МГУ
им
М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. Б. КУДРЯВЦЕВ, С. В. АЛЕШИН,
А. С. ПОДКОЛЗИН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА—1978

МГУ
им
М В ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. Б. КУДРЯВЦЕВ, С. В. АЛЕШИН,
А. С. ПОДКОЛЗИН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА–1978

УДК 519.95

Кудрявцев Валерий Борисович, Алешин Станислав Владимирович, Подколзин Александр Сергеевич. Элементы теории автоматов. Учебное пособие. Изд-во Моск. ун-та, 1978, ... с,с иллюстр.

Теория автоматов представляет собой раздел теории управляющих систем, изучающий математические модели преобразователей дискретной информации,называемые автоматами.Теория автоматов возникла в середине 20 столетия в связи с изучением свойств конечных автоматов.Существуют различные подходы к определению понятия автомата,которые могут быть разбиты на группы макроподхода и микроподхода.В соответствии с двумя подходами к понятию автомата вся теория автоматов может быть разделена на теорию абстрактных и теорию структурных автоматов.В первом случае изучаются свойства различного рода поведений автоматов,во втором случае изучаются свойства композиций автоматов относительно заданного класса операций,а также алгебр автоматов.Предлагаемая книга содержит достаточно обширный материал по теории автоматов и состоит из двух частей.В первой части изучаются вопросы теории конечных автоматов,где с единых позиций,наряду с классическими,рассматривается также ряд новых вопросов.Во второй части изучаются однородные структуры - одно из важнейших обобщений структурных конечных автоматов.Значительная часть результатов является оригинальной и публиковалась в статьях авторов.Методическая сторона изложения материала отрабатывалась авторами в процессе чтения специальных курсов по теории автоматов на механико-математическом факультете.

Книга рассчитана на студентов,аспирантов и научных сотрудников,желающих ближе ознакомиться с теорией автоматов.

Рецензенты: чл.-корр. АН СССР, профессор Олег Борисович Лупанов, профессор Юрий Иванович Журавлев

© Издательство Московского университета, 1978 г.

В В Е Д Е Н И Е

Теория автоматов представляет собой раздел теории управляющих систем [1] ,изучающий математические модели преобразователей дискретной информации,называемые автоматами.С определенной точки зрения такими преобразователями являются как реальные устройства (вычислительные машины,автоматы,живые организмы и т.п.),так и абстрактные системы (математические машины,аксиоматические теории и т.д.).Характерной особенностью этих преобразователей является дискретность функционирования и конечность областей значений параметров,описывающих их.Теория автоматов возникла в середине 20 столетия в связи с изучением свойств конечных автоматов.Со временем предмет ее исследований расширился за счет рассмотрения также различных обобщений конечных автоматов. Содержательно конечный автомат можно охарактеризовать как устройство,имеющее входной и выходной каналы и находящиеся в каждый из дискретных моментов времени,называемых тактовыми моментами,в одном из конечного числа состояний.По входному каналу в каждый тактовый момент в устройство поступают входные сигналы (из некоторого конечного множества сигналов);указываются закон изменения состояний к следующему тактовому моменту в зависимости от входного сигнала и состояния устройства в предыдущий момент,а также значение выходного сигнала (из некоторого конечного множества сигналов) устройства в текущий тактовый момент как функции состояния и входного сигнала в тот же момент.Существуют различные подходы к определению понятия конечного автомата,которые могут быть разбиты на группы макроподхода и микроподхода.При макроподходе интересуются,грубо говоря,внешним поведением устройства,тем,как оно осуществляет переработку входной информации в выходную информацию и в последовательность состояний,отвлекаясь от внутреннего его строения.На этом пути приходят к понятию абстрактного конечного автомата.Тем самым абстрактный конечный автомат может быть задан с помощью набора отображений,описывающих его "внешнее"функционирование.При микроподходе учитывается структура устройства,функционирование и связь между собой его частей.На этом пути приходят к понятию структурного конечного автомата,называемого также автоматной схемой или логической сетью.Структурный конечный автомат задается конечным множеством абстрактных автоматов,конечной схемой их соединения и указанием влияния частей схемы друг на друга.Понятия конечного абстрактного и конечного структурного автоматов можно считать составляющими понятие конечного автомата.

Обобщения конечного автомата,изучаемые в теории автоматов и называемые автоматами,получаются на пути обобщений конечных абстрактного и структурного автоматов.Возникающие при этом понятия абстрактного и структурного автоматов можно считать составляющими понятие автомата.

Абстрактный автомат получается на пути допущения рассмотрения произвольных (не обязательно конечных) множеств входных и выходных сигналов,множества состояний,а также путем расширения понятия зависимости состояния и выходного сигнала от входного сигнала и состояния,которые фигурируют в описании конечного абстрактного автомата.Структурный автомат получается на пути допущения рассмотрения произвольных множеств автоматов и схем их соединения.

В соответствии с двумя подходами к понятию автомата вся теория автоматов может быть разделена на теорию абстрактных автоматов и теорию структурных автоматов,изучающих различные свойства соответственно абстрактных и структурных автоматов.С автоматами связывают различные отношения,возникающие между входной и выходной информацией и состояниями,которые называются поведениями автоматов.Вокруг изучения этих поведений автоматов группируется основная проблематика теории автоматов.Можно выделить несколько наиболее важных видов поведения,которые удобно охарактеризовать применительно к модели абстрактного

автомата и изучение которых тем самым составит определенное содержание теории абстрактных автоматов. Это поведения автоматов - как преобразователей и акцепторов, а также некоторые модификации их. При изучении автоматов как преобразователей интересуются отображениями последовательностей входных сигналов в множество последовательностей состояний выходных сигналов, осуществляемых автоматами. При изучении автоматов как акцепторов интересуются, какие множества конечных последовательностей входных сигналов можно отличать друг от друга с помощью выходных сигналов автоматов. Основным содержанием теории структурных автоматов можно считать изучение свойств отображений, реализуемых автоматами, композиций автоматов относительно заданного класса операций, а также алгебр автоматов. К числу важнейших здесь могут быть отнесены задачи анализа и синтеза автоматных схем, то есть описание свойств отображений по автоматным схемам и построение автоматных схем по отображениям соответственно; задачи о выразимости и сложности представления одних автоматов через другие с помощью различных операций и др. В целом проблематика теории автоматов имеет много общего с теорией управляющих систем, хотя, безусловно, имеет свою специфику.

Теория автоматов имеет широкий круг применений как внутри математики в различных ее областях (в алгебре, математической логике и др.), так и в решении практических задач (в анализе и синтезе ЭВМ, в распознавании образов и т.п.). Понятие автомата может служить модельным объектом в самых разнообразных задачах, благодаря чему возможно применение теории автоматов в различных научных и прикладных исследованиях.

Предлагаемая книга содержит достаточно обширный материал по теории автоматов и состоит из двух частей. В первой части изучаются вопросы теории конечных автоматов. В ее первой главе вводится понятие конечного автомата, вторая глава посвящена вопросам теории абстрактных, а третья - вопросам теории структурных автоматов. Во второй части изучаются однородные структуры - одно из важнейших обобщений структурного и конечного автомата. Рассмотрение этой модели ведется с позиций теории абстрактных и структурных автоматов. Однородная структура представляет собой бесконечную схему, построенную из копий одного и того же конечного автомата, и такую, что правила соединения входов произвольного автомата с выходами других автоматов в этой схеме везде одинаковы (однородность строения). Эта модель достаточно универсальна и играет важную роль в теории и в приложениях. Значительная часть результатов является оригинальной, получена на механико-математическом факультете и ранее содержалась в статьях авторов. Структура изложения, а также общая точка зрения на теорию автоматов заимствованы из книги [2] и статей [3] из математической энциклопедии. При написании книги в значительной мере использовался многолетний опыт чтения авторами специальных курсов по теории автоматов на механико-математическом факультете.

В создании этой книги приняло участие целый ряд лиц: В.А.Буевич участвовал в написании некоторых параграфов главы Ш части I, В.Н.Козлов подготовил перепечатку рукописи, А.А.Болотов организовал вставку формул в нее, а Б.Тальхайм и Л.Беляева выполнили рисунки. Всем им авторы выражают свою глубокую признательность.

ГЛАВА I.

Понятие конечного автомата.

Эта глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе будут приведены два содержательных примера автоматов, иллюстрирующих формальные понятия абстрактного и структурного конечного автоматов, и будет введена содержательная модель конечного автомата, часто используемая далее для наглядности рассмотрений. Во втором и третьем параграфах будут даны формальные понятия абстрактного и соответственно структурного конечных автоматов.

§ I. Примеры и содержательная модель конечного автомата.

Без ограничения общности относительно большинства реальных вычислительных устройств можно сделать предположение о том, что их функционирование осуществляется в дискретные моменты времени, которые можно занумеровать натуральными числами I, 2, 3,... . Рассмотрим два реальных устройства такого рода. В качестве первого из них возьмем разменный автомат метро, а в качестве второго – специальный кусок схемы вычислительной машины, который условно назовем двоичным модулем.

Разменный автомат. В этом автомате удобно выделить три параметра: входную информацию, то-есть сигналы, вводимые в него; параметр, описывающий внутреннюю переработку автоматом входного сигнала; и выходную информацию, то-есть сигналы, выдаваемые автоматом наружу. Входные сигналы разобьём на три группы. Первая группа состоит из пустого сигнала Λ , означающего, что в входное гнездо автомата ничего не подается. Вторая группа состоит из сигнала 10 / рассматриваемый автомат разменивает монеты достоинством в I0 копеек./, а третья включает в себя все остальные входные возмущения, которые мы обозначим буквой λ . Проследим, как содержательно проходит работа нашего устройства. В первый момент автомат готов к восприятию любой входной информации. Его внутренние компоненты занимают определенные положения, создавая некоторую ситуацию, которую мы назовем состоянием q^{Λ} . Это состояние характеризуется, в частности, тем, что после подачи любого входного сигнала на вход автомата, на выходе автомата в тот же момент ничего не выдается. Отсутствие сигнала на выходе мы также будем обозначать символом Λ . Кроме того, естественно предположить, что и состояние автомата q^{Λ} после подачи на его вход Λ к следующему моменту не изменится. Предположим теперь, что на вход автомата поступил сигнал I0. Автомат должен проанализировать этот сигнал, "понять", что это действительно десятикопеечная монета, и, убедившись в этом, выдать на выходе запроектированную информацию. Можно считать, что на анализ уходит один такт времени, поэтому к следующему моменту расположение внутренних компонент автомата изменится, создав новую ситуацию – состояние q^{10} , в котором при любой входной информации в этот же момент на выходе автомата должны быть выданы в качестве выходных сигналов два пятака, символически обозначенные через $(5,5)$. Для завершения характеристики состояния q^{Λ} остается рассмотреть подачу на вход сигнала λ . Для автомата сигнал λ представляется

запретным и можно предположить, что после анализа этого сигнала и установления того, что λ отлично от Λ и 10, к следующему моменту расположение внутренних компонент должно измениться, создав состояние q^{λ}, которое можно интерпретировать как аварийное, и в котором на выходе выдается сигнал Λ при любом входном сигнале в этот момент. Перейдем к завершению характеристик состояний q^{10} и q^{λ}. Естественно ожидать, что в состоянии q^{10} автомат после подачи в этот момент на вход сигнала 10 к следующему моменту не изменит своего состояния, а после подачи сигнала λ к следующему моменту перейдет в состояние q^{λ}. Можно считать, что сам автомат, раз оказавшись в состоянии q^{λ}, всегда остается в нем, пока его невыведет из этого состояния оператор. Изложенное полуформальное описание "работы" разменного автомата, которое в смысле переработки входных последовательностей сигналов в выходные адекватно работе реального разменного автомата, удобнее задавать с помощью диаграмм. Для нашего автомата такая диаграмма приведена на рис. 1.

рис. 1.

В ней кружки соответствуют состояниям автомата, в нижних частях кружков указаны выходные сигналы, которые вырабатывает автомат, находясь в соответствующем кружку состоянии. Исходящие из кружков стрелки соответствуют входным сигналам, подаваемым на вход автомата в момент, когда он находится в соответствующем кружку состоянии, и своими концами указывают, в какое состояние перейдет автомат к следующему моменту. Для экономии в состоянии q^{λ} все стрелки объединены в одну. С помощью этой диаграммы легко установить, что, автомат, находясь в первый момент в состоянии q^{Λ}, "перерабатывает" входную последовательность сигналов $\Lambda\Lambda 10 10 10 \Lambda\Lambda 10 \Lambda$ в последовательность состояний $q^{\Lambda} q^{\Lambda} q^{\Lambda} q^{10} q^{10} q^{10} q^{\Lambda} q^{\Lambda} q^{10} q^{\Lambda}$ и последовательность выходных сигналов $\Lambda\Lambda\Lambda\ (5,5)(5,5)(5,5)\ \Lambda\Lambda\ (5,5)$.

Закон переработки автоматом последовательности входных сигналов в последовательности состояний и выходных сигналов обычно называют его функционированием.

<u>Двоичный модуль</u>. Он представляет собой реальную схему, чертеж которой изображен на рис. 2.

рис. 2.

рис. 3.

Схема собрана из двух структурных элементов, приведенных на рис. 3. Левый элемент на рис. 3 представляет собой двоичный сумматор мгновенного действия, то есть некоторый функциональный элемент. Его входы и выходы /входные и выходные стрелки соответственно/ в каждый момент времени могут быть возбуждены или невозбуждены/ обозначения 0 или I соответственно/. Значение $b(t)$ его выхода в момент t вычисляется через значения $a_1(t)$ и $a_2(t)$ его входов так: $b(t) = a_1(t) + a_2(t)\ (mod\ 2)$. Правый элемент на рис. 3 представляет собой так называемую задержку. Для неё значение $q(t)$ её выхода равно фикси-

рованному значению $\sigma \in \{0,1\}$ при $t=1$ и значению $a(t-1)$ при $t>1$.
Смысл значений $q(t)$ и $a(t)$ у задержки тот же, что и у сумматора. Входной информацией для модуля являются сигналы, поступающие на его вход /на рисунке свободная левая стрелка/, выходной информацией является значение его выхода. Нетрудно видеть, что $b(t)=\sigma+a(1)+a(2)+\ldots+a(t-1)$ при $t>1$.
Возможны различные точки зрения на понятие "внутренней" ситуации в рассматриваемом устройстве, и вообще в устройствах, построенных из функциональных элементов и задержек. В ряде задач необходимо располагать всей информацией о схеме, то-есть знать, из каких элементов она собрана, какие отображения реализуют элементы, как они соединены друг с другом. В этих случаях под внутренней ситуацией схемы естественно понимать набор значений всех входов и выходов её элементов, который фактически полностью характеризует схему в данный момент. В нашем примере это будет набор $(a(t), q(t), b(t))$. В таких наборах обычно выделяют два поднабора, состоящих из значений всех входов схемы /входной набор/ и всех выходов элементов задержки /состояние схемы/; в нашем примере это $a(t)$ и $q(t)$ соответственно. Эти поднаборы позволяют однозначно восстановить по схеме исходный набор и тем самым уже они сами полностью описывают схему. Так, в нашем примере надо восстановить только $b(t)$, для которого имеем $b(t)=a(t)+q(t)\ (mod 2)$. Далее, для рассматриваемых схем можно показать, что по внутренней ситуации в данный момент можно однозначно определить состояние схемы в следующий момент и тем самым можно иметь точное описание схемы в каждый момент t, если известны входные наборы схемы в каждый момент и состояние схемы лишь в первый момент. В нашем примере такое описание схемы может быть достигнуто с помощью следующей системы соотношений.

$$\begin{cases} q(1)=\sigma \\ q(t+1)=b(t) \\ b(t)=a(t)+q(t)\ (mod\ 2) \end{cases} \qquad (*)$$

Так, используя систему $(*)$, можно легко установить, что наше устройство, находясь в первый момент в состоянии 0, "перерабатывает" входную последовательность сигналов 001110010 в последовательность состояний 0010111000 и в выходную последовательность 000101110. Закон "переработки" входной последовательности в последовательность внутренних ситуаций или, что эквивалентно, в последовательность состояний схемы, обычно называют функционированием схемы.
Рассмотренные примеры демонстрируют два подхода к изучению работы реальных устройств. В первом случае нас интересовало макроописание разменного автомамата, позволяющее объяснить, как этот автомат "перерабатывает" входные последовательности сигналов в выходные, и при этом нас не интересовала структура этого автомата. Во втором случае мы исходим из структурного задания реального автомата и, используя знание работы его частей и соединения элементов, сумели получить полное описание его функционирования. Рассмотрение модели, возникающей при первом подходе, приведет нас к понятию абстрактного конечного автомата, а второй - к понятию структурного конечного автомата. Указанные выше примеры имеют много общего. И в первом и во втором случаях мы имели дело с входной и выходной информацией, в которых переработка одной в другую производится в конечном итоге с помощью использования некоторых функциональных отношений на множествах входных сигналов и состояний. Эта общая вычислительная процедура и лежит в основе содержательной модели абстрактного конечного автомата.
<u>Содержательная модель конечного автомата</u>. Под ней мы будем понимать модель некоторого устройства, схематически изображенного на рис. 4.

рис.4.

Эта модель имеет вход /стрелка, входящая в прямоугольник/, корпус и выход /стрелка, исходящая из прямоугольника/. "Работа" модели осуществляется в тактовые моменты времени I,2,3,... . В каждый момент на вход модели подаются сигналы, то-есть входные буквы из некоторого конечного входного алфавита $A=\{a^1,a^2,\dots,a^m\}$, корпус модели находится в одном из "внутренних" состояний, кодируемых буквами из конечного алфавита состояний $Q=\{q^1,q^2,\dots,q^n\}$, а с выхода модели снимаются сигналы, то-есть выходные буквы из выходного алфавита $B=\{b^1,b^2,\dots,b^p\}$. Входная буква и состояние модели в данный момент однозначно определяют выходную букву в этот же момент и состояние модели в следующий момент, то-есть если в момент t подавалась на вход буква $a(t)$, а модель находилась в состоянии $q(t)$, то $b(t)=\psi(q(t),a(t))$; $q(t+1)=\varphi(q(t),a(t))$. Пусть в первый момент модель M находится в некотором состоянии $q(1)$ (начальном состоянии). Используя функции φ и ψ, свяжем с M некоторую вычислительную процедуру, позволяющую по входному слову $a(1)a(2)\dots a(\tau)$ определить слово состояний $q(1)q(2)\dots q(\tau+1)$ и выходное слово $b(1)b(2)\dots b(\tau)$ следующим образом.

По паре $(a(1),q(1))$ вычисляются два параметра $b(1)=\psi(q(1),a(1))$ и $q(2)=\varphi(q(1),a(1))$, затем по паре $(a(2),q(2))$ вычисляются $b(2)=\psi(q(2),a(2))$ и $q(3)=\varphi(q(2),a(2))$, и так далее; если для t, $t\le\tau$ уже вычислены значения $b(t)$ и $q(t)$, то вычисляются $b(t)=\psi(q(t),a(t))$ и $q(t+1)=\varphi(q(t),a(t))$ при $t<\tau$ и вычисляется только значение $q(t+1)=\varphi(q(t),a(t))$ при $t=\tau$. Описанную вычислительную процедуру, устанавливающую соответствие между входными последовательностями, последовательностями состояний и выходными последовательностями, называют функционированием модели M. Модель M, у которой функционирование начинается всегда в одном и том же начальном состоянии q, называют инициальной моделью и обозначают через M_q. Описанная модель M является содержательной трактовкой понятия абстрактного конечного автомата. Описанная модель может быть усложнена. Будем исходить из схемы S, построенной из функциональных элементов и задержек /ниже мы дадим формальное понятие такой схемы, а сейчас используем ряд её свойств/. Схема имеет v выходов, s задержек и τ входов. Пусть $a_i(t)$, $q_j(t)$ и $b_k(t)$ -значения, принятые в момент t i-м входом, выходом j-й задержки и k-ым выходом схемы S, $1\le i\le\tau$, $1\le j\le s$, $1\le k\le v$. Для простоты полагаем, что указанными значениями являются числа 0 или I. Тогда, как уже отмечалось, по последовательности $\vec a^{\tau}(1)\,\vec a^{\tau}(2)\dots\vec a^{\tau}(\tau)$, где $\vec a^{\tau}(t)=(a_1(t),a_2(t),\dots,a_\tau(t))$, $1\le t\le\tau$, при заданном начальном наборе $\vec q^{s}(1)=(q_1(1),q_2(1),\dots,q_s(1))$ можно однозначно определить по схеме S последовательность состояний схемы $\vec q^{s}(1)\,\vec q^{s}(2)\dots\vec q^{s}(\tau+1)$ и, в частности, последовательность $\vec b^{v}(1)\,\vec b^{v}(2)\dots\vec b^{v}(\tau)$, где $\vec q^{s}(t')=(q_1(t'),q_2(t'),\dots,q_s(t'))$, $1\le t'\le\tau+1$, $\vec b^{v}(t'')=(b_1(t''),\dots,b_v(t''))$, $1\le t''\le\tau$. Вычисление этих последовательностей происходит поэтапно. Сначала по паре $(\vec a^{\tau}(1),\vec q^{s}(1))$ определяются $\vec b^{v}(1)$ и $\vec q^{s}(2)$, затем по паре $(\vec a^{\tau}(2),\vec q^{s}(2))$ -значения $\vec b^{v}(2)$ и $\vec q^{s}(3)$ и т.д., наконец, по паре $(\vec a^{\tau}(\tau),\vec q^{s}(\tau))$ -значения $\vec b^{v}(\tau)$ и $\vec q^{s}(t+1)$. Таким образом, для некоторых вектор-функций $\vec\psi^{v}$ и $\vec\varphi^{s}$ имеем $\vec b^{v}(t)=\vec\psi^{v}(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t))$ и $\vec q^{s}(t+1)=\vec\varphi^{s}(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t))$, где $\vec\psi^{v}(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t))=$ $=(\psi_1(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t)),\psi_2(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t)),\dots,\psi_v(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t)))$, $\vec\varphi^{s}(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t))=(\varphi_1(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t)),\varphi_2(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t)),\dots,\varphi_s(\vec a^{\tau}(t),\vec q^{s}(t)))$. Тем самым у нас фактически вновь возникла модель типа уже описанной модели M.

в которой роль множеств A, Q и B играют соответственно множества $\{0,1\}^r$, $\{0,1\}^s$ и $\{0,1\}^v$, являющиеся декартовыми степенями множества $\{0,1\}$. Обозначим эту модель через $M(S)$. Схема S вместе с моделью $M(S)$, то-есть пара $(S, M(S))$, является содержательной трактовкой понятия структурного конечного автомата, а пара $(S, M_{\vec{q}^r}(S))$ – инициального структурного конечного автомата. Функционирование $M(S)$ или $M_{\vec{q}^r}(S)$ является также функционированием рассматриваемых моделей $(S, M(S))$ и $(S, M_{\vec{q}^r}(S))$ соответственно. В дальнейшем после введения формальных понятий конечных абстрактного и структурного автоматов мы иногда для наглядности рассуждений будем использовать терминологию, приспособленную к построенным здесь их содержательным аналогам. Отметим в заключении, что упомянутые аналоги являются содержательными моделями понятия конечного автомата.

§2. Понятие абстрактного конечного автомата.

Абстрактным конечным автоматом $\mathfrak{A}$ называется система (A, Q, B, φ, ψ), где A, Q, B – конечные алфавиты, называемые соответственно входным алфавитом, множеством состояний и выходным алфавитом, $A=\{a^1, a^2, \dots, a^m\}$, $Q=\{q^1, \dots, q^n\}$, $B=\{b^1, \dots, b^p\}$;

φ – функция переходов, отображающая множество $Q \times A$ в Q;

ψ – функция выходов, отображающая множество $Q \times A$ в B.

Произвольные фиксированные значения из алфавитов A, Q, B будем обозначать через a, q, b соответственно, а переменные величины, принимающие значения из указанных алфавитов через x, z, y соответственно. В случае, когда функция $\psi(z, x)$ фиктивно зависит от второго аргумента, автомат $\mathfrak{A}$ называется абстрактным конечным автоматом Мура. Ниже вместо термина абстрактный конечный автомат мы иногда будем использовать термин автомат. Если в качестве входного и выходного алфавитов, а также алфавита состояний автомата взяты декартовы произведения $A_1 \times A_2 \times \quad \times A_r$, $B_1 \times B_2 \times \quad \times B_v$ и $Q_1 \times Q_2 \times \quad \times Q_s$ соответственно, то функции переходов и выходов автомата становятся вектор-функциями $\vec{\varphi}^s = (\varphi_1, \varphi_2, \quad, \varphi_s)$ и $\vec{\psi}^v = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_v)$, и говорят в этом случае, что автомат имеет r входов и v выходов, а алфавиты $A_1, A_2, \quad, A_r$ и $B_1, B_2, \dots, B_v$ называются соответственно входными и выходными алфавитами автомата, а алфавиты $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ – алфавитами состояний. Задание автомата $\mathfrak{A}$ фактически сводится к заданию функций φ и ψ, последнее может быть достигнуто с помощью построения таблиц с двумя входами, изображенных на рисунках 5 и 6.

$a \backslash q$	q^1	q^2	$\dots$	q^j	q^n
a^1					
a^2					
$\vdots$					
a^i				$\varphi(q^j, a^i)$	
$\vdots$					
a^m					

рис.5.

$a \backslash \psi$	q^1	q^2	$\dots$	q^j	$\dots$	q^n
a^1						
a^2						
a^i				$\psi(q^j, a^i)$		
a^m						

рис.6.

Иногда эти таблицы объединяют в одну, помещая на пересечении i-й строки и j-го столбца сразу пару $(\varphi(q^j, a^i), \psi(q^j, a^i))$. Удобным способом задания являются также так называемые диаграммы Мура. Они строятся следующим образом. На плоскости выбираются n кругов, которые взаимно-однозначно ставятся в соответствие состояниям автомата $\mathfrak{A}$, и внутри каждого круга пишется соот-

ветствующее ему значение. Затем из каждого круга проводят по m стрелок. Каждой стрелке, исходящей из круга состояний q^j, взаимно-однозначно соответствует буква из алфавита A. Стрелке, соответствующей букве a^i, приписывается пара (a^i, b^{i_i}), если $b^{i_i}=\psi(q^j,a^i)$. Эта стрелка упирается в круг состояния q^w, если $q^w=\varphi(q^j,a^i)$. На рис. 7 приведен примерный фрагмент такой диаграммы.

рис.7.

Для автоматов Мура диаграмма может быть несколько изменена. Поскольку в этом случае выходная букве однозначно определяется состоянием, её помещают в том же круге, что и состояние, а стрелкам приписываются не пары, а только входные буквы. На рис. 8 представлен примерный фрагмент такой диаграммы.

рис.8

Аналогично можно поступать и в общем случае, помещая внутри круга, соответствующего состоянию q^i, формулу, задающую функцию $\psi_{q^i}(x)=\psi(q^i,x)$. В этом случае, во избежание излишней громоздкости, символ q^i внутри круга иногда не ставится; кроме того, вместо нескольких стрелок, ведущих из заданного состояния в одно и то же состояние, рисуют одну аналогичную стрелку и ей приписывают все те же входные буквы, которые встречались у стрелок, заменяемых этой одной стрелкой. В качестве примера абстрактного конечного автомата приведем так называемую задержку $\mathfrak{A}^3=(\{a^1,a^2\},\{q^1,q^2\},\{b^1,b^2\},\varphi,\psi)$, где φ и ψ определены с помощью таблицы, изображенной на рис. 9.

$a \backslash q$	q^1	q^2
a^1	(q^1,b^1)	(q^1,b^2)
a^2	(q^2,b^2)	(q^2,b^2)

рис.9.

Задержка является автоматом Мура и её соответствующая диаграмма приведена на рис. 10.

рис.10.

Конечные последовательности букв из алфавитов A, Q и B автомата $\mathfrak{A}$, то-есть слова в этих алфавитах, называются соответственно входными словами, словами состояний и выходными словами, а бесконечные последовательности указанных букв, то-есть сверхслова, их называются соответственно входными сверхсловами, сверхсловами состояний и выходными сверхсловами. Для множества букв C через C^* обозначим множество всех слов ξ^m длины m, $m=1,2,$, а через C^∞ – множество всех сверхслов ξ^∞ в этом алфавите. Иногда, когда длина слова для нас несущественна, мы будем писать ξ вместо ξ^m. Для удобства изложения функции φ и ψ распространим на множество $Q \times A^*$ следующим образом. Пусть $\alpha^m \in A^*, a \in A, q \in Q$, тогда, обозначая через Λ пустое слово, полагаем что $\varphi(q,\Lambda)=q$, $\varphi(q,\alpha a)=\varphi(\varphi(q,\alpha),a)$,

$$\psi(q,\Lambda)=\Lambda\ ,\ \psi(q,\alpha a)=\psi(\varphi(q,\alpha),a).$$

Пусть $\alpha^{\overline{m}]}_n$ обозначает начало слова α^m длины n, $n \geq 0, n \leq m$, при этом $\alpha^{\overline{m}]}_0$ пусть обозначает Λ . Определим слова $\bar{\varphi}(q,\alpha^m)$ и $\bar{\psi}(q,\alpha^m)$ в алфавитах Q и B соответственно следующим образом: $\bar{\varphi}(q,\alpha^m)=\varphi(q,\alpha^{\overline{m}]}_0)\varphi(q,\alpha^{\overline{m}]}_1)\ldots\varphi(q,\alpha^m)$

$$\bar{\psi}(q,\alpha^m)=\psi(q,\alpha^{\overline{m}]}_0)\psi(q,\alpha^{\overline{m}]}_1)\ldots\psi(q,\alpha^m),$$

используя которые опишем важнейшую характеристику автомата $\mathfrak{A}$ – его функционирование. Под функционированием абстрактного конечного автомата $\mathfrak{A}$ будем понимать тернарное отношение

$$F=\{(\alpha^m, \bar{\varphi}(q,\alpha^m), \bar{\psi}(q,\alpha^m)) : \alpha^m \in A^*, q \in Q \quad =1,2,\ldots\}$$

Автомат $\mathfrak{A}$ с выделенным состоянием q , именуемым начальным, называется инициальным абстрактным конечным автоматом, обозначается через $\mathfrak{A}_q$ и представляет собой набор (A,Q,B,φ,ψ,q) . Под функционированием $\mathfrak{A}_q$ понимается тернарное отношение $F_q=\{(\alpha^m,\bar{\varphi}(q,\alpha^m),\bar{\psi}(q,\alpha^m)) : \alpha^m \in A^*, m=1,2,\ldots\}$

Таким образом, автомат $\mathfrak{A}$ с n состояниями задает инициальных автоматов, в то же время знание этих инициальных автоматов определяет автомат $\mathfrak{A}$. В качестве главных свойств автоматов выступают так называемые поведения. По отношению к инициальному автомату $\mathfrak{A}_q$ важнейшими являются поведение-I и поведение-II, которые представляют собой специальные отношения и определяются так.

<u>Поведение-I</u> образует словарная функция $f(\alpha^m)=\bar{\psi}(q,\alpha^m)$, отображающая множество A^* в B^*. Иногда вместо функции $f(\alpha^m)$ выбирают функцию $\bar{f}(\alpha^\infty)$, отображающую множество A^∞ в B^∞ и определяемую для сверхслова $\alpha^\infty, \alpha^\infty \in A^\infty$ с помощью соотношения $\bar{f}(\alpha^\infty)=\psi(q,\alpha^{\overline{\infty}]}_1)\psi(q,\alpha^{\overline{\infty}]}_2)\cdot\ \ \psi(q,\alpha^{\overline{\infty}]}_n)\cdot$,
где $\alpha^{\overline{\infty}]}_n$ так же, как и выше, обозначает начало длины n сверхслова α^∞ . Сама функция $f(\alpha^m)$ равно, как и функция $\bar{f}(\alpha^\infty)$ называется конечно-автоматной функцией, реализуемой или вычисляемой инициальным автоматом $\mathfrak{A}_q$. Инициальный автомат, рассмотрение которого осуществляется с точки зрения его поведения-I, называют иногда автоматом-преобразователем.

<u>Поведение-II</u>. Выделим в инициальном автомате $\mathfrak{A}_q$ некоторое подмножество $B', B' \subseteq B$ и рассмотрим подмножество $L_{B'}, L_{B'} \subseteq A^*$, определяемое так:

$$L_{B'}=\{\alpha^m \in A^* : \psi(q,\alpha^m) \in B'\}.$$

Подмножество $L_{B'}$ назовем поведением-II инициального автомата $\mathfrak{A}_q$ по отношению к подмножеству B' , или событием, представимым инициальным автоматом $\mathfrak{A}_q$ с помощью подмножества B' . Сам инициальный автомат в этом случае называют автоматом-акцептором. В заключение параграфа отметим, что для задания инициальных автоматов и их функционирования могут быть использованы также так называемые канонические уравнения. Для произвольного слова ξ из C^* пусть $\xi(t)$ обозначает t -ую букву слова ξ , а $|\xi|$ – длину слова ξ . Тогда функционирование F_q инициального автомата $\mathfrak{A}_q$ состоит, очевидно, из всех тех и только тех троек слов $(\alpha,\varkappa,\beta)$ для которых во-первых, $|\alpha|=|\beta|=|\varkappa|-1$ и во-вторых для любого t такого, что $1 \leq t \leq |\alpha|$,

имеет место система соотношений

$$\begin{cases} q(1)=q \\ q(t+1)=\varphi(q(t),a(t)) \\ b(t)=\psi(q(t),a(t)) \end{cases} \qquad (**)$$

называемая системой канонических уравнений автомата $\mathfrak{A}_q$.

§ 3. Понятие структурного конечного автомата.

Для определения понятия структурного конечного автомата нам потребуются вспомогательные понятия элемента и сети. Мы будем рассматривать элементы четырех видов. Элементы F_1, F_2, F_3 /элементы типа F / и элемент G . В дальнейшем произвольный элемент типа F будем иногда обозначать через F . Элементы F_1 и F_2 имеют каждый два входа и один выход, а элементы F_3 и G имеют по одному входу и выходу. Будем изображать эти элементы так, как это сделано на рисунке 11 .

рис.11

Здесь стрелки, входящие в треугольники и прямоугольники, соответствуют входам элементов, остальные стрелки соответствуют их выходам. Из элементов будем строить сети. Опишем правила построения сетей. Графическая иллюстрация этих правил приведена на рисунках с 11 по 16 .

1. Каждый из элементов образует сеть. Входами и выходами этих сетей являются соответственно входы и выходы элементов / см. рис. 11 /.

2. Пусть имеется сеть S с некоторым числом входов и выходов. Выделим в ней в качестве новых выходов некоторое непустое подмножество выходов сети S . В результате получим сеть S' , входами которой являются все входы сети S , а множество выходов совпадает с только что выделенным / см. рис. 12 /.

рис.12

рис.13

3. Пусть определены сети S_1 и S_2 , не имеющие общих входов, выходов и элементов. Объединение этих сетей также есть сеть S .Её входами являются все входы сетей S_1 и S_2 , а выходами все выходы сетей S_1 и S_2 /см. рис.13 /. Сеть S называется объединением сетей S_1 и S_2 .

4. Пусть имеется сеть S . Будем считать отождествленными произвольные два входа этой сети, при этом, вообще говоря, один и тот же вход может быть отождествлен с самим собой. В результате получим сеть S' , входами которой являются все входы сети S , отличные от отождествленных, и любой / по выбору/ из отождествленных, а выходами – выходы сети S / см. рис. 14 /.

рис. 14

Рис 15

Будем говорить в этом случае, что сеть S' получена из сети S при помощи операции отождествления входов.

5. Пусть заданы сети S_1 и S_2, не имеющие общих входов, элементов и выходов. Отождествим произвольный выход сети S_1 с произвольным входом сети S_2. В результате получим сеть S, входами которой являются входы сетей S_1 и S_2, кроме того входа сети S_2, который был отождествлен с выходом сети S_1, а выходами – все выходы сетей S_1 и S_2 / см. рис. 15 /. Будем говорить, что сеть S получена из сетей S_1 и S_2 при помощи операции подстановки сети S_1 в сеть S_2.

6. Пусть имеется сеть S, имеющая не менее двух входов. Пусть некоторые её вход /случай а)/ или выход /случай б)/ являются одновременно входом или соответственно выходом элемента типа G. Тогда:

а) отождествляя произвольный выход сети S с указанным входом, получим новую сеть S';

б) отождествляя произвольный вход сети S с указанным выходом, получим новую сеть S''.

Входами сетей S' и S'' являются все входы сети S, кроме отождествленного с выходом, а выходами все выходы сети S / см. рис. 16 /.

рис. 16

Будем говорить, что сети S' и S'' получены при помощи операции обратной связи. На рис. 17 приведён пример сети S, а на рис. 18 – некоторые этапы её построения.

рис. 17

Правила построения сетей с I по 5 будем называть в дальнейшем операциями суперпозиции.

рис. 18

Введем понятие схемы. Пусть $\mathcal{U}_1=\{u_1^1, u_2^1, \ldots\}$, $\mathcal{U}_2=\{u_1^2, u_2^2, \ldots\}$, $\mathcal{U}_3=\{u_1^3, u_2^3, \ldots\}$ – три фиксированных счетных алфавита переменных, которые мы будем называть соответственно входными переменными, внутренними переменными и выходными переменными. Чтобы избежать в дальнейшем сложных индексов, будем для обозначения переменных из $\mathcal{U}_1$ употреблять букву x с индексами или без индексов. Аналогично для обозначения переменных из $\mathcal{U}_2$ и $\mathcal{U}_3$ употребляются метапеременные z и y. Будем считать, что все введенные сейчас переменные имеют областью своих значений $\{0,1\}$.

Будем считать, что элементам сопоставлены абстрактные конечные автоматы

Элементу F_1 – автомат $\mathfrak{A}^{\&}=(\{0,1\}\times\{0,1\},\{0\},\{0,1\},\varphi,\psi)$ с двумя входами и одним выходом, где $\varphi(0,(a_1,a_2))=0$, $\psi(0,(a_1,a_2))=a_1\&a_2$; $a_i\in\{0,1\}, i=1,2$.

Элементу F_2 – автомат $\mathfrak{A}^{\vee}=(\{0,1\}\times\{0,1\},\{0\},\{0,1\},\varphi,\psi)$ с двумя входами и одним выходом, где $\varphi(0,(a_1,a_2))=0$, $\psi(0,(a_1,a_2))=a_1\vee a_2$; $a_i\in\{0,1\}, i=1,2$.

Элементу F_3 – автомат $\mathfrak{A}^{-}=(\{0,1\},\{0\},\{0,1\},\varphi,\psi)$ с одним входом и одним выходом, где $\varphi(0,a)=0$, $\psi(0,a)=\bar{a}$; $a\in\{0,1\}$.

Элементу G – автомат $\mathfrak{A}_3=(\{0,1\},\{0,1\},\{0,1\},\varphi,\psi)$ с одним входом и одним выходом, где $\varphi(q,a)=a$, $\psi(q,a)=q$, $a\in\{0,1\}$, $q\in\{0,1\}$.

Элементы F_1, F_2, F_3 с сопоставленными им автоматами $\mathfrak{A}^{\&}$, $\mathfrak{A}^{\vee}$, $\mathfrak{A}^{-}$ называются функциональными элементами, а элемент G с сопоставленным ему автоматом $\mathfrak{A}_3$ – задержкой.

Пусть теперь S – произвольная сеть с r входами, k элементами G и s выходами. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r; z_1, z_2, \ldots, z_k; y_1, y_2, \ldots, y_s$ – различные переменные из $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ соответственно. Присвоим одно-однозначно переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ входам сети S, переменные $z_1, z_2, \ldots, z_k$ – выходам элементов G и $y_1, y_2, \ldots, y_s$ – выходам сети S. Сеть, составленная из функциональных элементов и элементов задержки с заданным присвоением входных, внутренних и выходных переменных называется схемой и обозначается $\sum(S; x_1, x_2, \ldots, x_r; z_1, z_2, \ldots, z_k; y_1, y_2, \ldots, y_s)$. Иногда для сокращения записи мы будем писать $\sum(r,k,s)$, если ясно, о какой сети S и каких переменных идёт речь, или $\sum(x_1, x_2, \ldots, x_r, k, s)$, в зависимости от контекста.

Каждая схема реализует некоторый абстрактный автомат с одним или более входов, с одним или менее выходов. Сопоставление автоматов схемам будем проводить в соответствии с индуктивным построением сетей, из которых получены схемы.

1°

Схеме $\sum(F_1; x_1, x_2; y)$	сопоставлен автомат $\mathfrak{A}^{\&}$
Схеме $\sum(F_2; x_1, x_2; y)$	сопоставлен автомат $\mathfrak{A}^{\vee}$
Схеме $\sum(F_3; x; y)$	сопоставлен автомат $\mathfrak{A}^{-}$
Схеме $\sum(G; x; z; y)$	сопоставлен автомат $\mathfrak{A}_3$

В общем случае схеме $\sum(S; x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_s)$ сопоставляется абстрактный автомат с r входами и s выходами $\mathfrak{A}=(\{0,1\}^r, \{0,1\}^k, \{0,1\}^s, \varphi, \psi)$, (при $k=0$ $\{0,1\}^k=\{0\}, \varphi\equiv 0$). Функции переходов φ определены на декартовых степенях множества

$$E_2=\{0,1\},\ \varphi: \{0,1\}^r\times\{0,1\}^k\to\{0,1\}^k,$$

$$\psi: \{0,1\}^r\times\{0,1\}^k\to\{0,1\}^s.$$

Будем считать, что i-я компонента произведения $A=\{0,1\}^r$ есть область изменения переменной x_i, $i=1,2,\ldots,r$; j-я компонента произведения $Q=\{0,1\}^k$ есть область изменения переменной z_j, $j=1,\ldots,k$

и l компонента произведения $B=\{0,1\}^s$ есть область изменения переменной y_l, $l=1,2,\ldots,s$. Теперь отображения φ и ψ можно рассматривать как булевские вектор-функции $\varphi=(\varphi_1(x_1,\ldots,x_r,z_1,\ldots,z_k),\ldots,\varphi_k(x_1,\ldots,x_r,z_1,\ldots,z_k))$

$$\psi=(\psi_1(x_1,\ldots,x_r,z_1,\ldots,z_k),\ldots,\psi_s(x_1,\ldots,x_r,z_1,\ldots,z_k)).$$

Введем понятия существенной переменной булевской функции $f(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$ и понятие эквивалентности двух булевских функций. Переменная ν_i существенна для функции $f(\nu_1,\ldots,\nu_{i-1},\nu_i,\nu_{i+1},\ldots,\nu_n):\{0,1\}^n\to\{0,1\}$, если существуют такие $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n$ из $\{0,1\}$, что $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)\neq f(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)$, переменная ν_j функции $f(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$, не являющаяся существенной, называется фиктивной переменной. Две функции $f(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$ и $g(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ называются эквивалентными, если у них совпадают множества существенных переменных и на одинаковых наборах значений существенных переменных они принимают одинаковые значения.

Теперь мы можем определить понятие правильного сопоставления автомата схеме. Пусть сеть S схемы $\Sigma(S;x_1,\ldots,x_r,z_1,\ldots,z_k;y_1,\ldots,y_s)$ такова, что её выход, которому в схеме Σ приписана переменная y_j, является одновременно выходом некоторой задержки. Сопоставляемый схеме Σ автомат $\mathfrak{A}$ должен быть таким, чтобы у j-ой компоненты ψ_j булевской вектор-функции $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_s)$ (соответствующей, как это было указано выше, функции функции выходов ψ автомата $\mathfrak{A}$) существенными были лишь переменные из множества $z_1,\ldots,z_k$. Аналогично, если вход x_i сети S является входом некоторой задержки, то для всех $j=1,2,\ldots,s$ функции ψ_j не зависят существенно от переменной x_i. Будем говорить в обоих случаях, что выход y_j схемы Σ зависит со сдвигом от входа x_i.

Такое сопоставление автомата схеме будем называть правильным. В дальнейшем рассматриваются только правильные сопоставления.

Зададим теперь правила ($2^\circ-6^\circ$) сопоставления автомата схеме. Элементарным схемам уже сопоставлены автоматы.

2°. Пусть схема $\Sigma(S;x_1,\ldots,x_r;z_1,\ldots,z_k;y_1,\ldots,y_s)$ такова, что её сеть S получена из сети S с r входами и $s+l$ выходами с помощью операции 2. Пусть $y_{s+1},y_{s+2},\ldots,y_{s+l}$ – переменные, отличные от переменных $y_1,y_2,\ldots,y_s$. Присвоим переменную x_i, $i=1,2,\ldots,r$ входу сети S', совпадающему с тем входом сети S, которому приписана эта переменная в схеме $\Sigma(S;r,k,s)$. То же проделаем с переменными z_j, $j=1,\ldots,k$; y_d, $d=1,\ldots,s$. Переменные $y_{s+1},y_{s+2},\ldots,y_{s+l}$ присвоим оставшимся выходам сети S' произвольно. Пусть получившаяся при этом схема $\Sigma'(S';r,k,s+l)$ реализует автомат $\mathfrak{A}'=(\{0,1\}^r,\{0,1\}^k,\{0,1\}^{s+l},(\varphi_1,\ldots,\varphi_k),(\psi_1,\ldots,\psi_{s+l}))$. Тогда сопоставим схеме $\Sigma(S;r,k,s)$ автомат сеть $\mathfrak{A}=(\{0,1\}^r,\{0,1\}^k,\{0,1\}^s,(\varphi_1,\ldots,\varphi_k),(\psi_1,\ldots,\psi_s))$

3°. Пусть схемы $\Sigma(S;x_1,\ldots,x_r;z_1,\ldots,z_k,y_1,\ldots,y_s)$ получена объединением сетей S' и S''. Задание схемы $\Sigma(S;r,k,s)$ индуцирует задание схем $\Sigma'(S';r',k',s')$ и $\Sigma''(S'';r'';k'',s'')$, $r'+r''=r$, $k'+k''=k$, $s'+s''=s$.

Пусть $k>0$ и Σ' реализует автомат $\mathfrak{A}'=(\{0,1\}^{r'},\{0,1\}^{k'},\{0,1\}^{s'},(\varphi_1',\ldots,\varphi_{k'}'),(\psi_1',\ldots,\psi_{s'}'))$, Σ'' реализует автомат $\mathfrak{A}''=(\{0,1\}^{r''},\{0,1\}^{k''},\{0,1\}^{s''},(\varphi_1'',\ldots,\varphi_{k''}''),(\psi_1'',\ldots,\psi_{s''}''))$. Пусть булевские функции $\varphi_i'(x_1,\ldots,x_{r'};z_1,\ldots,z_{k'})$; $i=1,\ldots,k'$, $\psi_j'(x_1,\ldots,x_{r'};z_1,\ldots,z_{k'})$, $j=1,\ldots,s'$, соответствуют функциям переходов и выходов автомата $\mathfrak{A}'$, а булевские функции $\varphi_i''(x_{r'+1},\ldots,x_r,z_{k'+1},\ldots,z_k)$, $i=k'+1,\ldots,k$, $\psi_j''(x_{r'+1},\ldots,x_r,z_{k'+1},\ldots,z_k)$, $j=s'+1,\ldots,s$ – функциям переходов и выходов автомата $\mathfrak{A}''$. Пусть функция $\varphi_i(x_1,\ldots,x_r,z_1,\ldots,z_k)$ эквивалентна функции $\varphi_i'(x_1,\ldots,x_{r'},z_1,\ldots,z_{k'})$ при $i=1,2,\ldots,k'$ и эквивалентна $\varphi_i''(x_{r'+1},\ldots,x_r,z_{k'+1},\ldots,z_k)$ при $i=k'+1,\ldots,k$. Аналогично пусть $\psi_j(x_1,\ldots,x_r,z_1,\ldots,z_k)$ эквивалентна ψ_j при $j=1,\ldots,s$

и ψ_j'' при $j = s'+1, \dots, s$. Тогда схеме $\Sigma(S; r, k, s)$ сопоставим автомат

$$\mathfrak{A} = (\{0,1\}^r, \{0,1\}^k, \{0,1\}^s, (\varphi_1, \dots, \varphi_k), (\psi_1, \dots, \psi_s)).$$

Если же $k=0$, то $\Sigma(S; r, s)$ реализует автомат

$$\mathfrak{A} = (\{0,1\}^r, \{0\}, \{0,1\}^s, 0, (\psi_1, \dots, \psi_s)).$$

4.° Пусть сеть S схемы $\Sigma(S; r, k, s)$ получена из сети S' с $r+1$ входом отождествлением i-го, $i \le r$ и $r+1$-го входов, и в схеме Σ j-му входу приписана переменная x_j, $j = 1, \dots, r$. Пусть x_{r+1} – переменная, отличная от переменных $x_1, \dots, x_r$. Построим из S' схему $\Sigma'(S'; r+1, k, s)$ так что переменная x_j приписана входу с номером j, $j = 1, 2, \dots, r+1$, а внутренние и выходные переменные точно так как в схеме Σ. Пусть Σ' реализует автомат

$$\mathfrak{A}' = (\{0,1\}^{r+1}, \{0,1\}^k, \{0,1\}^s, \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, z_1, \dots, z_k), \psi(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, z_1, \dots, z_k))$$

Тогда Σ реализует автомат

$$\mathfrak{A} = (\{0,1\}^r, \{0,1\}^k, \{0,1\}^s, \varphi(x_1, \dots, x_r, x_i, z_1, \dots, z_k), \psi(x_1, \dots, x_r, x_i, z_1, \dots, z_k)).$$

5.° Пусть сеть S схемы $\Sigma(S, x_1, \dots, x_r; z_1, \dots, z_k; y_1, \dots, y_s)$ получена с помощью операции подстановки сети S_1 в сеть S_2. Пусть переменная x_i, $i = 1, \dots, r$ присвоена в схеме Σ некоторому входу S. Тогда этот вход является входом либо сети S_1, либо сети S_2 и мы присвоим эту переменную данному входу в схеме Σ' либо Σ''. Аналогично поступим с выходами задержек и выходами сетей S_1 и S_2. При этом одному выходу сети S_1 и одному входу S_2 (которые отождествлялись при подстановке) не будет присвоена выходная, и, соответственно, входная переменная. Пусть $x_1, \dots, x_{r'}$ и $x_{r'+1}, \dots, x_r$ присвоены, соответственно, входам S_1 и S_2, $z_1, \dots, z_{k'}$ и $z_{k'+1}, \dots, z_k$ – выходам задержек S_1 и S_2, $y_1, \dots, y_{s'}$ и $y_{s'+1}, \dots, y_s$ – выходам сетей S_1 и S_2. Пусть y и x – переменные, отличные от перечисленных. Припишем их, соответственно, выходу S_1 и входу S_2, которым ещё не приписаны переменные. Теперь мы получим две схемы

$$\Sigma_1(S_1; x_1, \dots, x_{r'}; z_1, \dots, z_{k'}; y_1, \dots, y_{s'}, y) \text{ и}$$

$$\Sigma_2(S_2; x_{r'+1}, \dots, x_r, z_{k'+1}, \dots, z_k; y_{s'+1}, \dots, y_s),$$

которым сопоставлены автоматы $\mathfrak{A}_1 = (\{0,1\}^{r'}, \{0,1\}^{k'}, \{0,1\}^{s'+1}, \varphi_1, \psi_1)$, $\mathfrak{A}_2 = (\{0,1\}^{r''+1}, \{0,1\}^{k''}, \{0,1\}^{s''}, \varphi_2, \psi_2)$. Функциям переходов и выходов $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ соответствуют булевские функции

$$\varphi_1 = (\varphi_1^1, \dots, \varphi_1^{k'}), \quad \varphi_1^u = \varphi_1^u(x_1, \dots, x_{r'}, z_1, \dots, z_{k'}) \quad u = 1, \dots, k'$$

$$\psi_1 = (\psi_1^1, \dots, \psi_1^{s'}, \psi'), \quad \psi_1^v = \psi_1^v(x_1, \dots, x_{r'}, z_1, \dots, z_{k'}); \quad v = 1, \dots, s'$$

$$\psi' = \psi'(x_1, \dots, x_{r'}, z_1, \dots, z_{k'})$$

$$\varphi_2 = (\varphi_2^{k'+1}, \dots, \varphi_2^k), \quad \varphi_2^u = \varphi_2^u(x_{r'+1}, \dots, x_r, x, z_{k'+1}, \dots, z_k); \quad u = k'+1, \dots, k$$

$$\psi_2 = (\psi_2^{s'+1}, \dots, \psi_2^s), \quad \psi_2^v = \psi_2^v(x_{r'+1}, \dots, x_r, x, z_{k'+1}, \dots, z_k); \quad v = s'+1, \dots, s$$

Рассмотрим функцию $\varphi^u(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k)$, которая эквивалентна функции φ_1^u при $u = 1, \dots, k'$ и эквивалентна функции $\varphi_2^u(x_{r'+1}, \dots, x_r, \psi'(x_1, \dots, x_{r'}, z_1, \dots, z_{k'}), z_{k'+1}, \dots, z_k)$ при $u = k'+1, \dots, k$, а также функцию $\psi^v(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k)$, эквивалентную ψ_1^v при $v = 1, \dots, s'$, и эквивалентную $\psi_2^v(x_{r'+1}, \dots, x_r, \psi'(x_1, \dots, x_{r'}, z_1, \dots, z_{k'}), z_{k'+1}, \dots, z_k)$ при $v = s'+1, \dots, s$.

Тогда схеме Σ сопоставляется автомат

$$\mathfrak{A} = (\{0,1\}^r, \{0,1\}^k, \{0,1\}^s, (\varphi^1, \dots, \varphi^k), (\psi^1, \dots, \psi^s)).$$

6.° Пусть сеть S схемы $\Sigma(S; x_1, \dots, x_r; z_1, \dots, z_k; y_1, \dots, y_s)$ получена из сети S' при помощи операции обратной связи. Присвоим входам, выходам задержек и выходам сети S' переменные, которые присвоены тем же входам, выходам задержек и выходам сети S, соответственно. При этом некоторому входу S' (с которым отождествляется выход S' при обратной связи) не будет присвоена переменная. Присвоим ей переменную x. Пусть переменная присвоена выходу S', который отождествляется в обратной связи с входом x.

Тогда либо этот выход является одновременно выходом задержки, либо вход является входом задержки. Если полученной схеме $\Sigma'(S'; x_1,\dots,x_r, x, z_1,\dots,z_k, y_1,\dots,y_s)$ уже сопоставлен автомат $\mathfrak{A}'=(\{0,1\}^{r+1},\{0,1\}^k,\{0,1\}^s,\varphi',\psi')$, то в каждом из этих двух случаев i -я компонента вектор-функции φ $\varphi_i'(x_1,\dots,x_r,x,z_1,\dots,z_k)$ не зависит существенно от переменной x, так как рассматриваются только правильные сопоставления. Тогда схеме Σ сопоставим автомат

$$\mathfrak{A}=(\{0,1\}^r,\{0,1\}^k,\{0,1\}^s,(\varphi_1,\dots,\varphi_k),(\psi_1,\dots,\psi_s)),\text{ где}$$
$$\varphi_j=\varphi_j'(x_1,\dots,x_r,\psi_i'(x_1,\dots,x_r,z_1,\dots,z_k),z_1,\dots,z_k);\quad j=1,\dots,k,$$
$$\psi_j=\psi_j'(x_1,\dots,x_r,\psi_i'(x_1,\dots,x_r,z_1,\dots,z_k),z_1,\dots,z_k);\quad j=1,\dots,s.$$

7° Из одной и той же сети путем приписывания входам различных переменных из $\mathcal{U}_1$ могут получаться разные схемы. Пусть схеме $\Sigma(S; x_1,\dots,x_r; z_1,\dots,z_k; y_1,\dots,y_s)$ сопоставлен автомат $\mathfrak{A}=(\{0,1\}^r,\{0,1\}^k,\{0,1\}^s,(\varphi_1,\dots,\varphi_k),(\psi_1,\dots,\psi_s))$. Заменяя переменную x_i на переменную x_i' получим схему $\Sigma'(S; x_1',\dots,x_r'; z_1,\dots,z_k, y_1,\dots,y_s)$, которой сопоставляется автомат

$$\mathfrak{A}'=(\{0,1\}^r,\{0,1\}^k,\{0,1\}^s,(\varphi_1',\dots,\varphi_k'),(\psi_1',\dots,\psi_s')),\quad\text{где}$$
$$\varphi_j'=\varphi_j(x_1',x_2',\dots,x_r');\ j=1,\dots,k;\quad \psi_j'=\psi_j(x_1',\dots,x_r'),\ j=1,\dots,s.$$

<u>Замечание</u>. Нетрудно видеть, что правила 1°–7° сохраняют правильность сопоставления автомата схеме.

<u>Определение</u>. Структурный автомат – это пара $\langle\Sigma,\mathfrak{A}\rangle$, где Σ –схема, $\mathfrak{A}$ – правильно сопоставленный ей автомат. Инициальный структурный автомат получается, если зафиксировать начальное состояние $\mathfrak{A}$, т.е. это пара $\langle\Sigma,\mathfrak{A}\rangle$, где $\mathfrak{A}$ – инициальный автомат.

Правила сопоставления 1°–7° задают операции над структурными автоматами, которые называются операциями композиции структурных автоматов. Операции 2°–5°, 7° – операции суперпозиции и 6° – операция обратной связи.

Сопоставление автомата схеме согласуется с содержательной трактовкой "работы" схемы во времени. Пусть в момент t всем входам схемы приписаны некоторые значения (из множества $\{0,1\}$), и определены состояния задержек, т.е. заданы значения переменных $x_1(t),\dots,x_r(t), z_1(t),\dots,z_k(t)$. Тогда выходам схемы в этот же момент времени будут приписаны значения $y_i(t)=\psi_i(x_1(t),\dots,x_r(t),z_1(t),\dots,z_k(t))$, $i=1,\dots,s$. Состояния задержек схемы в момент $t+1$ определяются как значения функции φ: $z_i(t+1)=\varphi_i(x_1(t),\dots,x_r(t),z_1(t),\dots,z_k(t))$. Таким образом, состояние автомата, реализуемого схемой, представляет собой набор состояний задержек, входящих в схему.

Г Л А В А II. ПОВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ.

Эта глава состоит из восьми параграфов и посвящена изложению основ теории абстрактных автоматов. Как отмечалось, к числу главных задач этой теории относится изучение различных поведений абстрактных автоматов. В §I и §2 главы проводится изучение поведения – I. В §I даются некоторые характеристики отображе-

ний, реализуемых автоматами, а в §2 и §3 излагаются основные результаты, связанные с экспериментами над автоматами. В §4 изучается поведение – П автоматов. В §5 изучается особый вид поведения автоматов, выступающих в роли сверхакцепторов, то есть автоматов, классифицирующих множества входных сверхслов с помощью подмножеств заключительных состояний. В §6 изучается поведение автоматов как перечислителей, другими словами описываются все множества, состоящие из выходных слов, в которые перерабатываются автоматами множество входных слов, также решается задача о сложности автоматов-генераторов, примыкающая к задаче об автоматах-перечислителях. В §7 изучается вопрос о поведении автоматов в лабиринтах, который примыкает к задаче об автоматах-акцепторах и в определенном смысле является геометрической интерпретацией последней. В §8 оценивается число различных инициальных абстрактных автоматов с заданными параметрами.

§ I. Ограниченно-детерминированные функции.

Пусть A и B конечные алфавиты такие, что $A=\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, $B=\{b^1, b^2, \ldots, b^n\}$ и g – одноместная словарная функция, отображающая A^* в B^*. Назовем её детерминированной функцией (д. – функцией), если она обладает следующими свойствами:

I) для любого слова α^τ, $\alpha^\tau \in A^*$, $|g(\alpha^\tau)|=\tau$.

2) для любых слов α_1^τ и α_2^τ из A^* и любого ℓ, $1 \le \ell \le \tau$, если $\overline{\alpha_1^\tau}_\ell = \overline{\alpha_2^\tau}_\ell$, то $\overline{g(\alpha_1^\tau)}_\ell = \overline{g(\alpha_2^\tau)}_\ell$.

Для заданного слова α^τ из A^* определим функцию g_{α^τ}, которую назовем остаточной для функции g. Пусть $\alpha_1^{\tau_1}$ является началом слова $\alpha_2^{\tau_2}$, $\tau_2 \ge \tau_1$, тогда через $\alpha_2^{\tau_2}/\alpha_1^{\tau_1}$ обозначим конец слова $\alpha_2^{\tau_2}$, который образуется после удаления из $\alpha_2^{\tau_2}$ его начала $\alpha_1^{\tau_1}$. По определению полагаем $g_{\alpha^\tau}(\alpha_1^{\tau_1}) = g(\alpha^\tau\alpha_1^{\tau_1})/g(\alpha^\tau)$. Д – функция g называется ограниченно детерминированной функцией (о.-д. функцией), если у неё имеется только конечное число остаточных функций; это число ℓ называется весом функции g. Для наглядности описания о.-д. функций удобно использовать геометрический язык так называемых информационных деревьев. Информационное дерево в алфавитах A и B – строится следующим образом. Верхняя полуплоскость разбивается параллельными прямыми на счётное число полос, называемых ярусами. На первой снизу прямой выбирается точка (корень дерева) и из неё откладывается пучок из m стрелок, концы которых упираются в следующую прямую. Эти стрелки образуют первый ярус дерева. Затем из конца каждой из построенных стрелок (вершины дерева) откладывается такой же пучок стрелок, упирающихся в третью прямую, при этом строящиеся пучки не должны пересекаться, так получается второй ярус. Это построение продолжается далее неограниченно. Стрелкам каждого пучка приписываются буквы из алфавита A таким образом, что i-й при отсчете слева направо соответствует буква a_i. Слову α^τ, $\alpha^\tau \in A^*$ соответствует в информационном дереве последовательность стрелок, взятых из первого, второго, третьего и т.д. ярусов до τ-го яруса включительно так, что при $\alpha^\tau = a(1)a(2)\ldots a(\tau)$ по букве $a(1)$ выбирается соответствующая ей стрелка, затем из того пучка, куда упирается эта стрелка, выбирается стрелка второго яруса, соответствующая букве $a(2)$, и т.д. На рис. 19 приведён фрагмент такого дерева.

рис. 19

С помощью деревьев можно задавать отображения слов в алфавите A в слове в алфавите B следующим образом. Произвольным образом припишем каждой стрелке информационного дерева какую-нибудь букву из алфавита B и каждому слову α^r из A^* с помощью полученного, как говорят, нагруженного дерева (в дальнейшем для краткости - просто дерева), сопоставим слово β^r из B^*, образованное той последовательностью букв из B, которая возникает при прохождении последовательности стрелок, соответствующей слову α^r, начиная с первого яруса. Ясно, что полученное отображение является детерминированным. Верно, очевидно, и обратное, то-есть всякое детерминированное отображение может быть задано с помощью нагруженного дерева. Таким образом, язык нагруженных деревьев адекватен языку детерминированных функций. Выясним, что соответствует остаточным функциям в нагруженном дереве, которое однозначно определяется заданной д.- функцией. Назовем две вершины дерева, лежащие в i-м и j-м ярусах, $i<j$ соединимыми, если существует последовательность стрелок в дереве такая, что конец каждой стрелки является началом следующей за ней, причем началом первой из них является наша вершина из i-го яруса, а концом последней наша вершина из j-го яруса. Назовем поддеревом с корнем в некоторой вершине нашего дерева ту его часть, которая получается удалением из него всех вершин и стрелок, их соединяющих, таких, что ни одна из указанных вершин не соединима с нашей вершиной. Нетрудно видеть, что поддерево соответствует как раз остаточной функции g_{α^r} такой, что последовательность стрелок, соединяющая корень дерева с корнем поддерева, соответствует слову α^r. Отношение совпадения поддеревьев заданного дерева разбивает множество всех его поддеревьев на классы эквивалентности. Пусть $q^1, q^2, \ldots, q^n$ - их номера. Припишем каждой вершине нашего дерева букву q^n в том случае, если из неё исходит поддерево из класса под номером q^n. Нетрудно видеть, что если каким-либо двум вершинам дерева приписана одна и та же буква q^n, то стрелкам, исходящим из этих вершин и соответствующим букве a^i, будет приписана одна и та же буква b^j, а вершинам, куда упираются эти стрелки, будет приписана одна и те же буква q^n. Таким образом, в каждом пучке буква b, приписанная стрелке, а также буква q', приписанная концу стрелки, - являются функциями буквы q, приписанной вершине пучка и той буквы a, которая соответствует самой стрелке, то-есть для некоторых функций ψ и φ имеет место $b=\psi(q,a)$, $q'=\varphi(q,a)$.

Таким образом, д.-функция g может быть описана ещё и следующим образом. Пусть $\alpha^r \in A^*$ и $\alpha^r = a(1)a(2)\ \ a(r)$, рассмотрим последовательность стрелок в дереве д.- функции g, соответствующую слову α^r, и восстановим по ней последовательности $\varkappa^{r+1}, \varkappa^{r+1} \in Q^*$, $\varkappa^{r+1} = q(1)q(2)\ \ q(r+1)$ где $q(1)$ - буква q, приписанная корню дерева, и $\beta^r, \beta^r \in B^*, \beta^r = b(1)b(2)\ldots b(r)$ Нетрудно видеть, что для этих последовательностей при $t=1,2,\ldots,r$ справедлива следующая система рекуррентных отношений

$$\begin{cases} q(1)=q \\ q(t+1)=\varphi(q(t),a(t)) \\ b(t)=\psi(q(t),a(t)) \end{cases} \qquad (***)$$

Таким образом, сопоставляя это задание с системой $(**)$ из § 2 гл. I, мы видим, что в случае, когда д. функция является о.д. функций, она в то же время является и конечно-автоматной функцией, которая реализуется инициальным конечным абстрактным автоматом $\mathfrak{A}_q=(A,Q,B,\varphi,\psi)$. Верно, очевидно и обратное, то-есть каждая конечно-автоматная функция является о.-д.функцией. Следует только отметить, что в инициальном абстрактном автомате, реализующем о.д. функцию, разные состояния автомата, вообще говоря, могут быть номерами одного и того же поддерева рассматриваемой о.д.функции. Из наших рассмотрений, в частности, вытекает возможность использования языка деревьев для задания инициальных конечных абстрактных автоматов. На рис. 20 приведен фрагмент дерева для $\mathfrak{A}^3_{q^1}=(\{a^1,a^2\},\{q^1,q^2\},\{b^1,b^2\},\varphi,\psi,q^1)$.

рис. 20

В заключение параграфа опишем ещё одно свойство о.-д. функций, характеризующих их поведение на сверхсловах алфавита A. Сверхслово называется периодическим с длиной периода T и предпериодом длины ℓ, если оно имеет вид

$$\mathcal{L}^\infty=a(1)a(2)\cdots a(\ell)a(\ell+1)\cdots a(\ell+T)a(\ell+T+1)$$

где $a(\ell+i)=a(\ell+i+T)$ при любом $i, i\geq 0$.

Имеет место следующая <u>Теорема 2.1.</u> [4] О.д.-функция g веса n отображает всякое периодическое сверхслово с длиной периода T в периодическое сверхслово с длиной периода $w\cdot T$, где $w\leq n$.

Доказательство. Пусть сверхслово $\mathcal{L}^\infty$ имеет предпериод длины ℓ и период длины T. Воспользуемся системой $(***)$ для задания о.д. функции g и рассмотрим сверхслова

$$\mathcal{L}^\infty=a(1)a(2)\cdots a(\ell)a(\ell+1)\cdots a(\ell+T)a(\ell+T+1)\cdots a(\ell+2T)\cdots$$
$$\mathcal{K}^\infty=q(1)q(2)\cdots q(\ell)q(\ell+1)\cdots q(\ell+T)q(\ell+T+1)\cdots q(\ell+2T)\cdots$$
$$\mathcal{B}^\infty=b(1)b(2)\cdots b(\ell)b(\ell+1)\cdots b(\ell+T)b(\ell+T+1)\cdots b(\ell+2T)\cdots$$

вычисленные с помощью системы $(***)$. В последовательности столбцов

$$\begin{pmatrix} a(\ell+1) \\ q(\ell+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a(\ell+T+1) \\ q(\ell+T+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a(\ell+2T+1) \\ q(\ell+2T+1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a(\ell+iT+1) \\ q(\ell+iT+1) \end{pmatrix}, \ldots$$

встречается не более nT различных столбцов, поэтому среди них найдутся такие совпадающие между собой столбцы

$$\begin{pmatrix} a(\ell+jT+1) \\ q(\ell+jT+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a(\ell+kT+1) \\ q(\ell+kT+1) \end{pmatrix}$$

для которых справедливы соотношения $k>j$ и $k-j\leq n$. Далее, так как по каждой паре $(a(t),q(t))$ с помощью системы $(***)$ однозначно определяется пара $(b(t),q(t+1))$, то для любых c и t таких, что $c\geq 0, t\geq 1$ и $\ell+jT+1+c(k-j)T\leq t\leq \ell+jT+1+(c+1)(k-j)T$ будет иметь место

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ q(t) \\ b(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(t+(k-j)T) \\ q(t+(k-j)T) \\ b(t+(k-j)T) \end{pmatrix},$$

что доказывает наше утверждение.

Заметим, что если д.функция отображает всякое периодическое сверхслово в периодическое сверхслово, то она, вообще говоря, не будет о.-д. функцией.

рис.21

На рис. 21 приведен фрагмент дерева д. функции, которая всякое сверхслово отображает в периодическое сверхслово даже с периодом одной и той же длины, равной I, но не является, очевидно, о.-д. функцией. Это дерево связано с алфавитами $A=\{0,1\}$ и $B=\{0,1\}$. Левая стрелка в пучке соответствует нулю, а правая – единице. Распределение нулей и единиц из алфавита B в этом дереве осуществляется так, что каждой стрелке из последовательности стрелок, соответствующей слову $\alpha_1^\tau \alpha_2^\tau$, где $\alpha_1^\tau = 00\ldots 0$, $\alpha_2^\tau = 11\ldots 1$, $\tau = 1,2,\ldots$, приписывается единица, а всем остальным стрелкам приписываются нули. На рис. 21 указан фрагмент дерева, содержащий только те стрелки, которым приписаны единицы из алфавита B.

Отметим, что теорема 2.1. допускает уточнение. Можно показать, что справедлива следующая

Теорема 2.2. [5] О.-д. функция веса n отображает периодическое сверхслово с длиной периода T в периодическое сверхслово, длина периода которого совпадает с одним из чисел

$$T_0, 2T_0, \ldots, nT_0,$$
$$T_1, 2T_1, \ldots, nT_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$T_m, 2T_m, \ldots, nT_m,$$

где $T_0, T_1, \ldots, T_m$ суть все делители числа T, включая 1 и T.

§ 2. Отличимость конечных автоматов.

В этом параграфе будут рассмотрены два естественных способа сравнения вычислительных возможностей автоматов, в основе которых лежит изучение автоматов как преобразователей.

Пусть имеется два автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ и $\mathfrak{A}'=(A',Q',B',\varphi',\psi')$, будем говорить, что состояния q и q'; $q\in Q, q'\in Q'$ являются неотличимыми, если для любого слова $\alpha, \alpha\in A^*$, имеет место $\bar\psi(q,\alpha)=\bar\psi'(q',\alpha)$. В противном случае говорим, что состояния отличимые. Автомат $\mathfrak{A}$ называется слабо неотличимым от $\mathfrak{A}'$, если для любого состояния $q, q\in Q$, и любого слова $\alpha, \alpha\in A^*$, найдётся такое состояние $q'\in Q'$, что $\bar\psi(q,\alpha)=\bar\psi'(q',\alpha)$. Факты неотличимости состояний q и q' будем обозначать через $q\sim q'$, а слабой неотличимости автомата $\mathfrak{A}$ от $\mathfrak{A}'$ – через $\mathfrak{A}\le\mathfrak{A}'$. Нетрудно видеть, что из соотношения $\mathfrak{A}\le\mathfrak{A}'$, вообще говоря, не следует, что $\mathfrak{A}'\le\mathfrak{A}$. Автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ назовём слабо неотличимыми, если $\mathfrak{A}\le\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}'\le\mathfrak{A}$. Слабую неотличимость $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ будем записывать так: $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{A}'$. Ясно, что отношение слабой неотличимости $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ является отношением эквивалентности на множестве $K(A,B)$ всех абстрактных конечных автоматов с заданными входным и выходным алфавитами A и B соответственно и с состояниями из фиксированного счётного множества $\bar Q=\{q^1,q^2,\ldots,q^n,\ldots\}$. При изучении неотличимости состояний автомата в числе первых возникает следующий вопрос. Пусть для некоторого состояния q автомата $\mathfrak{A}$ известна пара $(\alpha,\bar\psi(q,\alpha))$. Что в этом случае можно сказать о состоянии q, другими словами, насколько точно состояние q характеризуется входным словом и выходным словом, в которое автомат $\mathfrak{A}$, будучи в состоянии q, переработает данное входное слово? Оказывается, что восстановление состояния q по указанной паре не всегда возможно, точнее, имеет место следующее утверждение, уточняющее одно

предложение из [6] .

Пусть $|\mathcal{D}|$ обозначает мощность множества $\mathcal{D}$.

Теорема 2.3 [6] Для любых алфавитов A, Q, B таких, что $|A|\geq 2, |Q|\geq 3, |B|\geq 2$ найдётся автомат $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$, у которого все состояния попарно отличимы и для любого слова α из A^* при некоторых q' и их q'' из Q, $q'\neq q''$, имеет место $\bar{\psi}(q',\alpha)=\bar{\psi}(q'',\alpha)$.

Доказательство. Представим алфавиты A и B в виде $A=A_1\cup A_2, A_1\cap A_2=\emptyset, B=B_1\cup B_2, B_1\cap B_2=\emptyset$ и пусть b' и b'' – некоторые фиксированные элементы из алфавитов B_1 и B_2 соответственно, а a' и a'' – произвольные элементы из A_1 и A_2 соответственно.

Предположим, что $Q=\{q^1,q^2,\dots,q^n\}$ и введём ряд функций $\chi_1(x_1),\chi_2(x_1),\chi_3(x_1),\chi_4(x_1)$ где: $\chi_1(a)=b'$, если $a\in A_2$, $\chi_1(a)=b''$, если $a\in A_1$; $\chi_2(a)=b'$ если $a\in A_1$, $\chi_2(a)=b''$, если $a\in A_2$; $\chi_3(a)=b'$; $\chi_4(a)=b''$, а также ряд функций $\delta_1(a), \delta_2(a), \delta_3(a), \dots, \delta_n(a)$ где: $\delta_1(a)=q^2$; $\delta_2(a)=q^1$; $\delta_3(a)=q^1$, если $a\in A_1$; $\delta_3(a)=q^2$, если $a\in A_2$; $\delta_i(a)=q^{i+1}$ при $i=4,5,\dots,n-1$; $\delta_n(a)=q^4$

Рассмотрим автомат $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ где $\varphi(q^j,a)=\delta^j(a)$, $\psi(q^n,a)=\chi_n(a)$ при $n=1,2,3,4$ и $\psi(q^n,a)=\chi_3(a)$ при $n>4$. Диаграмма Мура этого автомата приведена на рис. 22 .

Рис.22

В ней использована сокращенная запись, заменяющая все стрелки вида (a^i,b) где $a^i\in A_j$, ведущие в одно и то же состояние, одной стрелкой $(a,b), a\in A_j$. Нетрудно видеть, что все состояния этого автомата попарно отличимы. Пусть теперь $\alpha=a(1)a(2)\cdots a(r)$, $\alpha\in A^*$. Тогда, при $a(1)\in A_1$ справедливо $\psi(q^2,\alpha)=\psi(q^3,\alpha)$, а при $a(1)\in A_2$ справедливо $\psi(q^1,\alpha)=\psi(q^3,\alpha)$. Таким образом, для слова α начинающегося с буквы из A_1 в качестве состояний, о которых идёт речь в теореме, можно взять состояния q^2 и q^3 , а для начинающегося с буквы из A_2 –состояния q^1 и q^3 . Теорема доказана.

Заметим, что условия теоремы 2.3 не могут быть усилены. В самом деле, для выполнения заключения теоремы условия $|Q|\geq 3$ и $|B|\geq 2$ являются необходимыми, а условие $|A|\geq 2$ будет следовать из ниже приводимой теоремы 2.8 .

Для дальнейших рассмотрений нам понадобится следующая Лемма 1 . Для любого автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$, где $|B|\geq 2$, существует автомат $\mathfrak{B}=(A,Q',B,\varphi',\psi')$, такой, что для некоторого состояния q' из Q' и некоторого α из A^* при любом q из Q имеет место $\psi(q',\alpha)\neq\psi(q,\alpha)$.

Доказательство. Пусть $Q=\{q^1,q^2,\dots,q^n\}$ и $a^1\in A$, образуем n слов $\alpha_1=a^1, \alpha_2=a^1a^1, \dots, \alpha_n=a^1a^1\cdots a^1$. Построим автомат $\mathfrak{B}=(A,Q',B,\varphi',\psi')$, где $Q'=\{q^{1'},q^{2'},\dots,q^{n'}\}$; $\varphi'(q^{i'},a^1)=q^{i+1\,(mod\,n)}$ и $\varphi'(q^{i'},a)=q^{1'}$ при $a\neq a^1$, $\psi'(q^{i'},a^1)\neq\psi(q^i,\alpha_i)$ и для некоторого фиксированного b^1 имеет место $\psi'(q^{i'},a)=b^1$ при любом $a\neq a^1$; $i=1,2,\dots,n$. Нетрудно видеть, что для любого q из Q имеет место $\bar{\psi}(q,\alpha_n)\neq\bar{\psi}'(q^{1'},\alpha_n)$. Таким образом, состояние $q^{1'}$ автомата $\mathfrak{A}'$ и слово α_n удовлетворяют условиям леммы. Лемма доказана.

В дальнейшем, для обозначения того, что автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетво-

ряют лемме 1, будем писать $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$. Пусть $\mathfrak{A}'=(A,Q,B,\varphi',\psi')$ и $\mathfrak{A}''=(A,Q'',B,\varphi'',\psi'')$, причём $Q'\cap Q''=\emptyset$. Обозначим через $\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}''$ автомат $\mathfrak{A}=(A,Q'\cup Q'',B,\varphi,\psi)$, такой, что $\varphi(q,a)=\varphi'(q,a)$ и $\psi(q,a)=\psi'(q,a)$ при $q\in Q'$ и $\varphi(q,a)=\varphi''(q,a)$ и $\psi(q,a)=\psi''(q,a)$ при $q\in Q''$. Ясно, что операция „+" ассоциативна и коммуникативна.

Теорема 2.4. Число классов эквивалентности, индуцируемой отношением слабой неотличимости автоматов, в $K(A,B)$ при $|B|\geq 2$ счетно.

Доказательство. Рассмотрим последовательность автоматов $\mathfrak{A}^{(p)}=(A,Q^{(p)},B,\varphi^{(p)},\psi^{(p)})$, $p=1,2,\ldots$. Пусть $Q^{(1)}=\{q^1,q^2\}$, $\varphi^1(q,a)=q^1$, $\psi^1(q^1,a)=b^1$ и $\psi^1(q^2,a)=b^2$ при $q\in Q^{(1)}$, $a\in A$, $b^1\neq b^2$.

Выберем в качестве автомата $\mathfrak{A}^{(2)}$ автомат $\mathfrak{A}^{(1)}+\mathcal{B}(\mathfrak{A}^{(1)})$ из $K(A,B)$, где $\mathcal{B}(\mathfrak{A}^{(1)})$ подобран таким образом, чтобы его множество состояний не пересекалось с $Q^{(1)}$. Аналогично, в качестве автомата $\mathfrak{A}^{(3)}$ выберем автомат $\mathfrak{A}^{(2)}+\mathcal{B}(\mathfrak{A}^{(2)})$ с соблюдением отмеченных требований и т.д. Пусть построен автомат $\mathfrak{A}^{(p)}$, тогда в качестве автомата $\mathfrak{A}^{(p+1)}$ из $K(A,B)$ выберем автомат $\mathfrak{A}^{(p)}+\mathcal{B}(\mathfrak{A}^{(p)})$ такой, чтобы множества состояний автоматов $\mathcal{B}(\mathfrak{A}^{(p)})$ и $\mathfrak{A}^{(p)}$ не пересекались. Ясно, что каждый шаг построения нашей последовательности осуществим. Далее, нетрудно видеть, что для любых двух автоматов $\mathfrak{A}^{(p)}$ и $\mathfrak{A}^{(p')}$ при $p<p'$ не имеет места $\mathfrak{A}^{(p')}\leq\mathfrak{A}^{(p)}$, поэтому они определяют разные эквивалентности. Отсюда следует, что число классов эквивалентности, индуцируемой отношением слабой неотличимости, в $K(A,B)$ не менее, чем счётное. С другой стороны этих классов не более, чем число всех автоматов в $K(A,B)$, которых, очевидно, также счетное число. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Как уже отмечалось, из того, что $\mathfrak{A}\leq\mathfrak{A}'$ не следует, что $\mathfrak{A}'\leq\mathfrak{A}$. Это, в частности, справедливо при $p\neq p'$ для любой из пары автоматов $\mathfrak{A}^{(p)}$ и $\mathfrak{A}^{(p')}$, построенных в процессе доказательства предыдущей теоремы. На самом деле имеет место следующий более сильный факт.

Теорема 2.5. [6]. Для любого автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ где $|B|\geq 2$, существует автомат $\mathfrak{A}'=(A,Q',B,\varphi',\psi')$ со следующими свойствами:

1) $\mathfrak{A}'$ не является слабо неотличимым от $\mathfrak{A}$;
2) для любого состояния q из Q существует состояние q' из Q' такое, что $q\sim q'$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$ автомат, построенный для автомата $\mathfrak{A}$ в соответствии с леммой 1, и такой, что его множество состояний не пересекается с множеством состояний автомата $\mathfrak{A}$. Тогда, в качестве автомата $\mathfrak{A}'$, о котором идёт речь в теореме, можно выбрать автомат $\mathfrak{A}+\mathcal{B}(\mathfrak{A})$. Теорема доказана.

Введем ещё одно соотношение, характеризующее похожесть автоматов. Будем говорить, что автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ из класса $K(A,B)$ являются неотличимыми, если для любого состояния q автомата $\mathfrak{A}$ найдется состояние q' автомата $\mathfrak{A}'$ такое, что $q\sim q'$ и для любого состояния q'' автомата $\mathfrak{A}''$ найдется состояние q''' автомата $\mathfrak{A}$ такое, что $q''\sim q'''$. В противном случае говорим, что автоматы являются отличимыми. Ясно, что из неотличимости автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ следует их слабая неотличимость, но как показывает пример автоматов, чьи диаграммы Мура приведены на рис. 23 и 24, обратное, вообще говоря, неверно.

рис.23

рис.24

Неотличимость автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ будем обозначать через $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{A}'$.

Отношение неотличимости, очевидно, также является отношением эквивалентности на $K(A,B)$. Класс всех автоматов из $K(A,B)$ неотличимых от автоматов $\mathfrak{A}$ из $K(A,B)$, обозначим через $K_{\mathfrak{A}}(A,B)$. Изучим подробнее введенное отношение эквивалентности. Назовем автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ из $K(A,B)$ изоморфными, если существует взаимнооднозначное отображение ξ множества Q состояний автомата $\mathfrak{A}$ на множество Q' состояний автомата $\mathfrak{A}'$, при котором для любых элементов a из A и q из Q имеет место $\xi(\varphi(q,a)) = \varphi'(\xi(q),a)$ и $\psi(q,a)=\psi'(\xi(q),a)$. Автомат $\mathfrak{A}$ из $K(A,B)$ назовем автоматом приведённого вида, если все его состояния попарно отличимы. Имеет место следующее утверждение, достаточно полно характеризующее класс $K_{\mathfrak{A}}(A,B)$.

Теорема 2.6 [6]. Для любого автомата $\mathfrak{A}$ класс $K_{\mathfrak{A}}(A,B)$ содержит с точностью до изоморфизма единственный автомат приведенного вида.

Доказательство. Отношение неотличимости состояний автомата $\mathfrak{A}$, которое является отношением эквивалентности, разбивает множество Q его состояний на классы эквивалентности $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$. Пусть φ -функций переходов автомата $\mathfrak{A}$, покажем, что для любого Q_i, $i=1,2,\dots,k$, любых состояний q и q' из Q_i и любого a из A, если $\varphi(q,a) \in Q_j$, $j=1,2,\dots,k$, то $\varphi(q',a) \in Q_j$ то-есть неотличимые состояния под действием одной и той же буквой переходят снова в неотличимые состояния. В самом деле, пусть это не так, то-есть нашлись такие Q_l, q, q' из Q_i и a из A, что для некоторого j $\varphi(q,a) \in Q_j$, а $\varphi(q',a) \in Q_l$, $l \neq j$. Ясно, что состояния $\varphi(q,a)$ и $\varphi(q',a)$ в этом случае окажутся отличимыми, то-есть найдётся такое слово α, $\alpha \in A^*$, для которого будет иметь место $\bar{\psi}(\varphi(q,a),\alpha) \neq \bar{\psi}(\varphi(q',a),\alpha)$, где ψ - функция переходов автомата $\mathfrak{A}$. С другой стороны $\bar{\psi}(q,a\alpha) = \psi(q,a)\bar{\psi}(\varphi(q,a),\alpha)$ и $\bar{\psi}(q',a\alpha) = \psi(q',a)\bar{\psi}(\varphi(q',a),\alpha)$, откуда, в силу полученного неравенства $\bar{\psi}(q,a\alpha) \neq \bar{\psi}(q',a\alpha)$, то-есть q и q' отличимы и не могли принадлежать одному и тому же классу Q_i. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Далее, для любых Q_i q, q', a очевидно, справедливо равенство $\psi(q,a) = \psi(q',a)$, если q и q' из Q_i. Установленные свойства функций φ и ψ делают корректным определение автомата $\mathfrak{A}' = (A, Q', B, \varphi', \psi')$ где $Q' = \{q^{1'}, q^{2'}, \dots, q^{k'}\}$ $\varphi'(q^{i'},a) = q^{j'}$, если существуют такие состояния q из Q_i и q' из Q_j что $\varphi(q,a) = q'$ и $\psi'(q^{i'},a) = \psi(q,a)$, если q из Q_i. Из построения автомата $\mathfrak{A}'$ следует, что все его состояния попарно отличимы и любое состояние $q^{i'}$ из Q' неотличимо от любого состояния q из Q_i автомата $\mathfrak{A}$. Верно и обратное, то-есть каждое состояние q из Q_i автомата $\mathfrak{A}$ неотличимо от состояния $q^{i'}$ автомата $\mathfrak{A}'$. Таким образом, $\mathfrak{A}'$ является приведенным и содержится в $K_{\mathfrak{A}}(A,B)$. Пусть теперь $\mathfrak{A}''$ из $K_{\mathfrak{A}}(A,B)$ - любой приведенный автомат, покажем, что $\mathfrak{A}''$ и $\mathfrak{A}'$ изоморфны. В самом деле, из приведенности каждого из этих автоматов и их неотличимости следует, что число состояний у них одно и то же. Пусть $Q'' = \{q^{1''}, q^{2''}, \dots, q^{k''}\}$ - множество состояний автомата $\mathfrak{A}''$. Определим функцию ξ, отображающую Q' на Q'' следующим образом: $\xi(q^{i'}) = q^{j''}$ точно тогда, когда $q^{i'} \sim q^{j''}$; $i,j=1,2,\dots,k$. Ясно, что отображение ξ взаимно-однозначно и для функций выходов автоматов $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ имеет место равенство $\psi'(q^{i'},a) = \psi''(\xi(q^{i'}),a)$. Таким образом, для изоморфизма автоматов $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ остается показать, что для любых i, $i=1,2,\dots,k$ и a из A справедливо $\xi(\varphi(q^{i'},a)) = \varphi''(\xi(q^{i'}),a)$ где φ'' - функция переходов автомата $\mathfrak{A}''$. Как и выше, последнее следует из того, что под действием одной и той же буквы a автоматы $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ из неотличимых состояний должны

перейти также в неотличимые состояния, так как в противном случае исходные состояния были бы отличимы. Тем самым теорема доказана.

Заметим, что для класса $T_{\mathfrak{A}}$ всех автоматов $\mathfrak{A}'$ из $K(A,B)$ таких, что $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$, как это следует из примеров автоматов, приведенных на рис. 23 и 24, теорема, аналогичная теореме 2.6, не имеет места. Однако, можно указать достаточно широкий класс автоматов, для которых отношения слабой неотличимости и неотличимости равносильны и для которых аналог упомянутой выше теоремы будет справедлив. Таким классом является класс всех так называемых сильносвязных автоматов из $K(A,B)$.

Пусть $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ и $q,q' \in Q$. Будем говорить, что q' соединимо с q и обозначать это через $q \to q'$, если существует непустое слово α из A^* такое, что $\varphi(q,\alpha)=q'$. Автомат $\mathfrak{A}$ называется связным, если его диаграмма Мура, рассмотренная как нагруженный граф, вершинами которого являются круги, соответствующие состояниям, а ребрами -стрелки диаграммы Мура, образует связный граф. Автомат $\mathfrak{A}$ называется сильносвязным, если любые две вершины в его графе соединимы ориентированным путем длины не меньшей, чем единица, или, что то же, для любых его состояний q и q' имеет место $q \to q'$. Класс всех сильно-связных автоматов из $K(A,B)$ обозначим через $Z(A,B)$.

