [\{x\bar{y}\}]$$

называются классами типа F^∞.

Классы

$$F_1^\mu = [\{x \vee y\bar{z}, h_\mu^*(x_1 \dots x_{\mu+1})\}], \qquad F_2^\mu = [\{h_\mu^*(x_1 \dots x_{\mu+1})\}],$$
$$F_3^\mu = [\{1, h_\mu^*(x_1 \dots x_{\mu+1})\}], \qquad F_4^\mu = [\{x \vee \bar{y}, h_\mu^*(x_1 \dots x_{\mu+1})\}],$$
$$F_5^\mu = [\{x(y \vee \bar{z}), h_\mu(x_1 \dots x_{\mu+1})\}],$$
$$F_6^\mu = [\{x(y \vee z), h_\mu(x_1 \dots x_{\mu+1})\}],$$
$$F_7^\mu = [\{0, h_\mu(x_1 \dots x_{\mu+1})\}], \qquad F_8^\mu = [\{x\bar{y}, h_\mu(x_1 \dots x_{\mu+1})\}]$$

где $\mu > 2$, а через

$$h_\mu^*(x_1 \dots x_{\mu+1})$$

обозначена функция, двойственная к функции

$$h_\mu(x_1 \dots x_{\mu+1}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{\mu+1}.$$

называются классами типа F^μ.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3.

Проблема Ф-полноты для каждого класса Ф типа

$$F^\mu \text{ при } \quad \mu > 2, \qquad F^\infty, \qquad S, \qquad P, \qquad O$$

алгоритмически неразрешима.

Теорема 4.

Проблема Ф-A-полноты для каждого класса Ф типа

$$F^\mu \qquad \text{при } \mu > 2, \qquad F^\infty, \qquad S, \qquad P, \qquad O$$

алгоритмически неразрешима.

§2.1. Основные леммы.

Известно что, для конечных систем автоматов проблемы полноты [15] и А - полноты [17] алгоритмически неразрешимы. Сформулируем эти факты в виде лемм.

Лемма 2.1.

Не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P_a$ решающего вопрос, верно ли, что $[\nu] = P_a$.

Лемма 2.2.

Не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P_a$ решающего вопрос, верно ли, что $[\nu]_A = P_a$.

Замечание 2.1.

Если проблема Ф-полноты (Ф- А -полноты) алгоритмически неразрешима для $\Phi = F_1$, то она также неразрешима для всякого замкнутого класса $F_2 \subseteq F_1$, и двойственного к F_1 замкнутого класса F_1^*.

Подрешетка классов указанных типов имеет, с точностью до двойственности, три максимальных элемента F_4^3, S_6, O_9. Отсюда следует, что для доказательства теорем достаточно установить алгоритмическую неразрешимость Ф-полноты и Ф-A-полноты при

$$\Phi \in \{F_4^3, S_6, O_9\}.$$

Эти факты и будут установлены ниже.

Тройка $T = \langle D, \rho, w\rangle$, где $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$, $\rho\colon D \to D^*$, $\rho(d_i) = R_i$, w — натуральное число, называется системой однородных продукций Поста. Если $l \geq w$, то скажем, что T применима к слову

$$\xi = d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_l}$$

и назовем слово

$$\xi' = d_{i_{w+1}} \ldots d_{i_l} R_{i_1}$$

результатом применения T к слову ξ. Таким образом, у слова ξ "стираются"первые w букв и к нему приписывается слово R_{i_1}, которое соответствует букве d_{i_1}. Если $l < w$, то T не применима к слову ξ. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ такую, что $\xi_1 = \xi$, а ξ_{i+1} — результат применения T к слову ξ_i, $i = 1, 2, \ldots$, назовем последовательностью продукций слова ξ. Последовательность продукций слова ξ конечна, если последнее слово имеет длину меньшую w. В этом случае будем говорить, что при применении к слову ξ система T останавливатся через конечное число шагов. Для каждой однородной системы продукций T можно поставить вопрос о разрешимости "проблемы остановки "этой системы: существует ли алгоритм A_T, который по любому наперед заданному слову ξ устанавливает, конечно или бесконечно множество T-продукций слова ξ, т.е. останавливается ли T при применении к слову ξ, или нет. Известно [39], что существует система однородных продукций Поста, для которой не существует алгоритма, по слову $\xi \in D^*$ решающего вопрос о конечности последовательности продукций слова ξ. Сформулируем этот факт в виде леммы.

Лемма 2.3.

Существует система однородных продукций Поста $T = \langle D, \rho, w\rangle$, для которой не существует алгоритма A_T, решающего проблему остановки.

Зафиксируем систему продукций Поста $T = \langle D, \rho, w\rangle$ с неразрешимой проблемой конечности последовательности продукций.

Обозначим через

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_3x_4,$$

пусть $\widetilde{R}_1$ — множество сверхслов α таких, что

$$\alpha(t) = 1 \text{ при } t \geq t_\alpha,$$

$\widetilde{R}$ — множество сверхслов α таких, что

$$\alpha(t+1) = \alpha(t) \text{ при } t \geq t_\alpha.$$

Пусть C_1, C_{01}, C_{0011} — сверхслова

$$11\ldots, 0101\ldots, 00110011\ldots,$$

соответственно; u, u_0, u_1 — одноместные а.-функции,

$$u(a\alpha) = aC_{01}, \quad u_0(a\alpha) = 0C_{01}, \quad u_1(a\alpha) = 1C_{01}$$

при всех $a \in E_2, \alpha \in E_2^\infty$.

Через $\alpha]_t$ обозначим начало длины t сверхслова $\alpha \in E_2^\infty$, через $|\alpha'|$ — длину слова α'. Каждому элементу $d_i \in D$ поставим в соответствие слово

$$\widetilde{d_i} = (0110)^i(0101)(0110)^{k-i}, \qquad \widetilde{d_i} \in E_2^{(4k+4)},$$

где $k = |D|$. Для $\xi = d_{i_1} \dots d_{i_s}$ обозначим

$$\widetilde{\xi} = \widetilde{d_{i_1}} \dots \widetilde{d_{i_s}}.$$

Для $\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in E_2^\infty$, определим числовую функцию

$$c(\alpha, \beta) = \max_{\alpha]_t = \beta]_t} t.$$

Пусть

$$M_i^1 = \left\{ (0101)^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} C_{01} \mid n, l \in \mathbf{N_0},\ \mathrm{j}_1, \dots, \mathrm{j_l} \in \{1, \dots, \mathrm{k}\} \right\}$$

$$M_i^2 = \left\{ (0101)^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \tilde{d}_{j_2} \dots \mid n \in \mathbf{N_0},\ \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots \in \{1, \dots, \mathrm{k}\} \right\}.$$

$$M_i = \left\{ (0101)^n \widetilde{d}_i \widetilde{d}_{j_1} \dots \widetilde{d}_{j_l} C_{0011} | n, l \in \mathbf{N_0},\ \mathrm{j}_1, \dots, \mathrm{j_l} \in \{1, \dots, \mathrm{k}\} \right\}$$

$$\widehat{M_i} = \left\{ (0101)^n \widetilde{d}_i \widetilde{d}_{j_1} \widetilde{d}_{j_2} \dots | n \in \mathbf{N_0}, 1 \leq \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2 \dots \leq \mathrm{k} \right\}.$$

Для $\alpha \notin M_i^1 \cup M_i^2$ определим $c_i \colon E_2^\infty \to \mathbf{N}$, полагая

$$c_i(\alpha) = \max_{\beta \in M_i^1 \cup M_i^2} c(\alpha, \beta).$$

Для $\alpha \notin M_i \bigcup \widehat{M_i}$ определим

$$cc_i(\alpha) = \max_{\beta \in M_i \cup \widehat{M}_i} c(\alpha, \beta).$$

Пусть

$$\Delta = (0101)^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} C_{01}, \qquad n \in \mathbf{N_0}.$$

Определим a-функции

$$f_i \colon E_2^\infty \to E_2^\infty, \qquad i = 1, \dots, k,$$

соотношениями $(a), (b), (c), (d)$.

(a) $f_i(a\Delta) = a(0101)^{n+w(4k+4)} \tilde{d}_{j_w} \dots \tilde{d_{j_l}} \widetilde{R_i} C_{01} l > w - 1$,

(b) $f_i(a\Delta) = a(0101)^{n+w(4k+4)} \tilde{R}_i C_{01}$ при $l = w - 1$,

(c) $f_i(a\Delta) = aC_{01}$ при $l < w - 1$,

(d) $f_i(a\beta) = a\beta' 11 \dots$ при $\beta \notin M_i^1 \cup M_i^2$, где $|\beta'| = c_i(\beta)$.

Определим также a-функции

$$f'_i\colon E_2^\infty \to E_2^\infty,\ i = 1, \ldots, k.$$

В случаях (a) и (d) f'_i совпадает с f_i, в случаях (b) и (c) f'_i определяется соотношениями $(b'), (c')$.

(b') $f'_i(a\Delta) = a(0101)^{n+w(4k+4)}11\ldots$ при $l = w - 1$,

(c') $f'_i(a\Delta) = a(0101)^{n+l(4k+4)}11\ldots$ при $l < w - 1$.

Определим a-функции

$$f''_i\colon E_2^\infty \to E_2^\infty, i = 1, \ldots, k,$$

соотношениями $(a), (b'), (c')$ и (d'')

$$(d'')f''_i(a\beta) = a\beta' bb\ldots \beta \notin M_i^1 \cup M_i^2, |\beta'| = c_i(\beta) - 1, b \in E_2.$$

Определим также следующие а.-функции

$$G, G'', E_0, E_{\bar{x}}, E_{\&}, E''_{\&}, I_0, I_{\bar{x}}, I_{\&}, f_\xi,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in E_2^\infty,\ a, b \in E_2$, полагая

$$G(\alpha, a\gamma) = \begin{cases} 011\ldots & \text{при } a = 0, \\ B(\alpha) & \text{при } a = 1,\ \gamma = C_{01}, \\ a\alpha' 11\ldots & \text{при } a = 1,\ \gamma \neq C_{01}, |\alpha'| = c(\gamma, C_{01}) \end{cases}$$

$$G''(\alpha, a\gamma) =$$

$$= \begin{cases} 011\ldots & \text{при } a = 0, \\ B(\alpha) & \text{при } a = 1,\ \gamma = C_{01}, \\ 1\alpha' bb\ldots & \text{при } a = 1,\ \gamma \neq C_{01}, |\alpha'| = c(\gamma, C_{01}) - 1 \end{cases}$$

$$E_0(a\gamma) = \begin{cases} a00\ldots & \text{при } \gamma = C_{01}, \\ a\alpha' 11\ldots & \text{при } \gamma \neq C_{01}, |\alpha'| = c(\gamma, C_{01}) \end{cases}$$

$$E_{\bar{x}}(\alpha, a\gamma) = \begin{cases} a\bar{\alpha}(2)\bar{\alpha}(3)\ldots & \text{при } \gamma = C_{01}, \\ a\alpha' 11\ldots & \text{при } \gamma \neq C_{01}, |\alpha'| = c(\gamma, C_{01}) \end{cases}$$

$$E_{\&}(\alpha, \beta, a\gamma) = \begin{cases} a\alpha(2)\&\beta(2)\alpha(3)\&\beta(3)\ldots & \text{при } \gamma = C_{01}, \\ a\alpha' 11\ldots & \text{при } \gamma \neq C_{01}, |\alpha'| = c(\gamma, C_{01}) \end{cases}$$

$$E''_{\&}(\alpha, \beta, a\gamma) = \begin{cases} a\alpha(2)\&\beta(2)\alpha(3)\&\beta(3)\ldots & \text{при } \gamma = C_{01}, \\ a\alpha' bb\ldots & \text{при } \gamma \neq C_{01}, |\alpha'| = c(\gamma, C_{01}) - 1 \end{cases}$$

$$I_0(\alpha) = 011\ldots, I_{\bar{x}}(\alpha) = \bar{\alpha}(1)11\ldots,$$

$$I_{\&}(\alpha,\beta)=\alpha(1)\&\beta(1)11\ldots, f_\xi(a\alpha)=a\bar{\xi}C_{01}.$$

Через

$$\overline{X}\vee Y,\qquad \widehat{0},\qquad \widehat{1},\qquad X\vee Y,\qquad \overline{X}\qquad H,\qquad XY$$

обозначим *a*-функции, являющиеся автоматными интерпретациями булевых функций

$$\bar{x}\vee y,\qquad 0,\qquad 1,\qquad x\vee y,\qquad \bar{x}\qquad h,\qquad xy$$

соответственно.

Определим а.-функции

$$ff_i : E_2^\infty \to E_2^\infty, ff_i{}' : E_2^\infty \to E_2^\infty, i=1,2,...k,$$

так: для $\Delta\Delta=(0101)^n\widetilde{d}_i\widetilde{d}_{j_1}\ldots\widetilde{d}_{j_l}C_{0011}$

$$ff_i(\Delta\Delta)=$$

$$=\begin{cases}(0101)^{n+w(k+1)}\widetilde{d}_{j_w}\ldots\widetilde{d}_{j_l}\widetilde{R}_iC_{0011} & \text{при} \quad l>w-1\\ (0101)^{n+w(k+1)}\widetilde{\widetilde{R}}_iC_{0011} & \text{при} \quad l=w-1\\ C_{01} & \text{при} \quad l<w-1\end{cases}$$

$$ff_i'(\Delta\Delta)=$$

$$=\begin{cases}(0101)^{n+w(k+1)}\widetilde{d}_{j_w}\ldots\widetilde{d}_{j_l}\widetilde{\widetilde{R}}_iC_{0011} & \text{при} \quad l>w-1\\ (0101)^{n+(l+1)(k+1)}0C_1 & \text{при} \quad l\le w-1\end{cases}$$

$$ff_i(\beta)=\gamma C_1,\qquad ff_i'(\beta)=\gamma' C_1$$

при $\beta\notin M_i\bigcup\widehat{M_i}$, где $|\gamma'|=|\gamma|=c_i(\beta)$.

Для $\alpha,\gamma\in E_2^\infty$ определим а-функции GG, E, ff_ξ, так

$$GG(\alpha,\gamma)=\begin{cases}B(\alpha) & \text{при} \quad \gamma=C_{01}\\ \delta C_1 & \text{при} \quad \gamma\ne C_{01}\end{cases}$$

$$E(\gamma)=\begin{cases}00\ldots & \text{при } \gamma=C_{01}\\ \beta C_1 & \text{при } \gamma\ne C_{01}\end{cases}$$

где $|\delta|=|\beta|=c(\gamma,C_{01})$; $\quad ff_\xi(\alpha)=\widetilde{\xi}C_{01}$ при всех $\alpha\in E_2^\infty$.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2.4. Система

$$\Sigma_1=\{\bar{X}\vee Y, I_0, E_0, f_1,\ldots,f_k,f_\xi,G\}$$

полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ конечна.

Лемма 2.5. Система

$$\Sigma_2 = \{X \vee Y, \hat{0}, \hat{1}, I_{\bar{x}}, E_{\bar{x}}, f_1, \ldots, f_k, f_\xi, G\}$$

полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ конечна.

Лемма 2.6. Система

$$\Sigma_3 = \{\hat{0}, \bar{X}, I_{\&}, E_{\&}, f_1, \ldots, f_k, f_\xi, G\}$$

полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ конечна.

Лемма 2.7. Система

$$\Sigma_4 = \{\bar{X} \vee Y, I_0, E_0, f_1', \ldots, f_k', f_\xi, G\}$$

A-полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ бесконечна.

Лемма 2.8. Система

$$\Sigma_5 = \{X \vee Y, \hat{0}, \hat{1}, I_{\bar{x}}, E_{\bar{x}}, f_1', \ldots, f_k', f_\xi, G\}$$

A-полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ бесконечна.

Лемма 2.9. Система

$$\Sigma_6 = \{\hat{0}, \bar{X}, I_{\&}, E_{\&}'', f_1'', \ldots, f_k'', f_\xi, G\}$$

A-полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ бесконечна.

Лемма 2.10. Система

$$\Sigma_7 = \{\overline{X} \vee Y, H, E, ff_1, \ldots, ff_k, ff_\xi, GG\}$$

полна точно тогда, когда последовательность продукций слова ξ конечна.

Лемма 2.11. Система

$$\Sigma_8 = \{\overline{X} \vee Y, H, E, ff_1{}', \ldots, ff_k{}', ff_\xi, GG\}$$

А-полна точно тогда, когда последовательность продукций слова ξ бесконечна.

Доказательство теоремы 3 следует из лемм 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.10. Доказательство теоремы 4 следует из лемм 2.3, 2.7, 2.8, 2.9, 2.11.

§2.2. Доказательство лемм.

Через $\widehat{H}$ обозначим покомпанентное доопределение функции h на $(E_2^4)^4$. Для $\alpha_1, \alpha_2 \in E_2^\infty$ обозначим $\alpha_1 \geq \alpha_2$, если $\alpha_1(t) \geq \alpha_2(t)$ при всех t. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ - некоторые последовательные продукции слова $\xi = \xi_1$, и

$$\eta_1 = \widetilde{\xi}_1 C_{0011}, \qquad \eta_i = (0101)^{w(i-1)(k+1)} \widetilde{\xi}_i C_{0011}, i = 2, 3...s.$$

Пусть $b_i = 1 + 4w(k+1)(i-1), t_i = b_i + |\xi_i| - 1$, соответственно, позиции начала и конца (включительно) подслова $\widetilde{\xi}_i$ в сверхслове η_i. Заметим, что если $b_{i+1} < t_i$, то $\eta_i(t) = \eta_{i+1}(t)$ при $b_{i+1} \leq t \leq t_i$. Имеет место

Утверждение 2.1. .

Если $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in E_2^\infty$ и при $i \leq p \leq r$ выполнено
$\alpha_1 \geq \eta_i, \alpha_2 \geq \eta_p, \alpha_3 \geq \eta_r$, то $H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq \eta_p$.

Доказательство.

Ввиду монотонности функции h имеем

$$\gamma = H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq \eta_i \eta_p \vee \eta_i \eta_r \vee \eta_p \eta_r.$$

Возможны различные случаи взаиморасположения чисел $b_i, b_p, b_r, t_i, t_p, t_r$.

$a)$ $\quad b_i < b_p < b_r \leq t_i < t_p < t_r$. см. рис.45.

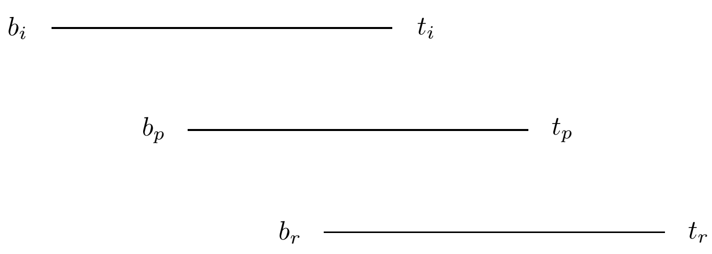


Рис.45

Тогда
$\eta_p(t) = \eta_r(t)$ при $t \leq b_p$ и $t_i < t \leq t_p$
$\eta_p(t) = \eta_i(t)$ при $t \geq t_p$ и $b_p < t \leq t_i$
следовательно, $\gamma(t) \geq \eta_p(t)$ при всех t.

$b)$ $\quad b_i < b_p \le t_i < b_r < t_p < t_r$. см. рис.46.

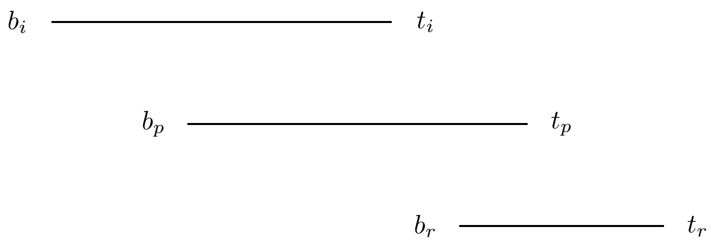


Рис.46

Для $t \in (t_i, b_r - 3)$ имеем

$$(\gamma(t), \gamma(t+1), \gamma(t+2), \gamma(t+3)) = \widehat{H}(., 0011, \Delta, 0101) \ge \delta,$$

где

$$\delta = (\eta_p(t), \eta_p(t+1), \eta_p(t+2), \eta_p(t+3))$$

и $\delta \in \{0110, 0101\}$.

Для $t \notin (t_i, b_r - 3)$ имеем либо $\eta_p(t) = \eta_r(t)$, либо $\eta_p(t) = \eta_i(t)$, следовательно, $\gamma(t) \ge \eta_p(t)$.

$c)$ $\quad b_i < b_p \le t_i < t_p < b_r < t_r$. см. рис.47.

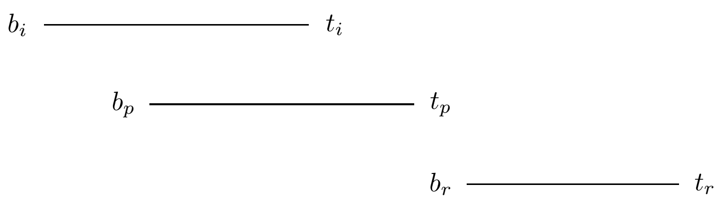


Рис.47

Для $t \in (t_i, t_p - 3)$ имеем

$$(\gamma(t), \gamma(t+1), \gamma(t+2), \gamma(t+3)) = \widehat{H}(., 0011, \Delta, 0101) \ge \delta,$$

где

$$\delta = (\eta_p(t), \eta_p(t+1), \eta_p(t+2), \eta_p(t+3))$$

и $\delta \in \{0110, 0101\}$.

Для $t \notin (t_i, t_p - 3)$ имеем либо $\eta_p(t) = \eta_r(t)$, либо $\eta_p(t) = \eta_i(t)$, следовательно, $\gamma(t) \geq \eta_p(t)$.

$d)$ $\quad b_i < t_i \leq b_p < b_r \leq t_p < t_r$. см. рис.48.

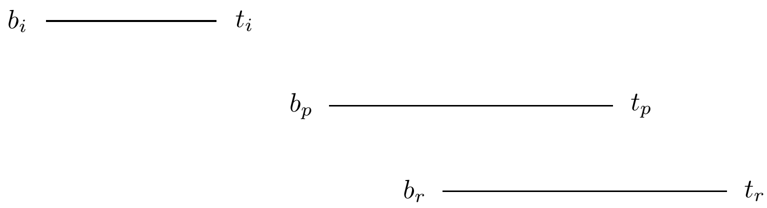


Рис.48

Для $t \in (b_p, b_r - 3)$ имеем

$$(\gamma(t), \gamma(t+1), \gamma(t+2), \gamma(t+3)) = \widehat{H}(., 0011, \Delta, 0101) \geq \delta,$$

где

$$\delta = (\eta_p(t), \eta_p(t+1), \eta_p(t+2), \eta_p(t+3))$$

и $\delta \in \{0110, 0101\}$.

Для $t \notin (b_p, b_r - 3)$ имеем либо $\eta_p(t) = \eta_r(t)$, либо $\eta_p(t) = \eta_i(t)$, следовательно, $\gamma(t) \geq \eta_p(t)$.

$e)$ $\quad b_i < t_i \leq b_p < t_p \leq b_r < t_r$. см. рис.49.

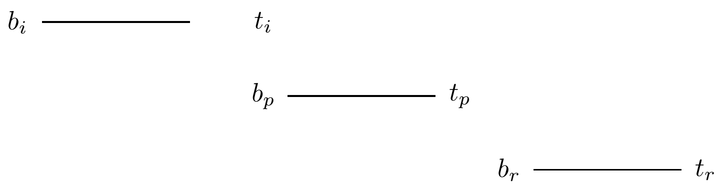


Рис.49

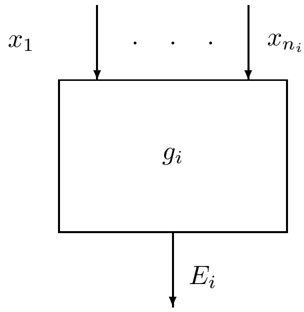


Рис.50

Имеем либо $\eta_p(t) = \eta_r(t)$, либо $\eta_p(t) = \eta_i(t)$, следовательно, $\gamma(t) \geq \eta_p(t)$.

Утверждение 2.1 доказано.

Мы будем использовать язык схем [22], с каждой функцией

$$g_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$$

мы свяжем объект E_i, изображенный на рисунке 50 — прямоугольник с n_i входными стрелками и одной выходной стрелкой (короче входы и выходы E_i). Входам объекта E_i приписаны слева направо переменные $x_1, \ldots, x_{n_i}$ функции g_i. Функционирование элемента g_i это потактовое вычисление автоматной функции g. Операциям над автоматными функциями будут соответствовать схемы. Дадим индуктивное определение схемы.

Пусть $E_M = \{E_1, E_2, \ldots\}$ множество элементов, сопоставленных функциям из M.

0) Каждый элемент $g \in E_M$ — есть схема из над E_M. Функционирование схемы — это процесс рекуррентного вычисления а.-функции g по уравнениям (1).

1) (добавление фиктивного входа). Пусть x_{n+1} — это переменная, отличная от переменных $x_1, \ldots, x_{n_i}$, тогда объект S' на рисунке 51, есть схема над E_M. Схеме S' сопоставляется автоматая функция $g'_i(x_1, \ldots, x_{n+1})$, получающаяся из $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ добавлением фиктивной переменной.