Лемма 2. Если автомат $\mathfrak{A}$ является сильно-связным и для некоторого автомата $\mathfrak{A}'$ имеетместо $\mathfrak{A} \le \mathfrak{A}'$, то для любого состояния q автомата $\mathfrak{A}$ найдётся такое состояние q' автомата $\mathfrak{A}'$, что $q \sim q'$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$, $\mathfrak{A}'=(A,Q',B,\varphi',\psi')$ где $Q=\{q^1,q^2, \ldots ,q^n\}$, $Q'=\{q^{1'},q^{2'}, \ldots ,q^{m'}\}$ и $\alpha_1 \in A^*$. Так как $\mathfrak{A} \le \mathfrak{A}'$, то найдётся такое состояние q' из Q', что $\bar{\psi}(q^1,\alpha_1)=\bar{\psi}'(q',\alpha_1)$. Пусть $\{q^{i_1'},q^{i_2'}, \ldots ,q^{i_p'}\}$ - множество всех таких состояний q' из Q'. Рассмотрим множество $Q(\alpha_1)=\{\varphi'(q^{i_1'},\alpha_1), \varphi'(q^{i_2'},\alpha_2), \ldots, \varphi'(q^{i_p'},\alpha_p)\}$. Очевидно, $Q(\alpha_1)\neq\emptyset$ и для любого слова γ из A^* имеет место $|Q(\alpha_1)| \ge |Q(\alpha_1\gamma)|$. Если слово γ таково, что $|Q(\alpha_1\gamma)| < |Q(\alpha_1)|$, то рассмотрим слово $\alpha_2=\alpha_1\gamma$. Для него строим своё множество $Q(\alpha_2)$ и снова выясняем, существует ли такое слово γ' из A^*, что $|Q(\alpha_2\gamma')| < |Q(\alpha_2)|$, или нет. Если существует, то продолжаем процесс наращивания слова α_1. Ясно, что в результате наших построений мы получим некоторое слово α из A^* такое, что $Q(\alpha)\neq\emptyset$ и для любого слова γ из A^* справедливо равенство $|Q(\alpha)|=|Q(\alpha\gamma)|$. Далее, так как автомат $\mathfrak{A}$ является сильносвязным, то существуют такие слова $\delta_1,\delta_2, \ldots ,\delta_n$ из A^*, что для любого i, $i=1,2, \ldots ,n$ будет иметь место $\varphi(q^i,\delta_i)=q^{i+1 (mod n)}$. Пусть $\varphi(q^1,\alpha)=q^k$, построим слово $\alpha\delta_k\delta_{k+1}\ldots\delta_n\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}$ и по нему - множества $Q(\alpha\delta_k), Q(\alpha\delta_k\delta_{k+1}), \ldots, Q(\alpha\delta_k\delta_{k+1}\ldots\delta_n\delta_1\ldots\delta_{k-1})$. Покажем, что для любого состояния q^i из Q и любого состояния q' из $Q(\alpha\delta_k\ldots\delta_n\delta_1\ldots\delta_{k-1})$ имеет место $q^i \sim q'$. В самом деле, если бы для некоторых q^i и q' удовлетворяющих нашим условиям, имела место отличимость, то нашлось бы такое слово γ из A^*, что $\bar{\psi}(q^i\gamma)\neq\bar{\psi}'(q',\gamma)$. А это означало бы, очевидно, справедливость неравенства $|Q(\alpha\delta_k\delta_{k+1}\ldots\delta_n\delta_1\ldots\delta_{k-1}\gamma)|<|Q(\alpha\delta_k\delta_{k+1}\ldots\delta_n\delta_1\ldots\delta_i)|$ что противоречило бы выбору слова α. Лемма доказана.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 2.7 [6]. Если автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ сильно-связные и $\mathfrak{A} \le \mathfrak{A}'$, то $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{A}'$.

Доказательство. В силу леммы 2 для каждого состояния q автомата $\mathfrak{A}$ найдётся состояние q' автомата $\mathfrak{A}'$, такое, что $q \sim q'$. Покажем, что имеет место и обратное. Отсюда будет следовать утверждение теоремы. Зафиксируем какое-нибудь состояние $q^{(1)}$ автомата $\mathfrak{A}$ и пусть $q^{(1)'}$ - такое состояние автомата $\mathfrak{A}'$, что $q^{(1)} \sim q^{(1)'}$.

Выберем произвольное состояние $q^{(2)'}$ автомата $\mathfrak{A}'$ и покажем, что найдётся такое состояние $q^{(2)}$ автомата $\mathfrak{A}$, что $q^{(2)} \sim q^{(2)'}$. В силу сильной связности автомата $\mathfrak{A}'$ найдётся такое слово α, что для функции перехода φ' автомата $\mathfrak{A}'$ будет иметь место $\varphi'(q^{(1)'}, \alpha) = q^{(2)'}$.

Рассмотрим состояние $q^{(2)} = \varphi(q^{(1)}, \alpha)$, где φ – функция перехода автомата $\mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что $q^{(2)} \sim q^{(2)'}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает.

Следствие 1. Если автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ сильно-связные, то условия их слабой неотличимости и неотличимости равносильны.

Заметим, что если автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ неотличимы и один из них сильно-связный, то и другой также сильно-связный. Отсюда с учётом теоремы 2.6 мы получаем

Следствие 2. Если автомат $\mathfrak{A}$ сильно-связный, то в классе $T_{\mathfrak{A}}(A,B) \cap Z(A,B)$ содержится с точностью до изоморфизма единственный автомат приведённого вида.

§ 3. Эксперименты с конечными автоматами.

В этом параграфе мы продолжим изучение отношений отличимости состояний и автоматов, начатое в § 2, путем рассмотрения нескольких типичных задач, связанных с восстановлением свойств автомата по его реакциям на входные слова-эксперименты.

Теорема 2.8 [6]. Состояния q^i и q^j автомата $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, имеющего хотя бы два отличимых состояния, неотличимы тогда и только тогда, когда для любого слова $\alpha^{|Q|-1}$ из A^* имеет место $\bar{\psi}(q^i, \alpha^{|Q|-1}) = \bar{\psi}(q^j, \alpha^{|Q|-1})$.

Доказательство. Ясно, что если q^i и q^j неотличимы, то для любого слова $\alpha^{|Q|-1}$ справедливо $\bar{\psi}(q^i, \alpha^{|Q|-1}) = \bar{\psi}(q^j, \alpha^{|Q|-1})$. Покажем, что справедливо и обратное утверждение, то-есть, что в случае отличимости состояний q^i и q^j найдётся слово $\alpha^{|Q|-1}$ такое, что $\bar{\psi}(q^i, \alpha^{|Q|-1}) \neq \bar{\psi}(q^j, \alpha^{|Q|-1})$. Для этого на множестве Q введём отношение эквивалентности R_k; $k = 1, 2, \ldots$ такое, что состояния q^i и q^j находятся в отношении R_k (обозначение: $q^i R_k q^j$) точно тогда, когда для любого слова α^k из A^* имеет место $\bar{\psi}(q^i, \alpha^k) = \bar{\psi}(q^j, \alpha^k)$. В этом случае говорят также, что состояния q^i и q^j не отличимы экспериментами длины k. Пусть P_k разбиение множества Q на классы эквивалентности, индуцируемой отношением R_k. Ясно, что P_{k+1} является подразбиением P_k. Покажем, что если при некотором l имеет место $P_l = P_{l+1}$ и $P_l = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$, то для любых состояний q^u и q^v из любого заданного класса Q_w; $w = 1, 2, \ldots, r$ справедливо $q^u \sim q^v$. В самом деле, предположим, что это не так и пусть в некотором классе Q_w содержатся отличимые состояния q^u и q^v. Тогда найдётся такое слово α, что $\bar{\psi}(q^u, \alpha) \neq \bar{\psi}(q^v, \alpha)$. Пусть α^t кратчайшее такое слово. Очевидно, что $t > l+1$. Пусть $\alpha^t = a(1)a(2)\ldots a(l)a(l+1)\ldots a(l+s)$. Рассмотрим слово $\alpha_1^{l+1} = a(s-1)a(s)\ldots a(l+s)$, которое является окончанием слова α^t. Пусть $q' = \varphi(q^u, a(1)\ldots a(s-2))$ и $q'' = \varphi(q^v, a(1)\ldots a(s-2))$. В силу того, что α^t – кратчайшее слово из всех слов α, отличающих q^u и q^v, должно быть $q' R_l q''$. С другой стороны, так как $\bar{\psi}(q^u, \alpha^t) \neq \bar{\psi}(q^v, \alpha^t)$, то должно быть $\bar{\psi}(q', \alpha_1^{l+1}) \neq \bar{\psi}(q'', \alpha_1^{l+1})$, то-есть неверно, что $q' R_{l+1} q''$. Таким образом, получаем, что $P_l \neq P_{l+1}$, а это противоречит нашему предположению.

Пусть построена последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_l$ такая, что при $l > 1$ каждое последующее разбиение является собственным подразделением предыдущего и $P_{l+1} = P_l$. Заметим, что если в Q имеются хотя бы два

отличимых состояний, то P_1 содержит не менее двух классов эквивалентности, отсюда следует, что $l \le |Q|-1$. Пусть теперь q^u и q^v произвольные состояния автомата $\mathfrak{A}$. В силу изложенного, для того, чтобы установить их неотличимость, достаточно посмотреть, в какие классы разбиения P_l они попадают. Если они лежат в равных классах, то они отличимы и даже экспериментом длины $|Q|-1$, если же они попали в один и тот же класс, то они неотличимы. Теорема доказана.

Заметим, что приведенное доказательство конструктивное, так как оно фактически указывает алгоритм построения всех классов неотличимых между собой состояний. Отметим также, что в общем случае оценка $|Q|-1$ длин экспериментов, осуществляющих распознавание отличимости состояний не может быть улучшена. В этом легко убедиться, рассмотрев в качестве примера автомат, диаграмма Мура которого приведена на рис. 25.

рис. 25

Теорема 2.9 [6]. Состояния q и q' автоматов $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ и $\mathfrak{A}'=(A,Q',B,\varphi',\psi')$, таких, что $Q \cap Q' = \emptyset$, неотличимы тогда и только тогда, когда для любого слова $\alpha^{|Q|+|Q'|-1}$ из A^* имеет место

$$\bar{\psi}(q,\alpha^{|Q|+|Q'|-1}) = \bar{\psi}'(q',\alpha^{|Q|+|Q'|-1}).$$

Доказательство. Рассмотрим автомат $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'$. Если в этом автомате хотя бы два состояния отличимы, то, пользуясь теоремой 2.8 получаем утверждение нашей теоремы. Если все состояния $\mathfrak{B}$ неотличимы, то это обнаруживается с помощью экспериментов длины I. Теорема доказана.

Заметим, что так же, как в теореме 2.8, оценка теоремы 2.9, вообще говоря, неулучшаемая, в чем легко убедиться, взяв в качестве примера автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, где диаграмма переходов автомата $\mathfrak{A}$ приведена на рис. 25, а автомата $\mathfrak{A}'$ – на рис. 26, причём $m=|Q'| \ge |Q|=n$. В качестве состояний q и q' здесь берутся состояния q^1 и $q^{1'}$.

рис. 26

Как уже было показано, вообще говоря, нельзя по эксперименту и его результату, то-есть по паре $(\alpha,\bar{\psi}(q,\alpha))$ установить относительно заданного автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$, в каком состоянии он находился в начале эксперимента. Однако, в некотором смысле двойственный вопрос о том, всегда ли существует эксперимент, позволяющий установить заключительное состояние автомата, имеет положительный ответ. При решении последнего вопроса будем рассматривать так называемые условные эксперименты. Именно, условным экспериментом для автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ назовем функцию Φ, определенную на некотором подмножестве множества $M=\{(\alpha,\beta)|\alpha\in A^*;\beta\in B^*, |\alpha|=|\beta|\}$ и принимающую значения в множестве A. Результатом применения такого эксперимента к автомату $\mathfrak{A}$, находящемуся в состоянии q, назовем пару $(\alpha,\bar{\psi}(q,\alpha))$, $\alpha=a(1)a(2)\dots a(l)$, такую, что $a(1)=\Phi((\Lambda,\Lambda))$; $a(i+1)=\Phi((\alpha,\bar{\psi}(q,\alpha)))$ причем $\Phi((\alpha,\bar{\psi}(q,\alpha)))$ не определено. Содержательно применение условного эксперимента к автомату $\mathfrak{A}$ означает, что каждая очередная входная буква выбирается в зависимости от той информации об автомате $\mathfrak{A}$, которая уже

получена в ходе эксперимента к настоящему моменту. Длиной условного эксперимента Φ / по отношению к автомату $\mathfrak{A}$ / назовем наибольшую из длин входных слов α, возникающих при применении этого эксперимента к различным состояниям автомата $\mathfrak{A}$. Условный эксперимент назовем установочным /для $\mathfrak{A}$/ если по результату $(\alpha, \bar{\psi}(q,\alpha))$ применения его к произвольному состоянию $q \in Q$ однозначно восстанавливается заключительное состояние $\varphi(q,\alpha)$.

Теорема 2.10. [6,7]. Для любого автомата с n попарно отличимыми состояниями существует установочный эксперимент длины $\frac{n(n-1)}{2}$ и для некоторого автомата с n состояниями эта оценка не может быть понижена.

Доказательство. Пусть имеется произвольный автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ все n состояний которого попарно отличимы. Отбрасывая тривиальный случай $n = 1$, будем считать, что $n > 1$. Покажем сначала, что для $\mathfrak{A}$ существует установочный эксперимент. Этот эксперимент будет устроен так, что для любого состояния $q \in Q$ соответствующее входное слово α разобьется на слова $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l : \alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_l$, причем α_{i+1} будет определяться по реакции автомата на слово $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i$. Пусть q – неизвестное начальное состояние автомата $\mathfrak{A}$. Возьмем произвольное слово α_1 из A^* и вычислим значение $\bar{\psi}(q,\alpha_1)$. Так как автомат $\mathfrak{A}$ нам полностью известен, мы можем указать множество $Q(\alpha_1) = \{q^{i_1}, q^{i_2}, \ldots, q^{i_k}\}$ всех таких его состояний, для каждого из которых будет иметь место $\bar{\psi}(q^{i_j}, \alpha_1) = \bar{\psi}(q, \alpha_1)$ и при этом заведомо одно из q^{i_j} совпадает с q; $j = 1, \ldots, k$. Рассмотрим множество $\mathcal{L}(\alpha_1) = \{\varphi(q^{i_1}, \alpha_1), \ldots, \varphi(q^{i_k}, \alpha_1)\} = \{q^{j_1}, \ldots, q^{j_l}\}$, которое назовем ассоциированным. Если $l = 1$, то по паре $(\alpha_1, \bar{\psi}(q,\alpha_1))$ состояние $\varphi(q,\alpha_1)$ восстанавливается однозначно и эксперимент на этом можно закончить. Пусть $l > 1$ тогда найдётся некоторое слово α_2 из A^*, которое отличает состояния q^{j_1} и q^{j_2}, то есть имеет место $\bar{\psi}(q^{j_1}, \alpha_2) \neq \bar{\psi}(q^{j_2}, \alpha_2)$. Ясно, что в этом случае $Q(\alpha_1\alpha_2) \subset Q(\alpha_1)$ и $|\mathcal{L}(\alpha_1\alpha_2)| < |\mathcal{L}(\alpha_1)|$. Само слово α_2, в силу теоремы 2.8, может быть указано эффективно, например, путем перебора слов из A^+, длина которых не превосходит $n-1$. Вновь анализируем ассоциируемое множество $\mathcal{L}(\alpha_1\alpha_2)$. Если в нем один элемент, то по паре $(\alpha_1\alpha_2, \bar{\psi}(q,\alpha_1\alpha_2))$ состояние $\varphi(q,\alpha_1\alpha_2)$ определяется однозначно и эксперимент заканчивается; если элементов больше, чем один, берем любые два состояния из $\mathcal{L}(\alpha_1\alpha_2)$ и, указав, слово α_3, их отличающее, рассматриваем множества $Q(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ и $\mathcal{L}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ и так далее, пока не придем к случаю, когда множество $\mathcal{L}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l)$ окажется одноэлементным и эксперимент можно будет закончить. Ассоциированные множества состояний обозначаем далее $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots$, где $\mathcal{L}_1$ по определению совпадает с Q, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(\alpha_1)$, $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}(\alpha_1\alpha_2)$ и т.д.

Оценим длину слова $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_l$. Ясно, что $|\alpha| = \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i|$, где $l \leq n$. Каждое из слов α_i можно взять длины $n-1$, так что $|\alpha| \leq n(n-1)$. Эту оценку можно улучшить за счёт более тщательного выбора слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$.

Вновь, как и в доказательстве теоремы 2.8, нам понадобятся отношение R_k неотличимости состояний из Q экспериментами длины k, разбиение P_k множества Q на соответствующие классы эквивалентности и замечание о том, что если автомат $\mathfrak{A}$ имеет n попарно отличимых состояний и $k \leq n-1$, то P_k содержит, по крайней мере, $k+1$ классов.

Будем выбирать слова $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, так чтобы выполнялось специальное требование, которое обозначим d_k. Оно состоит в том, что перед началом подачи на вход автомата $\mathfrak{A}$ слова α_k ассоциированное множество $\mathcal{L}_k$ имеет не более, чем $n-k+1$ состояний.

До начала эксперимента условие d_1 очевидным образом выполняется. Пусть при некотором $k < n$ условие d_k выполнено; покажем, что существует слово α_k длины, не превосходящей k, для которого выполнено условие

d_{k+1}. Предположим сначала, что $\mathcal{L}_k$ имеет $n-k+1$ элементов. Покажем, что по отношению к P_k элементы $\mathcal{L}_k$ принадлежат не менее, чем к двум классам. В самом деле, если бы они принадлежали лишь одному классу, то этот класс содержал бы не менее, чем $n-k+1$ элементов. Но как отмечалось выше, общее число классов должно быть не менее, чем $k+1$. Отсюда следует, что остающиеся k классов содержали бы, по крайней мере, k элементов и всего получилось бы не менее, чем $(n-k+1)+k=n+1$ элементов. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Из этих двух классов можно выбрать пару состояний q' и q''. Слово длины k, устанавливающее отличимость состояний q' и q'', и выберем в качестве d_k. Условие d_{k+1} при этом, очевидно, выполняется. В случае, когда $\mathcal{L}_k$ имеет меньше, чем $n-k+1$ элементов, в качестве α_k выберем пустое слово, то есть слово длины 0, $0 \le k$.

Таким образом, построим слова $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$; в результате ассоциированное множество $\mathcal{L}_n$ будет иметь не более чем $n-n+1=1$ состояние, то есть будет иметь одно состояние. Длина построенного слова $\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$ не превосходит $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$, что и доказывает первую часть утверждения теоремы. Для доказательства того, что оценка, о которой идет речь в теореме, в общем случае не улучшаема, рассмотрим автомат $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ где $A=\{1,2,\ldots,n-1\}$, $Q=\{q^1,q^2,\ldots,q^n\}$, $B=\{0,1\}$, чья диаграмма Мура приведена на рис. 27.

Рис. 27

Из этой диаграммы видно, что при $a\in A$ и $q^i\neq q^j$ выполняется $\varphi(q^i,a)\neq\varphi(q^j,a)$. Последнее свойство будем называть финальной однозначностью автомата $\mathfrak{A}$.

Пусть Φ – установочный эксперимент для $\mathfrak{A}$ наименьшей длины ℓ. Рассмотрим результат применения Φ к некоторому состоянию q автомата $\mathfrak{A}$: $(\alpha,\bar{\psi}(q,\alpha))$. Нетрудно заметить, что если i-я буква слова $\bar{\psi}(q,\alpha)$ есть единица, то заключительное состояние можно однозначно определить уже по паре $(\alpha_i,\bar{\psi}(q,\alpha_i))$. Поэтому с Φ можно связать установочный эксперимент Φ', который сначала действует также как Φ, но обрывается, как только на выходе $\mathfrak{A}$ появляется единица. Длина Φ', в силу выбора Φ, тоже равна ℓ. Пусть q^τ – такое состояние автомата $\mathfrak{A}$, применение к которому эксперимента Φ' приводит к появлению на выходе самой длинной цепочки из нулей. В силу финальной однозначности автомата $\mathfrak{A}$ такое состояние q^τ единственно, причем при применении к нему Φ' на выходе $\mathfrak{A}$ возникает слово α длины ℓ. Так как в ходе эксперимента Φ' на выходе автомата $\mathfrak{A}$ появляются лишь нулевые сигналы /за исключением, быть может, последнего момента/, то применение эксперимента Φ' к произвольному состоянию q^i, $i\neq\tau$, состоит в подаче на вход автомата $\mathfrak{A}$ некоторого начального куска слова α до появления на выходе $\mathfrak{A}$ первой единицы. В силу финальной однозначности $\mathfrak{A}$ все такие начальные куски слова α различны и непусты; обозначим их $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{\tau-1},\alpha_{\tau+1},\ldots,\alpha_n$. Для $i\neq\tau$ и $j=1,2,\ldots,i-1$ выделим в α также начальный кусок α_{ij}, под действием которого $\mathfrak{A}$ из состояния q^i впервые попадает в состояние q^j; из определения автомата $\mathfrak{A}$ вытекает, что такое выделение возможно. Заметим, что каждое из слов $\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tau-1},\alpha_{\tau+1},\ldots,\alpha_n$ заканчивается буквой $n-1$, а каждое слово α_{ij} – буквой j. Если слова α_{is} и α_{jk} при $i\neq j$ совпадают, то $s=k$, $\varphi(q^i,\alpha_{is})=\varphi(q^j,\alpha_{ik})$ и нарушается условие финальной однозначности. Поэтому все слова α_{ij} различны. Предположим, сначала, что $\tau=n$. В этом случае каждое слово α_{ij} заканчивается буквой $j<n-1$ и поэтому отличается от любого слова α_s. Таким образом, α_s и α_{ij} – различные начальные непустые куски слова α_j

их число равно $\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ и $\ell=|\alpha|\geq\frac{n(n-1)}{2}$. Пусть теперь $\tau\neq n$. Тогда равенство $\alpha_s=\alpha_{ij}$ может выполняться только при $j=n-1,\ i=n$, так что не более, чем одно из слов α_s может совпадать с каким-либо из слов α_{ij}. Таким образом, число различных слов α_{ij} и α_s не менее, чем $\sum_{i=1,i\neq\tau}^{n}(i-1)+n-2$, где $\tau\neq n$, так что последнее выражение не меньше, чем $\sum_{i=1,i\neq n-1}^{n}(i-1)+n-2=\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$ и снова $\ell=|\alpha|\geq\frac{n(n-1)}{2}$. Теорема доказана.

Заметим, что слово α, определяющее установочный эксперимент для автомата $\mathfrak{A}$, может быть выбрано, например, так:

$$\alpha=\underbrace{n-1}_{1},\ \underbrace{1,n-1}_{2},\ \underbrace{2,1,n-1}_{3},\ \ldots,\ \underbrace{n-2,n-3,\ldots,2,1,n-1}_{n-1}.$$

Рассмотренная задача об установочном эксперименте допускает некоторое обобщение. Пусть $\mathfrak{M}\subseteq K(A,B)$. Назовем множество $\mathfrak{M}$ диагностируемым, если существует такой условный эксперимент Φ, что для любого автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\delta,\psi)$ по результату применения Φ к любому состоянию $q\in Q$ однозначно определяется автомат $\mathfrak{A}$ даже в случае, когда начальное состояние q неизвестно. Сам эксперимент назовем тестовым для $\mathfrak{M}$. Пусть $|A|=m,\ |B|=p$ и задано некоторое натуральное n. Рассмотрим диагностируемый класс $\mathfrak{M}_n\subseteq K(A,B)$, состоящий только из автоматов с не более, чем n состояниями, и обозначим через $\ell(\mathfrak{M}_n)$ длину кратчайшего тестового эксперимента для $\mathfrak{M}_n$. Изучение явления существования тестовых экспериментов для классов автоматов, свойств этих классов, а также поведения величины $\ell(\mathfrak{M}_n)$ представляют значительный интерес в задачах исследования надёжности и контроля автоматов и реальных вычислительных машин.

Выделим диагностируемый класс автоматов. Обозначим через $Z(m,n,p)$ класс попарно неизоморфных сильно-связных приведенных автоматов из $K(A,B)$ где $|A|=m,\ |B|=p$ с не более, чем n состояниями, и пусть при этом алфавиты состояний разных автоматов не пересекаются. Имеет место следующая

Теорема 2.11 [6] Класс $Z(m,n,p)$ – диагностируемый и для величины $\ell(Z(m,n,p))$ справедливы оценки

$$m^{n-1}\leq\ell(Z(m,n,p))\leq n^{2m+2}p^{2mn}$$

Доказательство. Ясно, что класс $Z(m,n,p)$ состоит из конечного числа автоматов $\mathfrak{A}^1,\mathfrak{A}^2,\ldots,\mathfrak{A}^h$. Рассмотрим автомат $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^1+\mathfrak{A}^2+\ldots+\mathfrak{A}^h$ и покажем, что все состояния его попарно отличимы. В самом деле, если его состояния q и q' являются одновременно состояниями некоторого автомата $\mathfrak{A}^i,\ i=1,2,\ldots,h$, то утверждение очевидно. Пусть теперь q и q' являются состояниями автоматов $\mathfrak{A}^i$ и $\mathfrak{A}^j,\ j=1,\ldots,h$ и неотличимы. Тогда, в силу сильной связности, каждое состояние автомата $\mathfrak{A}^i$, очевидно, будет неотличимо от некоторого состояния автомата $\mathfrak{A}^j$ и по теореме 2.7 автоматы $\mathfrak{A}^i$ и $\mathfrak{A}^j$ неотличимы. Отсюда на основании следствия 2 заключаем, что $\mathfrak{A}^i$ и $\mathfrak{A}^j$ изоморфны, что противоречит нашему предположению. Таким образом, наше замечание доказано. Далее, в силу теоремы 2.10 для $\mathfrak{B}$ существует установочный эксперимент α. Покажем, что α одновременно является тестом для $Z(m,n,p)$. Так как $\mathfrak{B}_q$ совпадает при некотором i с $\mathfrak{A}^i_q$, то применение эксперимента к $\mathfrak{B}_q$ равносильно применению его к $\mathfrak{A}^i_q$. С другой стороны, ни одно состояние последнего не соединимо ни с одним состоянием любого автомата $\mathfrak{A}^j$ при $j\neq i$. Отсюда следует, что то известное нам заключительное состояние, в которое перейдёт автомат $\mathfrak{B}_q$, будет состоянием $\mathfrak{A}^i_q$ и однозначно определит $\mathfrak{A}^i$. Тем самым первая часть нашей теоремы доказана.

Перейдем к доказательству оценок. Пусть автомат $\mathfrak{B}$ имеет H сос-

тояний, тогда в силу теоремы 2.10 имеем: $\ell(Z(m,n,p)) \le \frac{H(H-1)}{2}$
Оценим сверху число H. Число автоматов из $Z(m,n,p)$ не превосходит числа таблиц, их задающих, то-есть величины $(np)^{mn}$. Тем самым $H \le n\cdot(np)^{mn}$ и, значит $\ell(m,n,p) \le \frac{((n(np)^{mn}-1)n(np)^{mn})}{2} \le n^{2mn+2}p^{2mn}$

Получим нижнюю оценку. Для этого рассмотрим две таблицы, приведенные на рис. 28 и с их помощью построим семейство $\mathfrak{M}$ автоматов $\mathfrak{A}$ следующим образом.

$a \backslash q$	q^1	q^2	...	q^n
a^1	q^1	q^1	...	q^1
a^2	q^1	q^1	...	q^1
⋮	⋮	⋮	...	⋮
a^m	q^1	q^1	...	q^1

$a \backslash q$	q^1	q^2	...	q^{n-1}	q^n
a^1	0	0	...	0	1
a^2	0	0	...	0	1
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
a^m	0	0	...	0	1

рис.28

Каждый автомат $\mathfrak{A}$ задается парой таблиц. Одна из них совпадает с правой таблицей рис. 28, а вторая получается из левой таблицы этого рисунка заменой в каждом j-ом столбце в точности одного состояния q^1 на q^{j+1}. На рис. 29 приведён пример такой переделанной левой таблицы.

$a \backslash q$	q^1	q^2	...	q^i	...	q^{n-1}	q^n
a^1	q^2	q^3	...	q^{i+1}	...	q^n	q^1
a^2	q^1	q^1	...	q^1	...	q^1	q^1
⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	⋮
a^m	q^1	q^1	...	q^1	...	q^1	q^1

рис.29

Ясно, что в класса $\mathfrak{M}$ содержится m^{n-1} автоматов. Каждый из автоматов семейства $\mathfrak{M}$, очевидно, сильно-связный и у каждого из них, находящегося в первый момент в состоянии q^1, на выходе появляется символ 1 только после подачи специального входного слова, шифра автомата.

Предположим теперь, что нам задан неизвестный автомат из $\mathfrak{M}$, взятый в начальном состоянии q^1 и надо определить, что это за автомат. Так как при подаче каждой буквы мы строим шифр не более, чем для одного автомата из $\mathfrak{M}$, то для установления того, что исследуемый автомат является заданным, нам надо построить эксперимент длины не меньшей, чем число всех автоматов в $\mathfrak{M}$. Таким образом, $\ell(Z(m,n,p)) \ge m^{n-1}$. Теорема доказана.

§ 4. Конечные автоматы как акцепторы.

Здесь мы рассмотрим ставшую классической для теории автоматов задачу о представлении событий автоматами.

Пусть заданы инициальный абстрактный конечный автомат $\mathfrak{A}_q=(A,Q,B,\varphi,\psi,q)$ и подмножество $B'\subseteq B$. Будем говорить, что автомат $\mathfrak{A}_q$ представляет подмножество E, $E\subseteq A^*$ с помощью выделенного подмножества B', если для любого слова α из A^* вхождение α в E эквивалентно соотношению $\psi(q,\alpha)\in B'$. Автомат $\mathfrak{A}_q$ с выделенным подмножеством B' будем обозначать через $(\mathfrak{A}_q, B')$ или через $(A,Q,B,\varphi,\psi,q,B')$. Подмножество множества A^* в дальнейшем будем называть событиями. Событие $E, E\subseteq A^*$ назовем представимым, если существуют автомат $\mathfrak{A}_q$ и $B', B'\subseteq B$ такие, что E представимо автоматом $\mathfrak{A}_q$ с помощью B', то-есть парой $(\mathfrak{A}_q,B')$ или объектом $(A,Q,B,\varphi,\psi,q,B')$. Главной нашей задачей будет описание всех представимых событий. Введем некоторые операции над событиями.

а) Объединением событий E_1 и E_2 называется множество $E_1\cup E_2$ состоящее в точности из всех тех слов α, которые входят хотя бы в одно из множеств E_1 или E_2.

б) Произведением событий E_1 и E_2 называется множество $E_1 \cdot E_2$, состоящее в точности из всех таких слов α, что для некоторых слов α_1 из E_1 и α_2 из E_2 имеет место $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$.

в) Итерацией события E называется множество E^*, состоящее при $E \neq \emptyset$ в точности из всех таких слов α, что для некторых слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ из E имеет место $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r$. Если $E = \emptyset$, то $E^* = \emptyset$

Нетрудно видеть, что операции объединения и произведения событий ассоциативны. Это позволяет использовать сокращенные обозначения $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ и $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ для выражений $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$ и $E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_n$ соответственно. Операция объединения коммуникативна, то-есть для любых событий E_1 и E_2 справедливо равенство $E_1 \cup E_2 = E_2 \cup E_1$, а операция произведения не является коммуникативной. Далее, для любого события E справедливо соотношение $(E^*)^* = E^*$, и, кроме того, полагая $E^1 = E$ и $E^n = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, где $E_i = E$ очевидно, имеем $E^* = \bigcup_{j=1}^{\infty} E^j$. Отметим наконец, что введенное нами ранее обозначение A^* согласуется с только что введенной операцией итерации. Покажем, что имеет место следующая

Лемма 1. Если события E_1 и E_2; $E_1, E_2 \subseteq A^*$ – представимые, то событие $E_1 \cup E_2$ также представимое.

Доказательство. Пусть события E_1 и E_2 представляются автоматами $\mathfrak{A}_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ и $\mathfrak{A}'_{q'} = (A, Q', B', \varphi', \psi', q')$ с помощью подмножеств $B_1, B_1 \subseteq B$ и $B'_1, B'_1 \subseteq B'$ соответственно.

Рассмотрим соответственно $\mathfrak{A}_q \times \mathfrak{A}'_{q'} = (A, Q \times Q', B \times B', (\varphi, \varphi'), (\psi, \psi'), (q, q'))$ и обозначим через $\overline{B}$ множество таких пар (b, b') из $B \times B'$, что или $b \in B_1$ или $b' \in B'_1$. Нетрудно видеть, что событие, представимое объектом $(\mathfrak{A}_q \times \mathfrak{A}'_{q'}, \overline{B})$ совпадает с событием $E_1 \cup E_2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если события E_1 и E_2; $E_1, E_2 \subseteq A^*$, представимые, то событие $E_1 \cdot E_2$ также представимое.

Доказательство. Пусть события E_1 и E_2 представляются автоматами $\mathfrak{A}_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ и $\mathfrak{A}'_{q'} = (A, Q', B', \varphi', \psi', q')$ с помощью подмножеств $B_1, B_1 \subseteq B$; $B'_1, B'_1 \subseteq B'$ соответственно. Обозначим через $2^{Q'}$ множество всех подмножеств T множества Q' и рассмотрим инициальный автомат $\tilde{\mathfrak{A}}_{(q,\emptyset)} = (A, Q \times 2^{Q'}, \{0,1\}, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, (q, \emptyset))$. Определим функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ этого автомата следующим образом: $\tilde{\varphi}((q^i, T), a) = (\varphi(q^i, a), \{\varphi'(t, a) : t \in T\} \cup \mathcal{U})$, где $q^i \in Q$ запись $\{\varphi'(t, a) : t \in T\}$ означает, что берется множество всех таких $\varphi'(t, a)$ для которых существует t из T, а $\mathcal{U}$ равно $\emptyset$, если $\psi(q^i, a) \in B \setminus B_1$ и $\mathcal{U}$ равно $\{q'\}$, если $\psi(q^i, a) \in B_1$; функция $\tilde{\psi}((q^i, T), a) = 1$ тогда и только тогда, когда существует такое t из T, что $\psi'(t, a) \in B'_1$. Покажем, что $(\tilde{\mathfrak{A}}_{(q,\emptyset)}, \{1\})$ представляет множество $E_1 \cdot E_2$. В самом деле, пусть сначала имеется слово α^p из A^*, никакое начало которого не является словом из E_1. Тогда каждое значение $\tilde{\varphi}((q, \emptyset), \alpha_r)$, где $r < p$ имеет вид $(q_j, \emptyset)$ и, значит, $\tilde{\psi}((q, \emptyset), \alpha^p) = 0$, то-есть α^p не входит в то множество, которое представляется объектом $(\tilde{\mathfrak{A}}_{(q,\emptyset)}, \{1\})$. Пусть теперь α^p имеет вид $\alpha^r \gamma^s$, где $\alpha^r \in E_1$, $s \geq 1$ и пусть $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \ldots, (r_\ell, s_\ell)$ всевозможные пары таких значений для r и s. Тогда, как нетрудно видеть, из определения автомата $\tilde{\mathfrak{A}}_{(q,\emptyset)}$ вытекает, что

$$\tilde{\varphi}((q, \emptyset), \alpha_{p-1}) = (\varphi(q, \alpha_{p-1}), \{\varphi'(q', \gamma_{s_1-1}), \varphi'(q', \gamma_{s_2-1}), \ldots, \varphi'(q', \gamma_{s_\ell-1})\})$$

и так как вычисление $\tilde{\psi}((q, \emptyset), \alpha^p)$, очевидно сводится к установлению существования в последовательности

$$\psi'(\varphi'(q', \gamma_{s_1-1}), \delta_{s_1}), \psi'(\varphi'(q', \gamma_{s_2-1}), \delta_{s_2}), \ldots, \psi'(\varphi'(q', \gamma_{s_\ell-1}), \delta_{s_\ell})$$

где δ_{s_i} последняя буква в слове γ^{s_i}; $i = 1, 2, \ldots, \ell$ хотя бы одно значе-

ния из B_1, то обращение выражения $\tilde{\psi}(\{q,\emptyset\},\alpha^p)$ в единицу эквивалентно возможности записать α^p в виде $\alpha^{\tau}\gamma^s$, где $\alpha^{\tau}\in E_1$ и $\gamma^s\in E_2$. Тем самым объект $(\mathfrak{A}(q,\emptyset),\{1\})$ представляет событие $E_1\cdot E_2$ и лемма доказана.

Лемма 3. Если событие $F\subseteq A^*$, представимое, то событие E^* также представимое.

Доказательство. Пусть событие E представимо автоматом $\mathfrak{A}_q=(A,Q,B,q,\psi,\varphi)$ с помощью подмножества $B_1, B_1\subseteq B$. Вновь обозначим через 2^Q множество всех подмножеств T множества Q и рассмотрим инициальный автомат $\tilde{\mathfrak{A}}_{\{q\}}=(A,2^Q,\{0,1\},\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\{q\})$. Определим функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ этого автомата следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(T,a)\ \{\varphi(t,a): t\in T\}\cup\mathcal{U}$$

где $\mathcal{U}$ равно $\{q\}$, если существует такое t из T, что $\psi(t,a)\in B_1$ в противном случае $\mathcal{U}$ равно $\varnothing$. Функция $\tilde{\psi}(T,a)$ равна I тогда и только тогда, когда существует такое t из T, что $\psi(t,a)\in B_1$. Покажем, что $(\tilde{\mathfrak{A}}_{\{q\}},\{1\})$ представляет событие E^*. В самом деле, пусть сначала имеется слово α^p из A^*, никакое начало которого не является словом из E. Тогда, как нетрудно видеть, $\tilde{\varphi}(\{q\},\overline{\alpha^p}_{p-1})=\{\varphi(q,\overline{\alpha^p}_{p-1})\}$ и, значит, $\tilde{\psi}(\{q\},\alpha^p)=\tilde{\psi}(\{\varphi(q,\overline{\alpha^p}_{p-1})\},\delta_p)$, где δ_p – последняя буква слова α^p. Так как $\psi(q,\alpha^p)=\psi(\varphi(q,\overline{\alpha^p}_{p-1}),\delta_p)$ и, очевидно, $\alpha^p\notin E^*$, то $\psi(q,\alpha^p)\notin B_1$, а отсюда следует, что $\tilde{\psi}(\{\varphi(q,\overline{\alpha^p}_{p-1})\},\delta_p)=0$. Тем самым слово α^p не входит в событие, представимое объектом $(\tilde{\mathfrak{A}}_{\{q\}},\{1\})$. Пусть теперь α^p имеет вид $\alpha^{\tau_1}\alpha^{\tau_2}\ \alpha^{\tau_l}\gamma^s$, где каждое слово α^{τ_i} содержится в E, а γ^s или пустое или ни одно его начало не содержится в E, а $l\geq 1$. Ясно, что тогда разложение слова α^p, вообще говоря, не однозначно. Зафиксируем какое-нибудь из них.

Как нетрудно видеть, из определения автомата $\tilde{\mathfrak{A}}_{\{q\}}$ вытекает, что множество $\tilde{\varphi}(\{q\},\overline{\alpha^p}_{p-1})$ содержит каждое из состояний $\varphi(q,\overline{\alpha^{\tau_1}\alpha^{\tau_2}\ \alpha^{\tau_l}\gamma^s}_{p-1})$, $\varphi(q,\overline{\alpha^{\tau_1}\alpha^{\tau_2}\ \alpha^{\tau_l}}_{p-1})$, $\ldots$, $\varphi(q,\overline{\alpha^{\tau_l}\gamma^s}_{p-(\tau_1+\ldots+\tau_{l-1})-1})$, $\varphi(q,\overline{\gamma^s}_{p-(\tau_1+\ldots+\tau_l)-1})$ и всякое состояние множества $\tilde{\varphi}(\{q\},\overline{\alpha^p}_{p-1})$ получается указанным образом из соответствующего представления слова α^p в виде $\alpha^{\tau_1}\alpha^{\tau_2}\ldots\alpha^{\tau_l}\gamma^s$. Заметим теперь, что вычисление значения $\tilde{\psi}(q,\alpha^p)$ сводится к установлению, существования такого разложения слова α^p в виде $\alpha^{\tau_1}\alpha^{\tau_2}\ \alpha^{\tau_l}\gamma^s$, где γ^s пусто. Если такое представление возможно, то $\tilde{\psi}(q,\alpha^p)=1$; если оно не возможно, то $\tilde{\psi}(q,\alpha^p)=0$. Тем самым $(\tilde{\mathfrak{A}}_{\{q\}},\{1\})$ представляет множество E^* и лемма доказана.

Введем индуктивно понятие регулярного множества над алфавитом $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ (для краткости – регулярные множества).

а) Каждое из множеств $\{a_i\}$, $i=1,2,\ldots,m$, а также пустое множество, являются регулярными.

б) Если множество E_1 и E_2 регулярные, то каждое из множеств $E_1\cup E_2$, $E_1\cdot E_2$, E_1^* также является регулярным.

Нетрудно видеть, что каждое из множеств $\{a_i\}$; $i=1,2,\ldots,m$ и множество являются представимыми. В самом деле, объект $(A,\{q^1,q^2\},\{0,1\},q,\psi,q_1,\{1\})$, где $\psi(q,a)=q^2$, $q\in\{q^1,q^2\}$, $a\in A$, а $\psi(q^1,a_i)=1$ и $\psi(q,a)=0$ при $(q,a)\neq(q^1,a_i)$ очевидно, представляет множество $\{a_i\}$, а объект $(A,\{1\},\{0,1\},1,0,\{1\})$ представляет пустое множество. Отсюда и из леммы $1-3$ следует справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. Каждое регулярное множество является представимым.

Покажем, что имеет место и обратное утверждение. Для этого нам понадобится ряд понятий и вспомогательных утверждений. Пусть на $A=\{a_1,\ldots,a_m\}$ задано некоторое бинарное отношение R, то есть для каждой упорядочен-

ной пары (a,b) имеет место aRb или не имеет места aRb, последнее мы обозначим через $\overline{aRb}$. Слово $\alpha = a(1)a(2)\cdot a(t)$ из A^* назовем при $t>1$ R – словом, если для любого j; $j=1,2,\ldots,t-1$ имеет место $a(j)Ra(j+1)$. При $t=1$ слово α по определению является R –словом.

Лемма 4. Пусть заданы алфавит A и бинарное отношение R на нем, тогда для любых фиксированных элементов a и b из A множество T всех R –слов из A^*, начинающихся с a и кончающихся на b, является регулярным.

Доказательство. Рассуждение будем вести с помощью индукции по числу m элементов в A.

При $m=1$ $A=\{a_1\}$. Тогда искомое множество всех R –слов совпадает, очевидно, с $\{a_1\}^*$ при условии, что R не пусто, то есть a_1Ra_1. Если же бинарное отношение R пустое, то искомое множество равно $\{a_1\}$.

Пусть теперь $m>1$ и наше утверждение доказано для всех $n, n<m$. Докажем его справедливость для алфавита A, состоящего из m букв. Рассмотрим два случая.

I) Пусть $a=b$. Тогда любое R –слово, длины большей, чем единица, из T выделением в нем всех вхождений буквы a может быть записано в виде $a\alpha_1 a\alpha_2 a\cdot a\alpha_r a$, где слово α_i может быть пустым, если справедливо aRa и в любом случае не содержит буквы a, $i=1,2,\ldots,r$. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_t$; $t\geq 0$ – все такие буквы из A, отличные от a, что имеет место aRe_j, $j=1,2,\ldots,t$ и $f_1,f_2,\ldots,f_s$, $s\geq 0$ – все такие буквы из A, отличные от a, что справедливо f_kRa; $k=1,2,\ldots,s$. Тогда любое непустое слово α_i является R –словом, начинающимся с e, $e\in\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}$, кончающимся на f, $f\in\{f_1,\ldots,f_s\}$ и не содержащим буквы a, то есть является R –словом в алфавите $A\setminus\{a\}$. По предположению индукции для каждой пары (e,f) множество B_{ef} всех таких слов является регулярным.

Указанных множеств, очевидно, конечное число l, не превосходящее ts, и пусть $B_1,B_2,\ldots,B_l$ – все эти множества. Тогда, если справедливо aRa, то множество C всех R –слов вида $a\alpha_i$, очевидно, совпадает с множеством $\{a\}\cup\{a\}\cdot(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_l)$. Если же выполнено $\overline{aRa}$, то множество C совпадает с множеством $\{a\}\cdot(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_l)$. Таким образом, множество C регулярно. Нетрудно видеть, что в обоих случаях $T=\{a\}\cup(C^*\cdot\{a\})$, то есть T является регулярным.

2) Пусть $a\neq b$. Так как пусиое множество является регулярным, то можно считать, что $T\neq\emptyset$. Тогда любое R –слово из T может быть представлено в виде $a\alpha a\gamma b$ или $a\gamma b$, где γ не содержит буквы a. Пусть $\mathcal{D}$ множество всех R –слов, начинающихся и оканчивающихся на букву a. Как показано в пункте I), это множество регулярно. Пусть $e_1,e_2,\ldots,e_t$; $t\geq 0$ – все такие буквы из A, отличные от a, что имеет место aRe_j; $j=1,2,\ldots,t$. Пусть $\mathcal{F}_{el}$ – множество всех таких R –слов, которые не содержат буквы a, начинаются на некоторую букву e из множества $\{e_1,e_2,\ldots,e_t\}$ и оканчиваются на букву b. Этих множеств, очевидно, конечное число l, $l\leq m$ и каждое из них по предположению индукции регулярно. Пусть $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\ldots,\mathcal{F}_l$ – все эти множества. Тогда, как нетрудно видеть, $T=\mathcal{D}\cdot(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2\cup\ldots\cup\mathcal{F}_l)$, то есть T – регулярное множество. Лемма доказана.

Пусть для конечного алфавита A выполнено $A=A_1\times A_2$ и $\alpha=(a^1(1),a^2(1))\cdot(a^1(t),a^2(t))$ – некоторое слово в алфавите A, где $a^1(j)\in A_1$, $a^2(j)\in A_2$; $j=1,2,\ldots,t$. Обозначим через $pr^1\alpha$ слово

$pr^{i}(1)$ 2 и назовем его проекцией слова ω на i-ую координату.

Пусть имеется множество $\omega_1 \subseteq A^*$, тогда через pr^i обозначим множество всех проекций слов из ω_1 на i-ую координату.

Лемма 5. Если множество $\omega_1 \subseteq A^*$, регулярно, то при $A = A_1 \times A_2$ множество pr^i $i = 1, 2$ также регулярно.

Доказательство этого утверждения вытекает из того, что отдельные буквы из A_i обозначают регулярные множества и из следующих легко проверяемых отношений: $pr^i(E_1 \cup E_2) = (pr^i E_1) \cup (pr^i E_2)$, $pr^i(E_1 \cdot E_2) = pr^i E_1 \cdot pr^i E_2$, $pr^i(E_1^*) = (pr^i E_1)^*$ где $E_1, E_2 \subseteq A^*$; $i = 1, 2$.

Предложение 2. Каждое представимое множество является регулярным.

Доказательство. Пусть имеется объект $(A, Q, B, \varphi, \psi, q^1, B_1)$, который представляет множество E, $E \subseteq A^*$. Обозначим через T множество $Q \times A$ и через T – множество всех пар (q, a) из $Q \times A$, таких, что $\psi(q, a) \in B_1$. На множестве T определим бинарное отношение R так, что соотношение $(q, a) R (q', a')$ справедливо точно тогда, когда $q' = \varphi(q, a)$

Для фиксированных пар (q^1, a) и (q', a') из множеств T и T' соответственно рассмотрим множество $E_{(q^1, a)(q', a')}$ всех R-слов из T^*, начинающихся с пары (q^1, a) и оканчивающихся парой (q', a'). По лемме 4 множество $E_{(q^1, a), (q', a')}$ регулярно. Варьируя пары (q^1, a) и (q', a') получим все такие множества $E_1, E_2, \ldots, E_l$, где $l \leq |A|^2 |Q|$. Далее, нетрудно видеть, что $E = \bigcup_{i=1}^{l} pr^2 E_i = pr^2 (\bigcup_{i=1}^{l} E_i)$ и, так как очевидно, множество $\bigcup_{i=1}^{l} E_i$ регулярно, то по лемме 5 множество E также регулярно. Предложение доказано.

Объединяя предложения 1 и 2 мы приходим к следующей теореме Клини ([18]), дающей исчерпывающее описание представимых событий.

Теорема 2.12. Для заданного конечного алфавита A событие $E \subseteq A^*$ является представимым тогда и только тогда, когда оно регулярно.

Отметим, что приведенное здесь доказательство теоремы Клини использовало построение работ ([10], [11]).

Ясно, что не всякое событие представимо. Так как всего событий имеется континуум, а представимых событий, очевидно, только счётное множество, то замеченное выше следует уже из мощностных соображений. На самом деле можно указать эффективные примеры событий довольно простой логической природы, которые не являются представимыми. В качестве такого примера рассмотрим множество E_0 всех слов из $\{0, 1\}^*$, длина которых равна точным квадратам натуральных чисел. Покажем, что оно не является представимым. В самом деле, рассмотрим произвольный объект (η_q, B_1) $(\{0,1\}, Q, B, \varphi, \ldots, B_1)$ в котором без ограничения общности можно считать, что $B = \{0, 1\}$ и $B_1 = \{1\}$. Если бы объект (η_q, B_1) представлял множество E_0, то применяя автомат η_q к входному сверхслову $00\ldots0$, мы, очевидно, получили бы выходное сверхслово, у которого на местах под номерами, соответствующими точным квадратам натуральных чисел, стоят единицы, а на остальных местах стоят нули, тем самым выходная последовательность была бы непериодической. С другой стороны, так как сверхслово $00\ldots0$ периодическое, то, в силу теоремы 2.1, указанное выходное сверхслово должно быть периодическим. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

В заключение опишем некоторые способы задания регулярных событий. Пусть A $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ Регулярными выражениями над A будем называть слова в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m, \emptyset, \cdot, *, (,)\}$, определяемые индуктивно следующим образом:

I/ каждая буква a_i и символ $\emptyset$ представляют собой регулярные

выражения.

2/ если α и β – регулярные выражения, то $(\alpha \cup \beta)$, $(\alpha \cdot \beta)$, $(*\alpha)$ – регулярные выражения.

Вместо $(*\alpha)$ далее используем обозначение α^*.

С каждым регулярным выражением α связано соответствующее регулярное событие $[\alpha]$:

1/ если α есть буква a_i, то $[\alpha]$ $\{a_i\}$

2/ если α есть $\emptyset$, то $[\alpha]$ $\emptyset$

3/ $[(\alpha \cup \beta)] = [\alpha] \cup [\beta]$; $[(\alpha \cdot \beta)]$ $[\alpha] \cdot [\beta]$; $[\alpha^*]$ $[\alpha]^*$

Другим способом задания регулярных событий, как следует из теоремы 2.12, служит задание при помощи представляющих их автоматов. Если регулярное событие задано своим регулярным выражением, то рассуждения, использованные при доказательстве этой теоремы, позволяют построить автомат, представляющий то же событие, и, наоборот, от задания события посредством представляющего это событие автомата перейти к заданию его регулярным выражением. Покажем, что для любого регулярного события R существует автомат с выходным алфавитом $\{0,1\}$, представляющий это событие посредством множества $\{1\}$. Действительно, если $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ – некоторый автомат, представляющий R посредством $B' \subseteq B$, то рассмотрим автомат $\mathfrak{A}' = (A, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi', q_0)$, такой, что $\psi'(q,a) = 1$ тогда и только тогда, когда $\psi(q,a) \in B'$; очевидно, он и будет искомым автоматом.

Пусть автоматы $\mathfrak{A} = (A, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q_0)$ и $\mathfrak{A}' = (A, Q', \{0,1\}, \varphi', \psi', q_0')$ представляют события R и R' соответственно посредством множества $B' = \{1\}$. Если $R \neq R'$, рассмотрим слово α, входящее в одно из этих событий и не входящее в другое; пусть для определенности $\alpha \in R$, $\alpha \notin R'$. Тогда $\psi(q_0, \alpha) = 1$; $\psi'(q_0', \alpha) = 0$ и слово α отличает состояния q_0 и q_0'. Обратно, пусть состояния q_0 и q_0' отличимы и α – кратчайшее отличающее их слово. Тогда слова $\bar{\psi}(q_0, \alpha)$ и $\bar{\psi}'(q_0', \alpha)$ должны отличаться своими последними буквами, т.е. $\psi(q_0, \alpha) \neq \psi'(q_0', \alpha)$, откуда получаем, что α входит в одно из событий R, R' и не входит в другое, т.е. $R \neq R'$. Равенство событий R и R' эквивалентно, таким образом, неотличимости состояний q_0 и q_0', а так как последняя устанавливается на входных словах длины $|Q| + |Q'| - 1$, получаем также эффективную процедуру проверки равенства регулярных событий, заданных указанным способом. Если события R и R' заданы каким-либо иным образом / при помощи регулярных выражений и т.д./, то для проверки их равенства достаточно перейти к их заданию автоматами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ указанного вида и затем выяснить, отличимы ли состояния q_0 и q_0'.

Опишем способ задания регулярных событий из A^* при помощи так называемых источников. Источник над алфавитом A представляет собой диаграмму, образованную конечным числом вершин и соединяющих эти вершины стрелок. Каждой стрелке приписана некоторая буква алфавита A; из различных вершин может выходить различное число стрелок /возможно, нулевое/, причем, выходящие из вершины стрелки не обязаны быть отмечены различными буквами из A. Допускаются также петли и параллельные стрелки. У источника выделены начальная вершина v_0, а также конечное подмножество F финальных вершин. Каждому ориентированному пути в источнике естественным образом соответствует слово, образованное буквами, приписанными проходимым стрелкам. Источник задает событие, состоящее из всех слов, соответствующих путям, начинающимся с вершины v_0 и кончающимся вершиной из множества F. Для установления регулярности этого события достаточно рассмотреть автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, \{q_0\})$, состояниями которого служат всевозможные подмножества вершин источника / включая пустое подмножество/; $\varphi(q,a)$ есть множество всех вершин, к кото-

рым от вершин множества q ведут стрелки, отмеченные буквой a, а $\psi(q,a)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(q,a)\cap F\neq\emptyset$. Нетрудно проверить, что $\varphi(\{v_0\},\alpha)$ есть множество всех вершин источника, к которым от ведет путь, отметки стрелок которого образуют слово α, так что $\mathfrak{A}$ представляет рассматриваемое событие посредством множества $\{1\}$. Обратно, пусть автомат $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ представляет событие R при помощи множества $B'\subseteq B$. Рассмотрим источник, вершины которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами множества $\{q_0\}\cup\cup\{(q_i,b_j)|q_i\in Q,\ b_j\in B\}$. Пусть из каждой вершины этого источника выходят стрелки, отмеченные всеми различными буквами $a_i\in A$, причём из вершины, соответствующей q_0, стрелке с отметкой a_i ведет к вершина, соответствующей $(\varphi(q_0,a_i),\psi(q_0,a_i))$, а из каждой вершины, соответствующей (q_i,b_j) стрелка с отметкой a_ℓ ведет к вершине, соответствующей $(\varphi(q_i,a_\ell),\psi(q_i,a_\ell))$ Тогда, если в качестве начальной вершины источника взять вершину, соответствующую q, а в качестве множества F – вершины, соответствующие парам (q_i,b_j), у которых $b_j\in B'$, то как легко заметить, построенный источник тоже будет задавать событие R.

Получаем, таким образом, что каждое регулярное событие задается некоторым источником и каждое событие, определяемое источником, регулярное. Для проверки равенства определяемых источниками регулярных событий достаточно, как это описано выше, перейти от них к соответствующим автоматам и проверить неотличимость начальных состояний.

§ 5. Конечные автоматы как сверхакцепторы.

Пусть заданы ограниченно-детерминированная функция $g(x)$, реализуемая инициальным автоматом $\mathfrak{A}_g=(A,Q,B,\varphi,\psi,q)$ и набор подмножеств $B^{(1)},B^{(2)},\ \ ,B^{(k)}$ множества B. Буква $a\in A$ называется предельной для сверхслова $\alpha^\infty=\alpha(1)\alpha(2)\ldots$, если для некоторой бесконечной последовательности $\{t_1,t_2,\ldots\}$ $\alpha(t_i)=a;\ i=1,2,\ldots$. Множество всех предельных букв образует предел сверхслова α^∞ и обозначается как $\lim(\alpha^\infty)$.

Будем говорить, что автомат $\mathfrak{A}_g$ представляет подмножество E, $E\subseteq A^\infty$ с помощью выделенного набора подмножеств $N=\{B^{(1)},B^{(2)},\ldots,B^{(k)}\}$, если для любого сверхслова α^∞ из A^∞ вхождения α^∞ в E эквивалентно соотношению $\exists i\,(\lim(\beta^\infty)=B^{(i)})$, где $\beta^\infty=g(\alpha^\infty)$

Подмножества множества A^∞ будем называть сверхсобытием. Сверхсобытие E, $E\subseteq A^\infty$ назовем представимым, если существуют автомат $\mathfrak{A}_g$ и $N=\{B^{(1)},\ \ ,B^{(k)}\}$, $B^{(i)}\subseteq B;\ i=1,\ldots,k$ такие, что E представимо автоматом $\mathfrak{A}_g$ с помощью набора $N=\{B^{(1)},B^{(2)},\ldots,B^{(k)}\}$, т.е. объектом $(A,Q,B,\varphi,\psi,q,B^{(1)},B^{(2)},\ldots,B^{(k)})$. Задача этого раздела – описание представимых сверхсобытий. Введем некоторые операции над сверхсобытиями.

а) Объединением событий E_1 и E_2 называется множество $E_1\cup E_2$ состоящее в точности из всех тех сверхслов α^∞, которые входят хотя бы в одно из множеств E_1 или E_2.

Нетрудно видеть, что эта бинарная операция ассоциативна и коммутативна, что позволяет использовать сокращенное обозначение $\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ для выражения $E_1\cup E_2\cup\ \ \cup E_n$ и не следить за порядком применения операции.

б) Пусть R – подмножество A^*. Свяжем с R унарную операцию O_R над сверхсобытиями. Сверхсобытие $O_R(E)$, $E\subseteq A^\infty$ состоит в точности из всех сверхслов α^∞ из A^∞ таких, что

$$\alpha^\infty=\beta^\tau\gamma^\infty,\ \beta^\tau\in R,\gamma^\infty\in E.$$

Если $R=\varnothing$, то $O_R(E)=\varnothing$ для любого E. Множество $O_R(E)$ будем иногда также обозначать как $R\cdot E$.

Укажем также некоторый способ "порождения" сверхсобытий. Для произвольного события $R, R\subseteq A^*$ рассмотрим сверхсобытие R^∞ состоящее в точности из всех сверхслов α^∞ из A^∞ таких, что

$$\alpha^\infty=\alpha_1^{\tau_1}\alpha_2^{\tau_2}\ldots, \text{ где } \{\alpha_i^{\tau_i};\ i=1,2,\ldots\}$$

– бесконечная последовательность слов из R. В обозначениях предыдущего параграфа, распространяя операцию произведения событий на бесконечные множества индексов, имеем $R^\infty=\prod_{i=1}^{\infty}R_i$, где $R_i=R;\ i=1,2,$

Лемма 1. Если сверхсобытия E_1 и E_2; $E_1, E_2\subseteq A^\infty$ представимые, то сверхсобытие $E_1\cup E_2$ также представимое.

Доказательство. Пусть сверхсобытия E_1 и E_2 представимы автоматами $\mathfrak{A}_q=(A,Q,B,\varphi,\psi,q)$ и $\mathfrak{A}'_{q'}=(A,Q',B',\varphi',\psi',q')$ с помощью наборов подмножеств $N_1=\{B_1,\ldots,B_{k_1}\}$ и $N_2=\{B'_1,\ldots,B'_{k_2}\}$ соответственно. Рассмотрим автомат $\mathfrak{A}_q\times\mathfrak{A}'_{q'}=(A,Q\times Q',B\times B',(\varphi,\varphi'),(\psi,\psi'),(q,q'))$ и пусть $N=\{\bar B_1,\bar B_2,\ldots,\bar B_k\}$ такой набор подмножеств множества $B\times B'$, который состоит в точности из всех подмножеств $\bar B$ для которых выполняется условие хотя бы для одного $i\in\{1,2\}$: $P_r^i(\bar B)\in N_i$.

Нетрудно видеть, что сверхсобытие, представимое объектом $(\mathfrak{A}_q\times\mathfrak{A}'_{q'}, N)$ совпадает с событием $E_1\cup E_2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если R – регулярное событие, $R\subseteq A^*$ и E – представимое сверхсобытие, то $O_R(E)$ – представимое сверхсобытие.

Доказательство. Пусть событие R и сверхсобытие E представимы объектами $(\mathfrak{A}_q, B_1)$ и $(\mathfrak{A}'_{q'}, N')$, $B_1\subseteq B$, $N'=\{B'_i\subseteq B', i=1,\ldots,k\}$ соответственно, $\mathfrak{A}_q=(A,Q,B,\varphi,\psi,q)$; $\mathfrak{A}'_{q'}=(A,Q',B',\varphi',\psi',q')$, причем $|Q'|=n$. Рассмотрим отображение $v:\underbrace{Q''\times Q''\times\ldots\times Q''}_{n+1}\to\underbrace{Q''\times Q''\times\ldots\times Q''}_{n+1}$, $Q''=Q'\cup\{\Lambda\}$, $\Lambda\notin Q'$, определенное следующим образом: пусть $(q_1,q_2,\ldots,q_{n+1})\in[Q'']^{n+1}$ и пусть i_1 – наименьший номер, такой, что $q_1\neq q_{i_1}$; i_2 – наименьший номер такой, что $q_1\neq q_{i_2}, q_{i_1}\neq q_{i_2}$; i_ℓ – наименьший номер такой, что $q_1\neq q_{i_\ell},\ldots,q_{i_{\ell-1}}\neq q_{i_\ell}$ и для каждого $j>i_\ell$ найдется $j'\le i_\ell$, такое, что $q_j=q_{j'}$. Тогда

$$v(q_1,\ldots,q_{n+1})=(q_1,\Lambda,\ldots,\Lambda,q_{i_1},\Lambda,\ldots,\Lambda,q_{i_2},\ldots,\Lambda,q_{i_\ell},\Lambda,\ldots).$$

Рассмотрим теперь объект $\mathfrak{D}_{T_0}=(A,\mathcal{T},\underbrace{B\times B''\times\ldots\times B''}_{n+1},\Phi,\Psi,T_0,N)$, где $B''=B'\cup\{\Lambda\}$, $\mathcal{T}=Q\times[Q'']^{n+1}$, $T_0=(q,\underbrace{\Lambda,\ldots,\Lambda}_{n+1})$, а функции $\Phi\Psi$ и набор N определены следующим образом. Пусть $T=(t_1,t_2,\ldots,t_{n+2})$, $t_1\in Q$, $t_i\in Q''$, $i>1$ и i_0 –наименьший номер, такой что $t_{i_0}=\Lambda$. Тогда получаем

$$\Phi(T,a)=(\varphi(t_1,a),v(\varphi'(t_2,a),\ldots,\varphi'(t_{i_0-1},a),\xi,\varphi'(t_{i_0+1},a),\ldots,\varphi'(t_{n+2},a))),$$

считая, что $\varphi'(\Lambda,a)=\Lambda$, а $\xi=q'$, если $\psi(t_1,a)\in B_1$ и $\xi=\Lambda$ в противном случае; $\Psi(T,a)=(\psi(t_1,a),\psi'(t_2,a),\ldots,\psi'(t_{n+2},a))$, считая что $\psi'(\Lambda,a)=\Lambda$. Набор N состоит в точности из всех таких множеств $\bar B\subseteq B\times[B'']^{n+1}$, что хотя бы для одного $i\in\{2,3,\ldots,n+2\}$ $P_r^i(\bar B)\in N'$. Покажем, что объект $(\mathfrak{D}_{T_0}, N)$ представляет сверхсобытие $O_R(E)$.

а) пусть $\alpha^\infty=\alpha^\tau\beta^\infty$, $\alpha^\tau\in R$, $\beta^\infty\in E$. Тогда $\psi(q,\alpha^\tau)\in B_1$. Из определения функции Φ следует, что при подаче на автомат $\mathfrak{D}$ последней буквы слова α^τ компонента ξ примет значение q'. Если для любого начала β^s сверхслова β^∞ i_0-я компонента вектора $\Phi(T_0,\alpha^\tau\beta^s)$ не равна Λ, то нетрудно видеть, что $\lim P_r^{i_0}(H(\alpha^\infty))\in N'$, где H – о.-д. функция, реализуемая автоматом $\mathfrak{D}$. Если для некоторого β^s i_0-я компонента вектора $\Phi(T_0,\alpha^\tau\beta^s)$ приняла (под действием отображения v) значе-

ния Λ, то, в силу определения υ, найдется номер $n_1 < i_0$, такой, что либо состояние компоненты с номером n_1 бесконечно долго будут принимать значения, отличные от Λ, либо найдётся номер $n_2 < n_1, \ldots$ и т.д. Этот процесс необходимо стабилизируется не некотором номере $\tilde{n}$. Компоненте с этим номером вектора $\Phi(T_0, \alpha^{\tau}\beta)$, где β – начало β^{∞} достаточной длины, будет принимать значения $\varphi'(q', \beta)$. Отсюда следует, что $\lim P_{\tau}^{\tilde{n}}(H(\alpha^{\infty})) \in N'$ т.к. $\beta^{\infty} \in E$ и для любого сверхслова β_1^{∞} такого, что $\beta^{\infty} = \gamma\beta_1^{\infty}$, $\lim h(\beta^{\infty}) = \lim h(\beta_1^{\infty})$, где h – о.-д. функция, реализуемая автоматом $\mathfrak{A}_{q'}'$.

б) Пусть, обратно, $\lim(H(\alpha^{\infty})) \in N$. Это значит, что для некоторого $i \geq 2$ $\lim P_{\tau}^{i}(H(\alpha^{\infty})) \in N'$. Так как буква Λ не принадлежит ни одному из подмножеств набора N', то, начиная с некоторого момента i-я компонента не "стирается" под действием отображения υ. Пусть d – длине наименьшего начала α^{d} сверхслова α^{∞} такая, что для любого начала $\alpha^{d'}$, $d' > d$ $P_{\tau}^{i}(\Phi(T_0, \alpha^{d'})) \neq \Lambda$. Тогда, в силу определения Φ $\Psi(q, \alpha^{d}) \in B_1$ и $\lim h(\beta^{\infty}) \in N'$, где $\alpha^{\infty} = \alpha^{d}\beta^{\infty}$. Следовательно, $\alpha^{d} \in R$ и $\beta^{\infty} \in E$. Лемма доказана.

Таким образом, определенные выше операции $\cup$ и O_R (для регулярных событий R), примененные к представимым сверхсобытиям, вновь дают представимые сверхсобытия. Сейчас мы покажем, что, порождая, как это было определено выше, из регулярных событий сверхсобытия, мы получаем также представимые сверхсобытия.

Введем вспомогательное понятие. Пусть R – некоторое событие, $R \subseteq A^*$ $\mathfrak{A}_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ – конечный автомат, и α^{∞} – сверхслово из A^{∞}. Будем говорить, что $\mathfrak{A}_q$ R – устойчив по отношению к α^{∞}, если существует бесконечно много слов $\alpha_1^{k_1}, \alpha_2^{k_2}, \ldots$, $k_1 < k_2 <$ из события R, таких, что $\alpha^{\infty} = \alpha_i^{k_i}\gamma_i\beta_i^{\infty}$, $i = 1, 2,$ и для слов γ_i $i = 1, 2, \ldots$ $\varphi(q, \alpha_i^{k_i}\gamma_i) = \varphi(q, \gamma_i)$. Обозначим через $\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$ множество всех сверхслов, по отношению к которым $\mathfrak{A}_q$ R – устойчив.

Лемма 3. Пусть R – регулярное событие, $R \subseteq A^*$, $R^* = R$ и $\mathfrak{A}_q$ – автомат, представляющий R с помощью B_1. Тогда

$$R^{\infty} = O_R[\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)] \cup \mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q).$$

Доказательство. I. Пусть $\alpha^{\infty} \in \mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$. Можно считать, что последовательность $k_1, k_2, \ldots$ выбрана так, что $\alpha_{i+1}^{k_{i+1}} = \alpha_i^{k_i}\gamma_i\delta_i$, $\delta_i \in A^*$. Для всех i имеем $\varphi(q, \alpha_i\gamma_i) = \varphi(q, \gamma_i)$, отсюда

$$\psi(q, \alpha_{i+1}) = \psi(q, \alpha_i\gamma_i\delta_i) = \psi(\varphi(q, \alpha_i\gamma_i), \delta_i) = \psi(\varphi(q, \gamma_i), \delta_i) = \psi(q, \gamma_i\delta_i)$$

т.к. $\psi(q, \alpha_{i+1}) \in B_1$, то $\psi(q, \gamma_i\delta_i) \in B_1$, следовательно $\gamma_i\delta_i \in R$. Поэтому сверхслово α^{∞} можно представить в виде

$$\alpha^{\infty} = \alpha_1^{k_1}\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2\gamma_3\delta_3\ldots, \text{ где } \gamma_i\delta_i \in R,$$

т.е. $\alpha^{\infty} \in R^{\infty}$. Но тогда для любого слова τ, $\tau \in R$, $\tau\alpha^{\infty}$ также принадлежит R^{∞}. Таким образом, $O_R[\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)] \subseteq R^{\infty}$.

2. Пусть теперь $\alpha^{\infty} \in R^{\infty}$. Тогда $\alpha^{\infty} = \tau_1\tau_2\tau_3\ldots$, $\tau_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть δ_i^{∞} – сверхслово, такое, что $\alpha^{\infty} = \tau_1\tau_2\ldots\tau_i\delta_i^{\infty}$, т.е. $\delta_i^{\infty} = \tau_{i+1}\tau_{i+2}\ldots$. Если можно указать бесконечную последовательность индексов $i_1, i_2, \ldots$, такую, что $\varphi(q, \tau_1, \ldots, \tau_{i_1}, \beta_{i_1}) = \varphi(q, \beta_{i_1})$, где β_{i_1} – начало сверхслова $\delta_{i_1}^{\infty}$, то, в силу равенства $R^* = R$, $\alpha^{\infty} \in \mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$.

Предположим, что, начиная с некоторого i_1, для любого $i \geq i_1$ и любого начала β_i сверхслова δ_i^{∞} имеет место $\varphi(q, \tau_1\ldots\tau_i\beta_i) \neq \varphi(q, \beta_i)$. Рассмотрим сверхслово $\delta_{i_1}^{\infty}$. Повторяя для него рассуждения, проведенные для α^{∞}, получим, что либо $\delta_{i_1}^{\infty} \in \mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$, и тогда $\alpha^{\infty} \in O_R[\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)]$ либо, начиная с некоторого $i_2 > i_1$ для любого $i \geq i_2$ и любого начале β_i

сверхслова δ_i^∞ будем иметь $\varphi(q, \tau_{i_1}, \tau_{i_1+1}, \quad , \tau_{i_2}\beta_i) \neq \varphi(q, \beta_i)$
В силу предположения об i_1 имеем одновременно:

$$q^1 = \varphi(q, \tau_1 \quad \tau_{i_1} \quad \tau_{i_2}\beta_{i_2}) \neq \varphi(q, \tau_{i_1}\tau_{i_1+1} \quad \tau_{i_2}\beta_{i_2}) = q^2$$
$$q^1 = \varphi(q, \tau_1 \cdot \quad \tau_{i_1} \quad \tau_{i_2}\beta_{i_2}) \neq \varphi(q, \beta_{i_2}) = q^3$$
$$q^2 = \varphi(q, \tau_{i_1}\tau_{i_1+1} \quad \tau_{i_2}\beta_{i_2}) \neq \varphi(q, \beta_{i_2}) = q^3$$

Таким образом, автомат $\mathfrak{A}_q$ имеет по крайней мере, 3 различных состояния q^1, q^2, q^3, которые мы можем ассоциировать с i_1 и i_2.

Пусть уже показано, что $\mathfrak{A}_q$ имеет по крайней мере ℓ различных состояний, ассоциированных с номерами $i_1, i_2, \dots, i_{\ell-1}$. Рассмотрим $\delta_{i_{\ell-1}}^\infty$. Либо оно принадлежит $\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$ и лемма доказана, либо, начиная с i_ℓ для любого начала β_{i_ℓ} сверхслова $\delta_{i_\ell}^\infty$ имеем:

$$q^1 = \varphi(q, \tau_1 \cdot \quad \tau_{i_\ell}\beta_{i_\ell}) \neq \varphi(q, \beta_{i_\ell}) = q^{\ell+1} \text{ (свойство } \alpha^\infty)$$
$$q^2 = \varphi(q, \tau_{i_1} \cdot \quad \tau_{i_\ell}\beta_{i_\ell}) \neq \varphi(q, \beta_{i_\ell}) = q^{\ell+1} \text{ (свойство } i_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q^\ell = \varphi(q, \tau_{i_{\ell-1}} \cdots \tau_{i_\ell}\beta_{i_\ell}) \neq \varphi(q, \beta_{i_\ell}) = q^{\ell+1} \text{ (свойство } i_{\ell-1})$$

Принимая в качестве индуктивного предположения, что $q^i \neq q^j$; $i, j \leq \ell$, $i \neq j$ получим, что $\mathfrak{A}_q$ должен иметь по крайней мере $\ell+1$ состояние. В силу конечности автомата, на некотором шаге получим $\delta_i^\infty \in \mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$
Лемма доказана.

Лемма 4. В условиях леммы 3, сверхсобытие $\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$ представимо.

Доказательство. Пусть объект $(A, Q, B, \varphi, \psi, q, B_1)$ представляет событие R, $|Q| = n$, $Q' = Q \cup \{\Lambda\}$, $\Lambda \notin Q$, буква $*$ не принадлежит множеству Q'. Пусть $\upsilon \quad [Q']^n \to [Q']^n$ – отображение, определенное в доказательстве леммы 2. Рассмотрим отображение
$W: [Q']^{n+1} \times \{\Lambda, *\} \to [Q']^{n+1} \times \{\Lambda, *\}$. Если $T = (t_1, t_2, \dots, t_{n+2})$, $t_i \in Q'$, $i \leq n+1$, $t_{n+2} \in \{\Lambda, *\}$ и для некоторого $i > 1$ $t_1 = t_i$, то $W(t_1, t_2, \quad , t_{n+1}, t_{n+2}) = (t_1, \Lambda, \dots, \Lambda, *)$.
В противном случае $W(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, t_{n+2}) = (t_1, \upsilon(t_2, \dots, t_{n+1}), \Lambda)$.
Рассмотрим автомат $\mathcal{D}_{T_0} = (A, \mathcal{T}, \{0,1\}, \varphi', \psi', T_0)$,
где $\mathcal{T} = [Q']^{n+1} \times \{\Lambda, *\}$, $T_0 = (q, \Lambda, \dots, \Lambda)$, а функции φ', ψ' определены следующим образом. Пусть $T = (t_1, t_2, \dots, t_{n+1}, t_{n+2})$ и i – наименьший номер, такой, что $t_i = \Lambda$. Тогда

$$\varphi'(T, a) = W[\varphi(t_1, a), \dots, \varphi(t_{i-1}, a), \xi, \varphi(t_{i+1}, a), \dots, \varphi(t_{n+1}, a), t_{n+2}]$$

считая, что $\varphi(\Lambda, a) = \Lambda$ и $\xi = \begin{cases} q, & \text{если } \psi(t_1, a) \in B_1 \\ \Lambda & \text{в противном случае} \end{cases}$;

$\psi'(T, a) = 0 \Leftrightarrow t_{n+2} = *$.
Покажем, что объект $(\mathcal{D}_{T_0}\ \{0\}, \{0,1\})$ представляет сверхсобытие $\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$. Заметим, что сверхслово α^∞ представимо в этом объекте тогда и только тогда, когда выходное сверхслово содержит бесконечно много нулей.

а) Пусть $\alpha^\infty = \mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$. Тогда нетрудно видеть, что каждая пара $\alpha_i^{k_i}, \beta_i$ (см. определение множества $\mathcal{U}(R, \mathfrak{A}_q)$) порождает в некоторый момент равенство $t_1 = t_j$, $j > 1$, т.к. $\psi(q, \alpha_i^{k_i}) \in B_1$ и следовательно $\xi \neq \Lambda$, а $t_1 = \varphi(q, \alpha_i^{k_i}\beta_i) = \varphi(q, \beta_i) = t_{j'}$, $j' > 1$.
Поэтому на выходе $\mathcal{D}_{T_0}$ бесконечно много раз возникает буква 0.

б) Пусть выходная последовательность содержит бесконечно много нулей. Рассмотрим два момента d_1, d_2, в которые появляются нули. При появлении первого нуля $\mathcal{D}_{T_0}$ перейдет из состояния $(t_1, \Lambda, \dots, \Lambda, *)$ в некоторое другое состояние T. Теперь непустая компонента в векторе T появится лишь в случае, если α^∞ имеет начало $\alpha^{d'}$, $d' > d$, такое, что $\psi(q, \alpha^{d'}) \in B_1$. Кроме того, чтобы значение t_1 и t_i совпали, α^∞

должно иметь начало $\alpha^{d'}\beta$ такое, что $\varphi(q,\alpha^{d'}\beta)=\varphi(q,\beta)$. В противном случае, в момент d_2 не появится 0 на выходе. Таким образом, $\mathfrak{A}_q$ R - устойчив по отношению к α^{∞}. Лемма доказана.

Лемма 5. Если R - регулярное событие, то сверхсобытие R^{∞} представимо.

Доказательство. Следует из лемм $2,3,4$.

Введем индуктивно понятие общерегулярного множества (сверхслов) над алфавитом $A=\{a_1, \quad , a_m\}$ (для краткости - общерегулярные множества).

а) Для любого регулярного события R, $R\subseteq A^*$ множество R^{∞} является общерегулярным.

б) Если множества E_1, E_2 общерегулярны, то множество $E_1\cup E_2$ также является общерегулярным.

в) Если E - общерегулярное множество, а R - регулярное событие, $R\subseteq A^*$, то $\mathcal{O}_R(E)$ - общерегулярное множество, (в других обозначениях, $R\cdot E$ - общерегулярное множество).

В силу леммы 5, каждое общерегулярное множество вида R^{∞}, где R - регулярное событие, является представимым. Отсюда, а также из лемм 1 и 2 следует справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. Каждое общерегулярное множество сверхслов является представимым.

Покажем, что имеет место и обратное утверждение. Для этого воспользуемся некоторыми фактами, доказанными в предыдущем параграфе, и докажем ряд вспомогательных лемм.

Пусть на $A=\{a_1, \quad , a_m\}$ задано бинарное отношение R. Как было ранее показано, множество всех R -слов из A^*, начинающихся с некоторой буквы $a\in A$ и оканчивающихся буквой $b\in A$, регулярно.

Лемма 6. Множество всех R -слов, начинающихся с a и кончающихся b, каждое из которых содержит все буквы подалфавита A_1 - регулярно.

Доказательство. Пусть $A^1, A^2, \quad , A^l$ - собственные подалфавиты алфавита A, содержащие целиком A_1 и содержащие как a, так и b. Обозначим через $S, S^1, \quad , S^l$ множества всех R -слов, начинающихся с a, кончающихся буквой b в алфавитах $A, A^1, \quad , A^l$ соответственно. Рассмотрим последовательность множества:

$$C_1=S\setminus S^1,\ C_2=C_1\setminus\{C_1\cap S^2\},$$
$$C_i=C_{i-1}\setminus\{C_{i-1}\cap S^i\},\quad i=3, \quad ,l$$

Каждое из множеств $S, S^i; i=1, \quad , l$ - регулярно. Пересечение двух регулярных множеств также является регулярным. В самом деле, в силу теоремы Клини, регулярные множества представимы. Пусть объекты $(\mathfrak{A}_q, B_1)$ и $(\mathfrak{A}'_{q'}, B'_1)$ представляют множества R_1 и R_2, соответственно. Тогда объект $(\mathfrak{A}_q\times\mathfrak{A}'_{q'}, B_1\times B'_1)$ представляет множество $R_1\cap R_2$. Пусть теперь R_1, R_2 - регулярные множества, и $R_2\subseteq R_1$. Тогда, если $(\mathfrak{A}_q, B_1)$ и $(\mathfrak{A}'_{q'}, B'_1)$ представляют R_1 и R_2, соответственно, то объект $(\mathfrak{A}_q\times\mathfrak{A}'_{q'}, \bar{B}_1)$, где $\bar{B}_1=B_1\times\{B'\setminus B'_1\}$ представляет множество $R_1\setminus R_2$. Применяя снова теорему Клики, получаем, что $R_1\cap R_2$ и $R_1\setminus R_2$ регулярны. Из доказанного следует регулярность множеств $C_1, C_2, \quad , C_{l-1}$. Нетрудно видеть, что C_{l-1} есть множество, удовлетворяющее условиям леммы. Лемма доказана.

Рассмотрим объект $(A, Q, B, \varphi, \psi, q, B_1, \quad , B_k)$, $B_i\subseteq B$, $i=1,2,\ldots,k$, $Q=\{q_1, q_2, \quad , q_n\}$. Для произвольных $i,j\in\{1, \quad , n\}$, $s\in\{1,2,\ldots,k\}$ рассмотрим множество слов R^s_{ij} из A^*:

$$R^s_{ij}=\{\alpha\in A^*\mid \varphi(q_i,\alpha)=q_j,\ \bar{\psi}(q_i,\alpha)\in B_s^*$$, и слово $\bar{\psi}(q_i,\alpha)$ содержит все буквы $B_s\}$.

Лемма 7. Множества R^1_{ij}, $i,j=1,\ \ ,n$, $s=1,\ \ ,k$ регулярны.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ троек (a,q,b) таких, что $\psi(a,q)=b$, $b\in B_s$. На множестве $\mathcal{T}$ зададим бинарное отношение R такое, что $(a,q,b)\,R\,(a',q',b')$ тогда и только тогда, когда $\varphi(q,a)=q$. Пусть $\mathcal{T}_d\subseteq\mathcal{T}$ – произвольный подалфавит, такой, что $Pr^3(\mathcal{T}_d)=B_s$. Тогда для любых двух троек $t=(a,q,b)$, $t'=(a',q',b')$ из $\mathcal{T}$ множества V_d R-слов, начинающихся с t, кончающихся t' и содержащих все буквы $\mathcal{T}_d$ – регулярно. Поэтому регулярно и множество $V=\bigcup_{d=1}^{n}V_d$. Пусть $\overline{V}$ есть объединение множеств V по всевозможным парам a,a' при фиксированных q_i,q_j. Нетрудно видеть, что $R^1_{ij}=Pr^1(\overline{V})$. Лемма доказана.

Предложение 2. Каждое представимое сверхсобытие является общерегулярным.

Доказательство. Пусть E, $E\subseteq A^\infty$ – представимое множество сверхслов, и объект $(A,Q,B,\varphi,\psi,q,B_1,\ \ ,B_k)$ представляет E. Очевидно, что $E=\bigcup_{i=1}^{k}E_i$, где множество E_i представимо объектом $(A,Q,B,\varphi,\psi,q,B_i)$. Пусть $\alpha^\infty\in E_i$. Сверхслово α^∞ порождает в автомате $\mathfrak{A}_q$ сверхслово состояний $q^\infty=q(1)q(2)\ldots$, и пусть $\lim q^\infty=Q_j\subseteq Q$. "Пропуская" разные сверхслова из E_i через автомат, мы будем получать сверхслова состояний с теми или иными пределами. Пусть $Q^i_1,\ \ ,Q^i_{s_i}$ – всевозможные пределы, полученные таким образом. Обозначим через E^j_i, $E^j_i\subseteq E_i$ множество всех сверхслов, породивших сверхслова состояний с пределом Q^i_j, $Q^i_j=\{q^1_{ij},\ \ldots,q^{n_{ij}}_{ij}\}$. Для каждого сверхслова α^∞ из E^j_i можно указать бесконечную последовательность множеств слов $M_i=\{\alpha^i_{12},\alpha^i_{23},\ \ ,\alpha^i_{n_{ij}1}\}$, $i=1,2,$ и слово α_0 такую, что $\varphi(q,\alpha_0)=q^1_{ij}$ и для всех $l=1,2,$ $\varphi(q^d_{ij},\alpha^l_{dd+1})=q^{d+1}_{ij}$, $d=1,2,\ldots,n_{ij}-1$, $\varphi(q^{n_{ij}}_{ij},\alpha^l_{n_{ij}1})=q^1_{ij}$, причем α^∞ представляется в виде:

$$\alpha^\infty=\alpha_0\,\alpha^1_{12}\,\alpha^1_{23}\quad\alpha^1_{n_{ij}1}\,\alpha^2_{12}\quad\alpha^2_{n_{ij}1}\,\alpha^3_{12}\cdot$$

Заметим, что при этом слова $\alpha^l_{s,s+1}$ можно выбрать так, что (в силу $\alpha^\infty\in E_i$) $\overline{\psi}(q^s_{ij},\alpha^l)\in B^*_i$ и содержит все буквы из B_i. Таким образом, теперь каждое слово $\alpha^l_{s,s+1}$ переводит автомат из состояния q^s_{ij} в состояние q^{s+1}_{ij} и порождает на выходе слово, содержащее все буквы B_i, поэтому $\alpha^l_{s,s+1}\in R^i_{i,j,s,s+1}$ (множество, определенное в лемме 7)
Следовательно, $\alpha^\infty\in\alpha_0\cdot(R^i_{i,j,1,2}\cdot R^i_{i,j,2,3}\cdot\ \ \cdot R^i_{i,j,n_{ij},1})^\infty$
Если обозначить через H^1_{ij} множество слов $\{\alpha_0\,|\,\varphi(q,\alpha_0)=q^1_{ij}\}$, которое, очевидно, является регулярным, то

$$E^j_i\subseteq H^1_{ij}\cdot(R^i_{i,j,1,2}\cdot R^i_{i,j,2,3}\quad R^i_{i,j,n_{ij},1})^\infty\subseteq E_i.$$

Последнее включение имеет место, так как каждое сверхслово из $H^1_{ij}\cdot(R^i_{i,j,1,2}\cdot\ \ \cdot R^i_{i,j,n_{ij},1})^\infty$ порождает на выходе такое сверхслово β^∞, что $\lim\beta^\infty=B_i$. (Заметим, что, вообще говоря, сверхслово из $H^1_{ij}\cdot(R^i_{i,j,1,2}\cdot R^i_{i,j,n_{ij},1})^\infty$) порождает сверхслово состояний, предел которого содержит, а не в точности совпадает с множеством Q^i_j). В заключение имеем

$$E_i\subseteq\bigcup_{j=1}^{s_i}E^j_i\subseteq\bigcup_{j=1}^{s_i}H^1_{ij}\,(R^i_{i,j,1,2}\cdot\quad R^i_{i,j,n_{ij},1})^\infty\subseteq E_i.$$

Отсюда E_i, $i=1,\ \ ,k$ – общерегулярные множества, а вместе с ними $E=\bigcup_{i=1}^{k}E_i$ – общерегулярно.

Объединяя предложения 1,2, получаем теорему.

Теорема 2.13 [9] Множество сверхслов является представимым тогда и только тогда, когда оно является общерегулярным.

Пусть B – конечный алфавит; B^* – множество слов в этом алфавите. Множество $\mathcal{D} \subseteq B^*$ называется автоматно-перечислимым / или перечислимым конечным автоматом/, если существует инициальный конечный автомат $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, такой, что для любого $\beta \in \mathcal{D}$ существует слово α в алфавите A, такое, что $\bar{\psi}(q_0, \alpha) = \beta$, и для любого $\alpha \in A^*$ $\bar{\psi}(q_0, \alpha) \in \mathcal{D}$.

Справедлива следующая

Теорема 2.14. Пусть B – конечный алфавит. Множество $\mathcal{D} \subseteq B^*$ автоматно-перечислимо тогда и только тогда, когда это множество регулярно и обладает следующими свойствами:

а) если слово принадлежит $\mathcal{D}$, то любое его собственное начало также принадлежит $\mathcal{D}$.

б) если слово β длины p принадлежит $\mathcal{D}$, то существует слово β' длина которого равна $p+1$, и такое, что его собственное начало длины p совпадает со словом β

Доказательство. Пусть множество $\mathcal{D}$ перечислимо в конечном автомате $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$. Рассмотрим диаграмму переходов $\mathcal{D}_{\mathfrak{A}}$ автомата $\mathfrak{A}$. Вычеркнем первую координату в каждой паре, приписанной ребрам этой диаграммы. В результате такого вычеркивания получим некоторый источник $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}$ с начальной вершиной, соответствующей состоянию q_0, и множеством финальных вершин, совпадающим со множеством всех его вершин, который задает событие $\mathcal{D}$. Следовательно, событие $\mathcal{D}$ регулярно. Выполнение условий а) и б) очевидно.