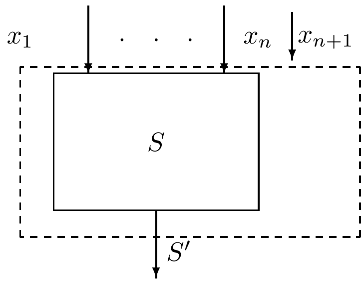


Рис.51

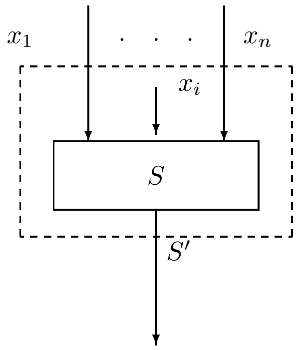


Рис.52

2) (изъятие фиктивного входа). Пусть функция $g_i(x_1, \ldots, x_n)$, сопоставленная схеме S имеет фиктивную переменную x_i, тогда объект с $n-1$ входом на рисунке 52

есть схема S'. Ее входам слева направо приписаны переменные $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и S' сопоставлена функция $g'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, получающаяся из $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ изъятием фиктивной переменой.

3) (склеивание входов). Пусть x_i и x_j переменные, приписанные i-тому и j-тому входам S, соответственно. Тогда объект с $n-1$ входами на рисунке 53 — есть схема S' над E_M. Ее входам слева направо приписаны переменные

$$x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$$

и S' сопоставлена функция

$$g'(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

получающаяся из g отождествлением переменных x_i и x_j.

4) (переименование входов без склеивания). Если

$$x'_1, \ldots, x'_n$$

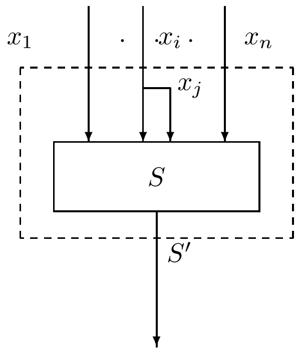


Рис.53

— разные переменные, то объект с n входами на рисунке 54 есть схема на E_M; ей сопоставлена функция

$$f'(x'_1, \ldots, x'_n),$$

получающаяся из

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

переименованием переменных x'_i на $x_i, i = 1, \ldots, n$.

5) (последовательное соединение). Пусть S_1 и S_2 схемы, изображенные на рисунке 55, причем множества переменных

$$\{x'_1, \ldots, x'_m\} \text{ и } \{x_1, \ldots, x_n\}$$

не пересекаются. Схеме S_1 сопоставлена функция

$$gg(x'_1, \ldots, x'_m),$$

а схеме S_2 — функция

$$g(x_1, \ldots, x_n),$$

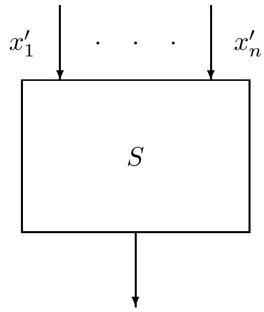


Рис.54

тогда объект на рисунке 55 — есть схема над E_M и ему сопоставляется функция

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x'_1, \ldots, x'_m, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, gg(x'_1, \ldots, x'_m), x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

6) (обратная связь). Пусть $n \geq 2$, и к i-тому входу функции f, сопоставленной схеме S применима операция обратной связи. Тогда объект с $n-1$ входом, изображенный на рисунке 56, есть схема над E_M. Ее входам приписаны переменные $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, и этой схеме приписана функция, получающаяся из f применением операции обратной связи.

Пусть S — схема над множеством a-функций Σ. Правым путем в схеме S назовем такую последовательность разных элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ схемы S, что выход a-функции g_1 совпадает с выходом схемы, а выходы а.-функций g_{i+1} для многоместных g_i соединены с правым входом g_i, а для одноместных g_i с их единственным входом. Элемент g_n называется начальным элементом пути. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.2.

Если схема S над системой Σ_1 (Σ_4) реализует константную a-функцию с выходным сверхсловом $00101\alpha \in E_2^\infty$, то в схеме S существует правый путь с начальным элементом I_0.

Доказательство.

Докажем этот факт для случая Σ_1. Очевидно, что в схеме S есть элементы типа I_0, так как все остальные a-функции из

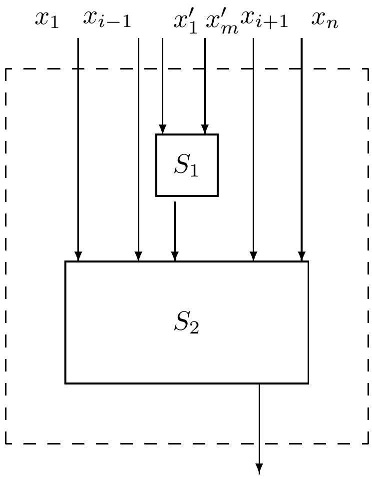


Рис.55

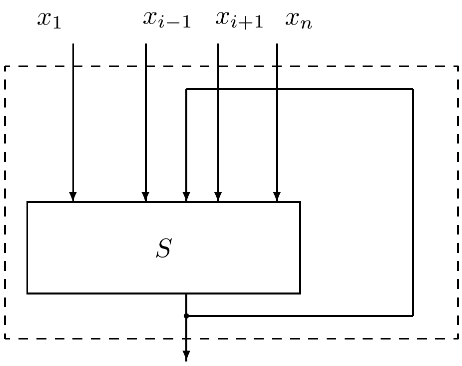


Рис.56

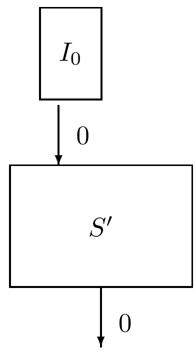


Рис.57

Σ_1 имеют в начальном состоянии булевы функции из класса $F_4^\infty = [\{\bar{x}_1 \vee x_2\}]$. Без ограничения общности схема S представима в виде, указанном на рис.57, где схема S' не содержит элементов типа I_0. Пусть S_1 — схема, получающаяся заменой в схеме S a-функций $\bar{X} \vee Y$, I_0, E_0, $f_1, \dots, f_k$, f_ξ, G на элементы $\bar{x}_1 \vee x_2$, 0, $x, \dots, x$, x, x_2, реализующие булевы функции начальных состояний указанных функций, соответственно. Пусть схема S_2 получается из схемы S_1 отбрасыванием элементов x_1, x_2 и прямым соединением входа и выхода отброшенного элемента (для двуместных элементов будет использоваться соединение правого входа с выходом). Представим схему S_2 в виде, приведенном на рис.100, где $x_1(y), x_2(y), g_1 \in F_4^\infty$. Непосредственной проверкой получаем, что $x_2(y) \equiv 0$. Отбросив выход x_1 и затем фиктивный вход y у схемы S_3', получим схему, реализующую константу 0 и имеющую меньшее число элементов. Проделав эту процедуру достаточное число раз, мы получим правый путь $g_1, g_2, \dots, g_n$ с начальным элементом 0 в схеме S_2. Это означает, что в схеме S существует искомый правый путь. Системы Σ_1 и Σ_4 дают одинаковые схемы S_1 Утверждение доказано.

Утверждение 2.3.

Пусть некоторая схема S над системой Σ_2 (Σ_5) реализует константную a-функцию с выходным словом

$$10101\alpha \in E_2^\infty,$$

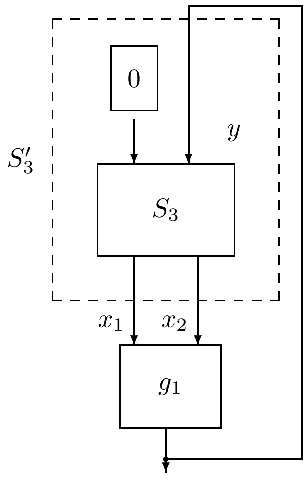


Рис.58

тогда найдется схема $\widehat{S}$ над $\Sigma_2(\Sigma_5)$, так же реализующая эту a-функцию, имеющая правый путь с начальным элементом $g \in \{\hat{1}, I_{\bar{x}}\}$, не содержащий элемента $\widehat{0}$.

Доказательство.

В схеме S найдется a-функция $\tilde{g} \in \{\hat{1}, I_{\bar{x}}\}$, в противном случае все элементы схемы S сохраняют нули в начальный момент, что противоречиво. Рассмотрим схему S_1, получающуюся заменой a-функций схемы S булевыми функциями начальных состояний. Схема S_1 не имеет входа, на выходе каждого ее элемента реализуется некоторая константа. Пусть g_1 — элемент схемы S_1, выход которого совпадает с выходом этой схемы, очевидно, что $g_1 \notin \{\hat{0}, \hat{1}, I_{\bar{x}}\}$. Без ограничения общности схема S_1 представима в виде, указанном на рис.58, где

$g_1(x_1(y), x_2(y)) \equiv 1, \qquad g_1 \in \{x_1 \vee x_2, x_1, x_2\}.$

Рассмотрим случай $g_1 = x_1 \vee x_2$. Тогда в случае, когда $x_1(y) \equiv 1 \quad (x_2(y) \equiv 1)$, схема S_3'', получающаяся из S_3' отбрасыванием выхода x_2 (выхода x_1) и фиктивного входа y, также реализует константу 1. В случае, когда $x_1(y) \equiv y$ и $x_2(y) \equiv \bar{y}$ $(x_1(y) \equiv \bar{y},\ x_2(y) \equiv y)$ схема S_3'', реализующая константу 1, изображена на рис.59. В случае, когда $g_1 = x_1$ $(g_1 = x_2)$, имеем $x_1(y) \equiv 1$ $(x_2(y) \equiv 1)$ и схема S_3' (рис.58) без выхода x_2 (выхода x_1) и входа y реализует константу 1. Повторив эту процедуру достаточное число раз и поменяв, где это требуется, местами левый и правый входы элемента $X \vee Y$, получим искомое утверждение. Утверждение 2.3 доказано.

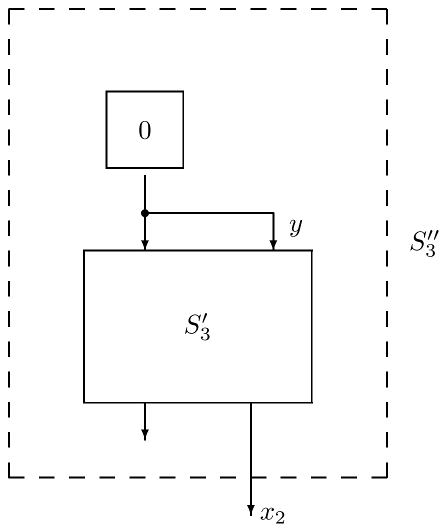


Рис.59

Утверждение 2.4.

Пусть некоторая схема S над системой Σ_3 (Σ_6) реализует константную a-функцию с выходным сверхсловом 10101α, тогда в схеме S существует правый путь с начальным элементом $g \in \{\hat{0}, I_{\&}\}$.

Доказательство.

Пусть схема S_1 над Σ_3 или Σ_6 получается из схемы S заменой a-функций на булевы функции их начальных состояний. Пусть g_1 — элемент схемы S_1, выход которого совпадает с выходом схемы. Очевидно, что $g_1 \notin \{\hat{0}, I_{\&}\}$. Представим схему S_1 в виде, приведенном на рис.60.

Ясно, что $g_1 \in \{x_3, \hat{x}_3\}$, следовательно, схема S_2 имеет фиктивный вход y и на выходе x_3 реализуется константа. Продолжая эту процедуру, мы получим искомый путь. Утверждение 2.4 доказано.

Доказательство леммы 2.4. Достаточность.

Пусть последовательность продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, первая буква слова ξ_j есть d_{ij} и длина слова ξ_s меньше w, тогда a-функция

$$u(x) = f_{i_s}\left(f_{i_{s-1}}(\ldots f_{i_1}(f_{\xi}(x))\ldots)\right),$$

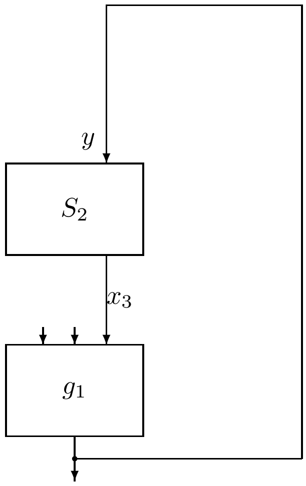


Рис.60

такова, что

$$u(1) = u_1, u(I_0) = u_0, G(x, u_1) = B(x),$$

$E_0(u_0)$ — истинностная а.-функция, тождественно равная нулю. Следовательно, Σ_1 — полная система a-функций.

Необходимость.

Пусть Σ_1 — полная система a-функций и S — схема над Σ_1, реализующая a-функцию без входа с выходным сверхсловом $0C_{01}$. Из утверждения 2.1 следует, что в схеме S существует правый путь $h_1, \ldots, h_m$ с начальным элементом $h_m = I_0$. Пусть сверхслово $\gamma \in \tilde{R}_1$, тогда

$$I_0(\gamma), E_0(\gamma), f_1(\gamma), \ldots, f_k(\gamma) \in R_1,$$

$$\bar{\alpha} \vee \gamma, G(\alpha, \gamma) \in \tilde{R}_1$$

при любом $\alpha \in E_2^\infty$. Поскольку на выходе схемы S получается сверхслово $0C_{01}$, среди a-функций $h_1, \ldots, h_m$ найдутся элементы типа f_ξ и пусть h_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0. Пусть для определенности

$$\xi = d_i d_{j_1} \ldots d_{j_l},$$

покажем, что

$$h_{i_0 - 1} \in \{f_i, \bar{X} \vee Y\}.$$

В самом деле,

$$h_{i_0-1} \neq f_\xi, h_{i_0-1} \neq I_0$$

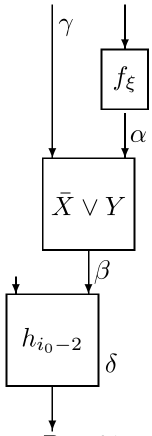


Рис.61

по построению схемы S. Если $h_{i_0-1} = E_0$, $h_{i_0-1} = G$ или $h_{i_0-1} = f_j$ при $j \neq i$, то на выходе h_{i_0-1} в схеме S будут получаться сверхслова из $\tilde{R}_1$, и на выходе схемы S также будет сверхслово из $\tilde{R}_1$, что противоречиво. Рассмотрим случай

$$h_{i_0-1} = \overline{X} \vee Y$$

(см. рис.61). Для любого сверхслова γ

$$\beta = \bar{\gamma} \vee \alpha \geq \alpha = a\tilde{\xi}C_{01}.$$

Набор $\tilde{d}_s$ не сравним с набором $\tilde{d}_l$ и с набором

$$0101\ldots01$$

длины $4k+4$ при $s \neq l$, $s, l \in \{1, \ldots, k\}$. Если $\beta > \alpha$, то для

$$h_{i_0-2} \in \{f_1, \ldots, f_k, E_0, G\}$$

получим $\delta \in R_1$, а в случае

$$h_{i_0-2} = \overline{X} \vee Y$$

будем иметь

$$\delta \geq \beta > \alpha; \delta \notin M_i^1 \cup M_i^2,$$

что при продолжении этой процедуры приводит к противоречию. Следовательно, в случае

$$h_{i_0-1} = \bar{X} \vee Y$$

справедливо равенство $\beta = \alpha$. Повторив это рассуждение достаточное число раз, получим, что все элементы из

$$\{h_{i_0-1}, \ldots, h_1\}$$

типа $\overline{X} \vee Y$ в схеме S выполняют функцию проводников своего правого входа, а в последовательности

$$h_{i_0}, \ldots, h_1$$

содержится подпоследовательность

$$f_\xi, f_{i_1}, \ldots, f_{i_s},$$

соответствующая конечной последовательности продукций слова ξ. Лемма 2.4 доказана.

Доказательство леммы 2.5. Достаточность.

В лемме 2.1 показано, что $u(x) \in [\Sigma_2]$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что a-функция

$$E_{\bar{x}}(x, u(\hat{0})) \vee E_{\bar{x}}(I_{\bar{x}}(x), u(I_{\bar{x}}(x)))$$

равна функции $\overline{x}$, а $G(x, u(1)) = B(x)$. Значит система Σ_2 полна.

Необходимость.

Пусть Σ_2 — полная система a-функций и S — схема над Σ_1, реализующая a-функцию без входа с выходным сверхсловом $0C_{01}$. Из утверждения 2.4 следует, что в схеме S существует правый путь $h_1, \ldots, h_m$ с начальным элементом $h_m = I_0$. Пусть сверхслово $\gamma \in \tilde{R}_1$, тогда

$$I_0(\gamma), E_0(\gamma), f_1(\gamma), \ldots, f_k(\gamma) \in R_1,$$

$$\bar{\alpha} \vee \gamma, G(\alpha, \gamma) \in \tilde{R}_1$$

при любом $\alpha \in E_2^\infty$. Поскольку на выходе схемы S получается сверхслово $0C_{01}$, среди a-функций $h_1, \ldots, h_m$ найдутся элементы типа f_ξ и пусть h_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0. Пусть для определенности

$$\xi = d_i d_{j_1} \ldots d_{j_l},$$

покажем, что

$$h_{i_0-1} \in \{f_i, X \vee Y\}.$$

В самом деле,

$$h_{i_0-1} \neq f_\xi, h_{i_0-1} \neq I_0$$

по построению схемы S. Если $h_{i_0-1}=E_0$, $h_{i_0-1}=G$ или $h_{i_0-1}=f_j$ при $j\neq i$, то на выходе h_{i_0-1} в схеме S будут получаться сверхслова из $\tilde{R}_1$, и на выходе схемы S также будет сверхслово из $\tilde{R}_1$, что противоречиво. Рассмотрим случай

$$h_{i_0-1}=X\vee Y$$

(см. рис.61). Для любого сверхслова γ

$$\beta=\bar{\gamma}\vee\alpha\geq\alpha=a\tilde{\xi}C_{01}.$$

Набор $\tilde{d}_s$ не сравним с набором $\tilde{d}_l$ и с набором

$$0101\ldots01$$

длины $4k+4$ при $s\neq l$, $s,l\in\{1,\ldots,k\}$. Если $\beta>\alpha$, то для

$$h_{i_0-2}\in\{f_1,\ldots,f_k,E_0,G\}$$

получим $\delta\in R_1$, а в случае

$$h_{i_0-2}=X\vee Y$$

будем иметь

$$\delta\geq\beta>\alpha;\delta\notin M_i^1\cup M_i^2,$$

что при продолжении этой процедуры приводит к противоречию. Следовательно, в случае

$$h_{i_0-1}=X\vee Y$$

справедливо равенство $\beta=\alpha$. Повторив это рассуждение достаточное число раз, получим, что все элементы из

$$\{h_{i_0-1},\ldots,h_1\}$$

типа $X\vee Y$ в схеме S выполняют функцию проводников своего правого входа, а в последовательности

$$h_{i_0},\ldots,h_1$$

содержится подпоследовательность

$$f_\xi,f_{i_1},\ldots,f_{i_s},$$

соответствующая конечной последовательности продукций слова ξ. Лемма 2.5 доказана.

Доказательство леммы 2.6. Достаточность.

Как показано в лемме 2.4 , $u\in[\Sigma_3]$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$E_\&(x,y,u(I_\&(x,y)))=xy,\qquad G(x,u(1))=B(x).$$

Значит, система Σ_3 полна.

Необходимость.

Пусть система Σ_3 полна и некоторой схемой S над Σ_3 выразима константная a-функция с выходным сверхсловом $1C_{01}$. Из утверждения 2.3 получаем, что в схеме S существует правый путь $\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_n$ с начальным элементом $\hat{g}_n \in \{\hat{0}, I_{\&}\}$. Среди $\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{n-1}$ найдется элемент типа f_ξ, в противном случае схема S будет выдавать сверхслово из $\tilde{R}$, что противоречиво. Пусть $\hat{g}_{i_0}$ — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi = d_i d_{j_1} \ldots d_{j_l}$. Тогда либо $\hat{g}_{i_0-1}, \hat{g}_{i_0-2}$ — элементы типа $\bar{X}$, либо g_{i_0-1} — элемент типа f_i. В других случаях схема S обязана выдавать слово из $\tilde{R}$, что противоречиво. Просмотрев таким образом всю цепочку $\hat{g}_{i_0}, \ldots, \hat{g}_1$, получим, что последовательность $\hat{g}_n, \ldots, \hat{g}_1$ содержит конечную подпоследовательность $f_\xi, f_i, \ldots, f_{i_s}$, соответствующую конечной последовательности продукций слова ξ. Лемма 2.6 доказана.

Доказательство леммы 2.7. Достаточность.

Пусть последовательность продукций слова ξ бесконечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и пусть d_{ij} — первая буква слова ξ_j, тогда a-функция

$$v(x) = f'_{i_\tau}(f'_{i_{\tau-1}} \ldots f'_{i_1}(f_\xi(x) \ldots))$$

совпадает с $u(x)$ на словах длины τ. На словах длины τ имеют место соотношения

$$v(a\alpha) = aC_{01}, \quad v(I_0) = 0C_{01} = \alpha_0, \quad v(\hat{1}) = 1C_{01} = \alpha_1,$$

$$E_0(\alpha_0) = 0 \ldots 0]_\tau, \qquad G(x, \alpha_1) = B(x).$$

Система Σ_4 τ-полна при произвольном τ, следовательно, Σ_4 A-полна.

Необходимость.

Пусть система Σ_4 A-полна и предположим, что система продукций слова ξ конечна и равна $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$. Выберем $\tau = 4(k+1)ws + 2$ и будем рассматривать все a-функции на словах длины τ. Пусть схема S реализует константную a-функцию с выходным словом

$$\delta_0 = 00101 \ldots 010.$$

Из утверждения 2.2 следует, что в схеме S существует правый путь

$$h_1, \ldots, h_m$$

с начальным элементом $h_m = I_0$. Обозначим через B_τ множество слов длины τ вида $\alpha' 1$, где $|\alpha'| = \tau - 1$. Заметим, что если $a\gamma \in B_\tau$, $a \in E_2$, то $\gamma \notin M_i^1 \cup M_i^2$ и $c_i(\gamma) \leq \tau - 2$ для всех $i = 1, \ldots, k$, откуда следует, что

$$E_0(a\gamma) \in B_\tau, \quad f_1'(a\gamma), \ldots, f_k'(a\gamma) \in B_\tau, \quad \bar{\varepsilon} \vee a\gamma, G(\varepsilon, a\gamma) \in B_\tau$$

для любого ε длины τ. Среди $h_1, \ldots, h_m$ найдутся элементы типа f_ξ, поскольку если таковых нет, то получим, что $\delta_0 \in B_\tau$, что противоречиво. Пусть h_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi = d_i d_{j_1} \ldots d_{j_l}$. Покажем, что

$$h_{i_0-1} \in \{\overline{X} \vee Y, f_i'\}$$

. В самом деле, $h_{i_0-1} \neq f_\xi$, $h_{i_0-1} \neq I_0$ по построению схемы S. Если

$$h_{i_0-1} \in \{E_0, G, f_1', \ldots f_{i-1}', f_{i+1}', \ldots f_k'\},$$

то на выходе h_{i_0-1} в схеме S будет слово из B_τ, что приводит к противоречивому соотношению $\delta_0 \in B_\tau$. Пусть

$$h_{i_0-1} = h_{i_0-2} = \ldots = h_{i_0-r} = \overline{X} \vee Y, \qquad h_{i_0-r-1} \neq \overline{X} \vee Y,$$

и на выходе h_{i_0} в схеме S получилось слово α, тогда на выходе h_{i_0-r} будет слово $\beta \geq \alpha$. Если $\beta = 0\alpha_1 1\beta'$, $\alpha = 0\alpha_1 0\alpha'$, где $|\beta'| = |\alpha'| \geq 0$, то $\beta\beta'' \notin M_i^1 \cup M_i^2$ и $c_i(\beta\beta'') \leq \tau - 1$ при всех i и всех $\beta'' \in E_2^\infty$, откуда следует, что на выходе $h_{i_0-r-1} \in \{E_0, G, f_1', \ldots, f_k'\}$ получится слово из B_τ, а это приведет к тому, что $\delta_0 \in B_\tau$, что противоречиво. Значит $\beta = \alpha$ и $h_{i_0-r-1} = f_i$. Повторив достаточное число раз это рассуждение, получим, что в последовательности

$$h_m, \ldots, h_1$$

есть подпоследовательность a-функций

$$f_{i_1}', f_{i_1}', \ldots, f_{i_s}'$$

такая, что

$$f_{i_p}'(0(0101)^{4(k+1)w(p-1)}\tilde{\xi}_p 01 \ldots 0) = 0(0101)^{4(k+1)wp}\tilde{\xi}_{p+1} 01 \ldots 0,$$

$$f'_{i_s}(0(0101)^{4(k+1)w(s-1)}\tilde{\xi}_s01\dots0)=$$
$$=0(0101)^{4(k+1)(w(s-1)+w_0)}11\dots1,$$

где $|\xi_s|=w_0$. Это означает, что на выходе схемы неизбежно получается $\delta_0\in B_\tau$, что противоречиво. Значит, предположение о конечности последовательности продукций слова ξ неверно. Лемма 2.7 доказана.