Пусть теперь множество $\mathcal{D}$ регулярно, причем выполнены условия а) и б). В силу регулярности $\mathcal{D}$ существует источник $\mathcal{U}$ с начальной вершиной v_0 и множеством F финальных вершин, представляющий событие $\mathcal{D}$. Построим источник $\mathcal{U}'$, вершинами которого служат всевозможные подмножества вершин источника $\mathcal{U}$, причем начальной вершиной служит $\{v_0\}$, а финальными вершинами – все такие подмножества M, что $M \cap F \neq \emptyset$. Из каждой вершины V_1 источника $\mathcal{U}'$ для каждого символа $b \in B$ выходит единственное ребро с отметкой b, которое ведет к вершине V_2, представляющей собой множество всех вершин источника $\mathcal{U}$, к которым от вершин множества V_1 ведут ребра с отметкой b. Как нетрудно заметить, источник $\mathcal{U}'$ обладает следующими свойствами:

I) для любого слова $\beta \in B^*$ существует не более одного маршрута, начинающегося с вершины $\{v_0\}$, отметки ребер которого образуют данное слово β.

2) вершина V, к которой от $\{v_0\}$ ведет маршрут, отметки ребер которого образуют слово β, представляет собой множество всех вершин источника $\mathcal{U}$, к которым от вершины v_0 ведут маршруты, соответствующие данному слову β

В силу свойства 2 и определения множества F' финальных вершин источника $\mathcal{U}'$ заключаем, что $\mathcal{U}'$ определяет то же регулярное событие $\mathcal{D}$, что и источник $\mathcal{U}$. Рассмотрим множество Φ' вершин источника $\mathcal{U}'$, принадлежащих всевозможным маршрутам, ведущим от $\{v_0\}$ к финальным вершинам этого источника. Множество Φ' вершин источника $\mathcal{U}'$ вместе с соединяющими их ребрами образует подисточник $\mathcal{U}''$ источника $\mathcal{U}'$ / с теми же начальной вершиной $\{v_0\}$ и множеством финальных вершин F' /, задающий то же событие $\mathcal{D}$, что и $\mathcal{U}'$ причем для $\mathcal{U}''$ выполнено свойство $\underline{I}$. Пусть $\{v_0\} = V_0, V_1, \ldots, V_n$ – некоторый маршрут в $\mathcal{U}''$, ведущий к финальной вершине V_n. Тогда из свойств I и а) вытекает, что все вершины $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$ тоже финальные, так что $\Phi' = F'$. С другой стороны, из свойств I и б) вытекает, что из каждой вершины источника $\mathcal{U}''$ выходит хотя бы одно ребро. Эти свойства источника $\mathcal{U}''$ позволяют рассматривать его как результат применения к диаграмме некоторого конечного ав-

томата $\mathfrak{A}$ процедуры вычеркивания первых координат пар, сопоставленных ребрам этой диаграммы, описанной при доказательстве необходимости. Автомат $\mathfrak{A}$ и будет искомым автоматом, перечисляющим множество $\mathcal{D}$.

Рассмотрим ещё одну задачу, связанную с распознаванием перечислительных возможностей конечных автоматов. Пусть $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ – некоторый не инициальный конечный автомат. Обозначим $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ множество всех слов $\beta\in B^*$, для которых существуют $q\in Q$ и $\alpha\in A^*$, такие, что $\beta=\bar{\psi}(q,\alpha)$. Если $\mathcal{F}(\mathfrak{A})=B^*$, то автомат $\mathfrak{A}$ назовем генератором выходных последовательностей /или, коротко, просто генератором/. Если $\mathfrak{A}$ не является генератором, то обозначим $\ell(\mathfrak{A})$ длину кратчайшего слова, входящего в $B^*\setminus\mathcal{F}(\mathfrak{A})$. Обозначим также $L(m,n,p)=\max\limits_{|A|=m,\,|Q|=n,\,|B|=p}\ell(\mathfrak{A})$, где максимум берется по всем конечным автоматам, у которых алфавиты A, Q, B состоят из m,n,p символов соответственно. Очевидно, что автомат с параметрами m,n,p является генератором тогда и только тогда, когда на его выходе можно получить произвольное слово из B^* длины $L(m,n,p)$, и этим обстоятельством можно пользоваться для распознавания автоматов-генераторов. Займемся получением оценок для функции $L(m,n,p)$. Заметим прежде всего, что число слов длины ℓ в $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ не превосходит числа различных выборов $q\in Q$ и $\alpha^\ell\in A^*$, т.е. не превосходит nm^ℓ. Поэтому, если $\mathfrak{A}$ – генератор, то для любого ℓ имеем:

$$nm^\ell\geq p^\ell \tag{1}$$

так что $m\geq p$. При $m<p$ $\mathfrak{A}$ не является генератором; в этом случае из (1) находим $L(m,n,p)\leq 1+\left[\dfrac{\ln n}{\ln p-\ln m}\right]$.

С произвольным автоматом $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ свяжем помеченные ориентированные графы $G(\mathfrak{A})$ и $\bar{G}(\mathfrak{A})$. Граф $G(\mathfrak{A})$ имеет своими вершинами элементы Q. Из вершины q_1 ведет ребро к вершине q_2, помеченное символом $b\in B$, если существует такое $a\in A$, что $q_2=\varphi(q_1,a)$ $b=\psi(q_1,a)$. Допускаются параллельные ребра, помеченные различными символами из B. Вершинами графа $\bar{G}(\mathfrak{A})$ являются всевозможные непустые подмножества множества Q. Пусть $S\subseteq Q$ – вершина графа $\bar{G}(\mathfrak{A})$ и $b\in B$. Рассмотрим множество $b(S)$ вершин графа $G(\mathfrak{A})$, к которым от вершин из S ведут ребра, помеченные символом b. Если $b(S)\neq\varnothing$, то в $\bar{G}(\mathfrak{A})$ от вершины к вершине $b(S)$ проводится ребро, помеченное символом b. Вершину графа $\bar{G}(\mathfrak{A})$, соответствующую множеству Q, далее обозначаем V_0.

Лемма 1. Слово β принадлежит множеству $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда в графе $\bar{G}(\mathfrak{A})$ существует начинающийся с вершины V_0 маршрут, отметки ребер которого образуют слово β.

Доказательство. Пусть $\beta=b(1)b(2)\ldots b(\ell)$. Заметим, что $b(1)(V_0)$ есть множество всех состояний, в которых может оказаться $\mathfrak{A}$ после того, как на его выходе появилась буква $b(1)$; $b(2)(b(1)(V_0))$ – множество состояний, в которых может оказаться $\mathfrak{A}$ после появления на выходе слова $b(1)b(2)$, и т.д. Таким образом, непустота множества $b(\ell)(b(\ell-1)(\ldots(b(1)(V_0))\ldots))$, с одной стороны, означает, что слово β может быть получено на выходе автомата $\mathfrak{A}$, т.е. $\beta\in\mathcal{F}(\mathfrak{A})$, а с другой стороны – эквивалентна существованию в графе $\bar{G}(\mathfrak{A})$ маршрута указанного вида.

Теорема 2.15. [12]. Имеет место неравенство $L(m,n,p)\leq 2^{n-1}$.

Доказательство. Пусть автомат $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$; $|A|=m$, $|Q|=n$, $|B|=p$ – не является генератором. Рассмотрим кратчайшее слово β, входящее в $B^*\setminus\mathcal{F}(\mathfrak{A})$. Очевидно, слово $\beta'=b(1)\ldots b(\ell(\mathfrak{A})-1)$ принадлежит $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$. В силу леммы в графе $\bar{G}(\mathfrak{A})$ существует маршрут $x_1V_1x_2\ldots x_{\ell(\mathfrak{A})-1}V_{\ell(\mathfrak{A})-1}$, отметки ребер которого образуют слово β'

причем из вершины $V_{\ell(\mathfrak{A})-1}$ не выходит ребра, отмеченного символом $b(\ell(\mathfrak{A}))$ Легко видеть, что этот маршрут является кратчайшим маршрутом от V_0 к вершинам графа $\bar{G}(\mathfrak{A})$, из которых ведут ребра, отмеченные не всеми символами алфавита B. В таком маршруте должны отсутствовать циклы, так что все вершины $V_0, V_1, \ldots, V_{\ell(\mathfrak{A})-1}$ различны и имеем неравенство $\ell(\mathfrak{A}) \le 2^n - 1$ где 2^n-1 – число вершин в графе $\bar{G}(\mathfrak{A})$, что и доказывает теорему.

Теорема 2.16. Пусть $p \ge n$, $m \ge p+n-2$. Тогда

$$L(m,n,p) = 2^n - 1.$$

Доказательство. Построим граф $G(\mathfrak{A})$ некоторого автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ с $|A|=m, |Q|=n$ и $|B|=p$. Пусть $Q=\{q_1,\ldots,q_n\}$, $B=\{b_1,\ldots,b_p\}$. Ребра графа таковы $G(\mathfrak{A})$:

а) ребра, помеченные b_j, где $1 \le j \le n$

(q_i, q_i) при $j<n$; $j+1 \le i \le n$,

(q_i, q_j) при $j>1$; $1 \le i \le j-1$

(q_j, q_i) –"–"–"–"–"–"–"–"–"–"–"–"–"–"–"–"–

б) ребра, помеченные b_j, где $n+1 \le j \le p$

(q_i, q_i) при $1 \le i \le n$

На рис. 30 указан $G(\mathfrak{A})$ для $p=n=3$, $m=4$

рис.30

Сопоставим произвольной вершине $V=\{q_{i_1},\ldots,q_{i_s}\}$ графа $\bar{G}(\mathfrak{A})$ / $i_1 < \ldots < i_s$ / номер $N(V)$:

$$N(V) = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\sigma_i$$

, где $\sigma_i = 1$, если $q_i \in V$ и $\sigma_i = 0$ в противном случае. Заметим, что наибольший номер 2^n-1 имеет вершина $V_0 = \{q_1,\ldots,q_n\}$, а наименьший, равный I – вершина $V^* = \{q_1\}$. Пусть V – некоторая вершина графа $\bar{G}(\mathfrak{A})$, имеющая номер $N(V)>1$. Тогда $V=\{q_{i_1},\ldots,q_{i_s}\}$ где $i_1<\ldots<i_s$, $s \ge 1$, $i_s>1$. Так как в графа $G(\mathfrak{A})$ для любого b_i из вершины q_{i_s} при $i_s>1$ ведет ребро с отметкой b_i, то для любого b_i и в графе $\bar{G}(\mathfrak{A})$ из V ведет ребро с отметкой b_i. Покажем, что при $i \ne i_1$ выполняется $N(b_i(V)) \ge N(V)$, а при $i=i_1$ $N(b_i(V))=N(V)-1$ Если $i>n$, то, как легко проверить, $b_i(V)=V$, и это утверждение верно. Точно так же $b_i(V)=V$ при $i<i_1$. Если $i_1<i\le n$, то рассмотрим два случая: $q_i \notin V$ и $q_i=q_{i_p}$. В первом случае $b_i(V)=\{q_i, q_{i_\tau},\ldots,q_{i_s}\}$ где τ – наименьшее, для которого $i_\tau>i$. Ясно, что в этом случае выполняется $N(b_i(V)) > N(V)$. Во втором случае

$$b_i(V) = \{q_1, q_2, \ldots, q_{i_p}, q_{i_{p+1}}, \ldots, q_{i_s}\}$$

и снова $N(b_i(V)) \ge N(V)$. Если, наконец, $i=i_1$, то $b_i(V) = \{q_1, \ldots, q_{i_1-1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_s}\}$

и $N(b_i(V))=N(V)-1$. Из доказанного утверждения вытекает, что для получения кратчайшего маршрута $V_0, x_1, V_1, \ldots, x_\ell, V_\ell = V^*$, соединяющего вершину V_0 графа $\bar{G}(\mathfrak{A})$ с вершиной V^*, на каждом шаге ребро x_i следует выбирать так, чтобы выполнялось $N(V_i)=N(V_{i-1})-1$ при этом длина маршрута ℓ равне 2^n-2. Пусть $b_{i_1}, \ldots, b_{i_\ell}$ – отметки ребер этого маршрута, тогда, так как в $\bar{G}(\mathfrak{A})$ из вершины V^* не выходит ребра с отметкой b_1, слово $b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_\ell}b_1$ не принадлежит $F(\mathfrak{A})$, и $\mathfrak{A}$ – не генератор. Очевидно, что построенное слово является кратчайшим в $B^* \setminus F(\mathfrak{A})$, т.е. $\ell(\mathfrak{A})=2^n-1$. Но $L(m,n,p) \ge \ell(\mathfrak{A})$, так что, учитывая теорему 2.15, получаем $L(m,n,p)=2^n-1$

что и требовалось.

В случае $p<n$ нижняя оценка для $L(m,n,p)$ устанавливается значительно сложнее, чем в теореме 2.16, причем снова оказывается, что $L(m,n,p)$ – величина, близкая к 2^n:

Теорема 2.17. Пусть $p\geq 12, p<n$ и $m\geq p+16\left[\frac{p-3}{9}\right]^2$. Тогда $L(m,n,p)>2^n(1-2^{1-[\frac{p-3}{9}]})$.

Доказательство. Пусть параметры m,n,p удовлетворяют условиям теоремы. Построим, как и при доказательстве теоремы 2.16, граф $G(\mathfrak{A})$ некоторого автомата $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi)$, такого, что $|A|=m, |Q|=n, |B|=p$. Положим: $B=\{b_1,\ \ ,b_p\}$; $Q=\{q\}\cup\bigcup_{i=0}^{r}Q_i$, где $Q_0=\{q_{01},\ \ ,q_{0t}\}$; $Q_i=\{q_{i1},\dots,q_{ih}\}$ при $1\leq i\leq r$. Здесь $h=2[\frac{p-3}{9}]\geq 2$, где s – остаток от деления $n-1$ на h. Очевидно, $r=[\frac{n-1}{h}]-1\geq 3$, $t=h+s$, $t<2h=4[\frac{p-3}{9}]$. Ребра графа $G_{\mathfrak{A}}$ таковы:

а) ребра, помеченные символом b_1:

(q,q_{rk}) при $2\leq k\leq h$; (q_{ij},q_{rk}) при любых допустимых i и j и $2\leq k\leq h$.

б) ребра, помеченные b_2:

(q,q_{rk}) при $2\leq k\leq h$; $(q_{ij},q_{i-1,j})$ при $1\leq i\leq r, 1\leq j\leq h$, (q_{0i},q_{rj}) при $1\leq i\leq t$; $2\leq j\leq h$; (q_{ik},q_{rj}) при $1\leq i\leq r$, $1\leq k\leq h$, $1\leq j\leq l$

в) ребра, помеченные b_j $(3\leq j\leq t+2)$:

(q,q_{rk}) при $2\leq k\leq h$; (q_{0k},q_{0k}) при $j<t+2$, $j-1\leq k\leq t$, $(q_{0k},q_{0,j-2})$ при $j>3, 1\leq k\leq j-2$; (q_{ik},q_{ik}) при $1\leq i\leq r$; $1\leq k\leq h$; $(q_{0,j-2},q_{0k})$ при $j>3, 1\leq k<j-3$; (q_{ik},q) при $1\leq i\leq r$, $1\leq k\leq h$.

г) ребра, помеченные b_j $(t+3\leq j\leq 2t+2)$:

(q,q_{rk}) при $2\leq k\leq h$; (q_{0k},q_{0k}) при $j<2t+2$, $j-t-1\leq k\leq t$; $(q_{0k},q_{0,j-t-2})$ при $j>t+3, 1\leq k\leq j-t-3$; $(q_{0,j-t-2},q_{0k})$ при $t+3<j<l+t+3, 1\leq k\leq j-t-3$, а также при $1\leq i\leq r$, $1\leq k\leq h$; (q_{ik},q_{ik}) при $1\leq i\leq r, 1\leq k\leq l$ (q_{ik},q_{ru}) при $1\leq i\leq r$, $l+1\leq k\leq h$, $2\leq u\leq l$.

д) ребра, помеченные b_{2t+3}:

(q,q); $(q_{ik},q_{i+1,k})$ при $0\leq i\leq r-1$, $1\leq k\leq h$; (q_{ri},q_{rk}) при $l+1\leq i\leq h$, $2\leq k\leq h$, (q_{ik},q_{0j}) при $1\leq i\leq r$, $1\leq k\leq h$, $1\leq j\leq t$.

е) ребра, помеченные b_j $(2t+4\leq j\leq 2t+l+3)$:

(q_{ik},q_{ik}) при любых i и k; $(q_{r,j-2t-3},q_{ri})$ при $2\leq i\leq h$.

ж) ребра, помеченные b_j $(2t+l+4\leq j\leq p)$:

(q,q); (q_{ik},q_{ik}) при любых i и k.

Здесь $l=[\frac{p-3}{9}]$, т.е. $1\leq l<h$. Имеем:

$$2t+l+3<9\left[\frac{p-3}{9}\right]+3\leq p.$$

Можно проверить, что из каждой вершины графа $G_{\mathfrak{A}}$ выходит не менее одного и не более $p+2th$ ребер. Но $p+2th\leq p+16\left[\frac{p-3}{9}\right]^2\leq m$, так что автомат $\mathfrak{A}$ с параметрами m,n,p, определяющий данный граф $G_{\mathfrak{A}}$, действительно существует.

Занумеруем все подмножества множества Q_i / $0\leq i\leq r$ / Именно, если $P\subseteq Q_i$, то положим $M(P)=\sum_{j=1}^{|Q_i|}2^{j-1}\gamma_j$, где $|Q_i|$ – число элементов в Q_i, γ_j есть 1 при $q_{ij}\in P$ и $\gamma_j=0$ в противном случае. Далее, занумеруем все подмножества множества $Q\setminus\{q\}$. Если $P=\bigcup_{i=0}^{r}R_i$, $R_i\subseteq Q_i$, то $N(P)=\sum_{i=0}^{r}2^{\mu_i}M(R_i)$, где $\mu_0=0$, а при $i\geq 1$ $\mu_i=\sum_{k=0}^{i-1}|Q_k|$. Нетрудно проверить следующие свойства операторов $b_j(P)$:

а) для любого $P\subseteq Q$, $P\neq\emptyset$, имеем: $b_1(P)=\{q_{r2},\ \ ,q_{rh}\}$.

б) если $q\in P$ или $q_{0i}\in P$, то $b_2(P)\supseteq\{q_{r2},\dots,q_{rh}\}$. Если эти включения не выполнены, то $b_2(P)=P'\cup\{q_{r1},\dots,q_{rl}\}$, где P' состоит из всех таких q_{ij}, что $q_{i+1,j}\in P$.

в) пусть $3 \le j \le t+2$. Если $q \in P$, то $b_j(P) \ge \{q_{r2}, \dots, q_{rk}\}$. Пусть $q \notin P$ и $P = P_1 \cup P_2$, где $P_1 \subseteq Q_0$, $P_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} Q_i$. Пусть $b_j(P) = P_1' \cup P_2' \ne \emptyset$, где $P_1' \subseteq Q_0$, $P_2' \subseteq Q \setminus Q_0$. Если $P_i = \emptyset$, то и $P_i' = \emptyset$. Пусть $P_2 \ne \emptyset$. Тогда $P_2' = P_2 \cup \{q\}$. Пусть $P_1 \ne \emptyset$. Представим P_1 в виде $\{q_{0i_1}, \dots, q_{0i_s}\}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_s$. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, можно убедиться, что $M(P_1') < M(P_1)$ лишь при $j = i_1 + 2$ причем в этом случае $M(P_1') = M(P_1) - 1$.

г) пусть $t+3 \le j \le 2t+2$. Если $q \in P$ либо $q_{ik} \in P$ при $i \ge 1$ $k \ge l+1$, то $b_j(P) \ge \{q_{r2}, \dots, q_{rk}\}$. Если эти включения не выполнены, то представим P в виде $P_1 \cup P_2$, где $P_1 \subseteq Q_0$, $P_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{t} Q_i$. Пусть $b_j(P) = P_1' \cup P_2' \ne \emptyset$, где $P_1' \subseteq Q_0$, $P_2' \subseteq Q \setminus Q_0$. Если $P_i = \emptyset$, то и $P_i' = \emptyset$. Пусть $P_2 = \emptyset$. Тогда $P_2' = P_2 \cup \{q\}$. Пусть $P_1 \ne \emptyset$; $P_1 = \{q_{0i_1}, \dots, q_{0i_s}\}$ где $i_1 < i_2 < \dots < i_s$. Тогда $M(P_1^1) < M(P_1)$ лишь при $j = t + i_1 + 2$, причем в этом случае $M(P_1') = M(P_1) - 1$ при $i_1 \le l$, а при $i_1 > l$ $M(P_1') = M(P_1) - 2$.

д) если $q_{ri} \in P$ при $i_1 \ge l+1$, то $b_{2t+3}(P) \ge \{q_{r2}, \dots, q_{rk}\}$. Если же для каждого $i \ge l+1$ $q_{ri} \in P$ и $P \cap \bigcup_{i=1}^{t} Q_i \ne \emptyset$, то $b_{2t+3}(P) = P' \cup \{q_{01}, \dots, q_{0t}\} \cup (\{q\} \cap P)$, где P' состоит из таких q_{ij}, что $q_{i-1,j} \in P$.

е) пусть $2t+4 \le j \le 2t+l+3$. Тогда $b_j(P) \supset \{q_{r2}, \dots, q_{rk}\}$ если $q_{r,j-2t-3} \in P$ и $b_j(P) = P \setminus \{q\}$ в противном случае.

ж) если $l+2t+4 \le j \le p$, то $b_j(P) = P$.

Предположим, что $\beta = b(1) \dots b(k)$ – кратчайшее слово, принадлежащее множеству $B^* \setminus \mathcal{F}(\mathfrak{A})$, и установим, какой вид должно иметь такое слово. Слово $\beta' = b(1) \dots b(k-1)$ принадлежит множеству $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$, так что для него существует начинающийся с вершины $V_0 = Q$ маршрут в графе $\bar{G}(\mathfrak{A})$, отметки ребер которого образуют слово β'; пусть этот маршрут μ есть $V_0, x_1, V_1, \dots, x_{k-1}, V_{k-1}$. В силу того, что μ – кратчайший маршрут в $\bar{G}(\mathfrak{A})$ ведущий от вершины V_0 к вершинам, из которых выходят ребра, отмеченные не всеми символами B, при $i < j$ не может иметь место включение $V_i \subseteq V_j$. Имеем $b_1(V_0) = \{q_{r2}, \dots, q_{rk}\}$, а при $j \ne 1$ $b_j(V_0) \supset b_1(V_0)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $b(1) = b_1$, $V_1 = b_1(V_0) = \{q_{r2}, \dots, q_{rk}\}$. Так как $V_j \ne \emptyset$, то $b_1(V_j) = V_1$, т.е. при $i > 1$ $b(i) \ne b_1$. Кроме того, $b_i(V_j) = V_j$ при $i \ge 2t+l+4$, так что $b(j) \ne b_i$ при $i \ge 2t+l+4$.

Пусть K – множество всех $P \subseteq Q \setminus \{q\}$, таких, что $\{q_{r1}, \dots, q_{rl}\} \setminus P_r \ne \emptyset$ и $P_r \setminus \{q_{r1}, \dots, q_{rl}\} \ne \emptyset$ где $P_r = P \cap Q_r$, причем $N(P) \le N(V_1) = 2^{n-1} - 2^{n-k}$.

Ясно, что число элементов в K равно $2^{n-k-1}(2^k - 2^{k-l} - 2^l) + 1 = 2^{n-1}(1 - 2^{1-l})$ причем элемент K с наименьшим номером есть $\{q_{r,l+1}\}$, $N(\{q_{r,l+1}\}) = 2^{n+l-k-1} = 2^{n-l-1}$. Пусть $V_i \in K$, $N(V_i) > 2^{n-l-1}$, причем доказано, что каждое $V \in K$ с номером $N(V) \ge N(V_i)$ есть V_j при некотором $j \le i$. Для $i = 1$ это очевидно, верно. Положим:

$$V_i = \bigcup_{q=1}^{s} P_{i_q}, \quad P_{i_q} \ne \emptyset; \quad P_{i_q} = V_i \cap Q_{i_q}; \quad i_1 < \dots < i_s \qquad (2)$$

Очевидно, $i_s = r$, причем, при некотором $\tau \ge l+1$ $q_{r\tau} \in V_i$. Пусть $i_1 > 0$. Тогда $V_i \cap Q_0 = \emptyset$, и в силу свойства в) при $3 \le j \le t+2$ $b_j(V_i) = V_i \cup \{q\}$, а так как $q_{r\tau} \in V_i$ и $\tau \ge l+1$, то в силу свойства г) при $t+3 \le j \le 2t+2$ имеем $b_j(V_i) \ge V_1$. В силу свойства д) $b_{2t+3}(V_i) \ge V_1$, а в силу свойства е) при $2t+4 \le j \le 2t+l+3$ либо $b_j(V_i) \ge V_1$, либо $b_j(V_i) = V_i$. Итак, при $j \ne 2$ либо $b_j(V_i) \supset V_1$, либо $b_j(V_i) \ge V_i$. Поэтому $b(i+1) = b_2$ и V_{i+1} в силу свойства б) есть

$$\bigcup_{q=1}^{s} P_{i_q}^{(1)} \cup \{q_{r1}, \dots, q_{rl}\},$$

где $P_{i_q}^{(1)}$ состоит из всех $q_{i_q-1,j}$, таких, что $q_{i_q,j} \in P_{i_q}$. Пусть уже доказано для $a > 0$:

$$V_{i+a} = \bigcup_{q=1}^{s} P_{i_q}^{(a)} \cup \bigcup_{\tau=\tau-a+1}^{\tau} R_\tau,$$

где $R_\tau = \{q_{\tau 1} \quad q_{\tau \ell}\}$, а $P_{i_q}^{(a)}$ состоит из всех $q_{i_q - a, j}$, таких, что $q_{i_q, j} \in P_{i_q}$.

Пусть, кроме того, $i_1 - a > 0$. Тогда, при $3 \le j \le t+2$ $b_j(V_{i+a}) \ge V_1$; при $j = 2t+3$ $b_j(V_{i+a}) \ge V_{i+a-1}$; при $t+3 \le j \le 2t+2$ $b_j(V_{i+a}) \ge V_1$. Поэтому $b(i+a-1) = b_2$ при $2t+4 \le j \le 2t+\ell+3$ $b_j(V_{i+a}) \ge V_1$. Поэтому $b(i+a-1) = b_2$

$$V_{i+a+1} = \bigcup_{q=1}^{s} P_{i_q}^{(a+1)} \cup \bigcup_{\tau=\tau-a}^{\tau} R_\tau$$

Таким образом, $b(i+a) = b_2$ при $1 \le a \le i_1$;

$$V_{i+i_1} = \bigcup_{q=1}^{s} P_{i_q}^{(i_1)} \cup \bigcup_{\tau=\tau-i_1+1}^{\tau} R_\tau \qquad (3)$$

/Заметим, что при $i_1 = 0$ это равенство тоже верно/.

Пусть сначала $s > 1$. Тогда $i_1 < \tau$ и V_{i+i_1} содержит элемент $q_{\tau - i_1, j}$ для некоторого $j > \ell$, так что по свойству г) при $t+3 \le j \le 2t+2$. Так как существует $q_{0\lambda} \in P_{i_1}^{(i_1)} \subseteq V_{i+i_1}$, то в силу свойства б) $b_2(V_{i+i_1}) \ge V_1$. Далее, при $i_1 > 0$ $b_{2t+3}(V_{i+i_1}) \ge V_{i+i_1-1}$ а при $i_1 = 0$ $b_{2t+3}(V_{i+i_1}) \ge V_1$. При $2t+4 \le j \le 2t+\ell+3$ либо $b_j(V_{i+i_1}) \ge V_1$ либо $b_j(V_{i+i_1}) \ge V_{i+i_1}$. Поэтому остается лишь возможность $b(i+i_1+1) = b_j$ при $3 \le j \le t+2$. Пусть $P_{i_1}^{(i_1)} = \{q_{0k_1}, \dots, q_{0k_\tau}\}$. Тогда $b(i+i_1+1)(P_{i_1}^{(i_1)}) = P_0^* \subseteq Q_0$ причем $M(P_0^*) \ge M(P_{i_1}^{(i_1)})$ для всех j кроме $j = k_1+2$, а при $j = k_1+2$ $M(P_0^*) = M(P_{i_1}^{(i_1)}) - 1$.

Итак

$$V_{i+i_1+1} = \{q\} \cup P_0^* \cup \bigcup_{\tau=\tau-i_1+1}^{\tau} R_\tau \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q}^{(i_1)} \qquad (4)$$

Так как $q \in V_{i+i_1+1}$, то $b(i+i_1+1)$ есть либо b_{2t+3}, либо b_j $2t+4 \le j \le 2t+\ell+3$, ибо в противном случае имели бы $V_{i+i_1+2} \ge V_1$. Если $i_1 > 0$, то V_{i+i_1+1} содержит $R_\tau = \{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau \ell}\}$, так что для любого, такого, что $2t+4 \le j \le 2t+\ell+3$, имеем $b_j(V_{i+i_1+1}) \ge V_1$. В этом случае, следовательно, $b(i+i_1+2) = b_{2t+3}$ и

$$V_{i+i_1+2} = \{q\} \cup P_1^* \cup \bigcup_{\tau=\tau-i_1+2}^{\tau} R_\tau \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q}^{(i_1-1)} \cup Q_0,$$

где P_1^* состоит из всех q_{1i}, таких, что $q_{0i} \in P_0^*$.

Пусть для $a > 0$ доказано:

$$V_{i+i_1+a+1} = \{q\} \cup \bigcup_{\tau=0}^{a-1} Q_\tau \cup P_a^* \cup \bigcup_{\tau=\tau-i_1+a+1}^{\tau} R_\tau \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q}^{(i_1-a)},$$

где P_a^* состоит из всех q_{ai}, таких, что $q_{0i} \in P_0^*$. Пусть $i_1 - a > 0$. Так как $q \in V_{i+i_1+a+1}$, то $b(i+i_1+a+2)$ есть либо b_{2t+3}, либо b_j при некотором $j \in \{2t+4, \dots, 2t+\ell+3\}$. Но $R_\tau \subseteq V_{i+i_1+a+1}$, так что $b(i+i_1+a+2)$ есть b_{2t+3} и V_{i+i_1+a+2} есть

$$\{q\} \cup P_{a+1}^* \cup \bigcup_{\tau=0}^{a} Q_\tau \cup \bigcup_{\tau=\tau-i_1+a+2}^{\tau} R_\tau \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q}^{(i_1-a-1)}$$

Таким образом, при $i_1 > 0$:

$$V_{i+2i_1+1} = \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q} \cup \bigcup_{\tau=0}^{i_1-1} Q_\tau \cup P_{i_1}^* \cup \{q\}.$$

При $i_1 = 0$ имеем из (4):

$$V_{i+1} = \{q\} \cup P_0^* \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q}$$

Так как $i_s = \tau$, $V_i \in K$, то P_{i_s} содержит $\alpha_{\tau j}$ при $j > \ell$. Следовательно, $b_{2t+3}(V_{i+2i_1+1}) \ge V_1$. Поэтому $b(i+2i_1+2)$ есть b_j при некотором $j \in \{2t+4, \dots, 2t+\ell+3\}$. Так как $\{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau \ell}\} \setminus P_{i_s} \ne \emptyset$, то существует $\tau \le \ell$: $\alpha_{\tau\tau} \notin P_\tau$. Для любого такого τ:

$$V_{i+2i_1+2} = b_{2t+3+\tau}(V_{i+2i_1+1}) = V_{i+2i_1+1} \setminus \{q\}.$$

Так как $s > 1$ и $V_i \in K$, то $M(P_\tau) < 2^h - 2$, т.е. $N(V_{i+2i_1+2}) < N(V_i)$ и $V_{i+2i_1+2} \in K$. Нетрудно проверить, что $N(V_{i+2i_1+2}) \ge N(V_i)$ при $M(P_{i_1}^*) = M(P_0^*) \ge M(P_{i_1})$, чего быть не может. Следовательно, $M(P_{i_1}^*)$ должно быть меньше $M(P_{i_1})$, что возможно только при $b(i+2i_1+2) = b_{k_1+2}$, в этом случае $M(P_{i_1}^*) = M(P_{i_1}) - 1$ и $N(V_{i+2i_1+2}) = N(V_i) - 1$. Очевидно, каждое V из K такое, что $N(V) \ge N(V_{i+2i_1+2})$ есть V_j при некотором $j < i+2i_1+2$ (см. (2)), то существует $\delta \ge 2$. Таким образом, если $V_i \in K$, $s > 1$, для которого $V_{i+\delta} \in K$; $N(V_{i+\delta}) = N(V_i) - 1$.

Пусть теперь $s=1$. Из (3) находим:

$$V_{i+\tau} = P_\tau^{(\tau)} \cup \bigcup_{\tau} R_\tau.$$

Легко проверить, что $b(i+\tau+1)^{\tau=}$ есть b_j $(3 \le j \le 2t+2)$. Пусть $P_\tau^{(\tau)} = \{q_{0k_1}, \dots, q_{0k_\tau}\}$. При $3 \le j \le t+2$ $M(b_j(P_\tau^{(\tau)})) \ge M(P_\tau^{(\tau)})$, если $j = k_1+2$ и $M(b_{k_1+2}(P_\tau^{(\tau)})) = M(P_\tau^{(\tau)})-1$. Кроме того, при $t+3 \le j \le 2t+2$, $j \ne t+k_1+2$ также имеет место неравенство $M(b_j(P_\tau^{(\tau)})) \ge M(P_\tau^{(\tau)})$. При $k_1 \le \ell$ $b_{t+k_1+2}(P_\tau^{(\tau)}) = b_{k_1+2}(P_\tau^{(\tau)})$, $M(b_{t+k_1+2}(P_\tau^{(\tau)}) = M(P_\tau^{(\tau)})-1$. При $k_1 > \ell$ $b_{t+k_1+2}(P_\tau^{(\tau)}) = \{q_{02}, \dots, q_{0,k_1-1}, q_{0k_2}, \dots, q_{0k_\tau}\}$

$$M(b_{t+k_1+2}(P_\tau^{(\tau)}) = M(P_\tau^{(\tau)})-2.$$

Итак, $V_{i+\tau+1} = b_j(V_{i+\tau})$ при $3 \le j \le 2t+2$, т.е.

$$V_{i+\tau+1} = \{q\} \cup P_0^* \cup \bigcup_{\tau=1}^{\tau} R_\tau,$$

где $P_0^* \subseteq Q_0$, $P_0^* = b_j(P_\tau^{(\tau)})$, причем $M(P_0^*) < M(P_\tau^{(\tau)}) = M(P_\tau)$ только при $b(i+\tau+1) = b_{k_1+2}$ либо $b(i+\tau+1) = b_{t+k_1+2}$. Как и выше в случае $s>1$, можно показать:

$$V_{i+2\tau+1} = \{q\} \cup P_\tau^* \cup \bigcup_{\tau=0}^{\tau-1} R_\tau,$$

где P_τ^* состоит из всех $q_{\tau j}$, для которых $q_{0j} \in P_0^*$, причем $b(i+\tau+a+1)$ при $1 \le a \le \tau$ есть b_{2t+3}. Так как $N(v_i) > 2^{n-\ell-1} = N(\{q_{\tau,\ell+1}\})$, то либо $\tau > 1$, $k_\tau \ge \ell+1$, либо $\tau = 1$, $k_\tau > \ell+1$. В обоих случаях $P_\tau^* \setminus \{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau\ell}\} \ne \emptyset$. Поэтому $b(i+2\tau+2) \ne b_{2t+3}$. Предположим, что $P_0^* \supseteq \{q_{01}, \dots, q_{0\ell}\}$. Тогда $P_\tau^* \supseteq \{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau\ell}\}$. Как установлено, $b(i+2\tau+2)$ есть b_j для некоторого $j \in \{2t+4, \dots, 2t+\ell+3\}$. Но для любого такого j имеем: $b_j(\{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau\ell}\}) \ge V_1$. Поэтому включение $P_0^* \supseteq \{q_{01}, \dots, q_{0\ell}\}$ невозможно, так что при $k_1 > \ell$ $b(i+\tau+1) \ne b_{k_1+2}$, а так как при $k_1 \le \ell$ $b_{k_1+2}(V_{i+\tau}) = b_{k_1+t+2}(V_{i+\tau})$, то можно полагать $b(i+\tau+1) \ne b_{k_1+2}$ при любом k_1. Допустим, что $b(i+\tau+1) \ne b_{t+k_1+2}$. Тогда $M(P_\tau^*) = M(P_0^*) \ge M(P_\tau)$. Так как $\{q_{01}, \dots, q_{0\ell}\} \setminus P_0^* \ne \emptyset$, то для каждого $j \in \{2t+4, \dots, 2t+\ell+3\}$ такого, что $q_{0,j-2t-3} \notin P_0^*$, имеем:

$$V_{i+2\tau+2} = b_j(V_{i+2\tau+1}) = P_\tau^* \cup \bigcup_{\tau=0}^{\tau-1} R_\tau.$$

Заметим, что $P_\tau^* \setminus \{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau\ell}\} \ne \emptyset$, $\{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau\ell}\} \setminus P_\tau^* \ne \emptyset$. Очевидно, что либо $M(P_\tau^*) < 2^{k}-2$, либо $P_\tau^* \supseteq V_1$. В первом случае $N(V_{i+2\tau+2}) < N(V_1)$, так что $V_{i+2\tau+2} \in K$ и $N(V_{i+2\tau+2}) \ge N(V_i)$ ибо $M(P_\tau^*) \ge M(P_\tau)$, чего быть не может. Во втором случае $V_{i+2\tau+2} \supseteq V_1$ чего тоже быть не может. Таким образом, необходимо

При $k_1 \le \ell$ имеем:

$$V_{i+2\tau+2} = \{q_{\tau 1}, \dots, q_{\tau,k_1-1}, q_{\tau k_2}, \dots, q_{\tau k_\tau}\} \cup \bigcup_{\tau=0}^{\tau-1} R_\tau.$$

Нетрудно проверить, что $V_{i+2\tau+2} = K$ и $N(V_{i+2\tau+2}) = N(V_i)-1$.

При $k_1 > \ell$

$$V_{i+2\tau+2} = \{q_{\tau 2}, \dots, q_{\tau,k_1-1}, q_{\tau k_2}, \dots, q_{\tau k_\tau}\} \cup \bigcup_{\tau=0}^{\tau-1} R_\tau.$$

т.е. $V_{i+2\tau+2}$ есть элемент K с наибольшим номером, меньшим $N(V_i)$

$$N(V_{i+2\tau+2}) = N(V_i) - 2^{n-k-1} - 1.$$

Итак, из последовательности $V_0, V_1, \dots, V_{k-1}$ можно выделить подпоследовательность $V_{i_1}, \dots, V_{i_\nu}$, такую, что $\{V_{i_1}, \dots, V_{i_\nu}\} = K$, причем $V_{i_{j+1}}$ есть элемент K с наибольшим номером, меньшим $N(V_{i_j})$. Кроме того, $i_{j+1} \ge i_j+2$ так что $i_\nu \ge 2\nu-1$ и $k-1 \ge 2\nu-1$; $k \ge 2\nu$ откуда $k \ge 2^n(1-2^{1-\ell})+1 \ge 2^n(1-2^{1-\ell})$. Нами установлено, что если множество $B^* \setminus F(\mathfrak{A})$ непусто, то длина любого слова из этого множества не меньше, чем $2^n(1-2^{1-\ell})$. Для установления непустоты множества $B^* \setminus F(\mathfrak{A})$ построим маршрут в $\bar{G}(\mathfrak{A})$, ведущий от V_0 к вершине, из которой не выходит ребро с некоторой отметкой. Мы уже установили, что в $\bar{G}(\mathfrak{A})$ существует маршрут от V_0 к вершине $\{q_{\tau,\ell+1}\}$. Имеем:

$$b_2^{\tau}(\{q_{\tau,\ell+1}\})\ \{q_{0,\ell+1}\};\ b_{t+\ell+3}(\{q_{0,\ell+1}\}) = \{q_{02}, \dots, q_{0\ell}\},$$

$$\xi = b^{\ell}(\{q_{02}, \dots, q_{0\ell}\}) = \{q_{\tau 2}, \dots, q_{\tau\ell}\} \cup \bigcup_{\tau=0}^{\tau} R_\tau$$

Пусть доказано существование пути из V_0 в $V \subseteq Q \setminus \{q\}$, причем

$1 < N(V) \le N(\xi)$. Пусть $V = \bigcup_{q=1}^{s} P_{i_q}$; $P_{i_q} \ne \emptyset$; $P_{i_q} \subseteq Q_{i_q}$.

Имеем: $b_2^{i_1}(V) = \bigcup_{q=1}^{s} P_{i_q}^{(i_1)} \cup \bigcup_{\tau=\tau-i_1+1}^{\tau} R_\tau$

если $P_{i_1}^{(i_1)} = \{q_{0k_1}, \quad q_{0k_\tau}\}$, то $V' = b_{k_1+2}(b_2^{i_1}(V)) = P_0^* \cup \{q\} \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q}^{(i_1)} \cup \bigcup_{\tau=\tau-i_1+1}^{\tau} R_\tau$,

причем $M(P_0^*) = M(P_{i_1}) - 1$ и $V_s' \ne \emptyset$, так как $N(V) > 1$

$$V'' = b_{2t+3}^{i_1}(V') = P_{i_1}^* \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q} \cup \bigcup_{\tau=0}^{i_1-1} R_\tau \cup \{q\}$$

Нетрудно проверить, что $N(V'' \setminus \{q\}) = N(V) - 1 < N(\xi)$, т.е. $\{q_{r1}, \ldots, q_{rl}\} \setminus V'' \ne \emptyset$ и существует $j \in \{2t+4, \ldots, 2t+l+3\}$ для которого

$$V''' = b_j(V'') = P_{i_1}^* \cup \bigcup_{q=2}^{s} P_{i_q} \cup \bigcup_{\tau=0}^{i_1-1} R_\tau \subseteq Q \setminus \{q\},$$

причем $N(V''') = N(V) - 1$. Итак, существует маршоут из V_0 в $\{q_{01}\}$, но из $\{q_{01}\}$ не выходит ребро, помеченное b_3, что и требовалось. Таким образом, автомат $\mathfrak{A}$ не является генератором и при m, n, p, удовлетворяющих условию теоремы, имеем

$$L(m,n,p) \ge l(\mathfrak{A}) > 2^n(1-2^{1-l}) \doteq 2^n\left(1-2^{1-\left[\frac{p-3}{9}\right]}\right),$$

что и требовалось доказать.

§ 7. Взаимодействие конечных автоматов и конечные автоматы в лабиринтах

Пусть $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ – произвольный инициальный конечный автомат и $\mathfrak{A}' = (B, Q', A, \varphi', \psi', q_0')$ – инициальный конечный автомат Мура, т.е. $\psi' = \psi'(q')$. Взаимодействием автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ назовем последовательность (q_0, q_0', a_0, b_0), (q_1, q_1', a_1, b_1), , такую, что $a_0 = \psi'(q_0')$, $b_0 = \psi(q_0, a_0)$,

$q_{i+1} = \varphi(q_i, a_i)$; $q_{i+1}' = \varphi'(q_i', b_i)$; $a_{i+1} = \psi'(q_{i+1}')$; $b_{i+1} = \psi(q_{i+1}, a_{i+1})$.

Эта последовательность, как нетрудно заметить, описывает поведение системы, возникающей при соединении выхода автомата $\mathfrak{A}$ со входом автомата $\mathfrak{A}'$ и входа $\mathfrak{A}$ с выходом $\mathfrak{A}'$. Заметим, что если не требовать, чтобы автомат $\mathfrak{A}'$ был автоматом Мура, то при определении выходных сигналов автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ в момент t возникает логический круг: выходной сигнал $\mathfrak{A}$ определяется в зависимости от выходного сигнала $\mathfrak{A}'$ в тот же момент, и наоборот, выходной сигнал $\mathfrak{A}'$ в момент t определяется в зависимости от выходного сигнала $\mathfrak{A}$ в момент t.

При рассмотрении взаимодействия двух автоматов естественным образом возникает следующее понятие управления. Пусть $S \subset A$. Скажем, что автомат $\mathfrak{A}$ S-управляет автоматом $\mathfrak{A}'$, если во взаимодействии этих автоматов на выходе автомата $\mathfrak{A}'$ в некоторый момент возникает сигнал из множества S. Автомат $\mathfrak{A}'$ назовем S-управляемым, если существует слово $\beta \in B^*$, такое, что $\psi'(q_0', \beta) \in S$.

Покажем, что взаимодействие автоматов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ можно представить как процесс прохождения автомата $\mathfrak{A}$ по некоторому лабиринту, а управление автоматом $\mathfrak{A}'$ – как отыскание автоматом $\mathfrak{A}$ выхода из этого лабиринта.

Пусть A и B – конечные непустые множества. Назовем ориентированным (A,B) – лабиринтом конечный орграф L с выделенной вершиной O и выделенным подмножеством $S' \subset A$, для которого выполнены следующие условия:

а) каждой вершине v сопоставлен символ $\rho(v) \in A$.

б) каждому ребру сопоставлен символ из B, причем различным ребрам выходящим из вершины, сопоставлены различные символы.

в) множество $\theta(v)$ отметок ребер, выходящих из вершины v, однозначно определяется по отметке a этой вершины: $\theta(v)=\gamma(a)$.

г) существует путь от вершины O к вершине, отмеченной символом из множества S.

Вершина O называется началом лабиринта; любая вершина, отмеченная символом из S, называется выходом из лабиринта.

Скажем, что конечный инициальный автомат $\mathfrak{A}=(A,Q,B,\varphi,\psi,q_0)$ является допустимым для лабиринта L, если выполняется условие

$$\forall q\in Q \quad \forall a\in A \ (\psi(q,a)\in\gamma(a)).$$

Если автомат $\mathfrak{A}$ допустим для ориентированного лабиринта L, то поведением $\mathfrak{A}$ в L назовем бесконечную последовательность вида $(q_0,v_0,a_0,b_0),(q_1,v_1,a_1,b_1),\ldots$ где $v_0=O$; $a_i=\rho(v_i)$; $b_i=\psi(q_i,a_i)$; $q_{i+1}=\varphi(q_i,a_i)$ и v_{i+1} есть вершина, к которой от v_i ведет ребро с отметкой b_i. Если хотя бы одна из вершин v_i в этой последовательности является выходом из L, то говорим, что $\mathfrak{A}$ обходит L.

Сопоставим произвольному управляемому инициальному автомату Мура $\mathfrak{A}=(B,Q',A,\varphi',\psi',q_0')$ с выделенным подмножеством S выходных символов ориентированный лабиринт $L(\mathfrak{A}')$, получающийся из диаграммы Мура автомата $\mathfrak{A}$, если в ней у каждой стрелки оставить лишь отметку входного сигнала и каждой вершине приписать соответствующий выходной сигнал. Началом этого лабиринта служит вершина, соответствующая состоянию q_0'; выходом – каждая вершина с отметкой из S.

Очевидно, взаимодействие любого автомата $\mathfrak{A}$ с автоматом $\mathfrak{A}'$ совпадает с поведением автомата $\mathfrak{A}$ в лабиринте $L(\mathfrak{A}')$, причем $\mathfrak{A}$ S-управляет автоматом $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обходит лабиринт $L(\mathfrak{A}')$. Обратно, если задан некоторый ориентированный (A,B)-лабиринт L, то сопоставим ему автомат Мура $\mathfrak{A}'=(B,Q',A,\varphi',\psi',O)$, множеством состояний Q' которого служит множество вершин L; $\varphi'(q,b)$ определяется как вершина, в которую из q ведет ребро с отметкой b, если $b\in\theta(q)$ и $\varphi'(q,b)=q$ в противном случае; $\psi'(q)$ есть отметка вершины q и O – начало L. Очевидно, что любой автомат, обходящий L, S-управляет автоматом $\mathfrak{A}'$, и по любому автомату, S-управляющему автоматом $\mathfrak{A}'$, легко построить автомат, обходящий L.

Таким образом, задачи построения автомата, управляющего данным автоматом и автомата, обходящего данный ориентированный лабиринт, оказываются в определенном смысле эквивалентными. Поведение автоматов в лабиринтах было впервые рассмотрено Шенноном [13] и изучалось затем в работах [14,15]. В настоящем параграфе мы рассмотрим лишь одну из исследовавшихся задач, связанную с поведением автоматов в плоских прямоугольных лабиринтах. Поведем необходимые определения. Пусть $B=\{w,n,s,e\}$; положим $w^{-1}=e$, $e^{-1}=w$, $n^{-1}=s$, $s^{-1}=n$. Пусть A есть множество всех пар вида (M,μ), где M – непустое подмножество множества B и $\mu\in\{0,1\}$. Лабиринтами далее будем называть лишь такие ориентированные (A,B)-лабиринты, для которых выполняются условия:

1) если из вершины v_1 к вершине v_2 ведет ребро с отметкой x, то из v_2 к v_1 ведет ребро с отметкой x^{-1}.

2) если множество отметок ребер, выходящих из вершины v, есть $\theta(v)$ то отметка этой вершины v имеет вид $(\theta(v),\mu)$.

3) S есть множество отметок вида $(M,1)$, причем в лабиринте существует единственная вершина, отмеченная символом из S. Эту вершину далее обозначаем T и называем выходом из лабиринта.

Лабиринт L называется плоским, если вершинами его являются точки

плоскости с целыми координатами, причем ребро, выходящее из вершины (i,j) может вести лишь к одной из четырех вершин, указанных на рис. 31 и имеет своей отметкой символ соответствующего направления (рис. 31).

рис.31

Плоский лабиринт назовем правильным, если существует путь, ведущий по ребрам целочисленной решетки, начинающийся с T, не пересекающийся далее с вершинами и ребрами L и уводящий сколь угодно далеко от L. Автомат, допустимый для лабиринтов рассматриваемого вида, называем мышью.

Имеет место следующая теорема, доказанная Л.Будахом [15]. В связи с тем, что изложенное в [15] доказательство теоремы занимает около 170 страниц, ниже приводится значительно упрощенный вариант её доказательства.

Теорема 2.18 [16] Для любой мыши $\mathfrak{M}$ можно построить правильный лабиринт, который этой мышью не обходится.

Доказательство. Введем сначала ряд вспомогательных понятий. Обозначим R множество всех непустых слов $p = x_1, \ldots x_n$ над B, таких, что $\forall i$ $(x_{i+1} \neq x_i^{-1})$. Положим $p^{-1} = x_n^{-1} \ldots x_1^{-1}$. Конечный орграф L с выделенными вершинами O и T, ребрам которого сопоставлены слова из R, назовем квазилабиринтом, если выполнены следующие условия:

а) слова, сопоставленные различным ребрам, выходящим из одной вершины начинаются с различных символов.

б) если из v_1 в v_2 ведет ребро, которому сопоставлено слово p, то из v_2 в v_1 ведет ребро, которому сопоставлено слово p^{-1}.

в) существует путь от вершины O к вершине T.

Как и в случае лабиринтов, O называется началом, T – выходом из L.

Пусть в квазилабиринте L от вершины u к вершине v ведет ребро, отмеченное словом $p = x_1 \ldots x_n$ где $n > 1$. Тогда от v к u ведет ребро, отмеченное словом p^{-1}. Удалим из L эти два ребра и вместо них присоединим к L цепочку, изображенную на рис.32 / $w_1, \ldots, w_{n-1}$ –новые вершины/.

рис.32

Проделав эту операцию над всеми ребрами L, а также сопоставив каждой вершине $v \neq T$ отметку $(\theta(v), 0)$, а вершине T – отметку $(\theta(T), 1)$, получим некоторый лабиринт, который обозначим $\Phi(L)$. Очевидно, множество вершин $\Phi(L)$ содержит множество вершин L. Пусть последовательность $(s_0, v_0, a_0, b_0), (s_1, v_1, a_1, b_1), \ldots$ представляет собой поведение мыши $\mathfrak{M}$ в лабиринте $\Phi(L)$. Тогда поведением мыши $\mathfrak{M}$ в квазилабиринте L назовем подпоследовательность этой последовательности, соответствующую вершинам v_i квазилабиринта L / она может оказаться конечной/.

Если $(s_0, v_0, a_0, b_0), (s_1, v_1, a_1, b_1), \ldots$ – поведение мыши $\mathfrak{M}$ в лабиринте L то будем говорить также, что мышь $\mathfrak{M}$ в момент $t = i$ находится в вершине v_i и имеет состояние s_i. Цепочки вида рис. 32 в лабиринтах будем называть коридорами.

Пусть $p, q \in R$ и $\mathfrak{M}$ – мышь. Скажем, что p и q $\mathfrak{M}$-эквивалентны, если для любого квазилабиринта L и любого ребра с отметкой p в нем при замене отметки p на q у этого ребра / вместе с заменой отмет-

ни p^{-1} противоположного ребра на q^{-1} / поведение $\mathfrak{M}$ в L не изменяется.

Лемма 1. Для любого слова p из R и мыши $\mathfrak{M}$ существует такое натуральное ℓ, что все слова вида $p^{\ell i}$ $i=1,2,\ldots$ $\mathfrak{M}$ - эквивалентны.

Доказательство. Пусть $p=x_1\ldots x_k$ и мышь $\mathfrak{M}$ в момент t находится в вершине u некоторого лабиринта L, из которой выходит коридор K, изображенный на рис. 33 и имеет состояние S.

рис.33

Пусть отметка вершины u есть a. Покажем, что тогда существует такое m_0 что одна из следующих возможностей имеет место для всех $m=m_0 i$, $i=1,2,\ldots$

1) $\mathfrak{M}$ не заходит в коридор K

2) $\mathfrak{M}$ заходит в K и возвращается в u, не дойдя до вершины v

3) $\mathfrak{M}$ заходит в K и не выходит из него

4) $\mathfrak{M}$ проходит по K до вершины v и оказывается в состоянии S' / одном и том же для всех i /.

Очевидно, что если для некоторого $m=m_0$ имеет место одна из ситуаций I) - 3), то она же имеет место и для всех $m>m_0$, то есть и для $m=m_0 i$ $i=1,2,3,\ldots$. Пусть ни для какого m ситуации I)-3) места не имеют. Тогда рассмотрим бесконечный коридор Q вида рис. 34. Начальный отрезок этого коридора, соответствующий слову p^m, обозначим Q_m. Мышь $\mathfrak{M}$ заходит в этот коридор и более не возвращается к u, причем выходит

рис.34

рано или поздно на конец любого отрезка Q_m. Пусть τ_m - момент, когда $\mathfrak{M}$ впервые попадает на конец отрезка Q_m. Выделим последовательность состояний $\mathfrak{M}$ в эти моменты: τ_1 τ_2 τ_3 .....

S_1 S_2 S_3 .....

Тогда, так как S конечно, существуют n и τ такие, что $S_n=S_{n+\tau}$ В силу периодичности коридора мышь, находящаяся в состоянии S_n в конце отрезка Q_n, впервые выйдет на конец отрезка Q_{n+j} в том же состоянии, в котором мышь, находящаяся на конце отрезка $Q_{n+\tau}$ в состоянии S_n, впервые выйдет на конец отрезка $Q_{n+\tau+j}$. Поэтому имеем: $S_{n+j}=S_{n+\tau+j}$; $j=0,1,\ldots$ Отсюда получаем, что для любого j $0\leq j\leq\tau$, выполняется $S_{n+j+i\tau}$; $i=0,1,2,\ldots$. Выберем j так, чтобы $m_0=n+j$ - делилось на τ, тогда в конец каждого отрезка $Q_{m_0 i}$ $(i=1,2,\ldots)$ $\mathfrak{M}$ будет впервые приходить в состояние $S'=S_{n+j}$, что и завершает рассмотрение случая 4). Таким образом, для любых S и $\mathfrak{M}$, а также для случаев, когда мышь $\mathfrak{M}$ находится в начальный момент в вершине v, можно указать m_0, при котором одно из условий I)-4) выполняется для всех $m=m_0 i$; $i=1,2,\ldots$ Пусть ℓ равно наименьшему общему кратному всех таких m_0; тогда в каждом из указанных случаев одно из условий I) - 4) выполняется для всех $m=\ell i$;

$i=1,2,3,\ldots$. Рассмотрим произвольный квазилабиринт L', у которого от вершины u к вершине v ведет ребро с отметкой p^m. В лабиринте $L=\Phi(L')$ от u к v будет тогда вести коридор вида рис. 33. В силу вышесказанного, мышь $\mathfrak{A}$, находящаяся в вершине $u(v)$, для любого $m=ei$ либо не заходит в коридор, либо заходит в него и, не дойдя до конца, возвращается к $u(v)$, либо остается в коридоре сколь угодно долго, либо, наконец, проходит до конца коридора и оказывается в состоянии $s'(s'')$, не зависящем от i. Это, очевидно, и означает, что поведения мыши $\mathfrak{A}$ в L' одинаковы при всех $m=ei$; $i=1,2,\ldots$. Лемма доказана.

Заметим, что если слова p и q $\mathfrak{A}$ - эквивалентны, то, как легко проверить, любые слова вида XpY и XqY тоже $\mathfrak{A}$-эквивалентны.

Для заданной мыши $\mathfrak{A}$ применим лемму 1 к словам w, e, n, s; возьмем наименьшее общее кратное соответствующих значений e и обозначим его $\tilde{e}$. Обозначим: $\tilde{e}=e^{\tilde{e}}$, $\tilde{s}=s^{\tilde{e}}$, $\tilde{n}=n^{\tilde{e}}$, $\tilde{w}=w^{\tilde{e}}$; $\tilde{B}=\{\tilde{w},\tilde{e},\tilde{n},\tilde{s}\}$. В силу леммы 1 все слова $x, x^2, x^3, \ldots$ для $x\in\tilde{B}$ $\mathfrak{A}$-эквивалентны. Квазилабиринт, у которого каждое приписанное ребру слово есть слово над $\tilde{B}$ назовем $\mathfrak{A}$-квазилабиринтом. Два слова p и q над $\tilde{B}$ назовем подобными, если одно получается из другого заменами вида $x\leftrightarrow x^x$ $(x\in\tilde{B})$. Очевидно, подобные слова p и q $\mathfrak{A}$-эквивалентны. Каждому слову p над $\tilde{B}$ можно сопоставить подобное ему слово $\bar{p}=x_1\ldots x_n$ над $\tilde{B}$, такое, что $\forall i\,(x_i\neq x_{i+1})$. Если $\mathfrak{A}$ - квазилабиринт L_1, получен из $\mathfrak{A}$-квазилабиринта L_2 заменой отметок ребер на подобные им отметки, то скажем, что L_1 и L_2 подобны. Очевидно, что поведения $\mathfrak{A}$ в L_1 и в L_2 одинаковы.

Квазилабиринт L назовем плоским, если лабиринт $\Phi(L)$ плоский. $\mathfrak{A}$ - квазилабиринт L назовем планарным, если существует подобный ему плоский квазилабиринт.

Предположим, что каждой вершине v $\mathfrak{A}$-квазилабиринта L сопоставлена взаимно-однозначно точка плоскости $\varphi(v)$, а ребру, ведущему от u к v - ломаная, состоящая из горизонтальных и вертикальных отрезков и ведущая от $\varphi(u)$ к $\varphi(v)$, причем, если ребру приписано слово p и $\bar{p}=x_1\ldots x_n$, то первый отрезок ломаной ведет в направлении x_1 /см. рис. 31 /, второй - в направлении x_2 и т.д. Пусть также /за исключением начал и концов/ различные ломаные не пересекаются. Образованную всеми этими ломаными фигуру на плоскости назовем укладкой L.

Лемма 2. $\mathfrak{A}$-Квазилабиринт - L планарен тогда и только тогда, когда существует некоторая его укладка на плоскости.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что если $\mathfrak{A}$-квазилабиринт обладает некоторой укладкой на плоскости, то он также обладает укладкой, у которой вершины расположены в узлах подрешетки целочисленной решетки с шагом $\tilde{e}$, а ломаные ведут по ребрам этой решетки. Пусть дана плоская укладка $\mathfrak{A}$ - квазилабиринта L. Выделим все горизонтали, на которых расположена либо вершина, либо горизонтальный отрезок этой укладки / см. рис. 35 /. Эти горизонтали соединены между собой вертикальными отрезками укладки, и, растягивая эти отрезки можно переместить горизонтали так, чтобы они пошли по линиям подрешетки целочисленной решетки с шагом $\tilde{e}$. Перемещая аналогичным образом вертикали, на которых расположены вершины и вертикальные отрезки укладки, получим искомую укладку $\mathfrak{A}$-квазилабиринта L. Лемма доказана.

Рис.35

Лемма 3. Пусть L – σ-квазилабиринт, у которого некоторое ребро τ имеет отметку $PxyxQ$ (P, Q – слова над $\widetilde{B}$; $x, y \in \widetilde{B}$) и L' – σ-квазилабиринт, полученный из L заменой этой отметки на PxQ /вместе с соответствующей заменой отметки противоположного ребра/. Если L' планарный, то L тоже планарный.

Доказательство. Так как $PxyxQ \in R$, то $x^{-1} \neq y$. Если $x = y$ то утверждение очевидно, ибо L' и L подобны. Пусть $x \neq y$. Без ограничения общности положим $x = \tilde{e}, y = \tilde{n}$. Пусть L' планарный. Рассмотрим ломаную, соответствующую в укладке L' ребру τ, и выделим в ней горизонтальный отрезок ab, соответствующий рассматриваемому вхождению в слово PxQ. Пусть в укладке этот отрезок продолжается вправо и влево до концов c и d /см. рис. 36/.

рис.36

Очевидно, что можно получить укладку L изменив в укладке L' лишь часть, смежную с отрезком cd так, как показано на рис.37

рис.37

Здесь δ – некоторая достаточно малая величина. Лемма доказана.

Квазилабиринт L назовем деревом, если граф, получающийся из него при замене каждой пары противоположных ребер одним неориентированным ребром, есть дерево. Обозначим это дерево $t(L)$.

Лемма 4. σ-квазилабиринт, являющийся деревом, планарен.

Доказательство. Каждому σ-квазилабиринту L сопоставим σ-квазилабиринт $\Psi(L)$, получающийся при замене каждого ребра, отмеченного словом $x_1 \ldots x_n$, где $n > 1$ и $x_i \in \widetilde{B}$ цепочкой вида рис. 32 Очевидно, L планарен тогда и только тогда, когда планарен $\Psi(L)$. Поэтому лемму достаточно доказать для σ-квазилабиринтов, у которых отметкой каждого ребра служит слово $x \in \widetilde{B}$. Доказательство поведем индукцией по числу ребер дерева $t(L)$. Для одного ребра утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех деревьев, имеющих не более K ребер и L – квазилабиринт, у которого дерево $t(L)$ имеет $K+1$ ребро. Пусть v – висячая вершина дерева $t(L)$, в которую ведет ребро τ из вершины u. Рассмотрим укладку σ-квазилабиринта, полученного из L удалением вершины v. В этой укладке к точке $\varphi(u)$ не примыкает отрезок, ведущий в направлении, определенном отметкой ребра τ, и можно получить укладку L, если присоединить к $\varphi(u)$ такой отрезок, имеющий достаточно малую длину. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть L_1 – планарный σ-квазилабиринт и v – вершина L_1. Пусть также L_2 – σ-квазилабиринт, являющийся деревом и u – такая его вершина, что $\Theta(u) \cap \Theta(v) = \emptyset$. Тогда σ-квазилабиринт, получающийся из L_1 и L_2 склеиванием вершин u и v, планарен.

Доказательство проводится индукцией по числу ребер в $t(L_2)$ аналогично доказательству леммы 4.

Произвольная укладка разбивает плоскость на одну внешнюю область и конечное число внутренних областей. Укладку σ-квазилабиринта L назовем правилькой, если из точки $\varphi(T)$ можно провести горизонтальный либо

либо вертикальный отрезок, не пересекающийся с укладкой /за исключением точки $\varphi(T)$ / и лежащий в её внешней области. $\mathfrak{A}$ -квазилабиринт, обладающий правильной укладкой, назовем правильным. При помощи рассуждения, аналогичного рассуждению при доказательстве леммы 2 , нетрудно убедиться, что для правильного $\mathfrak{A}$ -квазилабиринта существует такой подобный ему $\mathfrak{A}$ -квазилабиринт L , что лабиринт $\Phi(L)$ правильный. Поэтому для доказательства теоремы, достаточно показать, что для любой мыши существует правильный $\mathfrak{A}$ -квазилабиринт, не обходимый этой мышью.

Будем далее вместо $\tilde{e}, \tilde{n}, \tilde{w}, \tilde{s}$ писать e, n, w, s . Рассмотрим слова $enws$, $nwse$, $wsen$, $senw$ и для каждого найдем по лемме 1 соответствующее e . Наименьшее общее кратное всех этих e обозначим λ Пусть далее

$$W_1 = (enws)^{\lambda+1}(wnes)^{\lambda}$$
$$W_2 = (wsen)^{\lambda+1}(eswn)^{\lambda}$$

При изображении квазилабиринтов будем указывать лишь одно из двух противоположных ребер. Рассмотрим $\mathfrak{A}$ -квазилабиринт L_0 , изображенный на рис.38 Очевидно, что для мыши $\mathfrak{A}$, помещенной в него, возможны следующие два случая:

рис.38

а) Через конечное число шагов $\mathfrak{A}$ заходит в один из коридоров и более из него не выходит.

б) Мышь $\mathfrak{A}$ бесконечное число раз возвращается в вершину O .

В случае а) рассмотрим бесконечное дерево вида рис. 39 . Поведение $\mathfrak{A}$ в нем воспроизводит поведение $\mathfrak{A}$ в L_0 , т.е. через конечное число шагов $\mathfrak{A}$ заходит в один из коридоров дерева и более из него не выходит. При этом существует такое h , что $\mathfrak{A}$ никогда не достигает h -го яруса дерева. Рассмотрим $\mathfrak{A}$ -квазилабиринт L_1 , образованный первыми h ярусами дерева, и в качестве выхода T выберем произвольную вершину h -го яруса. По лемме 4 L_1 планарный и, как легко заметить, правильный, причем мышью $\mathfrak{A}$ не обходится.

В случае б) последовательность π проходимых коридоров периодична: $\pi = \varkappa_0 \varkappa_1 \varkappa_1 \varkappa_1 \ldots$, где $\varkappa_0 = W_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots W_{i_s}^{\varepsilon_s}$ - предпериод и $\varkappa_1 = W_{j_1}^{\tau_1} \ldots W_{j_m}^{\tau_m}$ - период. Проделав в $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ все всевозможные замены вида $W_i W_i^{-1} \to \Lambda$, получим приведенные предпериод p и период q Возможны следующие случаи:

рис 39

А. $q = \Lambda$ В этом случае $\mathfrak{A}$ в дереве рис. 39 будет периодически возвращаться к корню поддерева, соответствующего предпериоду p и снова найдется такое h , что $\mathfrak{A}$ никогда не достигает h -го яруса. Как и в случае а), в качестве правильного квазилабиринта, не обходимого мышью $\mathfrak{A}$, берем квазилабиринт, образованный первыми h ярусами дерева рис.39

Б. $q \neq \Lambda$ Тогда возможны три подслучая:

1. $q = W_1^{n_1}$
2. $q = W_2^{n_2}$
3. $q = W_1^{n_1} W_2^{m_1} \ldots W_1^{n_t} W_2^{m_t}$ / Очевидно, можем считать, что q начинается именно с $W_1^{n_1}$ /.

В подслучае I рассмотрим бесконечное дерево с петлей в корне, изображенное на рис. 40 . Пусть O есть вершина этого дерева, к которой от корня ведет путь p^{-1} . Тогда мышь из вершины O придет к корню дерева и

будет далее возвращаться к нему периодически, так что найдется такое h, что $\mathfrak{A}$ никогда не достигает h -го яруса дерева. Как и в случае а), рассмотрим $\mathfrak{A}$ -квазилабиринт L_2, образованный первыми h ярусами дерева, и в качестве выхода T выберем произвольную вершину h -го яруса. Докажем, что L_2 планарный. По лемме 5 это достаточно доказать для квазилабиринта L_3 рис. 41а, причем по лемме 3 последний квазилабиринт можно сначала преобразовывать, заменяя в W_1 все вхождения вида xyx на x. Имеем:

рис 40

$$W_1 = (enws)^{\lambda+1}(wnes)^{\lambda}$$
$$(enws)(wnes) \to es$$
$$(enws)es(wnes) \to es$$

рис. 41

т.е. $W_1 \to (enws)es \to enws = W_1'$

Квазилабиринт, соответствующий W_1', имеет укладку рис. 41б, т.е. является планарным. Как видно из доказательства леммы 3, укладку L_3 можно получить из укладки рис. 41б путем последовательного "изгибания" ребер, причем так, чтобы полученная в результате ломаная располагалась внутри области, заштрихованной на рис. 41в. Для получения укладки L_2 к точке $\varphi(Q)$ достаточно присоединить укладку дерева высоты h, которая, как видно из рис. 41в, располагается вне замкнутой ломаной, т.е. полученная укладка L_2 правильная.

Аналогичным образом поступаем в подслучае 2. Отметим, что

$$W_2 \to wsen, \quad W_1^{-1} \to nesw, \quad W_2^{-1} \to swne.$$

В подслучае 3 выделим два подслучая:

<u>3.1.</u> Существует n_i либо m_i, отличное от ± 1

<u>3.2.</u> Все n_i и m_i равны ± 1

Построение правильного квазилабиринта, необходимого мышью $\mathfrak{A}$, во всех этих подслучаях осуществляется следующим образом. Задается некоторый квазилабиринт L, ребрам которого приписаны слова вида $W_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots\ldots W_{i_r}^{\varepsilon_r}$ причем существует начинающийся из вершины α замкнутый маршрут M, соответствующий некоторой степени периода q. Каждое ребро L, которому приписано слово $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, $n > 1$, где каждое x_i есть $W_j^{\pm 1}$ заменим цепочкой вида рис. 32. При этом любому началу $x' = x_1 \ldots\ldots x_k$ слова x соответствует некоторая вершина $\xi(x')$ цепочки. Полученный квазилабиринт обозначим L_1. К каждой вершине v квазилабиринта L_1 присоединим бесконечное дерево вида рис. 42, где $W_{j_1}^{\tau_1} \ldots W_{j_k}^{\tau_k}$ – все слова вида $W_i^{\pm 1}$, для которых из v не выходит ребро, отмеченное этим словом. Обозначим полученный квазилабиринт L_2. Пусть O есть вершина L_2, к которой от вершины α ведёт путь P^{-1}. Тогда мышь $\mathfrak{A}$ из вершины O придет к вершине α и будет далее перемещаться по цепочкам, соответствующим ребрам замкнутого маршрута M / быть может, выходя при этом в присоединенные к L_1 деревья/. При этом существует такое h, что $\mathfrak{A}$ никогда не достигает h-го яруса присоединенных деревьев. Ограничиваясь первыми h ярусами этих деревьев, получим конечный квазилабиринт L_3. Если взять в качестве выхода из него произвольную вершину h -го яруса любого из присоединенных деревьев, то L_3 не будет обходиться мышью $\mathfrak{A}$.

рис. 42

Заметим, что в силу выбора λ следующие слова $\mathfrak{A}$ -эквивалентны:

$$(*)\quad \begin{array}{l} w_1 \sim (enws)^{\lambda x} w_1;\ w_1 \sim w_1 (wnes)^{\lambda x};\ w_2 \sim \\ \sim (wsen)^{\lambda x} w_2;\ w_2 \sim w_2 (eswn)^{\lambda x};\ w_1^{-1} \sim w_1^{-1}(nesw)^{\lambda x}, \\ w_1^{-1} \sim (nwse)^{\lambda x} w_1^{-1};\ w_2^{-1} \sim w_2^{-1}(swne)^{\lambda x};\ w_2^{-1} \sim (senw)^{\lambda x} w_2^{-1} \end{array}$$

(x – натуральное).

Заменяя в соответствии с этими соотношениями входящие в отметки ребер квазилабиринта L слова вида $w_i^{\pm 1}$, преобразуем эти отметки к $\mathfrak{A}$-эквивалентным им отметкам так, чтобы полученный в результате квазилабиринт L' оказался планарным. При этом квазилабиринт L' преобразуется в некоторый квазилабиринт L'_1, отличающийся от L, лишь тем, что вместо слов $w_i^{\pm 1}$ некоторые ребра имеют своими отметками $\mathfrak{A}$ –эквивалентные им в силу указанных соотношений слова. Соответствующий квазилабиринт L'_3 планарен и не обходится мышью $\mathfrak{A}$. В каждом из рассматриваемых ниже подслучаев будет установлено, что укладка одного из присоединяемых к L'_1 деревьев располагается во внешней области укладки L'_1: выбирая выход из L'_3 на h –м ярусе этого дерева, получим правильный квазилабиринт L'_3.

Для установления планарности квазилабиринтов в соответствии с леммой 3 нам понадобится преобразовывать слова над $\widetilde{B}$, используя замены $xyx \to x$ $xx \to x$, к виду, не содержащему вхождений xyx и x. Результат такого приведения слова p обозначим $\bar{p}$. Если слова p и q могут быть получены друг из друга заменами вида $xyx \leftrightarrow x$ и $xx \leftrightarrow x$ / т.е. двусторонними заменами/, то они называются эквивалентными: $p \sim q$. Нетрудно проверить, что в этом случае $\bar{p} = \bar{q}$.

Произвольное слово проводится либо к виду $\delta_1 (enws)^x \delta_2$ либо к виду $\delta_3 (eswn)^x \delta_4$, где δ_1, δ_3 – концы, а δ_2, δ_4 –начала слов $enws$ и $eswn$ соответственно. Первая и последняя буквы у слова $\bar{p}$ такие же, как у p.

Перейдем к рассмотрению подслучая 3.I. Пусть подстановка ρ на множестве $\mathfrak{P}$ есть подстановка $(ns)(we)$. Рассмотрим мышь $\mathfrak{A}^*$, отличающуюся от $\mathfrak{A}$ лишь функцией выходов: $\psi^*(\xi, a) = \rho(\psi(\xi, \rho(a)))$. Нетрудно проверить, что если мышь $\mathfrak{A}$ проходит в квазилабиринте L_0 некоторую последовательность коридоров, то $\mathfrak{A}^*$ проходит последовательность коридоров, отличающуюся от нее заменой w_1 на w_2 и наоборот. Кроме того, если построен правильный лабиринт L, не обходимый мышью $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^*)$, то мышь $\mathfrak{A}^*(\mathfrak{A})$ в лабиринте L^*, полученном из L поворотом на 180°, будет воспроизводить повернутое на 180° поведение $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^*)$ в L и, следовательно, не будет обходить L^*. Поэтому, переходя по необходимости к мыши $\mathfrak{A}^*$, можно добиться, чтобы в подслучае 3.I. отличной от ± 1 была степень при w_1. Начало периода можно выбрать так, чтобы это была степень при первом вхождении w_1 в q: $|n_1| > 1$. Рассмотрим сначала случай $n_1 > 1$. Пусть $q' = w_2^{m_1} w_1^{n_2} \ldots\ldots w_1^{n_t} w_2^{m_t}$; $q_1 = w_1 q' q^{\lambda-1} w_1$; $q_2 = q' q^{\lambda-1}$. В качестве L возьмем квазилабиринт, изображенный на рис. 43. Покажем, как преобразовать слова q_1 и q_2 при помощи соотношений $(*)$ в слова $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$ так, чтобы полученный при этом квазилабиринт L' был планарным. Легко проверить, что имеют место следующие эквивалентности:

Рис. 43

$$q_1 \sim (eswn)^{n_1-1} q^\lambda w_1$$

$$q_2 \sim \delta_1 (wnes)^{n_1} q^\lambda, \text{ где } \delta_1 = 1 \text{ при } m_1 < 0;\ \delta_1 = \Lambda \text{ при } m_1 > 0$$

Возможны следующие случаи:

а. $\bar{q} = (enws)^x \delta_2$ где $\delta_2 = en$ при $m_t > 0$ при $m_t < 0$ $\delta_2 =$

б. $\bar{q} = (eswn)^x \delta_3$ где $\delta_3 = \Lambda$ при $m_t > 0$ и $\delta_3 = e$ при $m_t < 0$

$$q_2 \sim \delta_1 (wnes)^{n_1} (enws)^{\lambda x} \delta_2 ,$$

В случае в. имеем: $q_1 \sim (eswn)^{n_1-1} enws)^{\lambda x} (enws) \sim (eswn)^{n_1-1} (enws)^{\lambda x+1}$

Положим $\bar{q}_1 = q_1 (wnes)^{\lambda x}$ [illegible] $\tilde{q}_1$ [illegible] из q_1 заменой в [illegible] $(*)$ / где $\tilde{q}_1 \sim (eswn)^{n_1-1} (enws)$ [illegible] отку, в [illegible] $\bar{\bar{q}}_1 = es(wnes)^{n_1-2}$. При $m_1 > 0$ положим $\tilde{q}_2 = q_2 (eswn)^{\lambda x}$, а при $m_1 < 0$ $\tilde{q}_2 = q_2 (swne)^{\lambda x}$. В первом случае находим $\bar{\bar{q}}_2 = \delta_1 (wnes)^{n_1-1} wn$, а во втором случае $\bar{\bar{q}}_2 = \delta_1 (wnes)^{n_1-1} wne$

В случае с. $q_1 \sim (eswn)^{n_1-1} (eswn)^{\lambda x} enws \sim (eswn)^{\lambda x+n_1-2} es$;

$$q_2 \sim \delta_1 (wnes)^{n_1} (eswn)^{\lambda x} \delta_3 \sim \delta_1 (wnes)^{\lambda x+n_1-1} wn\, \delta_3 .$$

Положим $\tilde{q}_1 = (enws)^{\lambda x} q_1$. Где [illegible] получаем $\bar{\bar{q}}_1 = es(wnes)^{n_1-2}$. При $m_1 > 0$ положим $\tilde{q}_2 = (wsen)^{\lambda x} q_2$, а при $m_1 < 0$ $\tilde{q}_2 = (senw)^{\lambda x} q_2$. В первом случае находим $\bar{\bar{q}}_2 = (wnes)^{n_1-1} wn\delta_3$, а во втором – $\bar{\bar{q}}_2 = s(wnes)^{n_1-1} wn\delta_3$

Таким образом, всегда $\bar{\bar{q}}_1 = es(wnes)^{n_1-2}$ и $\bar{\bar{q}}_2 = \delta(wnes)^{n_1-1}\delta'$ где $\delta \in \{\Lambda, s\}$ и $\delta' \in \{wn, wne\}$. Кроме того, $\bar{w}_1^{n_1-1} = (enws)^{n_1-1}$

Для лабиринта вида рис. 43, в котором отметки ребер q_1, q_2 и $w_1^{n_1-1}$ заменены отметками $\bar{\bar{q}}_1$, $\bar{\bar{q}}_2$ и $\bar{w}_1^{n_1-1}$, существует укладка на плоскости, указанная на рис. 44. Укладка L' получается из неё в соответствии с леммой 3 путем "изгибания" ребер, а укладка L'_1 – введением новых вершин на полученных ломаных. Заметим, что при перемещении от точки β к точке α вдоль ломаной, соответствующей на рис. 44 слову $\bar{\bar{q}}_2$, внешняя область укладка остается слева. Очевидно, это же будет выполняться и для полученной из неё "изгибанием" ребер ломаной, соответствующей слову $\tilde{q}_2$. На последней ломаной рассмотрим вершину v квазилабиринта L'_1, соответствующую началу $q' w_1^{n_1}$ слова q_2. Так как слово w_1 кончается буквой s, а $w_2^{m_1}$ – начинается либо с w, либо с s, то окрестность точки v имеет вид рис. 45а либо рис. 45б и укладка дерева, присоединяемого к v в направлении e, расположена во внешней области укладки L'_1. Выбирая выход из L'_3 на h-м ярусе этого дерева, получим правильный квазилабиринт L'_3, не обходящийся мышью σ, что и завершает рассмотрение случая $n_1 > 1$. При $n_1 < -1$ полагаем $q_1 = w_1^{-1} q' q^{\lambda-1} w_1^{-1}$; $q_2 = q' q^{\lambda-1}$ и в квазилабиринте L на рис. 43 заменяем отметку $w_1^{n_1-1}$ ребра, ведущего из α в β, на $w_1^{n_1+1}$. В остальном рассуждения совершенно аналогичны случаю $n_1 > 1$. Перейдем к рассмотрению подслучая 3.2. Пусть $\pi = n_1, m_1, n_2 \ldots n_t, m_t$ – последовательность степеней слов w_1 и w_2, входящих в q. Возможны следующие подслучаи:

рис. 44

рис. 45

3.2.1. $n_1 = m_1 = \ldots = n_t = m_t = n_0$

3.2.2. Найдется член последовательности π, у которого оба соседних члена / считаем, что член n_1 соседний с m_t / имеют противоположный знак. Переходя по необходимости к мыши σ^* и изменяя начало периода q можно добиться, чтобы q в этом случае имело вид $w_2^i w_1^j w_2^{\varepsilon_1} \ldots w_2^{\varepsilon_k} w_1^j$ где $i \neq j$

3.2.3. В π можно выделить кусок вида $1, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{s}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r}, -1,$ где $s > 1$, $r > 1$. Переходя по необходимости к мыши σ^*, можно добиться, чтобы при $s \geqslant r$ левая единица массива единиц, а при $s < r$ – правая единица массива минус единиц соответствовала степени при w_2. Тогда окрестность этой степени w_2 в q будет иметь вид:

$w_{j'}^{-i} w_j^{-1} \ldots w_1^{-1} w_2^{i} w_1 \ldots w_j w_{j'}^{-i}$. Изменяя начало периода q, можно привести q к виду $(w_j^{-1} \ldots w_1^{-1} w_2^{i} w_1 \ldots w_j) w_{j'}^{-i} \ldots w_{j'}^{-i}$.

В подслучае 3.2.1. можем считать, что $q = w_1 w_2$. Рассмотрим лишь случай $n_0 = 1$; случай $n_0 = -1$ аналогичен. Возьмем в качестве L квазилабиринт на рис. 46, где $q_1 = q^{\lambda-1}$. Пусть L' получен из L заменой q_1 на $\tilde{q}_1 = q_1(eswn)^{\lambda}$. Имеем $\tilde{q}_1 \sim en(wsen)^{\lambda-1}(eswn)^{\lambda} \sim eswn$ т.е. $\bar{\tilde{q}}_1 = eswn$ и квазилабиринт, полученный из L заменой q_1 на $\bar{\tilde{q}}_1$ имеет укладку рис. 47. Укладка L'_1 получается из неё "изгибанием" ребер и добавлением новых вершин. Видно, что укладка дерева, присоединяемого к α в направлении n, расположена во внешней области укладки L'_1. В подслучае 3.2.2. положим $i = -1$, $j = 1$; случай $i = 1$, $j = -1$ аналогичен. Обозначим $q' = w_1 w_2^{\varepsilon_1} \ldots w_2^{\varepsilon_2} w_1$ и выберем в качестве L квазилабиринт, изображенный на рис. 48. Для получения планарного квазилабиринта L' преобразуем сначала слово $q_1 = q(q')^{\lambda-1}$, используя соотношения $(*)$, к такому слову $\tilde{q}_1$, чтобы цикл C, соответствующий этому слову, был планарен. Так как q' начинается с e q и q' кончаются на w_2^{-1} начинается с s и кончается на e, к укладке цикла C можно присоединить укладки циклов, соответствующих w_2^{-1}, как указано на рис. 49, что и даст укладку L'. Возможны следующие случаи:

рис 48

рис. 49

рис. 50

а. $\bar{q}' = (enws)^{x}$

б. $\bar{q}' = (eswn)^{x} es$

В случае а. находим: $q(q')^{\lambda-1} \sim swn(enws)^{\lambda x} \sim s(enws)^{\lambda x-1}$. Положим $\tilde{q}_1 = q_1(wnes)^{\lambda x}$, тогда $\bar{\tilde{q}}_1 = swnes$. В случае б.: $q(q_1)^{\lambda-1} \sim (swne)^{\lambda x+1} s$ и, полагая $\tilde{q}_1 = (senw)^{\lambda} q_1$ имеем: $\bar{\tilde{q}} = swnes$. Укладка цикла, соответствующего слову $\bar{\tilde{q}}_1$, указана на рис. 50. Укладка L'_1 получается из неё "изгибанием" ребер, присоединением укладок циклов, соответствующих словам w_2^{-1} и добавлением новых вершин. Видно, что укладка дерева, присоединенного к вершине α в направлении e, расположена во внешней области укладки L'_1.

В подслучае 3.2.3. положим $i = j = 1$; остальные случаи рассматриваются аналогично. Обозначим $\underbrace{w_1^{-1} \ldots w_1^{-1} w_2 w_1 \ldots w_1}_{\tilde{q}} = q_2$; тогда q запишется в виде $q_2 q'$, где q' начинается и кончается словом w_2^{-1}. Обозначим также $w_1^{-1} w_2^{-1} \ldots w_1^{-1} = q_3$. В качестве L возьмем квазилабиринт, изображенный на рис. 51. Как и в случае 3.2.2., для получения планарного квазилабиринта L' преобразуем слово $q(q')^{\lambda-1} = q_1$ к такому слову $\tilde{q}_1$, чтобы соответствующий $\tilde{q}_1$ цикл был планарным. Укладка L' получится тогда и только тогда присоединением к этому циклу ломаных, соответствующих слову q_3, и присоединением к концам ломаных циклов, соответствующих слов w_2. Возможны следующие случаи:

рис 51

а. $\bar{q}_1 = (swne)^{x}$

б. $\bar{q}_1 = (swne)^{x} se$

Заметим, что $\bar{q}_2 = nws$; $q \sim nwsq'$. В случае а. находим: $q(q')^{\lambda-1} \sim nwsq_1(swne)^{\lambda x} \sim nw(swne)^{\lambda x}$. Положим $\tilde{q}_1 = (nwse)^{\lambda x} q_1$. Тогда $\bar{\tilde{q}} = nwse$. В случае б. $q(q')^{\lambda-1} \sim nw(senw)^{\lambda x} se$.

Положив $\tilde{q}_1 = q_1(swne)^{hx}$, будем иметь $\bar{\tilde{q}}_1 = nwse$. Таким образом, $\bar{\tilde{q}}_1 = nwse$, и укладка цикла для $\tilde{q}_1$ получается из укладки рис.52 "изгибанием" ребер. Видно, что дерево, присоединяемое к вершине α в направлении s, располагается во внешней области укладки L'_1, так что получаемый квазилабиринт правильный. Теорема доказана.

рис.52

§ 8. Оценка числа о.д.функций

Обозначим через $\Theta(m,n,p)$ множество всех о.д.функций веса n, реализуемых инициальными автоматами вида $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$, где $A = \{a^1, a^2, \ldots, a^m\}$, $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q^n\}$, $B = \{b^1, b^2, \ldots, b^p\}$. Можно считать, что автомат $\mathfrak{A}$ имеет приведенный вид и все его состояния соединимы с q.

Теорема 8.1 Пусть $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$ и $m+n \to \infty$, тогда

$$\log_2 |\Theta(m,n,p)| \sim m \cdot n \cdot \log_2 p + (m-1) \cdot n \cdot \log_2 n.$$

Доказательство. Каждая о.д.функция из $\Theta(m,n,p)$ может быть задана таблицей, приведенной на рис. 53, где первый столбец соответствует начальному

$a \backslash q$	q^1	q^2	$\ldots$	q^j	$\ldots$	q^n
a^1						
a^2						
$\vdots$						
a^i				q, b		
$\vdots$						
a^m						

рис.53

$a \backslash q$	q^1	q^2	$\ldots$	q^{n-1}	q^n
a^1	q^2	q^3	$\ldots$	q^n	q^1
a^2					
$\vdots$					
a^m					

рис.54

состоянию q^1. Число способов заполнения таблицы равно $(p \cdot n)^{m \cdot n}$, однако не все такие таблицы определяют о.д.функции из $\Theta(m,n,p)$. Часть из таблиц будет определять о.д.функции меньшего веса. Заметим еще, что каждая о.д.функция из $\Theta(m,n,p)$ определяется разными таблицами, получающимися друг из друга перенумерацией состояний, не затрагивающей начального состояния. Разные перенумерации не могут привести к одной и той же таблице, так как это означало бы наличие у автомата $\mathfrak{A}_q$ неотличимых состояний, то-есть таблица задавала бы о.д.функцию не из $\Theta(m,n,p)$. Таким образом

$$|\Theta(m,n,p)| \leq \frac{(p \cdot n)^{m \cdot n}}{(n-1)!} \qquad (1)$$

Получим теперь нижнюю оценку величины $\Theta(m,n,p)$. С этой целью рассмотрим некоторое множество о.д.функций, задаваемых таблицами специального вида, фрагмент одной из которых приведен на рис. 54. Состояния в первой строке этой таблицы получаются в результате циклического сдвига (на единицу) состояний, нумерующих столбцы, то-есть определяются однозначно. Выходной символ b, соответствующий паре (a^1, q^1) – произвольный, остальные выходные символы в первой строке таблицы – любые, отличные от b. Прочие клетки таблицы заполняются произвольно. Очевидно, что число таблиц указанного вида равно $p\,(p-1)^{n-1}\,(p \cdot n)^{(m-1) \cdot n}$. Каждая такая таблица определяет некоторую о.д.функцию из $\Theta(m,n,p)$, так как способ заполнения первой строки таблицы обеспечивает соединимость всех состояний с q^1 и отличимость всех состояний,

например, на входной последовательности вида $\alpha^T = \underbrace{a^1 a^1 \ldots\ldots a^1}_{T}$, $T \leq n$. Покажем теперь, что разные таблицы T_1 и T_2 специального вида определяют разные о.д.функции F_1 и F_2. Рассмотрим два случая.