Доказательство леммы 2.8. Достаточность.

Как показано в лемме 2.4, $u\in[\Sigma_5]_\tau$. На словах длины τ имеют место равенства

$$G(x,u(\hat{1}))=B(x),\qquad E_{\bar{x}}(x,u(\hat{0}))\vee E_{\bar{x}}(I_{\bar{x}}(x),u(I_{\bar{x}}(x)))=\bar{x}.$$

Следовательно, $[\Sigma_5]_\tau=P_a$ при всех τ и система Σ_5 A-полна.

Необходимость.

Пусть система Σ_5 A-полна и предположим, что система продукций слова ξ конечна и равна $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s$. Выберем $\tau=4(k+1)ws+2$ и будем рассматривать все a-функции на словах длины τ. Пусть схема S реализует константную a-функцию с выходным словом

$$\delta_0=00101\dots010.$$

Из утверждения 2.3 следует, что в схеме S существует правый путь

$$h_1,\dots,h_m$$

с начальным элементом $h_m=I_0$. Обозначим через B_τ множество слов длины τ вида $\alpha'1$, где $|\alpha'|=\tau-1$. Заметим, что если $a\gamma\in B_\tau$, $a\in E_2$, то $\gamma\notin M_i^1\cup M_i^2$ и $c_i(\gamma)\leq\tau-2$ для всех $i=1,\dots,k$, откуда следует, что

$$E_0(a\gamma)\in B_\tau,\quad f'_1(a\gamma),\dots,f'_k(a\gamma)\in B_\tau,\quad \bar{\varepsilon}\vee a\gamma, G(\varepsilon,a\gamma)\in B_\tau$$

для любого ε длины τ. Среди $h_1,\dots,h_m$ найдутся элементы типа f_ξ, поскольку если таковых нет, то получим, что $\delta_0\in B_\tau$, что противоречиво. Пусть h_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi=d_id_{j_1}\dots d_{j_l}$. Покажем, что

$$h_{i_0-1}\in\{X\vee Y,f'_i\}$$

В самом деле, $h_{i_0-1} \neq f_\xi$, $h_{i_0-1} \neq I_0$ по построению схемы S. Если

$$h_{i_0-1} \in \{E_0, G, f'_1, \dots f'_{i-1}, f'_{i+1}, \dots f'_k\},$$

то на выходе h_{i_0-1} в схеме S будет слово из B_τ, что приводит к противоречивому соотношению $\delta_0 \in B_\tau$. Пусть

$$h_{i_0-1} = h_{i_0-2} = \ldots = h_{i_0-r} = X \vee Y, \qquad h_{i_0-r-1} \neq X \vee Y,$$

и на выходе h_{i_0} в схеме S получилось слово α, тогда на выходе h_{i_0-r} будет слово $\beta \geq \alpha$. Если $\beta = 0\alpha_1 1\beta'$, $\alpha = 0\alpha_1 0\alpha'$, где $|\beta'| = |\alpha'| \geq 0$, то $\beta\beta'' \notin M_i^1 \cup M_i^2$ и $c_i(\beta\beta'') \leq \tau - 1$ при всех i и всех $\beta'' \in E_2^\infty$, откуда следует, что на выходе $h_{i_0-r-1} \in \{E_0, G, f'_1, \dots, f'_k\}$ получится слово из B_τ, а это приведет к тому, что $\delta_0 \in B_\tau$, что противоречиво. Значит $\beta = \alpha$ и $h_{i_0-r-1} = f_i$. Повторив достаточное число раз это рассуждение, получим, что в последовательности

$$h_m, \dots, h_1$$

есть подпоследовательность a-функций

$$f'_{i_1}, f'_{i_1}, \dots, f'_{i_s}$$

такая, что

$$f'_{i_p}(0(0101)^{4(k+1)w(p-1)}\tilde{\xi}_p 01\ldots 0) = 0(0101)^{4(k+1)wp}\tilde{\xi}_{p+1}01\ldots 0,$$

$$f'_{i_s}(0(0101)^{4(k+1)w(s-1)}\tilde{\xi}_s 01\ldots 0) =$$
$$= 0(0101)^{4(k+1)(w(s-1)+w_0)}11\ldots 1,$$

где $|\xi_s| = w_0$. Это означает, что на выходе схемы неизбежно получается $\delta_0 \in B_\tau$, что противоречиво. Значит, предположение о конечности последовательности продукций слова ξ неверно. Лемма 2.8 доказана.

Доказательство леммы 2.9. Достаточность.

Пусть последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ бесконечна и d_{ij} — первая буква слова ξ_j. Тогда a-функция

$$v(x) = f''_{i_\tau}(f''_{i_{\tau-1}} \ldots f''_{i_1}(f_\xi(x)\ldots))$$

совпадает с $u(x)$ и

$$E''_\&(x, y, v(I_\&(x,y))) = X \,\&\, Y, \qquad G(x, v(1)) = B(x)$$

на словах длины τ. Для произвольного τ справедливо равенство $[\Sigma_6]_\tau = P_a$, значит, система Σ_6 A-полна.

Необходимость.

Пусть система Σ_6 A-полна и предположим, что система продукций слова ξ конечна и равна $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$. Выберем $\tau = 4(k+1)ws+6$ и будем рассматривать a-функции из Σ_6 на словах длины τ. Пусть схема S реализует константную a-функцию с выходным словом $\delta_0 = 10101\ldots010$. Из утверждения 2.4 следует, что в схеме S существует правый путь $h_1, \ldots, h_m$ с начальным элементом $h_m \in \{\hat{0}, I_\&\}$. Обозначим через A множество слов длины τ, вида $\alpha' aaaaa$, $a \in E_2$, $|\alpha'| = \tau - 5$. Заметим, что если $a\gamma \in A$, то $\gamma \notin M_i^1 \cup M_i^2$, $c_i(\gamma) \leq \tau - 5$ для всех $i = 1, \ldots, k$, откуда следует, что

$$f_1''(a\gamma), \ldots, f_k''(a\gamma) \in A; \quad a\bar{\gamma} \in A;$$

$$E_\&''(\alpha, \beta, a\gamma); \quad G''(\alpha, a\gamma) \in A$$

при любых α и β длины τ. Среди $h_1, \ldots, h_m$ найдутся элементы типа f_ξ, поскольку если их нет, то получим, что $\delta \in A$, что противоречиво. Пусть h_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi = d_i d_{j_1} \ldots d_{j_l}$. Покажем,что $h_{i_0-1} \in \{\bar{X}, f_i\}$. В самом деле, $h_{i_0-1} \neq f_\xi$, $h_{i_0-1} \neq I_\&$, $h_{i_0-1} \neq \hat{0}$ по построению схемы S. Если

$$h_{i_0-1} \in \{E_\&'', G'', f_1'', \ldots f_{i-1}'', f_{i+1}'', \ldots f_k''\},$$

то на выходе h_{i_0-1} в схеме S будет слово из A, что приводит к противоречивому соотношению $\delta \in A$. В случае, когда $h_{i_0-1} = \bar{X}$, $h_{i_0-2} \neq \bar{X}$ получаем на выходе h_{i_0-2} слово из A, что приводит к противоречию с тем, что $\delta_0 = 001\ldots010$. Следовательно, возможны случаи, когда $h_{i_0-1} = \bar{X}$, $h_{i_0-2} = \bar{X}$ или $h_{i_0-1} = f_i''$. Повторив это рассуждение достаточное число раз, получим, что в последовательности $h_m, \ldots, h_1$ содержится подпоследовательность $f_{i_1}'', \ldots, f_{i_s}''$ такая, что

$$f_{i_p}''(1(0101)^{4(k+1)w(p-1)}\tilde{\xi}_p 01\ldots0) =$$

$$= 1(0101)^{4(k+1)wp}\tilde{\xi}_{p+1} 01\ldots0,$$

$$p = 1, \ldots, s-1,$$

$$f''_{i_s}(1(0101)^{4(k+1)w(s-1)}\tilde{\xi}_s 01\ldots 0) =$$
$$= 0(0101)^{4(k+1)(w(s-1)+w_0)}11\ldots 1,$$

где $w_0 = |\xi_s|$. На выходе схемы S, таким образом, в любом случае получится $\delta \in A$, что противоречиво. Наше предположение о конечности последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ неверно. Лемма 2.9 доказана.

Доказательство леммы 2.10. Необходимость.

Пусть система продукций $\xi_1, \xi_2, \ldots$ бесконечна и система Σ при этом полна. Тогда найдется схема S над Σ, реализующая константную а.-функцию C_{01}. Можно считать, что схема S получилась из Σ применением сначала всех операций суперпозиции, а потом всех операций о.с. Обозначим через S_t схему, получающуюся из S заменой ее а.-функций булевыми функциями их состояний в момент $4t+1$. Заметим, что а.-функции $EE, ff_1, \ldots, ff_k$ будут заменены на функцию X или на 1; ff_ξ на 0; GG на 1 или Y. Каждая из схем S_t реализует константу 0. Пусть g - элемент схемы S_t, выход которого совпадает с выходом схемы. Разорвем обратную связь от g (если она имеется) в схеме S_t и подставим на образовавшийся вход константу 1, в результате новая схема ${S_t}'$ также будет давать константу 0. Возможны варианты:

а) g - выходная функция состояния одного из элементов $EE, ff_1, \ldots, ff_k$, то есть $g \equiv x$, а ${S_t}' = g(S')$, и, следовательно, S' реализует константу 0;

б) g - это функция $\overline{X_1} \vee X_2$, тогда имеем $\overline{x_1} \vee x_2 \equiv 0$, значит, $x_2 \equiv 0$; для $g = G$ также имеем $x_2 \equiv 0$ (случай когда элемент $g = G$ имеет в момент $4t+1$ состояние с выходной функцией 1 невозможен). Получаем схему S' с двумя выходами, имеющую на правом выходе 0, такую что ${S_t}' = g(S')$.

в) Для $g = h$ имеем $h(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$, что с точностью до перестановки x_1, x_2, x_3, x_4 дает $x_2 \equiv x_3 \equiv x_4 \equiv 0$. Получается схема S' с тремя нулевыми выходами, такая что ${S_t}' = g(S')$. Заметим, что в первоначальной схеме S на каждом из этих выходов не может быть константы 1.

Пометим элемент g, пометим его нулевой вход (входы) и рассмотрим те элементы схемы S', выходы которых совпадает с выходами самой схемы S'. Проделаем с ним подходящее действие а), б) или в). Эти элементы не могли быть ранее помечены, так как обратные связи от ранее помеченных элементов разорваны. Продолжая этот процесс, пометим в схеме S_t дерево, вершины которого суть помеченные элементы, а ребра - помеченные входы элементов схемы S_t. Листьями дерева будут являться элементы 0.

Перенеся пометки в схему S, получим в ней дерево T_t. Листья дерева T_t суть элементы вида ff_ξ ; в вершины вида $EE, ff_1, \ldots, ff_k$ входит одно ребро, в вершины вида $\overline{X_1} \vee X_2, GG$ - также одно ребро, соответствующее их правому входу, в вершины вида H входят три ребра. При этом в схеме S на каждом из выходов вершин дерева T_t не может быть константы 1. Из каждой вершины дерева T_t выходит одно ребро. Последовательность деревьев $T_1, T_2, \ldots$ периодическая (T_t зависит от состояния $q(t)$ схемы S, не имеющей входа). Пусть $T_r, \ldots T_{r+K}$ встречаются в последовательности $T_1, T_2, \ldots$ бесконечно часто. Рассмотрим дерево T, множества вершин и, соответственно, ребер которого суть объединения вершин и ребер деревьев $T_r, \ldots T_{r+K}$. (В дереве T возможна вершина - элемент H, в которую входит четыре ребра). Пусть

$$L_1 = \bigcup_i \{\alpha/\alpha \geq \eta_i\}, L = L_1 \bigcup R.$$

Имеем

$$f_i : L_1 \to L_1, f_i : R \to R \text{ при всех } i = 1, 2, \ldots k;$$

$$E : L \to R; G : E_2^\infty \times L \to R;$$

$$\overline{X_1} \vee X_2 : E_2^\infty \times L_1 \to L_1;$$

$$\overline{X_1} \vee X_2 : E_2^\infty \times R \to R.$$

В утверждении 1.1 было показано, что

$$H : E_2^\infty \times L_1 \times L_1 \times L_1 \to L_1.$$

Очевидно, что $H : E_2^\infty \times E_2^\infty \times R \times R \to R$. Покажем, что в схеме S не может быть случая, когда на элемент H, имеющий в дереве T три входящих ребра, поступят последовательности $\alpha_1 \in R$ и $\alpha_2, \alpha_3 \in L_1$. В самом деле: пусть $\alpha_1 = \alpha\mathbf{1}, |\alpha| = \mathrm{t}_0$, тогда существует $t > t_0$ такое , что в схеме ${S_t}'$ при построении дерева $T_t{}'$ возникнет этот элемент H, имеющий три нуля на рассматриваемых входах, что противоречит тому, что при $t > t_0$ будет $\alpha_1(t) = 1$. Значит, этот элемент H имеет четыре ребра в дереве T.