I. В некоторой клетке таблиц T_1 и T_2, например, определяемой парой (a^i, q^j), стоят разные выходные буквы b и b. Тогда F_1 и F_2 отличаются на последовательности $\alpha^{j-1} a^i$, где $\alpha^{j-1} = \underbrace{a^1 a^1 \ldots\ldots a^1}_{j-1}$.

2. Выходные буквы расставлены в таблицах T_1 и T_2 одинаковым образом, но в некоторой клетке, например, определяемой парой (a^i, q^j), стоят разные состояния q^{j_1} и q^{j_2} соответственно. В этом случае F_1 и F_2 отличаются на последовательности $\alpha_1^{j-1} a^i \alpha_2^n$, где $\alpha_1^{j-1} = \underbrace{a^1 a^1 \ldots\ldots a^1}_{j-1}$, $\alpha_2^n = \underbrace{a^1 a^1 \ldots\ldots a^1}_{n}$.

Таким образом

$$|\Theta(m,n,p)| \geq p \cdot (p-1)^{n-1} (p \cdot n)^{(m-1)n} \qquad (2)$$

Из (I) и (2) получаем, используя формулу Стирлинга для $(n-1)!$, что

$$(m-1) \cdot n \cdot \log_2 n + m \cdot n \cdot \log_2 p + (n-1) \log_2 \frac{p-1}{p} \leq \log_2 |\Theta(m,n,p)| \leq (m-1) \cdot n \cdot \log_2 n + m \cdot n \cdot \log_2 p + O(p)$$

Далее, поскольку $p \geq 2$, то $(n-1) \log_2 \frac{p-1}{p} = O(p)$. Поэтому для завершения доказательства достаточно установить, что при условиях теоремы выполнено соотношение

$$\frac{1}{(m-1) \cdot \log_2 n + m \cdot \log_2 p} \longrightarrow 0$$

Имеем

$$\frac{1}{(m-1)\log_2 n + m \cdot \log_2 p} < \frac{1}{(m-1)\log_2 n} = \frac{1}{\log_2 n^{m-1}} \leq \frac{1}{\log_2 (m+n-1)} \longrightarrow 0$$

Теорема доказана.

Точные, но громоздкие формулы для $|\Theta(m,n,p)|$ при $m \geq 2$ содержатся в работе [17], а асимптотические соотношения для $|\Theta(m,n,p)|$ в работе [18].

Г Л А В А III.

ПОЛНОТА КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ.

Эта глава состоит из двенадцати параграфов и посвящена изложению основ теории структурных автоматов. К числу основных задач этой теории относятся задача о выразимости и ее важнейший случай – задача о полноте. В §I и §2 вводятся операции над о.д.-функциями и строятся две основные алгебры о.д.-функций $P^{\alpha}_{o.д.}$ и $P^{c}_{o.д.}$, в которых в качестве носителя выступает множество всех о.д.-функций $P_{o.д.}$, а в качестве операций в $P^{\alpha}_{o.д.}$ выступают операции суперпозиций и обратной связи, в $P^{c}_{o.д.}$ – операции суперпозиции. В §3 вводятся понятия полноты и А-полноты и устанавливается связь между этими понятиями. В §4 устанавливаются некоторые свойства неприводимых полных систем, то есть базисов. В §5 и §6 излагается алгебраический подход, а в §7 – алгоритмический подходы к решению задач о полноте и А-полноте в $P^{\alpha}_{o.д.}$. В §8 рассматриваются несколько модифицированных постановок задач о полноте. §9 посвящен изучению вопроса о базисах $P^{c}_{o.д.}$ и $P^{c}_{д.}$. В §10 и §11 изучаются классы одноместных функций $P^{1}_{o.д.}$ и AS_2, образующие относительно операций суперпозиции соответственно полугруппу и группу. В §12 рассматривается специальный класс о.д.-функций, называемых линейными.

§ I. Реализация о.-д. функций схемами

Пусть о.д. функция F реализуется автоматом $\mathfrak{A}_q=(A,Q,B,\varphi,\psi,q)$ таким, что $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_r$, $B=B_1\times B_2\times\ldots\times B_v$ и $\psi=(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_v)$, то-есть $\mathfrak{A}_q$ имеет r входов и v выходов. В этом случае каждое слово $\alpha^t=a(1)a(2)\ldots a(t)$ из A^*, а также сверхслово $\alpha^\infty=a'(1)a'(2)\ldots a'(\tau)\ldots$ из A^∞, где $a(i)=(a_1(i),a_2(i),\ldots,a_r(i))$, $a'(j)=(a'_1(j),a'_2(j),\ldots,a'_r(j))$, $i=1,2,\ldots,t$, $j=1,2,\ldots$, иногда удобно представлять в виде наборов $(\alpha_1^t,\alpha_2^t,\ldots,\alpha_r^t)$ и $(\alpha_1^\infty,\alpha_2^\infty,\ldots,\alpha_r^\infty)$ соответственно, где $\alpha_k^t=a_k(1)a_k(2)\ldots a_k(t)$, $\alpha_\ell^\infty=a'_\ell(1)a'_\ell(2),\ldots,a'_\ell(m)$, $k,\ell=1,2,\ldots,r$

Тем самым о.-д. функцию F можно рассматривать как r - местную частичную функцию от переменных $x_1,x_2,\ldots,x_r$ таких, что область определения переменного x_i равна $A_i^*\cup A_i^\infty$, $i=1,2,\ldots,r$. Преобразуя аналогичным образом слова в алфавите B, приходим к возможности рассмотрения о.-д. функции F в виде частичной вектор-функции $(F_1(x_1,x_2,\ldots,x_r),F_2(x_1,x_2,\ldots,x_r)\ldots\ldots F_v(x_1,x_2,\ldots,x_r))$, где о.-д. функция $F_j(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ реализуется автоматом $(A_1\times A_2\times\ldots\times A_r,Q,B_j,\varphi,\psi_j,q)$, $j=1,2,\ldots,v$. В наших рассмотрениях для алфавитов A_j и B_j, мы будем предполагать далее выполненными равенства $E_2=A_i=B_j$, $i=1,2,\ldots,r$, $j=1,2,\ldots,v$, где $E_2=\{0,1\}$. Пусть X множество всех переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$, каждое из которых принимает значение из множества J, $J=J_1\cup J_2$, где $J_1=E_2^*$, $J_2=E_2^\infty$. Элементы множества J будем обозначать через $\alpha^\square$, где $\square$ может быть любым натуральным числом t и тогда мы имеем элемент α^t, или символом ∞, и тогда мы имеем сверхслово α^∞. Множество всех о.д. функций (точнее о.-д. вектор-функций), зависящих от переменных из X, обозначим P и, чтобы подчеркнуть v - мерность о.-д. функции $F=(F_1,F_2,\ldots,F_v)$ в дальнейшем иногда будем писать F^v вместо F. По определению каждая функция из P зависит хотя бы от одного переменного из X. Про о.-д. функцию $F^v(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ будем говорить, что она не зависит существенно от переменного x_i, $i=1,2,\ldots,r$, а само переменное x_i называть несущественным, или фиктивным для F, если для любых элементов $\alpha_1^\square,\alpha_2^\square,\ldots,\alpha_{i-1}^\square,\alpha_i^\square,\alpha_{i+1}^\square,\ldots\alpha_r^\square,\gamma^\square$ из J с одним и тем же значением $\square$ имеет место $F^v(\alpha_1^\square,\alpha_2^\square,\ldots,\alpha_{i-1}^\square,\alpha_i^\square,\alpha_{i+1}^\square,\ldots,\alpha_r^\square)=F^v(\alpha_1^\square,\alpha_2^\square,\ldots,\alpha_{i-1}^\square,\gamma^\square,\alpha_{i+1}^\square,\ldots,\alpha_r^\square)$. Нетрудно видеть, что свойство фиктивности переменного x_i проверяется в отдельности на множествах слов и сверхслов из J. Переменное x_j функции F^v назовем существенным для и будем говорить, что функция F^v существенно зависит от x_j, если x_j не является фиктивным для F^v. Обозначим через $X(F^v)$ множество всех существенных переменных о.-д. функции F^v.

Нетрудно видеть, что значение функции F^v однозначно определяется заданием значений ее существенных переменных, то-есть если $X(F^v)=\{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_p}\}$, то для любых наборов $(\alpha_1^\square,\alpha_2^\square,\ldots,\alpha_r^\square)$ и $(\gamma_1^\square,\gamma_2^\square,\ldots,\gamma_r^\square)$, в которых знак $\square$ имеет одно и то же значение, при $p=0$ справедливо равенство $F^v(\alpha_1^\square,\alpha_2^\square,\ldots,\alpha_r^\square)=F^v(\gamma_1^\square,\gamma_2^\square,\ldots,\gamma_r^\square)$, а при $p>0$ это равенство выполняется при условии, что $\alpha_{i_j}^\square=\gamma_{i_j}^\square$, $j=1,2,\ldots,p$.

Заметим, что если $X(F^v)=$, то, в силу теоремы 2.1 для любого набора $(\alpha_1^\infty,\alpha_2^\infty,\ldots,\alpha_r^\infty)$ последовательность $F^v(a_1(1),a_2(1),\ldots,a_r(1))$, $F^v(a_1(2),a_2(2),\ldots,a_r(2))\ldots$ является периодической и одной и той же для любого из указанных наборов; равным образом, каждая последовательность $F_i(\alpha_1^\infty,\alpha_2^\infty,\ldots,\alpha_r^\infty)$, $i=1,2,\ldots,v$, является также периодической и не зависит от выбора набора $(\alpha_1^\infty,\alpha_2^\infty,\ldots,\alpha_r^\infty)$. Функции из P с пустым множеством существенных переменных будем называть константными. Две константные о.-д. функции F^v и g^v будем считать равными и писать $F^v=g^v$, если периодические последовательнос-

ти, являющиеся значениями этих функций на сверхсловах из J_2, совпадают между собой. Произвольные о.-д.функции $F^{v}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_r})$ и $g^{v}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_r})$ будем считать равными и писать $F^{v} = g^{v}$, если $X(F^{v}) = X(g^{v}) = \{x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}\}$ и при любой фиксации значений $\alpha^{\alpha}_{k_1}, \alpha^{\alpha}_{k_2}, \ldots \alpha^{\alpha}_{k_k}$ с одним и тем же α значения функций F^{v} и g^{v}, которые однозначно определяются по F^{v} и g^{v} для любых значений переменных из $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_r}\} \setminus X(F^{v})$ и $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_r}\} \setminus X(g^{v})$ соответственно, совпадают между собой. В дальнейшем будем считать, что с заданием некоторой о.д.функции из P автоматически задаются все о.д. функции, равные ей, то-есть мы будем рассматривать о.д. функции с точностью до отношения равенства между ними.

Отметим теперь связь между схемами и операциями над ними с о.д.функциями и операциями над о.д. функциями.

Пусть имеется инициальный структурный автомат $\langle \Sigma, \mathfrak{A}_{q_0} \rangle$ с схемой $\Sigma(s, x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_s)$, которой сопоставлен автомат $\mathfrak{A}_{q_0} = (\{0,1\}^r, \{0,1\}^k, \{0,1\}^s, \varphi, \psi, q_0)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_s)$, $q_0 = (q_1^0, \ldots, q_k^0)$. Тогда о.д.функция, реализуемая этим структурным автоматом, может быть задана с помощью некоторой системы канонических уравнений:

$$
\begin{aligned}
& z_1(1) = q_1^0, \ldots, z_k(1) = q_k^0, \\
& z_1(t+1) = \varphi_1(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& z_k(t+1) = \varphi_k(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
& y_1(t) = \psi_1(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& y_s(t) = \psi_s(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)).
\end{aligned}
$$

Наша ближайшая цель – выяснить, какие о.д.функции могут быть реализованы структурными автоматами, какие операции над о.д.функциями индуцируются операциями над схемами.

I°. Нетрудно видеть, что структурные автоматы

$$\langle \Sigma(F_1, x_1, x_2, y), \mathfrak{A}^{\&} \rangle, \quad \langle \Sigma(x_1, x_2, y), \mathfrak{A}^{\vee} \rangle, \quad \langle \Sigma(x, y), \mathfrak{A}^{-} \rangle$$

реализуют, соответственно о.д.функции, задаваемые системами I,2,3:

$$
\left.
\begin{aligned}
& 1: \quad y(t) = x_1(t) \,\&\, x_2(t) \\
& 2: \quad y(t) = x_1(t) \vee x_2(t) \\
& 3: \quad y(t) = \overline{x}(t)
\end{aligned}
\right\}
\quad
\begin{aligned}
& z(1) = q^0 \\
& z(t+1) = z(t)
\end{aligned}
$$

Для краткости будем иногда обозначать эти функции $x_1 \& x_2$; $x_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1$.

Структурный автомат $\langle \Sigma(x, z, y), \mathfrak{A}_3, q \rangle$ реализует о.-д.функцию, которую будем обозначать $D_q(x)$.

$$
4: \quad \begin{cases}
z(1) = q \\
z(t+1) = x(t) \\
y(t) = z(t)
\end{cases}
$$

$2^\circ,4^\circ,7^\circ$: Пусть структурный автомат $\langle \Sigma(r,k,s), \sigma\tau, q \rangle$ реализует о.-д. функцию $T(X_1,\dots X_r)$, заданную следующей системой канонических уравнений:

$$
(*)\quad \begin{cases}
z_1(1)=q_1,\ \dots,\ z_k(1)=q_k,\quad q=(q_1,\dots,q_k),\\
z_1(t+1)=\varphi_1(x_1(t),\ \dots,\ x_r(t),\ z_1(t),\ \dots,\ z_k(t)),\\
\dots\dots\\
z_k(t+1)=\varphi_k(x_1(t),\dots,x_r(t),\ z_1(t),\ \dots,\ z_k(t)),\\
y_1(t)=\psi_1(x_1(t),\ \dots,\ x_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
\dots\dots\\
y_s(t)=\psi_s(x_1(t),\dots,\ x_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)).
\end{cases}
$$

Тогда структурный автомат $\langle \Sigma', \sigma\tau', q \rangle$, получающийся из него с помощью операции выделения выходов $y_{j_1},\dots,y_{j_\ell}$ (2°), реализует о.-д.функцию

$$
\begin{cases}
z_1(1)=q_1,\dots,\ z_k(1)=q_k,\\
z_1(t+1)=\varphi_1(x_1(t),\dots,x_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z_k(t+1)=\varphi_k(x_1(t),\dots,x_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
y_{j_1}(t+1)=\psi_{j_1}(x_1(t),\dots,x_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
\dots\dots\dots\\
y_{j_\ell}(t+1)=\psi_{j_\ell}(x_1(t),\dots,x_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)).
\end{cases}
$$

В свою очередь структурный автомат $\langle \Sigma'', \sigma\tau'', q \rangle$, получающийся из $\langle \Sigma, \sigma\tau, q \rangle$ отождествлением входов (4°) x_{r-1} и x_r, реализует о.-д.функцию:

$$
\begin{cases}
z_1(1)=q_1,\dots,\ z_k(1)=q_k,\\
z_1(t+1)=\varphi_1(x_1(t),\dots,x_{r-1}(t),x_{r-1}(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z_k(t+1)=\varphi_k(x_1(t),\dots,x_{r-1}(t),x_{r-1}(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
y_1(t)=\psi_1(x_1(t),\dots,x_{r-1}(t),x_{r-1}(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y_s(t)=\psi_s(x_1(t),\dots,x_{r-1}(t),x_{r-1}(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)).
\end{cases}
$$

труктурный автомат $\langle \Sigma''', \sigma\tau''', q \rangle$, получающийся из $\langle \Sigma, \sigma\tau, q \rangle$ переименованием переменных (7°), т.е. заменой переменной x_j на x'_j, $j=1,\dots,r$, реализует о.-д.функцию

$$
\begin{cases}
z_1(1)=q_1;\ \dots;\ z_k(1)=q_k,\\
z_1(t+1)=\varphi_1(x'_1(t),\dots,x'_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
z_k(t+1)=\varphi_k(x'_1(t),\dots,x'_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)),\\
y_1(t)=\psi_1(x'_1(t),\dots,x'_r(t),\ z_1(t),\ \dots,\ z_k(t)),\\
\dots\\
y_s(t)=\psi_s(x'_1(t),\dots,x'_r(t),\ z_1(t),\dots,\ z_k(t)).
\end{cases}
$$

$3^\circ, 5^\circ$: Пусть вместе со структурным автоматом $\langle \Sigma, \sigma, q \rangle$ задан структурный автомат $\langle \Sigma', \sigma', q' \rangle$, реализующий о.-д.-функцию

$$
\begin{cases}
z'_1(1) = q'_1, \ldots, z'_{k'}(1) = q'_{k'}, \quad q' = (q'_1, \ldots, q'_{k'}) \\
z'_1(t+1) = \varphi'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{k'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z'_{k'}(t+1) = \varphi'_{k'}(x'_1(t), \ldots, x'_{k'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)) \\
y'_1(t) = \psi'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{k'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y'_{s'}(t) = \psi'_{s'}(x'_1(t), \ldots, x'_{k'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)).
\end{cases}
$$

Тогда структурный автомат, полученный объединением (3°) $\langle \Sigma, \sigma, q \rangle$ и $\langle \Sigma', \sigma', q' \rangle$ реализует о.-д.-функцию:

$$
\begin{cases}
z_1(1) = q_1, \ldots, z_k(1) = q_k, \\
z'_1(1) = q'_1, \ldots, z'_{k'}(1) = q'_{k'}, \\
z_1(t+1) = \varphi_1(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_k(t+1) = \varphi_k(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
z'_1(t+1) = \varphi'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{p'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z'_{k'}(t+1) = \varphi'_{k'}(x'_1(t), \ldots, x'_{p'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)), \\
y_1(t) = \psi_1(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_s(t) = \psi_s(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
y'_1(t) = \psi'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{p'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y'_{s'}(t) = \psi'_{s'}(x'_1(t), \ldots, x'_{p'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)).
\end{cases}
$$

Структурный автомат, полученный подстановкой (5°), примененной к j-му выходу первого автомата $1 \leq j \leq s$ и i-му входу второго автомата $1 \leq i \leq r$, реализует о.-д.-функцию:

$$
\begin{cases}
z_1(1) = q_1, \ldots, z_k(1) = q_k, \\
z'_1(1) = q'_1, \ldots, z'_{k'}(1) = q'_{k'}, \\
z_1(t+1) = \varphi_1(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_k(t+1) = \varphi_k(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
z'_1(t+1) = \varphi'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{i-1}(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), x'_{i+1}(t), \ldots, x'_{p'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z'_{k'}(t+1) = \varphi'_{k'}(x'_1(t), \ldots, x'_{i-1}(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), x'_{i+1}(t), \ldots, x'_{p'}(t), z'_1(t), \ldots, z'_{k'}(t)) \\
y_1(t) = \psi_1(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{j-1}(t) = \psi_{j-1}(x_1(t), \ldots, x_p(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)),
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
y_{j+1}(t) = \psi_{j+1}(x_1(t), \quad , x_r(t), z_1(t), \quad z_k(t)), \\
y_s(t) = \psi_s(x_1(t), \quad , x_r(t), z_1(t), \ldots \quad z_k(t)), \\
y_1'(t) = \psi_1'(x_1'(t), \quad x_{i-1}'(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, z_k(t)), x_{i+1}'(t), \ldots, z_{k'}'(t)), \\
\cdot \\
y_{s'}' = \psi_{s'}'(x_1'(t), \ldots, x_{i-1}'(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, z_k(t)), x_{i+1}'(t), \ldots, z_{k'}'(t)).
\end{cases}
$$

Перечисленные операции называются операциями суперпозиции над о.-д. функциями. Если $F(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+r})$ – две о.-д.функции, то для любых переменных $x_1', \ldots, x_n', x_{n+1}', \ldots, x_{n+r}'$ и для любого $1 \le j \le r$ с помощью операций суперпозиции из F и g можно получить функции $f(x_1', \ldots, x_n')$ и $g(x_{n+1}', \ldots, x_{n+j-1}', F(x_1', \ldots, x_n'), x_{n+j+1}', \ldots, x_{n+r}')$.

6.° Пусть у структурного автомата $\langle \Sigma, \sigma, q \rangle$, выход y_j со сдвигом зависит от входа x_i. Тогда он реализует о.-д.функцию, канонические уравнения которой имеют вид:

$$
\begin{cases}
z_1(1) = q_1, \ldots, z_k(1) = q_k \\
z_1(t+1) = \varphi_1(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots\ldots \\
z_k(t+1) = \varphi_k(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
y_1(t) = \psi_1(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots\ldots \\
y_{j-1}(t) = \psi_{j-1}(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
y_j(t) = \psi_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
y_{j+1}(t) = \psi_{j+1}(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots \\
y_s(t) = \psi_s(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)),
\end{cases}
$$

где функция ψ_j не зависит от переменной x_i.

Автомат $\langle \Sigma', \sigma', q \rangle$, полученный из $\langle \Sigma, \sigma, q \rangle$ операцией обратной связи, примененной к выходу y_j и входу x_i, реализует о.-д.функцию:

$$
\begin{cases}
z_1(1) = q_1, \quad , z_k(1) = q_k, \\
z_1(t+1) = \varphi_1(x_1(t), \quad , x_{i-1}(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\qquad x_{i+1}(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
z_k(t+1) = \varphi_k(x_1(t), \quad , x_{i-1}(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\qquad x_{i+1}(t), \quad x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
y_1(t) = \psi_1(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\qquad x_{i+1}(t), \quad x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\ldots \\
y_s(t) = \psi_s(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), \psi_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots x_r(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \\
\qquad x_{i+1}(t), \quad x_r(t), z_1(t), \quad z_k(t).
\end{cases}
$$

Нетрудно установить способ вычисления этой функции (обозначим ее $g(x_1,\dots,x_r)$), если мы можем вычислять исходную функцию, реализуемую $\langle\Sigma,\sigma,q\rangle$ (обозначим ее $F(x_1,\dots,x_{r+1})$). Будем для простоты считать, что $i=r+1$, $F(x_1,\dots,x_{r+1})=(F_1(x_1,\dots,x_{r+1}),\dots,F_s(x_1,\dots,x_{r+1}))$ и $j=s$. Очевидно, что функция F обладает следующим свойством. Для любого t и любых двух наборов $(\alpha_1^t,\alpha_2^t,\dots,\alpha_r^t,\alpha_{r+1}^t)$ и $(\alpha_1^t,\alpha_2^t,\dots,\alpha_r^t,\gamma_{r+1}^t)$, где α_{r+1}^t и γ_{r+1}^t отличаются не более, чем в последней букве, имеет место $F_s(\alpha_1^t,\alpha_2^t,\dots,\alpha_r^t,\alpha_{r+1}^t)=F_s(\alpha_1^t,\alpha_2^t,\dots,\alpha_r^t,\gamma_{r+1}^t)$. Пусть $\alpha_i^t=a_i(1)a_i(2)\dots a_i(t)$, $i=1,\dots,r$. Тогда $F_s(a_1(1),\dots,a_r(1),a_{r+1}(1))=b(1)$, значение $b(1)$ определено однозначно, независимо от $a_{r+1}(1)$. Положим $g_\ell(a_1(1),\dots,a_r(1))=F_\ell(a_1(1),\dots,a_r(1),b(1))$, $\ell=1,\dots,s$. Для определения значения $g(a_1(1)a_1(2),a_2(1)a_2(2),\dots,a_r(1)a_r(2))$ заметим, что значение $F_s(a_1(1)a_1(2),a_2(1)a_2(2),\dots,a_r(1)a_r(2),b(1)a_{r+1}(2))=b(1)b(2)$ определено однозначно независимо от $a_{r+1}(2)$. Полагаем $g_\ell(a_1(1)a_1(2),\dots,a_r(1)a_r(2))=F_\ell(a_1(1)a_1(2),\dots,a_r(1)a_r(2),b(1)b(2))$, $\ell=1,\dots,s$. Если уже вычислено слово $b(1)b(2)\dots b(t)=g_s(a_1(1)\dots a_1(t),a_2(1)\dots a_2(t),\dots,a_r(1)\dots a_r(t))$. Тогда полагаем $g_\ell(a_1(1)\dots a_1(t+1),a_2(1)\dots a_2(t+1),\dots,a_r(1)\dots a_r(t+1))=F_\ell(a_1(1)\dots a_1(t+1),a_2(1)\dots a_2(t+1),\dots,a_r(1)\dots a_r(t+1),b(1)b(2)\dots b(t)a_{r+1}(t+1))$.

Аналогично рассматривается поведение о.-д.функции на сверхсловах. Операция 6^0 как и раньше, называется операцией обратной связи. Из определения следует, что эта операция применима не ко всем о.-д.функциям. В дальнейшем мы рассмотрим также некоторые обобщения этой операции.

Пока наши операции определены лишь для тех о.-д. функций, которые реализуются структурными автоматами. Ниже будет показано, что каждая о.-д.функция из P реализуется некоторым структурным автоматом и тем самым операции композиции будут определены на всем множестве P. Для этого выделим в классе P подкласс всех о.-д.функций, имеющих вес равный единице. Тёкие о.д. функции будем называть истинностными. Нетрудно видеть, что если о.д.функция $F^v(x_1,x_2,\dots,x_r)=(F_1(x_1,\dots,x_r),\dots,F_v(x_1,\dots,x_r))$ является истинностной о.д.функцией, то для всякого i, $1\le i\le v$, найдется такая функция алгебры логики $\chi_i(x_1,x_2,\dots,x_r)$, что для любого набора $(\alpha_1^t,\alpha_2^t,\dots,\alpha_r^t)$, где $\alpha_j^t=a_j(1)a_j(2)\dots a_j(t)$, $j=1,2,\dots,r$, $t=1,2,\dots$, будет выполнено $F_i(\alpha_1^t,\alpha_2^t,\dots,\alpha_r^t)=b(1)b(2)\dots b(t)$, где $b(\ell)=\chi_i(a_1(\ell),a_2(\ell),\dots,a_r(\ell))$. В этом случае о.д. функцию $F_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ мы будем иногда обозначать через $\chi_i(x_1,\dots,x_n)$, а о.д. функцию $F^v(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – через $\chi^v(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Примерами истинностных о.д.функций являются введенные ранее о.д.функции $x_1\&x_2$, $x_1\vee x_2$ и $\bar{x}_1$.

Нетрудно видеть также, что каждая схема из функциональных элементов реализует истинностную о.д.функцию.

ТЕОРЕМА 3.1. Для каждой о.д.функции веса n $F^s(x_1,\dots,x_r)=(F_1,F_2,\dots,F_s)$ из P существует структурный автомат $\langle\Sigma,\sigma,q\rangle$, $\Sigma=\Sigma(s;x_1,\dots,x_r;z_1,\dots,z_k;y_1,\dots,y_s)$, где $k\le]\log_2 n[$, реализующий эту о.д.функцию.

Доказательство. Сначала отметим, что каждая истинностная о.д.функция $\chi^v(x_1,x_2,\dots,x_r)=(\chi_1,\chi_2,\dots,\chi_v)$ реализуется некоторым структурным автоматом. В самом деле рассмотрим о.д.функцию $\chi_i(x_1,x_2,\dots,x_r)$ и ей соответствующую функцию алгебры логики $\chi_i(x_1,x_2,\dots,x_r)$. При $r=1$ $\chi_i(x_1)\in\{\delta_1(x_1),\delta_2(x_1),\delta_3(x_1),\delta_4(x_1)\}$, где $\delta_1(x_1)\equiv 0$, $\delta_2(x_1)\equiv 1$, $\delta_3(x_1)=x_1$, $\delta_4(x_1)=\bar{x}_1$. Ясно, что о.д.функции $\delta_1(x_1)$, $\delta_2(x_1)$, $\delta_3(x_1)$, $\delta_4(x_1)$ реализуются схемами $\Sigma_1(x_1;y)$, $\Sigma_2(x_1;y)$, $\Sigma_3(x_1;y)$ и $\Sigma_4(x_1;y)$, приведенными на рис.55, а), б), в), г соответственно. Теперь заметим, что при $r>1$ имеет место представление $\chi_i(x_1,x_2,\dots,x_{r-1},x_r)=\bar{x}_r\&\chi_i(x_1,x_2,\dots,x_{r-1},0)\vee x_r\&\chi_i(x_1,x_2,\dots,x_{r-1},1)$. Таким образом, если известны схемы $\Sigma_i'(x_1,x_2,\dots,x_{r-1};y)$ и $\Sigma_i''(x_1,x_2,\dots,x_{r-1};y)$

рис.55

рис.56

рис. 57

рис. 58

рис 59

функциональных элементов, реализующие о.д.функции $\chi_i(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, 0)$ и $\chi_i(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, 1)$, то схема $\Sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_r; y)$ из функциональных элементов, приведенная на рис. 56, очевидно, будет реализовать о.д.функцию $\chi_i(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r)$. Далее, если имеются схемы из функциональных элементов $\Sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_r; y), \Sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_r; y), \dots, \Sigma_v(x_1, x_2, \dots, x_r; y)$ такие, что схема $\Sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_r; y)$ реализует о.д.функцию $\chi_i(x_1, x_2, \dots, x_r)$, то схема из функциональных элементов $\Sigma(x_1, x_2, \dots, x_r; y)$, приведенная на рис. 57 будет реализовать о.д.функцию $\chi^v(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Пусть теперь имеется произвольный абстрактный автомат $\mathfrak{A} = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r, Q, B_1 \times B_2 \times \dots \times B_u, \varphi, (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_v))$ с n состояниями $q_1, q_2, \dots, q_n$, где $A_i = B_j = \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, v$. Рассмотрим множество C наборов $(c_1, \dots, c_s)$ из нулей и единиц длины $k =]\log_2 n[$. Разобьем C на n непересекающихся групп $C_1, \dots, C_n$, $C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$. На множестве $A_1 \times \dots \times A_r \times C = \{0,1\}^{k+r}$ определим отображения $\vec{\varphi}^k(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k), \varphi_2(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k), \dots, \varphi_k(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k))$ и $\vec{\psi}^s(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k) = (\psi_1(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k), \dots, \psi_s(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k))$ следующим образом: если для набора $(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_k)$ выполнено $(c_1, \dots, c_k) \in C_j$ и $\varphi(q^j, (a_1, \dots, a_r)) = q^e$, то $\vec{\varphi}^k(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_k) \in C_e$ и $\vec{\psi}^s(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_k) = \vec{\psi}^s(q^j, a_1, \dots, a_r)$. Ясно, что при указанном k такие отображения можно построить. Рассмотрим автомат $\mathfrak{A}' = (\{0,1\}^r, \{0,1\}^k, \{0,1\}^e, \vec{\varphi}^k, \vec{\psi}^s)$. Нетрудно видеть, что автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ являются неотличимыми. Покажем, что автомат $\mathfrak{A}'$ может быть реализован некоторой схемой. В силу изложенного выше истинностные о.д. функции $\vec{\varphi}^k(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k)$ и $\vec{\psi}^s(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k)$ могут быть реализованы некоторыми схемами $\Sigma_1(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_k)$ и $\Sigma_1(x_1, \dots, x_r, z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_k)$ из функциональных элементов. Тогда, как легко видеть, схема Σ, приведенная на рис. 58, реализует автомат $\mathfrak{A}'$. Эта схема иногда называется канонической для автомата $\mathfrak{A}'$. Можно указать также другую схему, несколько отличающуюся от канонической и называемую нами нормальной. Эта схема Σ' приведена на рис. 59. Нетрудно видеть, что можно подобрать такую схему Σ_2' из функциональных элементов, что схема Σ' будет реализовать автомат $\mathfrak{A}'$. Для завершения доказательства заметим, что всякая о.д. функция веса n реализуется некоторым инициальным абстрактным автоматом с n состояниями, а тем самым, в силу изложенного, и некоторым структурным автоматом с описанными параметрами. Теорема доказана.

§ 2. Замкнутые множества о.д. функций

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество P с введенными в нем операциями композиции. $\mathcal{P}$ образует Ω-алгебру [19], носителем которой является множество P, в качестве операций Ω в которой выступают описанные в § I операции суперпозиции и обратной связи. Нас будут интересовать свойства подалгебр этой алгебры и строение их. В терминах теории функциональных систем мы будем изучать замкнутые подмножества класса P. Изучение этих подмножеств можно было бы проводить чисто алгебраическим путем, однако здесь мы будем часто пользоваться смешанным подходом, использующим как теоретико-автоматные, так и алгебраические построения. Будем далее считать, что с заданием о.д. функции F задаются все схемы, реализующие F. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$, обозначим через $S(\mathfrak{M})$ множество всех схем, каждая из которых реализует хотя бы одну функцию из $\mathfrak{M}$, через $[\mathfrak{M}]_c$ – множество всех о.д. функций, реализуемых всеми схемами, являющимися суперпозициями над $S(\mathfrak{M})$, а через $[\mathfrak{M}]_k$ – множество всех о.д. функций, реализуемых всеми схемами, являющимися композициями над $S(\mathfrak{M})$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для любых подмножеств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ множества P справедливы соотношения $[\mathfrak{M}_1]_s \supseteq \mathfrak{M}_1$, $[[\mathfrak{M}_1]_s]_s = [\mathfrak{M}_1]_s$ и если

$\mathfrak{M}_1 \geq \mathfrak{M}_2$, то $[\mathfrak{M}_1]_\rho \geq [\mathfrak{M}_2]_\rho$, $\rho = c, \kappa$; ясно также, что $[\mathfrak{M}]_\kappa \geq [\mathfrak{M}]_c$. Операторы $[\mathfrak{M}]_\kappa$ и $[\mathfrak{M}]_c$ называются операторами замыкания. Множество $\mathfrak{M}, \mathfrak{M} \subseteq P$, называется замкнутым относительно операций суперпозиции, если $[\mathfrak{M}]_c = \mathfrak{M}$ и замкнутым относительно операций композиции (или просто – замкнутым), если $[\mathfrak{M}]_\kappa = \mathfrak{M}$. Пусть 2^P множество всех подмножеств множества P. Введем на нем два отношения эквивалентности C и K, такие, что соотношение $\mathfrak{M}_1 C \mathfrak{M}_2$ ($\mathfrak{M}_1 K \mathfrak{M}_2$) выполнены тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{M}_1]_c = [\mathfrak{M}_2]_c$ ($[\mathfrak{M}_1]_\kappa = [\mathfrak{M}_2]_\kappa$). Заметим, что, как это следует из определения операций композиции, для любой о.д. функции $F^v(x_1, \ldots, x_r) = (F_1, F_2, \ldots, F_v)$ выполнены соотношения $\{F^v\} C \{F_1, F_2, \ldots, F_v\}$ и $\{F^v\} K \{F_1, F_2, \ldots, F_v\}$, поэтому с точностью до указанных эквивалентностей мы можем в задачах изучения свойств замыканий и замкнутых множеств ограничиться рассмотрением подмножеств множества P^1 всех о.д. функций F^v при $v = 1$. Относительно введенных эквивалентностей C и K возникает естественный вопрос о том, не совпадают ли они. Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3.2. Эквивалентности C и K различны.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{\mathcal{D}_0, \kappa_1\}$ и покажем, что $[\mathfrak{M}]_c \neq [\mathfrak{M}]_\kappa$. В самом деле, пусть $F^1(x)$ – произвольная одноместная функция из $[\mathfrak{M}]_c$. Нетрудно видеть, что $F(x)$ реализуется при некотором $\tau \geq 1$ схемой $\Sigma_1(x_1; z_1, \ldots, z_\tau; y)$ приведенной на рис. 60 и представляющей собой последовательно соединенные τ элементов G, каждый из которых реализует о.д. функцию $\mathcal{D}_0(x)$. Отсюда следует, что для $\alpha^{\tau+1} = 11\ldots11$ и $\gamma^{\tau+1} = 01\ldots11$ будет иметь место $F^1(\alpha^{\tau+1}) = 0\ldots01$ и $F^1(\gamma^{\tau+1}) = 00\ldots00$, то есть о.д. функция $F^1(x_1)$ существенно зависит от x_1. Рассмотрим теперь о.д. функцию $g^1(x_1)$ из $[\mathfrak{M}]_\kappa$, реализуемую схемой $\Sigma_2(x_1; 1)$, изображенной на рис. 61. Нетрудно видеть, что для любых слов α^t и γ^t имеет место $g^1(\alpha^t) = g^1(\gamma^t) = 00\ldots00$, то есть $g^1(x_1)$ зависит несущественно от x_1. Таким образом, $[\mathfrak{M}]_\kappa$ содержит $[\mathfrak{M}]_c$, но не совпадает с $[\mathfrak{M}]_c$. Теорема доказана.

Содержательная трактовка этой теоремы состоит в том, что, вообще говоря, операция обратной связи не выражается через операции суперпозиции. В заключение параграфа оценим число замкнутых относительно операций суперпозиции и композиции подмножеств множества P. Пусть Z, $Z \subseteq P$ – множество всех константных о.д. функций вида $F^1(x_1)$.

Теорема 3.3. Мощность каждого из множеств всех замкнутых относительно операций суперпозиции или композиции подмножеств множества P равна континууму.

Доказательство. Покажем сначала, что множество Z счетно. Множество Z не более, чем счетно, так как само множество P счетное. Построим счетное подмножество константных о.д. функций. Рассмотрим произвольную периодическую последовательность $\beta^\infty = b(1)b(2)\ldots b(t_0)b(t_0+1)\ldots b(t_0+T)b(t_0+T+1)\ldots$, в которой слово $b(1)b(2)\ldots b(t_0)$ образует предпериод, а слово $b(t_0+1)b(t_0+2)\ldots b(t_0+T)$ – период. На рис. 62 приведена схема $\Sigma(x_1; y)$, в которой каждый прямоугольник с приписанным символом $D_{b(i)}$ изображает элемент G, реализующий о.д. функцию $D_{b(i)}(x_1)$, $i = 1, 2, \ldots, t_0+T$. Нетрудно видеть, что о.д. функция $F^1(x_1)$, реализуемая этой схемой, отображает всякое сверхслово α^∞ в сверхслово β^∞. Указанных последовательностей β^∞ существует счетное множество, поэтому множество Z счетно. Заметим далее, что, как это легко следует из свойств операций композиции, для любых подмножеств Z_1 и Z_2, $Z_1, Z_2 \subseteq Z$, если $Z_1 \neq Z_2$, то $[Z_1]_i \neq [Z_2]_i$, $i = c, \kappa$, а также всегда выполнено соотношение $[Z']_c = [Z']_\kappa$, где $Z' \subseteq Z$. Отсюда, в силу того, что у множества Z существует континуум различных подмножеств, следует утверждение нашей теоремы.

рис. 60

рис. 61

рис. 62

§ 3. Задачи о полноте и об A -полноте о.д.функций.

В этом параграфе будут рассмотрены два подхода к задачам о полноте о.д. функций. Остановимся сначала на первом из них.

Пусть $M \subseteq P$ и $\rho = C, K$. Множество M называется ρ -полным, если $M \rho P$, т.е. $[M]_\rho = P$. Очевидно, само множество P является ρ -полном при любом $\rho = C, K$. Другим примером множества также ρ -полного при любом $\rho = C, K$ является множество всех о.д.функций, реализуемых схемами с одним выходом, т.е. о.д.функций вида $F'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В силу теоремы можно привести пример конечных K - полных множеств. В качестве такого множества может быть выбрано, например, множество $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, D_0(x_1), D_1(x_1)\}$. Задача о ρ -полноте о.д.функций, являющаяся одной из основных для системы ρ, состоит в выяснении условий, при которых для заданного множества $M \subseteq P$ имеет место $[M]_\rho = P$. Наиболее интересными, в частности, с точки зрения приложений, являются K -полные множества, поэтому иногда вместо термина " K -полное множество " будем употреблять термин "полное множество". Понятие об A - полноте (аппроксимационной полноте) о.д.функций представляет собой естественную модификацию понятия полноты и возникает на пути моделирования лишь отдельных, но важных свойств о.д.функций. Для того, чтобы сформулировать задачу об A -полноте, введем некоторые предварительные понятия.

Пусть τ -произвольное натуральное число, а о.д.функции $f = (f_1, \ldots, f_v)$ и $f' = (f'_1, \ldots, f'_v)$ таковы, что для всякого $i \in \{1, \ldots, v\}$ о.д.функции f_i и f'_i зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$. О.д.функции f и f' называются τ -эквивалентными $(f \tau f')$, если для любого набора $\alpha_1^\tau, \ldots, \alpha_n^\tau$ элементов из J и для любого $i \in \{1, \ldots, v\}$ имеет место $f_i(\alpha_1^\tau, \ldots, \alpha_n^\tau) = f'_i(\alpha_1^\tau, \ldots, \alpha_n^\tau)$. Множества M_1 и M_2 функций из P называются τ -эквивалентными $M_1 \tau M_2$, если для всякой о.д.функции f из M_1 найдется τ -эквивалентная ей о.д. функция f' из M_2, и наоборот: для всякой о.д.функции f' из M_2 существует о.д.функция f из M τ -эквивалентная о.д.функции f'. Очевидно, для всякого натурального числа τ введенное отношение τ -эквивалентности на множестве всех подмножеств P является рефлексивным, симметричным и транзитивным, т.е. для любых подмножеств M_1, M_2 и M_3 множества P имеет место: I) $M_i \tau M_i$ $i = 1, 2, 3$ 2) если $M_1 \tau M_2$ то $M_2 \tau M_1$, 3) если $M_1 \tau M_2$ и $M_2 \tau M_3$, то $M_1 \tau M_3$.

Пусть $\rho = C, K$. Множество M, $M \subseteq P$, называется $A\rho$ - полным, если для всякого натурального числа τ множества $[M]_\rho$ и P τ -эквивалентны. Очевидно, для любого ρ из ρ -полноты произвольного подмножества P следует его $A\rho$ -полнота $(\rho = C, K)$. Как будет показано в дальнейшем, обратное, вообще говоря, неверно. Сформулируем и докажем несколько простых, но существенных утверждений о K -полных, C - полных, A_K -полных и A_C - полных системах о.д.функций.

Теорема 3.4. Из всякого K -полного множества можно выделить конечное подмножество, которое является также K -полным.

Доказательство: Пусть $M \subseteq P$ является K -полным. Это означает, в частности, что $[M]_K \supseteq \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, D_0 x_1, D_1 x_1\}$, т.е. из схем множества $S(M)$ при помощи операций композиции можно построить такие схемы $\Sigma_1(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_{k_1}, y)$, $\Sigma_2(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_{k_2}, y)$, $\Sigma_3(x_1, z_1, \ldots, z_{k_3}, y)$, $\Sigma_4(x_1, z_1, \ldots, z_{k_4}, y)$ и $\Sigma_5(x_1, z_1, \ldots, z_{k_5}, y)$, которые реализуют соответственно о.д.функции $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\bar{x}_1$, $D_0(x_1)$, $D_1(x_1)$. Каждая из этих схем строится из конечного числа схем. Пусть $\Sigma^1, \Sigma^2, \ldots, \Sigma^\ell$ все такие схемы из $S(M)$, которые участвуют в построении указанных схем. Легко видеть, что

множество $\mathfrak{M}_1$ о.д.функций $f_1, f_2, \ldots, f_e$, реализуемых схемами $\Sigma^1, \Sigma^2, \ldots, \Sigma^e$, является K-полным и, так как $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то теорема доказана.

Теорема 3.5 [20] Всякое C-полное множество о.д.функций является счетным.

Доказательство: Зафиксируем число n и рассмотрим произвольное конечное множество $\mathfrak{M}$ о.д.функций, каждая из которых имеет вес не более, чем n. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – все простые числа, не превосходящие n. Обозначим через H_n, $H_n \subseteq \{0,1\}^\infty$, множество всех периодических сверхслов, длина периодов которых имеет вид $p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{s_m}$ и покажем, что для любой о.д.функции $f'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ из $[\mathfrak{M}]_c$, если $\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty \in H_n$, то $f'(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty) \in H_n$. В этом случае будем говорить, что о.д.функция f' обладает H_n-свойством. Утверждение проведем индукцией по операциям 2, 3, 4, 5, 7. Пусть $f'(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathfrak{M}$, d_i – период сверхслова α_i^∞ $i=1,2,\ldots,r$, $\alpha_i^\infty = \alpha_i(1)\alpha_i(2)\ldots$ и $d = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_r$. Тогда последовательность

$$(\alpha_1(1), \alpha_2(1), \ldots, \alpha_r(1)), (\alpha_1(2), \alpha_2(2), \ldots, \alpha_r(2)), \ldots, (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)), \ldots$$

является периодической с периодом d. Отсюда, в силу теоремы 21, последовательность $f'(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ будет периодической с периодом $w \cdot d$, где $w \leq n$, т.е. $f'(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty) \in H_n$. Пусть о.д.функции $f^{v_1}(x_1, \ldots, x_r) = (f_1, f_2, \ldots, f_{v_1})$ и $g^{v_2}(x_{r+1}, \ldots, x_{r+e}) = (g_1, g_2, \ldots, g_{v_2})$ содержатся в $[\mathfrak{M}]_c$ и каждая из о.д.функций f_i и g_j ($i=1,2,\ldots,v_1$, $j=1,2,\ldots,v_2$) обладает H_n – свойством. Тогда, как нетрудно видеть, если о.д.функция $h^u = (h_1, h_2, \ldots, h_v)$ получена из о.д.функции f^{v_1} или из о.д.функций f^{v_1} и g^{v_2} при помощи любой из операций 2, 3, 4, 7, то любая о.д.функция h_k $k=1,2,\ldots,v$ будет обладать H_n – свойством. Пусть теперь о.д.функция h^v получена из о.д.функций f^{v_1} и g^{v_2} путем операции подстановки, т.е. для некоторого u, $u=1,2,\ldots,v_1$, $h_i = f_i$ при $i=1,2,\ldots,u-1,u+1,\ldots,v_1$ и $h_{v_1+j} = g_j(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+k-1}, f_u(x_1, \ldots, x_r), x_{r+k+1}, \ldots, x_{r+e})$ при $j=1,\ldots,v_2$. Покажем, что любая о.д.функция h_{v+j} обладает H_n-свойством. В самом деле, пусть имеется набор $\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_{r+1}^\infty, \ldots, \alpha_{r+k-1}^\infty, \alpha_{r+k+1}^\infty, \ldots, \alpha_{r+e}^\infty$ последовательность из H_n. Тогда по условию $f_u(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty) \in H_n$ и, т.к. о.д.функция g_j обладает H_n-свойством, то

$$g_j(\alpha_{r+1}^\infty, \ldots, \alpha_{r+k-1}^\infty, f_u(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty), \alpha_{r+k+1}^\infty, \ldots, \alpha_{r+e}^\infty)$$

также принадлежит H_n. Таким образом, о.д.функция h^v обладает H_n-свойством, и можно утверждать, что любая о.д.функция из $[\mathfrak{M}]_c$ обладает H_n-свойством. В частности, этим свойством обладает любая о.д.функция, реализуемая схемой с одним выходом и принадлежащая $[\mathfrak{M}]_c$. С другой стороны, известно, что для любой периодической последовательности β^∞ из A^∞ любого периода T существует константная о.д.функция $f'(x_1)$, отображающая любое сверхслово в одну и ту же периодическую последовательность β_0^∞. На рис. 62 приведена схема, реализующая эту о.д.функцию. Пусть $T = p$, где p – простое число, большее любого из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Тогда, очевидно, о.д.функция $f'(x_1)$ не будет обладать H_n-свойством и потому $f'(x_1) \notin [\mathfrak{M}]_c$. Таким образом, множество $\mathfrak{M}$ не является C-полным. Теорема доказана. Из теорем 3.4, 3.5 вытекает существенное отличие операторов замыкания $[\mathfrak{M}]_K$ и $[\mathfrak{M}]_{C_0}$. Важным следствием из этих теорем является

Теорема 3.6. Существуют K-полные системы о.д.функций, которые не являются C-полными.

При рассмотрении задачи об A_p -полноте (p C,K) оказывается, что теоремы, аналогичные теоремам 3.4,3 не имеют ме Докажем, справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.7 . Для любого натурального числа τ и для любого множества $\mathfrak{M} \subset P$ множества $[\mathfrak{M}]_K$ и $[\mathfrak{M}]_C$ τ -эквивалентны.

Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 . Пусть о.д.функция $f'(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1})$ реализуется схемой с одним выходом и пусть о.д.функция $g'(x_1, \ldots, x_r)$ получена из f' путем применения операции 6 (обратной связи) к переменному x_{r+1} и выходной переменной о.д.функции f' . Тогда о.д.функция $g(x_1, \ldots, x_r)$ совпадает с о.д.функцией $f'(x_1, \ldots, x_r, g(x_1, \ldots, x_r))$.

Доказательство. Из определения операции 6 следует, что для любого набора $(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ элементов из J существует единственный элемент $\alpha_{r+1}^\infty \in J$ такой, что $g'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty) = f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_{r+1}^\infty) = \alpha_{r+1}^\infty$. Отсюда следует, что $f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, g'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)) = f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_{r+1}^\infty) = g'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$. В силу произвольности набора $(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ из последних равенств следует утверждение леммы.

Лемма 2 . Пусть $f'(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1})$ - о.д.функция, реализуемая схемой с одним выходом, и пусть $g'(x_1, \ldots, x_r)$ - о.д.функция, полученная из о.д.функции $f'(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1})$ путем применения операции 6 (обратной связи) к переменному x_{r+1} и выходной переменной о.д.функции f' . Тогда для любого натурального числа τ о.д.функция $g'(x_1, \ldots, x_r)$ τ -эквивалентна о.д.функции $f'(x_1, \ldots, x_r, f'(x_1, \ldots, x_r, \underbrace{f' \ldots f'}_{\tau}(x_1, \ldots, x_r, x_r) \ldots))$.
(В последней о.д.функции переменные x_r и x_{r+1} отождествлены).

Доказательство. Для доказательства леммы 2 учтем замечание, сделанное при определении операции 6 для о.д.функций. Именно, если выходная переменная о.д.функции $f'(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1})$ зависит со сдвигом от переменной x_{r+1} , то для всякого набора $\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_{r+1}^\infty$ элементов из J τ -ый разряд последовательности $f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_{r+1}^\infty)$ не зависит от τ -ого разряда последовательности α_{r+1}^∞ . Доказательство утверждения леммы будем вести по индукции.

Для $\tau = 1$ утверждение леммы справедливо в силу сделанного только что замечания.

Пусть для $\tau' = \tau - 1$ утверждение леммы справедливо по предположению. Покажем, что оно справедливо также для $\tau' = \tau$. Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_{r+1}^\infty)$ элементов из J . В силу предположения индукции последовательности $g'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ и

$f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, f' \ldots f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_r^\infty) \ldots)$ совпадают в первых $\tau - 1$ разрядах. Учитывая замечание, сделанное в начале доказательства и утверждение леммы 1 получим, что последовательности $g'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$,

$f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, g'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty))$, и
$f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, f' \ldots f'(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty, \alpha_r^\infty) \ldots)$ совпадают в первых τ разрядах. Отсюда в силу произвольности набора $(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ следует, что о.д.функции $g'(x_1, \ldots, x_r)$ и

$\underbrace{f'(x_1, \ldots, x_r, f'(x_1, \ldots, x_r, f' \ldots f'(x_1, \ldots, x_r, x_r) \ldots)}_{\tau \text{ раз}}$ τ-эквивалентны,

что т.д.

Пусть $f'(x_1, \ldots, x_r)$ – о.д.функция, реализуемая схемой с одним выходом, и такая, что её выходная переменная зависит со сдвигом от переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ $(\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}\} \subset \{x_1, \ldots, x_r\})$. Множество всех о.д. функций $\{g^1_{j_1}(x_1, \ldots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_r), \ldots, g^1_{j_p}(x_1, \ldots, x_{j_p-1}, x_{j_p+1}, \ldots, x_r)\}$, каждая из которых получена путем применения операции 6 к выходной переменной о.д.функции f' и входной переменной x_{j_q} $(1 \le q \le p)$ обозначим $K_{f'}$. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$, причем $\mathfrak{M}$ состоит лишь из о.д.функций, реализуемых схемами с одним выходом. Через $K\mathfrak{M}$ обозначим объединение множеств $K_{f'}$, где f' произвольная о.д.функция из $\mathfrak{M}$. Таким образом, $K\mathfrak{M} = \cup K_{f'}$. Заметим, что если множество переменных $f' \in \mathfrak{M}$, от которых выходная переменная о.д.функции f' зависит со сдвигом, пусто, то $K_{f'} = \varnothing$. Как уже отмечалось, из определения операций композиции для любой о.д.функции $f^v(x_1, \ldots, x_r) = (f_1, \ldots, f_v)$ выполнены соотношения $\{f^v\} \subset \{f^1, \ldots, f^v\}$ и $\{f^v\}_K$ $\{f_1, \ldots, f_v\}$. Поэтому в дальнейшем при изучении ρ-полноты и $A\rho$-полноты $(\rho = C, K)$ можно ограничиться рассмотрением о.д.функций, реализуемых схемами с одним выходом.

<u>Следствие из леммы 2</u>. Для всякого $\mathfrak{M} \subseteq P$ и для любого натурального числа τ множества $[\mathfrak{M}]_c$ и $[\mathfrak{M}]_c \cup K[\mathfrak{M}]_c$ τ-эквивалентны.

Лемма 3. Для любого натурального числа τ из τ-эквивалентности произвольных множеств $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in P$, следует τ-эквивалентность множеств $[\mathfrak{M}_1]_c$ и $[\mathfrak{M}_2]_c$.

Доказательство прямо следует из определений операций 1, 2, 3, 4, 5 и 7 (операций суперпозиций) и τ – эквивалентности двух множеств.

<u>Доказательство теоремы 3.7</u>. Пусть $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... последовательность подмножеств P такая, что $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ и для всякого $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ множество $\mathfrak{M}_{2i+1} = [\mathfrak{M}_{2i}]_c$, а множество $\mathfrak{M}_{2i+2} = [\mathfrak{M}_{2i+1}]_c \cup K[\mathfrak{M}_{2i+1}]$ очевидно, $[\mathfrak{M}]_K = \bigcup_{s=0}^{\infty} \mathfrak{M}_s$. Покажем по индукции, что для любого натурального числа j множества $\mathfrak{M}_j$ и $[\mathfrak{M}]_c$ τ-эквивалентны. Как отмечалось раньше отношение τ-эквивалентности, введенное на множестве всех подмножеств множества P рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому в силу следствия из леммы 2 и леммы 3 множества $\mathfrak{M}_1 = [\mathfrak{M}]_c$, $\mathfrak{M}_2 = [[\mathfrak{M}]_c]_c \cup K[[\mathfrak{M}]_c]_c = [\mathfrak{M}]_c \cup K[\mathfrak{M}]_c$ и $\mathfrak{M}_3 = [\mathfrak{M}_2]_c$ τ-эквивалентны $[\mathfrak{M}]_c$.

Пусть для $j = j-1$ множества $\mathfrak{M}_{j-1}$ и $[\mathfrak{M}]_c$ τ-эквивалентны. Тогда по лемме 3 множество $[\mathfrak{M}]_c = [[\mathfrak{M}]_c]_c$ τ-эквивалентно множеству $[\mathfrak{M}_{j-1}]_c$. Если $j-1$ – четное, то по построению последовательности $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ $\mathfrak{M}_j = [\mathfrak{M}_{j-1}]_c$ и, следовательно, множества $[\mathfrak{M}]_c$ и $\mathfrak{M}_j$ τ-эквивалентны. Если $j-1$ – нечетное, то в силу следствия из леммы 2 множества $[\mathfrak{M}_{j-1}]_c$ и $\mathfrak{M}_j = [\mathfrak{M}_{j-1}]_c \cup K[\mathfrak{M}_{j-1}]_c$ τ-эквивалентны. Таким образом, для всякого натурального числа j множества $\mathfrak{M}_j$ и $[\mathfrak{M}]_c$ τ-эквивалентны. Так как $[\mathfrak{M}]_K = \bigcup_{s=0}^{\infty} \mathfrak{M}_s$, для всякой о.д.функции $f' \in [\mathfrak{M}]_K$ существует такое $s_{f'}$, что $f' \in \mathfrak{M}_{s_{f'}}$. В силу τ-эквивалентности множеств $[\mathfrak{M}]_c$ и $\mathfrak{M}_{s_{f'}}$ найдется о.д.функция $f'_1 \in [\mathfrak{M}]_c$ τ-эквивалентная о.д.функции f'. С другой стороны $[\mathfrak{M}]_c \subseteq [\mathfrak{M}]_K$. Отсюда следует, что множества $[\mathfrak{M}]_c$ и $[\mathfrak{M}]_K$ τ-эквивалентны, ч.т.д. Из утверждения теоремы 3.7 непосредственно следует

Теорема 3.8 [21]. Из A_C -полноты произвольного множества $\mathfrak{M} \subseteq P$ следует его A_K - полнота и наоборот.

Таким образом ситуация, возникающая при рассмотрении A_K - полноты и A_C - полноты существенно отличается от ситуации, возникающей при рассмотрении C -полноты и K - полноты. Утверждение теоремы 3.8 показывает, что между A_C - полнотой и A_K - полнотой разницы нет, поэтому в дальнейшем при изучении A_C - полноты и A_K - полноты будем использовать единый термин - " A - полнота". Продолжая изучение A - полноты, докажем следующую теорему.

Теорема 3.9. I. Существуют конечные A - полные системы.
2. Существуют бесконечные A - полные системы, никакая конечная подсистема которых не являетоя A - полной.

Доказательство:

I. Как уже отмечалось, из K - полноты произвольного множества о.д. функций следует его A - полнота. Существуют конечные K - полные системы о.д.функции. Следовательно, существуют и конечные A - полные системы о.д.функций.

2. Всякой о.д.функции f' из P поставим в соответствие множество о.д.функций $\mathfrak{M}_{f'} = \{f'_1, f'_2, \dots\}$ следующим образом. Пусть о.д.функция f' зависит от переменных $x_1, \dots, x_\mu$. Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1^\infty, \dots, \alpha_\mu^\infty)$ элементов из J. Пусть $f'(\alpha_1^\infty, \dots, \alpha_\mu^\infty) = \beta^\infty$, где $\beta^\infty = (\beta(1), \beta(2), \dots)$. Для любого натурального числа τ рассмотрим значение о.д. функции f'_τ на наборе $(\alpha_1^\infty, \dots, \alpha_\mu^\infty)$. Пусть $f'_\tau(\alpha_1^\infty, \dots, \alpha_\mu^\infty) = \beta_\tau^\infty$ и $\beta_\tau^\infty = (\beta_\tau(1), \beta_\tau(2) \dots)$. Тогда для любого $1 \le t \le \tau$ должно иметь место $\beta(t) = \beta_\tau(t)$, а для $t > \tau$ $\beta_\tau(t) = 0$. Очевидно, для любого натурального числа τ о.д.функция f' τ - эквивалентна каждой из о.д.функций $f^1_\tau, f^1_{\tau+1}, \dots$, но для всякого $\tau' < \tau$ о.д.функции f' и $f'_{\tau'}$ не являются τ -эквивалентными. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$, являющееся объединением множеств $\mathfrak{M}_{f'}$ для любой о.д.функции f' из P. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}$ является A -полным, но никакая его конечная подсистема этим свойвом не обладает.

Из теорем 3.8, 3.9 сразу следует, что существуют бесконечные A - полные системы о.д.функций, которые не являются ρ - полными для любого $\rho = C, K$. Оказывается, справедливо более сильное утверждение.

Теорема 3.10. Существуют конечные A - полные системы о.д.функций, которые не являются $\mathcal{K}$ - полными для любого $\mathcal{K} = C, K$.

§ 4. Базисы в $P^K_{o.g.}$.

Полную систему о.д.функций, никакая собственная подсистема которой не является полной, назовем базисом. О.д.функцию f такую, что $[\{f\}]_K = P$, назовем универсальной. Нетрудно видеть, что универсальные о.д.функции существуют. Такую о.д.функцию реализует, например, схема S, представленная на

рис. 63

рис. 63 . Эта схема имеет 4 выхода. Покажем, что имеет место следующая

Теорема 3.11 [21] Существует универсальная о.д.функция, реализуемая схемой с одним выходом.

Доказательство. Рассмотрим о.д.функцию $f'(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \& x_3$ Пусть она реализуется схемой $\Sigma_1(x_1,x_2;y)$. Пусть о.д.функция $g'(x_1,x_2,x_3)$ реализуется схемой Σ_2 , приведенной на рис. 64 . Ясно, что $g'(x_1,x_2,x_3)$ $f'(x_1,x_2,\mathcal{D}_1 x_3)$. Покажем, что о.д.функция g' является универ-

рис.64

сальной. Для этого с учетом теоремы 3.1 достаточно показать, что $[\{g'\}]_K \supseteq \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \bar{x}_1,\ \mathcal{D}_0 x_1,\ \mathcal{D}_1 x_1\}$. Построим схему Σ_3

рис. 65

приведенную на рис. 65 . Нетрудно видеть, что она реализует о.д.функцию $\Gamma_{\gamma^\infty}(x_1)$, где $\gamma^\infty = 11\ldots$. Затем построим схему Σ_4 (см. рис. 66

рис.66

Легко видеть, что она реализует о.д.функцию $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. Таким образом,

$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \in [\{g'\}]_K$. Так как $\bar{x}_1 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_1$, $x_1 \& x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}$, $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \& \bar{x}_2}$, то $[\{g'\}]_K \supset \{\bar{x}_1, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$. Заметим теперь, что $g'(\Gamma_2^{\infty}(x_1), \Gamma_X^{\infty}(x_1), \mathcal{D}_1 x_1) = \mathcal{D}_1 x_1$ и $\mathcal{D}_0 x_1 = \overline{\mathcal{D}_1 \bar{x}_1}$, то есть $\{\mathcal{D}_0 x_1, \mathcal{D}_1 x_1\} \subseteq [\{g'\}]_K$. Теорема доказана.

Если характеризовать сложность универсальных о.д.функций числом существенных переменных и весом, то пример, приведенный в доказательстве изложенной теоремы является почти простейшим.

Можно уменьшить число существенных переменных за счет увеличения веса универсальной о.д.функции, о чем говорит следующая теорема.

Теорема 3.12 [23] Существует универсальная о.д.функция, зависящая от двух переменных и имеющая 3 состояния.

Доказательство. Рассмотрим о.д.функцию $f'_{u_2}(x_1, x_2) = y$, канонические уравнения которой выглядят следующим образом.

$$\begin{cases} q_1(1) = 0 \qquad q_2(1) = 0 \\ q_1(t+1) = (\bar{x}_1(t)\, x_2(t))\,(\bar{q}_1(t)\, \bar{q}_2(t) \vee q_1(t)\, q_2(t)) \\ q_2(t+1) = (\bar{x}_1(t) \vee x_2(t))\,(\bar{q}_1(t)\, \bar{q}_2(t) \vee q_1(t)\, q_2(t)) \vee \bar{q}_1(t)\, q_2(t) \\ y(t) = (\bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t))\, \bar{q}_1(t) \end{cases}$$

На рис.67 приведена диаграмма переходов о.д.функции $f'_{u_2}(x_1, x_2)$. На ней в кружках символами Q_1, Q_2 и Q_3 обозначены состояния о.д.функции f'_u и, кроме того, указаны функции алгебры логики, которые реализуются в этих состояниях. Ребрам приписаны пары значений, под действием которых про-

Рис.67

исходят соответствующие переходы. О.д.функция $f'_{u_2}(x_1, x_2)$ зависит от двух входных переменных и имеет три внутренних состояния. Покажем, что о.д. функция f'_{u_2} является универсальной. Рассмотрим о.д.функцию $f^{(1)}_{u_2}(x, f^{(1)}_{u_2}(x,x))$. Заметив, что о.д.функция $f'_{u_2}(x,x)$ совпадает с о.д.функцией $\bar{x}$, канонические уравнения о.д.функции $f'_{u_2}(x, f'_{u_2}(x,x))$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} q_1(1) = 0 \qquad q_2(1) = 0 \\ q_1(t+1) = \bar{x}(t)\,(\bar{q}_1(t)\, \bar{q}_2(t) \vee q_1(t)\, q_2(t)) \\ q_2(t+1) = \bar{x}(t)\,(\bar{q}_1(t)\, \bar{q}_2(t) \vee q_1(t)\, q_2(t)) \vee \bar{q}_1(t) \cdot q_2(t) \\ y(t) = \bar{q}_1(t) \end{cases}$$

Так как $q_1(1) = q_2(1)$, то для любого $t \geq 1$, как легко видеть, также будет выполняться равенство $q_1(t) = q_2(t)$ и, следовательно, канонические уравнения о.д.функции $f'_{u_2}(x, f'_{u_2}(x,x))$ можно представить в более простой форме:

$$\begin{cases} q_1(1) = 0 \qquad q_2(1) = 0 \\ q_1(t+1) = \bar{x}(t) \\ q_2(t+1) = \bar{x}(t) \\ y(t) = \bar{q}_1(t) \end{cases}$$

Однако с помощью такой канонической системы уравнений можно задать о.д.функцию $\mathcal{D}_1(x)$ и, таким образом, о.д.функции $f'_{u_2}(x, f'_{u_2}(x,x))$ и $\mathcal{D}_1(x)$ совпадают.

Применим операцию "объединения" к о.д.функциям $f'_{u_2}(x_1, x_2) = y_1$ и $f'_{u_2}(x_3, x_4) = y_2$. В результате получим некоторую новую о.д.функцию $f^2_7(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2)$. Рассмотрим некоторую новую о.д.функцию $f^2_8(x_1, x_2) = f^2_7(x_1, x_2, x_2, x_1) = (y_1, y_2)$. Используя диаграмму переходов о.д.функции $f'_{u_2}(x_1, x_2)$ можно видеть, что о.д.функция $f^2_8(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ такова, что для любого $t \geq 2$ возможны лишь следующие случаи:

а) $y_1(t) = \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t)$, $y_2(t) = \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t)$

б) $y_1(t) = \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t)$, $y_2(t) = 0$

в) $y_1(t) = 0$ $\qquad y_2(t) = \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t)$

причем $y_1(1) = y_2(1) = \bar{x}_1(1) \vee \bar{x}_2(1)$.

Рассмотрим о.д.функцию $f_9(x_1, x_2) = f^1_{u_2}(f'_{u_2}(x_1, x_2), f'_{u_2}(x_2, x_2)) = y$. Заметим, что если $x_1(1) = x_2(1)$, то для всех $t \geq 1$ $y(t) = x_1(t) \vee x_2(t)$.

Отождествим выходные переменные y_1 и y_2 о.д.функции $f^2_8(x_1, x_2)$ соответственно с входными переменными x_3 и x_4 о.д.функции $f'_9(x_3, x_4)$ (рис. 68). В результате получим некоторую новую о.д.функцию $f'_{10}(x_1, x_2) = y$. В силу свойств о.д.функций f_8 и f_9 о.д.функция $f_{10}(x_1, x_2) = y$ такова, что для любого $t \geq 1$ $y(t) = \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t)$ т.е. эта о.д.функция совпадает с о.д.функцией $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$. Тем самым универсальность о.д.функции f'_{u_2} доказана. Заметим, что эта о.д.функция зависит от двух входных переменных и имеет три внутренних состояния. Теорема доказана.

Ниже будет приведено доказательство универсальности о.д.функции веса 2 с двумя переменными в случае, если операция σ^0 (обратной связи) несколько усилена. С другой стороны, очевидно, что более простых (т.е. либо одноместных либо веса I) универсальных функций не существует.

В ряде функциональных систем, например, в K-значной логике, всякий базис имеет ограниченную длину. В случае системы $\mathcal{P}$ это обстоятельство не имеет места. Для дальнейших построений введем в рассмотрение класс $\mathcal{N}^\tau$, состоящий из всех таких о.д.функций $f^v(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, что для каждой о.д.функции $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $i = 1, 2, \ldots, v$, выполнено следующее. Пусть автомат $\mathfrak{A}^i = (\{0,1\}^\tau, \{0,1\}^k, \{0,1\}^s, (\varphi_1, \ldots, \varphi_k), \psi, q_0)$ реализует о.д.функцию f_i. Этот автомат под действием любого слова длины τ переходит в некоторое состояние, зависящее от входного слова, в котором его выходная функция является линейной функцией алгебры логики, то есть принадлежит классу L. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что применение операций

к о.д.функциям из $\mathcal{N}^{\tau}$ вновь приводит к о.д.функциям из $\mathcal{N}^{\tau}$, то есть класс $\mathcal{N}^{\tau}$ замкнут, и так как при любом τ справедливо $x_1 \& x_2 \notin \mathcal{N}^{\tau}$, то $\mathcal{N}^{\tau} \neq P$.

Теорема 3.13 [22]. Для всякого натурального $n \geq 1$ существует счетное множество базисов, состоящих ровно из n о.д.функций, реализуемых схемами с одним выходом.

Доказательство. При $n=1$ рассмотрим о.д.функцию $f'_{r}(x_1, x_2, \ldots, x_r) = ((x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_{r-2}) \vee \bar{x}_{r-1}) \& \mathcal{D}_r x_r$, $r \geq 3$. Нетрудно видеть, что о.д.функция f' существенно зависит от каждого из своих переменных, поэтому при $r \neq r'$ справедливо $f'_{r} \neq f'_{r'}$. С другой стороны, так как $f'_{r}(x_1, x_1, \ldots, x_1, x_2, x_3) = g'(x_1, x_2, x_3)$, где универсальная о.д.функция $g'(x_1, x_2, x_3)$ реализуется схемой, изображенной на рис. 64, то о.д.функция f'_{r} является также универсальной. Случай $n=1$ рассмотрен.

При $n=2$ искомое счетное семейство базисов образует последовательность систем $\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \ldots, \mathcal{M}_r, \ldots$, где $\mathcal{M}_r = \{\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_r}, \mathcal{D}_0 x_1\}$. В самом деле, все переменные рассматриваемые о.д.функцией существенные и, значит, все системы $\mathcal{M}_r$ попарно различны. Нетрудно видеть, что $[\mathcal{M}_r]_K = P$ при любом r, $r \geq 2$. Кроме того, имеет место $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_r \in \mathcal{M}^L$, $\mathcal{D}_0 x_1 \in \mathcal{M}_L$. Тем самым случай $n=2$ разобран.

Пусть теперь $n \geq 3$. Зафиксируем натуральное m, $m \geq 2$, и определим о.д.функцию $f'_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, которая отображает последовательность $(a_1(1), a_2(1), \ldots, a_m(1))\ (a_1(2), a_2(2), \ldots, a_m(2)) \ldots (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t)) \ldots$ в последовательность $b(1)\, b(2) \ldots b(t) \ldots$ таким образом, что при $i \leq n-2$ справедливо $b(t) = a_1(t)$ при $t \neq i$ и $b(t) = \bar{a}_1(t) \vee \bar{a}_2(t) \vee \ldots \bar{a}_m(t)$ если $t = i$, а при $i = n-1$ $b(t) = a_1(t)$ при $t \leq n-2$ и $b(t) = \bar{a}_1(t) \vee \bar{a}_2(t) \vee \ldots \vee \bar{a}_m(t)$, если $t > n-2$. Покажем, что система $\mathcal{M}_{m,n} = \{f'_1, f'_2, \ldots, f'_{n-2}, f'_{n-1}, \mathcal{D}_0 x_1\}$ образует базис. Нетрудно видеть, что если о.д. функция f'_i реализуется схемой Σ_i, то схема Σ, приведенная на

Рис.68

Рис.69

рис. 69, реализует о.д. функцию $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_m$. Так как, в силу изложенного выше, при $m \geq 2$ имеет место $[\{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_m, \mathcal{D}_0 x_1\}]_K = P$ то $\mathcal{M}_{m,n}$ – полная система.

Далее, нетрудно видеть, что при $i \leq n-1$ имеют место включения $\mathcal{M}_{m,n} \setminus \{f'_i\} \subseteq \mathcal{N}^i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $\mathcal{M}_{m,n} \setminus \{\mathcal{D}_0 x_1\} \subseteq \mathcal{M}^L$. Остается заметить, что все о.д.функции в классе $\mathcal{M}_{m,n}$ существенно зависят от всех своих переменных. Теорема доказана.

В заключение параграфа приведем пример универсальной о.д.функции веса 2 с двумя переменными. Напомним, что если о.д.функция $f^s(x_1, \ldots, x_n) = (f_1, \ldots, f_s)$ реализуется схемой $\Sigma(s, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_s)$ такой что выход y_j со сдвигом зависит от входа x_i, то f задается системой канонических

уравнений,

$$
\begin{cases}
z_1(1) = q_1, \ldots\ldots, z_k(1) = q_k \\
z_1(t+1) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)) \\
\\
z_k(t+1) = f_k(x_1(t), \ldots, x_n(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)) \\
y_1(t) = \psi_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
y_j(t) = \psi_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)) \\
y_s(t) = \psi_s(x_1(t), \ldots, x_i(t), \ldots, x_n(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)
\end{cases}
$$

функция (алгебры логики) ψ_j не зависит существенно от переменной x_i. Возьмем это свойство канонической системы за основу для формирования понятия "зависимости с p -сдвигом". Именно, будем говорить что выходная переменная y_j о.д.функции $f^s(x_1, \ldots, x_n) = (f_1, \ldots, f_s)$ $1 \le j \le s$ зависит с p-сдвигом от переменной x_i, $1 \le i \le n$, если f можно задать с помощью такой системы канонических уравнений, в которой j -я компонента функции выходов ψ - функции $\psi_j(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k)$ не зависит существенно от переменной x_i. Легко видеть, что если выходное переменное y'_i некоторой о.д.функции $f_1^s(x'_1, \ldots, x'_{n_1}) = (y'_1, \ldots y'_{m_1})$ со сдвигом зависит от входного переменного x'_j, то переменное y'_i тем более с p -сдвигом зависит от переменного x'_j. Совершенно аналогично тому, как определялась операция 6^0 для о.д.функций, определяется обобщение этой операции - операция 6, при этом там, где это необходимо вместо понятия зависимости со сдвигом используется понятие зависимости с p -сдвигом. Заметим, однако что операция 6 не сводится, вообще говоря, к операции 6. Рассмотрим о.д. функции $y_1 = x_2$ и $y_2 = x_1 \cdot \overline{x_3}$. Применяя операцию объединения к этим о.д. функциям получим некоторую о.д.функцию $g_1^2(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2)$. Отождествляя переменные x_2 и x_3 о.д.функции $g_1^2(x_1, x_2, x_3)$ получим некоторую о.д. функцию $g_2^2(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, канонические уравнения которой представим в виде:

$$
\begin{cases}
q(1) = 1 \\
q(t+1) = 1 \\
y_1(t) = x_2(t) \\
y_2(t) = x_1(t) \cdot \overline{x_2}(t)
\end{cases}
$$

Заметим, что переменное y_1 зависит с p -сдвигом от переменной x_1. Применяя операцию $6'$ к переменным y_1 и x_1 о.д.функции $g_2^2(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ получим некоторую новую о.д.функцию $g'_2(x_2) = y_2$. (рис. 70)

рис.70

Очевидно, для любого $t \geq 1$ $y_2(t)$ в этом случае равно нулю. Вместе с тем при построении структурных автоматов, реализующих о.д. функции x_2 и x_1

элементы типа G не используются, поэтому операция 6^0 в этом случае не применима. Покажем, что если вместо операции 6^0, применять операцию $6'$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 3.14 [24] Существует универсальная о.д.функция веса 2 с двумя переменными.

Доказательство. Рассмотрим о.д.функцию $f'_{u_3}(x_1, x_2) = y$, заданную при помощи следующей системы канонических уравнений:

$$\begin{cases} q(1) = 1 \\ q(t+1) = (x_1(t) \vee \bar{x}_2(t))\, q(t) \vee (\bar{x}_1(t) \vee x_2(t))\, \bar{q}(t) \\ y(t) = (\bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t))\, q(t) \vee \bar{x}_2(t) \cdot q(t) \end{cases}$$

На рис. 71 приведена диаграмма переходов о.д.функции f'_{u_3}. Очевидно, о.д.функция f'_{u_3} зависит от двух входных переменных и имеет два внутренних состояния. Покажем, что эта о.д.функция является универсальной.

Рассмотрим о.д.функцию $f'_{11}(x_1, x_2) = f'_{u_3}(f'_{u_3}(f'_{u_3}(x_2, x_1), f'_{u_3}(x_2, x_1)), f'_{u_3}(f'_{u_3}(x_1, x_2), f'_{u_3}(x_1, x_2))) = y$

рис.71

Система канонических уравнений о.д.функции $f'_u(x_1, x_2)$ записывается в таком виде:

$$\begin{cases} q_1(1) = 1,\ q_2(1) = 1,\ q(1) = 1 \\ q_1(t+1) = (x_1(t) \vee \bar{x}_2(t))\, q_1(t) \vee (\bar{x}_1(t) \vee x_2(t))\, \bar{q}_1(t) \\ q_2(t+1) = (\bar{x}_1(t) \vee x_2(t))\, q_2(t) \vee (x_1(t) \vee \bar{x}_2(t))\, \bar{q}_2(t) \\ q(t+1) = (x_1(t) \vee \bar{x}_2(t) \vee q_1(t))\, q(t) \vee (\bar{x}_1(t) \vee x_2(t) \vee q_2(t))\, \bar{q}(t) \\ y(t) = (\bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t))\, q(t) \vee (\bar{x}_1(t) \cdot q_1(t) \vee \bar{x}_2(t))\, \bar{q}(t) \end{cases}$$

Из канонических уравнений о.д.функции f'_{11} видно, что неравенство $y(t) \neq \bar{x}_1(t) \vee \bar{x}_2(t)$ для некоторого $t \geq 1$ может выполняться лишь тогда, когда $q(t) = 0$ и $q_1(t) = 0$.

Покажем, что ни при каком $t \geq 1$ одновременно не выполняются равенства $q(t) = 0$ и $q_1(t) = 0$. Действительно, в случае, если $q_1(t) = 0$ и $q_2(t) = 0$ либо $q_1(t-1) = 1$, $q_2(t-1) = 0$, $x_1(t-1) = 0$, $x_2(t-1) = 1$

либо $q_1(t-1) = 0$, $q_2(t-1) = 1$, $x_1(t-1) = 1$, $x_2(t-1) = 0$.

Легко видеть, что тогда $q(t) = 1$. Если для некоторого $t > 1$ $q_1(t) = 0$ и $q_2(t) = 1$, то либо $q_1(t-1) = 1$, $q_2(t-1) = 1$, $x_1(t-1) = 0$, $x_2(t-1) = 1$,

либо $q_1(t-1)=0,\ q_2(t-1)=0,\ x_1(t-1)=1,\ x_2(t-1)=0$

В первом случае, очевидно, $q(t)=1$. Принимая во внимание доказанное выше, получим, что и во втором случае $q(t)=1$. Таким образом, о.д.функция $f'_{11}(x_1,x_2)$ совпадает с о.д.функцией $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ и, следовательно, из этой о.д.функции с помощью применения конечного числа операций I – 5 и 7 можно получить любую о.д.функцию $f(x_1,\dots,x_n)$, где f – некоторая наперед заданная функция алгебры логики.

Покажем теперь, что из о.д.функции f'_{u_3} с помощью применения конечного числа операций I–5, 6, 7 можно получить о.д.функцию $D_1(x)$.

2. Рассмотрим о.д.функцию

$$f'_{12}(x) = f'_{u_3}(x\cdot\bar{x},\ x\vee\bar{x}) = y$$

. Канонические уравнения о.д.функции f'_{12} можно привести к виду

$$\begin{cases} q(1)=1 \\ q(t+1)=\bar{q}(t) \\ y(t)=q(t) \end{cases}$$

О.д.функцию $f'_{12}(x)$ обычно называют "часами".

3. Рассмотрим о.д.функцию $f'_{12}(x) = y = f'_{13}(x)$. О.д.функцию $f'_{13}(x)$ также называют "часами". Канонические уравнения этой о.д.функции суть

$$\begin{cases} q(1)=1 \\ q(t+1)=\bar{q}(t) \\ y(t)=\bar{q}(t) \end{cases}$$

4. Рассмотрим о.д.функцию

$$f'_{14}(x) = f'_{u_3}\left(f'_{u_3}(f'_{13}(x),\ f'_{12}(x)),\ f'_{u_3}(f'_{12}(x),\ f'_{13}(x))\right) = y$$

(рис. 72). Канонические уравнения о.д.функции $f'_{14}(x)$ могут быть приведены к такому виду:

$$\begin{cases} q_1(1)=1,\ q_2(1)=1,\ q_3(1)=0,\ q_4(1)=0 \\ q_1(t+1)=q_4(t) \\ q_2(t+1)=q_1(t) \\ q_3(t+1)=q_2(t) \\ q_4(t+1)=q_3(t) \\ y(t)=q_4(t) \end{cases}$$

О.д.функция $f'_{14}(x)=y$ такова, что для $t=4k+1$ и $t=4k+2$ $y(t)=0$, а для $t=4k+3$ и $t=4(k+1)$ $y(t)=1$. Здесь $k=0,1,2,\dots$

5. Рассмотрим о.д.функции

$$f'_{15}(x)=x\,\&\,f'_{13}(x),\quad f'_{16}(x)=\bar{x}\,\&\,f'_{13}(x) \quad \text{и} \quad f'_{17}(x)=x\,\&\,f'_{13}(x)$$

рис. 72

рис. 73

рис. 74

рис 75

На рис. 73 приведена схема получения о.д.функции f'_{15}. О.д.функции f'_{16} и f'_{17} получаются аналогично. Канонические уравнения о.д.функций $f'_{15}(x) = y$, $f'_{16}(x) = y$, $f'_{17}(x) = y$ суть:

$$\begin{cases} q(1) = 1 \\ q(t+1) = \bar{q}(t) \\ y(t) = x(t)q(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} q(1) = 1 \\ q(t+1) = \bar{q}(t) \\ y(t) = \bar{x}(t)\bar{q}(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} q(1) = 1 \\ q(t+1) = \bar{q}(t) \\ y(t) = \bar{x}(t)q(t) \end{cases}$$

соответственно.

6. Рассмотрим о.д.функцию $f'_{18}(x) = f'_{u_3}(f'_{15}(x), f'_{13}(x)) = y$

Рассмотрим о.д.функцию $f'_{19}(x) = f'_{18}(x) = y$ (рис. 74). Канонические уравнения о.д.функции $f'_{19}(x) = y$ представим в следующем виде:

$$\begin{cases} q_1(1) = 1, \quad q_2(1) = 1, \quad q(1) = 1 \\ q_1(t+1) = \bar{q}_1(t) \\ q_2(t+1) = \bar{q}_2(t) \\ q(t+1) = (x(t)\cdot q_1(t) \vee q_2(t))\, q(t) \vee (\bar{x}(t) \vee \bar{q}_1(t) \vee \bar{q}_2(t))\, \bar{q}(t) \\ y(t) = (x(t)\cdot q_1(t) \vee \bar{q}(t))\cdot \bar{q}_2(t) \end{cases}$$

Диаграмма переходов с.д.функции $f'_{19}(x) = y$ представлена на рис. 76 ж)

рис 76

Заметим, что переменное y о.д.функции $f'_{19}(x) = y$ с p-сдвигом зависит от переменного x.

7. Рассмотрим о.д.функцию $f'_{20}(x) = f'_{u_3}(f_{16}(x)\, f_{12}(x)) = y$ (рис. 75).

Канонические уравнения о.д.функции представим в таком виде:

$$\begin{cases} q_1(1) = 1, \quad q_2(1) = 1, \quad q(1) = 1 \\ q_1(t+1) = \bar{q}_1(t) \\ q_2(t+1) = \bar{q}_2(t) \\ q(t+1) = (\bar{x}(t)\, \bar{q}_1(t) \vee \bar{q}_2(t))\, q(t) \vee (x(t) \vee q_1(t) \vee q_2(t))\, \bar{q}(t) \\ y(t) = (x(t) \vee q_1(t))\, q(t) \vee \bar{q}_2(t) \end{cases}$$

Диаграмма переходов о.д.функции $f'_{20}(x)$ приведена на рис. 77. Для

ж) На рис. 76, 77 начальные состояния расположены в левом верхнем углу.

о.д.функции $f_{20}(x) = y$, y переменное с p -сдвигом зависит от переменного x

рис.77

8. Рассмотрим о.д.функции

$$f'_{21}(x, x_3) = x \cdot f'_{14}(x) \cdot f'_{13}(x) \vee x_3\left(\bar{f}'_{14}(x) \vee \bar{f}'_{13}(x)\right) = y_1$$

$$f'_{22}(x, x_3) = x \cdot \bar{f}'_{14}(x) \cdot \bar{f}'_{13}(x) \vee x_3\left(f'_{14}(x) \vee f'_{13}(x)\right) = y_2$$

$$f'_{23}(x, x_3) = x \cdot \bar{f}'_{14}(x) \cdot f'_{13}(x) \vee x_3\left(f'_{14}(x) \vee \bar{f}'_{13}(x)\right) = y_3$$

$$f'_{24}(x, x_3) = x \cdot f'_{14}(x) \cdot \bar{f}'_{13}(x) \vee x_3\left(\bar{f}'_{14}(x) \vee f'_{13}(x)\right) = y_4$$

$$f'_{25}(x_4, x_5, x_6, x_7) = x_4 \cdot \bar{f}'_{14}(x) \cdot \bar{f}'_{13}(x) \vee x_5 \bar{f}'_{14} \cdot f'_{13}(x) \vee$$

$$\vee x_6 f'_{14}(x) \bar{f}'_{13}(x) \vee x_7 \cdot f'_{14}(x) \cdot f'_{13}(x) = y_5$$

Заметим, что

для $t = 4(k+1)$ $y_1(t) = x(t)$, $y_2(t) = x_3(t)$, $y_3(t) = x_3(t)$,

$y_4(t) = x_3(t)$, $y_5(t) = x_7(t)$

для $t = 4k+1$ $y_1(t) = x_3(t)$, $y_2(t) = x_3(t)$, $y_3(t) = x_3(t)$,

$y_4(t) = x_3(t)$, $y_5(t) = x_4(t)$.

для $t = 4k+2$ $y_1(t) = x_3(t)$, $y_2(t) = x_3(t)$, $y_3(t) = x(t)$,

$y_4(t) = x_3(t)$, $y_5(t) = x_5(t)$.

для $t = 4k+3$ $y_1(t) = x_3(t)$, $y_2(t) = x_3(t)$, $y_3(t) = x_3(t)$,

$y_4(t) = x(t)$, $y_5(t) = x_6(t)$.

Здесь $k = 0, 1, 2, \ldots$

Схема построения о.д.функции f'_{21} представлена на рис. 78 . О.д.функции f'_{22}, f'_{23}, f'_{24}, f'_{25} строятся аналогично.

рис.78

9. Рассмотрим о.д.функции:

$$f'_{26}(x,x_1) = f'_{21}(x, f'_{20}(x_1)) = y_1, \quad f'_{27}(x,x_1) = f'_{22}(x, f_{19}(x_1)) = y_2$$

$$f'_{28}(x,x_1) = f'_{23}(x, f'_{20}(x_1)) = y_3, \quad f'_{29}(x,x_1) = f'_{24}(x, f'_{19}(x_1)) = y_4$$

Применяя операцию $6'$ к выходному переменному y_i ($1 \le i \le 4$ и входному переменному x_1 каждой из этих о.д.функций (см. рис. 79), применение

рис. 79

операции $6'$ корректно, см. пп. 5.6) получим соответственно о.д.функции

$$\hat{f}'_{26}(x) = y_1, \quad \hat{f}'_{27}(x) = y_2, \quad \hat{f}'_{28}(x) = y_3, \quad \hat{f}'_{29}(x) = y_4.$$

Заметим, что $y_1(1) = 1$, $y_2(2) = 0$ и

для $t = 4k+1$ $\quad y_1(t) = x(t-1)$

для $t = 4k+2$ $\quad y_2(t) = x(t-1)$,

$k = 1, 2, 3, \ldots$

для $t = 4k'+3$ $\quad y_3(t) = x(t-1)$,

для $t = 4(k'+1)$ $\quad y_4(t) = x(t-1)$,

$k' = 0, 1, 2, \ldots$

10. Рассмотрим о.д.функцию

$$f'_{30}(x) = f'_{25}(\hat{f}'_{26}(x), \hat{f}'_{27}(x), \hat{f}'_{28}(x), \hat{f}'_{29}(x)) = y \qquad \text{(рис. 80)}$$

Заметим, что (см. п.п. 8 и 9) для $t \ge 3$ $y(t) = x(t-1)$, но $y(1) = 1$, $y_2(2) = 0$ "Поведение" о.д. функции $f'_{30}(x)$ совпадает для $t \ge 3$ с "поведением" о.д. функции $D_1(x)$, однако для о.д.функции $D_1(x) = y$ $y(2) = x(1)$, а для о.д.функции $f'_{30}(x) = y$ $y(2) = 0$.