Таким образом, на выходе схемы S должно получиться сверхслово из L,что противоречиво.

Достаточность.

Если последовательность продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$, а d_{i_p} - первая буква в ξ_p и $|\xi_s| < w$, то

$$ff_{i_s}(ff_{i_{s-1}} \ldots ff_{i_1}(ff_\xi) \ldots) = C_{01},$$

$$EE(C_{01}) = 0, GG(x, C_{01}) = B(x).$$

Следовательно, Σ_7 - полная система. Лемма 2.10 доказана.

Доказательство леммы 2.11. Необходимость.

Предположим противное. Пусть система Σ_8 полна, а последовательность продукций ξ конечна и равна

$$\xi_1, \xi_2, ...\xi_s.$$

Пусть

$$\tau = 4w(k+1)s + 5,$$

$$\eta_1 = \widetilde{\xi_1} C_{0011}, \eta_i = (0101)^{w(i-1)(k+1)} \widetilde{\xi_i} C_{0011},$$

$$\eta_{s+1} = (0101)^{ws(k+1)} 0 C_1;$$

$$\eta_{i+1} = f_{j_i}(\eta_i)$$

при подходящем $j_i, i = 1, \ldots, s$;

$$L_1 = \bigcup_i^s \{\alpha / \alpha \geq \eta_i\},$$

$$L_2 = \{\alpha' C_1 \ / \ |\alpha'| = \tau - 1\}$$

Пусть схема S над Σ' реализует константу

$$0101 \ldots 010$$

длины τ. Без ограничения общности в схеме S нет обратных связей и все операции отождествления входов выполнены в последнюю очередь. Очевидно, что ff_ξ присутвует в схеме S, так как булевы функции начальных состояний остальных элементов Σ_8 сохраняют единицы. Подставим ff_ξ на фиктивные входы схемы S и получим схему $S'(ff_\xi)$, где схема S' элементов f_ξ не содержит. На выходе f_ξ получилась константа

$$\widetilde{\xi_1} C_{0011}]_\tau$$

из L_1. Покажем, что все а-функции g из $\Sigma_8 \backslash \{ff_\xi\}$ сохраняют $L_1 \bigcup L_2$. В самом деле:

$$ff_i' : L_1 \to L_1 \bigcup L_2,$$

$$f_i' : L_2 \to L_2$$

при всех $i = 1, 2, ...k$;

$$EE : L_1 \bigcup L_2 \to L_2; \qquad GG : E_2^\infty \times (L_1 \bigcup L_2) \to L_2;$$

$$\overline{X_1} \vee X_2 : E_2^\infty \times (L_1 \bigcup L_2) \to (L_1 \bigcup L_2).$$

Покажем, что

$$H : (L_1 \bigcup L_2)^4 \to (L_1 \bigcup L_2).$$

В самом деле, если три из четырех входных слов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ из L_1, то по утверждению получаем $H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in L_1$, в альтернативном случае два из них принадлежат L_2, что приводит к тому, что $H(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in L_2$. Таким образом, на выходе схемы S получится слово из $L_1 \bigcup L_2$, что противоречиво.

Достаточность.

Если последовательность продукций слова ξ бесконечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \ldots$, а d_{i_p} первая буква ξ_p, то на словах длины τ имеем

$$ff_{i_\tau}(ff_{i_{\tau-1}} \ldots ff_{i_1}(ff_\xi) \ldots) = C_{01},$$

$$E(C_{01}) = 0, \qquad G(x, C_{01}) = B(x).$$

Следовательно, Σ_8 есть А-полная система. Лемма 2.11 доказана.

Глава 3

О классификации базисов в P_k по разрешимости полноты для автоматов.

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, функции $g\colon E_k^n \to E_k^m$ называются функциями k-значной логики, а их множество обозначается через P_k. Пусть

$$E_k^\infty = \{a(1)a(2)\ldots | a(j) \in E_k, j = 1, 2, \ldots\}$$

— множество всех сверхслов, а

$$E_k^\tau = \{a(1)a(2)\ldots a(\tau) | a(j) \in E_k, j = 1, 2, \ldots \tau\}$$

— множество всех слов длины τ. Пусть

$$f\colon (E_k^\infty)^n \to (E_k^\infty)^m$$

— автоматная функция (a-функция) над E_k. Она задается рекуррентно соотношениями (3.1)

$$\begin{cases} q(1) = q_1, \\ q(t+1) = \varphi(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \\ b_j(t) = \psi_j(q(t), a_1(t), ..., a_n(t)), \quad j = 1, ..., m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Множество функций $f\colon (E_k)^n \to E_k$, для которых выполнено одно из свойств: $n = 1$ или f не принимает всех значений из E_k, называется классом Слупецкого. Известно, что класс Слупецкого замкнут относительно суперпозиции, т.е. результат применения суперпозиции к функциям из этого класса являются функцией из этого же класса [6]. Будем обозначать класс Слупецкого через $SLUP$.

Для $l \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ функция $f \in P_k$, такая что $f(l, l, \ldots, l) = l$ называется сохраняющей константу l , а множество всех таких функций - классом сохранения константы l, оно обозначается через U_l . Обозначим через

$$U = \bigcap_{i=0}^{k-1} U_l$$

класс сохранения всех констант. Известно, что классы $U, U_l, l = 1, 2, \ldots, k-1$ замкнуты относительно суперпозиции, т.е. результат применения суперпозиции к функциям из этих классов являются функциями из этих же классов [6].

Функция

$$\mathbf{w}(x, y) = max(x, y) + 1 \mid \mod k$$

называется функцией Вебба. Известно, что $P_k = [\{\mathbf{w}\}]$, т.е. функция $\mathbf{w}$ образует полную систему в классе k -значных функций.

Автоматная функция $B\colon E_k^\infty \to E_k^\infty$, задаваемая уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = k-1, \\ q(t+1) = x(t), \\ b(t) = q(t), \end{cases}$$

называется a-функцией задержки. Про нее известно [13], что

$$[\{B\} \cup \{\mathbf{w}\}] = P.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 5.

Пусть $\Phi \subseteq SLUP$, не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос, верно ли, что $[\Phi \cup \nu] = P$.

Теорема 6.

Пусть $\Phi \subseteq SLUP$, не существует алгоритма, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающего вопрос, верно ли, что $[\Phi \cup \nu]_A = P$.

Теорема 7.Для любого $\Phi \supseteq U$ существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающий, верно ли, что $[\Phi \cup \nu] = P$.

Теорема 8.Для любого $\Phi \supseteq U$ существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subseteq P$ решающий, верно ли, что $[\Phi \cup \nu]_A = P$.

§3.1. Основные леммы и доказательство теорем.

Зафиксируем систему продукций Поста $T = \langle D, \rho, W \rangle$ с неразрешимой проблемой конечности последовательности продукций, и пусть $|D| = r$.

Пусть $\widetilde{R}$ — множество сверхслов α таких, что

$$\{\alpha(t+1), \alpha(t+2), \dots \alpha(t+k)\} \neq E_k \text{ при всех } \quad t \geq t_\alpha.$$

Обозначим $w, v \in E_k^k$ через

$$w = 01\dots(k-1), \quad v = (k-1)(k-2)\dots 0.$$

Пусть сверхслова таковы:

$$w^\infty = ww\dots, \quad 1^\infty = 11\dots, \quad 0^\infty = 00\dots.$$

Функции таковы:

$$u \colon E_k^\infty \to E_k^\infty \qquad u_i \colon E_k^\infty \to E_k^\infty$$

$$u(a\alpha) = aw^\infty, \quad u_i(a\alpha) = iw^\infty,$$

$$i = 0, 1, \dots, k-1, a \in E_k, \alpha \in E_k^\infty.$$

Через $\alpha]_t$ обозначим начало длины t сверхслова $\alpha \in E_k^\infty$, через $|\alpha'|$ — длину слова α'. Каждому элементу $d_i \in D$ поставим в соответствие слово

$$\widetilde{d_i} = v^i w v^{r-i}, \qquad \widetilde{d_i} \in E_k^{k(r+1)}$$

Для $\xi = d_{i_1} \dots d_{i_s}$ обозначим $\widetilde{\xi} = \widetilde{d_{i_1}} \dots \widetilde{d_{i_s}}$.

Для $\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta \in E_k^\infty$, определим числовую функцию

$$c(\alpha, \beta) = \max_{\alpha]_t = \beta]_t} t.$$

Пусть

$$M_i^1 = \left\{ w^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} w^\infty \mid n, l \in \mathbf{N_0},\ \mathrm{j}_1, \dots, \mathrm{j}_\mathrm{l} \in \{1, \dots, \mathrm{r}\} \right\}$$

$$M_i^2 = \left\{ w^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \tilde{d}_{j_2} \dots \mid n \in \mathbf{N_0},\ \mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots \in \{1, \dots, \mathrm{r}\} \right\}.$$

Для $\alpha \notin M_i^1 \cup M_i^2$ определим $c_i \colon E_k^\infty \to \mathbf{N}$, полагая

$$c_i(\alpha) = \max_{\beta \in M_i^1 \cup M_i^2} c(\alpha, \beta).$$

Пусть

$$\Delta = w^n \tilde{d}_i \tilde{d}_{j_1} \dots \tilde{d}_{j_l} w^\infty, \qquad n \in \mathbf{N_0}.$$

Определим a-функции

$$f_i \colon E_k^\infty \to E_k^\infty, \qquad i = 1, \dots, r,$$

соотношениями $(a), (b), (c), (d)$.

(a) $f_i(a\Delta) = aw^{n+Wk(r+1)} \tilde{d}_{j_w} \dots \tilde{d}_{j_l} \widetilde{R_i} w^\infty$ при $l > W-1$

(b) $f_i(a\Delta) = aw^{n+Wk(r+1)} \tilde{R}_i w^\infty$ при $l = W-1$,

(c) $f_i(a\Delta) = aw^\infty$ при $l < W-1$,

(d) $f_i(a\beta) = a\beta' bb\dots$ при $\beta \notin M_i^1 \cup M_i^2$, где $|\beta'| = c_i(\beta) - 1, b \in E_k$.

Определим a-функции

$$f_i' \colon E_k^\infty \to E_k^\infty, \qquad i = 1, \dots, r,$$

соотношениями $(a), (b), (c'), (d)$.

(c') $f_i'(a\Delta) = aw^{n+lk(r+1)} 11\dots$ при $l < W-1$,

Определим а.-функции G, E, I, f_ξ, для $\alpha, \beta, \gamma \in E_k^\infty$, $a, b \in E_k$, следующим образом:

$$G(\alpha, a\gamma) =$$

$$= \begin{cases} a(k-1)(k-1)\dots & \text{при } a \neq k-1, \\ B(\alpha) & \text{при } a = k-1,\ \gamma = w^\infty, \\ (k-1)\alpha' bb\dots & a = k-1, \gamma \neq w^\infty, |\alpha'| = c(\gamma, w^\infty) - 1 \end{cases}$$

$$E(\alpha, \beta, a\gamma) = \begin{cases} a\ \alpha(2) \oplus \beta(2)\ \alpha(3) \oplus \beta(3) \dots \ \text{при } \gamma = w^\infty, \\ a\alpha' bb\dots \ \text{при } \gamma \neq w^\infty, |\alpha'| = c(\gamma, w^\infty) - 1 \end{cases}$$

$$I(\alpha, \beta) = \alpha(1) \oplus \beta(1)\ 11\dots, \qquad f_\xi(a\alpha) = a\bar{\xi} w^\infty.$$

Через

$$\hat{g}_i(x, y), i = 1, \dots, m_2$$

обозначим двухместные функции из P_k, не принимающие всех значений из E_k, а через

$$\hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1$$

обозначим одноместные функции из P_k, принимающие все значения, соответственно. Нетрудно убедиться, что функции

$\hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2,\ \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1$

порождают класс Слупецкого, в котором также лежат все константные функции.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 3.1. Система Σ вида

$$\{\hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2, \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1, I, E, f_1, \ldots, f_r, f_\xi, G\}$$

полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ конечна.

Лемма 3.2. Система Σ' вида

$$\{\hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2, \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1, I, E, f'_1, \ldots, f'_r, f_\xi, G\}$$

А-полна тогда и только тогда, когда последовательность продукций слова ξ бесконечна.

Доказательство теорем 5 и 6 следует из лемм 3.1 и 3.2, соответственно.

Известны теоремы:

Теорема 9. [32] Существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subset P$ решающий, верно ли, что $[P_k \cup \nu] = P$.

Теорема 10. [31] Существует алгоритм, по конечному множеству $\nu \subset P$ решающий, верно ли, что $[P_k \cup \nu]_A = P$.

Теоремы 7 и 8 будут доказаны сведением к теоремам 9 и 10. Для этого необходимо указать алгоритм, определения выразимости константных истинностных функций через а-функции из ν и U.

Для доказательства теорем 7,8 понадобятся определения. Для натуральных D, N автоматную функцию с уравнениями (1), где

$m = D + N + k, n = 0, Q = \{1, \ldots, D + N\}$

и для любых $i \in Q, a \in {E_k}^n$ выполнено

$$\psi(i, a) = ((i, i \oplus 1, \ldots, i \oplus (k-1)), (0, 0, \ldots, 0, \overset{\ldots i \ldots}{1}, 0, \ldots, 0))$$

$$\phi(i,a) = \begin{cases} i+1 & \text{при } i < D+N, \\ D+1 & \text{при } i = D+N, \end{cases}$$

назовем (D,N)-счетчиком и обозначим через $B_{D,N}$. Здесь $\oplus$ обозначает сложение по модулю k.

Заметим, что счетчик $B_{D,N}$ выдает всегда одну и ту же последовательность с периодом N и предпериодом D. Кроме того, в моменты не сравнимые по модулю N, функция $B_{D,N}$ выдает разные буквы и в каждый момент времени не сохраняет никаких констант. Множество всех счетчиков обозначим через K.

При доказательстве теорем 7,8, без ограничения общности, будем исследовать на полноту системы вида $\{f\} \cup U$, где f задается уравнениями (3.1). Для а-функции f определим $D \leq s$ последовательность (3.2),

$$(a(1), b(1)), (a(2), b(2)), \ldots, (a(s), b(s)) \tag{3.2}$$

где

$$a(1), \ldots, a(s) \in {E_k}^n; q(1), \ldots, q(s) \in Q;$$

$$b(1), \ldots, b(s) \in {E_k}^m; b(i) = \psi(q(i), a(i));$$

$$q(t+1) = \phi(q(i), a(i)); i = 1, \ldots, s; q(1) = q_1,$$

назовем (s)- экспериментом с а-функцией f . Если же еще выполнено

$$q(D+1) = \phi(q(s), a(s)),$$

то назовем ее (D,s)-экспериментом с а-функцией f.

Пусть i,j натуральные числа, $1 \leq i,j \leq s, j \neq i$, скажем, что а-функция f является (j,i)-зависимой на (D,s)- экспериментах ((s)-экспериментах), если для *каждой* последовательности (3.2) выполнено соотношение (3.3),

$$\psi(q(j), a(i)) = b(i) \tag{3.3}$$

Скажем, что а.-функция f сохраняет константу $l \in \{0, \ldots, k-1\}$ в j -тый момент, на (D,s)- экспериментах ((s)- экспериментах), если на *каждой* последовательности (3.2) выполнено

$$\psi(q(j), (l, l, \ldots, l)) = (l, l, \ldots, l)$$

Скажем, что а.-функция f иммитирует счетчик $B_{D,N}$ на циклических экспериментах, если для некоторого $s = D + pN$ и любых $1 \leq i,j \leq s, i \neq j| \mod N$, а.-функция f не является (j,i)-зависимой и не сохраняет константу $l \in \{0, \ldots, k-1\}$ в j-тый момент на (D, s)- экспериментах при всех l и j. Скажем, что а.-функция f иммитирует счетчик $B_{D,N}$ на простых экспериментах, если для некоторого $s = D + N$ и любых $i \neq j, 1 \leq i, j \leq s$ а.-функция f не является (j, i)-зависимой и не сохраняет константу $l \in \{0, \ldots, k-1\}$ в j–тый момент на (s)-экспериментах при всех l и j.

Имеют место леммы:

Лемма 3.3. Имеет место включение $[\{f\} \cup U] \supseteq K$ точно тогда, когда для любых натуральных D, N f иммитирует счетчик $B_{D,N}$ на циклических экспериментах.

Лемма 3.4. Свойство функции f для любых натуральных D, N иммитировать счетчик $B_{D,N}$ на циклических экспериментах алгоритмически проверяемо.

Лемма 3.5. Имеет место включение $[\{f\} \cup U]_A \supseteq K$ точно тогда, когда для любого натурального s f иммитирует счетчик $B_{0,s}$ на простых экспериментах.

Лемма 3.6. Свойство функции f для любого натурального s иммитировать счетчик $B_{0,s}$ на простых экспериментах алгоритмически проверяемо.

Доказательство теорем 7 и 8 следует из теорем 9 и 10, лемм 3.3 - 3.6 и того факта, что $[K \cup U] \supseteq P_k$.

§3.2. Доказательство лемм 3.1, 3.2.

Пусть S — схема над множеством a-функций Σ. Правым путем в схеме S назовем такую последовательность элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ схемы S, что выход a-функции g_1 совпадает с выходом схемы, а выходы a-функций g_{i+1} для многоместных g_i соединены с правым входом g_i, а для одноместных g_i с их единственным входом. Элемент g_n называется начальным элементом пути.

Утверждение.3.1.

Пусть некоторая схема S над системой Σ реализует константную a-функцию с выходным сверхсловом $(k-1)ww\alpha$, тогда в схеме S существует правый путь с начальным элементом $g \in \{I,\ \hat{g}_i(x,y), i = 1, \ldots, m_2\}$.

Доказательство.

Пусть схема S_1 над Σ получается из схемы S заменой a-функций на функции их начальных состояний. S_1 реализует константу $k-1$ и состоит из функций начальных состояний системы

$$\{\hat{g}_i(x,y), i = 1, \ldots, m_2, \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1, I, E, f_1, \ldots, f_k, f_\xi, G\}$$

которые таковы

$\{\hat{g}_i(x,y), i = 1, \ldots, m_2, \hat{h}_i(x), i = 1, \ldots, m_1, x \bigoplus y, z, x \ldots x, y\}$, соответственно.

Представим схему S_1 в виде, приведенном на рис.62. Пусть g_1 —элемент схемы S_1, выход которого совпадает с выходом схемы, и пусть $g_1 \notin \{I, \hat{g}_i(x,y), i = 1, \ldots, m_2\}$. Тогда выходная функция его начального состояния взаимнооднозначна, а значит схема S_2 имеет фиктивный вход y (который можно отбросить), а на выходе x_3 реализуется константа. Продолжая эту процедуру, мы получим искомый путь. Утверждение доказано.

Доказательство леммы 3.1. Достаточность.

Пусть последовательность продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, первая буква слова ξ_j есть d_{ij} и длина слова ξ_s меньше W, тогда

$$u(x) = f_{i_s}\left(f_{i_{s-1}}(\ldots f_{i_1}(f_\xi(x))\ldots)\right), u(k-1) = u_{k-1}$$

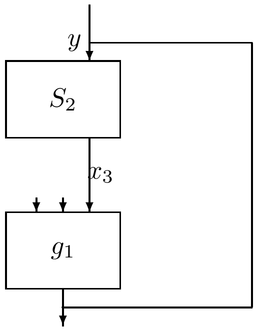


Рис.62

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$E_(x, y, u(I(x, y))) = x \oplus y, \qquad G(x, u_{k-1}) = B(x).$$

Существенная функция $x \oplus y$ вместе с функциями класса Слупецкого [6] порождает полную в P_k систему истинностных функций. Значит, система Σ полна.

Необходимость.

Пусть система Σ полна и некоторой схемой S над Σ выразима константная a-функция с выходным сверхсловом $(k-1)w^\infty$. Из утверждения получаем, что в схеме S существует правый путь $g_1, \ldots, g_n$ с начальным элементом $g_n \in \{I,\ \hat{g}_i(x, y), i = 1, \ldots, m_2\}$. Среди $g_1, \ldots, g_{n-1}$ найдется элемент типа f_ξ, в противном случае схема S будет выдавать сверхслово из $\tilde{R}$, что противоречиво. Пусть g_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi = d_i d_{j_1} \ldots d_{j_l}$. Тогда либо $\hat{g}_{i_0-1}$, — взаимнооднозначная одноместная функция, либо g_{i_0-1} — элемент типа f_i. В других случаях схема S обязана выдавать слово из $\tilde{R}$, что противоречиво. Просмотрев таким образом всю цепочку $g_{i_0}, \ldots, g_1$, получим, что последовательность $g_n, \ldots, g_1$ содержит конечную подпоследовательность $f_\xi, f_i, \ldots, f_{i_s}$, соответствующую конечной последовательности продукций слова ξ. Лемма доказана.

Доказательство леммы 3.2. Достаточность.

Пусть последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ продукций слова ξ бесконечна, первая буква слова ξ_j есть d_{ij}. Тогда для любого τ на всех словах δ длины τ $u(\delta)$ совпадает с

$$f'_{i_\tau}\left(f'_{i_{\tau-1}}(\ldots f'_{i_1}(f_\xi(\delta))\ldots)\right),$$

и $u((k-1)\delta)$ совпадает с $u_{k-1}(a\delta)$ Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$E_(x,y,u(I(x,y))) = x\oplus y, \qquad G(x,u_{k-1}) = B(x).$$

Существенная функция $x\oplus y$ вместе с функциями класса Слупецкого порождает полную в P_k систему истинностных функций. Значит, система Σ' $\tau-$ полна при всех τ, т.е. она А-полна.

Необходимость.

Пусть от противного система Σ' А-полна и при этом система продукций слова ξ конечна и имеет вид $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s$. Выберем $\tau = Wks(r+1)+k+1$ и рассмотрим все а.-функции из Σ' на словах длины τ.

Пусть схема S над Σ' реализует константную a-функция с выходным сверхсловом $(k-1)w^\infty]_\tau$. Из утверждения получаем, что в схеме S существует правый путь $g_1,\ldots,g_n$ с начальным элементом $g_n\in\{I,\ \hat g_i(x,y), i=1,\ldots,m_2\}$. Обозначим через A_τ множество слов α длины τ таких что

$$\{\alpha(\tau-(k-1)),\alpha(\tau-(k-2)),\ldots,\alpha(\tau)\}\neq E_k$$

В словах из A_τ последние k букв неразнозначны.

Среди $g_1,\ldots,g_{n-1}$ найдется элемент типа f_ξ, в противном случае схема S будет выдавать сверхслово из A_τ, что противоречиво. В самом деле: начальный элемент пути $g_n\in\{I,\ \hat g_i(x,y), i=1,\ldots,m_2\}$ всегда выдает слова из A_τ, однозначные функции их не выводят из A_τ, по определению функций E,G,f'_i нарушение разнозначности на (правом) входе в кортеже из последних τ букв приводит к выдаче одной и той же буквы с предыдущего такта.

Пусть g_{i_0} — элемент типа f_ξ с минимальным номером i_0 и пусть для определенности $\xi = d_i d_{j_1}\ldots d_{j_l}$. Тогда либо g_{i_0-1}, — взаимнооднозначная одноместная функция, либо g_{i_0-1} — элемент f_i. В других случаях схема S обязана выдавать слово из A_τ, что противоречиво. Просмотрев таким образом всю цепочку $g_{i_0},\ldots,g_1$, получим, что последовательность $g_n,\ldots,g_1$ обязана содержать конечную подпоследовательность $f_\xi, f_i,\ldots,f_{i_s}$, соответствующую конечной последовательности продукций слова ξ. Значит по соотношению c') на выходе f_{i_s} все-таки получится слово из A_τ, что противоречиво. Значит предположение об A-полноте и одновременной конечности продукций слова ξ неверно. Лемма доказана.

§3.3. Доказательство лемм 3.3 - 3.6.

Доказательство леммы 3.3. Необходимость.

Пусть через а.-функции из $\{f\} \cup U$, выражена а-функция g, равная $B_{D,N}$. Это значит что, найдутся натуральные $p, D, s = D+pN$ такие, что а.-функция g не является (j,i)-зависимой при всех $i \neq j (\mod N)$ и не сохраняет констант в j-тый момент при всех j. Зафиксируем для определенности $i < j$.

Если а-функция g получилась операцией обратной связи последнего выхода с последним входом из а-функции $\tilde{g}$, то $\tilde{g}$ также не будет (j,i)-зависимой.