11. Рассмотрим о.д.функцию $f'_{31}(x) = f'_{30}(x \vee \bar{x}) = y$. О.д.функция $f'_{31}(x) = y$ (см. рис. 81) такова, что для $t \ne 2$ $y(t) = 1$ и $y(2) = 0$

Рис 80

рис. 81

12. Рассмотрим о.д.функцию $f'_{32}(x, x_2, x_3) = f'_{u_3}(x_1, f'_{u_3}(\bar{x}_2, x_3)) = y$ используя о.д.функцию f'_{32}, получим о.д.функцию

$$f'_{33}(x) = f'_{16}\left(f'_{32}\left(f'_{12}(x), f'_{17}(x), f'_{17}(x)\right)\right) = y,$$

канонические уравнения которой имеют следующий вид:

$$\begin{cases} q_1(1)=1, \ q_2(1)=1, \ q_3(1)=1, \ q(1)=1 \\ q_2(t+1) = \bar{q}_2(t) \\ q_3(t+1) = \bar{q}_3(t) \\ q_1(t+1) = (x(t) \vee \bar{q}_2(t))\, q_1(t) \vee \bar{x}(t)\, q_2(t) \cdot \bar{q}_1(t) \\ q(t+1) = \bar{x}(t)\, q_2(t)\, q(t) \vee (x(t) \vee q_1(t) \vee \bar{q}_2(t))\, \bar{q}(t) \\ y(t) = (\bar{x}(t)\, q_1(t)\, q_2(t) \vee \bar{q}(t))\, (\bar{x}(t) \vee q_1(t) \vee \bar{q}_2(t))\, \bar{q}_3(t) \end{cases}$$

рис.82

Диаграмма переходов о.д.функции f'_{33} представлена на рис. 82. Заметим, что переменное у о.д. функции f'_{33} с p-сдвигом зависит от переменного x.

рис.83

рис.84

13. Рассмотрим о.д.функцию (см. п.п. 3, 4, 6, 11, 12):

$$f'_{34}(x, x_1) = \overline{f'_{14}}(x) \cdot f'_{13}(x) \cdot \overline{f'_{31}}(x) \cdot f'_{33}(x_1) \vee$$
$$\vee f'_{31}\left(\overline{f'_{14}}(x)\ \overline{f'_{13}}(x) \vee (f'_{14}(x) \vee f'_{13}(x)) \cdot f'_{19}(x_1)\right) = y$$

Применяя операцию $6'$ к выходному переменному y и входному переменному x о.д.функции $f'_{24}(x, x_1) = y$ (рис. 83, применение операции $6'$ корректно, см. п.п. 6, 12) получим некоторую о.д.функцию $\hat{f}'_{34}(x) = y$. О.д. функция $\hat{f}'_{34}(x) = y$ такова, что для $t = 4k+2$, где $k = 0, 1, \ldots$ $y(t) = x(t-1)$).

14. Рассмотрим о.д.функцию

$$f'_{35}(x) = f'_{25}\left(\hat{f}'_{26}(x), \hat{f}'_{34}(x), \hat{f}'_{28}(x), \hat{f}'_{29}(x)\right) = y \quad \text{(см. рис. 84)}$$

О.д функция $f'_{35}(x) = y$ такова, что при $t \geq 2$ $y(t) = x(t-1)$ и $y(1) = 1$. Следовательно, од функция $f'_{35}(x)$ совпадает с од.функцией $D_1(x)$ и доказательство теоремы закончено.

§ 5. Алгебраический подход к задаче о полноте в $P^{\kappa}_{o.g.}$.

Из теоремы 3.4 следует, что задача о κ -полноте в определенном смысле сводится к описанию κ -полных конечных множеств. Существуют два подхода к задаче о κ -полноте, которые условно можно назвать алгебраическим и соответственно алгоритмическим.

При алгебраическом подходе исходят из свойств структуры замкнутых множеств системы $\mathcal{P}$. Одним из основных при этом является понятие критериальной системы. Пусть Σ система всех замкнутых подмножеств множества P. Подмножество Σ, $\Sigma \subseteq \Sigma$, называется критериальной системой, если множество $\mathfrak{M}$ является κ - полным тогда и только тогда, когда для любого элемента $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \in \Sigma$, имеет место $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Критериальные системы существуют и примером такой системы может, очевидно, служить множество $\Sigma \setminus \{P_2\}$. Вместе с тем ясно, что если Σ критериальная система и для некоторых ее элементов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеет место $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, то множество $\Sigma \setminus \{\mathfrak{M}_1\}$ также образует критериальную систему. Таким образом, если при исследовании множеств о.д.функций на полноту выбирать в качестве основного инструмента критериальную систему, то естественно потребовать, чтобы она не была избыточной; тем более, что, как показывает теорема 3.16, в общем случае критериальная система может содержать континуум элементов и тем самым быть не эффективной. Это обстоятельство оправдывает введение следующего понятия. Критериальная система Σ называется приведенной, если любое ее собственное подмножество Σ', $\Sigma' \subseteq \Sigma$, не является критериальной системой. Назовем замкнутое множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq P$, отличное от P, предполным классом, если для любой о.д.функции f, такой; что $f \notin \mathfrak{M}$, имеет место $\mathfrak{M} \cup \{f\}$ к P. Нетрудно видеть, что если Σ -критериальная система и $\mathfrak{M}$ - предполный класс, то $\mathfrak{M} \in \Sigma$, и если Σ -приведенная критериальная система, то множество Σ совпадает с множеством Π всех предполных классов. Покажем, что имеет место следующая

Теорема 3.15 [22]. Множество Π всех предполных классов образует приведенную критериальную систему в $\mathcal{P}$.

Доказательство. В силу изложенного выше, достаточно показать, что множество Π образует критериальную систему. В свою очередь, это, очевидно, будет следовать из того, что всякий замкнутый класс, отличный от P, содержится в некотором предполном классе. Покажем последнее. Пусть $\mathfrak{M}$ замкнутый класс, такой, что $\mathfrak{M} \neq P$ и $\mathfrak{M}$ не является предполным. Тогда найдется такая о.д.функция f, что $f \notin \mathfrak{M}$ и $[\mathfrak{M} \cup \{f\}]_{\kappa} \neq P$. Пусть $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}$ все такие о.д.функции. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ замкнутое множество $[\mathfrak{M} \cup \{f_{1i}\}]_{\kappa}$. Очевидно, $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1 \neq P$. Если $\mathfrak{M}_1$ не является предполным классом, то найдется о.д.функция f', такая, что $[\mathfrak{M}_1 \cup \{f'\}]_{\kappa} \neq P$. Очевидно, что все такие о.д.функции образуют подпоследовательность $f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n}$, последовательности $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}, \ldots$. Обозначим через $\mathfrak{M}_2$ замкнутое множество $[\mathfrak{M}_1 \cup \{f_{21}\}]_{\kappa}$ и продолжим описанный процесс и далее. Или же наш процесс оборвется на конечном шаге ℓ и мы придем к классу $\mathfrak{M}_{\ell}$, который, очевидно, предполон; или же в случае, когда процесс продолжается неограниченно, мы придем к бесконечной последовательности $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ замкнутых множеств таких, что для любых i, $i = 1, 2, \ldots$, имеет место $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_{i+1}$, но $\mathfrak{M}_i \neq P$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}' = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_i$ и покажем, что оно образует предполный класс. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}'$ замкнуто. Из построения $\mathfrak{M}'$ вытекает, что если $\mathfrak{M}' \neq P$, то $\mathfrak{M}'$ предполный класс. Предположим противное, то есть, что $\mathfrak{M}'$ не является предполным классом. Это в нашем случае означает, что $\mathfrak{M}' = P$. Тем самым $\mathfrak{M}'$ где $\mathfrak{M}'' = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, \mathcal{D}_0 x_1, \mathcal{D}_1 x_1\}$. Отсюда следует, что при некоторых

рых i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 имеет место $x_1 \& x_2 \in \mathcal{M}_i$, $x_1 \vee x_2 \in \mathcal{M}_{i_2}$, $\bar{x}_1 \in \mathcal{M}_{i_3}$, $\mathcal{D}_0 x_1 \in \mathcal{M}_{i_4}$, $\mathcal{D}_1 x_1 \in \mathcal{M}_{i_5}$. Пусть $j = \max\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, тогда $\mathcal{M}_j \supseteq \mathcal{M}''$ и тем самым $\mathcal{M}_j$ к P, что противоречит определению последовательности $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, Теорема доказана.

Таким образом, при алгебраическом подходе задача о полноте в $\mathcal{P}$ свелась к описанию всех предполных классов в $\mathcal{P}$. Однако, как показывает следующая теорема, это описание не может быть эффективным.

Теорема 3.16.[22] Мощность множества всех предполных классов в $\mathcal{P}$ равна континууму.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится ряд вспомогательных понятий и утверждений.

О.д.функцию из множества Z, отображающую любое сверхслово в одно и то же периодическое сверхслово β^∞, будем обозначать через $\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)$. Запись $]\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)[$ будет обозначать множество всех о.д.функций $\Gamma_{\delta^\infty}(x_1)$ из Z таких, что последовательности δ^∞ и β^∞ отличаются не более, чем в конечном числе разрядов. Пусть $\mathcal{B}$ некоторое множество периодических последовательностей из $\{0,1\}^\infty$, введем обозначения $V_{\mathcal{B}} = \bigcup_{\beta^\infty \in \mathcal{B}} \{\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)\}$ и $]V_{\mathcal{B}}[= \bigcup_{\beta^\infty \in \mathcal{B}}]\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)[$. Будем говорить, что о.д.функция $f^v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1, \ldots, f_v)$ сохраняет непустое множество Z', $Z' \subseteq Z$, если для любого набора $g_1'(x_1), g_2'(x_1), \ldots, g_n'(x_1)$ о.д.функций из Z' и любого i, $i = 1, 2, \ldots, v$, о.д.функция $f_i(g_1'(x_1), g_2'(x_1), \ldots, g_n'(x_1))$, которая, очевидно, является константой, содержится в Z'. Множество $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subseteq P$, сохраняет множество Z', $Z' \subseteq Z$, если каждая о.д.функция из $\mathcal{M}$ сохраняет Z'.

Пусть заданы о.д.функция $f^1(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_r)$ и сверхслово α^∞. Будем говорить, что переменное x_i о.д.функции f^1 обладает $\mathcal{F}$ свойством на α^∞, если существует такое число $t(f^1, \alpha^\infty)$, зависящее только от α^∞ и о.д.функции f^1, что для любого набора $(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots \alpha_{i-1}^\infty \gamma^\infty \alpha_{i+1}^\infty, \ldots \alpha_r^\infty)$, где $\gamma^\infty]_t = \alpha^\infty]_t$ сверхслова γ^∞ $f_1(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots \alpha_{i-1}^\infty, \gamma^\infty, \alpha_{i+1}^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ совпадают, начиная с разрядов, номера которых больше, чем t_0. Скажем, что переменное x_i о.д. функции f^1 обладает $\mathcal{F}$ - свойством на множестве $C \subseteq A^*$, если оно обладает $\mathcal{F}$ - свойством на каждом сверхслове из C. Если множество C состоит из периодических последовательностей, то будем иногда говорить, что указанное переменное обладает $\mathcal{F}$ - свойством на множестве $V_{\mathcal{B}} = \bigcup_{\beta^\infty \in \mathcal{B}} \{\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)\}$. Нетрудно видеть, что если $Z' \subseteq Z$ и $Z' = \bigcup_{\beta^\infty \in \mathcal{B}} \{\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)\}$ то при $Z' =]Z'[$ всякая о.д.функция f^1, некоторое переменное которой обладает $\mathcal{F}$ - свойством на множестве $\mathcal{B}$, сохраняет Z'. О.д.функция $f^1(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ называется почти константой, если существует такое число $t(f^1)$, что для любых наборов сверхслов $(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ и $(\gamma_1^\infty, \gamma_2^\infty, \ldots, \gamma_r^\infty)$ сверхслова β^∞ и δ^∞, где $\beta^\infty = f^1(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ и $\delta^\infty = f^1(\gamma_1^\infty, \gamma_2^\infty, \ldots, \gamma_r^\infty)$, совпадают между собой, начиная с разряда под номером $t(f^1)$. Очевидно, всякая о.д.функция из Z является почти константой.

Рассмотрим счетное множество периодических последовательностей β_n^∞, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что последовательность β_n^∞ состоит из двух чередующихся блоков, первый из которых представляет кортеж из нулей длины n, а второй состоит из одной единицы. Введем обозначение $\tilde{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\Gamma_{\beta_n^\infty}(x_1)\}$. Установим ряд свойств множества $\tilde{Z}$.

Лемма 1. Если $Z_1 \subseteq \tilde{Z}$, $Z_2 \subseteq \tilde{Z}$ и $Z_1 \neq Z_2$, то $]Z_1[\neq]Z_2[$

Доказательство. По условию множества Z_1 и Z_2 различные. Пусть

для определенности множество $\mathcal{B}_1$ содержит некоторую о.д.функцию $\Gamma_{\beta_k^\infty}(x_1)$ такую, что $\Gamma_{\beta_k^\infty}(x_1) \notin Z_2$. Отметим одно свойство этой о.д.функции. Именно, последовательности β_k^∞ как угодно далеко встречаются кортежи вида $1\ 0\ 1$, где блок из нулей имеет длину k. Очевидно, ни одна о.д. функция из Z_2 не обладает этим свойством. Отсюда следует, что этим свойством не обладает ни одна о.д.функция из множества $]Z_2[$. И, так как $\Gamma_{\beta_k^\infty}(x_1) \in Z_1$, то $]Z_1[\neq]Z_2[$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{U}(Z')$, где $Z' \subseteq Z$ и $Z' \neq \emptyset$, множество всех о.д.функций $f^\sigma(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_r})$, таких, что каждая из о.д. функций f_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, r$, либо почти константная сохраняющая множество $]Z'[$, либо имеет переменное, обладающее $\mathcal{F}$ - свойством на множестве $]Z'[$. Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{U}(Z')$ сохраняет множество $]Z'[$ и что $Z \cap \mathcal{U}(Z') =]Z'[$.

Лемма 2. Если $Z' \subseteq Z$, то $\mathcal{U}(Z') = [\mathcal{U}(Z')]_k$.

Доказательство. Замкнутость множества $\mathcal{U}(Z')$, очевидно, будет следовать из того, что применение операций композиции 2–7 к о.д.функциям из $\mathcal{U}(Z')$ снова приводит к о.д.функциям из $\mathcal{U}(Z')$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что описанным свойством обладают операции 2,3,4 и 7. Покажем, что это свойство сохраняется и по отношению к операциям 5 и 6.

Рассмотрим сначала операцию 5. В этом случае достаточно ограничиться исследованием поведения о.д.функций f^σ при $\sigma = 1$. Пусть $f_1'(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ и $f_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{r+m})$ содержатся в $\mathcal{U}(Z$

Рассмотрим о.д.функцию

$$h^1(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r, \ldots, x_{r+\ell}) = f_1'(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(x_r, \ldots, x_{r+m}), x_{i+1}, \ldots, x_r)$$

Возможны следующие случаи.

I. О.д.функция f_1' почти константная. Тогда, очевидно, о.д.функция h^1 также почти константная, сохраняющая множество $]Z'[$.

2. О.д.функция f_1' имеет переменное x_ℓ, обладающее $\mathcal{F}$ - свойством на множестве $]Z'[$. Если $i \neq \ell$, то, очевидно, переменное x_ℓ о.д.функции h^1 также обладает $\mathcal{F}$ - свойством на множестве $]Z'[$. Пусть $i = \ell$, тогда возможны такие подслучаи.

а. О.д.функция f_2^1 почти конотантная, сохраняющая множество $]Z'[$. Покажем, что тогда о.д.функция h^1 также почти константная сохраняющая множество $]Z'[$. Пусть известно $t(f_2')$ и пусть f_2' отображает некоторый набор сверхслов в сверхслово $\delta^\infty = d(1)d(2)\ldots d(t(f_2'))\ldots$, где значения $d(t(f_2')+j)$, $j \geq 1$, остаются неизменными для любого набора сверхслов значений переменных о.д.функции f_2'. Так как о.д.функция f_2' по условию сохраняет множество $]Z'[$, то на любой последовательности вида $\varepsilon^\infty = e(1)e(2)\ldots e(t(f_2'))d(t(f_2')+1)\ldots d(t(f_2')+j)\ldots$, переменное x_ℓ о.д.функции f_1^1 обладает $\mathcal{F}$ - свойством. Таких последовательностей $2^{t(f_2')}$ и относительно каждой из них переменное x_ℓ имеет свое значение $t(f_2', \varepsilon^\infty)$. Выберем среди этих чисел наибольшее число t_1. Тогда нетрудно видеть, что о.д.функция f_1^1 отображает любой набор сверхслов $(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty, \ldots, \alpha_{i-1}^\infty, \varepsilon^\infty, \alpha_{i+1}^\infty, \ldots, \alpha_r^\infty)$ в сверхслово $\beta^\infty = b(1)b(2)\ldots b(t_1)$. Отсюда следует, что о.д.функция h^1 является почти константной и $t(h^1) = t_1$.

б. О.д.функция f_2^1 имеет переменное x_k, $k = r+1, \ldots, r+m$, обладающее $\mathcal{F}$ - свойством на множестве $]Z'[$. Покажем, что тогда переменное x_k о.д.функции h^1 обладает $\mathcal{F}$ -свойством на множестве $]Z'[$. Пусть $\Gamma_{\delta^\infty}(x_1) \in]Z^1[$, где $\delta^\infty = d(1)d(2)\ldots$, и известно $t(f_2^1, \delta^\infty)$. Рассмотрим все последовательности ε^∞, которые

могут отличаться от δ^{∞} только в первых $t(f_2^1,\delta^{\infty})$ разрядах. Таких последовательностей ровно $2^{t(f_2^1,\delta^{\infty})}$. Так как $\Gamma_{\delta^{\infty}}(x_1)\in\,]Z^1[$, то переменное x_k о.д.функции f_1^1 обладает $\mathcal{F}$ - свойством на этих последовательностях и относительно каждой из них переменное x_k имеет свое число $t(f_2^1,\varepsilon^{\infty})$. Выберем среди этих чисел наибольшее число t_1. Теперь нетрудно видеть, что переменное x_k о.д.функции h^1 обладает $\mathcal{F}$-свойством на последовательности δ^{∞} и $t(h^1,\delta^{\infty})=t_1$.

Рассмотрим теперь операцию 6. Пусть имеется о.д.функция $f^{\sigma}(x_1,x_2,\ldots,x_r,x_{r+1})=(f_1^1,f_2^1,\ldots,f_{\sigma}^1)$ и пусть о.д.функция $g^{\sigma}(x_1,x_2,\ldots,x_r)=(g_1^1,g_2^1,\ldots,g_{\sigma}^1)$ получена из f_1^{σ} путем применения операции 6 к переменному x_{r+1} и к j -ой координате функции f^{σ}, $j=1,2,\ldots,\sigma$. Зафиксируем о.д.функцию f_l^1, $l=1,\ldots,\sigma$ и рассмотрим несколько случаев.

I. О.д.функция f_l^1 является почти константой, сохраняющей множество $]Z'[$. Тогда о.д.функция g_l также является почти константой, сохраняющей множество $]Z'[$, $l=1,\ldots,\sigma$.

2. О.д.функции f_l имеет переменное x_m, которое обладает $\mathcal{F}$-свойством на множеотве $]Z'[$. Тогда, если $m\neq r+1$, то, очевидно, переменное x_m о.д.функции g_l также обладает $\mathcal{F}$ -свойством на множестве $]Z'[$. Пусть теперь $m=r+1$. Заметим, что если о.д.функция со сдвигом зависит от некоторого переменного, то это переменное не может обладать $\mathcal{F}$ - свойством ни на каком множестве $]Z'[$. Отсюда следует, что $l\neq j$. Таким образом, нам осталось рассмотреть случай, когда переменное x_{r+1} о.д.функции f_l обладает $\mathcal{F}$ -свойством на $]Z'[$ и при этом $l\neq j$. Возможны два подслучая.

а. О.д.функция f_j^1 является почти константной, сохраняющей множество $]Z'[$. Тогда нетрудно видеть, что g_l^1 также является почти константой, сохраняющей $]Z'[$.

б. О.д.функции f_j^1 имеет переменное x_n, обладающее $\mathcal{F}$ - свойством на $]Z'[$. Как отмечалось, $n\neq r+1$. Ясно, что тогда переменное x_n о.д.функции g_l^1 также будет обладать $\mathcal{F}$ -свойством на $]Z'[$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если $Z'\subseteq Z$, $Z'=]Z['$ и $\Gamma_{\beta^{\infty}}(x_1)\notin Z'$, то $[\mathcal{U}(Z')\cup\{\Gamma_{\beta^{\infty}}(x_1)\}]_K=P$.

Доказательство. Пусть $f^1(x_2,x_3,\ldots,x_r)$ - произвольная о.д.функция из P. Обозначим через $T^1_{\beta^{\infty},f^1}(x_1,x_2,\ldots,x_r)$ о.д.функцию из $\mathcal{U}(Z')$, обладающую следующими двумя свойствами:

I) $T^1_{\beta^{\infty},f^1}(\Gamma_{\beta^{\infty}}(x_2),x_2,\ldots,x_r))=f^1(x_2,x_3,\ldots,x_r)$

2) переменное x_1 о.д.функции $T^1_{\beta^{\infty},f^1}$ обладает $\mathcal{F}$ -свойством на множестве Z'.

Наше утверждение, очевидно, будет следовать из того, что для каждой о.д.функции $f^1(x_2,\ldots,x_r)$ в $\mathcal{U}(Z')$ найдется о.д.функция T_{β^{∞},f^1}. Существование такой о.д.функции в $\mathcal{U}(Z')$ можно установить следующим образом. Рассмотрим о.д.функцию, реализуемую схемой S, изображенной на рис. и построенную из схем $S_1(x_1;1,2,\ldots s_i;1)$, $S_2(x_1,x_2,1)$, $S_3(x_1,x_2,1$ $S_4(x_1,1;1)$, $S_5(x_2,x_3,\ldots,x_r,1\ldots s_i;1)$ и $S_6(x_1,x_2,x_3;1)$, которые реализуют соответственно о.д.функции $\Gamma_{\beta^{\infty}}(x_1)$, $(\bar{x}_1\&\bar{x}_2)\cup(x_1\&x_2)$, $x_1\&x_2$, $\mathcal{D}_1x_1$, $f^1(x_2,x_3,\ldots x_r)$ и $(\bar{x}_1\&x_2)\cup(x_1\&x_3)$. Нетрудно убедиться в том, что схема $S(x_1,x_2,\ldots,x_r$ $1,2,\ldots,s_1,\ldots,s_1+s_2+1;1)$ реализует о.д.функцию $T^1_{\beta^{\infty},f^1}(x_1,x_2,\ldots,x_r)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.16 .

Выберем в счетном множестве $\tilde{Z}$ континуальное семейство $\mathcal{K}$ непустых подмножеств Z_σ, таких, что при $\sigma \neq \sigma'$ имеет место $Z_\sigma \not\subseteq Z_{\sigma'}$ и $Z_{\sigma'} \not\subseteq Z_\sigma$. Рассмотрим семейство $\mathcal{U}(\mathcal{K})$ всех классов $\mathcal{U}(Z_\sigma)$. В силу леммы 2 каждый из классов $\mathcal{U}(Z_\sigma)$ замкнут, так как $]\tilde{Z}[\neq Z$, и, как отмечалось $\mathcal{U}(Z_\sigma) \cap Z =]Z_\sigma[$, то $\mathcal{U}(Z_\sigma) \neq P$. Из леммы 1 и соотношения $\mathcal{U}(Z_\sigma) \cap Z =]Z_\sigma[$ следует также, что при $\sigma \neq \sigma'$ справедливо $\mathcal{U}(Z_\sigma) \not\subseteq \mathcal{U}(Z_{\sigma'})$ и $\mathcal{U}(Z_{\sigma'}) \not\subseteq \mathcal{U}(Z_\sigma)$. Далее, из теоремы 3.15 вытекает, что всякий класс $\mathcal{U}(Z_\sigma)$ содержится в некотором предполном классе Π_σ. Покажем, что если $\sigma \neq \sigma'$, то $\Pi_\sigma \neq \Pi_{\sigma'}$, отсюда будет вытекать справедливость теоремы 3.16 . Предположим противное, то есть, что при некоторых σ и σ', $\sigma \neq \sigma'$, имеет место $\Pi_\sigma = \Pi_{\sigma'}$. Рассмотрим классы $\mathcal{U}(Z_\sigma)$ и $\mathcal{U}(Z_{\sigma'})$. В силу изложенного выше в $\mathcal{U}(Z_{\sigma'})$ найдется константная о.д.функция $\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)$ такая, что $\Gamma_{\beta^\infty}(x_1) \notin \mathcal{U}(Z_\sigma)$, но тогда по лемме 3 будет иметь место $[\mathcal{U}(Z_\sigma) \cup \{\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)\}] = P$, что противоречит соотношениям $(\mathcal{U}(Z_\sigma) \cup \mathcal{U}(Z_{\sigma'})) \subseteq \Pi_\sigma \subset P$. Теорема доказана.

Если ограничиться исследование на полноту только конечных систем, то оказывается справедливой следующая

Теорема 3.17 . Существует счетная система предполных классов, невключение в каждый из которых является необходимым и достаточным условием полноты любой конечной системы о.д.функций, и не существует конечной системы предполных классов с таким свойством.

Доказательство. Рассмотрим множество всех неполных конечных систем $\mathcal{M}_\sigma$ о.д.функций. Это множество счетно. Для каждого элемента $\mathcal{M}_\sigma$ этого множества, как это следует из теоремы 3.15, существует некоторый предполный класс Π_σ, такой, что $\Pi_\sigma \supseteq \mathcal{M}_\sigma$. Очевидно, счетная система классов Π_σ будет удовлетворять условиям нашей теоремы. Заметим, далее, что, так как, в силу теоремы 3.16 , существует бесконечно много предполных классов, то для любой конечной системы предполных классов $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r$ найдется предполный класс Π_{r+1}, отличный от каждого из этих классов. Пусть $f_i \in \Pi_{r+1} \setminus \Pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, тогда $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\} \not\subseteq \Pi_i$ и в то же время $\{f_1, \ldots, f_r\} \subseteq \Pi_{r+1} \subset P$. Отсюда следует вторая часть теоремы. Теорема доказана.

Рис.85

§ 6. Алгебраический подход к задаче об $\mathcal{A}$ -полноте.

По аналогии с понятием критериальной системы, рассмотренным в предыдущем параграфе, введем понятие $\mathcal{A}$ -критериальной системы. Система Σ_A -замкнутых подмножеств P называется $\mathcal{A}$ -критериальной, если произвольное множество $\mathcal{M} \subseteq P$ является $\mathcal{A}$ -полным тогда и только тогда, когда для любого элемента $\mathcal{N} \in \Sigma_A$ имеет место $\mathcal{M} \nsubseteq \mathcal{N}$. $\mathcal{A}$ -критериальные системы существуют: примером такой системы является множество тех и только тех замкнутых подмножеств P, которые не являются $\mathcal{A}$ -полными. В силу того, что существуют $\mathcal{A}$ -полные замкнутые подмножества P, которые не являются полными, никакая критериальная система не является $\mathcal{A}$ -критериальной и наоборот. Как следует из теоремы 3.16 мощность всякой критериальной системы равна континууму, и, следовательно, никакая критериальная система не может быть описана эффективно. Вместе с тем в § 3 (теоремы 3.7, 3.9) установлено существенное различие задач о полноте и $\mathcal{A}$ -полноте для о.д. функций. Поэтому возникает вопрос существуют ли $\mathcal{A}$ -критериальные системы которые могут быть описаны эффективно. Пусть $\Sigma_{\mathcal{A}}$ - $\mathcal{A}$ -критериальная система. Система $\Sigma_{\mathcal{A}}$ называется приведенной $\mathcal{A}$ -критериальной системой, если никакое её собственное подмножество не является $\mathcal{A}$ -критериальной. Замкнутое множество $\mathcal{N} \subset P$ называется $\mathcal{A}$ -предполным классом, если $\mathcal{N}$ не является $\mathcal{A}$ -полным, но для любой функции $f \notin \mathcal{N}$ множество $\{\mathcal{N} \cup f\}$ $\mathcal{A}$ -полно.

Теорема 3.18 [21] Множество $\mathcal{A}$ -предполных классов образует счетную приведенную $\mathcal{A}$ -критериальную систему. Для доказательства этой теоремы, нам потребуются некоторые понятия и вспомогательные утверждения. Пусть τ произвольное натуральное число. Всякое замкнутое подмножество P назовем τ -замкнутым, если оно не является τ -эквивалентным P. τ -замкнутое множество $\mathcal{M}$ назовем τ -предполным классом, если для любой о.д.функции $f^1 \notin \mathcal{M}$ множество $[\{f^1\} \cup \mathcal{M}]$ является τ -эквивалентным P. Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Для всякой последовательности $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2,$ замкнутых подмножеств P такой, что $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{M}_{i-1} \subseteq \mathcal{M}_i \subseteq \ldots$ и такой, что множество $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$ τ -эквивалентно P существует натуральное число S такое, что всякое множество $\mathcal{M}_j$, где $j \geq S$ τ -эквивалентно P.

Доказательство. В силу того, что множества $\mathcal{M}$ и P τ -эквивалентны, в $\mathcal{M}$ найдутся о.д.функции $f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1$ и f_5^1, τ-эквивалентные, соответственно, о.д.функциям $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$, $\overline{x}_1$, $\mathcal{D}_0 x_1$, $\mathcal{D}_1 x_1$ Пусть $f_1^1 \in \mathcal{M}_{s_1}$, $f_2^1 \in \mathcal{M}_{s_2}$, , $f_5^1 \in \mathcal{M}_{s_5}$. Обозначим через $S = max\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$. Ясно, что $\{f_1^1, \ldots f_5^1\}$. Но в таком случае множество $\mathcal{M}_S$ τ - эквивалентно P, ч.т.д.

Лемма 2. Всякое τ -замкнутое подмножество P может быть расширено до τ - предполного класса.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}_1$ -произвольное τ -замкнутое множество. Если $\mathcal{M}_1$ -является τ -предполным, то, очевидно, $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$. Пусть $\mathcal{M}_1$ - не является τ -предполным. Тогда существует некоторое множество о.д.функций $\mathcal{N}_1$ такое, что добавление к $\mathcal{M}_1$ любой о.д.функции из $\mathcal{N}_1$ не превращает $\mathcal{M}_1$ в множество, τ -эквивалентное P. Упорядочим множество $\mathcal{N}_1$ произвольным образом

$$f_{11}^1, f_{12}^1, \ldots \qquad (I)$$

Рассмотрим $\mathcal{M}_2 = [\{f_{11}^1\} \cup \mathcal{M}_1]$. Ясно, что $\mathcal{M}_2$ является τ -замкнутым множеством. Если $\mathcal{M}_2$ - τ -предполный класс, то $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ Утверждение леммы доказано. Пусть $\mathcal{M}_2$ - не является τ -предполным

классом. Тогда существует множество о.д.функций $\mathcal{N}_2$ такое, что добавление к $\mathcal{M}_2$ произвольной о.д.функции из $\mathcal{N}_2$ не превращает $\mathcal{M}_2$ в множество, τ - эквивалентное P. Очевидно $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$. Упорядочим элементы множества $\mathcal{N}_2$ так, что последовательность

$$f^1_{21}, f^1_{22}, \ldots, \qquad (2)$$

является подпоследовательностью последовательности (1). Рассмотрим множество $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 \cup \{f^1_{21}\}$ и т.д. Возможны следующие случаи. Либо этот процесс закончится построением τ -предполного класса, содержащего множество $\mathcal{M}_1$, либо существует такая последовательность τ -замкнутых множеств $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3 \subset \ldots$ что для любого натурального числа j множество $\mathcal{M}_j$ не является τ - предполным классом. Рассмотрим множество $\mathcal{M} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}_i$. Множество $\mathcal{M}$ не может быть τ -эквивалентным P, т.к. в этом случае согласно лемме найдется такое натуральное число s, что множество $\mathcal{M}_s$ τ -эквивалентно P, а это противоречит построению последовательности $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$. Предположим, что $\mathcal{M}$ является τ - замкнутым, но не является τ - предполным. Тогда существует о.д.функция $f^1 \notin \mathcal{M}$ и такая, что множество $[\mathcal{M} \cup \{f^1\}]$ не является τ -эквивалентным P. Но в таком случае о.д.функция $f^1 \in \mathcal{N}_1$. Пусть в последовательности (I) о.д.функция f^1 стоит на j -ом месте, т.е. $f^1 = f^1_j$. Но тогда по построению о.д.функция f^1 принадлежит по крайней мере множеству $\mathcal{M}_{j+1}$, т.е. $f^1 \in \mathcal{M}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathcal{M}$ является τ -предполным классом, $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ и утверждение леммы доказано.

Пусть $\mathcal{M}$ - произвольное подмножество P. Будем говорить, что о.д.функция $f^1(x_1, \ldots, x_\tau)$ обладает $\mathcal{M}$ -свойством, если для всякого набора $g^1_1(x_1, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, g^1_\tau(x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau p_\tau})$ о.д.функций из $\mathcal{M}$ о.д.функция $f^1(g^1_1(x_1, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, g^1_\tau(x_{\tau 1}, \ldots, x_{\tau p_\tau})$ также принадлежит $\mathcal{M}$. Рассмотрим замкнутое множество $P^\tau \subset P$, которое определим следующим образом: для всякой о.д.функции $f^1(x_1, \ldots, x_\tau)$ в P^τ найдется о.д.функция $f^1_\tau(x_1, \ldots, x_\tau)$ такая, что для любого набора $\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_\tau^\infty$ элементов из J первые τ разрядов последовательностей $f^1(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_\tau^\infty)$ и $f^1_\tau(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_\tau^\infty)$ совпадают, причем, если $f^1_\tau(\alpha_1^\infty, \ldots, \alpha_\tau^\infty) = \beta^\infty$, то для всех $t > \tau$ $\beta(t) = 0$. Аналогично любому подмножеству $\mathcal{M}$ множества P поставим в соответствие множество $\mathcal{M}^\tau$. Очевидно, $\mathcal{M}^\tau \subset P^\tau$.

Лемма 3. Для любого натурального числа τ число τ - предполных классов конечно и все они могут быть описаны эффективно.

Доказательство. Рассмотрим множество P_2^τ всех о.д.функций из P^τ, зависящих не более чем от 2 -ух переменных. Очевидно, что множество конечно и его мощность не превышает числа всех отображений множества $J^\tau \times J^\tau$ в J^τ, т.е. мощность P_2^τ не больше, чем $(2^\tau)^{2^{2\tau}}$. Пусть $S^2 = \{S_1, \ldots, S_p\}$ множество всех подмножеств множества P_2^τ. Ясно, что $p = 2^{2^{2\tau} \cdot \tau}$. Рассмотрим множество $S_1^2 = \{S_{i1}, \ldots, S_{ip_i}\}$ всех таких множеств из S^2, что всякая о.д.функция $f^1 \in S_{ij}$, $1 \le j \le p_i$ обладает S_{ij} - свойством и таких, что никакое множество S_{ij}, $1 \le j \le p_i$ не содержит подмножества о.д.функций τ -эквивалентного множеству $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, \mathcal{D}_0 x_1, \mathcal{D}_1 x_1\}$. В силу того, что мощность множества S^2 конечна и каждый элемент этого множества состоит из конечного числа о.д.функций, процедура построения множества S_1^2 является эффективной. Для каждого множества S_{ij} из S_1^2 определим множество $P(S_{ij})$ всех тех и только тех о.д.функций которые обладают S_{ij} - свойством. В силу конечности множества S_{ij} $1 \le j \le p_i$ существует эффективная процедура распознавания принадлежности произвольной о.д.функции множеству $P(S_{ij})$.

Покажем, что для любого τ - замкнутого множества $\mathcal{M}$ существу-

от , $1 < j \le p$. такое, что $\mathcal{M} \subseteq P(S_{ij})$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}^\tau$. Очевидно, множество $\mathcal{M}^\tau$ является τ-замкнутым и принадлежит . Рассмотрим множество $\mathcal{M}_2^\tau$ всех о.д.функций из $\mathcal{M}^\tau$ зависящих не более чем от двух переменных. В силу τ-замкнутости множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^\tau$, множество $\mathcal{M}_2^\tau$ обладает $\mathcal{M}_2^\tau$-свойством. С другой стороны, т.к. $\mathcal{M}$ не является -эквивалентным P множество $\mathcal{M}_2^\tau$ не содержит подмножества, τ - эквивалентного множеству $\{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, \mathcal{D}_0 x_1, \mathcal{D}_1 x_1\}$. Следовательно, множество $\mathcal{M}_2^\tau$ совпадает с одним из множеств системы S_1^2. Пусть $\mathcal{M}_2^\tau = S_{ij}$, $1 < j < p_i$. Тогда, очевидно, любая о.д.функция из $\mathcal{M}$ обладает S_{ij}-свойством, поэтому $\mathcal{M} \subseteq P(S_{ij})$. Из определения множества S_1^2 следует также, что для всякого $j = 1, 2, \ldots p_i$ множество $P(S_{ij})$ не является τ-эквивалентным P. Таким образом, все τ- предполные классы содержатся среди множеств $P(S_{i1}), \ldots, P(S_{ip_i})$, каждое из которых может быть описано эффективно. Вместе с тем среди множеств $P(S_{i1}), \ldots, P(S_{ip_i})$ могут содержаться такие, которые не являются τ-предполными. Покажем, что существует эффективная процедура распознавания τ - предполноты множеств $P(S_{i1}), \ldots, P(S_{ip_i})$.

Для любого $j = 1, \ldots, p_i$ рассмотрим множество R_i всех о.д.функций из $P(S_{ij})$, которые зависят не более, чем от $(2^\tau)^{2^\tau}$ переменных. Легко видеть, что для всякой о.д.функции $f(x_1, \ldots, x_\tau)$ из $P(S_{ij})$, $1 \le j \le p_i$, справедливо следующее: а) если $\tau \le 2^{\tau \cdot 2^{2\tau \cdot \tau}}$, то $f^1(x_1, \ldots, x_\tau) \in R_{ij}$ б) если $\tau > 2^{2^{2\tau \cdot \tau}} \cdot \tau$, то в результате любой замены (операция 7) переменных $x_1, \ldots, x_\tau$ о.д.функции f^1 переменными $x_1, \ldots, x_{2^{2^{2\tau \cdot \tau}}}$ получается о.д.функция, принадлежащая множеству R_{ij}. Отсюда сразу следует, что $P(S_{ij_1}) \subseteq P(S_{ij_2})$ $1 \le j_1, j_2 \le p$, тогда и только тогда, когда $R_{ij_1} \subseteq R_{ij_2}$. Однако для любых j_1 и j_2, $j_1, j_2 = 1, \ldots, p_i$, в силу конечности множеств R_{ij_1} и R_{ij_2} распознавание свойств $R_{ij_1} \subseteq R_{ij_2}$ или $R_{ij_2} \subseteq R_{ij_1}$ является эффективным. Таким образом утверждение леммы доказано.

Лемма 4. Для любого натурального числа τ всякий τ-предполный класс является $\mathcal{A}$ - предполным.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ является τ-предполным классом. Тогда для любой о.д.функции $f^1 \notin \mathcal{M}$ в множестве $[\{f^1\} \cup \mathcal{M}]$ содержатся о.д.функции f_1^1, f_5^1 τ - эквивалентные соответственно о.д.функциям $x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1, \mathcal{D}_0 x_1, \mathcal{D}_1 x_1$. Рассмотрим о.д.функции $f_6^1, \ldots, f_{10}^1, f_{11}^1$ которые обладают следующими свойствами. Пусть для любого набора $(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty)$ элементов из $\mathcal{J}$ и любого элемента α^∞ из $\mathcal{J}$

$$f_6(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty) = \beta_6^\infty \quad f_7(\ \ ) = \beta_7^\infty, \quad f_8(\alpha^\infty) = \beta_8^\infty,$$

$$f_9(\alpha^\infty) = \beta_9^\infty, \quad f_{10}(\alpha^\infty) = \beta_{10}^\infty, \quad f_{11}(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty) = \beta_{11}^\infty,$$

$$\mathcal{D}_0(\alpha^\infty) = \beta_0^\infty, \quad \mathcal{D}_1(\alpha^\infty) = \beta_1^\infty.$$

Тогда для любого i, $1 \le i \le \tau$ $\beta_6(i) = \beta_7(i) = \beta_8(i) = \beta_9(i) = \beta_{10}(i) = \beta_{11}(i) = \alpha_1(i)$ для любого $j = \tau$ $\beta_6(j) = \alpha_1(j) \& \alpha_2(j)$, $\beta_7(j) = \alpha_1(j) \vee \alpha_2(j)$ $\beta_8(j) = \alpha(j)$, $\beta_9(j) = \beta_0(j)$, $\beta_{10}(j) = \beta_1^\infty$, $\beta_{11}(j) = \alpha_2(j)$.

Очевидно, все эти о.д. функции принадлежат $\mathcal{M}$. Рассмотрим о. д. функции

$$f_{11}(f_1^1, f_6^1), \quad f_{11}(f_2^1, f_7^1), \quad f_{11}(f_3^1, f_8^1),$$

$$f_{11}(f_4^1, f_9^1), \quad f_{11}(f_5^1, f_{10}^1).$$ Легко видеть, что эти о.д. функции совпадают соответственно с о.д.функциями $x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}_1$ $\mathcal{D}_0(x_1), \mathcal{D}_1(x_1)$. Отсюда следует, что $\mathcal{M}$ $\mathcal{A}$ - предполный класс.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{M}$ - $\mathcal{A}$ - предполный класс. Тогда существует такое натуральное число τ, что $\mathcal{M}$ - τ-предполный класс.

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{M}$ не может быть τ-эквивалентным P для

любого натурального числа τ, т.к. в этом случае множество $\mathcal{M}$ было бы A -полным. Также, очевидно, что не существует такого натурального числа τ, что $\mathcal{M}$ является τ - замкнутым, но не τ - предполным. Из этого следует справедливость леммы .

Лемма 6 . Для всякого натурального числа τ существует τ предполный класс $\mathcal{M}$, который для любого $\tau' < \tau$ является τ -эквивалентным P .

Доказательство. Рассмотрим множество $P^{\tau-1}$. Очевидно, что множество τ'-эквивалентно P для любого $\tau' < \tau-1$. С другой стороны, ясно, что $P^{\tau-1}$ не является τ - эквивалентным P . Но тогда τ - замкнутое множество $P^{\tau-1}$ можно расширить до τ - предполного класса.

Из лемм 1-6 следует справедливость теоремы 3.18 .

§ 7. Алгоритмический подход к задаче о полноте и A -полноте конечных систем о.д. функций.

Целью настоящего параграфа является доказательство теорем об алгоритмической неразрешимости распознавания полноты и A - полноты конечных систем о.д.функций. Прежде чем доказывать эти теоремы напомним некоторые факты из теории алгоритмов.

Пусть $\mathcal{D}$ - произвольный конечный алфавит и $\mathcal{D}^*$ - множество слоев в этом алфавите. В качестве метаобозначений букв из алфавита $\mathcal{D}$ используем символы $b_1, \ldots, b_p$. Каждой букве b_j , $1 \le j \le p$, из алфавита $\mathcal{D}$ однозначно поставим в соответствие слово L_j из $\mathcal{D}^*$. Множество пар $\{(b_1, L_1), \ldots, (b_p, L_p)\}$ обозначим $\tilde{\mathcal{D}}$ и будем считать, что каждое непустое слово L_j , $1 \le j \le p$, суть $b_{j1} \ldots b_{js_j}$. Пусть ω - фиксированное положительное натуральное число, большее или равное единице. Алфавит $\mathcal{D}$, множество пар $\tilde{\mathcal{D}}$, а также число ω определяют некоторую однородную систему продукций Поста T в алфавите $\mathcal{D}$ с шагом ω . Однородная система продукций Поста T применима к слову $b_{i1} \ldots b_{il}$ тогда и только тогда, когда $l \ge \omega$, причем если L_{i_1} не пусто, то результатом применения системы T к этому слову является слово $b_{i\omega+1} \ldots b_{il} b_{i_1 1} \ldots b_{i_1 s_{i_1}}$, при $l > \omega$ или слово L_{i_1} при $l = \omega$. Если слово L_{i_1} пусто, то результатом применения системы T к слову $b_{i_1} \ldots b_{il}$ является слово $b_{i\omega+1} \ldots b_{il}$ при $l > \omega$ или пустое слово в противном случае. Пусть L произвольное слово в алфавите $\mathcal{D}$. Слово L' называется T -продукцией слова L , если существует последовательность слов $L_0, L_1, \ldots, L_q$ такая, что слова L и L' совпадают со словами L_0 и L_q соответственно, и для каждого i , $1 \le i \le q$ слово L_i является результатом применения системы однородных продукций Поста T к слову L_{i-1} . Из этого определения следует, что множество всех T - продукций слова L рекурсивно перечислимо и образует последовательность $T(L)$, которая начинается со слова L и каждое последующее слово этой последовательности является результатом применения системы однородных продукций T к предыдущему. Возможны два случая: либо последовательность $T(L)$ конечна, т.е. процесс ее построения "останавливается" на конечном шаге, либо эта последовательность бесконечна. Последнее означает, что длина любой T- продукции слова L не меньше числа ω - шага системы T Возникает следующая проблема (проблема остановки): существует ли алгоритм, который по произвольному наперед заданному слову L устанавливает, конечно или нет множество всех T -продукций данного слова, другими словами, "останавливается" или нет процесс построения последовательности $T(L)$ всех T- продукций слова L . Оказывается, существуют однородные системы продукций Поста, для которых эта проблема является алгоритмически неразре-

шимой. В дальнейшем нам будет важен сам факт существования однородных систем продукций с неразрешимой проблемой остановки, а конкретный вид их несущественен. Поэтому будем считать, что одна из таких систем задана некоторым алфавитом, мощность которого равна p, а шаг ее равен ω. Тогда, как легко видеть, используя любой алфавит мощности p, можно также задать однородную систему продукций с шагом ω, для которой проблема остановки алгоритмически неразрешима. Пусть имеется система, обладающая этим свойством, заданная алфавитом $E = \{3,4, \ldots, p+2\}$, шагом ω и множеством пар $\tilde{E} = \{(3,L_3), \ldots, (p+2, L_{p+2})\}$. Обозначим эту систему через T_0 и не ограничивая общности будем считать, что каждое непустое слово L_j, $3 \le j \le p+2$, суть $\ell_{j_1}, \ldots \ell_{j s_j}$.

Рассмотрим алфавит $E_{K_0} = \{0, 1, \ldots, K_0 - 1\}$,

где $K_0 = p+5$,

и множество о.д.функций, входные и выходные переменные которых принимают значения на множестве $E^*_{K_0}$. Заметим, что $E \subset E_{K_0}$. Пусть L – произвольное слово в алфавите E. Слову L поставим в соответствие некоторую систему, состоящую из четырех о.д.функций f^1_L, f^1_0, g^1_1 и g^1_2. Нашей ближайшей целью является доказательство того, что система $C_1(L)$, состоящая из о.д.функций f^1_L, f^1_0, g^1_1 полна тогда и только тогда, когда множество T_0 – продукций слова L конечно, а система $C_2(L)$ состоящая из о.д.функций f^1_L, f^1_0, g^1_2 А – полна в противном случае. Для доказательства этих утверждений нам понадобятся, вообще говоря, лишь отдельные свойства о.д.функций f^1_0, f^1_L, g^1_1 и g^1_2. Поэтому сначала зададим отображения, осуществляемые о.д.функциями f^1_L и g^1_2, затем сформулируем свойства, которым должны удовлетворять о.д.функции f^1_0 и g^1_1 и покажем, что о.д.функции, удовлетворяющие этим свойствам, существуют. Для этого введем следующие определения. Сверхслово α^∞ из $E^\infty_{K_0}$ назовем I-сверхсловом, если оно имеет вид $2 \cdots 2\, \ell_{i_1} \ldots \ell_{i_\ell}\, 1 \ldots 1$ (до бесконечности символ I), причем число двоек, стоящих в начале сверхслова α^∞ может быть равно нулю. Слово $\ell_{i_1} \ldots \ell_{i_\ell}$ принадлежит множеству E^* и называется E – словом I-сверхслова α^∞. Сверхслово из $E^\infty_{K_0}$, имеющее вид $\alpha(1) \ldots \alpha(\tau) 0 \ldots 0 \ldots$, где начиная с некоторого места и до бесконечности стоит символ 0, назовем 0-сверхсловом. О.д.функция $f^1_L(x)$ осуществляет отображение множества $E^\infty_{K_0}$ в себя и является константной о. д. функцией такой, что для всякого сверхслова α^∞ из $E^\infty_{K_0}$ $f^1_L(x)$ суть I-сверхслово с единственной двойкой, стоящей в его начале и такое, что E –слово этого сверхслова совпадает со словом L. О.д.функция $g^1_2(x,y,z)$ осуществляет отображение множества $E^\infty_{K_0} \times E^\infty_{K_0} \times E^\infty_{K_0}$ в множество $E^\infty_{K_0}$. Для этой о.д.функции справедливо следующее. Пусть α^∞_1, α^∞_2, α^∞_3 некоторый набор сверхслов из $E^\infty_{K_0}$, где $\alpha^\infty_i = (a_i(1) \ldots)$ $i=1,2,3$. Если для любого t $(t \ge 1)$ $a_3(t) = 2$, то сверхслово $g^1_2(\alpha^\infty_1, \alpha^\infty_2, \alpha^\infty_3)$ совпадает со сверхсловом $f_u(\alpha^\infty_1, \alpha^\infty_2)$, где $f_u(x,y)$ – универсальная о.д.функция (§ 4). Пусть существует такое натуральное число τ $(\tau \ge 0)$, что $a_3(\tau+1) \ne 2$ и, если $\tau > 0$, то $a_3(1) = \ldots = a_3(\tau) = 2$. Тогда $g^1_2(\alpha^\infty_1, \alpha^\infty_2, \alpha^\infty_3)$ является 0-сверхсловом, в котором нули стоят на всех местах, начиная с $\tau+1$ -ого, а начала длины τ сверхслов $g^1_2(\alpha^\infty_1, \alpha^\infty_2, \alpha^\infty_3)$ и $f_u(\alpha^\infty_1, \alpha^\infty_2)$ совпадают. Нетрудно видеть, что это отображение является детерминированным, а число попарно несовпадающих его остаточных функций равно трем – две остаточные функции соответствуют остаточным функциям универсальной о.д.функции $f_u(x,y)$, а третья остаточная функция соответствует "тупиковому" состоянию, в котором реализуется тождественный нуль. О.д.функция $f^1_0(x)$ отображает множество $E^\infty_{K_0}$ в себя. Эта о.д.функция должна удовлетворять следующим свойствам.

А. Пусть α^{∞} I-сверхслово такое, что число двоек, стоящих в его начале, равно m $(m \geq 0)$, а E – слово I-сверхслова α^{∞} совпадает со словом $\ell_{i_1} \ \ell_{i_2}$. Тогда если

а) $\ell > \omega$, то сверхслово $f_0^1(\alpha^{\infty})$ также должно быть I-сверхсловом, причем число двоек, стоящих в его начале, равно $m+\omega$, а E –слово I-сверхслова $f_0^1(\alpha^{\infty})$ совпадает со словом $\ell_{i_{\omega+1}} \ \ell_{i_2} \ \ell_{i_1+1} \ \ldots \ell_{i_1 s_1}$.

б) $\ell = \omega$, то сверхслово $f_0^1(\alpha^{\infty})$ также должно быть I-сверхсловом, причем число двоек, стоящих в его начале, равно $m+\omega$, а E – слово I-сверхслова $f_0^1(\alpha^{\infty})$ совпадает со словом L_{i_1}.

в) $\ell < \omega$, то сверхслово $f(\alpha^{\infty})$ должно быть 0-сверхсловом.

Б. Пусть $\alpha^{\infty} = (a(1), \ )$ произвольное сверхслово из $E_{K_0}^{\infty}$ и $f_0^1(\alpha^{\infty}) = \beta^{\infty} = (b(1), \ldots)$. Пусть, кроме того, для некоторого натурального числа τ $(\tau \neq 1)$ $a(\tau) = 0$. Тогда для любого $t \geq \tau$ должно выполняться равенство $b(t) = a(t)$.

Покажем, что существует о.д.функция, удовлетворяющая указанным свойствам. Пусть $\tilde{f}_0^1(x)$ – некоторая функция которая на I-сверхсловах обладает всеми свойствами, которым должна удовлетворять о.д.функция $f_0^1(x)$, причем если E – слово I-сверхслова α^{∞} имеет длину ℓ, где $\ell < \omega$, а число двоек, стоящих в его начале, равно m, то в 0-сверхслове $\tilde{f}_0^1(\alpha^{\infty})$ нулю стоят, начиная с $m+\ell+1$ -го места. Пусть $\alpha^{\infty} = (a(1) \ldots)$ произвольное сверхслово из $E_{K_0}^{\infty}$, не совпадающее ни с каким I-сверхсловом. Это означает, что существует такое натуральное число τ $(\tau \geq 1)$, что для любого I-сверхслова из E_{K_0} слово $\alpha^{\infty}]_{\tau}$, отлично от его начала длины τ, с одной стороны, и, с другой, – существует такое I-сверхслово α_1^{∞}, что слова $\alpha_1^{\infty}]_{\tau-1}$ и $\alpha^{\infty}]_{\tau-1}$ совпадают (если $\tau = 1$, то эти слова являются пустыми). Пусть $\tilde{f}_0^1(\alpha^{\infty}) = \beta^{\infty} = (b(1) \ )$ и пусть, кроме того,

а) $a(\tau) = 0$. Тогда для любого $t \geq \tau$ $b(t) = a(t)$, а начала длины $\tau - 1$ слов $\tilde{f}_0^1(\alpha^{\infty})$ и $\tilde{f}_0^1(\alpha_1^{\infty})$ совпадают.

б) $a(\tau) \neq 0$. Тогда для любого $t \geq \tau$, $b(t) = 0$, а начала длины $\tau - 1$ слов $\tilde{f}_0^1(\alpha^{\infty})$ и $\tilde{f}_0^1(\alpha_1^{\infty})$ совпадают.

Таким образом, отображение, осуществляемое функцией $\tilde{f}_0^1(x)$ определено полностью. Легко видеть, что эта функция является детерминированной и удовлетворяет всем свойствам, которым должна удовлетворять о.д.функция $f_0^1(x)$. Покажем, что функция $\tilde{f}_0^1(x)$ является также ограниченно-детерминированной, т.е. число её остаточных функций конечно, и, следовательно, эта функция может быть выбрана в качестве о.д.функции $f_0^1(x)$. Действительно, пусть слово $\alpha^{\tau} \in E_{K_0}^{\tau}$ $(\tau \geq 1)$ не является началом ни одного I-сверхслова из $E_{K_0}^{\infty}$. Тогда остаточная функция $\tilde{f}_{0\alpha^{\tau}}^1(x)$ может быть лишь двух типов–либо она соответствует состоянию, в котором реализуется тождественный нуль, либо–тождественная функция. Пусть S –максимальная длина слов во множестве пар $\tilde{E}$ (буква-слово), определяющих однородную систему продукции Поста T_0. Рассмотрим произвольное слово $\alpha^{\tau} = (a(1) \ldots a(\tau))$ из $E_{K_0}^{\tau}$, которое является началом некоторого I-сверхслова из $E_{K_0}^{\infty}$ и такое, что $\tau > \omega + S$. Пусть $a(1) = 2$. Тогда остаточная функция $\tilde{f}_{0\alpha}^1$ совпадает с остаточной функцией $\tilde{f}_{0\alpha'}^1$, где $\alpha' = (a(2) \ldots a(\tau))$. Пусть $a(1) \neq 2$ и число единиц, стоящих в конце слова α^{τ}, больше S. Тогда остаточная функция $\tilde{f}_{0\alpha}^1$ совпадает с остаточной функцией $\tilde{f}_{0\alpha'}^1$, где $\alpha' = (a(1), \ldots a(\tau-1))$. Пусть $a(1) \neq 2$ и число единиц, стоящих в конце слова α^{τ}, меньше или равно S. Тогда, как легко видеть, существует натуральное число ℓ $(\omega < \ell \leq \tau)$ такое, что начало длины ℓ слова α^{τ} – суть слово из E^*. В этом случае остаточная функция $\tilde{f}_{0\alpha^{\tau}}^1$ совпадает с остаточной функцией $\tilde{f}_{0\alpha'}^1$, где $\alpha' = (a(1), \ldots a(\omega), a(\ell+1), \ldots)$. если

$c-\tau$, и $\alpha' = (a(1) \quad a(\omega))$, если $\tau = \tau$. Таким образом, для любого слова α^{τ} из $E_{K_0}^{\tau}$ такого, что $\tau > \omega + s$, остаточная функция $\tilde{f}_{0\alpha'}^{1}$ совпадает с остаточной функцией $\tilde{f}_{0\alpha}^{1}$ где длина слова α' меньше или равна $\omega + s$. Из этого следует, что число остаточных функций $\tilde{f}_0^1(x)$ – конечно, т.е. эта функция является ограниченно-детерминированной. Фрагмент – аграммы переходов о.д.функции $f_0^1(x)$ $(\tilde{f}_0^1(x))$ представлен на рис. 86.

Рис.86

О.д.функция $g_1^1(x,y,z)$ отображает множество $E_{K_0}^{\infty} \times E_{K_0}^{\infty} \times E_{K_0}^{\infty}$ в множестве $E_{K_0}^{\infty}$. Эта о.д.функция должна удовлетворять следующим свойствам.

А. Пусть α_3^{∞} – I-сверхслово, E –слово которого имеет длину, меньшую ω. Тогда для любых сверхслов α_1^{∞} и α_2^{∞} из $E_{K_0}^{\infty}$ сверхслово $g_1^1(\alpha_1^{\infty}, \alpha_2^{\infty}, \alpha_3^{\infty})$ должно совпадать со сверхсловом $f_u^1(\alpha_1^{\infty}, \alpha_2^{\infty})$ где $f_u^1(x,y)$ – универсальная о.д.функция (§ 4).

Б. Пусть α_3^{∞} – I-сверхслово, E – слово которого имеет длину, большую или равную ω. Тогда для любых сверхслов α_1^{∞} и α_2^{∞} из $E_{K_0}^{\infty}$ сверхслово $g_1^1(\alpha_1^{\infty}, \alpha_2^{\infty}, \alpha_3^{\infty})$ должно быть 0-сверхсловом.

В. Пусть α_1^{∞}, α_2^{∞}, α_3^{∞} некоторый набор сверхслов из $E_{K_0}^{\infty}$ где $\alpha_i^{\infty} = (a_i(1), \ldots)$ $i = 1,2,3$. Пусть, кроме того, для некоторого натурального числа τ $(\tau \geq 1)$ $a_3(\tau) = 0$ и $g_1^1(\alpha_1^{\infty}, \alpha_2^{\infty}, \alpha_3^{\infty}) = \beta^{\infty} = (b(1), \ldots)$ Тогда для любого $t \geq \tau$ должно выполняться равенство $b(t) = a(t)$.

Покажем, что существуют о.д.функции, удовлетворяющие указанным свойствам. Пусть $\tilde{g}_1^1(x,y,z) = u$ – некоторая функция, обладающая всеми свойствами, которым должна удовлетворять о.д.функция $g_1^1(x,y,z)$. Пусть α_1^{∞}, α_2^{∞}, α_3^{∞} набор из $E_{K_0}^{\infty}$ такой, что $\alpha_3^{\infty} = (a_3(1), \ldots)$ отлично от любого I-сверхслова. Это означает, что существует натуральное число $\tau (\tau \geq 1)$ такое, что для любого I-сверхслова из $E_{K_0}^{\infty}$ слово $\alpha_3^{\infty}]_{\tau}$ отлично от его начала длины τ, с одной стороны, и, с другой, – существует такое I-сверхслово α_1^{∞}, что слова $\alpha_1^{\infty}]_{\tau-1}$ и $\alpha^{\infty}]_{\tau-1}$ совпадают (если $\tau = 1$, то эти слова являются пустыми). Пусть $a_3(\tau) = 0$. Тогда сверхслово $\tilde{g}_1^1(\alpha_1^{\infty}, \alpha_2^{\infty}, \alpha_3^{\infty})$ таково, что справедливо свойство Б, которому должна удовлетворять о.д.функция $g_1^1(x,y,z)$. Если $a(\tau) \neq 0$, то сверхслово $g_1^{\infty}(\alpha_1^{\infty}, \alpha_2^{\infty}, \alpha_3^{\infty})$ – суть 0-сверхслово, в котором нули стоят, начиная с τ -го места. Очевидно, функция $\tilde{g}_1(x,y,z) = u$ является детерминированной, и число ее остаточных функций равно четырем. Две остаточные функции соответствуют остаточным функциям универсальной о.д.функции, а остальные две – состояниям, в которых реализуется либо тождественная функция $u(t) = z(t)$, либо тождественный нуль. Таким образом, функция $\tilde{g}_1(x,y,z)$ является ограниченно-детерминированной и может быть выбрана в качестве о.д. функции $g_1^1(x,y,z)$.

Пусть L –произвольное слово в алфавите E. Слову L поставим в соответствие систему $C(L)$ о.д.функций f_L^1, f_0^1, g_1^1 и g_2^1 и множество $S(C(L))$ – схем, реализующих эти о.д.функции. Пусть $S_{f_L^1}(x)$ и $S_{f_0^1}(x)$ – некоторые конкретные схемы из $S(C(L))$, реализующие соответственно о.д.функции $f_L^1(x)$ и $f_0^1(x)$ и n – произвольное натуральное число, большее или равное единице. Рассмотрим схему $S_n(x)$, являющуюся

суперпозицией схем $S_{f_L^1}$ и $S_{f_0^1}$; которая получается следующим образом. Пусть $n>1$. Отождествим вход схемы $S_{f_0^1}(x_1)$ с выходом схемы $S_{f_0^1}(x_2)$. Получим некоторую схему $S^2(x_2)$. Отождествим вход схемы $S^2(x_2)$ с выходом схемы $S_{f_0^1}(x_3)$ и т.д. – всего $n-1$ раз. На $n-1$-ом шаге получим схему $S^{n-1}(x_{n-1})$. Схема $S_n(x)$ получается путем отождествления входа схемы $S^{n-1}(x_{n-1})$ с выходом схемы $S_{f_L^1}(x)$. Если $n=1$ то схема $S_1(x)$ совпадает со схемой $S_{f_L^1}(x)$. Рассмотрим о.д.функцию $f_{S_n}(x)$, реализуемую схемой $S_n(x)$. Очевидно, эта о.д.функция, является константой, причем если число всех T_0 – продукций слова L в нормальном исчислении Поста T_0 бесконечно, то для любого сверхслова α^∞ из $E_{K_0}^\infty$ $f_{S_n}(\alpha^\infty)$ суть I-сверхслово, E – слово которого является n-ой компонентой последовательности $T_0(L)$, а число двоек, стоящих в начале I-сверхслова $f_{S_n}(x)$ равно $\omega(n-1)+1$ (см. Свойство А п.п. а, б с.д. функции f_0^1). Если последовательность $T_0(L)$ конечна и длина ее меньше n, то, как это следует из свойства А, п.в. о.д.функции f_0^1, для любого сверхслова α^∞ из $E_{K_0}^\infty$ слово $f_{S_n}(\alpha^\infty)$ совпадает с 0-сверхсловом.

Пусть $C_1(L)$ – система, состоящая из о.д.функций f_0^1, f_L^1 и g_1^1. Пусть S – произвольная схема из множества $S(C_1(L))$ – всех схем, являющихся композициями схем, реализующих о.д.функции системы $C_1(L)$. Схеме S поставим в соответствие последовательность π_S –схем из $S(C_1(L))$ $S_1, S_2, \ldots$ следующим образом. В качестве схемы S_1 возьмем схему из $S(C_1(L))$, выход которой является выходом схемы S. Пусть начальный кусок $S_1, \ldots, S_i$ длины i $(i \geq 1)$ последовательности π_S уже построен. Возможны такие случаи:

а) Схема S_i реализует о.д.функцию f_L^1. Тогда последовательность π_S совпадает с последовательностью $S_1, \ldots, S_i$.

б) Схема S_i реализует о.д.функцию f_0^1. Тогда если вход схемы S_i является также входом схемы S, то последовательность π_S совпадает с последовательностью $S_1, \ldots, S_i$. Если вход схемы S_i не является входом схемы S, то в качестве схемы S_{i+1} возьмем схему из $S(C_1(L))$, выход которой отождествлен со входом схемы S_i

в) Схема S_i реализует о.д.функцию $g_1^1(x_{i_1}, y_{i_1}, z_{i_1})$, где x_{i_1}, y_{i_1} и z_{i_1} – некоторые мета обозначения переменных, от которых зависит эта о.д.функция. Тогда если вход схемы S_i, которому приписано переменное z_{i_1}, является также входом схемы S, то последовательность π_S совпадает с последовательностью $S_1, \ldots, S_i$. В противном случае в качестве схемы S_{i+1} возьмем схему, выход которой отождествлен со входом схемы S_i, которому приписано переменное z_{i_1}.

A priori последовательность π_S может быть, вообще говоря, бесконечной и периодической. Очевидно, это может возникнуть тогда, когда вход некоторой схемы S_i $(1<i)$ из последовательности π_S отождествлен с выходом схемы S_j $(1 \leq j < i)$, также принадлежащей последовательности π_S, т.е. при построении схемы S используется операция обратной связи. Покажем, однако, что последовательность π_S может быть только конечной. Пусть $\pi_S(i)$ – последовательность схем из $S(C_1(L))$, образованная первыми i членами последовательности π_S. Если последовательность $\pi_S(i)$ отлична от всей последовательности π_S, то, очевидно, среди схем $S_1, \ldots, S_i$ нет схемы, реализующей о.д.функцию f_L^1. С последовательностью $\pi_S(i)$ естественным образом можно связать схему $\widehat{S}_{\pi_S(i)}$, являющуюся подсхемой схемы S. Пусть схема $\widehat{S}_{\pi_S(i)}$ реализует о.д.функцию $f_{\widehat{S}_{\pi_S(i)}}(\ldots, z_i) = u$, где z_i – переменное, приписанное входу схемы S_i, который отождествлен с выходом схемы S_{i+1}, а u – переменное, приписанное выходу схем S и S_1. Легко видеть, что это переменное

не может зависеть со сдвигом от переменного z_i. В самом деле, если $z_i(1)=0$, то в силу свойства Б о.д.функции f_0^1 и свойства В о.д.функции g_1^1 для всякого натурального числа $t \geq 1$ и $u(t)=z_i(t)$ и, следовательно, не существует схемы, эквивалентной схеме $\hat{S}_{\pi_s(i)}$, выход или вход (с приписанной переменной z_i) которой является соответственно либо входом, либо выходом элемента типа G (в нашем случае k_0 -значной "задержки"). Таким образом, элемент S_{i+1} последовательности π_s не может совпадать ни с каким элементом S_j последовательности π_s, если $j \leq i$, и эта последовательность может быть только конечной.

Лемма 1. Система о.д.функций $C_1(L)$, состоящая из о.д.функций f_L^1, f_0^1 и g_1^1, полна тогда и только тогда, когда множество всех T_0 - продукций слова L в нормальном исчислении Поста T_0 конечно.

Необходимость. Пусть множество T_0 - продукций слова L в нормальном исчислении Поста T_0 конечно. Это означает, что существует такая конечная последовательность слов $L_1, \ldots, L_u$ в алфавите E_{k_0}, что слово L_1 совпадает со словом L, для любого i $(2 \leq i \leq u)$ слово L_i является результатом применения системы T_0 к слову L_{i-1} и длина слова L_u меньше ω. Рассмотрим схему $S_u(x)$. Схема $S_u(x)$ реализует константную о.д.функцию $f_{S_u}(x)$ такую, что для любого α^∞ из $E_{k_0}^\infty$ $f_{S_u}(\alpha^\infty)$ суть I-сверхслово, E - слово которого совпадает со словом L_u. Пусть $S_{g_1^1}(x,y,z)$ некоторая схема, реализующая о.д.функцию $g_1^1(x,y,z)$. Отождествим вход этой схемы, которому приписано переменное z, с выходом схемы $S_u(x)$. Тогда в силу свойства А о.д.функции $g_1(x,y,z)$ полученная схема будет реализовывать универсальную о.д.функцию $f_u(x,y)$ и, следовательно, система $C_1(L)$ полна.

Достаточность. Предположим противное. Пусть множество всех T_0 -продукций слова L в нормальном исчислении Поста T_0 бесконечно, но система $C_1(L)$ полна. Тогда существует схема S_{f_u} из множества схем $S(C_1(L))$, которая реализует универсальную о.д.функцию $z=f_u(x,y)$. Рассмотрим последовательность $\pi_{S_{f_u}}$ схем из $S(C_1(L))$ и подсхему $\hat{S}_{\pi_{f_u}}$, соответствующую последовательность π_s. Пусть последовательность π_s суть $S_1, \ldots, S_m$. Легко видеть, что схема S_m должна реализовывать о.д.функцию f_L^1. Действительно, в противном случае, полагая $x(1)$ и $y(1)$ равными нулю получим, что и $z(1)$ равно нулю. Однако этого не может быть в силу того, что о.д.функция f_u - универсальная. Далее, в последовательности π_s должна содержаться схема, реализующая о.д. функцию g_1^1. Если это не так, то схема S_{f_u} реализует константную о.д.функцию, что неверно по предположению. Пусть j $(1 \leq j \leq m-1)$ такова, что на j -ом месте в последовательности π_s стоит схема, реализующая о.д.функцию g_1^1 и для любого $j<i \leq m-1$ схема S_i реализует о.д.функцию, отличную от о.д.функции g_1^1. Рассмотрим последовательность $S_j, S_{j+1}, \ldots, S_m$. Очевидно, подсхема схемы $\hat{S}_{\pi_s}$, соответствующая этой последовательности, совпадает со схемой S_{m-j}, которая реализует константную о.д.функцию $f_{S_{m-j}}$ такую, что для любого α^∞ из $E_{k_0}^\infty$ $f_{S_{m-j}}(\alpha)$ суть I-сверхслово, E - слово которого, в силу того, что множество всех T_0 -продукций слова L бесконечно, имеет длину, большую или равную ω. Но тогда в силу свойства Б о.д.функции g_1^1 и свойства Б о.д.функции f_0^1 для любых значений переменных α_1^∞ и α_2^∞ из $E_{k_0}^\infty$ переменных x и y $f_u(\alpha_1^\infty, \alpha_2^\infty)$ суть 0-сверхслово, чего, очевидно не может быть. Таким образом, пришли к противоречию, и лемма 1 доказана.

Лемма 2. Система $C_2(L)$, состоящая из о.д.функций f_L^1, f_0^1 и g_1^1 А - полна тогда и только тогда, когда множество всех T_0 -продукций слова L в нормальном исчислении Поста T_0 бесконечно.

Идея доказательства леммы 2 совпадает, по-существу, с идеей доказательства леммы I, хотя для доказательства полноты системы $C_1(L)$ и A-полноты системы $C_2(L)$ используются противоположные свойства слова L. Тем не менее при доказательстве обеих лемм "похожие" друг на друга построения. Поэтому доказательство леммы 2 может быть предоставлено читателю.

Из лемм 1, 2 следует алгоритмическая неразрешимость распознавания полноты и A - полноты соответственно конечных систем о.д.функций в случае, когда входные и выходные переменные о.д.функций принимают значения из множества E_{k_0}. Очевидно, те же построения могут быть использованы для доказательства аналогичных утверждений, когда входные и выходные переменные о.д. функций принимают значения из множества $E_{k'}$, где $k' > k_0$. Если же $k < k_0$, то для доказательства алгоритмической неразрешимости распознавания полноты и A -полноты конечных систем о.д.функций достаточно рассмотреть случай двоичного алфавита - 0 и I.

Закодируем элементы множества E_{k_0} наборами из 0 и I длины $\log_2 k_0$ следующим образом:

$$0 \Rightarrow (000\ldots0)$$
$$1 \Rightarrow (100\ldots0)$$
$$2 \Rightarrow (11000\ldots0)$$
$$3 \Rightarrow (01110\ldots0)$$

$$k_0 \Rightarrow (011\ldots1)$$

В связи с этим кодированием несколько изменятся определения I-сверхслова, 0-сверхслова, E -слова I-сверхслова, свойства о.д.функций f_0^1, f_L^1, g_1^1 и g_2^1 и т.п. Тем не менее будут верны аналоги лемм 1,2 и, таким образом, будут справедливы следующие теоремы:

Теорема 3.19 [25]. Не существует алгоритма для распознавания полноты конечных систем о.д.функций.

Теорема 3.20 [26]. Не существует алгоритма для распознавания A -полноты конечных систем о.д.функций.

§ 8. Модификации задачи о полноте.

В целом негативные с точки зрения эффективности критериев результаты по задаче о полноте вынуждают рассматривать различные модификации этой задачи. Одни из них получаются на пути сужения класса систем, исследуемых на полноту, другие - на пути моделирования лишь отдельных свойств о.д.функций. При этом удается получать эффективные критерии, для некоторых типов систем, конечных или бесконечных. В приводимых ниже примерах даются критерии полноты для конечных систем специального вида в $P_{0,2}^k$ (пример I) и для бесконечных систем, удовлетворяющих некоторым ограничениям, в $P_{0,2}^k$.

Пример I [27].

Будем рассматривать о.д.функции $f^1(x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_k)$, которые назовем I-связными. Они обладают следующими двумя свойствами. Во-первых, существует структурный автомат

I°
$$(\Sigma(x_1, x_2, \ldots, x_k; 1, 2, \ldots, s, 1), \alpha(S; 1)),$$

реализующий о.д.функцию f^1, и такой, что его нормальная схема имеет вид, изображенный на рис. 87. Таким образом, о.д.функция $f^1(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$,

рис.87

реализуемая автоматом $\mathfrak{A}(S;1)$, задается системой канонических уравнений

$$\begin{cases} z_1(1) = c_1 \\ \\ z_s(1) = c_s \\ z_1(t+1) = \varphi_1(z_1(t), \ldots, z_s(t), x_{\ell+1}(t), \ldots, x_\tau(t)) \\ z_2(t+1) = \varphi_2(z_1(t), \ldots, z_s(t), x_{\ell+1}(t), \ldots, x_\tau(t)) \\ \cdot \\ z_s(t+1) = \varphi_s(z_1(t), \ldots, z_s(t), x_{\ell+1}(t), \ldots, x_\tau(t)) \\ y(t) = \psi(z_1(t), \ldots, z_s(t), x_1(t), \ldots, x_\ell(t)) \end{cases}$$

в которой у функции ψ_i и φ_i общими являются только переменные $z_1, z_2, \ldots, z_s$. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$ о.д.функции f^1 будем называть переменными первого рода, а переменные $x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \ldots, x_\tau$ – второго рода. Во-вторых, для любых двух наборов $(c_1, c_2, \ldots, c_s)$ и $(c_1', c_2', \ldots, c_s')$ существует такой набор $(a_1, a_2, \ldots, a_\tau)$, что

$$(c_1', c_2', \ldots, c_s') =$$

$$= (\varphi_1(c_1, c_2, \ldots, c_s, a_1, a_2, \ldots, a_\tau), \varphi_2(c_1, \ldots, c_s, a_1, \ldots, a_\tau), \ldots, \varphi_s(c_1, c_2, \ldots, c_s, a_1, \ldots, a_\tau))$$

Воспользуемся некоторыми сведениями из алгебры логики [28]. Обозначим через T_0, T_1, L, S и M классы функций алгебры логики, сохраняющих 0, сохраняющих 1, линейных, самодвойственных и монотонных соответственно. Пусть $\mathfrak{R}$ –любой из указанных классов. Обозначим через $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}$ класс всех о.д.функций $f^\upsilon(x_1, \ldots, x_\tau) = (f_1, f_2, \ldots, f_\upsilon)$ из P таких, что если о.д.функция $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, \upsilon$, реализуется некоторым

инициальным автоматом $(A_1 \times A_2 \times \ldots A_z, Q_1 \times \ldots \times Q_s, B, (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s), \psi, (c_1, \ldots, c_s))$ то $\psi(c_1, \ldots, c_s, x_1, \ldots, x_z) \in \mathcal{R}$. Обозначим через $\mathfrak{M}^2$ множество всех таких о.д.функций $f^v(x_1, \ldots, x_z) = (f_1, f_2, \ldots, f_v)$, что если о.д.функция $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_z)$ реализуется некоторым инициальным автоматом $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_z, Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_s, B, (\varphi_1, \ldots, \varphi_s), \psi, (c_1, c_2, \ldots, c_s))$, то для любых наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_z)$, $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_z)$ и $(a''_1, a''_2, \ldots, a''_z)$ имеет место $\psi(\varphi_1(c_1, c_2, \ldots, c_s, a_1, a_2, \ldots, a_z), \varphi_2(c_1, \ldots, c_s, a_1, \ldots, a_z), \ldots, \varphi_s(c_1, c_2, \ldots, c_s, a_1, a_2, \ldots, a_z), a''_1, a''_2, \ldots, a''_r) =$
$= \psi(\varphi_1(c_1, c_2, \ldots, c_s, a'_1, a'_2, \ldots, a'_z), \varphi_2(c_1, c_2, \ldots, c_s, a'_1, a'_2, \ldots, a'_z), \ldots$
$\ldots, \varphi_s(c_1, c_2, \ldots, c_s, a'_1, a'_2, \ldots, a'_z), a''_1, a''_2, \ldots, a''_z)$.

Проводя индукцию по операциям композиции, нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Классы $\mathfrak{M}_{T_0}$, $\mathfrak{M}_{T_1}$, $\mathfrak{M}_L$, $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}_M$ и $\mathfrak{M}^2$ являются замкнутыми.

Нашей ближайшей целью будет доказательство критерия полноты для систем I-связных о.д.функций.

Теорема 3.21. Множество I-связных о.д.функций является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из классов $\mathfrak{M}_{T_0}$, $\mathfrak{M}_{T_1}$, $\mathfrak{M}_L$, $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}_M$ и $\mathfrak{M}^2$.

Из справедливости этой теоремы, очевидно, сразу вытекает алгоритм распознавания полноты любого конечного множества I-связных о.д.функций.

Необходимость условий теоремы 3.21 следует из того, что каждое из рассматриваемых множеств отлично от P и, в силу леммы 1 замкнуто.

Для доказательства достаточности нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через $\mathfrak{M}^*$ произвольное множество I-связных о.д. функций, не являющееся подмножеством ни одного из классов $\mathfrak{M}_{T_0}$, $\mathfrak{M}_{T_1}$, $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}_M$, $\mathfrak{M}_L$ и $\mathfrak{M}^2$. Как отмечалось, в вопросах полноты можно ограничиться рассмотрением о.д.функций, реализуемых схемами с одним выходом. Пусть $\mathfrak{M}^* \supseteq \{f_1^1, f_2^1, f_3^1, f_4^1, f_5^1, f_6^1\}$, где $f_1^1 \notin \mathfrak{M}_{T_0}$, $f_2^1 \in \mathfrak{M}_{T_1}$, $f_3^1 \notin \mathfrak{M}_L$, $f_4^1 \notin \mathfrak{M}_S$, $f_5^1 \in \mathfrak{M}_M$, $f_6^1 \notin \mathfrak{M}^2$. Пусть каждая из этих о.д.функций f_i^1 реализуется структурным автоматом $(\Sigma_i(x_1, x_2, \ldots, x_{e_i}, \ldots, x_{r_i}; 1, 2, \ldots, s_i; 1), Q(S_i; 1))$, где $Q(S_i; 1) = (A_1 \times \ldots \times A_{e_i} \times \ldots \times A_{r_i}, Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_{s_i}, B, (\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots, \varphi_{s_i}^i), \psi_i(q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{is_i}))$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$, в котором схема Σ_i является правильной. Функцию алгебры логики $\psi_i(z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{is_i}, x_1, x_2, \ldots, x_{r_i})$ для краткости будем иногда называть начальной выходной функцией о.д.функции f_i^1. Нетрудно видеть, что переменные $x_{e_i+1}, x_{e_i+2}, \ldots, x_{r_i}$, рассматриваемой функции алгебры логики являются фиктивными, поэтому для нее можно ввести обозначение $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{e_i})$. Ясно, что $\xi_1 \notin T_0$, $\xi_2 \notin T_1$, $\xi_3 \notin L$, $\xi_4 \notin S$, $\xi_5 \notin M$, поэтому, в силу теоремы Поста [28], для каждой функции алгебры логики $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ найдется формула H над системой $\mathfrak{M} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$, которая равна μ. Поставим в соответствие каждой формуле H схему $\Sigma(H)$, являющуюся композицией схем $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$. Это сопоставление осуществим индуктивно. Формуле ξ_i сопоставим схему Σ_i $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Пусть формуле $H(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ сопоставлена схема $S^1(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}; 1, 2, \ldots, s_1; 1)$, тогда формуле $H_1(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ где $k > m$, сопоставляется схема, получающаяся из схемы S^1 заменой буквы x_j на x_k, а каждой из букв x_{m+t} буквой x_{m+k+t} $t = 1, 2, \ldots, n_1$. Если $k \leq m$, то вновь получаемой формуле сопоставляется схема, которая возникает из схемы S^1 заменой буквы x_j на x_k и отождествлением в сети S^1 входов, которым оказались приписанными одинаковые буквы x_k. Пусть имеется формула $H_2(x_{m+n_1+1}, x_{m+n_1+2}, \ldots, x_{m+n_1+n_2})$ которой соответствует схема $S^2(x_{m+n_1+1}, \ldots, x_{m+n_1+n_2}, x_{m+n_1+n_2+1}, \ldots, x_{m+n_1+n_2+n_3})$. Тогда формуле $H_1(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, H_2(x_{m+n_1+1}, x_{m+n_1+2}, \ldots$

$x_{m+n+m_2}), x_{j+1}, \ldots, x_m)$ сопоставляет схема , получаемая из схем и S^2 присоединением выхода схемы S^2 к входу схемы S^1, которому было приписано переменное x_j выходом схемы S является выход схемы S^1. Таким образом, каждой формуле H над системой $\mathfrak{N}$ соответствует композиция схем $S(H)$, построенная из правильных схем $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$ так, что все входы этих схем, соответствующие переменным второго рода реализуемых ими о.д.функций, являются попарно неотождествленными и ни к одному из них не присоединен ни один из выходов используемых в построении схем. Эти входы, а также приписанные им переменные будем называть входами и соответственно переменными второго рода. Нетрудно видеть, что если схема S реализует о.д.функцию f^1, то начальная выходная функция этой о.д.функции равна H.

Лемма 2. Множество $[\mathfrak{M}^*]_K$ содержит любую истинностную о.д.функцию.

Доказательство. Пусть формула $H(x_1)$ тождественно равна константе c $c \in \{0,1\}$. Рассмотрим схемы $S(H_0)$ и $S(H_1)$. Пусть это будут схемы $S^0(x_1, x_2, \ldots, x_m; 1, 2, \ldots, s; 1)$ и $S^1(x_1, x_2, \ldots, x_m; 1, 2, \ldots, t; 1)$, в которых переменные $x_2, x_3, \ldots, x_z$, где $z = \max\{m, n\}$, являются переменными второго рода. По условию каждая из схем Σ_i реализует такой автомат $\mathfrak{A}(\Sigma_i, 1)$, $i = 1,2,3,4,5$, что найдется такой набор $(a_{e_i+1}, a_{e_i+2}, \ldots, a_{z_i})$ что под действием этого набора независимо от того, какие значения принимают остальные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{e_i}$ автомата $\mathfrak{A}(\Sigma_i, 1)$, рассматриваемый автомат перейдет в начальное состояние $(q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{is_i})$. Рассмотрим схему $S(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}; 1, 2, \ldots, s+t; 1, 2)$, приведенную на рис. 88. Отождествим

рис.88

в ней I-ый и $m+1$-ый входы, приписав им переменное x_1. Затем все оставшиеся входы, которые являются входами второго рода разобьем на две группы. К первой группе отнесем те переменные, которые, соответствуя входам схемы Σ_i в наборе $(a_{e_i+1}, a_{e_i+2}, \ldots, a_{z_i})$ принимают значения 0, а ко второй группе те, которые принимают значение I. Отождествим все входы, которым приписаны переменные из первой группы, и новому входу припишем переменное x_2, аналогично отождествим входы, которым приписаны переменные из второй группы и припишем переменное x_3. В результате получим схему S', изображенную на рис. 89. Применим теперь операцию обратной связи к первому выхо-

рис.89

ду и второму входу схемы S', а затем ко второму выходу и третьему входу схемы S'. В результате получим схему S'', входом которой является первый вход схемы S', а выходами оба выхода схемы S' (см. рис. 90).

рис.90

рис.91

Из построения схем вытекает корректность применения операции обратной связи и то, что схема S'' реализует о.д.функцию $f^2(x_1) = (f_1(x_1), f_2(x_1))$, такую, что $f_1(x_1) = \Gamma_{\beta^\infty}(x_1)$ и $f_2(x_1) = \Gamma_{\gamma^\infty}(x_1)$, где $\beta^\infty = 00\dots$, $\gamma^\infty = 11\dots$.

Пусть теперь имеется произвольная формула $H(x_1, x_2, \dots, x_l)$, равная наперед заданной функции алгебры логики $\mu(x_1, x_2, \dots, x_l)$. Рассмотрим схему $S(H)$. Пусть она имеет вид $S(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n; 1, \dots, s; 1)$ и в ней переменные $x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_n$ являются переменными второго рода. По тому же принципу, что и выше, разобьем входы схемы, соответствующие этим переменным, на две группы, отождествим входы каждой из групп в отдельности, приписав им временные x_{l+1} и x_{l+2}, получим в результате схему S' (см.рис. 91). Пусть эта схема реализует о.д.функцию $f^1(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, x_{l+2})$. Из построений вытекает, что $f^1(x_1, x_2, \dots, x_l, \Gamma_{\beta^\infty}(x_1), \Gamma_{\gamma^\infty}(x_1)) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_l)$. Таким образом, $\mu(x_1, x_2, \dots, x_l) \in [\mathfrak{M}^*]_K$ и тем самым лемма доказана.