В самом деле: пусть при этом эксперимент (3.2) а-функции g нарушает (j,i)-зависимость и получился из эксперимента (3.4) , который ее сохранял.

$$((a(1), e(1)), (b(1), e(1))), \ldots, ((a(s), e(s)), (b(s), e(s))) \qquad (3.4)$$

Это означает, что $b = \psi(q(j), a(i)) \neq b(i)$. Пусть входная буква $a(i)$ в диаграмме g в состоянии $q(j)$ получилась из входной буквы $(a(i), e)$ в диаграмме $\tilde{g}$ в состоянии $q(j)$. Тогда имеем

$$\psi_{\tilde{g}}(q(j), (a(i), e)) = (b, e), \psi_{\tilde{g}}(q(j), (a(i), e(i))) = (b', e').$$

По правилу применимости о.с. имеем $e = e'$, если есть сохранение (j,i)-зависимости для $\tilde{g}$, то $e' = e(i)$, откуда следует $b' = b = b(i)$, а это означает сохранение (j,i)-зависимости для g, что противоречиво.

Если $\psi_{\tilde{g}}$ в некотором состоянии сохраняла константу l , то подача обратной связи на несущественный для нее вход не может изменить этого свойства.

Пусть теперь g получилась суперпозицией а-функций g_1 и g_2 , и эксперимент (3.2) получился из экспериментов

$$(a(1), c(1)), \ldots, (a(s), c(s)), \qquad (c(1), b(1)), \ldots, (c(s), b(s)),$$

а-функций g_1 и g_2 , соответственно. Если предположить, что g_1 и g_2 сохраняют (j,i)-зависимость, то получим, что g также сохраняет (j,i)-зависимость. Значит, хотя бы одна из а.-функций g_1 или g_2 не сохраняет (j,i)-зависимость на (D,s)- экспериментах. Очевидно, что не сохраняющая константу функция, не может быть получена суперпозицией функций эту константу сохраняющих.

Заметим, что всякая истинностная а-функция сохраняет все (j,i)- зависимости на всех (D,s)-экспериментах. Повторяя эти рассуждения, мы получим, что сама базисная а-функция f не должна сохранять (j,i)-зависимость на (D,s)-экспериментах при $i \neq j(\mod N)$, и не должна сохранять констант во все моменты. Значит, f имитирует счетчик $B_{D,N}$, при всех натуральных D,N на своих циклических экспериментах. Необходимость доказана.

Доказательство леммы 3.3. Достаточность.

Для фиксированных $N,D,k,s=D+kN$ и некоторого j рассмотрим множество всех (D,s) -экспериментов P с а-функцией f , иммитирующей счетчик $B_{D,N}$. Пусть $|P|=t$ и g_j параллельное соединение t копий а-функции f. Пусть g_j описывается уравнениями (1) и $\alpha_l \in P$ l-тый эксперимент из P

$$\alpha_l = (a^{(l)}(1), b^{(l)}(1)), (a^{(l)}(2), b^{(l)}(2)), \ldots, (a^{(l)}(s), b^{(l)}(s)),$$

$$l = 1,2,\ldots,t,$$

$$a(i) = (a^{(1)}(i), \ldots, (a^{(t)}(i)), b(i) = (b^{(1)}(i), \ldots, (b^{(t)}(i)),$$

$$i = 1,2,\ldots,s,$$

Можно считать, что среди $\alpha(1),\alpha(2),\ldots,\alpha(s)$ нет равных и нет наборов вида $(l,l,\ldots,l)$ (в противном случае можно добавить фиктивные входы и выбрать $\alpha(1),\alpha(2),\ldots,\alpha(s)$ попарно не равными). Рассмотрим (D,s) -эксперимент (2) с а-функцией g_j. Для $a \in {E_k}^n$ определим функцию $h_j \in U$

$$h_j \colon E_k^{m+n} \to E_k^n$$

$$h_j(x,y) = \begin{cases} a(i) & \text{для } x = a(i), y = b(i), i = 1,\ldots,s \\ a(j) & \text{для } x \in {E_k}^n, y = \psi(q(j),x) \end{cases}$$

Это можно сделать ввиду отсутствия (j,i)-зависимостей и не сохранения констант. В состоянии $q(j)$ выходная функция а-функции $f_j(x) = h_j(x, q_j(x))$ принимает значение $a(j)$ для всех входных букв, т.е. является константой. Рассмотрим а.-функцию

$$F_{N,D,k}(x) = f_s(\ldots f_2(f_1(x))\ldots)$$

с начальным состоянием $(q(1), q(1), \ldots q(1))$ она имеет n входов и n выходов. В состоянии $(q(j), q(j), \ldots q(j))$ реализуется константа $a(j)$. После n применений операции обратной связи от соответствующих выходов к соответствующим входам получится а-функция, с точностью до перекодировки функциями из U, равная $B_{D,N}$. Достаточность доказана.

Доказательство леммы 3.4.

Пусть ${Q_p}^T \subseteq Q$ множество состояний а.-функции f, достижимых из состояния p за T тактов, а R_L - множество состояний, из которых достижимо состояние L.

$$Q^T_{p,L} = {Q_p}^T \cap R_L,$$

тогда

$$Q^{T+1}_{p,L} = \{\phi(p,a) | a \in {E_k}^m, p \in Q^T_{p,L}\} \cap R_L.$$

Последовательность $Q^T_{p,L}, T = 1, 2, \ldots$, будет детерминированной, а, значит, и периодической.

Выберем период и предпериод этой последовательности равный, для простоты, одному и тому же числу ρ при всех $p, L \in Q$. Очевидна грубая оценка

$$\rho \le (k^{|Q|}!).$$

Получилось что, для любых $p, L \in Q$, и любого натурального T выполнено

$$Q^T_{p,L} = Q^{T+\rho}_{p,L}.$$

Возьмем, к примеру, такой случай расположения чисел

$$D < D + \rho < i < i + \rho < j < s - \rho < s$$

Если для (D, s) -экспериментов выполнена (j, i)-зависимость, то для (D_1, s_1) -экспериментов, будет выполнена (j_1, i_1)-зависимость, где

$$D_1 < D_1 + \rho < i_1 < D + 2\rho < j_1 < s_1 < j_1 + \rho$$

$D_1, D; i_1, i; j_1, j; s_1, s$ попарно совпадают по модулю ρ. Это следует из того, что для каждого $p \in Q^D_{q_1,p}$ имеем $Q^D_{q_1,p} = Q^{D_1}_{q_1,p}$ и $Q^i_{p,p} = Q^{i_1}_{p,p}$; для каждого $r \in Q^{i-D}_{p,p}$ имеем $Q^{j-i}_{r,p} = Q^{j_1-i_1}_{r,p}$; для каждого $l \in Q^{j-i}_{r,p}$ имеем $Q^{s-j}_{l,p} = Q^{s_1-j_1}_{l,p}$.

В случае другого расположения чисел D, j, i мы таким же способом сократим интервалы между числами $1, D, j, i$. Следовательно, наличие или отсутствие (j, i)-зависимости на (D, s)-экспериментах (а также сохранение констант) равносильно, соответственно, наличию или отсутствию (j_1, i_1)- зависимости (а также сохранению констант) на (D_1, s_1)-экспериментах при $D_1 \le s_1 \le 5\rho$. Последний факт проверяется перебором всех (D_1, s_1)-экспериментов. Лемма 5 доказана.

Лемма 3.5 и 3.6 доказывается аналогично леммам 3.3 и 3.4, соответственно.

Список литературы.

1.Post E., Two-valued iterative systems of math. logik.Printston, 1941.

2.Кудрявцев В.Б., Гаврилов Г.П., Яблонский С.В., Функции алгебры логики и классы Поста, Наука, М., 1966.

3. Автоматы, Сборник статей под редакцией Маккарти и Шеннона, ИЛ, Москва, 1956.

4. Кузнецов А.В., О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем, Труды третьего всесоюзного математического съезда, т.2, М. Изд. АН СССР, 1956, с.145-146.

5. Кузнецов А.В., Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты, Успехи математических наук т.16, N 2, 1961, с.201-202.

6. Яблонский С.В., Функциональные построения в k-значной логике, Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, АН СССР, 1958, т.51, с.5–142.

7. Ло Чжу-Кай, Предполные классы, определяемые k-арными отношениями в k-значной логике. Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis, 1964, N3.

8. Ло Чжу-Кай, Лю Сюй Хуа, Предполные классы, определяемые бинарными отношениями в многозначной логике,. Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis, 1963, N4.

9. Захарова Е.Ю., Критерий полноты системы функций из P_k. Проблемы кибернетики, 1967, N18, с.5–10.

10. Мартынюк В.В., Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках. Проблемы кибернетики, 1960 N3, с.49–60.

11. Пан Юн-Цзе, Один разрешающий метод для отыскания всех предполных классов в многозначной логике, Acta Sci. Natur. Univ. Jilinensis, 1963 N3.

12. Rosenberg J., La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1965 N 260, c.3817–3819.

13. Кудрявцев В.Б., Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей, Проблемы кибернетики, 1962 N 8, с.91–115.

14.Кудрявцев В.Б., О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами, ДАН СССР т.151,N3,1963, с.493-496.

15. Кратко М.И., Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов, ДАН СССР, 1964, т.155, №1, с.35–37.

16.Кудрявцев В.Б., О функциональных системах автоматов, Дискретная математика, том 7, 1995, выпуск 4, с.3-28, Наука, Москва.

17.Буевич В.А., Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.д.-функций, Математические заметки, том 12, номер 6, 1972, с.687-697.

18. Dassow J., Ein modifizierter Vollstandigkeitsbegriff in einer Algebra von Automatenabbildungen, Dissertation Doktor B, Rostock, Universitet,1978.

19. Строгалов А.С., Метрические свойства о.д.-функций, Межвузовский сборник трудов, N 56, МЭИ, 1985, с.80-84.

20. Хазбун И.В., Об условиях полноты и выразимости в точной алгебре автоматов, Логико-алгебраические конструкции, Тверь 1984, с 35-41.

21. Бабин Д.Н. О суперпозициях о.д.-функций ограниченного веса, Логико-алгебраические конструкции, Тверь 1984, с 21-27.

22.Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С., Введение в теорию автоматов, Наука, М., 1985.

23. Марченков С.С., Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций, Проблемы кибернетики, N 37. М. Наука, 1980, с.5-17.

24. Бабин Д.Н., О полноте двухместных о.д.-функций относительно суперпозиции, Дискретная математика, том 1, 1989, выпуск 4, с.86-91, Наука, Москва.

25.Кудрявцев В.Б., Функциональные системы, изд. МГУ, 1982.

26. Часовских А.А., О полноте в классе линейных автоматов, Математическме вопросы кибернетики, 1995, N3, с.140–166.

27. Тальхайм Б., О решетке замкнутых классов стабильных автоматов, Методы и системы диагностики, вып.1, Саратов, 1979.

28. Коляда К.В., О полноте регулярных отображений, Проблемы кибернетики, Вып. 41, М. Наука, 1980, с.41-49.

29. Бабин Д.Н., Вербальные подавтоматы и задача полноты, Вестник МГУ, Математика и механика, 1985, N 3, с.82-85.

30. Летичевский А.А., Условия полноты для конечных автоматов, Вычислительная математика и математическая физика, N 4,1961, с.702-710.

31. Буевич В.А., Условия А-полноты для автоматов, изд. МГУ, 1986 г.

32. Бабин Д.Н., Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций, Дискретная математика, том 4, 1992, выпуск 4, с.41-56, Наука, Москва.

33. Бабин Д.Н., Неразрешимость проблемы полноты и А-полноты некоторых систем автоматных функций, Дискретная математика, том 7, 1995, выпуск 2, с.52-65, Наука, Москва.

34.Babin D.N., Undecidebility of problem of completeness, Discrete Matematics and Applications, V5, N1, 1995, PP 31-43, VSP, Utrecht, the Netherlands,Tokyo, Japan.

35. Бабин Д.Н., О разрешимости проблемы полноты для специальных систем автоматных функций, Дискретная математика, том 8, 1996, выпуск 4, с.79-91, Наука, Москва.

36. Babin D.N., Decidebility of problem of completeness, for special automamta systems, Discrete Matematics and Applications, V.6,N1, 1997, VSP, Utrecht, the Netherlands,Tokyo, Japan.

37. Бабин Д.Н., Алгоритмическая разрешимость свойств полноты и А-полноты конечных систем автоматных функций с линейной истинностной частью, Интеллектуальные системы, том 3, 1998, с.51-69, Москва.

38. Бабин Д.Н., Конечность множества автоматных базисов Поста с разрешимой проблемой полноты. Дискретная математика, том 10, 1998, выпуск 3, с.57-64, Наука, Москва.

39. Мальцев А.И., Итеративные алгебры и многообразие Поста, Алгебра и логика, 1966, т.5, N2, с.5–24.

Монография

Бабин Дмитрий Николаевич.
Классификация автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты.

Подписано в печать 04.01.2009 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 7,0 п.л.
Заказ 27 Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ 119992, г. Москва, Ленинские горы д.1.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ
119992, г. Москва, Ленинские горы д.1.