Лемма 3. Для любого множества $\mathfrak{M}^*$ имеет место включение

$$[\mathfrak{M}^*]_K \geq \{\mathcal{D}_0 x_1, \mathcal{D}_1 x_1\}.$$

Доказательство. Так как, в силу леммы 2, $\bar{x} \in [\mathfrak{M}^*]_K$ и кроме того, $\bar{\mathcal{D}}_0 \bar{x}_1 = \mathcal{D}_1 x_1$, то для доказательства леммы достаточно установить, что $\mathcal{D}_0 x_1 \in [\mathfrak{M}^*]_K$. Рассмотрим о.д.функцию $f_6^1(x_1, x_2, \dots, x_{\ell_6}, \dots, x_{r_6})$ из $\mathfrak{M}^*$ такую, что $f_6^1 \notin \mathfrak{M}^2$. Пусть первые ℓ_6 ее переменных первого рода и оставшиеся $r_6 - \ell_6$ переменных – второго рода. Пусть, далее, $\xi_6(x_1, x_2, \dots, x_{\ell_6})$ – начальная выходная функция о.д.функции f_6^1. Так как $f_6^1 \notin \mathfrak{M}^2$, то найдется набор $(a_{\ell_6+1}, a_{\ell_6+2}, \dots, a_{r_6})$, под действием которого автомат $\mathfrak{A}_{(q_{6,1}, q_{6,2}, \dots, q_{6,s_6})}(S_6; 1)$ перейдет из состояния $(q_{6,1}, q_{6,2}, \dots, q_{6,s_6})$ в состояние $(q'_{6,1}, q'_{6,2}, \dots, q'_{6,s_6})$ такое, что для некоторого набора $(a'_1, a'_2, \dots, a'_{\ell_6})$ будет иметь место $\psi_6(q'_{6,1}, q'_{6,2}, \dots, q'_{6,s_6}, a'_1, \dots, a'_{\ell_6}) \neq \psi_6(q_{6,1}, q_{6,2}, \dots, q_{6,s_6}, a'_1, \dots, a'_{\ell_6})$. Пусть для определенности $\psi_6(q'_{6,1}, q'_{6,2}, \dots, q'_{6,s_6}, a'_1, \dots, a'_{\ell_6}) = 0$. В силу I-связности о.д.функции f_6^1 найдутся наборы $(a'_{\ell_6+1}, \dots, a'_{r_6})$, $(a''_{\ell_6+1}, a''_{\ell_6+2}, \dots, a''_{r_6})$, переводящие автомат $\mathfrak{A}(S_6, 1)$ из состояния $(q'_{6,1}, q'_{6,2}, \dots, q'_{6,s_6})$ в состояние $(q_{6,1}, q_{6,2}, \dots, q_{6,s_6})$, из состояния $(q_{6,1}, q_{6,2}, \dots, q_{6,s_6})$ – в то же состояние соответственно. По лемме 2 справедливо включение $[\mathfrak{M}^*]_K \geq \{\Gamma_{\beta^\infty}(x_1), \Gamma_{\gamma^\infty}(x_1)\}$, где $\beta^\infty = 00\dots$, $\gamma^\infty = 11\dots$. Подставим в о.д.функцию $f_6^1(x_1, x_2, \dots, x_{\ell_6}, x_{\ell_6+1}, \dots, x_{r_6})$ вместо переменного x_i, $i = 1, 2, \dots, \ell_6$, о.д.функцию $\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)$, если в наборе $(a_1, a_2, \dots, a_{\ell_6})$ значение a_i равно 0, и $\Gamma_{\gamma^\infty}(x_1)$, если $a_i = 1$. Получим о.д.функцию $g^1(x_1, x_{\ell_6+1}, \dots, x_{r_6})$. Если о.д.функцию f_6^1 реализовала схема S, изображенная на рис.92

рис.92

а о.д.функции $\Gamma_{p\to}(x_1)$ и $\Gamma_{g\to}(x_2)$ – схемы S^0 и S^1 соответственно, то о.д.функцию $g^1(x_1, x_{\ell_b+1}, x_{\ell_b+2}, \ldots, x_{r_b})$ будет реализовать схема S', изображенная на рис. 93. Рассмотрим вектор-функцию алгебры логики

рис.93

$\vec{h}^{r_b-\ell_b}(x_1, x_2) = (h_1, h_2, \ldots, h_{r_b-\ell_b})$ такую, что

$$\vec{h}^{r_b-\ell_b}(c_1, c_2) = \begin{cases} (a_{\ell_b+1}, a_{\ell_b+2}, \ldots, a_{r_b}) & \text{если } c_1=0 \text{ и } c_2=0, \\ (a'_{\ell_b+1}, a'_{\ell_b+2}, \ldots, a'_{r_b}) & \text{если } c_1=0 \text{ и } c_2=1, \\ (a''_{\ell_b+1}, a''_{\ell_b+2}, \ldots, a''_{r_b}) & \text{если } c_1=1 \text{ и } c_2=0, \\ (a'''_{\ell_b+1}, a'''_{\ell_b+2}, \ldots, a'''_{r_b}) & \text{если } c_1=1 \text{ и } c_2=1. \end{cases}$$

Как это следует из леммы 2, $\vec{h}^{r_b-\ell_b}(x_1, x_2) \in [\mathfrak{M}^*]$ и пусть ее реализует схема S''. Рассмотрим схему S''', приведенную на рис. 94

рис.94

Нетрудно видеть, что эта схема реализует о.д.функцию $\mathfrak{D}_0 x_1$. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 вытекает достаточность условий теоремы 3.21. Тем самым теорема 3.21 доказана.

Пример 2. [29]

Обозначим через R^1 множество о.д.функций из P^c_{ag}, каждая из которых может быть задана такой канонической системой

$$\begin{cases} z_1(1) = c_1; \ \ldots; z_s(1) = c_s; \\ z_1(t+1) = \varphi_1(x_1(t), \ldots, x_r(1), z_1(t), \ldots, z_s(t)); \\ \\ z_s(t+1) = \varphi_s(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_s(t)); \\ y(t) = \psi(x_1(t), \ldots, x_r(t), z_1(t), \ldots, z_s(t)) \end{cases}$$

где функция $\psi(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_s)$, обладает свойством: при любом наборе $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$ значений переменных $z_1, \ldots, z_s$ функция $\psi(x_1, \ldots, x_2, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ зависит существенно не более чем от одной из переменных x_1, x_2. Номер существенной переменной, вообще говоря, зависит от выбора набора $(\beta_1, \ldots, \beta_s)$.

Заметим, что функции из R^1 вычисляются автоматами, у которых в каждом состоянии значение выхода зависит от значения не более чем одного из входов.

Пусть $f_0^1(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ – истинностная о.д.функция (функция Шеффера). Можно показать (см. доказательство теоремы 3.23 § 9 о базисах в $P_{0,9}^c$), что система $\{f_0^1 \cup R^1\}$ c-полна в $P_{0,9}^c$. Поэтому существуют конечные системы, присоединение которых к Q^1 дает c-полную систему.

Мы получим сейчас необходимые и достаточные условия c-полноты системы о.д.функций, содержащей R^1. Для любой конечной системы о.д.функций Φ этот критерий даст возможность эффективно проверить c-полноту системы $\{\Phi \cup R^1\}$.

Будем для краткости называть систему Φ I-полной, если $\{\Phi \cup R^1\}$ c-полная система.

Пусть $\mathfrak{A} = (\{0,1\}^n, Q, \varphi, \psi, q_0)$ – инициальный автомат с n-входами, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$, $q \in Q$. Будем говорить, что состояние q – a-возвратное состояние, если существует слово α, $\alpha \in (E_2^n)^*$ такое что $\varphi(q, a\alpha) = q$. Для некоторого подмножества $E \subseteq E_2^n$ состояние q называется E-возвратным, если q является a-возвратным для любого $a \in E$. Если $E = E_2^n$, то q называется возвратным. На рис. 95 приведена диаграмма переходов автомата $\mathfrak{B} = (\{0,1\}^3, \{q_0, q_1, q_2\}, \varphi, \psi, q_0)$

Рис.95

Состояние q_1 является возвратным состоянием, состояние q_0 является E-возвратным, где $E = \{001, 011, 101, 111\}$. Заметим, что если на вход x_3 подать выход автомата с одним состоянием, реализующего истинностную функцию $v(x) \equiv 1$, то начальное состояние полученной композиции будет возвратным.

J_n^m – оператором называется истинностная о.д.функция с n выходами $V = (v_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, v_n(x_1, \ldots, x_m))$, у которой каждая компонента $v_i(x_1, \ldots, x_m)$ существенно зависит не более чем от одной переменной из множества $x_1, \ldots, x_m$. Будем говорить, что набор $(a_1, \ldots, a_n) \in E_2^n$ реализуется оператором V, если существует такой набор $(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in E_2^m$, что $V(\beta_1, \ldots, \beta_m) = (a_1, \ldots, a_n)$. Через $N(V)$ обозначим множество всех наборов, реализуемых V. Ясно, что не всякое подмножество E_2^n может быть реализовано некоторым J_n^m – оператором. Например, при $n = 2$ не может быть реализовано множество $(00, 01, 10)$.

С другой стороны, для всякого n можно указать конечное множество $\mathcal{V}_n = \{V_1, \ldots, V_{s_n}\}$ операторов, что любое множество $E \subseteq E_2^n$, реализуемое каким-либо J_n^m – оператором при некотором m, реализуется одним из операторов системы $\mathcal{V}_n$.

Пусть q – E – возвратное состояние автомата $\mathfrak{A}$, и в состоянии q реализуется функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, с каждым состоянием можно связать пару (f, E), где E может быть пустым множеством. Это

Пусть J_n^m – оператор V таков, что $N(V) \subseteq E$. Рассмотрим пару $(f(V), E_2^m)$, где $f(V) = f(v_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, v_n(x_1, \ldots, x_m))$.

Если теперь $Q^t = \{q \mid \exists \alpha^t (\alpha^t \in (E_2^n)^* \& \varphi(q_0, \alpha^t) = q\}$ $t = 1, 2, \ldots$, то рассмотрим множество пар, связанным с постоянными из Q^t

$$\Pi_t = \{(f_q, E_q) \mid q \in Q^t, E_q \neq \emptyset\}$$

, и построим с помощью операторов из $\mathcal{V}_n$ множество пар

$$\pi_t = \{\pi \mid \pi = (f_q(V), E_2^{m_\pi}), N(V) \subseteq E_q, V \in \mathcal{V}_n, q \in Q^t\}$$

Заметим, что π_t непусто при непустом Π_t. Обозначим, через $\bar{\pi}_t$ множество всех таких пар $\pi = (f, E_2^{m_\pi})$ из π_t, у которых f зависит существенно по крайней мере от 2 переменных. Обозначим через $\bar{Q}_t$ множество состояний из Q_t, в которых реализуются функции, существенно зависящие по крайней мере от 2 переменных.

Лемма 1. Если $\{H_1^{m_1}, \ldots, H_k^{m_k}\}$ – I-полная система, Q_i – множество состояний автомата $\mathfrak{A}_i$, вычисляющего $H_i^{m_i}$, и множества пар $\bar{\pi}_i^t$ строятся для автомата $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то

I) для любого $t = 0, 1, \ldots$ $\bigcup_{i=1}^{k} \bar{Q}_i^t \neq \emptyset$

2) существует t_0, такое что для любого $t \geq t_0$ $\bigcup_{i=1}^{k} \bar{\pi}_i^t \neq \emptyset$

Доказательство. Условие I), очевидно, необходимо, в противном случае при некотором t каждый автомат в каждом состоянии из Q_i^t реализует функцию, существенно зависящие не более чем от I переменной. Поэтому любая композиция $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s\}$ и R^1 обладает этим свойством, что противоречит с – полноте.

Предположим теперь, что не выполнено условие 2). Это значит, что существует бесконечная последовательность $t_1, t_2, \ldots$ такая, что $\bigcup_{i=1}^{k} \bar{\pi}_{t_j}^i = \emptyset$ $j = 1, 2, \ldots$

Пусть композиция K вычисляет истинностную "функцию Шеффера", и в ней участвует m экземпляров автоматов из множества $\{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s\}$, с учетом повторений: $M = \{\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_m}\}$. Подадим на K произвольное входное слово γ_1 длины t_1. Теперь каждый автомат из M находится в состоянии, для которого связанная с ним пара (f, E) такова, что либо а) $E = \emptyset$, либо аа) для любого V, такого что $N(V) \subseteq E$, $f(V)$ существенно зависит не более чем от одной переменной. Пусть M_1 – множество тех автоматов из M, у которых каждый вход соединен либо с входом всей композиции K, либо с выходом подкомпозиции, содержащей лишь автоматы из R^1. Мы можем считать, что в момент $t_1 + 1$ на входы автоматов из M_1 поступают значения выходов некоторых J_n^m – операторов. Если для некоторого автомата из M_1 имеет место случай а), то этот автомат в процессе дальнейшей работы K не вернется больше в состояние, в котором он находится. В случае аа) либо оператор V таков, что $N(V) \not\subseteq E$, либо $f(V)$ зависит не более чем от одной переменной. Если $N(V) \not\subseteq E$, то подадим на вход K та кую входную букву a, что $V(a) \notin E$, и придем к ситуации случая а). Если же у всех автоматов из M_1 соответствующие суперпозиции $f(V)$ зависят не более чем от одной переменной, то рассмотрим множество M_2 автоматов из M, входы которых соединены либо с входом всей композиции, либо с выходом подкомпозиции содержащей лишь автоматы из R^1 и M_1. Снова возникают ситуации а) и аа), ... Вообще, пусть уже рассмотрены множест-

ва $M_1, \quad M_i$. Рассмотрим множество M_{i+1} автоматов из M, у которых входы есть либо входы всей композиции, либо выходы подкомпозиции, содержащей лишь автоматы из $R^1, M_1, \quad , M_i$. В случае а) для некоторого автомата из M_{i+1} подаем на K слово $a\gamma_2$, где a – произвольная буква, а γ_2 – слово длины $t_2 - t_1 - 1$. (Таким образом, на K в целом подано слово $\gamma_1 a \gamma_2$ длины t_2) и рассмотрим работу K в момент t_2. Заметим, что число возможных состояний уменьшилось. В случае аа) либо подаем слово $a\gamma_2$, где a такая буква, что $V(a) \notin E$ для состояния некоторого автомата из M_{i+1}, либо замечаем, что в состояниях автоматов из реализуются функции одного переменного. В силу конечности числа состояний в K и конечности множества M процесс возникновения новых множеств $M_{i+2}, M_{i+3},$ оборвется и мы с необходимостью придем к ситуации, когда уменьшится число состояний композиций, которые могут принимать участия в ее работе. Рассматривая аналогично моменты $t_2, t_3, \ldots$ и т.д. мы придем к противоречию с условием конечности числа состояний K.

Лемма доказана.

Лемма 2. Если условия I) и 2) леммы 1 выполнены, то для любой линейной функции алгебры логики $\ell(x_1, \ldots, x_n)$ множество $[R^1 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_k]_c$ содержит истинностную о.д.функцию $\ell(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Пусть t_0 – число, определенное условием 2) и α_1 таков, что $\bar{x}^1_{t_0} \neq \emptyset$. Пусть пара $\mathfrak{X} = (f_q(V), E_2^{m+1})$ принадлежит $\bar{\pi}^1_{t_0}$. Это значит, что q достижимо некоторым словом длины t_0, E – возвратно для некоторого $E \subseteq E_2^n$, существует J_n^m оператор V, $N(V) \subseteq E$, и $f(v_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, v_m(x_1, \ldots, x_n))$ существенно зависит от 2 переменных. Поэтому для любой буквы $a \in E_2^m$ существует слово $\gamma^{(a)}$, зависящее от a, $\gamma^{(a)} \in (E_2^n)^*$ такое что

$$\varphi(q, V(a)\gamma^{(a)}) = q$$

Пусть длина $\gamma^{(a)}$ есть τ_a, и $\tau = \prod_{a \in E_2^m} \tau_a$. Вместо каждого слова $\gamma^{(a)}$ можно взять слово $\tilde{\gamma}^{(a)} = \gamma^{(a)} v(a) \gamma^{(a)} v(a) \ldots \gamma^{(a)}$ длины $\tau - 1$. Очевидно, что $\varphi(q, v(a)\tilde{\gamma}^{(a)}) = q$. Пусть слову $\tilde{\gamma}^{(a)}$ соответствует набор n входных слов $(\tilde{\gamma}_1^{(a)}, \ldots, \tilde{\gamma}_n^{(a)})$, состояние q достижимо из начального словом $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ длины t_0.

Рассмотрим автомат $\mathfrak{B}_i$ с $t_0 + \tau \cdot 2^m$ состояниями и m входами, у которого функции переходов φ_i и выходов ψ_i определены следующим образом:

$$Q_i = \{q_0, \ldots, q_{t_0}, \{q_a^1, \ldots, q_a^{\tau-1} \mid a \in E_2^m\}\}$$

$$\varphi_i(q_j, a) = q_{j+1}, \quad \psi_i(q_j, a) = \delta_i^j, \quad a \in E_2^m, \quad j = 0, 1, \ldots, t_0 - 1;$$

$$\varphi_i(q_{t_0}, a) = q_a^1, \quad \psi_i(q_{t_0}, a) = v_i(a),$$

$$\varphi_i(q_a^j, b) = q_a^{j+1}, \quad \psi_i(q_a^j, b) = \tilde{\gamma}_{ij}^{(a)}, \quad j = 1, \ldots, \tau - 1, \quad q_a^\tau = q_{t_0}.$$

Таким образом, на выходе $\mathfrak{B}_i$ сначала появляется "i-я компонента" слова δ, а затем, после подачи буквы a (на выходе – $v_i(a)$) на выходе реализуется "i-я компонента слова $\tilde{\gamma}^{(a)}$. Можно видеть теперь, что подавая на $=1,2, \ldots m$-ый вход автомата $\mathfrak{A}$ выход автомата $\mathfrak{B}_i$, $\ldots$ $k \cdot \tau + 1$ $k = 0, 1, \ldots$ получим композицию, которая в моменты $t = t_0 + 1, \ldots$, реализует некоторую функцию $f(x_1, \ldots, x_m) \in P_2$

существенно зависящую от 2 переменных, независимо от выбора входной последовательности.

Учитывая, что для любой линейной функции $\ell(x_1, \ldots, x_n)$, $\ell \in [f, 0, \bar{x}]$ в P_2, мы можем считать, что на месте $f(x_1, \ldots, x_m)$ нами получена любая линейная функция.

Рассмотрим аналогично моменты времени $t_0 + s$, $s > 1$. Для каждого из них можно построить композицию, которая реализует f в моменты $t_0 + \tau_s \cdot k + s$, $k = 0, 1, \ldots$. В силу конечности автоматов $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, рассматриваемых в лемме, среди чисел τ_s, $s = 0, 1, 2, \ldots$ лишь конечное число различных $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_d}$. Пусть $\tau_0 = \prod_{j=1}^{d} \tau_{i_j}$. Поэтому, для некоторого t_0' и для каждого $j = 1, 2, \ldots, \tau_0$ в моменты $t_0' + k \cdot \tau_0 + j$ некоторая композиция реализует $f(x_1, \ldots, x_m)$. Подавая выходы этих композиций на входы автомата из $\mathfrak{R}_1$, который последовательно реализует на выходе значение I-го, 2-го,... -го, I-го,... и т.д. входов, мы получим композицию, реализующую истинностную о.д.функцию f, начиная с момента t_0'.

Действуя аналогично с использованием условия I) леммы 1, мы получим композицию, реализующую f в моменты $t \le t_0'$. Подавая выходы двух полученных композиций на входы автомата из $\mathfrak{R}'$, у которого до $t \le t_0'$ на выходе реализуется значение первого входа, а при $t > t_0'$ – значение второго входа, мы получим истинностную о.д.функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$. Лемма доказана.

Таким образом, условия I) и 2) леммы гарантируют нам построение любого "линейного оператора" L_n^m – истинностной о.д.функции $(\ell_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \ldots, \ell_n(x_1, \ldots, x_m))$, где все $\ell_i(x_1, \ldots, x_m$ – линейные функции алгебры логики.

Состояние q автомата $\mathfrak{A}$ называется L-возвратным, если ему соответствует пара (f_q, E), и существует такой линейный оператор W, что $N(W) \subseteq E_0$. Существует автомат с таким L-возвратным состоянием, что результирующая функция $f(W)$ – нелинейна, и в то же время для любого J_n^m – оператора V $f(V)$ – линейная функция при $N(V) \subseteq E$. Для примера рассмотрим автомат, диаграмма переходов которого указана на рис. 96

рис. 96

Если $W = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$, то $f(W) = x_1 \vee x_2$.

Подобно тому, как это делалось для J_n^m – операторов, построим для автомата $\mathfrak{A}$ и момента времени t множество пар

$$\mathcal{D}_t = \{\pi \mid \pi = (f_q(W), E_2^{m*}),\ N(W) \subseteq E,\ W \in \mathcal{L}_n,\ q \in Q^t\}$$

Выберем в $\mathcal{D}_t$ подмножество пар $\tilde{\mathcal{D}}_t$ с нелинейными результирующими функциями

$$\tilde{\mathcal{D}}_t = \{\pi \mid \pi \in \mathcal{D}_t,\ f_q(W) \text{ – нелинейная функция алгебры логики}\}$$

Через $\tilde{Q}^t$ обозначим подмножество Q^t тех состояний в которых реализуются нелинейные функции.

Лемма 3 Если $\{H_1, \quad H_k\}$ – I-полная система, то

1) для любого $t = 0,1,$ $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{Q}_i^t \neq \phi$

2) существует t_0, что для всех $t \geq t_0$ $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\mathcal{D}}_t^i \neq \phi$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1. Вовду, где это необходимо, заменяем слова "функция, зависящая от 2 переменных", на слова "нелинейная функция" и " J_u^m -оператор" на " L -оператор".

Можно заметить, что из условия I) этой леммы следует условие I) леммы 1. Однако из условия 2) не следует условие 2 леммы 1. Из условия 2) леммы 1 также не следует условие 2 последней леммы.

Теорема 3.22. Для того, чтобы система $\{H_1, \ldots, H_k\}$ была I-полной необходимо и достаточно, чтобы:

I) для любого t $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{Q}_i^t \neq \phi$

2) существует t_0, что для всех $t \geq t_0$

$$\bigcup_{i=1}^{k} \bar{\pi}_t^i \neq \phi \qquad \text{и} \qquad \bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\mathcal{D}}_t^i \neq \phi$$

Доказательство. Необходимость условий уже доказана. Из леммы 2 следует, что $[\{H_1, \ldots, H_k\} \cup R^1]_c$ содержит все линейные операторы. Теперь с помощью того же приема, что в этой лемме и используя условие $\bigcup_{i=1}^{k} \tilde{\mathcal{D}}_t^i \neq \phi$ мы сможем построить истиностную нелинейную с.д.функцию f. Теперь I-полнота система $\{H_1, \ldots, H_k\}$ следует из того, что $[R^1 \cup f]_c = P_{0.g.}$. Теорема доказана.

§ 9. Базисы в системах $P_{0.g.}^c$ и P_g^c.

Существенное различие свойств операторов замыкания $[\mathfrak{M}]_k$ и $[\mathfrak{M}]_c$ уже было продемонстрировано теоремой о счетности каждой c-полной системы (теорема). В этом параграфе будет продолжено изучение свойств оператора $[\mathfrak{M}]_c$ на примере задачи о базисах в классе $P_{0.g.}^c$. В этом классе, как будет показано, существуют бесконечные базисы, и, вместе с тем, существуют c – полные системы, не содержащие базиса. Такие системы обладают тем свойством, что любые их c – полные подсистемы вновь содержат c – полные собственные подсистемы.

Теорема 3.23 [20]. В $P_{0.g.}^c$ существует c – полная система, не содержащая неприводимых c – полных подсистем.

Доказательство. Рассмотрим систему о.д.функций

$$\Phi = \{ f_0^1(x_1, x_2), f_i^1(x_1, x_2, \quad, x_{\delta_i}) ; i = 1,2, \quad, \delta_i = 2^i + i \cdot 2^i \}$$

где $f_0^1 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$.

Для удобства переименуем переменные функций f_i^1 $i = 1,2,$, считая, что f_i^1 есть функция $f_i^1(x_1, \quad, x_{i2^i}, u_1, \quad, u_{2^i})$. Автомат $\mathfrak{A}_{q_0}^i = ([0,1]^{\delta_i}, Q_i, \{0,1\}, \varphi_i, \psi_i, q_0)$, реализующий функцию f_i^1 задается каноническими уравнениями:

$$\begin{cases} q(1) = q_0 \\ q(t+1) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i\cdot 2^i}(t), u_1(t), \ldots, u_{2^i}(t), q(t)), \\ b(t) = \psi_i(x_1, \ldots, x_{i\cdot 2^i}(t), u_1(t), \ldots, u_{2^i}(t), q(t)), \end{cases}$$

Здесь $Q_i = \{q_0, q_1, \ldots, q_{2^i-1}\}$, а функции φ_i, ψ_i обладают следующими свойствами.

Зафиксируем значение переменной q, например пусть $q = q_s$. Тогда функция $g_s^i(x_1, \ldots, x_{i\cdot 2^i}, u_1, \ldots, u_{2^i}) = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i\cdot 2^i}, u_1, \ldots, u_{2^i}, q)$ зависит только от переменных $x_{(s-1)i+1}, x_{(s-1)\cdot i+2}, \ldots, x_{s\cdot i}$ и принимает все значения из множества Q_i. Заметим, что число различных наборов значений существенных переменных функции g_s^i равно 2^i. Это имеет место для всех $s = 0, 1, \ldots, 2^i - 1$. В свою очередь, функция

$$h_s^i(x_1, \ldots, x_{i\cdot 2^i}, u_1, \ldots, u_{2^i}) = \psi_i(x_1, \ldots, x_{i\cdot 2^i}, u_1, \ldots, u_{2^i}, q_s)$$

зависит лишь от переменной u_{s+1} и принимает значения, равные значениям этой переменной:

$$h_s^i(x_1, \ldots, x_{i\cdot 2^i}, u_1, \ldots, u_{2^i}) = u_{s+1}, \quad s = 0, 1, \ldots, 2^i - 1.$$

Из определения $f_0^1(x_1, x_2)$ следует, что с помощью суперпозиций из неё можно получить любую о.д.функцию веса I (истиностную).

Для о.д.функции f_i^1 укажем некоторую конкретную реализацию структурным автоматом, сеть которого содержит i задержек (тогда состояниям автомата будут соответствовать наборы состояний этих i задержек: $q \leftrightarrow (z_1, z_2, \ldots, z_i)$). Пусть $\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^{2^i}$ – лексикографическое упорядочение наборов из 0 и I длины i, $\delta^j = (\delta_1^j, \ldots, \delta_i^j)$. Тогда условиям, сформулированным выше, удовлетворяет структурный автомат со следующей системой канонических уравнений.

$$\begin{cases} z_1(1) = 0, \\ z_i(1) = 0, \\ z_k(t+1) = \bigvee_{s=1}^{2^i} z_1^{\delta_1^s} z_2^{\delta_2^s} \cdots z_i^{\delta_i^s} x_{k+(s-1)i}, \quad k = 1, \ldots, i, \\ b(t) = \bigvee_{s=1}^{2^i} z_1^{\delta_1^s} z_2^{\delta_2^s} \cdots z_i^{\delta_i^s} u_s \end{cases}$$

Покажем, что множество $[\{f_0^1, f_k^1\}]_c$ содержит любую о.д.функцию веса не более 2^k. В самом деле, пусть $f^1(x_1, \ldots, x_m)$ – произвольная о.д.функция веса d, $d \le 2^k$. Добавляя, если это необходимо, неотличимые состояния, можно указать автомат $\mathfrak{A}$ с 2^k состояниями, реализующий функцию $f^1(x_1, \ldots, x_m)$.

Структурно автомат $\mathfrak{A}$ реализуется схемой с k задержками; система канонических уравнений имеет вид:

$$z_1(1) = 0,$$

$$z_k(1) = 0,$$

$$z_j(t+1) = h_j(x_1(t), \ldots, x_m(t), z_1(t), \ldots, z_k(t)), \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$b(t) = h_0(x_1(t), \ldots, x_m(t), z_1(t), \ldots, z_k(t))$$

Здесь h_0, h_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ – некоторые функции алгебры логики. Разложим эти функции по переменным $z_1, \ldots, z_k$:

$$h_j(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots z_k) = \bigvee_{s=1}^{2^k} z_1^{\delta_1^s} z_2^{\delta_2^s} \cdot \ldots z_k^{\delta_k^s} \cdot h_j^s(x_1, \ldots, x_m), \quad j = 0, 1, \ldots, k$$

Так как истинностные о.д.функции h_j^s могут быть получены из f_0^1, нетрудно видеть теперь, что подставляя h_j^s, $j \geq 1$ вместо переменных $x_{j+(s-1)\cdot k}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $s = 1, \ldots, 2^k$, и функции h_0^s вместо переменных u_s, $s = 1, \ldots, 2^s$ в функцию $f_k^1(x_1, \ldots, x_{k\,2^k}, u_1, \ldots, u_{2^k})$, получим о.д.функцию $f^1(x_1, \ldots, x_m)$.

Из этого факта следует c – полнота Φ. Покажем, что любая c – полная подсистема Φ приводима, т.е. содержит собственную c-полную подсистему.

Действительно, пусть $\Phi' \subseteq \Phi$, $[\Phi']_c = P_{o.д.}^c$. Тогда Φ' содержит f_0^1, так как остальные функции из Φ в каждом состоянии реализуют лишь функции одной переменной. Φ', очевидно, содержит, по крайней мере две функции из Φ f_i^1, f_j^1, $j > i$. Но $f_i^1 \in [\{f_0^1, f_j^1\}]_c$ что и доказывает теорему.

Ранее(теорема 3.16) было показано, что для любой о.д.функции $f^1(x_2, x_3, \ldots, x_z)$ и любой константой о.д.-функции $\Gamma_{\beta^\infty}(x_1)$ существует о.д.функция $T^1_{\beta^\infty, f^1}(x_1, x_2, \ldots, x_z)$, обладающая следующими свойствами:

1) $T^1_{\beta^\infty, f^1}(\Gamma_{\beta^\infty}(x_2), x_3, \ldots, x_z) = f^1(x_2, \ldots, x_z)$

2) переменная x_1 о.д.-функции $T^1_{\beta^\infty, f^1}$ обладает F -свойством на любом сверхслове, отличном от β^∞.

Теорема 3.24. В $P_{o.д.}^c$ существует базис.

Доказательство. Будем строить базис, используя систему Φ, построенную в теореме 3.23. Рассмотрим систему $\tilde{\Phi} = \{\tilde{f}_0^1, \tilde{f}_1^1, \ldots\}$, где $\tilde{f}_0^1(x_1, x_2) = f_0^1(x_1, x_2)$, а $\tilde{f}_i^1$ строятся следующим образом.

а) $i = 1$. Рассмотрим все константные о.д.функции порожденные функцией $f_0^1(x_1, x_2)$ или отличающиеся от последних в конечном числе разрядов. Очевидно, все они имеют вид $\beta^\infty = \beta(1)\beta(2) \ldots \beta(t)00\ldots$ или $\beta^\infty = \beta(1)\beta(2) \ldots \beta(t)11\ldots$, т.е. лишь в конечном числе разрядов отличаются от последовательности $00\ldots0\ldots$ или $111\ldots1\ldots$, состоящих только из 0 или только из I, соответственно. Пусть z_0 – множество этих о.д. функций и $\Gamma_{\beta^\infty}(x_1) \in z_0$. В качестве $\tilde{f}_1^1(x_0, x_1, \ldots, x_{\sigma_1})$ $\sigma_1 = 4$ возьмем функцию $T^1_{\beta^\infty, f_1^1}(x_0, x_1, \ldots, x_{\sigma_1})$

б) Пусть уже построены $\tilde{f}_1^1, \ldots, \tilde{f}_i^1$.

Заметим, что c – замыкание системы $\{\tilde{f}_0^1, \ldots, \tilde{f}_i^1\}$ содержит все о.д.функции с весом не более чем 2^i. Подобно тому, как это делалось при доказательстве счетности всякой c -полной системы, можно показать,

что существует такая константная о.д.функция $\Gamma_{\beta_i^\infty}(x_1)$, что

$\Gamma_{\beta_i^\infty} \quad \tilde{f}_i^1 \rceil_c$ и $\Gamma_{\beta_i^\infty} \notin [\{\tilde{f}_0^1, \ldots, \tilde{f}_{i-1}^1\}]_c$.

Тогда в качестве $\tilde{f}_{i+1}^1(x_0, x_1, \ldots, x_{\sigma_{i+1}})$, $\sigma_{i+1} = 2^{i+1} + (i+1)2^{i+1}$

возьмем функцию $T^1_{\beta_i^\infty, \tilde{f}_{i+1}^1}(x_0, x_1, \ldots, x_{\sigma_{i+1}})$

Таким образом, наша система $\tilde{\Phi}$ индуктивно задана. Её c-полнота следует из c-полноты системы Φ, т.к. $\Phi \subset [\tilde{\Phi}]_c$. Докажем неприводимость $\tilde{\Phi}$.

а) Для любого $k \geq 1$ автоматы, реализующие о.д.функции $\tilde{f}_k^1$ таковы, что в каждом состоянии реализуется функция от одной переменной. Поэтому $\tilde{f}_0^1 \notin [\Phi \setminus \{\tilde{f}_0^1\}]_c$

б) Пусть $k > 0$. Рассмотрим множество z_k константных о.д.функций, принадлежащих множеству $[\{\tilde{f}_0^1, \tilde{f}_1^1, \ldots, \tilde{f}_{k-1}^1\}]_c$. Тогда для любого $i < k$ функция $\tilde{f}_i^1$ сохраняет это множество в силу определения z_k. Для любого $i > k$ функция $\tilde{f}_i^1$ обладает по переменной x_0 F-свойством на любом сверхслове, отличном от β_{i-1}^∞. Но $\beta_{i-1}^\infty \notin [\{\tilde{f}_0^1, \ldots, \tilde{f}_{i-2}^1\}]_c$ следовательно, $\beta_{i-1}^\infty \notin [\{\tilde{f}_0^1, \ldots, \tilde{f}_{k-1}^1\}]_c$, т.к. $k-1 \leq i-2$, т.е. $\tilde{f}_i^1$ обладает F - свойством на множестве z_k. Нетрудно видеть, что $z_k =]z_k[$, следовательно, $\tilde{f}_i^1$ также сохраняет z_k. Так как свойство сохранения множеств переносится и на суперпозиции, то $\tilde{f}_k^1 \notin [\tilde{\Phi} \setminus \{\tilde{f}_k^1\}]_c$. Таким образом, из $\tilde{\Phi}$ нельзя удалить ни одного элемента без потери свойства полноты, что и доказывает теорему.

Обобщения конечных абстрактных и конечных структурных автоматов возникают на пути отказа от требования конечности алфавитов состояний, входных и выходных алфавитов.

Абстрактным автоматом называется система (A, Q, B, φ, ψ), где A, B, Q - алфавиты произвольной мощности, называемые, как и в конечном случае, соответственно, входным алфавитом, множеством состояний и выходным алфавитом. Понятие автомата с r входами и v выходами получается так же как и в случае конечных автоматов. Автоматы, вообще говоря, не допускают финитного задания, однако, при некоторых ограничениях на алфавиты и функции φ и ψ в ряде случаев можно использовать язык диаграмм переходов и информационных деревьев. Поведение автомата определяется как в случае конечных автоматов. Автомат $(A, Q, B, \varphi, \psi, q)$, такой что

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r, \quad B = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_v \quad \text{и} \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_v)$$

с r входами и v выходами реализует некоторую детерминированную функцию (д.функцию). Далее в наших рассмотрениях мы будем считать всегда, что $v = 1$, $E_\xi = A_i = B_1$, $i = 1, 2, \ldots, r$ E_ξ - некоторое множество, мощность которого задается кардинальным числом ξ. Фиксируя E_ξ и задавая ограничения на мощность множеств состояний, мы будем получать, тот или иной класс многоместных д.функций. Будут рассмотрены три случая:

1^0. Класс N - $\xi = \aleph_0$, каждая функция из класса N реализуется автоматом не более чем счетным множеством состояний.

2^0. Класс M - $\xi = \aleph_0$; автоматы, реализующие функции этого класса могут иметь лишь конечное (хотя и сколь угодно большое) число состояний.

3^0. Класс L - $\xi = m < \aleph_0$, E_m - конечное множество; автоматы, реализующие функции из этого класса могут иметь не более чем счетное множество состояний.

Каждый из классов N, M, L с операцией суперпозиции образует функциональную систему; будем рассматривать для этих функциональных систем задачу о базисах.

Часто в дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение. Если $F(x_1, \dots, x_s)$ – д.функция, то через ${}^{\tau}[F(x_1, \dots, x_s)$ будем обозначать ограничение функции $F(x_1, \dots, x_s$ на множестве слов длины τ; другими словами, для любого набора слов $(\alpha_1^t, \dots \alpha_s^t)$, $t \le \tau$ имеет место ${}^{\tau}[F(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t) = F(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t)$.

${}^{\tau}[F(x_1, \dots, x_s)$ – частичная функция, определенная только на наборах $(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t)$, $t \le \tau$. Напомним, что через $F_{\alpha^\tau}(x_1, \dots, x_s)$, $\alpha^\tau \in ([E_\gamma]^s)^*$ обозначается остаточная функция для функции $F(x_1, \dots, x_s)$. Остаточная функция д.функции также является д.функцией. Если число состояний автомата, реализующего д.функцию $F(x_1, \dots, x_s)$ конечно, то $F(x_1, \dots, x_s)$ имеет лишь конечное число различных остаточных функций. Заметим для дальнейшего, что для любого слова α^τ в алфавите $[E_\gamma]^s$ функция ${}^1[F_{\alpha^\tau}(x_1, \dots, x_s) = \psi(x_1, \dots, x_s)$ определена только на словах длины I и есть не что иное, как функция, приписанная вершине информационного дерева функции $F(x_1, \dots, x_s)$, в которую ведет последовательность стрелок, соответствующая слову α^τ.

Лемма 1. Если $\mathfrak{M} \subseteq N$ и $\|\mathfrak{M}\| > \aleph_0$, то найдется бесконечная подсистема $\Phi \in \mathfrak{M}$, которая целиком содержится в некотором подклассе класса N с конечным базисом.

Доказательство. Можно считать, что множество $E_{\aleph_0}$ – натуральный ряд, $E_{\aleph_0} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Функции из N будем задавать информационными деревьями, вершинам которых приписаны некоторые функции "счетнозначной логики". Пусть $\mathfrak{M}_K \subset \mathfrak{M}$ – множество д.функций от K переменных. В силу несчетности $\mathfrak{M}$ найдется такое s, что $\mathfrak{M}_s$ – бесконечное множество. Возьмем в $\mathfrak{M}_s$ произвольное бесконечное счетное подмножество Φ. Информационные деревья, задающие д.функции из N, отличаются лишь функциями, приписанными вершинам деревьев. Заметим, что каждой вершине приписана некоторая функция типа $[E_{\aleph_0}]^s \to E_{\aleph_0}$. Рассмотрим две функции типа $E_{\aleph_0} \to E_{\aleph_0}$:

$g_1(x) = 2x$ и $g_2(x) = 2x+1$. Нетрудно видеть, что суперпозицией этих функций является функция $h_\tau(x) = 2^\tau(2x+1)$ для каждого $\tau = 0, 1, 2, \dots$. Функция $h_\tau(x)$ принимает разные значения для разных x, причем множества значений $h_{\tau_1}(x)$ и $h_{\tau_2}(x)$ при $\tau_1 \ne \tau_2$ не пересекаются. С помощью $h_\tau(x)$ построим д.функцию $H_\tau(x)$ из N – каждой вершине информационного дерева функции $H_\tau(x)$ приписана одна и та же функция $h_\tau(x)$. Ясно, что $H_\tau(x)$ порождается суперпозициями функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$ из N построенных аналогично с помощью $g_1(x)$ и $g_2(x)$, соответственно. Каждая из д.функций $H_\tau(x)$ переводит разные слова из $E^*_{\aleph_0}$ в разные и множества значений $H_{\tau_1}(x)$ и $H_{\tau_2}(x)$ при $\tau_1 \ne \tau_2$ не пересекаются. Вернемся к системе

$\Phi = \{F^1(x_1, \dots, x_s), F^2(x_1, \dots, x_s), \dots\}$. Построим д.функцию $F(x_1, x_2, \dots, x_s)$ такую, что $F^\tau(x_1, \dots, x_s) = F(H_\tau(x_1), x_2, \dots, x_s)$. Пусть $\alpha^t \in [E^s_{\aleph_0}]^*$ – входное слово, $\alpha^t = (\alpha_1^t, \alpha_2^t, \dots, \alpha_s^t)$, $\alpha_i^t \in E^*_{\aleph_0}$, $i = 1, \dots, s$, и пусть $H_\tau(\alpha_1^t) = \beta_\tau^t$. Пусть входное слово $\gamma_\tau^t \in [E^s_{\aleph_0}]^*$ таково, что $\gamma_\tau^t = (\beta_\tau^t, \alpha_2^t, \alpha_3^t, \dots, \alpha_s^t)$. Если ${}^1[F_{\alpha^\tau} = f^\tau(x_1, \dots, x_s)$, то положим ${}^1[F_{\gamma_\tau^t} = f(x_1, \dots, x_s)$, где $f(x_1, \dots, x_s)$, такова что $f^\tau(x_1, \dots, x_s) = f(h_\tau(x_1), x_2, x_3, \dots, x_s)$. Так как множества значений

$h_{r_1}(x)$ и $h_{r_2}(x)$ при $r_1 \neq r_2$ не пересекаются, то при задании $f(x_1, \ldots, x_s)$ противоречий не возникает; при этом важно, что для разных x_1 $h_r(x_1)$ принимает разные значения. Значения $F(x_1, \ldots, x_s)$ на словах $(x_1^t, \ldots, x_s^t)$, где x_1^t не принадлежит множеству значений $H_r(x)$, $r=1,2,$ до 0 определим произвольно, сохраняя лишь свойство детерминированности. В силу задания д.функции $F(x_1, \ldots, x_s)$ имеем для каждого $r = 1,2,$.

$F_r(x_1, \ldots, x_s) = F(H_r(x_1), x_2, \ldots, x_s)$. Таким образом система Φ целиком содержится в подклассе класса N, порожденном тремя д.функциями $F(x_1, \ldots, x_s)$, $G_1(x)$, $G_2(x)$.

Лемма доказана.

Теорема 3.25 [20]. Любая полная в N система содержит полную собственную подсистему.

Доказательство. Для доказательства теоремы применим метод погружения, который заключается в следующем. Чтобы доказать зависимость некоторой полной бесконечной системы, достаточно указать в ней бесконечную подсистему, которая сама порождается конечной системой функций.

Пусть $\mathfrak{M} \subset N$ – полная система, т.е. $[\mathfrak{M}]_c = N$. Тогда $\mathfrak{M}$, очевидно, несчетная система, и в силу леммы , в ней существует бесконечная подсистема Φ, которая целиком содержится в некотором подклассе класса N с конечным базисом. Пусть этот базис есть $\{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$. В силу полноты $\mathfrak{M}$ каждая д.функция G_i, $i=1,\ldots,k$ есть суперпозиция конечного числа элементов из $\mathfrak{M}$. Пусть эти элементы в совокупности образуют систему $H_1, H_2, \ldots, H_\ell$. Имеем включения:

$$\Phi \subset [G_1, \ldots, G_k] \subset [H_1, \ldots, H_\ell]$$

и так как Φ – бесконечная система, найдется элемент $F \in \Phi$, $F \neq H_i$, $i=1,\ldots,\ell$. Поэтому $\mathfrak{M} \subset [\mathfrak{M} \setminus \{F\}]_c$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ не является базисом класса N. Теорема доказана.

С помощью метода погружения доказывается и теорема об отсутствии базиса в классе M.

Теорема 3.26 [20]. В классе M любая полная система содержит полную собственную подсистему.

Доказательство. Теперь в лемме, аналогичной лемме 1, необходимо следить за тем, чтобы при построении функции F остаться в классе д.функций, реализуемых автоматами с конечным числом состояний. Если $\mathfrak{M} \subset M$ – несчетная система д.функций, то найдутся такие s и k, что $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное множество s-местных д.функций, реализуемых автоматами с k состояниями. Мы хотим показать, что функция $F(x_1, \ldots, x_s)$ может быть выбрана такой, что она реализуется автоматом с не более чем k состояниями.

Мы можем считать, что у всех автоматов, реализующих функции из Φ, одно и то же множество состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}\}$ и они отличаются лишь функциями переходов и выходов. Пусть д.функция $F_r(x_1, \ldots, x_s)$ реализуется автоматом $([E_{\aleph_0}]^s, Q, E_{\aleph_0}, \varphi_r, \psi_r, q_0)$. Рассмотрим автомат $([E_{\aleph_0}]^s, Q, E_{\aleph_0}, \varphi, \psi, q_0)$ у которого φ и ψ таковы, что для каждого $r = 0,1,2,$.

$$\varphi(q_j, (h_r(a_1), a_2, \ldots, a_s)) = \varphi_r(q_j, (a_1, a_2, \ldots, a_s))$$

$$\psi(q_j, (h_r(a_1), a_2, \ldots, a_s)) = \psi_r(q_j, (a_1, a_2, \ldots, a_s))$$

Так как для любого $a \in E_n$ найдутся такое z и такое $b \in E_{\aleph_0}$, что $z(b) = a$, то функции φ и ψ полностью определены. Покажем, что для любого $z = 1,2,$ $F_z(x_1, \ldots, x_s) = F(H_z(x_1), x_2, \ldots, x_s)$. С этой целью соединим выход автомата $\mathfrak{B}_z$, реализующего функцию $H_z(x)$ с первым входом автомата $\mathfrak{A}$, реализующего $F(x_1, \ldots, x_s)$. Получим автомат

$$\mathfrak{A}' = \langle [E_{\aleph_0}]^s, Q', E_{\aleph_0}, \varphi', \psi', q_0' \rangle$$

где $Q' = Q_z \times Q$, Q_z – множество состояний $\mathfrak{B}$.

Так как каждой вершине информационного дерева функции $H_z(x)$ приписана одна и та же функция $h_z(x)$, можно считать, что $Q_z = \{q\}$ – состоит из одного элемента, и $Q' = Q$. Функции φ' и ψ' получаются следующим образом:

$$\varphi'(q', (a_1, \ldots, a_s)) = \varphi(q', (h_z(a_1), a_2, \ldots, a_s)) = \varphi_z(q', (a_1, a_2, \ldots, a_s)),$$

$$\psi'(q', (a_1, \ldots, a_s)) = \psi(q', (h_z(a_1), a_2, \ldots, a_s)) = \psi_z(q', (a_1, a_2, \ldots, a_s)).$$

Таким образом автомат $\mathfrak{A}'$ реализует функцию $F_z(x_1, \ldots, x_s)$. Дальше рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.25. Теорема доказана.

Лемма 1. Если $\mathfrak{M} \subset L$, $\|\mathfrak{M}\| > \aleph_0$, то в $\mathfrak{M}$ найдется бесконечная подсистема Φ, которая целиком содержится в некотором конечнопорожденном подклассе класса L.

Доказательство. Будем считать, что алфавит E_s имеет мощность m, $E_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, так что каждой вершине информационного дерева д.функции из L приписана некоторая функция m-значной логики.

В силу несчетности $\mathfrak{M}$ в ней найдется бесконечная подсистема Φ s-местных д.функций. Так как функций m-значной логики от s переменных конечное число, в Φ найдется бесконечная подсистема s-местных функций $T_1 = \{F^{11}, F^{21}, F^{31}, \ldots\}$, такая что корневым вершинам всех информационных деревьев д.функций из T_1 приписана одна и та же функция m-значной логики $\psi_0(x_1, \ldots, x_s)$. Индуктивно определим дальше ход построения интересующей нас системы д.функций из $\mathfrak{M}$. Пусть уже выбрана бесконечная система д.функций T_k, $k \geq 1$, $T_k \subset \Phi$. $T_k = \{F^{kk}, F^{k+1,k}, F^{k+2,k}, \ldots\}$. Рассмотрим бесконечную подсистему $T_{k+1} \subset \{T_k \setminus F^{kk}\}$, $T_{k+1} = \{F^{k+1,k+1}, F^{k+2,k+1}, \ldots\}$ так что для некоторых функций m-значной логики $\psi_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, \psi_{(m^s)^k}(x_1, \ldots, x_s)$ имеет место следующее; для произвольного слова $\alpha_j^k = (\alpha_{j1}^k, \alpha_{j2}^k, \ldots, \alpha_{js}^k)$ из $([E_m]^s)^*$ $j = 1, 2, \ldots, (m^s)^k$,

$${}^{i}[F_{\alpha_j^k}^{i,k+1}(x_1, \ldots, x_s) = \psi_j(x_1, \ldots, x_s) \qquad i = k+1, k+2, \ldots$$

Рассмотрим теперь счетную систему д.функций $\Phi_1 = \{F^{11}, F^{22}, F^{33}, \ldots\}$ и покажем, что Φ_1 удовлетворяет условиям леммы. Заметим, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ информационные деревья функций $F_{j,j}$, $j \geq k$ совпадают на первых k ярусах. Другими словами

$${}^{k}[F^{kk}(x_1, \ldots, x_s) = {}^{k}[F^{jj}(x_1, \ldots, x_s) \qquad j \geq k.$$

- сверхслово состоящее из одних нулей, и $\Gamma_{\gamma^\infty}(x)$ есть $\gamma^\infty = 000$ - константная д.функция, соответствующая сверхслову γ^∞. Рассмотрим также д.функцию $G(x)$, которая реализуется автоматом $(E_m, \{q_0, q_1\}, E_m, \varphi, \psi, q_0)$, где φ и ψ таковы, что $\varphi(q_0, i) = q_1$, $i = 0, 1, \dots, m-2$, $\varphi(q_0, m-1) = q_0$; $\psi(q_0, m-1) = 0$; $\varphi(q_1, i) = q_1$, $i = 0, 1, \dots, m-1$; $\psi(q_0, i) = i+1$, $i = 0, \dots, m-2$; $\psi(q_1, i) = i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$;

Пусть $p = m^{i-1}$. Тогда константная о.д.функция

$$E_i(x) = \underbrace{G(G(\dots(G}_{p\ p-3}(\Gamma_{p^\infty}(x)))\dots))$$

реализует сверхслово $\gamma_i^\infty = \underbrace{0\dots0}_{i-1}100\dots$, состоящее только из нулей, кроме I на i-м месте.

Построим теперь функцию $F(x_1, \dots, x_s, x_{s+1})$ такую, что $F^{i,i}(x_1, \dots, x_s) = F(x_1, \dots, x_s, E_i(x_s))$. Это, очевидно, завершит доказательство леммы.

Корневой вершинеинформационного дерева F принимаем функцию $\psi_0(x_1, \dots, x_s)$ которая приписана корням всех деревьев функций из Φ_1.

Пусть $\beta^t \in ([E_m]^{s+1})^*$, $\beta^t = (\beta_1^t, \dots, \beta_s^t, \beta_{s+1}^t)$.

а) $\beta_{s+1}^t = \underbrace{0\dots0}_{t}$. Пусть $\tilde{\beta}^t$ - такое слово, что $\tilde{\beta}^t = (\beta_1^t, \dots, \beta_s^t)$.

Положим $^1[F_{\beta^t} = {}^1[F^{t,t}_{\tilde{\beta}^t}$

б) $\beta_{s+1}^t = \underbrace{0\dots0}_{i-1}1\underbrace{0\dots0}_{t-i}$. Положим в этом случае $^1[F_{\beta^t} = {}^1[F^{i,i}_{\tilde{\beta}^t}$

в) в остальных точках доопределим F произвольно, с сокращением свойства детерминированности.

Рассмотрим суперпозицию $F(x_1, \dots, x_s, E_i(x_s))$. Пусть α^t, $t<i$ - произвольное входное слово. Тогда

$$F(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t, E_i(\alpha_s^t)) = F(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t, \underbrace{0\dots0}_{t})$$

В силу определения F имеем для любого $j \le t$

$$^1[F_{\alpha^t}]_j = {}^1[F^{j,j}_{\alpha^t}]_j = {}^1[F^{i,i}_{\alpha^t}]_j$$

Отсюда

$$^t[F(x_1, \dots, x_s, E_i(x_s)) = {}^t[F^{i,i}(x_1, \dots, x_s)$$

следовательно

$$F(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t, E_i(\alpha_s^t)) = F^{i,i}(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t)$$

Если $t \ge i$, то, с учетом б) снова имеем

$$F(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t, E_i(\alpha_s^t)) = F^{i,i}(\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t)$$

Таким образом,

$$F(x_1, \dots, x_s, E_i(x_s)) = F^{i,i}(x_1, \dots, x_s)$$

Лемма доказана.

Из этой леммы и метода погружения следует теорема об отсутствии базиса в классе L.

Теорема 3.27. Каждая полная в L система содержит полную собственную подсистему.

§ 10. Система $P^1_{o.g.}$.

В этом параграфе будет рассмотрена важный подкласс класса о.д.функций – одноместные о.д.функции. Каждая одноместная о.д. функция задает отображение множества слов входного алфавита во множество слов выходного алфавита. Относительно операций суперпозиции множество $P^1_{o.g.}$ образует полугруппу с единицей, роль которой служит тождественное отображение. Операция обратной связи здесь "вырождается" и для изучения наиболее интересных свойств достаточно рассматривать только суперпозицию. Как всякая полугруппа с единицей, $P^1_{o.g.}$ содержит группу, которая в данном случае устроена весьма нетривиально. Изучение $P^1_{o.g.}$ мы начнем с рассмотрения традиционной задачи о базисах, а затем перейдем к результатам, которые показывают, что изучение $P^1_{o.g.}$ может быть плодотворным не только с точки зрения "внутренних" задач теории автоматов, но и с позиций других разделов математики.

Как было показано, в $P_{o.g.}$ и в $P^c_{o.g.}$ существуют базисы, конечные и бесконечные, соответственно. В системе $P^1_{o.g.}$ этот факт не имеет места. Если применять операцию обратной связи к элементам из $P^1_{o.g.}$, то результатом операции будут константные о.д. функции.

Суперпозиция константной о.д. функции с произвольной функцией из $P^1_{o.g.}$ снова дает константную о.д.функцию. Если через K обозначить множество всех константных о.д.функций из $P^1_{o.g.}$, то как нетрудно видеть, имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Если $\mathfrak{M} \subseteq P^1_{o.g.}$, $[\mathfrak{M}] = P^1_{o.g.}$, то

$$[\mathfrak{M} \setminus (\mathfrak{M} \cap K)]_c \supseteq P^1_{o.g.} \setminus K$$

Перефразируя лемму, можно сказать, что всякая полная в $P^1_{o.g.}$ система (относительно суперпозиции и обратной связи) содержит подсистему, состоящую только из неконстантных о.д.функций, которая порождает только суперпозициями все множество неконстантных функций из $P^1_{o.g.}$.

Нетрудно, вместе с тем, указать две неконстантные о.д.функции из $P^1_{o.g.}$, суперпозиция которых порождает константную. Например, функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ заданные диаграммами (рис. 97) таковы, что $F_1(F_2(x)) = \Gamma_{\gamma^\infty}$, где $\gamma^\infty = 000\dots$ – состоит только из нулей.

Рис.97

Для любых двух константных о.д. функций $\Gamma_{\gamma_1^\omega}(x)$ и $\Gamma_{\gamma_2^\omega}(x)$ можно указать такую неконстантную о.д. функцию $F(x)$ из $P^1_{o.g}$, что

$$F(\Gamma_{\gamma_1^\omega}(x)) = \Gamma_{\gamma_2^\omega}(x)$$

Доказательство этого факта предоставляется читателю. Отсюда получается следующее усиление леммы I.

Лемма 2. Если $[\mathfrak{M}] = P^1_{o.g.}$, то

$$[\mathfrak{M} \setminus (\mathfrak{M} \cap K)]_c = P^1_{o.g.}$$

Поэтому, если в $P^1_{o.g.}$ существует базис, то этот базис не содержит константных функций и порождает множество $\{P^1_{o.g.} \setminus K\}$ только с помощью суперпозиций.

Лемма 3. В $P^1_{o.g.}$ нет конечных полных систем.

Доказательство. Лемма доказывается (учитывая лемму 2) аналогично теореме об отсутствии конечных полных систем в $P^c_{o.g.}$.

Обозначим через AS_2 множество всех взаимнооднозначных отображений из $P^1_{o.g.}$. Индекс 2 указывает на то, что мы рассматриваем случай, когда входной алфавит состоит из 2 элементов $A = \{0,1\}$. Для алфавита мощности n соответствующее множество обозначается AS_n. Множество AS_2 с операцией суперпозиции образует группу, которую мы будем называть группой автоматных подстановок. Доказательству этого факта посвящена следующая лемма.

Лемма 4. Множество AS_2 образует группу относительно операции суперпозиции.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что для любой взаимнооднозначной функции $F(x)$ из AS_2 найдется такая о.д. функция $F^{-1}(x)$, что $F(F^{-1}(x)) = E(x)$, где $E(x)$ – тождественное отображение. Пусть $F(x)$ реализуется конечным автоматом $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, Q, \{0,1\}, \varphi, \psi, q)$. Рассмотрим конечный автомат $\mathfrak{A}' = (\{0,1\}, Q, \{0,1\}, \varphi', \psi, q)$, такой, что $\varphi'(q,x) = \varphi(q,x)$, если $\psi(q,x) = x$ и $\varphi'(q,x) = \varphi(q,\bar{x})$, если $\psi(q,x) = \bar{x}$. Очевидно, что для любого слова $\alpha \in \{0,1\}^*$ ${}^1[F_\alpha(G_\alpha(x))] = x$, где $G(x)$ – о.д. функция, реализуемая автоматом $\mathfrak{A}'$. Отсюда и вытекает $G(x) = F^{-1}(x)$.

Как и для всякой полугруппы, для $P^1_{o.g.}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Если $[\mathfrak{M}]_c = P^1_{o.g.}$, то $[\mathfrak{M} \cap AS_2] = AS_2$.

Введем несколько понятий.

Пусть $F(x) \in P^1_{o.g.}$, и ${}^\tau[F(x)$ – ограничение $F(x)$ на словах длины τ. Через ${}^\tau[P^1_{o.g.}$ обозначим множество всех ограничений ${}^\tau[F(x)$, $F(x) \in P^1_{o.g.}$. Нетрудно видеть, что ${}^\tau[P^1_{o.g.}$ с операцией суперпозиции образует конечную полугруппу, которая является гомоморфным образом полугруппы $P^1_{o.g.}$. Пробегая последовательность $\tau = 1,2,3,\ldots$, мы получим последовательность гомоморфизмов $P^1_{o.g.}$ на конечные полугруппы $P^{(\tau)}$, $\tau = 1,2,\ldots$, $P^{(\tau)} = {}^\tau[P^1_{o.g.}$. Аналогичную процедуру можно провести для группы AS_2, колучая в качестве гомоморфных образов конечные группы $AS_2^{(1)}$, $AS_2^{(2)}$, ...

Мы приходим таким образом, к следующей лемме

Лемма 6. Группа AS_2 (полугруппа $P^1_{o.g.}$) является подгруппой прямого произведения $\prod_{i=1}^{\infty} AS_2^{(i)}$ (подполугруппой $\prod_{i=1}^{\infty} P^{(i)}$).

Перейдем к теореме о базисах в $P^1_{o.g.}$. Будем говорить, что $F(x)$, $F(x) \in P^1_{o.g.}$ имеет ранг τ, если ${}^\tau[F(x) \in AS_2^{(\tau)}$ и ${}^{\tau+1}[F(x) \notin AS_2^{(\tau+1)}$. Ясно, что если $F(x)$ имеет ранг τ, то найдется слово $\alpha^\tau \in \{0,1\}^*$, такое, что

$^1[F_{\alpha^\tau}(x) = c$, $c \in \{0,1\}$, и для любого α^t, $t < \tau$, $^1[F_{\alpha^t}(x)$ существенно зависит от переменной x , а следовательно, есть либо $f(x) = x$, либо $f(x) = \bar{x}$. $F(x)$, по определению, имеет бесконечный ранг, если $F(x) \in AS_2$. В этом случае для любого слова $\alpha^t \in \{0,1\}^*$ $^1[F_{\alpha^t}(x) = f_{\alpha^t}(x)$, где либо $f_{\alpha^t}(x) = x$, либо $f_{\alpha^t}(x) = \bar{x}$. Другими словами, если автомат $(\{0,1\}, a, \{0,1\}, \varphi, \psi, q)$ реализует функцию из AS_2 , то в каждом состоянии этого автомата реализуется существенная функция от входного переменного x .

О.д. функция $F(x)$ называется атомарной, если существует слово $\alpha^t \in \{0,1\}^*$, такое, что $^1[F_{\alpha^t}(x) = c$, $c \in \{0,1\}$ и для любого слова $\beta \neq \alpha^t$ $^1[F_\beta(x)$ существенно зависит от переменной x . Ясно, что ранг атомарной функции, характеризуемой словом α^t , есть t .

Обозначим через $E(x)$ единицу полугруппы $P^1_{0,g}$. Функция $E(x)$ реализуется автоматом с одним состоянием $(\{0,1\}, \{q\}, \{0,1\}, \varphi, \psi, q)$, где

$$\varphi(q,a) = q \ , \quad \psi(q,a) = a \ , \qquad a \in \{0,1\}$$

Пусть t – натуральное число. Назовем t – приближением о.д. функции $F(x)$, о.д.функцию $^tF(x)$, такую, что

I) $^t[F(x) = {}^t[^tF(x)$, 2) для любого слова α^t $^tF_{\alpha^t}(x) = E(x)$.

Назовем t – продолжением о.д.функции $F(x)$ о.д. функцию $_tF(x)$ такую, что

I) $^t[_tF(x) = {}^t[E(x)$, 2) для любого слова α^t $_tF_{\alpha^t}(x) = F_{\alpha^t}(x)$

При $t = 0$, по определению, считаем, что

$$^0F(x) = E(x) \ , \qquad _0F(x) = F(x)$$

Из определений t – приближения и t – продолжения следует лемма.

Лемма 7 . Для любого $t \geq 0$ $F(x) = {}^tF(_tF(x))$. Пусть $F(x)$ – о.д. функция, такая, что существует t (зависящее от $F(x)$) для которого $_tF(x) \in AS_2$. Обозначим через $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} \subseteq P^1_{0,g}$ множество всех таких функций. Нетрудно видеть, что $AS_2 \subset \mathfrak{D}$, $[\mathfrak{D}]_c = \mathfrak{D}$.

Лемма 8 . Пусть $F(x)$, $F_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,k$ – о.д. функции рангов τ , τ_i , $i = 1,2,\ldots,k$, соответственно (случай бесконечных рангов не исключается) и $F(x) = F_1(F_2(\ldots(F_k(x))\ldots))$. Тогда

$$\tau = \min_i \{\tau_i\}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из определения ранга.

Дальнейшие построения коротко состоят в следующем:

I) с помощью операции суперпозиции из одной атомарной функции ранга τ и функций из AS_2 строятся все атомарные функции ранга τ

2) любая функция из $\mathfrak{D}$ строится из атомарных функций и функций из AS_2.

3) далее показывается, что для любого $\tau = 0,1,\ldots$ любая полная в $P^1_{0,g}$ система содержит атомарную функцию ранга τ ,

4) отсюда будет следовать, что для любой полной в $P^1_{0,g}$ системы $\mathfrak{R}$ справедливо

$$[\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}]_c = \mathfrak{D}$$

Лемма 9 . Пусть $F(x)$, $G(x)$ – атомарные функции ранга τ . Тогда

$$F(x) \in [\{G(x)\} \cup AS_2]_c$$

Доказательство. Из атомарности $G(x)$ следует, что существует единственное слово α^τ , такое, что $^1[G_{\alpha^\tau}(x) = c_1 = const$. Пусть β^τ – слово, такое,

что ${}^1[F_{\beta^r}(x) = c_2 = const$. В AS_2 , очевидно, найдется функция $H(x)$, такая, что $H(\beta^r) = \alpha^r$. Тогда $U(x) = G(H(x))$ есть атомарная функция, такая ${}^1[U_{\beta^r}(x) = c_1$. Пусть $U(\beta^r) = \gamma^r$. В AS_2 найдется функция $H^1(x)$ такая, что ${}^1[H^1_{\gamma^r}(c_1) = c_2$. Тогда $V(x) = H^1(U(x))$ – атомарная функция, такая, что ${}^1[V_{\beta^r}(x) = c_2$. Информационные деревья функций $V(x)$ и $F(x)$ могут отличаться теперь лишь в вершинах, которые соответствуют словам, не равным слову β^r . Заметим, что ${}^r[V(x) \in AS_2^r$. Возьмем в AS_2 элемент $H^2(x)$, такой, что

$$ {}^r[H^2(x) = {}^r[F(({}^r[V(x))^{-1}) $$

Элемент $({}^r[V(x))^{-1}$ существует в $AS_2^{(r)}$ в силу того, что ранг $V(x)$ равен r . Тогда, если $\mathcal{D}(x) = H^2(V(x))$, что ${}^r[F(x) = {}^r[\mathcal{D}(x)$. Если при этом выбрать $H^2(x)$ таким, чтобы

$$ {}^1[H^2_{\delta^r}(x) = x \qquad , \text{ где } \delta^r = V(\beta^r) \quad , \text{ то} $$

$\mathcal{D}(x)$ – атомарная функция, такая, что ${}^r[F(x) = {}^r[\mathcal{D}(x)$ и ${}^1[D_{\beta^r}(x) = c_2$. Нам осталось "исправить" $\mathcal{D}(x)$ таким образом, чтобы ее значения совпали со значениями $F(x)$ на словах длины большей или равной r . Пусть ξ^r – произвольное слово, $\xi^r \neq \beta^r$, $F(\xi^r) = \eta^r$ и $F(\gamma^r a) = \eta_a^{r+1}$; $a = 0,1$. Рассмотрим функцию $T(x)$ из AS_2 , такую, что

$$ T_{\xi^r}(x) = \mathcal{D}^{-1}_{\eta^r}(F_{\xi^r}(x)) \ , \qquad \xi^r \neq \gamma^r \ , $$

$$ {}^1[T_{\gamma^r}(x) = x \ , \quad T_{\gamma^r a}(x) = \mathcal{D}^{-1}_{\eta^{r+1}_a}(F_{\gamma^r a}(x)) $$

и для любого слова α^t , $t < r$

$$ {}^1[T_{\alpha^t}(x) = x $$

В силу атомарности функций $\mathcal{D}(x)$ и $F(x)$ остаточные функции $\mathcal{D}^{-1}_{\eta^r}(x)$, $F_{\xi^r}(x)$, $\eta^r = F(\xi^r)$, $\xi^r \neq \gamma^r$ и $\mathcal{D}_{\eta^{r+1}}(x)$, $F_{\eta^{r+1}}(x)$ принадлежат AS_2. А так как ${}^1[T_{\gamma^r}(x) = {}^1[T_{\alpha^t}(x) = x$, $t < r$, то $T(x)$ действительно принадлежит AS_2 . Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$ F(x) = \mathcal{D}(T(x)) \qquad . \text{ Лемма доказана.} $$

Лемма 10 . Пусть $F(x)$ – произвольная функция из множества $\mathcal{D}$. Тогда существует конечный набор атомарных функций $H^1(x), \dots, H^m(x)$ такой, что

$$ F(x) \in [\{H^1(x), H^2(x), \dots, H^m(x)\} \cup AS_2]_c \qquad . $$

Доказательство. I. Если $F(x) \in AS_2$, то лемма доказана.

2. Пусть $F(x) \notin AS_2$. Тогда существует такое t , что ${}_t F(x) \in AS_2$. Доказательство проведем индукцией по числу t .

а) $t = 1$ – тогда $F(x)$ – атомарная функция ранга 0.

б) пусть для $t < k$ лемма доказана, и пусть ${}_k F(x) \in AS_2$, а

$$ F(x) \notin AS_2 \qquad . $$

По предположению индукции $(k-1)$ – приближение ${}^{(k-1)}F(x)$ функции $F(x)$ можно построить из атомарных функций и функций из AS_2 . Заметим, что для любого слова α^{k-1} функция $F_{\alpha^{k-1}}(x)$ либо атомарная (ранга 0) либо принадлежит AS_2 В первом случае, для слова α^{k-1} можно построить атомарную функцию $H(x)$, такую, что

I) $\quad H_{\alpha^{k-1}}(x) = F_{\alpha^{k-1}}(x)$,

2) $H_{\gamma^{k-1}}(x) = E(x)$, $\gamma^{k-1} \neq \alpha^{k-1}$,

3) ${}^{1}[H_{\alpha^t}(x) = x$, $t < k-1$

Во втором случае возьмем функцию $H(x)$, удовлетворяющую условиям 1)-3), которая, очевидно, будет принадлежать AS_2

Нетрудно видеть, что если $U(x) = {}^{(k-1)}F(x)$, то

$$F(x) = U(H_1(H_2(\dots(H_{\alpha^{k-1}}(x))\dots))),$$

где функция H_i соответствует i-му слову длины $k-1$.

Лемма доказана.

Лемма *11* . Если $U(x) = F(H(x)$ – атомарная функция ранга r , то одна из функций $F(x)$, $H(x)$ есть атомарная ранга r .

Доказательство. Если одна из функций принадлежит AS_2 , то другая, очевидно, атомарна. Пусть $F(x) \notin AS_2$ и $H(x) \notin AS_2$. Если ранг $H(x)$ не равен r , то найдется слово α^t , $t \neq r$, такое, что ${}^{1}[H_{\alpha^t}(x) = c = const$. Тогда ${}^{1}[U_{\alpha^t}(x) = c' = const$, что противоречит условию леммы. Если существуют два разных слова α^r и β^r , такие, что ${}^{1}[H_{\alpha^r}(x) = c_1$ и ${}^{1}[H_{\beta^r}(x) = c_2$, то ${}^{1}[U_{\alpha^r}(x) = c_1'$ и ${}^{1}[U_{\beta^r}(x) = c_2'$, что также противоречит условию. Следовательно, $H(x)$ – атомарная функция ранга r .

Лемма доказана.

Следствие *1* . Если $[\mathfrak{M}]_c = P^1_{0,g}$, то для каждого $r = 0,1,\dots$ $\mathfrak{M}$ содержит атомарную функцию ранга r .

Следствие *2* . Если $[\mathfrak{M}]_c = P^1_{0,g}$, то $[\mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}]_c = \mathfrak{D}$.

Доказательство. Так как $AS_2 \subset \mathfrak{D}$, то $[\mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}]_c \supseteq [\mathfrak{M} \cap AS_2]_c = AS_2$ Теперь нужно применить следствие *1* и леммы *9* и *10* .

Теорема *3.28*[30]. В $P^1_{0,g}$ не существует базиса.

Доказательство. Как уже отмечалось достаточно показать зависимость всякой системы $\mathfrak{M}$ такой, что $[\mathfrak{M}]_c = P^1_{0,g}$. Так как $[\mathfrak{D}]_c = \mathfrak{D}$, в $\mathfrak{M}$ найдется элемент $F(x) \notin \mathfrak{D}$. Пусть ранг $F(x)$ есть r . По следствию 2 имеем $\mathfrak{D} \subset [\mathfrak{M} \setminus \{F(x)\}]_c$. Возьмем $(r+1)$ – продолжение ${}_{r+1}F(x)$ функции $F(x)$. Очевидно, что ${}_{r+1}F(x) \notin AS_2$ и ранг этой функции $p \geq r+1$. Если ${}^{r+1}F(x)$ – $(r+1)$ – приближение $F(x)$, то

$$F(x) = {}^{r+1}F({}_{r+1}F(x))$$

, причем ${}^{r+1}F(x) \in \mathfrak{D}$, и поэтому ${}^{r+1}F(x) \in [\mathfrak{M} \setminus \{F(x)\}]_c$.

Так как ранг $F(x)$ меньше, ранга ${}_{r+1}F(x)$, то ${}_{r+1}F(x)$ не может быть получена суперпозицией с участием $F(x)$ (лемма *11*). Поэтому, в силу полноты $\mathfrak{M}$,

${}_{r+1}F(x) \in [\mathfrak{M} \setminus \{F(x)\}]_c$. Таким образом

$F(x) \in [\{{}^{r+1}F(x), {}_{r+1}F(x)\}] \subset [\mathfrak{M} \setminus \{F(x)\}]_c$, и зависимость $\mathfrak{M}$ доказана.

Теорема доказана.

рис.176

рис.177

§ II. Группа AS_2

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства взаимно-однозначных отображений из $P^1_{0,1}$. Изучение этой группы представляет интерес с той точки зрения, что конечные автоматы могут служить хорошей моделью для решения ее из других разделов математики. В качестве примера будет рассмотрена одна проблема из теории групп, известная как проблема Бернсайда [33].

Напомним некоторые определения. Порядком элемента a группы G называется такое число t (если оно существует), что $a^t = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{t} = \varepsilon$. Группа G называется периодической, если каждый элемент группы имеет конечный порядок. Группа называется конечнопорожденной, если существует такой конечный набор её элементов $a_1, \ldots, a_m$, что любой элемент группы может быть получен из элементов $a_1, \ldots, a_m$ применением в конечном числе раз операций умножения и взятия обратного элемента. Для периодических групп, очевидно, достаточно использовать только умножение, так как если $a^t = \varepsilon$, то $a^{-1} = a^{t-1}$. Проблема Бернсайда состоит в нахождении бесконечной периодической конечнопорожденной группы. Следующая теорема дает положительное решение этой проблемы.

Теорема 3.29 [31]. В AS_2 существует бесконечная периодическая конечнопорожденная подгруппа.

Мы укажем две конкретные о.д.функции, которые содержатся в AS_2 и которые порождают относительно операции суперпозиции подгруппу с указанными свойствами.

Заметим, что AS_2 является 2-группой, в том смысле, что любой её элемент конечного порядка имеет порядок равный некоторой степени числа 2.

Лемма 1. Если $F \in AS_2$ – элемент конечного порядка, то его порядок есть степень числа 2.

Доказательство. Индукцией по t покажем, что для любого $t \geq 1$

$$F^{2^t}(\alpha^t) = \underbrace{F(F \ldots F}_{2^t}(\alpha^t))) = \alpha^t \quad \text{для любого} \quad \alpha^t \in \{0,1\}^t .$$

а) $t = 1$ ${}^1[F(x) = x$ или ${}^1[F(x) = \bar{x}$.

И в том, и в другом случае

$${}^1[F^2(x) = {}^1[F(F(x)) = x$$

и значит ${}^1[F^2(a) = a$, $a \in \{0,1\}$

б) Пусть α^{t-1} – входное слово длины $t-1$, ${}^1[F^{2^{t-1}}_{\alpha^{t-1}}(x) = \sigma \in \{x, \bar{x}\}$. По предположению индукции $F^{2^{t-1}}(\alpha^{t-1}) = \alpha^{t-1}$. Из детерминированности $F(x)$ следует, что для любого $a \in \{0,1\}$:

$$F^{2^{t-1}}(\alpha^{t-1}a) = F^{2^{t-1}}(\alpha^{t-1}) F^{2^{t-1}}_{\alpha^{t-1}}(a) = \alpha^{t-1}\sigma(a)$$

Поэтому

$$F^{2^t}(\alpha^{t-1}a) = F^{2^{t-1}}(F^{2^{t-1}}(\alpha^{t-1}a)) = F^{2^{t-1}}(\alpha^{t-1}\sigma(a))$$

$$= \alpha^{t-1}\sigma(\sigma(a)) = \alpha^{t-1}a$$

Индуктивный шаг доказан. Если теперь для любого t $F^{2^t} \neq \varepsilon$, то найдется бесконечно много номеров t_1, t_2, таких, что $F^{2^{t_1}} = F^{2^{t_2}} \neq \varepsilon$. Так как $F^{2^{t_1}} \neq \varepsilon$, то для некоторого $\alpha^r \in \{0,1\}^*$, $r > t_1$ $F^{2^{t_1}}(\alpha^r) \neq \alpha^r$. Вместе с тем, взяв $t_i > r$, получим $F^{2^{t_i}}(\alpha^r) = \alpha^r$, что противоречит равенству $F^{2^{t_1}} = F^{2^{t_i}}$. Лемма доказана.

Пусть $F(x)$, $H(x)$ – некоторые элементы AS_2, $\Pi = \{F(x), H(x)\}$ – порожденная (с помощью суперпозиций) ими подполугруппа группы AS_2. Пусть $L(x) = Y_1(Y_2(\ldots Y_m(x)\ldots))$ – элемент Π, $Y_i(x) = F(x)$ или $Y_i(x) = H(x)$, $i = 1,2,\ldots,m$. Для произвольного слова α^r, $r \geq 3$ определим понятие α^r-ранга элемента $L(x)$. Составим последовательность $\Gamma = \gamma_{01}\gamma_{11}\ldots\gamma_{m-1,1}\gamma_{02}\ldots\gamma_{m-1,d}$, длины $m \cdot d$, элементами которой являются слова

$$\gamma_{01} = \alpha^r \qquad \gamma_{i+1,j} = Y_{m-i}(\gamma_{ij}), \qquad 0 \leq i \leq m-2,$$

$$\gamma_{0,j+1} = Y_1(\gamma_{m-1,j}), \qquad 1 \leq j < d$$

Нетрудно видеть, что $\gamma_{0,j+1} = L(\gamma_{0j})$. В качестве d возьмем наименьшее число такое, что

$$L^d(\alpha^r) = \alpha^r$$

Выберем в Γ подпоследовательность $\tilde{\Gamma}$, состоящую из всех таких слов γ_{ij}, для которых

а) $Y_{m-i} = F$; б) γ_{ij} имеют вид $a1\ldots1b$, $a,b \in \{0,1\}$.

Построим по $\tilde{\Gamma}$ последовательность из 0 и I, заменяя каждое слово γ_{ij} его последней буквой. Пусть получилась последовательность

$$\Gamma_0 = 0^{s_1^0}1^{s_1^1}\ldots1^{s_k^1}, \qquad s_j^i > 0$$

кроме, быть может s_1^0 и s_k^1. Заменяя, наконец, в Γ_0 выражения $0^{s_i^0}$ на 0 и $1^{s_i^1}$ на I, $i = 1,\ldots,k$, получим последовательность ξ из 0 и I. (Если $s_1^0 = 0$, то ξ начинается с I, если $s_k^1 = 0$, то ξ кончается 0).

Определим теперь α^r – ранг $L(x)$ как число

$$R(L,\alpha^r) = \begin{cases} \max\{k_0,k_1\} & k_0 \neq 0,\ k_1 \neq 0 \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где k_0, k_1 – число нулей и единиц, соответственно, в последовательности ξ.

Последовательности Γ, $\tilde{\Gamma}$ и ξ будем называть соответственно (L,α^r)- $(\tilde{L},\alpha^r)$- и сокращенной (L,α^r) – последовательностями.

Поясним содержательно, смысл введенного определения α^r-ранга. Пусть $G(x)$, $V(x)$ – элементы AS_2, и $\alpha^r \in \{0,1\}^*$. Рассмотрим

суперпозицию $U(x) = G(V(x))$. Для того, чтобы узнать какая функция (x или $\bar{x}$) реализуется в начальном состоянии остаточной функции $U_{\alpha^r}(x)$, нам достаточно знать следующее:

Пусть $\sigma_1 = {}^1[V_{\alpha^r}(x)$ – функция, реализуемая в начальном состоянии остаточной функции $V_{\alpha^r}(x)$, и пусть $V(\alpha^r) = \beta^r$. Если $\sigma_2 = {}^1[G_{\beta^r}(x)$, то ${}^1[U_{\alpha^r}(x) = \sigma_2(\sigma_1(x))$. Аналогично мы можем поступить в случае суперпозиции $m > 2$ о.д.функций. Заметим, что если $\sigma_1 = \sigma_2$, то ${}^1[U_{\alpha^r}(x) = x$ и поэтому, если $U(\alpha^r) = \gamma^r$, то для любого $b \in \{0,1\}$, $U(\alpha^r b) = U(\alpha^r) U_{\alpha^r}(b) = \gamma^r$, ${}^1[U_{\alpha^r}(b) = \gamma^r b$

Т.о., если ${}^1[U_{\alpha^r}(x) = x$, то $U(x)$ не меняет последней буквы при применении к слову $\alpha^r b$. Аналогично, для случая $m > 2$, если среди соответствующих $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ – четное число индексов i таких что $\sigma_i = \bar{x}$, то суперпозиция $U(x)$ не меняет последней буквы при применении к слову вида $\alpha^r b$.

Будем, далее, рассматривать такие подполугруппы $\Pi = \{F, H\}$, у которых образующие $F(x)$ и $H(x)$ обладают следующими свойствами для любого слова α^r, $r \geq 3$:

А) $H_{\alpha^r}(x) = \varepsilon$

Б) Если ${}^1[F_{\alpha^r}(x) = \bar{x}$, то $\alpha^r = a11\ldots10$, $a \in \{0,1\}$.

Лемма 2. Пусть $L \in \Pi$, $\alpha^r \in \{0,1\}^*$, $r \geq 3$, $L^d(\alpha^r) = \alpha^r$. Если $R(L, \alpha^r) = 0$, то для любого слова β^s $L^{2d}(\alpha^r \beta^s) = \alpha^r \beta^s$.

Доказательство. Пусть $R(L, \alpha^r) = 0$. Это значит, что сокращенная (L, α^r) – последовательность ξ или пустая, или $\xi = 0$, или $\xi = 1$.

I) $\xi = \Lambda$ – пустая. Тогда среди слов γ_{ij}, входящих в (L, α^r) – последовательность Γ, нет слов вида $a11\ldots10$. Из определения (L, α^r) – последовательности следует, что в начальном состоянии остаточной функции $L^d_{\alpha^r}$ реализуется x, т.е. ${}^1[L^d_{\alpha^r}(x) = x$. Поэтому, из того что $L^d(\alpha^r) = \alpha^r$, получаем для любого $a \in \{0,1\}$ $L^d(\alpha^r a) = \alpha^r a$. Нетрудно видеть, что сокращенная $(L, \alpha^r a)$ – последовательность снова пустая, и случай I) рассмотрен.

2) $\xi = 0$. Пусть $\tilde{\Gamma}$ $(\tilde{L}, \alpha^r)$ – последовательность. Для произвольного $a \in \{0,1\}$ построим также $(\tilde{L}, \alpha^r a)$ – последовательность $\tilde{\Gamma}^a$. Нетрудно видеть, что в $\tilde{\Gamma}^a$ могут войти лишь те слова, начала которых являются элементами $\tilde{\Gamma}$. Но в $\tilde{\Gamma}$ не входят слова вида $b11\ 11$, $b \in \{0,1\}$, так как в этом случае $\xi \neq 0$. Следовательно, последовательность $\tilde{\Gamma}^a$ – пустая, а вместе с ней и сокращенная $(L, \alpha^r a)$ – последовательность ξ^a – пустая. Остается заметить, что если $L^d(\alpha^r) = \alpha^r$, то $L^{2d}(\alpha^r a) = \alpha^r a$ и мы пришли к случаю I) для слова $\alpha^r a$.

3) $\xi = 1$. Это значит, что $\tilde{\Gamma}$ не содержит слов вида $b11\ldots10$, $b \in \{0,1\}$ и, в силу А), Б), заведомо будет ${}^1[L^d(\alpha^r) = x$. Поэтому для произвольного $a \in \{0,1\}$, $L^d(\alpha^r a) = \alpha^r a$. Кроме того, $(\tilde{L}, \alpha^r a)$ – последовательность $\tilde{\Gamma}^a$ получается из $\tilde{\Gamma}$ приписыванием по всем словам $\tilde{\Gamma}$ буквы a. Поэтому сокращенная $(L, \alpha^r a)$ – последовательность ξ^a есть 0 при $a = 0$ и I при $a = 1$.

По доказанному мы имеем при $a=0$ для любого β^s $L^{2d}(\alpha^r a\beta^s)=\alpha^r a\beta^s$. К словам вида $\alpha^r 1$ мы снова можем применить наше рассуждение, так как $L^d(\alpha^r 1)=\alpha^r 1$ и $\xi^1=1$. Снова будем иметь

$L^{2d}(\alpha^r 10\beta^s)=\alpha^r 10\beta^s$, $L^d(\alpha^r 11)=\alpha^r 11$, . Лемма доказана.

Следствие. . Пусть существуют такие t и d, что для любого слова α^t, $L^d(\alpha^t)=\alpha^t$ и $R(L,\alpha^t)=0$. Тогда $L^{2d}=\varepsilon$.

Лемма 3. Для любых L, $\alpha^r\in\{0,1\}^*$, $r\geq 3$, $a\in\{0,1\}$ имеет место соотношение

$$R(L,\alpha^r)\geq R(L,\alpha^r a)$$

Доказательство. Пусть d -наименьшее число такое, что $L^d(\alpha^r)=\alpha^r$

I) Пусть $^1[L^d_{\alpha^r}(x)=x$. Если $R(L,\alpha^r)>0$, то в $(\tilde{L},\alpha^r)$-последовательности $\tilde{\Gamma}$ по крайней мере одно слово оканчивается буквой 0. Но никакое такое слово не может быть началом слова из $(\tilde{L},\alpha^r a)$ - последовательности. Поэтому длина сокращенной $(L,\alpha^r a)$ - последовательности ξ^a не больше числа единиц в сокращенной (L,α^r) - последовательности ξ. Следовательно $R(L,\alpha^r a)<R(L,\alpha^r)$.

2) Пусть теперь $^1[L^d_{\alpha^r}=\bar{x}$, и пусть $\Gamma=\gamma_0^1\gamma_1^1\ldots\gamma_{m-1}^1\gamma_0^2\ldots\gamma_{m-1}^d$ - (L,α^r) - последовательность. Так как $L^d(\alpha^r a)=\alpha^r\bar{a}+\alpha^r a$, то Γ^a будет уже иметь длину $2md$. Расположим элементы Γ^a в виде матрицы с 2-мя сторонами:

$$M=\begin{pmatrix} \gamma_0^1 a & \gamma_1^1 a_1^{11} & \ldots & \gamma_{m-1}^1 a_{m-1}^{11} & \gamma_0^2 a_0^{21} & \ldots & \gamma_{m-1}^d a_{m-1}^{d1} \\ \gamma_0^1 \bar{a} & \gamma_1^1 a_1^{12} & & \gamma_{m-1}^1 a_{m-1}^{12} & \gamma_0^2 a_0^{22} & & \gamma_{m-1}^d a_{m-1}^{d2} \end{pmatrix}$$

Заметим, что для всех i,j $a_i^{j1}=\bar{a}_i^{j2}$. Поэтому в $\tilde{\Gamma}^a$ - последовательность войдут те слова из Γ^a, начала которых есть слова вида $\gamma_j^i=b11\ldots11$, $\gamma_j^i\in\tilde{\Gamma}$. При этом, если слово $\gamma_j^i 0$ вошло в $\tilde{\Gamma}^a$, то и слово $\gamma_j^i 1$ войдет в $\tilde{\Gamma}^a$ и наоборот. Кроме того, если γ_1 и γ_2 стоят рядом в $\tilde{\Gamma}$ и оба оканчиваются буквой I, то в $\tilde{\Gamma}^a$ будут стоять рядом слова $\gamma_1 0$, $\gamma_2 0$ а также будучи стоять рядом слова $\gamma_1 1$, $\gamma_2 1$. Поэтому длина сокращенной $(L,\alpha^r a)$ - последовательности ξ^a - не более, чем удвоенное число единиц в сокращенной (L,α^r) - последовательности ξ. Поэтому длина $(\xi^a)\leq 2R(L,\alpha^r)$. Но в ξ^a число I совпадает с числом 0 $(r_0=r_1)$, поэтому $R(L,\alpha^r a)\leq R(L,\alpha^r)$. Лемма доказана.

Замечание. Если $^1[L^d_{\alpha^r}(x)=x$, то ранг строго убывает.

Введем понятие типа $(\tilde{L},\alpha^r)$ - последовательности $\tilde{\Gamma}$. Пусть u_a - число слов из $\tilde{\Gamma}$, первая буква которых есть a, а последняя - 0, $a\in\{0,1\}$. Будем говорить, что $\tilde{\Gamma}$ - типа 0, если u_0 - четно, $\tilde{\Gamma}$ -типа I, если u_1 - четно, и Γ - типа $\{0,1\}$, если u_0+u_1 - четно. Последовательность $\tilde{\Gamma}$, вообще говоря может иметь несколько типов, но ясно, что всегда - по крайней мере один.

Лемма 4. Если $L(\alpha^r)=\beta^r$, то $R(L,\alpha^r)=R(L,\beta^r)$

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что (L,α^r) - и (L,β^r) - последовательности отличаются только циклическим сдвигом.

Лемма 5. Для любого $L\in\Pi$ существует такое натуральное t_L, что для любого слова $\alpha^r\in\{0,1\}^*$, $r\geq t_L$ и любого слова β_s $R(L,\alpha^r)=R(L,\alpha^r\beta^s)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}^t=\{\alpha_1^t,\ldots,\alpha_{2^t}^t\}$ - множество всех слов длины t. Разобьем $\mathcal{D}^t$ на подмножества B_j^t (которые мы будем

называть t -блоками), таким образом, что для любых двух элементов δ_1^t из B_d^t найдется такое d, что $L^d(\delta_1^t) = \delta_2^t$, что начала одинаковой длины t' слов из одного t -блока. Заметим, принадлежат некоторому блоку $B_e^{t'}$. Будем говорить, что B_k^t содержит $B_e^{t'}$ и писать $B_e^{t'} \subset B_k^t$. В силу леммы 4 каждому t -блоку B можно приписать некоторое значение ранга $R(B) = R(L, \gamma^t)$, $\gamma^t \in B$.

Пусть $D^3 = B_1^3 \cup B_2^3 \cup \ldots \cup B_n^3$ и $R(B_i^3) = r_i^3$. Пусть, для определенности, $\delta_1 \in B_1^3$, $L^{d_1}(\delta_1) = \delta_1$. Если ${}^1[L_{\delta_1}^{d_1}(x) = x$, то для любого $a \in \{0,1\}$

$$L^{d_1}(\delta_1 a) = \delta_1 a \quad \text{и} \quad R(L, \delta_1 a) < R(L, \delta_1)$$

Поэтому в D^4 мы будем иметь 2 блока B_1^4 и B_2^4, таких что $B_1^3 \subset B_i^4$, $R(B_1^3) > R(B_i^4)$, $i = 1,2$.

Если же ${}^1[L_{\delta_1}^{d_1}(x) = \bar{x}$, то в D^4 будет лишь один блок, содержащий B_1^3 и при этом $R(B_1^4) \le R(B_1^3)$. Продолжая индуктивно, этот процесс, мы получаем: либо число блоков B_s^t из D^t, содержащих некоторый блок B_e^{t-1} из D^{t-1} равно I, либо таких блоков 2 но тогда их ранги строго меньше $R(B_e^{t-1})$. В силу конечности чисел r_i^3, $i = 1,2,\ldots,n$, существует такое t, что для любых блоков $B_e^{t'-1} \subset B_s^{t'}$, $t' \ge t$ будет $R(B_e^{t'-1}) = R(B_s^{t'})$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 6. Если для некоторых $L \in \Pi$, $\alpha^r \in \{0,1\}^*$, $r \ge 3$, $a_1, a_2 \in \{0,1\}^*$, $R(L, \alpha^r) = R(L, \alpha^r a_1) = R(L, \alpha^r a_1 a_2) \ne 0$, то $(\tilde{L}, \alpha^r a_1)$- и $(\tilde{L}, \alpha^r a_1 a_2)$ - последовательности имеют одинаковые типы.

Доказательство. Тип $(\tilde{L}, \alpha^r a_1 a_2)$- последовательности $\tilde{\Gamma}^{a_1 a_2}$ определяется теми словами в $(\tilde{L}, \alpha^r a_1)$- последовательности $\tilde{\Gamma}^{a_1}$, которые оканчиваются буквой I. Пусть d - такое число, что $L^d(\alpha^r) = \alpha^r$. В силу первого равенства ${}^1[L_{\alpha^r}^d(x) = \bar{x}$. Поэтому в $\tilde{\Gamma}^{a_1}$ вместе со всяким словом вида $\eta 1$ входит слово вида $\eta 0$ и обратно. В силу второго равенства, это справедливо и для $\tilde{\Gamma}^{a_1 a_2}$. Следовательно множество слов из $\tilde{\Gamma}^{a_1 a_2}$, которые оканчиваются буквой 0, можно получить из множества слов $\tilde{\Gamma}^{a_1}$, оканчивающихся буквой 0, следующим способом: у каждого слова вида $\eta 0$ из $\tilde{\Gamma}^{a_1}$ заменяем последнюю букву на I и приписываем 0, т.е. получаем, что если $\eta 0 \in \tilde{\Gamma}^{a_1}$, то $\eta 10 \in \tilde{\Gamma}^{a_1 a_2}$, и таким образом может быть получено всякое слово из $\tilde{\Gamma}^{a_1 a_2}$. Поэтому, если $\tilde{\Gamma}^{a_1}$ имеет тип $\upsilon \in \{0, 1, (0,1)\}$, то и $\tilde{\Gamma}^{a_1 a_2}$ имеет тип υ.

Мы можем теперь сформулировать все условия, которым, в дополнение к А) и Б), должны удовлетворять функции $H(x)$ и $F(x)$:

В) ${}^1[H(x) = \bar{x}$; ${}^1[H_1(x) = \bar{x}$

Г) ${}^2[F(x) = \varepsilon$; ${}^1[F_{00}(x) = \bar{x}$

при

Д) пусть $t \equiv \gamma \pmod 3$, α^t - слово длины t.

${}^1[F_{\alpha^t}(x) = \bar{x}$ тогда и только тогда, когда первая буква α^t принадлежит A_γ, где

$$A_0 = \{0\} \; ; \; A_1 = \{1\} \; , \; A_2 = \{0,1\}$$

Лемма 7. Группа $\{F, H\}$ – периодическая.

Доказательство. В силу следствия из леммы I достаточно показать, что для любого $L \in \Pi$ существует такое t_L, что для любого слова α^r, $r = t_L$, $R(L, \alpha^r) = 0$.

По лемме 5 существует такое t'_L, что для любого слова η^s, $s \geq t'_L$ и любых $a_1, a_2, \in \{0,1\}$

$$R(L, \eta^s) = R(L, \eta^s a_1 a_2 \quad a_i) - r \qquad i = 1,2,$$

Предположим, что $r > 0$. Тогда по лемме 6 типы $(\tilde{L}, \eta^s a_1 \quad a_i)$ – последовательностей совпадают для всех $i = 1,2,$. Из построения $F(x)$ (условие Д) следует, что для любого типа υ найдется $t_0 > t'_L$ такое, что функция $\bar{x}$ реализуется как раз в таких состояниях $F(x)$, которые являются начальными состояниями остаточных функций $F_{\alpha^{t_0}}(x)$, $\alpha^{t_0} = b11 \ldots 10$, $b \in \upsilon$. Но по определению типа число слов вида $b11\ldots10$, $b \in \upsilon$ в $(\tilde{L}, \eta^s a_1 \ldots a_{i_0})$ – последовательности – четно, если υ – тип этой последовательности. Поэтому, если d – такое что $L^d(\eta^s a_1 \ldots a_{i_0}) = \eta^s a_1 \ldots a_{i_0}$, и если $\beta = \eta^s a_1 \ldots a_{i_0}$, то

$^1[L^d_\beta(x) = x$. Но тогда, в силу замечания к лемме

$$R(L, \eta^s a_1 \ldots a_{i_0}) > R(L, \eta^s a_1 \quad a_{i_0} a_{i_0+1})$$

и наше предположение о том, что $r > 0$ привело к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 8. Группа Π – бесконечная.

Доказательство. Индукцией по числу k докажем следующее утверждение: для любого $k \geq 0$ и любого $a \in \{0,1\}$ существует элемент $Y_{k,a} \in \Pi$ и такие $b_1, b_2, d_1, d_2 \in \{0,1\}$, что для любого слова β^s

$$Y_{k,a}(d_1 d_2 \underbrace{0\ldots0}_{k} a \beta^s) = b_1 b_2 \underbrace{0\ldots0}_{k+1} \beta^s$$

Если $a = 0$ в качестве Y можно взять ε. Пусть $a = 1$.

I) $k = 0$. По построению F имеем:

$$F(001\beta^s) = 000\beta^s \qquad \text{, т.е.} \quad Y_0 = F$$

2) Пусть утверждение доказано для всех $k \leq k_0$, покажем, что тогда существует такой Y_{k_0+1}, что для некоторых d_1, d_2, b_1, b_2 и любого β^s

$$Y_{k_0+1}(d_1, d_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0+1} 1 \beta^s) = b_1 b_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0+2} \beta^s$$

По предположению индукции, существует Y_{k_0-1}:

$$Y_{k_0-1}(d'_1 d'_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0-1} 1 \beta^s) = b'_1 b'_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0} \beta^s$$

Следовательно

$$Y^{-1}_{k_0-1}(b'_1 b'_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0} 01 \beta^s) = d'_1 d'_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0-1} 101 \beta^s$$

Заметим, что с помощью подходящей степени H можно любое слово длины – перевести в любое слово длины 2.

Переведем с помощью H слово $d_1' d_2' \underbrace{0\ldots0}_{k_0-1} 101 \beta^s$ в слово $b_1'' b_2'' \underbrace{0\ldots0}_{k_0-1} 101 \beta^s$ так чтобы можно было применить (существующий по предположению индукции) элемент $Y_{k_0-2}^{-1}(\alpha)$:

$$Y_{k_0-2}^{-1}(b_1'' b_2'' \underbrace{0\ldots0}_{k_0-1} 101 \beta^s) = d_1'' d_2'' \underbrace{0\ldots0}_{k_0-2} 1101 \beta^s$$

Применяя, аналогично, подходящие степени H и элементы $Y_{k_0-3}^{-1}, \ldots, Y_0^{-1}$, получим элемент $T \in \Pi$, такой что

$$T(d_1 d_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0+1} 1 \beta^s) = c_1 c_2 \underbrace{11\ldots1}_{k_0} 01 \beta^s$$

По построению $F(x)$ (условие Д), для любого $t \geq 3$ существует слово α^t вида $\alpha^t = c11\ldots10$, так что ${}^1[F_{\alpha^t}(x) = \bar{x}$.

Полагая $t_0 = k_0 + 3$, находим соответствующее слово и с помощью подходящей степени H переводим слово $c_1 c_2 \underbrace{1\ldots1}_{k_0} 01 \beta^s$ в слово $c \underbrace{11\ldots1}_{k_0+1} 01 \beta^s$. Имеем далее:

$$F(c \underbrace{11\ldots1}_{k_0+1} 01 \beta^s) = c \underbrace{11\ldots1}_{k_0+1} 00 \beta^s$$

Переводя с помощью H слово $c1$ в 00, и применяя F, получим слово

$$000 \underbrace{11\ldots1}_{k_0-1} 00 \beta^s$$

Применяя к этому слову подходящие степени H и элементы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{k_0-1}$ получим слово $b_1 b_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0} 00 \beta^s$. Мы получили, таким образом элемент Y_{k_0+1}, такой что для любого β^s

$$Y_{k_0+1}(d_1 d_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0+1} 1 \beta^s) = b_1 b_2 \underbrace{0\ldots0}_{k_0+2} \beta^s$$

Требующееся нам утверждение доказано. Из него сразу следует, что в Π существуют для любого $k \geq 1$ элементы z_k, такие что для любого ℓ

$$z_k(\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{1\ldots1}_{\ell}) = \underbrace{0\ldots0}_{k}\underbrace{11\ldots1}_{\ell}$$

Ясно, что $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$, $i,j = 1,2,\ldots$. Лемма доказана.

Лемма 9. Функции $F(x)$ и $H(x)$ – ограниченно-детерминированные, при этом $F^2(x) = \varepsilon$, $H^4(x) = \varepsilon$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $F(x)$ и $H(x)$, удовлетворяющие условиям А) – Д) могут быть реализованы автоматами с 7 и 3 состояниями, соответственно, диаграммы которых приведены на рис.98 / q_0 –начальное состояние/.

рис.98

Из леммы I – 9 следует теорема 3.29.

§12. Полугруппа и кольцо линейных автоматов.

Другим интересным подклассом о.д. является множество линейных автоматов. Линейный автомат с одним входом и одним выходом задается системой канонических уравнений:

$$(1)\qquad \begin{cases} q_1(0)=q_1^0 \\ \dots \\ q_n(0)=q_n^0 \\ q_1(t+1)=a_{11}q_1^t+\dots+a_{1n}q_n^t+b_1x^t+c_1 \\ \dots \\ q_n(t+1)=a_{n1}q_1^t+\dots+a_{nn}q_n^t+b_nx^t+c_n \\ y(t)=d_1q_1+\dots+d_nq_n+rx^t+h \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, c_i, d_i, r, h принадлежат множеству $\{0,1\}$, вектор $q(t)=(q_1^t,\dots,q_n^t)$ – состояние автомата, x^t, $y(t)$ – значение входа и выхода автомата в момент времени $t=0,1,\dots$. В матричном (над полем $GF(2)$) виде система (1) будет:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &q(0)=q^0 \\ &q(t+1)=A\,q^t+bx+c \\ &y(t)=(d,q^t)+rx+h \end{aligned}$$

Таким образом, автомат задается набором $\mathfrak{A}=(A,b,c,d,r,h,q^0)$. Автомат $\mathfrak{A}$, задаваемый системой (1), имеет не более 2^n состояний и реализует отображение $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ множества $\{0,1\}^\infty$ всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 в себя. Именно для каждой входной последовательности $X=(x^0,x^1,\dots)$, $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}(X)=Y=(y(0),y(1),\dots)$.

Множество всех таких отображений, реализуемых автоматами с произвольным числом состояний, обозначим через PL_2. Относительно суперпозиции отображений PL_2 является полугруппой с единицей – тождественным автоматом.

Пусть система (A,b,c,d,r,h,q^0) реализует некоторое отображение из PL_2. Поставим ей в соответствие последовательность $\gamma=(\gamma_0,\gamma_1,\dots)$ из 0 и 1, так что $\gamma_0=r$, $\gamma_i=(d,A^{i-1}b)$, $i=1,2,\dots$. Очевидно, что γ – периодическая, с некоторым предпериодом последовательность.

Лемма 1. Если системы $S_1=(A_1,b_1,c_1,d_1,r_1,h_1,q_1^0)$ и $S_2=(A_2,b_2,c_2,d_2,r_2,h_2,q_2^0)$ задают одно и то же отображение из PL_2, то $\gamma_1=\gamma_2$, где γ_i построена для S_i, $i=1,2$.

Доказательство. Так как $y_1(t)=y_2(t)$ для всякой входной последовательности $x^0,x^1,\dots,x^{t-1},x^t$, то

$$y_1(t)=(d_1,A_1^tq_1^0+A_1^{t-1}b_1x^0+\dots+A_1b_1x^{t-2}+b_1x^{t-1}+$$
$$+A_1^{t-1}c_1+\dots+A_1c_1+c)+r_1x^t+h_1=(d_2,A_2^tq_2^0+A_2^{t-1}b_2x^0+\dots+b_2x^{t-1}+$$
$$+A_2^{t-1}c_2+\dots+A_2c_2+c_2)+r_2x^t+h_2=y_2(t),$$

и это равенство не зависит от значений $x^0,\dots x^t$. Поэтому $(d_1,A_1^ib_1)=(d_2,A_2^ib_2)$ и $r_1=r_2$. Лемма доказана.

В силу этой леммы мы в дальнейшем не будем заботиться о том, какая именно система задает данный линейный автомат.

Рассмотрим теперь полугруппу формальных степенных рядов от одной переменной z, с коэффициентами из множества $\{0,1\}$, т.е. множество выражений вида $\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_iz^i$ с операцией умножения рядов, определенной обычным образом: если $v=\sum_{i=0}^{\infty}v_iz^i$, $u=\sum_{i=0}^{\infty}u_iz^i$, $w=u\cdot v=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{s_1+s_2=i}v_{s_1}\cdot u_{s_2}\cdot z^i$. Рассмотрим в ней подполугруппу "периодически определенных" рядов PR, то есть таких, у котрых последовательность коэффициентов периодическая, с некоторым предпериодом. В силу предыдущих рассуждений, каждому отображению из PL_2 можно поставить в соответствие некоторый ряд, коэффициенты которого составляют последовательность $(r,(d,b),(d,Ab),\dots(d,A^ib),\dots$. Обозначим это соответствие через Φ.

Лемма 2. Соответствие Φ есть гомоморфизм PL_2 на полугруппу PR.

$(d, A^i b) = (d, b_{i+1}) = d_{i+1} = \gamma \qquad (d, A^i b) = d, b_{i+1}) \quad \gamma_{i+1}$

$i=0, \ldots, k+m-1 \quad (d, A^{k+m} b) = \gamma_{k+1}$, что и требовалось. Лемма доказана.

Через AL_2 обозначим множество всех взаимно-однозначных отображений из L_1.

Лемма 3. Система $S=(A,b,c,d,r,h,q^0)$ задает отображение из AL_2 тогда и только тогда, если $r=1$. Если $F \in AL_2$, то обратное отображение $\bar{F} \in AL_2$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как $y(0)\big|_{x^0=0} \neq y(0)\big|_{x^0=1}$. Докажем второе. Пусть F задается системой S_1:

$$(6) \qquad \begin{cases} q(0)=q^0 \\ q(t+1)=Aq^t+bx^t+c \\ y(t)=(d,q^t)+x+h \end{cases}$$

Рассмотрим систему S_2.

$$(7) \qquad \begin{cases} q(0)=q^0 \\ q(t+1)=(A+\omega'')q^t+bx+bh+c \\ y(t)=(d,q^t)+x+h \end{cases}$$

Покажем, что S_2 реализует $\bar{F}$. В самом деле $F_{S_2}(F(x))$ реализуется системой:

$$(8) \qquad \begin{cases} q(0)=q^0 \\ u(0)=q^0 \\ q(t+1)=Aq^t+bx^t+c \\ u(t+1)=(A+\omega'')u^t+b((d,q^t)+x^t+h)+bh+c \\ y(t)=(d,u^t)+((d,q^t)+x^t+h)+h \end{cases}$$

Преобразуя (8), получим:

$$(9) \qquad \begin{cases} q(0)=q^0 \\ u(0)=q^0 \\ q(t+1)=Aq^t+bx^t+c \\ u(t+1)=Au^t+\omega''(u^t+q^t)+bx^t+c \\ y(t)=(d,(u^t+q^t))+x^t \end{cases}$$

Так как $q^0=u^0$, то $y(0)=x^0$. Пусть для некоторого t $q^t=u^t$, тогда $q^{t+1}=Aq^t+bx^t+c=Au^t+bx^t+c=Au^t+\omega''(u^t+q^t)+bx^t+c$. Имеем, таким образом, $q^t=u^t$ для всех t, следовательно $y(t)=x^t$. Лемма доказана. Обозначим через $(PL_2)^0$ – множество таких элементов F из PL_2, что $\phi(F)=(r,0,0,\ldots)$.

Лемма 4. Если $F \in (PL_2)^0$, то $y(t)=y(x^t)$ – значение выхода в момент t не зависит от значений на выходе $x^0,\ldots,x^{t-1}$.

Доказательство. $y(t)=(d,A^t q_0)+\sum_{k=0}^{t-1}(d,A^{t-k-1}b)x^k+\sum_{k=0}^{t-1}(d,A^k c)+$ $+rx^t+h=\alpha+rx^t$, где α – некоторая константа, не зависящая от $x^0,\ldots,x^{t-1}$. Лемма доказана.

Заметим, что автоматы из $(PL_2)^0$ реализуются как "циклы" с безусловными переходами. Их диаграмма переходов имеет вид:

При $r=0$ во всех состояниях реализуются некоторые константы 0 и 1, при $r=1$ в каждом состоянии реализуется либо x либо $\bar{x}$ –отрицание.

Рассмотрим теперь подробнее строение группы AL_2. Из леммы 4 следует, что при гомоморфизме Φ ядро составляют автоматы с безусловными переходами, у которых в каждом состоянии реализуется x или $\bar{x}$. Нетрудно видеть, что каждый такой элемент имеет в AL_2 порядок 2, а множество всех таких элементов образует группу, изоморфную группе всех

Доказательство. Покажем сначала, что для $\mathcal{F}_1(X)$, $\mathcal{F}_2(X)$ из PL_2 $\phi(\mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(X))) = \mathcal{U}_1\mathcal{U}_2$, где $\mathcal{U}_1 = \phi(\mathcal{F}_1(X))$, $\mathcal{U}_2 = \phi(\mathcal{F}_2(X))$. Пусть $\mathcal{F}_i$ реализуется системой $S_i = (A_i, b_i, c_i, d_i, r_i, h_i, q_i^0)$, $i = 1, 2$. Построим систему, которая реализует суперпозицию $\mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(x))$:

Так как вход S_2 соединен с выходом S_1, то $\mathcal{F}_2(\mathcal{F}_1(X))$ реализуется системой:

$$(3)\quad \begin{cases} q_1(0) = q_1^0 \\ q_2(0) = q_2^0 \\ q_1(t+1) = A q_1^t + b_1 x^t + c_1 \\ q_2(t+1) = A_2 q_2^t + b_2((d_1, q_1^t) + r_1 x^t + h_1) + c_2 \\ y(t) = (d_2, q_2^t) + r_2((d_1, q_1^t) + r_1 x^t + h_1) + h_2 \end{cases}$$

или, в матричном виде:

$$(4)\quad \begin{cases} q(0) = q^0 \\ q(t+1) = A q^t + b x + c \\ y(t) = (d, q^t) + r x + h \end{cases}, \text{ где}$$

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ W^{21} & A_2 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{aligned} d &= (r_2 d_1; d_2) \\ b &= (b_1, r_1 b_2) \\ c &= (c_1; b_2 h_1 + c_2) \end{aligned}$$

$r = r_2 \cdot r_1$, $h = r_2 h_1 + h_2$, а

$W^{21} = \|W_{ij}^{21}\|$ – $n_2 \times n_1$ – матрица, где n_i – порядок матрицы A_i, и $W_{ij}^{21} = b_{2i} \cdot d_{1j}$, $b_2 = (b_{21}, \dots, b_{2n_2})$, $d_1 = (d_{11}, \dots, d_{1n_1})$

(5) Заметим, что для любых S_1, S_2, выполняется $(d_2, A_2^{s_2} W^{21} A_1^{s_1} b_1) = (d_2, A_2^{s_2} b_2)(d_1, A_1^{s_1} b_1)$. Равенство проверяется непосредственным выписыванием скалярных произведений в левой и правой части.

Рассмотрим последовательность $\{A^i, i = 1, 2, \quad\}$ степеней матрицы A. Так как A имеет треугольный вид (как матрица из матриц), то

$$A^i = \begin{Vmatrix} A_1^i & 0 \\ W_i & A_2^i \end{Vmatrix}, \quad \text{где} \quad W_i = \sum_{s_1+s_2=i-1} A_2^{s_2} W^{21} A_1^{s_1}$$

Имеем теперь $(d, A^i b) = \left((r_2 d_1; d_2), A^i \begin{pmatrix} b_1 \\ r_1 b_2 \end{pmatrix}\right) =$

$= (r_2 d_1, A_1^i b_1) + (d_2, W_i b_1 + A_2^i r_1 b_2) =$ (с учетом (5))

$= r_2 (d_1, A_1^i b_1) + (d_2, \sum_{s_1+s_2=i-1} A_2^{s_1} W^{21} A_1^{s_2}) + r_1 (d_2, A_2^i b_2) =$

$= r_2 u_{1i} + \sum_{s_1+s_2=i-1} (d_2, A_2^{s_2} b_2)(d_1, A_1^{s_2} b_1) + r_1 \cdot u_{2i} =$

$= r_2 u_{1i} + \sum_{s_1+s_2=i+1} u_{2s_1} \cdot u_{2s_2} + r_1 \cdot u_{2i} = \sum_{s_1+s_2=i+1} u_{1s_1} \cdot u_{2s_2} = (u_1 \cdot u_2)_{i+1}$, т.к.

$u_1 = (r_1, (d_1, A_1^0 b_1), (d_1, A_1 b_1), \dots)$, $u_2 = (r_2, (d_2, A_2^0 b_2), (d_2, A_2 b_2) \dots$

Для доказательства леммы нам необходимо для каждого ряда $u = (r, \gamma_1, \gamma_2, \dots)$ построить систему S такую, что $\Phi(\mathcal{F}_S) = \mathcal{U}$. Так как $\mathcal{U}$ – периодическая последовательность, то пусть $r_1 \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ – ее предпериод и $\gamma_k, \dots, \gamma_{k+m}$ – период. Тогда рассмотрим $(k+m)$ векторов $b_j = (0 \dots 0 1 0 \dots)$, $j = 1, \dots, k+m$, где 1 стоит на j-м месте. Квадратная матрица A порядка $(k+m)$, $A = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$ имеет вид

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i-1, \text{ при } i = k+1, j = k+m \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пусть $b = b_1$. Очевидно $A^i b = b_{i+1}$ $\quad i = 1, \dots, k+m-1$

$A^{k+m} b = b_{k+1}$

В качестве d возьмем вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k+m})$, имеем теперь

периодических (с предпериодом) последовательностей из 0 и 1 с операцией поразрядного сложения последовательностей (по $mod\ 2$). С другой стороны, из леммы 2 следует, что фактор-группа $R - AL_2/(AL$ есть группа "периодически заданных" рядов у которых свободный член r 1.

Лемма 5. Группа R - абелева, без кручения.

Доказательство. Коммутативность операции умножения рядов очевидна. Элемент конечного порядка из R должен иметь порядок 2^s для некоторого $s \geq 0$. Это следует, например, из того, что R - подгруппа прямого произведения бесконечного числа конечных 2-групп - нужно рассмотреть группы, которые получаются, если брать ряды конечной длины с той же операцией умножения (коэффициенты при степенях, которые больше зафиксированной, не рассматриваются). Вместе с тем, заметим что если $u=(u_1,u_2,\quad)$ - некоторый ряд, $u_1=1$, то $u_i^2=0$ для $i=2p+1$ и $u_i^2=u_{i/2}$ $i=2p$, $i>1$, u_{i-i}^2 коэффициент ряда $u^2=u\cdot u$. Поэтому, если для некоторого i $u_i \neq 0$, $i>1$, то $u^2 \neq 1$. Лемма доказана.

Таким образом, нами доказана теорема.

Теорема 3.30 [32] AL_2 - разрешимая группа. Она получается расширением бесконечной абелевой группы, каждый элемент которой имеет порядок 2, с помощью бесконечной абелевой группы без кручения.

С точки зрения структурной теории автоматов эта теорема означает, что в любой схеме два линейных автомата коммутируют с точностью до некоторого автомата с безусловными переходами.

Построим теперь кольцо линейных автоматов как кольцо эндоморфизмов группы входных последовательностей.

Будем рассматривать множество входных последовательностей как абелеву группу относительно операции поразрядного сложения ($mod\,2$). В полугруппе PL_2 выберем те автоматы, которые реализуют отображения, являющиеся эндоморфизмами входной группы. Множество таких отображений обозначим KA_2. Множество KA_2 - это все те отображения из PL_2, которые оставляют на месте нуль входной группы. В самом деле $y(t)=(d,A^t q_0)+\sum_{k=0}^{t-1}(d,A^{t-k-1}b)x^k+$ $+\sum_{k=0}^{t-1}(d,A^k c)+r x^t+h$. Пусть из того, что $x^i=0$, $i=0,1,\quad,t$ следует $y(i)=0$. Тогда для всех t $(d,A^t q^0)+$ $+\sum_{k=0}^{t-1}(d,A^k c)+h=0$. Поэтому $y(t)=\sum_{k=0}^{t-1}(d,A^{t-k-1}b)x^k+rx^t$. Очевидно, что тогда $F(\alpha+\beta)=F(\alpha)+F(\beta)$. Из последнего равенства, в свою очередь, сразу следует, что $F(000.\quad)=000.$

Вводя в KA_2 операцию сложения эндоморфизмов $(F_1+F_2)(x)=F_1(x)+F_2(x)$ мы получаем кольцо автоматных отображений. Необходимые свойства кольца выполнены, так как KA_2 - это эндоморфизмы абелевой группы. Сложению двух автоматных отображений соответствует операция над логическими сетями, реализующими эти автоматы:

(*)

Пусть $\tilde{\Phi}$ - ограничение гомоморфизма Φ полугруппы PL_2 на полугруппу PR_2 на множестве KA_2. Введем в полугруппе PR_2 операцию поразрядного сложения рядов (соответствующие коэффициенты складываются по $mod\,2$). Нетрудно показать, что тем самым мы превратим PR_2 в кольцо.

Лемма 1. Отображение $\tilde{\Phi}$ - гомоморфизм кольца KA_2 на кольцо PR_2.

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{\Phi}$ - гомоморфизм полугрупп. Нам необходимо показать только, что $\tilde{\Phi}$ - гомоморфизм аддитивных групп. Пусть $\tilde{\Phi}(F_1)=u_1$, $\tilde{\Phi}(F_2)$ u_2. Рассмотрим $\tilde{\Phi}(F_1+F_2)$. Из схемы (*) видно, что отображение F_1+F_2 реализуется системой S:

$$\begin{cases} q_1(0) = q_1^0 \\ q_2(0) = q_2^0 \\ q_1(t+1) = A_1 q_1^t + b_1 x^t + c_1 \\ q_2(t+1) = A_2 q_2^t + b_2 x^t + c_2 \\ y(t) = (d_1, q_1^t) + r_1 x^t + l_1 + (d_2, q_2^t) + r_2 x^t + l_2 \end{cases}$$

Таким образом система S имеет параметры

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad r = r_1 + r_2$$

$$(d, A^i b) = (d_1, A_1^i b_1) + (d_2, A_2^i b_2)$$

Таким образом $\tilde{\Phi}(F_1 + F_2) = u_1 + u_2 = \tilde{\Phi}(F_1) + \tilde{\Phi}(F_2)$

Теперь покажем, что для любого ряда u из PR_2 найдется автомат F из KA_2, такой что $\tilde{\Phi}(F) = u$. Так как F принадлежит KA_2, то должно выполняться условие : $(d, A^t q^0) + \sum_{i=0}^{t-1} (d, A^i c) + l = 0$. Заметим, что в соответствующей части доказательства леммы 2-3.30 параметры q^0, c, l никакой роли не играли. Поэтому мы можем взять систему у которой $c = q^0 = (0, \ldots 0)$, $l = 0$, а матрица A и вектор b строятся как в лемме 2. Лемма доказана.

Из леммы 4-3.30 следует, что элементы KA_2, которые $\tilde{\Phi}$ отображает в 0 кольца PR_2 - это автоматы с безусловными переходами. Но тогда, из того, что элементы KA_2 оставляют на месте нулевую входную последовательность следует, что только автомат, у которого $y(t) = 0$ независимо от входной последовательности, то есть только нуль кольца KA_2 отображается в нуль кольца PR_2. Отсюда мы получаем теорему .

Теорема 3.31 . Кольцо KA_2 изоморфно кольцу PR_2

Часть 2.Однородные структуры.

Изучаемые в этой части однородные структуры ОС представляют собой бесконечные схемы,построенные из копий одного и того же конечного автомата и такие,что правила соединения входов произвольного автомата с выходами других авточатов в них везде одинаковы /однородность строения/.При рассмотрении ОС мы будем придерживаться традиционной для терминологии /называть,например,автоматы,из которых состоит ОС,ячейками,и т.п./.Эта часть состоит из двух глав.

Глава I включает четыре параграфа и посвящена исследованию свойств поведений ОС,представляющих интерес для моделирования различных процессов.В §I приведены определения основных понятий,связанных с ОС,а также рассмотрены некоторые примеры ОС.В §2 рассматривается подход к описанию поведений ОС посредством графов переходов.В §3 рассматриваются алгоритмические вопросы распознавания инвариантности при переходах различных характеристик состояний ОС. В §4 рассмотрен ряд вопросов,связанных с ростом конфигураций в ОС.Здесь показано,например,что для весьма широкого класса законов роста конфигураций существуют ОС,в которых каждая конфигурация,отличная от нулевой,обладает данным законом роста.

Глава 2 состоит из пяти параграфов;в ней рассматривается один естественный способ взаимного моделирования ОС.В§I вводятся связанные с этим способом моделирования понятия.В §2 и §3 выводятся оценки,характеризующие возможность взаимного моделирования ОС с различными значениями параметров /число состояний ячейки,размеры окрестности и т.п./.В §4 изучается возможность распознавания универсальности ОС в смысле введенного понятия их взаимного моделирования.В §5 строятся примеры простейших универсальных двумерных ОС.

ГЛАВА I
ПОВЕДЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР

§ I. Определения и примеры

Однородной структурой (ОС) называется четверка $\langle Z^k, E_n, V, \varphi \rangle$, где Z^k есть множество k-мерных векторов с целыми координатами, называемых ячейками ОС, $E_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ – множество состояний, которые может принимать ячейка ОС, $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}\}$ – упорядоченный набор различных ненулевых векторов из Z^k, называемый шаблоном соседства ОС и определяющий для каждой ячейки α ее окрестность $V(\alpha) = \{\alpha, \alpha+\alpha_1, \dots, \alpha+\alpha_{h-1}\}$, φ есть отображение $(E_n)^h$ в E_n, называемое локальной функцией переходов. Если в момент t состояния ячеек $\alpha, \alpha+\alpha_1, \dots, \alpha+\alpha_{h-1}$ были равны соответственно $x_0, x_1, \dots, x_{h-1}$, то состояние α в момент $t+1$ полагается равным $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h-1})$. Пусть состояние ОС /т.е. функция, сопоставляющая каждой ячейке ее состояние из E_n /в момент t есть f, тогда состояние ее в момент $t+1$ есть функция g, определяемая равенством $g(\alpha) = \varphi(f(\alpha), f(\alpha+\alpha_1), \dots, f(\alpha+\alpha_{h-1}))$ (1) (1) задает основную функцию переходов $\Phi: g = \Phi(f)$.

Поведением ОС назовем последовательность $\{f_i\}$ ее состояний, такую, что $f_{i+1} = \Phi(f_i)$.

Пусть $m_1, \dots, m_k$ – натуральные, $\bar{m} = (m_1, \dots, m_k)$. Тогда обозначим $V_{\bar{m}}$ совокупность всех векторов $(\beta_1, \dots, \beta_k) = \beta$, таких, что $\beta \neq 0$, $|\beta_i| \leq m_i$ и все β_i – целые. Предполагаем, что элементы $V_{\bar{m}}$ упорядочены некоторым фиксированным образом. Класс всех ОС вида $\langle Z^k, E_n, V_{\bar{m}}, \varphi \rangle$ обозначим $S(k, n, \bar{m})$.

Будем рассматривать далее лишь такие ОС, у которых $\varphi(0, \dots, 0) = 0$. Состояние 0 в этом случае является состоянием покоя. Состояние ОС, у которого лишь конечное число ячеек находится в отличном от 0 состоянии, назовем конфигурацией.

Рассмотрим примеры однородных структур, иллюстрирующие некоторые возможные типы их поведений.

I. Пусть $\mathcal{S}_1$ – двумерная ОС с шаблоном соседства $V = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}\}$, двумя состояниями ячейки – 0 и 1 и локальной функцией переходов $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h-1}) = x_0 \vee x_1 \vee \dots \vee x_{h-1}$. Пусть Φ – основная функция переходов ОС $\mathcal{S}_1$. Предположим, что состояние f ОС $\mathcal{S}_1$ представляет собой дизъюнкцию двух состояний f_1 и f_2. Тогда из (1) находим:

$$\Phi(f)(\alpha) = f(\alpha) \vee f(\alpha+\alpha_1) \vee \dots \vee f(\alpha+\alpha_{h-1}) = f_1(\alpha) \vee f_2(\alpha) \vee \dots$$
$$\dots \vee f_1(\alpha+\alpha_{h-1}) \vee f_2(\alpha+\alpha_{h-1}) = \Phi(f_1)(\alpha) \vee \Phi(f_2)(\alpha).$$

Таким образом, $\Phi(f) = \Phi(f_1) \vee \Phi(f_2)$, и вообще $\Phi^t(f) = \Phi^t(f_1) \vee \Phi^t(f_2)$. Учитывая это соотношение, а также то обстоятельство, что произвольную конфигурацию ОС $\mathcal{S}_1$ можно представить в виде дизъюнкции "одноклеточных" конфигураций, каждая из которых имеет лишь одну ненулевую ячейку, получаем, что для изучения поведений конфигураций в $\mathcal{S}_1$ достаточно изучить лишь поведение "одноклеточной" конфигурации. Пусть K – такая конфигурация, у которой в состоянии 1 находится ячейка 0 с координатами $(0,0)$. Обозначим Q множество векторов $\{0, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_{h-1}\}$. Множество ячеек, имеющих в конфигурации f состояние 1, обозначаем M_f. Нетрудно заметить, что $M_{\Phi(f)} = M_f + Q$, так что $M_{\Phi^t(K)} = M_t = \underbrace{Q + \dots + Q}_{t}$, и задача сводится к изучению структуры последнего множества. Рассмотрим множество точек плоскости, являющихся концами векторов из Q, и обозначим выпуклую оболочку этого множества P. P представляет собой выпуклый многоугольник вида рис. 99а либо рис. 99б, либо отрезок прямой. Будем рассматривать случай 99а, так как остальные случаи рассматриваются аналогично.

рис.99

Пусть $\beta_1,\dots,\beta_m$ – те векторы из Q, которые ведут к вершинам многоугольника P. Рассмотрим произвольные векторы β_i и β_{i+1} /при $i=m$ вместо β_{i+1} берем β_1 /; в сумме $\underbrace{Q+\dots+Q}_{t}$ они порождают треугольный кусок решетки, изображенный на рис.100.

рис.100

Заметим, что в силу выпуклости P концы векторов из Q находятся по ту же сторону от прямой AB, что и точка O, т.е. проекции этих векторов на прямую OA параллельно прямой AB не длиннее вектора β_i. Отсюда вытекает, что проекция на OA параллельно прямой AB любого вектора вида $\gamma=\gamma_1+\dots+\gamma_t$, $\gamma_i\in Q$ не длиннее вектора $t\cdot\beta_i$, т.е. конец вектора γ лежит по ту же сторону от прямой CD, что и точка O. Приведенные рассуждения устанавливают, что множество M_t расположено внутри выпуклого многоугольника $t\cdot P$, причем точки M_t размещены внутри $t\cdot P$ достаточно плотно: для любой точки $x\in t\cdot P$ существует отстоящая от нее не более чем на $\ell=\max\limits_{1\le i\le m}|\beta_i|$ точка множества M_t. Нетрудно проверить, что множество целочисленных линейных комбинаций векторов из Q образует двумерную решетку Γ. Для любого R можно указать такое ρ, что целочисленные линейные комбинации векторов Q с коэффициентами, не превосходящими по модулю ρ, в R – окрестности точки O образуют кусок решетки. Заметим также, что конец вектора, являющегося целочисленной линейной комбинацией векторов из Q указанного вида и отложенного от точки $O'=-(\rho\alpha_1+\rho\alpha_2+\dots+\rho\alpha_{k-1})$, является также концом вектора, являющегося целочисленной комбинацией векторов из Q с положительными коэффициентами, не превосходящими 2ρ, и отложенного от точки O. Поэтому множество $M_{2\rho}$ в R – окрестности точки O' представляет собой кусок решетки Γ. Пусть $R>\ell$. Представим множество M_t в виде $M_{t-2\rho}+M_{2\rho}$. Пусть $x\in M_{t-2\rho}$. Тогда R – окрестность точки $x+\overline{OO'}$ в множестве M_t представляет собой кусок решетки Γ, и так как все эти R – окрестности в совокупности накрывают сдвинутый на $\overline{OO'}$ многоугольник $(t-2\rho)P$, то в пересечении с этим многоугольником M_t представляет собой кусок решетки Γ. Таким образом, получаем, что множество M_t, за исключением, быть может, полосы шириной $2\rho+|\overline{OO'}|$ на границе, представляет собой пересечение решетки Γ с многоугольником $t\cdot P$. Это означает, что поведение конфигурации K можно рассматривать как рост многоугольника, подобного P. Очевидно, любая другая конфигурация при росте тоже неограниченно приближается к очертаниям многоугольника P. Ниже мы покажем, что для весьма широкого класса областей включающего, например, круги, эллипсы и т.д./ существуют однородные структуры, в которых каждая ненулевая конфигурация неограниченно растет и при росте приобретает очертания, сколь угодно приближающиеся к очертаниям данной области.

2. Пусть $\mathcal{S}_2$ – k-мерная ОС с шаблоном соседства $V=\{d_1,\dots,d_{h-1}\}$, число состояний ячейки которой есть простое число p, а локальная функция переходов задается соотношением $\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{h-1}) = x_0+x_1+\dots+x_{h-1} \pmod p$.

Рассмотрим вектор d, такой, что все координаты векторов $d, d+d_1, \dots, d+d_{h-1}$ отрицательны, и перейдем от $\mathcal{S}_2$ к ОС $\mathcal{S}_2'$:

$$\mathcal{S}_2' = \langle Z^k, E_p, \{d, d+d_1, \dots, d+d_{h-1}\}, \varphi' \rangle,$$

где $\varphi'(x_0,x_1,\dots,x_h) = \varphi(x_1,\dots,x_h) = x_1+\dots+x_h \pmod p$

Если Φ и Φ' – основные функции переходов ОС $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_2'$, то, как легко проверить, $\Phi'(f)$ получается из $\Phi(f)$ сдвигом на вектор $-d$:

$$\Phi'(f)(x) = \Phi(f)(x+d).$$

Поэтому поведения ОС $\mathcal{S}_2'$ отличаются от поведений $\mathcal{S}_2$ лишь дополнительным "движением" на вектор $-d$ за один такт, так что для исследования поведений ОС $\mathcal{S}_2$ достаточно исследовать поведения ОС $\mathcal{S}_2'$. Обозначим $\gamma_1=-d;\ \gamma_2=-(d+d_1);\dots;\gamma_h=-(d+d_{h-1})$; все координаты векторов γ_i неотрицательны.

Рассмотрим область $M=\{(x_1,\dots,x_k) \mid x_1\geq 0;\dots;x_k\geq 0\}$. Будем кодировать конфигурации, все ненулевые ячейки которых содержатся в M, многочленами от переменных $x_1,\dots,x_k$ над полем вычетов по модулю p. Именно, если у конфигурации f ячейки $\beta_1=(\beta_{11},\dots,\beta_{1k}),\dots,\beta_z=(\beta_{z1},\dots,\beta_{zk})$ из M находятся в состояниях $s_1,\dots,s_z$, не равных 0, а прочие – в состоянии 0, то она кодируется многочленом

$$Q_f = \sum_{i=1}^{z} s_i x_1^{\beta_{i1}}\cdot\ldots\cdot x_k^{\beta_{ik}}$$

Очевидно, это соответствие взаимно-однозначно. Имеем:

$$\Phi'(f)(x) = f(x-\gamma_1)+f(x-\gamma_2)+\dots+f(x-\gamma_h)$$

Таким образом, $\Phi'(f)$ представляет собой сумму h конфигураций, полученных из f сдвигом на векторы $\gamma_1,\dots,\gamma_h$. Нетрудно заметить, что многочлен конфигурации, полученной из f сдвигом на вектор $\gamma_j=(\gamma_{j1},\dots,\gamma_{jk})$, получается из Q_f умножением на $x_1^{\gamma_{j1}}\cdot\ldots\cdot x_k^{\gamma_{jk}}$. Поэтому $Q_{\Phi'(f)} = Q_f\cdot Q$ где $Q=\sum_{j=1}^{h} x_1^{\gamma_{j1}}\cdot\ldots\cdot x_k^{\gamma_{jk}}$, и вообще $Q_{(\Phi')^t(f)} = Q_f\cdot Q^t$. Известно, что в кольце многочленов над полем вычетов по модулю p имеет место тождество: $(z_1+\dots+z_h)^{p^N} = z_1^{p^N}+\dots+z_h^{p^N}$

Поэтому при $t=p^N$ $Q^{p^N} = \sum_{j=1}^{h} x_1^{p^N\gamma_{j1}}\cdot\ldots\cdot x_k^{p^N\gamma_{jk}}$, и $(\Phi')^{p^N}(f)$ представляет собой сумму h конфигураций, полученных из f сдвигом на векторы $p^N\gamma_1,\dots,p^N\gamma_h$. При достаточно большом N эти конфигурации не пересекаются /т.е. не пересекаются множества их ненулевых ячеек/, и $(\Phi')^{p^N}(f)$ распадается на h копий конфигурации f. Если N достаточно велико, то каждая из этих копий через некоторое время породит h новых копий, и т.д. В результате в поведении конфигурации, распадающиеся на сколь угодно большое число копий конфигурации f. Конфигурация f, обладающая этим свойством, называется самовоспроизводящейся [34]. Приведенные рассуждения показывают, таким образом, что каждая ненулевая конфигурация ОС $\mathcal{S}_2$ является самовоспроизводящейся.

3. Изучим поведение одной простой ОС. Пусть $\mathcal{S}_3$ – одномерная ОС с двумя состояниями ячейки, окрестность ячейки которой изображена на рис.101а,

а)

(0,1,0)
(1,0,1)
(1,1,0)

б)

рис.101

а множество наборов состояний ячеек этой окрестности, на которых локальная функция переходов обращается в 1, – на рис.101б. Здесь и далее изображаем ячейки ОС не в виде узлов решетки, а в виде квадратов, на которые эта решетка разбивает плоскость. Пусть K – произвольная ненулевая конфигурация ОС $\mathcal{S}_3$. Множество ячеек конфигурации K назовем связным, если оно

представляет собой отрезок, внутри которого отсутствуют смежные ячейки, имеющие состояние 0, а концевые ячейки имеют состояние 1. Так как на наборах 001 и 100 значение локальной функции переходов равна 0, то изменения внутри каждой из компонент связности конфигурации K происходят автономно, причем в силу конечности числа состояний начиная с некоторого момента t_0 поведение конфигурации K становится периодичным. Рассмотрим произвольную компоненту связности конфигурации $\Phi^{t_0}(K)$. Пусть α – левый конец этой компоненты. Тогда, в силу периодичности, α должна сохранять состояние 1 в любой момент $t \geq t_0$. Это возможно, как видно из рис. , только при условии, что ячейка β, являющаяся правым соседом α, сохраняет при $t \geq t_0$ состояние 0. Для этого необходимо, в свою очередь, чтобы правый сосед ячейки β тоже сохранял состояние 0. Таким образом, рассматриваемая нами компонента состоит из одной ячейки α, и конфигурация K к моменту t_0 переходит в не изменяющуюся далее конфигурацию, имеющую вид рис.102.

$$.00010\overbrace{\ldots}^{l_1\geq 2}010\ .010\overbrace{\ldots}^{l_2\geq 2}01\ 010.\ \overbrace{\ }^{l_1\geq 2}.01000.$$

рис.102

Рассмотренная ОС обладает весьма простым, поддающимся исчерпывающему анализу поведением. В качестве примера ОС, обладающей двумя состояниями ячейки и небольшим шаблоном соседства, но характеризующейся гораздо более интересным поведением, приведем, например, ОС δ_4, окрестность ячейки которой изображена на рис. 103, а локальная функция переходов обращается в 1 на наборах с двумя, тремя и пятью единицами. На рис. 104 приведен график поведения в этой ОС трехклеточной конфигурации до момента $t=15$.

рис.103

рис.104

4. На языке однородных структур может быть сформулирована известная задача о синхронизации цепи стрелков [35]. Здесь она сводится к построению такой одномерной ОС с $n>4$ состояниями ячейки, обладающей окрестностью ячейки вида рис.101а, в которой поведение любой конфигурации вида рис.105

рис.105

обладает следующими свойствами:

а/ Ячейки вне отрезка AB сохраняют нулевое состояние.

б/ В некоторый момент t_0 все ячейки отрезка AB переходят в состояние 3, причем до этого момента состояния 3 ни одна из ячеек отрезка AB не имела. В [36] получено решение этой задачи, осуществляющее синхронизацию за минимальное время $t_0 = 2\ell - 2$.

5. Как дискретная модель непрерывных процессов, однородные структуры появляются, например, при численном решении дифференциальных уравнений в частных производных сеточными методами. При этом каждый узел сетки представляет собой фактически ячейку однородной структуры, и число состояний этой ячейки должно быть достаточно большим для представления чисел с заданной точностью. Эти же процессы нетрудно промоделировать и при помощи ОС с небольшим числом состояний ячейки. Проиллюстрируем один из возможных способов моделирования на примере разностной схемы $X_i^{t+1} = \frac{1}{2}(X_{i-1}^t + X_{i+1}^t)$ для решения уравнения теплопроводности. Рассмотрим прямоугольную область P в двумерной ОС б с 8 состояниями ячейки, которые будем изображать двоичными наборами (x,y,z). Расположим внутри P двоичные записи /в x -компонентах состояний ячеек/ начальных значений x_i^0 так, как показано на рис.106.

рис.106

Младшие разряды каждой такой записи расположены внизу P. Будем считать, что состояния граничных ячеек P определяются извне; именно, верхняя сторона P постоянно находится в нулевом состоянии, левая и правая - хранят записи чисел X_1^0 и X_q^0, а на нижней стороне в четные моменты ячейки находятся в нулевом состоянии и в нечетные имеют состояние $(0,0,1)$. Предполагаем также, что в начальный момент все y - и z - компоненты внутренних ячеек P равны нулю.

Сложение очередных X_i^t будет начинаться в нечетные моменты с младших разрядов, одновременно с продолжающимся сложением старших разрядов предыдущих X_i^{τ}. Умножение на $\frac{1}{2}$ осуществляется посредством сдвига вниз на одну ячейку. Разряды числа X_i^t появляются при этом в соответствующих ячейках в различные моменты времени.

Окрестность ячейки α_0 ОС б имеет вид, указанный на рис.107:

рис.107

Для задания функции переходов б обозначим через (x_i, y_i, z_i) состояние

ячейки α_i до перехода и через (x_0', y_0', z_0') – состояние α_0 после перехода. Положим:

1. $z_0' = z_5$
2. При $z_0 = 1$ $x_0' = x_1 + x_2 + y_0$, где сумма берется по $mod\,2$, иначе $x_0' = x_0$.
3. $y_0' = x_3 x_4 \vee x_3 y_5 \vee x_4 y_5$ при $z_5 = 1$, иначе $y_0' = 0$.

Аналогичным образом можно промоделировать решение задачи Дирихле по разностной схеме $X_{ij}^{(t+1)} = \frac{1}{4}\left(X_{i-1,j}^{(t)} + X_{i+1,j}^{(t)} + X_{i,j-1}^{(t)} + X_{i,j+1}^{(t)}\right)$ используя трехмерную $ОС$, и ряд других разностных процессов.

§ 2. Графы переходов однородных структур

Одним из естественных подходов к изучению поведения $ОС$ является рассмотрение их графов переходов. Для определения графа переходов $G(\mathfrak{a})$ $ОС\,\mathfrak{a}$ разобьем состояния $\mathfrak{a}$ на классы эквивалентности, считая два состояния эквивалентными, если одно получается из другого сдвигом на целочисленный вектор. Эти классы эквивалентности и будут служить вершинами $G(\mathfrak{a})$. От класса, включающего состояние f, проводим ребро к классу, включающему $\Phi(f)$.

Если рассматривать лишь конфигурации $ОС\,\mathfrak{a}$, то в $G(\mathfrak{a})$ выделяется подграф $G^*(\mathfrak{a})$, который будет называться ограниченным графом переходов.

Займемся изучением возможных типов графов $G(\mathfrak{a})$ и $G^*(\mathfrak{a})$. Прежде всего выясним, сколько может быть в этих графах слабых компонент связности. Так как из любой вершины в $G(\mathfrak{a})$ и $G^*(\mathfrak{a})$ выходит ровно одно ребро, то любые два состояния f и g, принадлежащие вершинам, входящим в одну и ту же компоненту связности, обладают тем свойством, что для подходящих i и j состояния $\Phi^i(f)$ и $\Phi^j(g)$ эквивалентны. Рассмотрим сначала граф $G(\mathfrak{a})$.

Теорема 1.1 /37/. Имеет место альтернатива:

/ существует такое p, что любое состояние $ОС\,\mathfrak{a}$ переходит в нулевое состояние не более чем за p шагов /в этом случае $G(\mathfrak{a})$, очевидно, имеет одну компоненту связности/;

/ граф $G(\mathfrak{a})$ имеет континуум компонент связности.

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим одномерный случай. Пусть $p > 0$ и отрезок A_p состоит из $2m \cdot p + 1$ ячейки. Здесь V_m – шаблон соседства $ОС\,\mathfrak{a}$. Если известно состояние A_p в момент t, то оно позволяет однозначно определить состояние центральной ячейки α отрезка в момент $t+p$. Если бы для некоторого p при любом начальном состоянии A_p это состояние α было нулевым, то, как нетрудно проверить, любое состояние $ОС\,\mathfrak{a}$ переходило бы в нулевое состояние не более чем за p шагов. Поэтому предположим, что для любого p имеется состояние S_p^1 отрезка A_p такое, что оно переводит через p шагов ячейку α в ненулевое состояние. Обозначим также S_p^0 нулевое состояние A_p и заметим, что оно переводит α через p шагов в нулевое состояние.

Разобьем множество ячеек $\mathfrak{a}$ на отрезки длины $2m \cdot p + 1$, причем так, чтобы для каждого p число отрезков длины $2m \cdot p + 1$ было счетно. Для каждого p занумеруем все отрезки длины $2m \cdot p + 1$ и обозначим i-й отрезок длины $2m \cdot p + 1$ через $A_{p,i}$. Пусть $\xi = \{\xi_i\}$ – бесконечная последовательность нулей и единиц. Построим состояние h_ξ $ОС\,\mathfrak{a}$ такое, что для каждого p отрезок $A_{p,i}$ имеет состояние $S_p^{\xi_i}$. Очевидно, состояния $\{h_\xi\}$ попарно различны и мощность множества этих состояний равна континууму. Пусть $\xi = \{\xi_i\}, \psi = \{\psi_i\}$ и $\xi \neq \psi$. Тогда для некоторого i выполняется $\xi_i \neq \psi_i$; для определенности положим $\xi_i = 0, \psi_i = 1$. По определению S_p^0 и S_p^1, центральная ячейка отрезка $A_{p,i}$ имеет состояние 0 в $\Phi^p(h_\xi)$ и ненулевое состояние в $\Phi^p(h_\psi)$, т.е. $\Phi^p(h_\xi) \neq \Phi^p(h_\psi)$ для любого p.

ким образом, состояния $\Phi^{p}(h_\xi)$ для любого фиксированного p попарно различны. Рассмотрим произвольное состояние h_ξ. Если некоторое состояние h_ψ относится к той же компоненте связности, что и h_ξ, то для подходящих p_1, p_2 и ℓ состояние $\Phi^{p_2}(h_\psi)$ получено сдвигом на ℓ состояния $\Phi^{p_1}(h_\xi)$. Если при тех же p_1, p_2, ℓ и $\tau \neq \psi$ состояние $\Phi^{p_2}(h_\tau)$ получено из $\Phi^{p_1}(h_\xi)$ сдвигом на ℓ, то $\Phi^{p_2}(h_\tau) = \Phi^{p_2}(h_\psi)$, чего быть не может. Поэтому число состояний h_ψ, относящихся к той же компоненте связности, что и h_ξ, не превосходит числа наборов p_1, p_2, ℓ, т.е. не более чем счетно. В результате состояния $\{h_\xi\}$ разбиваются на не более чем счетные классы состояний, относящихся к одной и той же компоненте связности, так что число этих классов континуально и множество компонент связности графа переходов $OC\ \mathcal{A}$ имеет мощность континуума.

Теорема 1.2 [37] Проблема нахождения мощности $P_{\mathcal{A}}$ множества компонент связности графа $G(\mathcal{A})$ в классе OC с заданными $\bar{m}$ и $k \geq 2$ алгоритмически неразрешима.

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $k=2$, $\bar{m}=(1,1)$. Пусть M - множество всех состояний окрестности ячейки /при $\bar{m}=(1,1)$, $k=2$ и котором n /. Выделим $Q \subset M$ так, чтобы состояния окрестности, в которых существуют нулевые состояния ячеек, не входили в Q. Каждому такому Q сопоставим $OC\ \mathcal{A}_Q$:

$$\varphi_{\mathcal{A}_Q}(x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) = \begin{cases} 0, \text{ если } (x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) \notin Q \\ x_0, \text{ если } (x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}) \in Q \end{cases}$$

Если существует такое состояние $OC\ \mathcal{A}_Q$, у которого окрестность каждой ячейки находится в состоянии из Q, то это состояние переводится функцией переходов в себя и никогда не переходит в нулевое состояние, так что имеет место случай 2 теоремы 1.1, и $P_{\mathcal{A}_Q}$ - континуум. Если же такого состояния нет, то, очевидно, существует константа p такая, что каждое состояние $OC\ \mathcal{A}_Q$ переходит не более чем за p шагов в нулевое состояние и $P_{\mathcal{A}_Q} = 1$. Таким образом, проблема нахождения $P_{\mathcal{A}_Q}$ эквивалентна проблеме распознавания существования состояния OC, у которого состояние окрестности каждой ячейки входит в Q. К такой проблеме, как легко заметить, сводится и общая проблема домино, алгоритмическая неразрешимость которой установлено в [38]. Отсюда и вытекает алгоритмическая неразрешимость проблемы нахождения $P_{\mathcal{A}}$. Теорема доказана.

Рассмотрим класс $R(k,n,\bar{m}) \subset S(k,n,\bar{m})$ всех OC с одной компонентной связности и обозначим $T(\mathcal{A})$ наименьшее из таких p, что каждое состояние $OC\ \mathcal{A}$ переходит в нулевое не более чем за p шагов. Пусть $T(k,n,\bar{m}) = \max\limits_{\mathcal{A} \in R(k,n,\bar{m})} T(\mathcal{A})$. Из теоремы 1.2 вытекает, что при заданных $\bar{m}$ и $k \geq 2$ $T(k,n,\bar{m})$ как функция от n растет быстрее любой вычислимой функции. В одномерном случае ограничимся нижней оценкой для $T(n,m) = T(1,n,m)$.

Теорема 1.3 [37] Для некоторых $d_1, d_2 > 0$

$$T(n,m) \geq 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}\Big\}[d_2 m], \quad T(n,m) \geq 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}\Big\}[d_1 \log_2 n]$$

Доказательство. Построим класс $OC\ \{\mathcal{A}_q\}$ с шаблоном соседства $\{-1,1\}$. Состояниями $\mathcal{A}_q$ служат наборы вида $(B_0, B_1, C_1, \ldots, B_q, C_q)$. Здесь $B_i \in \{0,1,\ldots,10\}$, $C_i \in \{0, \Gamma, \Lambda, \Pi, \rightarrow, \leftarrow, \Leftarrow\}$. Нулевое состояние ячейки есть набор $(0,0,\ldots,0)$. Для задания функции переходов рассмотрим некоторую ячейку d и ее левого и правого соседей $d^{\wedge}$, d^{n}. Состояния их в момент t обозначим S, $S^{\wedge}$ и S^{n}; состояние, в котором d оказывается в момент $t+1$, - S'. Соответственно будем отмечать и компоненты этих состояний.

1. Состояние S' равно нулю, если не выполнено одно из условий:

а/ ни одна из компонент состояний $S, S^{\wedge}, S^{n}$ не равна o ;!

б/ $(C_i^n \in \{\leftarrow, \Leftarrow\}) \Rightarrow C_i \in \{n, r\}$;

в/ $(C_i^{\wedge} = \rightarrow) \Rightarrow C_i \neq \{\wedge, r\}$;

г/ $(C_i^{\wedge} = r) \Rightarrow (C_i \neq \Leftarrow)$;

д/ $(C_i = r) \Rightarrow (C_i^{\wedge} \neq r \,\&\, C_i^n \neq r)$.

Если условия а/ – д/ выполняются, то полагаем следующее.

2. Пусть $C_i^n \in \{\leftarrow, \Leftarrow\}, C_i = \Pi$. Если $C_i^n = \Leftarrow$ и $B_i^n > 1$, то $C_i' = \leftarrow$, иначе $C_i' = C_i^n$.

3. Пусть $C_i \in \{\leftarrow, \Leftarrow\}, C_i^{\wedge} = \Pi$. Тогда $C_i' = \wedge$.

4. Пусть $C_i = \leftarrow, C_i^{\wedge} = r$. Тогда $C_i' = \rightarrow$.

5. Пусть $C_i^{\wedge} = \rightarrow, C_i = \wedge$. Тогда $C_i' = \rightarrow$.

6. Пусть $C_i = \rightarrow, C_i^n = \wedge$. Тогда $C_i' = \Pi$.

7. Пусть $C_i = \rightarrow, C_i^n = r$. Тогда $C_i' = \Leftarrow$.

8. Если хотя бы одна из компонент $C_i^{\wedge}, C_i, C_i^n$ есть $\rightarrow$, то $B_{i-1}' = 10$.

Если B_i еще не определено из п. 8 , полагаем:

9. $B_o' = B_o - 1$ при $B_o > 0$.

10. Пусть $C_i = \Leftarrow$. Тогда $B_i' = B_i - 1$ при $B_i > 1$ и $B_i' = 10$ при $B_i = 1$.

В остальных случаях изменений компонент состояния не происходит. Предположим, что для любого p найдется состояние f_p ОС $\mathcal{E}_q$ такое, что $\Phi^p(f_p)$ – ненулевое. Заметим, что состояние λ произвольного отрезка длины $2i+1$ позволяет однозначно определить /в $\mathcal{E}_q$ / состояние его центральной ячейки через i тактов; обозначим последнее через $\zeta(\lambda)$. Рассмотрим множество L отрезков нечетной длины с центром в некоторой ячейке α . Пусть M – множество всех состояний λ отрезков из L , таких, что $\zeta(\lambda) \neq o$. Выбирая в f_p отрезки длины $2p+1$, центральная ячейка которых имеет ненулевое состояние в $\Phi^p(f_p)$, получим, что в M входят состояния всех отрезков из L . В силу 1а/ нулевые состояния ячеек $\mathcal{E}_q$ сохраняются при переходах, поэтому сужение состояния на любой меньший отрезок из L снова входит в M и существует состояние $\lambda^* \in M$, являющееся сужением бесконечного числа различных состояний M . Продолжая последовательно λ^* на большие отрезки из L так, чтобы на каждом шаге последнее свойство сохранялось, получим в результате состояние g ОС $\mathcal{E}_q$, у которого состояния всех отрезков из L входят в M . Это означает, что в поведении $\{g_j\}$, начинающемся с g , не возникают нулевые состояния α и, так как любая область из ячеек в нулевом состоянии неограниченно расширяется /см. 1а/, то в этом поведении вообще не возникают ячейки в нулевом состоянии.

Заметим, что при переходах значение Γ компоненты C_i состояния ячейки ОС $\mathcal{E}_q$ сохраняется и новые значения Γ не возникают. Множество ячеек, у которых в поведении $\{g_j\}$ компонента C_i равна Γ , назовем i -границей.

Обозначим через K_i множество ячеек, у которых компонента C_i принимает значение $\rightarrow$ в поведении $\{g_j\}$ бесконечное число раз. Пусть для некоторого i $K_i \neq \emptyset$ и $\alpha \in K_i$. Если правее α нет ячеек i -границы, то сигнал $\rightarrow$ будет неограниченно перемещаться вправо по компонентам C_i , оставляя после себя неизменяющуюся цепочку из символов Π , и компонента C_i состояния α никогда не станет равной $\rightarrow$. Поэтому правее α должна существовать ячейка α' i -границы; дойдя до этой ячейки, сигнал $\rightarrow$ превращается в сигнал $\Leftarrow$, который начинает перемещаться влево, оставляя за собой цепочку символов $\wedge$. До встречи с ячейкой α'' i -границы этот сигнал превращается в $\leftarrow$; существование α'' устанавливается так же, как существование α' . После встречи с α'' сигнал $\leftarrow$ превращается в $\rightarrow$ и двигается вправо.

Рассмотрим ячейки $\alpha'' = \alpha_s, \ldots, \alpha_o = \alpha'$ между α'' и α' . Если

$i=q$ либо $i<q$ и сигнал $\rightarrow$ появляется в компонентах C_{i+1} состояний ячеек окрестности $\{d_s,\dots,d_0\}$ конечное число раз, то из числа $\sum_{\ell=1}^{s-1}(\beta_\ell-1)10^{\ell-1}$, где β_ℓ – значение компоненты B_i ячейки d_ℓ, при циркуляции сигнала из $\{\rightarrow,\leftarrow,\Leftarrow\}$ по ячейкам $d_{s-1},\dots,d_1$ последовательно вычитаются единицы. В противоречии с предположением о $\{g_i\}$, это приводит к появлению нулевых компонент B_i состояний ячеек. Поэтому $i<q$ и в окрестности ячеек $\{d_s,\dots,d_0\}$ бесконечно много раз появляется равная $\rightarrow$ компонента C_{i+1}. Очевидно, в этой окрестности можно выделить некоторую ячейку d^*, компонента C_{i+1} которой бесконечное число раз равна $\rightarrow$, так что $K_{i+1}\neq\varnothing$.

Мы показали, что $K_q=\varnothing$ и $K_i\neq\varnothing \Rightarrow K_{i+1}\neq\varnothing$. Из этого вытекает, что все K_i – пустые и, в силу п. 9, компонента B_0 каждой ячейки через некоторое время становится равной нулю, чего быть не может. Из полученного противоречия вытекает, что каждое состояние $OC\ \mathcal{S}_q$ через конечное число шагов, не превосходящее некоторой константы P, переходит в нулевое, и $G(\mathcal{S}_q)$ имеет одну компоненту связности.

Построим начальное состояние g_0, у которого компоненты B_i всех ячеек равны 10. Значения компонент C_i выберем так, чтобы через каждые ℓ_i ячеек размещался символ Γ, а между соседними Γ циркулировал сигнал из $\{\rightarrow,\leftarrow,\Leftarrow\}$. Можно проверить, что при выборе $\ell_1=2$ и $\ell_{i+1}=2^{\ell_i}$ сигналы в C_{i+1} будут успевать восстанавливать все компоненты B_i из соответствующих групп ячеек. Поэтому g_0 перейдет в нулевое состояние не менее чем за

$\ell_q=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\!\!\Big\}q$ шагов. Таким образом, $T(\mathcal{S}_q)\geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\!\!\Big\}q$

Число состояний $\mathcal{S}_q$ не превосходит c^q, где c – некоторая константа. Поэтому

$$T(c^q,1)\geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\!\!\Big\}q$$

и $$T(n,m)\geq T(n,1)\geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\!\!\Big\}[\log_c n] = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\!\!\Big\}[d_1\log_2 n];\ d_1>0$$

Для получения второй оценки воспользуемся понятием представимости OC, изучаемым во второй главе. Как вытекает из результатов, устанавливаемых в этой главе, при $m\geq c'\log_2 n$ каждая OC из $S(1,n,1)$ представима без замедления в некоторой $OC\ \mathcal{S}'$ из $S(1,2,m)$. Можно выбрать такое представление, что OC из $R(1,n,1)$ будет представляться при помощи OC из $R(1,2,m)$; для этого достаточно сделать нулевое состояние ячейки в $\mathcal{S}'$ неограниченно распространяющимся и считать значение функции переходов на состояниях шаблона, не возникающих при кодировании состояний $OC\ \mathcal{S}$, равными нулю. Очевидно, $T(\mathcal{S}')\geq T(\mathcal{S})$. Поэтому, выбрав $n=2^{[m/c']}$, будем иметь

$$T(n,m)\geq T(2,m)\geq T(1,2^{[m/c']})\geq 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\!\!\Big\}[d_2 m],$$

где d_2 – некоторая положительная константа. Теорема доказана.

Докажем далее, ряд простых утверждений о графах $G(\mathcal{S})$ и $G^*(\mathcal{S})$.

<u>Утверждение 1</u>. Для любой не более чем счетной ненулевой мощности M существует $OC\ \mathcal{S}$, у которого $G^*(\mathcal{S})$ имеет M компонент связности.

Если $M=1$, то в качестве $\mathcal{S}$ достаточно взять OC с $\varphi=0$; если M счетно, то полагаем $\varphi(x_0,\dots,x_{M-1})=x_0$. Для натурального $M>1$ рассмотрим одномерную $OC\ \mathcal{S}$ с окрестностью ячейки d вида, изображенного на Рис. 108

рис.108

и функцией переходов $\varphi(x_0,\dots,x_{M-1})=x_0\vee\dots\vee x_{M-1}$. При каждом переходе длина конфигурации увеличивается на $M-1$, причем через некоторое время она преобразуется в отрезок из единиц. Поэтому граф $G^*(\mathcal{S})$ состоит из ком-

поненты связности, соответствующей нулевому состоянию, и из $M-1$ - компонент, соответствующим различным значениям длин конфигураций по $mod(M-1)$.

Утверждение 2. Для любого автономного автомата A существует ОС $\mathcal{A}$ такая, что объединение некоторых связных компонент графа $G^*(\mathcal{A})$ образует граф переходов A.

Пусть $1, \ldots, n-1$ - состояния автомата A, φ_0 - его функция переходов. Рассмотрим ОС $\mathcal{A}$ с n состояниями ячейки, пустым шаблоном соседства и функцией переходов φ такой, что $\varphi(0)=0$ и $\varphi(x)=\varphi_0(x)$ при $x \neq 0$. Граф переходов A получится, если в $G^*(\mathcal{A})$ выделить вершины, соответствующие состояниям $\mathcal{A}$, у которых все ячейки, кроме одной, находятся в состоянии 0.

Утверждение 3. Существуют неизоморфные ОС с одинаковыми графами G и G^*.

Пусть ОС $\mathcal{A}$ имеет тождественно нулевую функцию переходов. Тогда каждый из графов $G(\mathcal{A})$, $G^*(\mathcal{A})$ имеет вид рис. , где число вершин у $G(\mathcal{A})$ континуально, а у $G^*(\mathcal{A})$ - счетно. Очевидно, что ОС указанного вида, характеризующиеся различными размерами шаблона соседства, числом состояний ячейки и размерностью, неизоморфны.

Утверждение 4. Существуют ОС $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ с различными графами $G^*(\mathcal{A})$ и $G^*(\mathcal{A}')$, у которых $G(\mathcal{A})$ и $G(\mathcal{A}')$ совпадают.

Рассмотрим ОС $\mathcal{A} \in S(1,2,1)$ с функцией переходов $\varphi(x_0,x_1,x_2)=x_0 \vee x_1 \vee x_2$. Если переобозначить состояния ячейки 0 и 1 ОС $\mathcal{A}$, то получим новую ОС $\mathcal{A}'$ с двойственной функцией переходов $\varphi'(x_0,x_1,x_2)=x_0 x_1 x_2$. Очевидно, графы переходов $G(\mathcal{A})$ и $G(\mathcal{A}')$ совпадают. Каждая конфигурация $\mathcal{A}'$ через конечное время переходит в нулевую, так что $G^*(\mathcal{A}')$ имеет одну компоненту связности. С другой стороны, ненулевая конфигурация ОС $\mathcal{A}$ в нулевую перейти не может, и число компонент связности $G^*(\mathcal{A})$ не менее двух.

Утверждение 5. Существуют ОС $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ с совпадающими графами $G^*(\mathcal{A})$ и $G^*(\mathcal{A}')$, но различными графами $G(\mathcal{A})$ и $G(\mathcal{A}')$.

Известно, что в ОС $\mathcal{A}_m \in S(1,2,m)$ с функцией переходов $\varphi(x_0,\ldots,x_{2m})=x_0+\ldots+x_{2m}$ отсутствуют взаимно стираемые конфигурации блоков, так что различные конфигурации ОС $\mathcal{A}_m$ переходят в различные. Это означает, что в каждую вершину $G^*(\mathcal{A}_m)$ входит ровно одно ребро, и компоненты связности этого графа могут иметь вид, рис. 110а, б либо в. Так как длина каждой ненулевой конфигурации в $\mathcal{A}_m$ увеличивается при переходе, то случай на рис. 110в невозможен, и $G^*(\mathcal{A}_m)$ состоит из одной компоненты связности вида рис. 110, а и счетного множества компонент вида рис. 110, б. Легко заметить, что наибольшее число ребер, ведущих к вершине графа $G(\mathcal{A}_m)$, равно 2^{2m}, так что при разных m эти графы различны. Для формулировки следующей теоремы введем ряд новых понятий.

рис.109 рис 110

Пусть рассматриваемая ОС входит в класс $S(k,n,m)$. Конечные подмножества ячеек будем называть блоками; состояние блока - конфигурацией этого блока. Для блока B вводим окрестность $V(B)=\bigcup_{a \in B} V(a)$. Если в момент t блок $V(B)$ имеет состояние f, то однозначно определяется состояние g блока B в момент $t+1$, так что можно ввести оператор $\Phi_B : f \to g$.

Если конфигурация B не входит в область значений Φ_B, то она называется неконструируемой.

Рассмотрим блок $V(V(B))=C$ и выберем две конфигурации f и g на блоке C, которые удовлетворяют условиям:

1. $f|_B \neq g|_B$,
2. $f|_{C\setminus B} = g|_{C\setminus B}$

тогда, если $\Phi_{V(B)}(f)=\Phi_{V(B)}(g)$, то f и g называются взаимно стираемыми.

Теорема 1.4. /Мур [34], Майхилл [39] /. Взаимно стираемые конфигурации существуют в OC тогда и только тогда, когда в ней существуют неконструируемые конфигурации.

Нетрудно заметить, что существование взаимно стираемых конфигураций блоков в OC эквивалентно существованию двух различных конфигураций этой OC, переходящих в одну и ту же конфигурацию. На языке графов переходов это означает наличие у $G^*(\mathcal{B})$ вершины, в которую ведут хотя бы два ребра. Аналогично, наличие у $\mathcal{B}$ неконструируемых конфигураций блоков эквивалентно существованию в $G(\mathcal{B})$ вершин, в которые не ведут ребра. Поэтому утверждение теоремы 1.4, на языке графов переходов можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1.4'. В графе $G(\mathcal{B})$ вершины с нулевой внутренней степенью существуют тогда и только тогда, когда в графе $G^*(\mathcal{B})$ существуют вершины с внутренней степенью, большей единицы.

Доказательство. Предположим сначала, что в OC $\mathcal{B}\in S(k,n,\bar{m})$ существуют взаимно стираемые конфигурации f и g на блоке P. Поместим блок P в k-мерный куб Q со стороной ℓ и разобьем множество состояний Q на классы эквивалентности, полагая два состояния Q эквивалентными, если они либо совпадают, либо являются взаимно стираемыми. Очевидно, что любые две конфигурации Q, совпадающие на P с f и g соответственно, а на $Q\setminus P$ -совпадающие между собой, являются взаимно стираемыми. Поэтому число классов эквивалентных конфигураций блока Q не превосходит $n^{\ell^k}-1$. Рассмотрим куб R со стороной $\ell\cdot s$, где s выберем позднее; он разбивается на s^k меньших кубов со стороной ℓ, подобных Q. Введем отношение эквивалентности на конфигурациях блока R, полагая две конфигурации эквивалентными, если эквивалентны их сужения на любой из указанных кубов /в смысле эквивалентности на конфигурациях Q /. Тогда имеем не более чем $(n^{\ell^k}-1)^{s^k}$ классов эквивалентных конфигураций блока R. Рассмотрим k-мерный параллелепипед R_0 со сторонами $\ell\cdot s-2\cdot m_1, \ell\cdot s-2\cdot m_2,\dots,\ell\cdot s-2\cdot m_k$, расположенный внутри R так, что $V(R_0)=R$. Нетрудно заметить, что если конфигурации f_1 и f_2 блока R эквивалентны, то $\Phi_{R_0}(f_1)=\Phi_{R_0}(f_2)$. Поэтому число элементов в области значений оператора Φ_{R_0} не превосходит числа классов эквивалентности конфигураций R, т.е. не превосходит величины $(n^{\ell^k}-1)^{s^k}$. С другой стороны, число различных конфигураций блока R_0 равно $n^{\prod_{i=1}^{k}(\ell\cdot s-2\cdot m_i)}$. Для доказательства существования неконструируемых конфигураций на блоке R_0 достаточно показать, таким образом, что для подходящего s

$$(n^{\ell^k}-1)^{s^k} < n^{\prod_{i=1}^{k}(\ell\cdot s-2\cdot m_i)}$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{(n^{\ell^k}-1)^{s^k}}{n^{\prod_{i=1}^{k}(\ell\cdot s-2m_i)}} = \left[\frac{n^{\ell^k}-1}{n^{\prod_{i=1}^{k}(\ell-\frac{2m_i}{s})}}\right]^{s^k} \qquad (2)$$

Для достаточно больших s величина $\frac{n^{\ell^k}-1}{n^{\prod_{i=1}^{k}(\ell-\frac{2m_i}{s})}}$ становится меньше единицы и выражение (2) при $s\to\infty$ стремится к 0, что и устанавливает необходимое неравенство. При этом доказано даже, что "почти все" /при $s\to\infty$ / конфигурации блока R_0 будут неконструируемыми. Пусть теперь в OC $\mathcal{B}\in S(k,n,\bar{m})$ существует неконструируемая конфигурация на блоке P. Как и в первом случае, поместим P в k-мерный куб Q со стороной ℓ и рассмотрим куб R со стороной $\ell\cdot s$, состоящий из s^k кубов, подобных Q. Пусть $R_0=V(V(R))$; тогда R_0 представляет собой k-мерный параллелепипед с длинами сторон $\ell\cdot s+4\cdot m_1,\dots,\ell\cdot s+4\cdot m_k$. Обозначим M множество конфигураций блока R_0, обращающихся в 0 на $R_0\setminus R$. Очевидно, $|M|=n^{(\ell\cdot s)^k}$, причем для любых двух различных конфигураций из M выполняются условия 1 и 2 определе-

ния взаимно стираемых конфигураций. Так как на блоке Q существует неконструируемая конфигурация, то число элементов в области значений оператора Φ_Q не превосходит $n^{e^k}-1$ и число элементов в области значений оператора $\Phi_{V(R)}$ не превосходит $(n^{e^k}-1)^{s^k}\cdot n^{[\prod_{i=1}^{k}(e\cdot s+4m_i)-(e\cdot s)^k]}$. Если последняя величина меньше, чем $|M|$, то найдутся две конфигурации f и g из M, переводимые оператором $\Phi_{V(R)}$ в одну конфигурацию блока $V(R)$ и, следовательно, взаимно стираемые. Рассмотрим отношение:

$$\frac{(n^{e^k}-1)^{s^k}\cdot n^{[\prod_{i=1}^{k}(e\cdot s+4m_i)-(e\cdot s)^k]}}{n^{(e\cdot s)^k}} = \left[\frac{(n^{e^k}-1)\cdot n^{[\prod_{i=1}^{k}(e+\frac{4m_i}{s})-e^k]}}{n^{e^k}}\right]^{s^k}$$

Так как в скобке для достаточно больших s стоит величина, меньшая некоторой константы $\alpha<1$, то это отношение при $s\to\infty$ стремится к нулю, что и доказывает утверждение.

Следующая теорема представляет собой усиление теоремы 1.4 :

Теорема 1.5[37] Взаимно стираемые конфигурации отсутствуют в OC тогда и только тогда, когда для произвольного непустого блока B и произвольного состояния f этого блока число состояний блока $V(B)$, переводимых оператором Φ_B в f, не зависит от выбора f и равно $n^{|V(B)\setminus B|}$.

Доказательство. Достаточность очевидна из отсутствия неконструируемых конфигураций. Докажем необходимость. Пусть утверждение неверно, т.е. у некоторой OC $\mathcal{C}$ без взаимно стираемых конфигураций найдутся блок B и состояние f такие, что оператором Φ_B в f переводится менее чем $n^{|V(B)\setminus B|}$ состояний $V(B)$. Это означает, что доля p состояний $V(B)$, переводящихся в f, меньше $1/n^{\mathcal{C}}$, $(\mathcal{C}=|B|)$.

Выберем куб Q со стороной ℓ, содержащий $V(B)$, и рассмотрим куб R со стороной $s\cdot\ell$, состоящий из s^k кубов, подобных Q. В этих кубах естественным образом выделяются блоки, которые будем называть копиями B. В силу выбора Q, состояние R однозначно определяет состояние, в которое переходит каждая из этих копий. Оценим долю состояний куба R, у которых ровно b из s^k копий B переводятся в f. Эта доля равна вероятности того, что сумма s^k независимых случайных величин, принимающих каждая значение 1 с вероятностью p и 0 – с вероятностью $1-p$, есть b. Обозначив указанную сумму Σ, для произвольного $\varepsilon>0$ будем иметь:

$$P\left(\left|\frac{\Sigma}{s^k}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1 \qquad s\to\infty \qquad (3)$$

Таким образом, для "почти всех" состояний R набор состояний, в которые переводятся копии B, содержит "почти" $p\cdot s^k$ состояний f.

Оценим сверху долю $\delta_q(s)$ состояний куба R, у которых не более чем $q\cdot s^k$ копий B находятся в состоянии f; здесь $q<1/n^{\mathcal{C}}$. Эта доля равна вероятности того, что сумма s^k независимых случайных величин, принимающих каждая значение 1 с вероятностью $1/n^{\mathcal{C}}$ и 0 – с вероятностью $1-1/n^{\mathcal{C}}$, не превосходит $q\cdot s^k$. Такая вероятность равна $\sum_{i=0}^{[q\cdot s^k]} C_{s^k}^{i}\left(\frac{1}{n^{\mathcal{C}}}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{n^{\mathcal{C}}}\right)^{s^k-i}$

что при $s\to\infty$ асимптотически не превосходит α^{s^k}, где $\alpha=\alpha(q,n,\mathcal{C})<1$, т.е. $\delta_q(s)\leqslant\alpha^{s^k}$.

Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $p+\varepsilon=q<1/n^{\mathcal{C}}$, и рассмотрим для каждого s класс A_s всех состояний $V(V(R))$, у которых $V(V(R))\setminus R$ находится в нулевом состоянии, а из состояния R не более чем $(p+\varepsilon)s^k$ копий B переводятся в состояние f. В силу (3),

$$|A_s|\sim n^{(s\cdot\ell)^k} \qquad (s\to\infty)$$

Пусть B_s – класс всех состояний $V(R)$, в которые переводятся элементы A_s. Так как каждое состояние из B_s имеет не более чем $(p+\varepsilon)s^k$ копий B в состоянии f, то число этих состояний не превосходит асимптотически

$$n^{|V(R)\setminus R|}\alpha^{s^k}\cdot n^{|R|}=n^{|V(R)|}\alpha^{s^k}$$

обозначим $m = \max_{1\le i\le k}(m_i)$, будем иметь:

$$|V(a)| \le (m+s\ell)^k$$

$$|B_s| \le n^{(m+s\ell)^k}\cdot d^{s^k}$$

$$\frac{|B_s|}{|A_s|} \lesssim \frac{n^{(m+s\ell)^k}}{n^{(s\ell)^k}}\cdot d^{s^k} = n^{[(m+s\ell)^k-(s\ell)^k]}\cdot d^{s^k} = n^{h(s)}\, d^{s^k}$$

где степень полинома $h(s)$ меньше, чем k, т.е. при $s\to\infty$ последнее выражение стремится к 0.

Это означает, что для достаточно больших s найдутся два различных элемента из A_s, переходящих в одно и то же состояние блока $V(a)$, что означает их взаимную стираемость и противоречит предположению о d.

<u>Следствие</u>. Для отсутствия взаимно стираемых конфигураций у ОС $d\in S(k,n,m)$ необходимо, чтобы каждое значение из E_n принималось локальной функцией переходов $\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{k-1})$ в точности на n^{k-1} наборах.

В заключение параграфа докажем два несложных утверждения, связанных с существованием взаимно стираемых конфигураций в одномерных ОС.

<u>Утверждение 6</u>. Если в ОС $d\in S(\ell,n,m)$ существуют взаимно стираемые конфигурации, то они существуют, в частности, на отрезке длины $n^{4m+2}+4m$.

Пусть f и g – взаимно стираемые конфигурации ОС d, заданные на блоке P наименьшей длины. Без ограничения общности можно считать, что P – отрезок длины $\ell+4m$ и $P=V(V(Q))$, где Q – отрезок длины ℓ. Если некоторой ячейки $\alpha\in Q$ состояния окрестности $V(\alpha)$ одинаковы в f и в g, то, как легко видеть, сужения f и g либо на блок Q', либо на блок Q'', указанные на рис.111,

рис.111

представляют снова взаимно стираемые конфигурации, заданные на меньшем блоке, что невозможно в силу выбора блока P. Поэтому у всех ячеек из Q состояния окрестности в f и в g различны. Всего таких пар состояний окрестности ячейки α имеется $N=n^{2m+1}(n^{2m+1}-1)$. Поэтому, если $\ell>N$, существуют две ячейки α и β в Q, у которых пары состояний окрестностей в f и в g совпадают. Обозначив состояния частей блока P так, как показано на рис.112,

рис.112

образуем указанные на рис.113

рис.113

конфигурации меньшего блока. Нетрудно убедиться в том, что они взаимно стираемые, что снова противоречит выбору блока P. Таким образом, должно выполняться $\ell\le N$ или $\ell+4\le n^{4m+2}+4m-n^{2m+1}\le n^{4m+2}+4m$, что и доказывает утверждение. Из утверждения 6 непосредственно вытекаетталгоритмическая разрешимость проблемы распознавания существования взаимно стираемых конфигу-

рацией в одномерных $ОС$.

Утверждение 7. Если в графе переходов $G(б)$ $ОС$ $б \in S(1,n,m)$ существует вершина v, для которой $id(v) > n^{4m}$, то $б$ обладает взаимно стираемыми конфигурациями.

Для доказательства рассмотрим состояния $f_1, \dots, f_r$ $ОС$ $б$, переходящие в одно и то же состояние; пусть $r > n^{4m}$. Выберем конечный отрезок L, на котором состояния f_i попарно отличаются друг от друга и обозначим $L_1 = V(V(L))$. Число состояний области $L_1 \setminus L$ равно n^{4m}, поэтому найдутся состояния f_i, f_j, совпадающие на $L_1 \setminus L$. Так как они отличаются внутри L и переходят в одно и то же состояние, то конфигурации, порождаемые ими на блоке L_1, взаимно стираемые.

Замечание. Для размерности $k \geq 2$ аналогичное утверждение не имеет места, т.к., например, при $k = 2$ можно определить локальную функцию переходов зависящей лишь от горизонтальных соседей и равной их сумме по $mod\, n$ / n - числе состояний ячейки/. Очевидно, $ОС$ с такой функцией не имеет неконструируемых конфигураций, но в каждую вершину графа переходов этой $ОС$ ведет континуум ребер.

§ 3. Замкнутые классы состояний $ОС$.

Для установления тех или иных свойств поведения $ОС$ $б$ бывает необходимо выявление характеристик состояния этой $ОС$, изменения которых при переходе осуществляются по сравнительно простому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда такие характеристики не изменяются вовсе; при этом будет изучена возможность алгоритмического распознавания по $ОС$ сохранения этих характеристик.

Класс K состояний $ОС$ с основной функцией переходов Φ назовем замкнутым, если для любого $f \in K$ имеет место $\Phi(f) \in K$. Любая $ОС$ $б$ обладает нетривиальными замкнутыми классами состояний; такой класс образует, например, множество состояний, соответствующих вершинам $G(б)$, достижимым из некоторой вершины v.

Рассмотрим возможность алгоритмического распознавания замкнутости некоторых классов состояний $ОС$. Обозначим через $C_б$ класс ненулевых конфигураций $ОС$ $б$.

Теорема 1.6 [37] Проблема распознавания замкнутости $C_б$ для $ОС$ из $S(k,n,\bar{m})$ алгоритмически разрешима только для $k = 1$ либо $n = 1$.

Доказательство. Для распознавания замкнутости $C_б$ в одномерном случае построим источник, вершинами которого служат наборы, на которых локальная функция переходов обращается в 0. От вершины α проводим ребро к вершине β, если последние $2m$ символов α совпадают с первыми $2m$ символами β. Нетрудно заметить, что $C_б$ замкнут тогда и только тогда, когда в построенном источнике через нулевую вершину не проходят циклы, отличные от тривиального. Алгоритмическую неразрешимость в многомерном случае достаточно доказать для $k = 2$, $n \geq 2$. Рассмотрим машину Тьюринга T, проблема остановки которой на словах без пробелов (т.е. без пустых ячеек в середине слова) алгоритмически неразрешима. Пусть для T выполнены также следующие условия.

1. Все промежуточные слова на ленте T не имеют пробелов.

2. Остановка T при переработке слова без пробелов происходит только на пустой ленте. Состояния головки T и непустые символы на ее ленте будем кодировать словами длины ℓ над E_n, образующими код без запятой. Пустой символ ленты изображаем словом длины ℓ, состоящим из нулей.

Рассмотрим следующие ограничения на конфигурации $ОС$ $б$ с n состояниями ячейки.

1. Левый край самой верхней полосы конфигурации, содержащей ненулевые

ячейки, имеет вид, указанный на рис.114. Здесь A_0 – запись начальной конфигурации машины T.

2. Под записью всякой окаймленной 2ℓ нулями конфигурации A_i машины T, отличной от заключительной, расположена окаймленная 2ℓ нулями запись конфигурации, в которую A_i переходит.

Нетрудно проверить, что ненулевые конфигурации $OC\,\sigma$, удовлетворяющие этим ограничениям, существуют тогда и только тогда, когда T останавливается при переработке слова A_0 (рассматриваем слова без пробелов).

рис.114

Приведенные ограничения носят локальный характер, так что для достаточно больших размеров шаблона соседства $OC\,\sigma$ можно указать множество M состояний окрестности ее ячейки, появление которых эквивалентно нарушению ограничений. Если теперь определить функцию переходов $OC\,\sigma(A_0)$ с этим шаблоном соседства так, что $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{\ell-1}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ определяет состояние из M, то проблема распознавания замкнутости $C_{\sigma(A_0)}$ сведется к проблеме остановки для T. Так как последняя алгоритмически неразрешима, теорема доказана.

Занумеруем некоторым эффективным образом все конфигурации k-мерной решетки с n состояниями ячейки так, чтобы нулевая конфигурация имела нулевой номер. Эта нумерация позволяет задавать классы конфигураций посредством вычислимых характеристических функций. Естественно предположить, что для нахождения классов конфигураций с алгоритмически разрешимой проблемой распознавания замкнутости следует рассмотреть простейшие в той или иной классификации вычислимые функции. Теорема 1.6 показывает, однако, что уже функция $sg\,x$, принадлежащая, например, простейшему классу $\mathcal{E}^0$ классификации Гжегорчика [40], определяет класс ненулевых конфигураций с алгоритмически неразрешимой проблемой распознавания замкнутости. Описанный подход не позволяет, таким образом, выделять классы конфигураций с алгоритмически разрешимой проблемой распознавания замкнутости.

Рассмотрим один интересный тип классов конфигураций, у которых эта проблема разрешима.

Локальным ограничением на состояния $OC\,\sigma$ назовем пару $\lambda = (A, F)$, где A – блок и F – некоторое множество конфигураций A. Состояние f $OC\,\sigma$ удовлетворяет локальному ограничению λ, если для любой ячейки α состояние блока $\alpha + A$ равно некоторому состоянию из F. Класс всех состояний, удовлетворяющих ограничению λ, обозначим $S(\lambda)$. Замкнутый класс $S(\lambda)$ можно получить, если рассмотреть, например, блок A, на котором существуют неконструируемые конфигурации, и в качестве F выбрать область значений оператора Φ_A.

Утверждение 8. Для любого локального ограничения λ на состояния k-мерной решетки с n состояниями ячейки существует алгоритм, распознающий замкнутость $S(\lambda)$ в OC с параметрами k и n.

Для пустого $S(\lambda)$ утверждение очевидно. Если $S(\lambda) \neq \emptyset$, $\lambda = (A, F)$, то рассмотрим множество состояний, которые блок $V(A)$ принимает в состояниях из $S(\lambda)$. Очевидно, $S(\lambda)$ замкнут в σ тогда и только тогда, когда для любого такого состояния f состояние $\Phi_A(f)$ принадлежит F.

Утверждение 9. Не существует алгоритма, распознающего по произвольным OC данной размерности $k \geq 2$ с данным числом состояний ячейки $n \geq 2$

и локальному ограничению $\mathcal{A}$ на состояния этой OC замкнутость класса $S(\mathcal{A})$.

Рассмотрим $OC\,\sigma$ с тождественно нулевой функцией переходов. Если локальное ограничение $\mathcal{A}$ на состояния σ не содержит нулевого состояния блока, то $S(\mathcal{A})$ замкнут в σ тогда и только тогда, когда он пуст. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания непустоты $S(\mathcal{A})$ для таких локальных ограничений без труда получается из алгоритмической неразрешимости общей проблемы домино.

Заметим, что при построении алгоритма из утверждения 8 встречается алгоритмически неразрешимая задача отыскания множества допустимых состояний блока $V(A)$. Рассмотрим один частный случай, в котором эта задача разрешима. Пусть блоком локального ограничения $\mathcal{A}$ служит параллелепипед A. Если любое удовлетворяющее $\mathcal{A}$ состояние любого параллелепипеда $B \supset A$ может быть продолжено до удовлетворяющего $\mathcal{A}$ состояния всей решетки, то назовем $\mathcal{A}$ непрерывным. Для непрерывных локальных ограничений $\mathcal{A}$ множество допустимых состояний $V(A)$ состоит, очевидно, из всех состояний $V(A)$, удовлетворяющих $\mathcal{A}$.

Утверждение 10. Существует алгоритм, распознающий непрерывность двумерных локальных ограничений.

Доказательство. Покажем сначала, что это утверждение верно для одномерных ограничений. Пусть блок ограничения $\mathcal{A}$ является отрезком длины ℓ и ячейки принимают состояния из E_n. Построим источник, вершинами которого служат наборы $(x_1,\dots,x_\ell)$ $(x_i \in E_n)$, удовлетворяющие $\mathcal{A}$, причем из каждой вершины вида $(x_1,\dots,x_\ell)$ к вершине вида $(x_2,\dots,x_\ell,x_{\ell+1})$ ведет ребро с отметкой $x_{\ell+1}$. Состояния решетки, удовлетворяющие $\mathcal{A}$, имеют вид $\dots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,\dots$, где x_i – отметки последовательно проходимых ребер построенного источника. Ограничение $\mathcal{A}$ будет непрерывным в том и только в том случае, когда для любой вершины v источника $id(v)\neq 0$, $od(v)>0$

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – двумерное ограничение, блоком которого является прямоугольник со сторонами ℓ_1 и ℓ_2. Предположим сначала, что $\mathcal{A}$ непрерывно. Пусть задано удовлетворяющее $\mathcal{A}$ состояние горизонтальной полуполосы высоты ℓ_2 (см. рис. 115). Рассматривая продолжения состояний прямоугольников в левом конце этой полуполосы, нетрудно показать, что существует удовлетворяющее $\mathcal{A}$ продолжение состояния всей полуполосы на полуполосу, получающуюся из нее присоединением сверху горизонтальной линии ячеек. Аналогичное утверждение верно и для продолжения состояния на полуполосу, получающуюся присоединением ячеек снизу, а также для вертикальных полуполос.

рис. 115

Пусть теперь $\mathcal{A}$ – произвольное локальное ограничение (на том же блоке), у которого любое допустимое состояние блока имеет продолжения с сохранением $\mathcal{A}$ на горизонтальную и вертикальную полосы, проходящие через этот блок. Пусть также любое удовлетворяющее $\mathcal{A}$ состояние горизонтальной полуполосы высоты ℓ_2 либо вертикальной полуполосы ширины ℓ_1 допускает продолжение с сохранением $\mathcal{A}$ на полуполосу, полученную из исходной присоединением одной линии ячеек. Тогда нетрудно проверить, что аналогичное утверждение верно для целых полос. Рассмотрим произвольный прямоугольник P, включающий блок $\mathcal{A}$ и некоторое его состояние, удовлетворяющее $\mathcal{A}$ (см. рис. 116). Расширение этого состояния до удовлетворяющего $\mathcal{A}$ состояния решетки проведем следующим образом.

I. Выделим с правого края P столбец Q ширины ℓ_1 и продолжим его

рис.116

состояние на соответствующую вертикальную полосу ширины ℓ_1.

2. Добавляя к этой полосе справа вертикальные линии ячеек, продолжим состояние на объединение P с правой полуплоскостью.

3. Возьмем сужение найденного состояния на полуполосу, проходящую через P и расположенную справа от P; аналогичным образом можно продолжить далее состояние этой полуполосы на всю полосу.

4. Добавляя к последней полосе сверху и снизу горизонтальные линии ячеек, продолжим ее состояние до состояния всей решетки.

Таким образом, проверка непрерывности $\mathcal{A}$ может быть сведена к проверке существования продолжений состояний блока $\mathcal{A}$ на проходящие через него полосы и описанных выше продолжений состояний полуполос.

Пусть $\mathcal{A}=(A,F)$. Построим источник Σ, вершинами которого служат состояния блока A, принадлежащие F. Если два состояния α и β этого блока могут быть наложены друг на друга так, как показано на рис.117, то в Σ от α к β ведет ребро, отметкой которого служит состояние столбца s (см. рис.117).

рис.117

Очевидно, что любое состояние из F может быть продолжено с сохранением $\mathcal{A}$ на горизонтальную полосу, проходящую через A, в том и только том случае, когда для любой вершины v источника Σ выполняется $id(v)>0$, $od(v)>0$. Чтобы проверить возможность продолжения состояния горизонтальной полуполосы высоты ℓ_2 на горизонтальную полуполосу высоты ℓ_2+1, рассмотрим источник Σ'. Вершинами этого источника являются удовлетворяющие $\mathcal{A}$ состояния прямоугольника P высоты ℓ_2+1 и ширины ℓ_1; ребра проводятся так же, как при определении Σ, но отметкой ребра служит состояние не всего столбца s, а лишь ℓ_2 нижних его ячеек. Нам удобно будет считать, что блок A расположен внутри P так, как показано на рис.118.

рис.118

Пусть $\alpha\in F$ и a – множество состояний P, удовлетворяющих $\mathcal{A}$ и таких, что A находится в состоянии α. Тогда множество слов, порождаемых источником Σ' в начальных состояниях из a, определяет состояния начал горизонтальных полуполос, левый конец которых имеет состояние α, допускающие расширение на примыкающую сверху к этим полуполосам линию ячеек. Поэтому указанное расширение состояния всей полуполосы, начинающегося с α, возможно тогда и только тогда, когда множество слов, порождаемых Σ' в a,

совпадает со множеством слов, порождаемых Σ в $\{\alpha\}$. Последнее условие допускает алгоритмическую проверку, что и доказывает утверждение.

Рассмотрим множество M всех состояний $ОС\,\sigma$ и образуем множества $\Phi^i(M)$, $i=1,2,\ldots$. Очевидно, $M \supseteq \Phi(M) \supseteq \Phi^2(M) \supseteq \ldots$. Если включения в этой последовательности строгие, то при переходах состояния σ претерпевают некоторые монотонные изменения (возникают локальные ограничения и т.д.). Представляют интерес состояния из $\Pi_\sigma = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi^i(M)$, которые можно рассматривать как окончательный результат этих изменений. Класс Π_σ будем называть классом предельных состояний $ОС_\sigma$.

Назовем расширенным поведением $ОС\,\sigma$ функцию $f(t)$, сопоставляющую каждому целому t состояние σ, для которой выполняется $f(t+1)=\Phi(f(t))$. Тогда, очевидно, класс Π_σ состоит из всех состояний, появляющихся в расширенных поведениях σ. В графе переходов $G(\sigma)$ предельным состояниям соответствуют вершины, к которым подходят бесконечные цепочки, а также вершины, расположенные на циклах.

Опишем в качестве примера класс предельных состояний двумерной $ОС\,\sigma$ с функцией переходов $\varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}) = x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1}$ $(x_i \in E_2)$ и прямоугольным шаблоном соседства $V_{\bar{m}}$. Если $f(t)$ и $g(t)$ – два расширенных поведения $ОС\,\sigma$, то функция $f(t) \vee g(t)$, очевидно, тоже является расширенным поведением. Поэтому для любых предельных состояний α и β состояние $\alpha \vee \beta$ тоже является предельным. Рассмотрим произвольную ячейку $x=(x_1, x_2)$ и проведем через нее вертикальную и горизонтальную прямые, разбивающие плоскость на четыре части $A_{x1}, A_{x2}, A_{x3}, A_{x4}$ (пересекающиеся по разделяющим их прямым). Обозначим состояние, у которого все ячейки из A_{xi} (и только они) принимают состояние 1, через S_{xi}. Нетрудно проверить, что каждое состояние S_{xi} переходит в некоторое S_{yi}, где $y_s = x_s \pm m_s$. Поэтому поведение, в котором появляется S_{xi}, продолжается неограниченно в обе стороны, и S_{xi} – предельное состояние $ОС\,\sigma$. Покажем, что любое предельное состояние σ является дизъюнкцией некоторого множества состояний S_{xi}.

Предположим, что α – предельное состояние, входящее в расширенное поведение $f(t)$, например, $\alpha = f(0)$. Если α не представимо в виде дизъюнкции состояний S_{xi}, то найдется ячейка y в состоянии 1 такая, что в каждой из областей A_{yi} имеются ячейки в нулевом состоянии. Заметим, что если в момент t в нулевом состоянии находится некоторая ячейка z, то в момент $t-p$ в нулевом состоянии должны были находиться все ячейки из прямоугольника с центром в z и сторонами $2pm_1+1$, $2pm_2+1$. Выберем в каждом A_{yi} ячейку в нулевом состоянии и обозначим ее y_i^*, затем подберем ℓ так, чтобы все y_i^* располагались внутри квадрата K с центром в y и стороной $2\ell+1$. В соответствии со сделанным замечанием для подходящего p все ячейки квадрата K будут находиться в момент $t=-p$ в состоянии 0. Множество ячеек, находящихся в момент $t=0$ в состоянии 1 есть объединение прямоугольников со сторонами $2pm_1+1$, $2pm_2+1$ и центрами, расположенными в ячейках, принимающих состояние 1 в момент $t=-p$. Следовательно, ячейка y должна принадлежать такому прямоугольнику, причем центр его должен быть расположен вне K. Вместе с тем, как нетрудно проверить, пересечение любого такого прямоугольника с K содержит целиком пересечение с K некоторого A_{yi}, что противоречит существованию в любом $A_{yi} \cap K$ ячеек, находящихся в нулевом состоянии. Таким образом, ячеек у указанного вида не существует и α представимо в виде дизъюнкции S_{xi}, что и требовалось установить. Легко заметить, что найденный класс предельных состояний не задается локальным ограничением. Для описания его введем еще

сами тип ограничений. Пусть состояния ячеек $OC\ \sigma$ изображаются парами и $\mathcal{A}$ – локальное ограничение на состояния σ. Рассмотрим класс состояний решетки, определяющихся первыми компонентами состояний ячеек в состояниях из $S(\mathcal{A})$. Этот класс будем называть классом состояний, удовлетворяющих проективному ограничению $\mathcal{A}$. Нетрудно проверить, что описанный в примере класс предельных состояний задается посредством некоторого проективного ограничения.

Теорема 1.7 [37] Для любых $K \geq 2$ и $n \geq 2$ существует проективное ограничение на состояния K -мерной решетки с n состояниями ячейки, определяющее класс состояний этой решетки с алгоритмически неразрешимой проблемой распознавания замкнутости.

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим случай $K = 2$. Пусть сначала $n = 4$. Рассмотрим машину Тьюринга T с состояниями головки $S = \{s_0, \ , s_q\}$ и символами на ленте $L = \{l_0, \ , l_p\}$ (l_0 – пустой символ). Предположим, что проблема остановки T на конфигурациях вида $s_0 l_1 \ l_1 l_0 l_0$. алгоритмически неразрешима. Рассмотрим состояния ячеек двумерной решетки вида (x, y, z), где $x \in E_4$, $y \in E_5$, $z \in L \cup S$. Зададим условиями 1-9 на состояниях решетки такого вида локальное ограничение $\mathcal{A}$, блок которого включает блок, изображенный на рис. 119. Компоненты состояний ячеек последнего обозначаем $A_i, B_i, \ldots$.

рис. 119

1. Если $A_1 = 1$, то $A_2 = 1$, $D_2 = 0$, $B_2 = 1$.
2. Если $A_2 = 0$, то $D_2 = 0$.
3. Если $A_2 = 1$, то $B_2 \in \{1, 2\}$.
4. Если $A_1 = 2$, то $A_2 = 1$, $B_2 = 2$.
5. Если $A_2 = 2$, то $B_2 = 2$.
6. Если $A_2 \in \{0, 1, 2\}$, то $E_2 = 3$ и $C_2 = 4$.
7. Если $A_2 = 3$, то $E_2 = 3$; если $A_2 = 4$, то $C_2 = 4$.

Если у некоторой ячейки α первая компонента состояния равна 1, то из условий 1-7 вытекает, что существует не более одной ячейки β с первой компонентой, равной 2, причем в этом случае вторые компоненты состояний ячеек решетки выглядят так, как показано на рис. 120.

8. При наличии ситуации, изображенной на рис. 120 третьи компоненты состояний ячеек выглядят так, как показано на рис. 121, где K_i – последовательные конфигурации машины T.

9. Если $A_3 = s_q$ – заключительное состояние, то $A_1 = 3$.

Рассмотрим теперь проективное ограничение, определяемое первыми компонентами $\mathcal{A}$. Как нетрудно заметить, каждое состояние решетки, удовлетворяющее этому ограничению, обладает следующими свойствами.

1. Не более чем одна ячейка имеет состояние 1.
2. Состояния вида, как на рис. 122, удовлетворяют ограничению тогда и только тогда, когда T не останавливается на конфигурации $s_0 l_1 \ldots l_1 l_0 l_0$.

Рис. 120

рис 121

рис 122

Обозначим K класс всех удовлетворяющих описанному ограничению состояний решетки. Определим класс $ОС\,\sigma_i$ из $S(2,4,\bar{m}_i)$, где $\bar{m}_i$ $1,i)$. При задания функции переходов φ_i обозначим состояния в данный момент ячейки α и расположенной на i ячеек ниже нее ячейки β через A и B соответственно. Состояние в следующий момент ячейки α обозначим A'. Положим.

1. если $A=1$, то $A'=1$;
2. если $A\neq 1$ и $B=1$, то $A'=2$;
3. в остальных случаях $A'=0$.

Всякое состояние из K, не имеющее ячеек в состоянии 1, $ОС\,\sigma_i$ переводит в нулевое, а состояние, обладающее такой ячейкой, переводит в состояние, как на рис. 122. Распознавание замкнутости K в σ_i сводится, таким образом, к распознаванию принадлежности состояния, изображенного на рис. 122, классу K и является алгоритмически неразрешимым.

Рассмотрим теперь произвольное $n\geq 2$. Закодируем элемент $j\in E_r$ состоянием прямоугольника, как показано на рис. 123. Нетрудно проверить, что состояния решетки над E_n, соответствующие при таком кодировании состояниям решетки над E_4, определяются некоторым локальным ограничением. С его помощью легко строится проективное ограничение, определяющее состояния решетки над E_n, соответствующие состояниям из K. Воспользуемся кодированием (см. рис. 123) для получения $ОС\,\sigma_i'\in S(2,n,\bar{m})$, в которых σ_i представимы без замедления. Класс состояний, соответствующих состояниям из K, будет замкнут в σ_i тогда и только тогда, когда K замкнут в σ_i. Так как проблема распознавания замкнутости K в σ_i алгоритмически неразрешима, утверждение полностью доказано.

рис.123

В заключение рассмотрим еще одну задачу распознавания инвариантности нелокальных характеристик состояний $ОС$. Пусть $+$ – групповая операция на множестве M, включающем множество состояний ячейки $ОС\,\sigma$ (состояние покоя соответствует нулю группы). Задача заключается в проверке сохранения при переходах суммы состояний ячеек в конфигурациях σ. Имеет место

Теорема 1.8 [37] Существует алгоритм, позволяющий по произвольным двумерной $ОС\,\sigma$ и вычислимой групповой операции $+$ на множестве, включающем в себя множество состояний ячейки σ, проверять, сохраняется ли при переходах сумма состояний ячеек в конфигурациях σ.

Доказательство. Пусть $\sigma\in S(2,n,\bar{m})$ и $+$ – групповая операция на множестве $M\supseteq E_n$. Рассмотрим прямоугольник P со сторонами $2m_1+1$, $2m_2+1$ и разобьем его на $2m_1+1$ вертикальных столбцов. Рассмотрим состояние f $ОС\,\sigma$, у которого все ячейки вне P – в нулевом состоянии, а i-й столбец P имеет состояние $\bar{x}_i=(x_{i1},\dots x_{i,2m_2+1})$. Пусть $\bar{x}_i^{\ell}=(x_{i,\ell+1},\ \ x_{i,2m_2+1},0,\ \ 0)$ при $0\leq\ell\leq 2m_2$ и $\bar{x}_i^{\ell}=(0,\ \ ,0,x_{i1},\ \ x_{i\ell})$ при $-2m_2\leq\ell<0$. Обозначим $\varphi^*(\bar{x}_1,\ \ x_{2m_1+1})$ состояние, в которое переходит центральная ячейка P. Если в σ сумма состояний ячейки сохраняется при переходах, то для f получим:

$$\sum_{\ell}\varphi^*(0,\ \ ,\bar{x}_1^{\ell})+\sum_{\ell}\varphi^*(0,\dots,0,\bar{x}_1^{\ell},\bar{x}_2^{\ell})+\dots+\sum_{\ell}\varphi^*(\bar{x}_1^{\ell},\dots,\bar{x}_{2m_1+1}^{\ell})+$$
$$+\ \ +\sum_{\ell}\varphi^*(\bar{x}_{2m_1+1}^{\ell},0,\ \ ,0)=\sum_{i=1}^{2m_1+1}\sum_{j=1}^{2m_2+1}x_{ij}$$

или
$$\varphi^*(\bar{x}_1,\ \ _{2m_1+1})\ \sum_{i=1}^{2m_1+1}\sum_{j=1}^{2m_2+1}x_{ij}-\sum_{\ell}\varphi^*(0,\ \ 0,\bar{x}_1^{\ell})-$$
$$-\sum_{\ell\neq 0}\varphi^*(\bar{x}_1^{\ell},\dots\bar{x}_{2m_1+1}^{\ell})-\dots-\sum_{\ell}\varphi^*(\bar{x}_{2m_1+1}^{\ell},0,\ \ \ \ )\qquad(4)$$

Воспользовавшись этой формулой для набора $(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}, 0)$ и подставив найденное выражение для $\varphi^*(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}, 0)$ в $\varphi^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1})$, получим:

$$\varphi^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}) = \sum_{j=1}^{2m_1+1} x_{1j} + \sum_{\ell}(\varphi^*(0, \ldots, 0, \bar{x}_2^{\ell}) - \varphi^*(0, \ldots, 0, \bar{x}_1^{\ell})) + \sum_{\ell}(\varphi^*(0, \bar{x}_2^{\ell}, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^{\ell}) - \varphi^*(0, \bar{x}_1^{\ell}, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^{\ell})) - \sum_{\ell \neq 0} \varphi^*(\bar{x}_1^{\ell}, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^{\ell}) \quad (5)$$

Воспользуемся теперь формулой для набора $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{2m_1+1}) = (\bar{x}_1^1, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^1)$ и подставим найденное выражение в $\varphi^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1})$; получим:

$$\varphi^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}) = x_{11} + \sum_{\ell}(\varphi^*(0, \ldots, 0, \bar{x}_2^{\ell}) - \varphi^*(0, 0, \ldots, 0, \bar{x}_1^{\ell})) + \ldots + \sum_{\ell}(\varphi^*(0, \bar{x}_2^{\ell}, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^{\ell}) - \varphi^*(0, \bar{x}_1^{\ell}, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^{\ell})) - \sum_{\ell}(\varphi^*(0, \ldots, 0, \bar{y}_2^{\ell}) - \varphi^*(0, \ldots, 0, \bar{y}_1^{\ell})) - \sum_{\ell}(\varphi^*(0, \bar{y}_2^{\ell}, \ldots, \bar{y}_{2m_1+1}^{\ell}) - \varphi^*(0, \bar{y}_1^{\ell}, \ldots, \bar{y}_{2m_1}^{\ell})) + \sum_{\ell \neq 0} \varphi^*(\bar{y}_1^{\ell}, \ldots, \bar{y}_{2m_1+1}^{\ell}) - \sum_{\substack{\ell \neq 0 \\ \ell \neq 1}} \varphi^*(\bar{x}_1^{\ell}, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^{\ell}). \quad (6)$$

При $\ell > 0$ имеет место $\bar{y}_i^{\ell} = \bar{x}_i^{\ell+1}$, так что последние два члена сводятся к $\sum_{\ell < 0}(\varphi^*(\bar{y}_1^{\ell}, \ldots, \bar{y}_{2m_1+1}^{\ell}) - \varphi^*(\bar{x}_1^{\ell}, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1}^{\ell}))$.

Пусть теперь φ^* – произвольная функция переходов, удовлетворяющая (6). Если рассматривать выражения вида $\varphi^*(A_1, \ldots, A_{2m_1+1})$, входящие в (6), как функции переходов некоторых $ОС$ с шаблонами (определяемыми ячейками из P, соответствующими переменными x_{ij}, входящим в $A_1, \ldots, A_{2m_1+1}$), то нетрудно убедиться, что в каждом из слагаемых вида $\varphi^*(A_1, \ldots, A_{2m_1+1}) - \varphi^*(B_1, \ldots, B_{2m_1+1})$ в эти $ОС$ совпадают с точностью до сдвига шаблона. Поэтому суммы $\sum_{\|x_{ij}\|} \varphi^*(A_1, \ldots, A_{2m_1+1})$, $\sum_{\|x_{ij}\|} \varphi^*(B_1, \ldots, B_{2m_1+1})$, взятые по всем окрестностям ячеек решетки, совпадут, и при суммировании по всем этим окрестностям величин $\varphi^*(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{2m_1+1})$ останется лишь сумма всех x_{11}, т.е. сумма состояний всех ячеек решетки. Таким образом, условие (6) необходимо и достаточно для сохранения сумм состояний ячеек. Очевидным образом оно допускает алгоритмическую проверку. Теорема доказана.

Нетрудно показать, что в одномерном случае условие сохранения суммы состояний ячеек имеет вид

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + \varphi(0, \ldots, 0, x_2) - \varphi(0, \ldots, 0, x_1) + \varphi(0, \ldots, 0, x_2, x_3) - \varphi(0, \ldots, 0, x_1, x_2) + \ldots + \varphi(0, x_2, \ldots, x_m) - \varphi(0, x_1, \ldots, x_{m-1}). \quad (7)$$

Для получения произвольной $ОС$, обладающей этим свойством, достаточно взять любые значения φ на наборах вида $(0, x_2, \ldots, x_m)$, при которых найденные по формуле (7) значения $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ принадлежат множеству E_n состояний ячейки. В частности, если $M = E_n$, то значения φ на наборах $(0, x_2, \ldots, x_m)$ определяются произвольно. При этом число различных $ОС$ будет равно $n^{n^{m-1}}$.

§ 4. Рост конфигураций в $ОС$

Рассмотрим ряд задач, связанных с ростом конфигураций. Пусть K – конфигурация $ОС$ б с основной функцией переходов Φ. Функцию $N_K(t) = \max_{0 \le i \le t-1} |\Phi^i(K)|$ ($|X|$ – число ненулевых ячеек конфигурации X). Если для некоторого t $\Phi^t(K)$ есть нулевая конфигурация, то наименьшее из таких t будем называть функцией роста конфигурации K. Использовем временем существования конфигурации K и обозначаем $T(K)$. Используя непосредственное вложение машин Тьюринга в $ОС$, нетрудно установить, что не существует алгоритма, распознающего неограниченный рост конфигураций в $ОС$ и конечность их времени существования. Поэтому для распознавания этих свойств целесообразно бывает ограничивать класс рассматриваемых поведений, предполагая, что они уже обладают некоторыми априорными свойствами. Проиллюстрируем такой подход на примере задачи распознавания конечности времени существования конфигураций. Априорные ограничения будут заключаться в предполо-

жения о связности конфигурации в каждом такте и в ограничении на скорость е роста. При этом будет найдена оценка критической величины ограничения на рост, при которой проблема распознавания становится алгоритмически разреши мой. Для точной формулировки результата введем ряд определений. Конфигура- цию K назовем связной, если для любых двух ее ненулевых ячеек α и β найдется последовательность $\alpha=(x_{11},\ \ x_{1k}),(x_{21},\ \ ,x_{2k}),\ldots,(x_{r1},\ \ ,x_{rk})=\beta$ ненулевых ячеек K, такая, что $|x_{ij}-x_{i+1,j}|\le 1$, $i=1,\ \ ,r-1;\ j=1,\ \ ,k$. Если для любого t $\Phi^t(K)$ связна, то назовем K вполне связной. Пусть S обозначает класс $S(2,2,(2,2))$.

Теорема 1.9 [41] Существуют константы α и β, $\alpha<\beta$, такие, что для любой $\iota\ C$ из S в классе всех вполне связных конфигураций с $N_K(t)\le\alpha\log_2 t$ проблема распознавания конечности времени существо вания K алгоритмически разрешима, но для некоторой ιC из S в классе вполне связных конфигураций с $N_K(t)\le\beta\log_2 t$ она уже неразре - ма. В качестве таких α и β годятся, например, $\alpha=\frac{1}{4}$; $\beta=4$.

Доказательство. Обозначим $\tau(n)$ число двоичных связных двумерных конфи гураций, имеющих не более n ненулевых ячеек /считаем, что конфигурации, п лучающиеся одна из другой сдвигом, не различаются/. Оценим величину $\tau(n)$ сверху. Назовем началом произвольной ненулевой конфигурации K самую нижню ненулевую ячейку K, расположенную в крайней справа полосе, содержащей не нулевые ячейки K. Тогда $\tau(n)$, как нетрудно заметить, равно числу всех связных конфигураций K, таких, что $|K|\le n$ и началом K служит фиксирова ная ячейка α^*.

Пусть K - конфигурация такого вида. Разобьем ее на слои. Пусть 0-й слой состоит из ячейки α^*. Пусть уже определены $0,1,\ \ ,m-1$-й слои. То m-й слой K^m состоит из всех ненулевых ячеек K, входящих в окрестнос ти ячеек $(m-1)$-го слоя и не входящих в $0,1,\ \ ,m-1$-й слои. Занумеру ем ячейки в K^m. Первой ячейкой будем считать начало K^m; если уже ука заны $1,2,\ \ i$-я ячейки, то удалим их из K^m; если полученное множеств ячеек непусто, то его начало есть $(i+1)$-я ячейка K^m. Пусть ячейка $\alpha\in K^m$ имеет номер $N(\alpha)$. Сопоставим ей двоичное число S_α. Рас смотрим множество B_α, состоящее из всех соседей α, не входящих в окр: окрестности ячеек $0,1,\ \ ,m-1$-го слоев и ячеек K^m с номерами, меньшими N. Если это множество пусто, то S_α не определено. Иначе просматриваем во- семь соседей ячейки α в порядке, указанном на рис. 124а,

а) б) рис.124 в)

и выписываем последовательность $q_1\ldots q_r=S_\alpha$ состояний ячеек множества B_α (ячейки о.с. будем изображать не узлами прямоугольной решетки, а квадратами на которые она разбивает плоскость). Если $m=0$, то, очевидно, $r\le 4$. Пусть $m\ge 1$. Тогда найдется ячейка $\beta\in K^{m-1}$, имеющая с α либо об щую вершину (рис. 124б), либо общую сторону (рис. 124в). В обоих слу- чаях B_α входит в заштрихованную на рисунке область (ибо ячейки B_α не входят в окрестность β), так что $r\le 5$. Сопоставим K кодирующую последовательность пятиразрядных двоичных чисел: $s(K)=(s^1,\ \ ,s^n)$. За нумеруем для этого ненулевые ячейки K. Положим $N(\alpha^*)=1$; если $\alpha\in K$ и $N(\alpha)=i<n$, то либо существует $\beta\in K^m$ такая, чт $N(\beta)=N(\alpha)+1$, либо α - последняя ячейка m-го слоя и тогда сущ- ствует $\beta\in K^{m+1}$, $N(\beta)=1$. Полагаем $N(\beta)=i+1$. Если

$M(\alpha)=i$ и S_α определено, то S^i получено из S_α добавлением $5-r$ нулей: $S^i = \underbrace{0\ldots0}_{5-r} S_\alpha$, иначе $S^i = 00000$. Очевидно, S^1 однозначно определяет K^0 и K^1. Если по $s(K)$ уже восстановлены $K^0, K^1, \ldots, K^m$, $K^m = \{\alpha_0, \ldots \alpha_j\}$, $M(\alpha_j) < n$, то по ним восстанавливаются множества $B_{\alpha_0}, \ldots, B_{\alpha_j}$, а $S^{M(\alpha_i)}$ указывают состояния ячеек этих множеств. Так как $B_{\alpha_0} \cup \ldots \cup B_{\alpha_j} \supset K^{m+1}$, то тем самым восстанавливается K^{m+1}. Таким образом, $s(K)$ однозначно определяет K.

Заметим, что при $\alpha \neq \beta$ имеет место $B_\alpha \cap B_\beta = \varnothing$, поэтому общее число единиц во всех $S^1, \ldots, S^n$ не превосходит n. Число всех последовательностей $(S^1, \ldots, S^n)$ пятиразрядных двоичных чисел, обладающих этим свойством, равно $1 + C_{5n}^1 + \ldots + C_{5n}^n \geq \tau(n)$ (8). Воспользовавшись формулой Стирлинга, отсюда нетрудно получить оценку $\log_2 T(n) \leq \log_2 \tau(n) \leq cn$, где например, $c = 3{,}7$. Пусть теперь σ – ОС из S и $\mathfrak{A}$ – класс всех вполне связных конфигураций σ с функцией роста, асимптотически не превосходящей $\frac{1}{4}\log_2 t$. Если $K \in \mathfrak{A}$, то существует такое t^*, что $N_K(t^*) < \frac{1}{3{,}7}\log_2 t$. Из (8) нетрудно получить, что $\tau(n) < 2^{3{,}9n}$ для достаточно больших n. Поэтому

$$\tau(N_K(t^*)) \leq \tau\left(\frac{\log_2 t^*}{3{,}7}\right) < t^*$$

Из полученного неравенства видно, что для подходящих $t_1, t_2 \leq t^*$ выполняется $\Phi^{t_1}(K) = \Phi^{t_2}(K)$ и K либо имеет конечное время существования, либо зацикливается. Таким образом, для распознавания конечности $T(K)$ при $K \in \mathfrak{A}$ достаточно проследить поведение K до тех пор, пока она либо не перейдет в нулевую конфигурацию, либо не зациклится.

Покажем, что существует ОС $\sigma \in S$, такая, что в классе вполне связных конфигураций с функцией роста, асимптотически не превосходящей $4\log_2 t$, проблема распознавания конечности времени существования алгоритмически неразрешима.

Для задания функционирования σ мы опишем поведение некоторых элементарных конфигураций; этого будет достаточно для восстановления таблицы переходов, непосредственная же ее запись является слишком громоздкой.

Горизонтальные и вертикальные цепочки возбужденных ячеек будем называть линиями; возбужденную ячейку, примыкающую к линии, назовем сигналом. За каждый такт сигнал перемещается вдоль линии на одну ячейку, направления указаны на рис. 125а.

рис.125

рис. 126

рис. 127.

рис 128

Перемещение сигнала в последовательные моменты $t=0,1,\ldots$ при прохождении поворота линии указано на рис. 125,б (аналогично для трех оставшихся поворотов того же типа). Нам понадобится также поворот линии, изображенный на рис. 125,в. Прохождение сигнала через пересечение двух линий указано на рис. 125,г (аналогично для движения справа и сверху вниз). При прохождении конфигураций a и $б$ рис. 126 сигнал раздваивается. В последнем случае перемещение сигнала вдоль горизонтальной линии слева направо указано на рис. 126,в. На рис. 126,г и 126,д, изображена структура, моделирующая триггер. Состоянием триггера служит состояние ячейки A. При прохождении сигнала по горизонтальной линии справа налево (рис. 126,г) в момент $t=2$ состояние ячейки A меняется на противоположное. Если A находится в состоянии 1, то сигнал, идущий снизу вверх, проходит триггер так, как это показано на рис. 126,д, иначе в момент $t=2$ сигнал исчезает. На рис. 127 изображены три вспомогательные ситуации.

Для стирания конфигураций служит конструкция, изображенная на рис. 128. В случае a предполагается, что $s \geq 3$ и возбужденные ячейки имеются только в области Q. В начальный момент все ячейки A возбуждены; в следующий момент они переходят в состояние покоя и возбуждаются все ячейки B (вне зависимости от их состояния в начальный момент). Для рассматриваемой ниже конфигурации Q оказывается, что при таком переходе состояния ячеек Q не меняются. В случае $б$ в начальный момент возбуждены ячейки A, а ячейки B находятся в состоянии покоя. В следующий момент ячейки A принимают состояние 0, а ячейки B возбуждаются. Наконец, условимся, что конфигурация, состоящая из одной ячейки, в следующий момент переходит в пустую конфигурацию.

Выберем q так, чтобы все возбужденные ячейки Q находились над диагональю, соединяющей ячейки C (см. рис. 128). Пусть также $s+q=3k+1$. Тогда время существования конфигурации на рис. 128,а равно $q+k+1$.

Основной элемент описываемой ниже конструкции – счетчик. В обычном состоянии он хранит двоичное число $\alpha_n \ldots \alpha_1$ (см. рис. 129), $\alpha_n \neq 0$ (так что число 0 изображается при $n=0$). При подаче сигнала по линии B число это увеличивается на единицу, при подаче сигнала по линии A –уменьшается на единицу. Каждый раз, когда число на счетчике из 0 переходит в 1 и наоборот, на линии C возникает сигнал. На рис. 130 /случаи a–$в$/ изображены процессы, происходящие при подаче сигнала вдоль линии B. Случай a соответствует нулю на счетчике. В случае $б$ сигнал перемещается вниз по диагонали вплоть до момента $t=j+1$, где α_j – первое равное нулю. Каждое α_i $i<j$, в момент $t=i+2$ переходит в 0, α_j при $t=j+2$ становится равным 1 и сигнал исчезает. Случай $в$ соответствует $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=1$. На рис. 2–е, изображено поведение счетчика при подаче сигнала по линии A. Случай $г$ соответствует единице на счетчике. В случай $д$ сигнал перемещается вниз по диагонали вплоть до момента $t=j+1$, где α_j – первое равное 1. Тогда α_i, $i<j$, при $t=i+2$ переходит в 1, α_j, при $t=j+2$ становится равным 0 и сигнал исчезает. Случай $е$ соответствует $\alpha_n=1$, $\alpha_1=\ldots=\alpha_{n-1}=0$.

рис 129

На этом описание элементарных конфигураций заканчивается; можно проверить, что описанное выше их поведение корректно определяет функцию переходов некоторой OC $б \in S$ (считаем, что если состояние окрестности ячейки не возникает ни в одном из описанных процессов, то состояние ячейки не изменяется).

рис.130

Пусть заданы натуральное p и функция ψ, сопоставляющая каждому набору $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$, $\alpha_i\in\{0,1\}$, вектор $(\beta_1,\dots,\beta_p)$, $\beta_i\in\{0,-1,1\}$, такой, что $\alpha_i=0\Rightarrow\beta_i\neq-1$. Построим вполне связную конфигурацию K' с p счетчиками такую, что если состояния $(\gamma_1,\ \ ,\gamma_p)$ счетчиков K'_t не все равны 0 и $\alpha_i=sg\,\gamma_i$, то для подходящего $t_1>t$ состояния счетчиков K'_{t_1} суть $(\gamma_1+\beta_1,\dots,\gamma_p+\beta_p)$, где $(\beta_1,\dots,\beta_p)=\psi(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$. Прежде всего рассмотрим конфигурацию на рис. 131, здесь P – пересечение линий, T – триггер в состоянии 1. По замкнутой линии циркулирует сигнал, в результате чего через равные промежутки времени Δt сигнал появляется на выходе A. При подаче сигнала по линии B триггер переходит в состояние 0 и сигнал на замкнутой линии пропадет.

Конфигурация K' имеет вид, указанный на рис. 132,а. Каждое Q_i есть блок вида рис. 131 (с одним и тем же Δt); T_{ij} – триггеры, C_i – счетчики. Блок D_{ij} изображен на рис. 132,б. Пусть i – двоичная запись $\alpha_1\dots\alpha_p$ $(\beta_1,\dots,\beta_p)=\psi(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$. Если $\beta_j=-1$, то A – пересечение линий, B – разветвление (см. рис.126,б). Если $\beta_j=0$, то A и B – пересечение линий. Если, наконец, $\beta_j=1$, то A – разветвление, а B – пересечение. Во всех случаях C является пересечением линий. У блоков D_{0j} все A, B, C суть пересечения. Блоки E изображены на рис. 127,а.

Пусть в момент $t=0$ на счетчиках находятся числа $(\gamma_1,\dots,\gamma_p)$, не все равные 0; $\alpha_j=sg\,\gamma_j$. Если $i=\nu_1\dots\nu_p$, то положим состояние T_{ij} равным α_j при $\nu_j=1$ и равным $1-\alpha_j$, в противном случае. Тогда сигнал, возникающий на выходе каждого из блоков Q_i, пройдет только через цепочку триггеров T_{i^*j}, где $i^*=\alpha_1,\dots,\alpha_p$. Проходя далее цепочку блоков D_{i^*j}, этот сигнал попадет на ряд входных линий счетчиков, что приведет как нетрудно убедиться, к появлению на счетчике C_j числа $\gamma_j'=\gamma_j+\beta_j$, где $(\beta_1,\dots,\beta_p)=\psi(\alpha_1,\ \ ,\alpha_p)$. Если $sg\,\gamma_j'\neq sg\,\gamma_j$, то на выходе счетчика C_j

появляется сигнал, который меняет состояния всех триггеров T_{ij} на противоположные, и указанное выше соответствие состояний триггеров состояниями счетчиков сохраняется. Промежуток времени Δt, характеризующий блоки G_i, выбирается так, чтобы к моменту появления на их выходах следующей группы сигналов сигналы на прочих линиях уже отсутствовали (изменения счетчиков могут еще продолжаться).

рис.131

Если при $t=0$ на всех счетчиках находились нули, то сигнал, пройдя цепочки T_{0j} и ∂_{0j} попадает на входы блоков G_i и перемещается далее к выходу L. Блоки G_i при этом прекращают пускать сигналы, и через определенное время конфигурация K' переходит в K^*, у которой сигналы на линиях отсутствуют и счетчики обнулены.

Нетрудно проверить, что конфигурация K' является вполне связной. Чтобы получить вполне связную конфигурацию $K \supset K'$, которая переходит в пустую конфигурацию через некоторое время после того, как на линии L возникает сигнал, достаточно воспользоваться конструкцией на рис. 133. Длина линии L выбирается так, чтобы K' успела перейти в K^* к тому времени, когда сигнал дойдет до левого верхнего угла K. Дальнейшее поведение K видно из рис. 127, в и рис. 128, при этом параметр q выбирается в соответствии с замечаниями к рис. 128.

Конфигурацию K будем обозначать $K(p,\psi)$. Покажем, что, каковы бы ни были p и ψ, существует функция ψ^* такая, что $K(p+7,\psi^*)$ имеет конечное время существования тогда и только тогда, когда время существования $K(p,\psi)$ конечно, причем для функции роста $K(p+7,\psi^*)$ выполнено $N_K(t) \le 4\log_2 t$.

Определим ψ^* следующим образом:

$$\psi^*(1,0,0,1,0,1,0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(0,0,0,-1,0,1,0,\beta_1,\dots,\beta_p),$$

где $(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\neq 0$ и $(\beta_1,\dots,\beta_p)=\psi(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$,

$$\psi^*(x_1,x_2,x_3,x_4,1,1,0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(0,0,0,0,+1,-1,0,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(x_1,x_2,x_3,x_4,1,0,0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(0,0,0,0,-1,+1,+1,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(x_1,x_2,x_3,x_4,1,1,1,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(0,0,0,0,-1,+1,0,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(x_1,x_2,x_3,x_4,0,1,1,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(0,0,0,0,0,0,-1,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(1,x,0,0,0,1,0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(-1,+1,0,0,+1,-1,0,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(0,1,0,0,0,1,0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(0,0,0,+1,+1,-1,0,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(x,1,0,1,0,1,0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(+1,-1,+1,0,+1,-1,0,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(1,x,1,1,0,1,0,\alpha_1,\dots,\alpha_p)=(+1,0,-1,0,+1,-1,0,0,\dots,0),$$
$$\psi^*(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,0,0,0,\dots,0)=(y_1,\dots,y_7,0,\dots,0),$$

где не все x_i равны 0, причем $x_i=0 \Rightarrow y_i=0$ и $x_i=1 \Rightarrow y_i=-1$.

рис.132

Считаем, что в начальный момент на счетчиках C_{7+i} конфигурации $K(p+7, \psi^*)$ находится то же число, которое в начальный момент имеется на счетчике C_i конфигурации $K(p, \psi)$. На счетчиках C_1, C_4, C_6 находятся единицы, на счетчиках C_2, C_3, C_5, C_7 – нули. Выделим в поведении конфигурации $K(p+7, \psi^*)$ последовательность тактов; i-й такт начинается с появления i-й группы сигналов, $i \geq 0$, на выходах Q_j. Учитывая то, что к началу i-го такта в счетчиках еще могут продолжаться изменения, будем подразумевать под числом на счетчике в i-м такте то число, которое возникло бы на нем по окончании этих изменений. Выделим подпоследовательность тактов $i_0 = 0, i_1, i_2, \ldots$, в которые происходит изменение счетчиков $C_8, \ldots, C_{p+7}$. Можно показать, что $i_{k+1} = i_k + (2k+5)(3 \cdot 2^k + 1) + 1$. Из определения ψ^* видно, что это изменение осуществляется при помощи функции ψ так, что в i_k-м такте число на счетчике C_{7+i} равно числу на счетчике C_i конфигурации $K(p, \psi)$ в k-м такте. Воспользовавшись последним соотношением в определении ψ^*, отсюда легко получить, что время существования $K(p+7, \psi^*)$ конечно тогда и только тогда, когда конечно время существования $K(p, \psi)$.

Оценим функцию роста $N_K(t)$ конфигурации $K(p+7, \psi^*)$. В промежутке между 0-м и i_k-м тактами числа на счетчиках C_1 и C_2 не превосходят 2^k, на счетчиках C_3, C_4, C_7 – единицы, на счетчиках C_5 и C_6 – величины $k+1$. Так как счетчики $C_8, \ldots, C_{p+7}$ менялись только в такты $i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}$, то числа на каждом из них не превосходили $A + k$, где A – максимум начальных значений счетчиков $C_8, \ldots, C_{p+7}$. Из этих соображений вытекает оценка $N_K(t_k) \leq 4k$, где t_k – начальный момент i_k-го такта. Для произвольного t, если $t_k \leq t < t_{k+1}$, имеем $N_K(t) \leq N_K(t_{k+1}) \leq 4(k+1) \leq 4k$.

рис. 133

Нетрудно показать, что существует $\lambda > 0$ такое, что $t_k > \lambda \cdot 2^k$. Следовательно, $t \geq t_k \Rightarrow t > \lambda \cdot 2^k$ и $k \leq \log_2 t$, откуда $N_K(t) \leq 4 \log_2 t$

При помощи конфигураций $K(p, \psi)$ нетрудно промоделировать поведение счетчиковых машин (см. например [42]); состояния управляющего устройства счетчиковой машины можно при этом кодировать, например, состояниями первых r счетчиков, на каждом из котором находится либо 0, либо 1 (2^r состояний). Поведение произвольной машины Тьюринга может быть промоделировано на подходящей счетчиковой машине, причем так, что при остановке машины Тьюринг. счетчиковая машина переводит в нулевое состояние счетчики и управляющее устройство. Поэтому для подходящих p и ψ проблема распознавания конечности времени существования конфигураций $K(p, \psi)$ (отличающихся друг от друга начальными состояниями счетчиков) алгоритмически неразрешима; это же верно, очевидно, и для конфигураций $K(p+7, \psi^*)$, функция роста которых не превосходит асимптотически $4 \log_2 t$, что и доказывает теорему. Покажем, что несмотря на алгоритмические трудности, возникающие при распознавании неограниченного роста конфигураций, почти всегда такой рост имеет место. Под неограниченном ростом конфигурации понимаем неограниченное увеличение ее длины (т.е. наибольшего из расстояний между ненулевыми ячейками).

Теорема 1.10 [37]. При $m=\max\limits_{1\le i\le k}(m_i)\to\infty$ равномерно по n и k в почти всех $\mathcal{U}$ из $S(k,n,\bar m)$ все ненулевые конфигурации неограниченно растут.

Доказательство. Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть ячейка слева левым концом конфигурации $\mathcal{U}$ и находится в состоянии $x_0\neq 0$ (рис. 134).

рис.134

Рассмотрим набор из $m-1$ ячеек, расположенных правее α, и состояния их обозначим $x_1,\dots,x_{m-1}$. Левый конец $\Phi(\mathcal{U})$ будет расположен левее α, если хотя бы одно из значений φ на наборах $(0,\dots,0,x_0)$, $(0,\dots,0,x_0,x_1),\dots,(0,\dots,0,x_0,\dots,x_{m-1})$ отлично от нуля. Если φ такова, что для любых $x_0\neq 0, x_1,\dots,x_{m-1}$ ее значение отлично от нуля на одном из таких наборов, то левый конец $\Phi^i(\mathcal{U})$ будет неограниченно перемещаться влево. Оценим число функций, обладающих указанным свойством. Для этого найдем число функций φ, для которых найдется набор $x_0,x_1,\dots,x_{m-1}$ такой, что $x_0\neq 0$ и

$$\varphi(0,\dots,0,x_0)=\varphi(0,\dots,0,x_0,x_1)=\dots=\varphi(0,\dots,0,x_0,x_1,\dots,x_{m-1})=0 \quad (1)$$

В определении таких φ участвуют лишь наборы $(y_1,\dots,y_{2m-1})$, начинающиеся с $(m+1)$-го нуля. Поэтому достаточно оценить число $N(m)$ способов задания φ на всех этих наборах.

Рассмотрим дерево T, из корня которого выходит $n-1$ ребер, помеченных элементами $1,\dots,n-1$, а из прочих вершин n ребер с отметками $0,1,\dots,n-1$. Очевидно, $N(m)$ равно числу способов приписывания отличным от корня вершинам дерева T элементов $0,1,\dots,n-1$, для которых найдется путь от корня до концевой вершины, проходящий через вершины с нулевыми отметками. Обозначим ветку дерева T, начинающуюся из вершины v, через T_v. Отметку вершин T_v, для которой существует путь от v до концевой вершины, проходящий по вершинам с отметками 0, назовем 0-отметкой. Число 0-отметок T_v зависит, очевидно, только от яруса i, к которому относится v, и обозначается далее $N_i(m)$. Пусть v относится к $(i-1)$-му ярусу и от v ведут ребра к вершинам $v_1,\dots,v_{n'}$ i-го яруса ($n'=n$ при $i>1$ и $n'=n-1$ при $i=1$). Тогда каждая 0-отметка T_v получается, если отметкой v служит 0 и хотя бы одно из T_{v_j} имеет 0-отметку. Отсюда, как нетрудно проверить, получается $N_{i-1}(m)=n^{A_i-1}-(n^{B_i}-N_i(m))^{n'}$, где A_i – число вершин T_v, B_i – число вершин в каждом T_{v_j}. Имеем

$$B_i=\frac{n^{m-i+1}-1}{n-1},\quad A_i=\frac{n^{m-i+2}-1}{n-1} \text{ при } i>1;\quad A_1=n^m$$

Пусть $N_i(m)=\alpha_i n^{B_i}$ и $i>1$. Тогда

$$N_{i-1}(m)=n^{\frac{n^{m-i+2}-n}{n-1}}-n^{\frac{n^{m-i+2}-n}{n-1}}(1-\alpha_i)^n=n^{\frac{n^{m-i+2}-n}{n-1}}\left(1-(1-\alpha_i)^n\right).$$

Отсюда $\alpha_{i-1}=\frac{1}{n}\left(1-(1-\alpha_i)^n\right)$. Заметим, что $N_m(m)=1$ и $\alpha_m=\frac{1}{n}$. При $n=2$ выполняется $\alpha_{i-1}=\alpha_i-\frac{1}{2}\alpha_i^2$, и нетрудно проверить, что $\alpha_1\to 0$ при $m\to\infty$. Если же $n>2$, то обозначим $\alpha_i=\lambda_i/n$. Очевидно, $\lambda_i<1$ при $i<m$. Имеем:

$$\lambda_{i-1}=1-\left(1-\frac{\lambda_i}{n}\right)^n=1-e^{n\ln(1-\lambda_i/n)}.$$

Нетрудно проверить, что $n\ln(1-\lambda_i/n)\ge-(\lambda_i+2\lambda_i^2/9)$ (здесь используется $n\ge 3$). Поэтому

$$\lambda_i\le 1-e^{-(\lambda_i+2\lambda_i^2/9)}\le\left(\lambda_i+\frac{2\lambda_i^2}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(\lambda_i+\frac{2\lambda_i^2}{9}\right)\le\lambda_i+\frac{2\lambda_i^2}{9}-\frac{\lambda_i^2}{3}\le\lambda_i-\frac{\lambda_i^2}{9},$$

т.е. $\alpha_1=\lambda_1/n$ и $\lambda_1\to 0$ при $m\to\infty$. Выражая $N(m)=N_0(m)$ через $N_1(m)$, найдем $N(m)\le\alpha_1\cdot n^{n^m}$. Если $n=2$, то $\alpha_1\to 0$ при $n\to\infty$ и $N(m)=o(n^{n^m})=o(n^{n^{m-1}})$. Если же $n\ge 3$, то $\alpha_1=\frac{\lambda_1}{n}$,

$\Lambda(m) \le \lambda_1 \cdot n^{n^m-1}$, где $\lambda_1 \to 0$ при $m \to \infty$, и снова $V(m) = o(n^{n^m-1})$.
Отсюда видно, что доля функций φ, для которых существует набор $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ такой, что $x_0 \ne 0$ и выполнено (9), стремится к 0 при $m \to \infty$ равномерно по n, т.е. для почти всех $ОС$ из $S(1,n,m)$ для любой ненулевой конфигурации $\mathfrak{X}$ левый конец $\Phi^i(\mathfrak{X})$ неограниченно перемещается влево. Аналогичные оценки верны и для правого конца, откуда и получается утверждение теоремы в одномерном случае. Принцип сведения многомерного случая к одномерному проиллюстрируем для $k=2$. Пусть $\overline{m} = (m_1, m_2)$ и $m_2 \le m_1$. Рассмотрим нижнюю полосу $\mathfrak{T}_0$, содержащую ненулевые ячейки конфигурации K, и выделим под ней последовательность полос $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$, отстоящих друг от друга на m_2 ячеек. Если ξ_i есть состояние полосы $\mathfrak{T}_i$ в момент $t=i$, то $\{\xi_i\}$, очевидно, образует поведение одномерной $ОС$ и неограниченный рост K вытекает из неограниченного роста конфигураций в этой $ОС$. Теорема доказана.

Если увеличивается число состояний ячейки, а не размеры шаблона соседства, то имеет место следующее утверждение.

Теорема 111 [37] При $n \to \infty$ равномерно по $\overline{m}$ и k в почти всех $ОС$ из $S(k,n,\overline{m})$ почти все конфигурации неограниченно растут.

Доказательство. Как и выше, достаточно ограничиться одномерным случаем. Пусть φ – функция переходов $ОС$ σ. Рассмотрим подстановку $\sigma_1(x) = \varphi(0, \ldots, 0, x)$. Очевидно, $\sigma_1(0) = 0$. Пусть левый конец α конфигурации $\mathfrak{X}$ имеет состояние $x_0 \ne 0$ такое, что $\sigma_1^i(x_0) \ne 0$ для любого $i \ge 1$. Тогда для любого i левый конец конфигурации $\Phi^i(\mathfrak{X})$ находится в состоянии $\sigma_1^i(x_0)$ и расположен на im ячеек левее α, так что $\mathfrak{X}$ неограниченно растет влево. Аналогично, для правого конца вводится подстановка $\sigma_2(x) = \varphi(x, 0, 0, \ldots, 0)$. Чтобы доказать теорему, очевидно, достаточно будет показать теперь, что для почти всех подстановок σ на E_n таких, что $\sigma(0) = 0$, почти все элементы $x \in E_n$ не переводятся в 0 никакой степенью σ. Найдем число a_s подстановок σ указанного вида, для которых ровно s элементов переводятся в 0 степенями σ. Для задания такой подстановки, очевидно, достаточно выбрать s-элементное множество $M \subseteq E_n \setminus \{0\}$ и рассмотреть дерево с $s+1$ вершиной из $M \cup \{0\}$, которое определяло бы значения σ на элементах M. На элементах $\overline{M} = \Sigma_n \setminus (M \cup \{0\})$ подстановка σ принимает любые значения из $\overline{M}$. Так как число отмеченных деревьев с $s+1$ вершиной есть $(s+1)^{s-1}$, то

$$a_s = C_{n-1}^s (s+1)^{s-1} (n-s-1)^{n-s-1}.$$

Чтобы показать, что для почти всех σ, у которых $\sigma(0) = 0$, почти все элементы $x \in E_n$ не переводятся в 0 никакой степенью σ, достаточно теперь показать, что сумма $\frac{1}{n^{n-1}} \sum_{i=s}^{n-1} a_i = \sum_{i=s}^{n-1} A_i$ стремится к 0 при $s \to \infty$, $n \to \infty$ (здесь n^{n-1} – число всех подстановок на E_n, переводящих 0 в себя). Имеем:

$$A_i = \frac{a_i}{n^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \frac{(i+1)^{i+1}}{i!} \cdot \frac{(n-i-1)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}$$

При $i \to \infty$, $n \to \infty$, воспользовавшись формулой Стирлинга, получим:

$$A_i \sim \sqrt{\frac{n}{i^3}} \frac{(n-i-1)^{n-i-1} e^{-(n-i-1)}}{(n-i-1)!}$$

Обозначим $n-i-1 = q$. Тогда $A_i \sim \sqrt{\frac{n}{i^3}} \frac{q^q e^{-q}}{q!}$. Но $q! = q^q \cdot e^{-q} \sqrt{2\pi q}\, e^{\theta_q}$, где $|\theta_q| \le \frac{1}{12q}$. Так как $A_{n-1} \to 0$, то достаточно рассмотреть сумму $\sum_{i=q}^{n-2} A_i$; в этом случае $q \ge 1$, $|\theta_q| \le \frac{1}{12}$ и $A_i \sim \sqrt{\frac{n}{i^3}} \frac{e^{-\theta_q}}{\sqrt{2\pi q}} \le \sqrt{\frac{n}{2\pi q i^3}} e^{1/12} = c\sqrt{\frac{n}{q \cdot i^3}}$, где $\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}$.

Таким образом,

$$A_i \le c\sqrt{\frac{n}{i^3(n-i-1)}}, \quad i \to \infty, \quad \to \infty, \quad \le n-2)$$

Поэтому, чтобы $\sum_{i=1}^{n-2} A_i \to 0$ при $\to \infty$, $n \to \infty$, достаточно

$$\sum_{s}^{n-2} \sqrt{\frac{n}{x^2(n-x-1)}} \qquad (10)$$

кция $V = n x^{-1}$) ; значения ее при $x = s \geq 1$ и возрастает при $x = n-2$ убывает при $x \leq$ $\frac{2}{V}\, n-1$) . Поэтому для стремления суммы (10) стремятся к 0 если $n \to \infty$, $s \to \infty$, чтобы выполнялось $\int_{s}^{n-2} \sqrt{\frac{n}{x^2(n-x-1)}}\, dx$ при $n \to \infty$, $s \to \infty$, $s \leq n-2$ к 0 достаточ-

от интеграл равен $\frac{2\sqrt{n}}{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-s-1}{s}} - \sqrt{\frac{1}{n-2}}\right) = \frac{2n}{n-1}\,\frac{1}{\sqrt{s}}$

и стремится к 0 при $s \to \infty$, $n \to \infty$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.10 непосредственно вытекает, что при росте размеров шаблона соседства у почти всех OC σ единственным циклом в графе $G^*(\sigma)$ является цикл, состоящий из нулевого состояния.

Займемся построением OC , в которых каждая конфигурация (отличная от нулевой) неограниченно растет, причем по мере роста очертания ее приближаются к некоторой наперед заданной фигуре, например к кругу, ромбу и т.п. Чтобы точно определить такой рост, введем сначала расстояние между множествами A и B точек на плоскости. Положим $\rho(A,B) = \max\left(\max_{x \in A} \rho(x,B), \max_{y \in B} \rho(A,x)\right)$, где $\rho(x,B)$ и $\rho(A,y)$ - обычные расстояния от точки до множества. Пусть K - ненулевая конфигурация OC σ . Обозначим M_t множество ненулевых ячеек конфигурации $\Phi^t(K)$. Выберем, далее, в качестве начала координат ячейку α ; фиксируем константу $v > 0$ и образуем плоское множество G_t, состоящее из всех точек с координатами $(x/vt, y/vt)$, где (x,y) - координаты ячейки из M_t . Если для плоского множества G выполнено условие $\lim_{t \to \infty} \rho(G, G_t) = 0$, то скажем, что K G-растет из центра α со скоростью v .

Непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ назовем рекурсивно аппроксимируемой, если существует вычислимая функция $\Phi(x,n)$, принимающая рациональные значения и определенная для рациональных x и натуральных n такая, что для любого рационального $x \in [a,b]$ выполняется $\lim_{n \to \infty} \Phi(x,n) = f(x)$.

Рассмотрим область G вида, указанного на рис. 135 . Здесь a и b - вычислимые вещественные числа, $a < 0 < b$, а рекурсивно аппроксимируемые функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:

Рис.135

I. $f(x) > 0$, $g(x) < 0$ при $x \in (a,b)$;

2. $f(x)$ не убывает на $[a,0]$ и не возрастает на $[0,b]$, $g(x)$ не возрастает на $[a,0]$ и не убывает на $[0,b]$.

Области такого вида будем называть нормальными.

Теорема 1.12 [37]. Если G - нормальная область и $v > 0$ - вычислимое вещественное число, то существует OC σ^* , в которой каждая ненулевая конфигурация G - растет со скоростью v .

Докажем предварительно ряд лемм. Конфигурацию K двумерной OC σ назовем σ -связной, если для любых двух ее ячеек α и β в ненулевых состояниях найдется такая последовательность ненулевых ячеек $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n = \beta$, что каждые α_i и α_{i+1} можно одновременно накрыть шаблоном соседства σ . Если K_1 и K_2 - конфигурации σ , множества ненулевых ячеек которых не пересекаются, то можно образовать конфигурацию $K_1 \cup K_2$, состояние каждой ячейки которой равно максимуму соответствующих состояний в K_1 и K_2 . Аналогично определим объединение произвольного числа конфигураций.

Для произвольных OC $\sigma \in S(2, n, \bar{m})$ $(\bar{m} = (m_1, m_2))$ и двух различных ненулевых состояний $\varkappa$ и ω ее ячейки построим вспомогательную

$OC\ F(\sigma, \varkappa, \omega)\ S(2, n, \overline{m}^*)$, где $m^* = (2m_1, 2m_2)$. Для задания функции переходов этой OC рассмотрим произвольную ячейку α и выделим ее окрестность V_1, определяемую шаблоном $F(\sigma, \varkappa, \omega)$, а также окрестность V_2 V_1, определяемую шаблоном τ. Если состояния ячеек из V_1 отличны от ω, то переход определяем по состоянию V_2, используя функцию переходов $OC\,\sigma$. Этой же функцией пользуемся и в том случае, когда состояние α есть 0, а состояния ячеек из V_2 отличны от ω. Если состояние α отлично от 0 и ω, причем в V_1 есть ячейки в состоянии ω, то α переходит в состояние ω. На рис. 136,а

рис 136

указаны состояния V_1, при которых ячейка α переходит в нулевое состояние, на рис. 136,в – состояния V_1, при которых α переходит в состояние ω, а на рис. 136,б – состояние, при котором она переходит в $\varkappa$. Предполагается, что ячейки из A находятся в нулевых состояниях, в области B есть хотя бы одна ненулевая ячейка, а состояния ячеек из C произвольны. Считаем, что в остальных случаях состояние α при переходе не меняется.

Конфигурацию, у которой все ячейки, кроме одной, находятся в состоянии 0, а состояние этой одной ячейки есть x, обозначим $\mathfrak{N}_x$.

Лемма 1. Если в двумерной $OC\,\sigma$ при любом $x_0 \neq 0$ справедливо $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \neq 0$ и $\varkappa, \omega$ – различные ненулевые состояния ячейки σ, то $OC\,\sigma^* = F(\sigma, \varkappa, \omega)$ удовлетворяет условиям:

1) если в окрестности ячейки σ^* нет ячеек в состоянии ω, то переход происходит в соответствии с функцией переходов $OC\,\sigma$;

2) каждая σ-связная конфигурация K $OC\,\sigma^*$, обладающая ячейками в состоянии ω, через некоторое время переходит в $\mathfrak{N}_x$;

3) если конфигурация K $OC\,\sigma^*$ распадается на σ-связные компоненты $K_1, \ldots, K_s$, то $\Phi(K) = \bigcup_{i=1}^{s} \Phi(K_i)$.

Доказательство. Первое условие выполняется в силу построения $OC\ F(\sigma, \varkappa, \omega)$. Рассмотрим произвольную σ-связную конфигурацию K $OC\ \sigma^*$. Покажем, что конфигурация $\Phi(K)$, в которую она переходит, тоже σ-связная. Для этого рассмотрим сначала множество M ненулевых ячеек, общих у K и $\Phi(K)$. Если β и γ – ячейки из M, то рассмотрим цепочку $\beta = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n = \gamma$ в K, связывающую эти ячейки. Пусть ячейка β_i переходит в нулевое состояние. Это возможно, очевидно, только при совпадении β_i с ячейкой α (см. рис. 136,а). Тогда β_{i-1} и β_{i+1} расположены внутри области C либо совпадают с ячейкой ξ и, как нетрудно заметить, сохраняют при переходе ненулевое состояние. Поэтому, заменяя каждую переходящую в нулевое состояние ячейку β_i ячейкой ξ в соответствии с рис. 136,а, получим цепочку ячеек в $\Phi(K)$, соединяющую β и γ. Таким образом, множество M связно. Если ячейка, имевшая в K нулевое состояние, перешла в ненулевое состояние, то либо в ее V_2-окрестности не было ячеек в состоянии ω и тогда все ненулевые ячейки из этой окрестности входят в M, либо имел место переход в соответствии с рис. 136,в, из которого видно, что ячейка ξ входит в M. Таким образом, пересечение V_4-окрестности любой ненулевой ячейки $\Phi(K)$ с M непусто, откуда и вытекает

связность $\Phi(K)$.

Если d есть наименьшее число, для которого существует последовательность $\alpha, \ldots, \alpha_d = \beta$ ненулевых ячеек σ-связной конфигурации K, соединяющая две заданные ячейки α и β, то назовем d расстоянием между α и β. Пусть K – σ-связная конфигурация, у которой некоторые ячейки находятся в состоянии ω. Для произвольной ненулевой ячейки α обозначим $d(\alpha)$ наименьшее из расстояний ее до ячеек в состоянии ω. Пусть $d(\alpha) \geq 1$ и $\alpha = \alpha_0, \ldots, \alpha_{d(\alpha)} = \beta$ – последовательность, на которой достигается этот минимум. Очевидно, ячейки $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d(\alpha)-1}$ при переходе сохраняют ненулевое состояние, причем ячейка $\alpha_{d(\alpha)-1}$ переходит в состояние ω (так как β входит в ее V_1-окрестность). Поэтому при переходе $d(\alpha)$ уменьшается хотя бы на единицу. Заметим, что новые ячейки в состоянии, отличном от 0 и ω, могут появляться лишь в V_2-окрестности ненулевых ячеек K, так что все такие ячейки, возникшие за два такта, находятся в V_1-окрестности ненулевых ячеек K. Если максимум $d(\alpha)$ по всем ненулевым ячейкам α из K больше единицы, то за эти два такта он уменьшится хотя бы на 2, а новые ячейки могут увеличить его не более чем на единицу. Этот максимум, следовательно, все время уменьшается, пока не станет равным 0 либо 1; нетрудно проверить, что в последнем случае после одного перехода он тоже становится равным 0. Таким образом, через некоторое время K переходит в σ-связную конфигурацию, все ненулевые ячейки которой имеют состояние ω. Обозначим последнюю K_1. Пусть P – наименьший прямоугольник, содержащий все ненулевые ячейки K_1. Нетрудно проверить, что при переходах область вне P остается в состоянии 0. Выделим в K_1 верхний ряд ненулевых ячеек, и в нем – левую ячейку α. Из рис. 136 следует, что при переходах ячейки, расположенные выше α и в том же ряду, но левее, сохраняют нулевые состояния. Выделим окрестность V_1 ячейки α (см. рис. 137). Если K_1 состоит более чем из одной ячейки, то в V_1 должна найтись отличная от α ячейка в состоянии ω. Возможны следующие ситуации.

1. Ячейка β (см. рис. 137) находится в состоянии ω. Тогда α переходит в нулевое состояние.

Рис.137

2. Ячейка β находится в состоянии 0, причем в области B на рис. 137 имеются ячейки в состоянии ω. Тогда из рис. 136,δ и α получаем, что сначала β переходит в состояние ω, а затем α – в состояние 0.

3. Ячейка β и область B находятся в нулевом состоянии. В этом случае либо γ имеет состояние ω, и тогда α сразу переходит в нулевое состояние, либо γ находится в нулевом состоянии, и тогда α переходит в нулевое состояние после того, как γ переходит в состояние ω в соответствии с рис. 136,δ.

Во всех рассмотренных случаях не более чем через два такта α переходит в нулевое состояние и далее сохраняет его. Таким образом, область внутри P, в которой не могут возникать ненулевые ячейки, все время расширяется и в конце концов K_1 переходит в конфигурацию с единственной ненулевой ячейкой в состоянии ω. Последняя в соответствии с рис. 136,$в$ переходит в конфигурацию $\mathcal{K}_c$, что и требовалось во втором условии леммы.

Пусть теперь конфигурация K $OC\sigma^*$ распадается на σ-связные компоненты $K_1, \ldots, K_s$ (т.е. K_i – конфигурация, у которой ненулевые ячейки воспроизводят некоторую σ-связную компоненту множества ненулевых ячеек K). Рассмотрим произвольную ячейку α, имеющую ненулевое состояние в $\Phi(K)$. Если она имеет ненулевое состояние также и в K, то в ее V_1-окрестность

входят ненулевые ячейки только из одной и той же компоненты, например K_i. Поэтому переход α будет воспроизведен лишь компонентой K_i, а в остальных $\Phi(K_j)$ ее состояние будет нулевым. Если состояние α в K равно 0 и в ее V_2 -окрестности нет ячеек в состоянии ω, то в эту окрестность могут входить ненулевые ячейки лишь из одной компоненты, скажем K_i. Тогда, очевидно, состояние α в $\Phi(K_i)$ совпадает с ее состоянием в $\Phi(K)$, а состояние α в любой $\Phi(K_j)$ при $i \neq j$ равно 0. Если, наконец, состояние α в K есть 0, причем в ее V_2 - окрестности имеются ячейки в состоянии ω, то имеет место ситуация, показанная на рис. . Обозначив K_i компоненту, к которой относится ячейка ξ, найдем, что состояния α в $\Phi(K_i)$ и $\Phi(K)$ совпадают, а в прочих $\Phi(K_j)$ состояние α есть 0. Таким образом, третье условие леммы выполняется.

Лемма 2. Если в двумерной ОС σ для любого $x_0 \neq 0$ выполняется $\varphi(x_0, x_1, \ , x_{l-1}) \neq 0$, x и ω - различные ненулевые состояния ячейки σ и в поведении σ, начинающемся с $\mathfrak{M}_x$, не возникают состояния ω, то эти состояния с некоторого момента прекращают появляться в поведении любой конфигурации ОС $F(\sigma, x, \omega)$.

Пусть K - некоторая конфигурация ОС $\sigma^* = F(\sigma, x, \omega)$. Из условия 3 леммы и сохранения σ -связности конфигураций при переходах ОС σ^* вытекает, что число связных компонент при переходах не увеличивается. Поэтому с некоторого момента t число этих компонент остается неизменным, и дальнейшее поведение K распадается на независимые поведения компонент $K_1, \ , K_s$. При появлении в такой компоненте состояния ячейки ω она перейдет в конфигурацию $\mathfrak{M}_x$, после чего состояния ω в ее поведении возникать не будут. Это и доказывает лемму.

Лемма 3. Существует одномерная ОС σ, у которой для любой частоты p, представимой в виде конечной двоичной дроби, имеется конфигурация K_p, обладающая следующими свойствами:

1) множество ненулевых ячеек K_p образует отрезок и не изменяется при переходах;

2) выделенное состояние θ ячейки ОС σ появляется на левом конце отрезка с частотой p.

Доказательство. Пусть состояния ОС σ изображаются наборами (x, y, z, ω), где $x, y, z\ \omega \in E_2$, причем окрестность ячейки α имеет вид, указанный на рис. 138. Для задания функции переходов обозначим через $(x_1, y_1, z_1\ \omega_1)$ и $(x_2, y_2, z_2, \omega_2)$ соответственно состояния ячеек α и β, а через (x', y', z, ω) - состояние ячейки α после перехода. Положим:

1) $y' = y_1$ и $\omega' = \omega_1$;

2) если $\omega_1 = 1$, то $x' = x_1 + y_1 + z_1 \ (mod\ 2)$, иначе $x' = 0$;

3) если $x_2 + y_2 + z_2 > 1$, то $z' = 1$, иначе $z' = 0$.

В качестве состояния θ выберем $(0, 1, 1\ 0)$. Пусть теперь $0, p_1 \ldots p_l$ - двоичная запись числа p. Вид конфигурации K_p указан на рис. 139. Здесь q_i есть i -я цифра двоичной мантиссы числа ip и r_i - перенос в i -й разряд мантиссы при сложении этого числа с p. Индукцией по t нетрудно установить, что при переходах вид конфигурации, указанный на рис. 139, не меняется, причем q_i в момент t есть i-я цифра мантиссы числа $p(i+t)$, а r_i - перенос в i-й разряд при сложении этого числа с b.

α	β

рис 138

0	0	q_1	q_2	q_3	. . .	q_{l-1}	q_l	0	0	x
0	1	p_1	p_2	p_3	. . .	p_{l-1}	p_l	0	0	y
0	0	r_1	r_2	r_3	. . .	r_{l-1}	r_l	0	0	z
0	0	1	1	1	. . .	1	1	0	0	w

рис.139

в разряде z ячейки α (см. рис.139) единица появляется всякий раз, когда происходит перенос в целую часть при сложении pt с p, так что число таких появлений к моменту t равно $[pt]$, а их частота есть p. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.12. Искомую $OC\,\sigma^*$ получим применением операции F к вспомогательной $OC\,\sigma$, удовлетворяющей условиям леммы 1 и 2. Размеры m_1 и m_2 шаблона соседства $OC\,\sigma$ выберем позднее; состояния ячейки σ, отличные от ω, будем задавать наборами компонент. Введем, прежде всего, α-компоненту со значениями из $\{0, *, \leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$ и β-компоненту со значениями 0 и 1. Для выполнения условия $x_0 \neq 0 \Rightarrow \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \neq 0$ потребуем, чтобы ячейка в ненулевом состоянии всегда переходила в состояние с единичной β-компонентой. В качестве состояния $\varkappa$ выберем состояние, у которого α-компонента равна $*$, а прочие компоненты ненулевые. Рассмотрим класс A конфигураций, каждая компонента связности которых либо представляет собой изолированную ячейку в состоянии $\varkappa$ (рис.140,а), либо имеет вид, изображенный на рис.140,б (указаны значения α-компонент состояний ячеек). Можно показать, что класс A определяется некоторым локальным ограничением $\mathcal{A}$. Выберем m_1 и m_2 так, чтобы выполнение $\mathcal{A}$ можно было проверять по состояниям окрестностей ячеек $OC\,\sigma$, и потребуем, чтобы ячейка, в окрестности которой $\mathcal{A}$ нарушено, переходила в состояние ω.

Переходы $OC\,\sigma$ будем определять так, чтобы выполнялись условия:

1) каждая ненулевая σ-связная конфигурация, в поведении которой не возникают состояния ω, является G-растущей со скоростью v;

2) в поведении σ, начинающемся с конфигурации $\mathfrak{N}_\varkappa$, состояния ω не возникают.

Тогда, в силу леммы 2, каждая ненулевая конфигурация $OC\,\sigma^*$ переходит в конце концов в некоторую конфигурацию, в поведении которой не возникают даже состояния ω, так что она распадается на G-растущие связные компоненты.

рис.140

Число этих компонент больше одной, то при их росте нарушится ограничение, откуда и вытекает, что конфигурация состоит из одной компоненты связности и является G-растущей со скоростью v.

Чтобы удовлетворить условию 1, выберем произвольную σ-связную ненулевую конфигурацию K $OC\,\sigma$ и будем описывать ее поведение в предположении выполнения условия 2, доопределяя при этом переходы σ. После этого останется доопределить переходы так, чтобы выполнялось условие 2.

Заметим прежде всего, что так как в поведении K, начиная с некоторого момента, прекращают появляться состояния ω, она должна перейти в конфигурацию изображенную на рис.140. Введем γ-, δ- и ε-компоненты состояния ячейки $OC\,\sigma$. γ-компонента принимает значения $0, Л, П$ и 1; ненулевые значения ε- и δ-компонент выберем позднее. Рассмотрим подкласс A' класса A конфигураций $OC\,\sigma$, каждая связная компонента которых, отличная

от изолированных ячеек в состоянии $\varkappa$, имеет вид, изображенный на рис.141. Здесь a – единственная ячейка с α-компонентой, равной $*$; каждый прямоугольник P_i при $i \geq 0$ имеет вид, как на рис.142 a, а при $i < 0$ – вид, как на рис. 142,$б$ (указаны γ-компоненты состояний ячеек). Ячейку a далее будем называть центральной ячейкой связной компоненты. Потребуем, далее, чтобы наборы, образованные δ-компонентами любых двух столбцов прямоугольника P_i либо ε-компонентами двух его строк, совпадали, причем в каждом столбце множество ячеек с ненулевой δ-компонентой распадалось на два отрезка (см. рис.143,a), а в любой строке имело вид, рис. 143,$б$ при $i \geq 0$ и рис.143,$в$ при $i < 0$. Здесь $0 < m_1' < m_1$, $0 < m_2' < m_2$ – некоторые вспомогательные параметры. Используя ограничения $\mathcal{A}$, нетрудно построить локальное ограничение $\mathcal{A}'$, определяющее класс A'. Выберем m_1 и m_2 столь большими, чтобы по состояниям окрестностей ячеек можно было проверять выполне-

рис.141

ние $\mathcal{A}'$, и потребуем, чтобы ячейка, в окрестности которой $\mathcal{A}'$ нарушается, переходила в состояние ω. Тогда к некоторому моменту K перейдет в конфигурацию из A'. Обозначим эту конфигурацию K_1 и предположим, что она

рис.142

рис. 143

имеет вид, указанный на рис.141. Для определения переходов нам будет удобно считать далее, что ε- и δ-компоненты распадаются на ε_i- и δ_i-компоненты. Используя вспомогательные ε-сигналы Δ, можно определить переходы так, чтобы при каждом появлении единицы в ε_1-компоненте правого конца отрезка α на рис.143,$б$ происходило перемещение этого отрезка вправо на m_1' ячеек, сопровождающееся перемещением влево по отрезку кортежей из сигналов Δ. Можно добиться также, чтобы изменение кортежа из ε-компонент ячеек отрезка, отличных от Δ, происходило независимо от перемещения в соответствии с функцией переходов некоторой вспомогательной одномерной $ОС\,б_0$. При этом существенно, чтобы на отрезке не возникали слишком длинные цепочки из сигналов Δ; для обеспечения этого требования достаточно переводить ячейку в состояние ω всякий раз, как в ее окрестности возникает такая цепочка длины более чем m_1'. Изменения α-, β-, γ- и δ-компонент в рассматриваемом процессе определяем так, чтобы сохранялось ограничение $\mathcal{A}'$. Если теперь на правой стороне прямоугольника P_i, где $i \geq 0$, единичные ε_1-компоненты появляются с частотой p, то эта сторона перемещается вправо со скоростью pm_1'. Аналогичным образом можно определить переходы так, чтобы при появлении с частотой p единичной ε_1-компоненты на левой стороне P_i, где $i < 0$, эта сторона перемещалась влево со скоростью pm_1', а при появлении с частотой p

единичной δ_1-компоненты на верхней (л бо нижней) стороне P_j эта сторона перемещалась вверх (соответственно, вниз) со скоростью pm_2^j. При этом используются вспомогательные ε-либо δ-сигналы Δ, и изменения кортежей ε-и δ-компонент, отличных от Δ, происходят независимо от их перемещений.

Пусть область G ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $f(x)$, $g(x)$, при чем $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ – вычислимые последовательности двоичных рациональных чисел, сходящиеся к a и b. Функция $f(x)$ на $[0,b]$ не возрастает и рекурсивно аппроксимируема, поэтому на $[0,b)$ она является пределом последовательности невозрастающих ступенчатых функций, принимающих при $jb_i/2^i \le x < (j+1)b_i/2^i$ (i – номер функции, $j=0,\dots,2^i-1$) двоичное рациональное значение $f_1(i,j)$, где f_1 – вычислимая функция, и $f_1(i,j)$ при $0 \le j \le 2^i-1$. Аналогично, для аппроксимации $f(x)$ на $(a,0]$ и $g(x)$ введем функции f_2, g_1, g_2. Для каждого натурального i прямые $x=a_i$, $x=b_i$ и графики ступенчатых функций, аппроксимирующих f и g, ограничивают некоторую область G_i. Пусть $\{v_i\}$ – вычислимая последовательность двоичных рациональных чисел, сходящаяся к v. Далее полагаем, что для каждого i выполняется $a_i<0$, $b_i>0$, $v>0$. Далее полагаем, что у K_1 параметры ℓ и k (см. рис. 141) равны $\ell=2^i-1$, $k=2^i$. Предположим, что

а) при $j \ge 0$ правая сторона P_j перемещается вправо со скоростью $(j+1)b_i v_i/2^i$, верхняя – со скоростью $f_1(i,j)v_i$, и нижняя – со скоростью $g_1(i,j)v_i$

б) при $j<0$ левая сторона P_j перемещается влево со скоростью $ja_i v_i/2^i$, верхняя – со скоростью $f_2(i,-(j+1))v_i$ и нижняя – со скоростью $g_2(i,-(j+1))v_i$. (11)

Тогда K_1, очевидно, G_i-растет со скоростью v_i из центральной ячейки α. Если же поведение K_1 можно разбить на последовательность периодов $T_s, T_{s+1},\dots$, причем в течение каждого периода T_i выполнены условия (11), то она будет G-расти из центра α со скоростью v. Покажем, как определить переходы, чтобы поведение K_1 распадалось на такие периоды.

Как уже отмечалось, поведение кортежа из ε-компонент состояний ячеек отрезка α (рис. 143,б), отличных от Δ, сводится к поведению в ОС σ_0 состояния вида, изображенного на рис. 144

рис. 144

($x_1,\dots,x_k$ – рассматриваемый кортеж). Изменения $\varepsilon_1-\varepsilon_4$ компонент состояний ячеек ОС σ_0 определяем в соответствии с леммой 3 так, чтобы единичные ε_1-сигналы возникали на правом конце отрезка β с частотой, записанной в ε_2-компонентах состояний ячеек. В ε_6-компонентах отрезка β записано некоторое двоичное число, причем в каждый момент правый конец отрезка испускает влево ε_6-сигнал, осуществляющий прибавление единицы к этому числу. Чтобы внутри отрезка не возникали ячейки в нулевых состояниях, вводится ε_7-компонента, принимающая значение 1 всякий раз (кроме одного указываемого случая), когда в предыдущий момент ячейка имела ненулевую ε-компоненту. ε_8-компонента принимает значения 0, 1 и 2. Пусть ячейка ОС σ, имеющая единичную γ-компоненту и нулевую ε_8-компоненту, переходит в состояние ω. Тогда правый конец отрезка β имеет ненулевую ε_8-компоненту и можно рассмотреть максимальный кортеж x_1, x_2 ε_8-компонент ячеек правого конца отрезка β, у которого все x_i – ненулевые. Этот кортеж определяет двоичное число $\theta=\theta_1\ \theta_2$, где $\theta_i=x_i-1$.

Если при прибавлении единицы к числу в ε_5-компонентах возникает перенос, приводящий к удлинению β слева на одну ячейку, то вправо по отрезку начинает перемещаться ε_9-сигнал, переводящий в состояние 0 все ε_i-компо-

менты для $i \geq 10$. Достигнув правого конца β, этот сигнал запускает машины Тьюринга $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, головки которых перемещаются соответственно в $\mathcal{E}_{10}$- и $\mathcal{E}_{11}$- компонентах отрезка β. Машина $\mathfrak{M}_1$, используя в качестве исходного данного кортеж $x_1, \quad , x_q$, преобразует $\mathcal{E}_{12}-\mathcal{E}_{19}$ -компоненты ячеек отрезка β к виду, указанному на рис. 145 (при этом $\mathcal{E}_8$ -компоненты не меняются). Здесь S_1 и S_2 - начальные состояния импульсаторов с частотами $p_1 = \frac{(2\theta+1)b_{q+1}v_{q+1}}{m_1' \cdot 2^{q+1}}$ и $p_2 = \frac{2(\theta+1)b_{q+1}v_{q+1}}{m_1' \cdot 2^{q+1}}$ соответственно. Машина $\mathfrak{M}_2$ работает в течение некоторого времени τ_q, превосходящего время работы $\mathfrak{M}_1$ на любом наборе $x_1 \ldots x_q$, после чего перемещается в левый конец β и переходит в заключительное состояние. Если при этом $\mathcal{E}_5$-компонента левого конца β равна нулю, то запускается процесс синхронизации $\mathcal{E}_{19}$- компонент ячеек β. Так как перенос из старшего разряда числа в $\mathcal{E}_5$-компонентах может возникнуть не ранее чем через 2^{N-1} тактов (N - длина β) а на синхронизацию требуется $2(N-1) \leq 2^{N-1}$ тактов, то в течение синхронизации не появляются ненулевые $\mathcal{E}_9$- сигналы и содержимое $\mathcal{E}_i$-компонент $(i \geq 7; i \neq 19)$ сохраняется. В тот момент, когда в результате синхронизации все $\mathcal{E}_{19}$- компоненты одновременно становятся равными 1, происходит перенос $\mathcal{E}_{12}-\mathcal{E}_{16}$ -компонент в $\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_4$ -компоненты, перенос $\mathcal{E}_{16}$- и $\mathcal{E}_{17}$-компонент соответственно в $\mathcal{E}_7$ и $\mathcal{E}_8$ -компоненты (при этом некоторые единичные $\mathcal{E}_7$-компоненты могут переходить в нулевое состояние; см. замечание выше), а также обращение в нуль $\mathcal{E}_5$-, $\mathcal{E}_6$- и $\mathcal{E}_9$ -компонент. По окончании синхронизации все $\mathcal{E}_{19}$ -компоненты обращаются в нуль. Нетрудно заметить, что в результате описанного процесса отрезок β распадается на отрезки β_1 и β_2 ; чтобы удовлетворить ограничению λ', γ -компоненту правой ячейки отрезка β_1 заменяем на 1. Исходный прямоугольник P_i при этом разделяется на два новых прямоугольника, правые стороны которых перемещаются со скоростями $p_1 m_1'$ и $p_2 m_1'$.

Аналогичные процессы можно определить и для $\mathcal{E}$ -компонент прямоугольников слева от центральной ячейки, а также для δ -компонент. В последнем случае вместо машины $\mathfrak{M}_1$ используется машина $\mathfrak{M}_1'$, которая (в случае отрезка, примыкающего к верхней стороне P_i) по кортежу $x_1, \ldots, x_q$ в δ_8 -компонентах преобразует $\delta_{12}-\delta_{22}$ -компоненты к виду, рис. 146. Здесь S_1' и S_2'- начальные состояния импульсаторов с частотами $p_1' = \frac{f_1(q+1, 2\theta)v_{q+1}}{m_2'}$ и $p_2' = \frac{f_1(q+1, 2\theta+1)v_{q+1}}{m_2'}$. Машина $\mathfrak{M}_2$ та же, что для $\mathcal{E}$ -компонент, причем на нее накладывается дополнительно ограничение, чтобы τ_q превосходило время работы $\mathfrak{M}_1'$ на любом наборе $x_1 \quad x_q$. Как и в случае $\mathcal{E}$ -компонент, машина $\mathfrak{M}_2$ по окончании работы инициирует синхронизацию δ_{23} -компонент отрезка (при нулевой δ_5 -компоненте конца отрезка). Если ячейка имеет единичную $\mathcal{E}_{19}(\delta_{23})$ -компоненту и в ее окрестность входит ячейка с ненулевой $\delta(\mathcal{E})$-компонентой и $\delta_{23}(\mathcal{E}_{19})$ -компонентой, отличной от единицы, то переведем эту ячейку в состояние ω. Тогда моменты синхронизации $\mathcal{E}_{19}$ и δ_{23} -компонент всех ячеек отрезков рассматриваемой конфигурации совпадут. Если $\mathcal{E}_{16}$- -компоненты ячеек отрезка равны 0, то в момент синхронизации $\delta_{12}-\delta_{15}$- и δ_{20} -компоненты переносятся в $\delta_1-\delta_4$- и δ_8 -компоненты, иначе в них переносятся $\delta_{16}-\delta_{19}$ - и δ_{21} -компоненты. В обоих случаях δ_{22} -компоненты переносятся в δ_7 -компоненты, и переходят в нулевое состояние δ_5-, δ_6- и δ_9 - компоненты.

Если для работы машины $\mathfrak{M}_2$ недостаточно длины отрезка, то она переходит в заключительное состояние. Предполагаем, что если размеров отрезка достаточно для работы $\mathfrak{M}_2$, то их достаточно и для работы $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1'$.

Для G_i -роста полученной в результате описанных процессов конфигурации достаточно, чтобы число, хранящееся в $\mathcal{E}_8$- и δ_8 -компонентах горизонтальных и вертикальных отрезков, примыкающих к сторонам прямоугольника P_i, равня-

лось i при $i \geq 0$ и $-(i+1)$ при $i < 0$. Опишем возможный способ проверки этого условия для δ-компонент. Пусть θ – число в δ_s-компонентах вертикального отрезка, примыкающего к верхней стороне P_i. Одновременно с началом синхронизации запись θ переводится в ν-компоненты и спускается по ним до горизонтали, проходящей через центральную ячейку. Если вертикаль, на которой расположен рассматриваемый отрезок, проходит через центральную ячейку, то проверяется равенство θ нулю; если она расположена на стыке двух P_j, то проверяется возрастание θ на единицу; если же она является (в момент начала синхронизации) правой границей конфигурации, то проверяется, имеет ли θ вид $\underbrace{1\ldots1}_{q}$. При нарушении перечисленных условий появляются ячейки в состоянии ω. Аналогичная проверка может быть устроена и для ε-компонент. Можно показать, что для достаточно быстро растущей функции $\tau(q) = \tau_q$, начиная с некоторого q_0, каждая такая проверка будет заканчиваться до начала следующей. Таким образом (если также τ_q достаточно велико, чтобы конфигурация успевала принимать в течение работы $\mathfrak{M}_2$ очертания области G_q), конфигурация K_1 является G-растущей со скоростью v. Мы получили это утверждение в предположении, что в поведении конфигурации $\mathfrak{N}_x$ не возникают ячейки в состоянии ω. Нетрудно проверить, однако, что описанные переходы позволяют построить некоторую G-растущую со скоростью v конфигурацию K_0 и без использования этого факта. Поэтому для завершения доказательства достаточно определить переходы так, чтобы $\mathfrak{N}_x$ переводилась за один шаг в K_0 (это возможно, так как ограничения снизу на размеры K_0 определяются параметрами m_1', m_2', а их можно выбрать гораздо меньшими, чем m_1, m_2).

Пусть $G_1, G_2, \ldots$ – произвольная вычислимая последовательность нормальных областей и $v_1, v_2, \ldots$ – вычислимая последовательность вычислимых чисел, удовлетворяющих условию $0 < v_i < v$, где v – некоторая положительная константа. Тогда, подбирая соответствующие машины $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_1'$ и $\mathfrak{M}_2$ в вышеприведенном доказательстве, нетрудно построить OC, у которой поведение каждой ненулевой конфигурации распадается на периоды $T_1, T_2, \ldots$ возрастающей длины такие, что в течение каждого из них конфигурация (приближенно) G_i-растет со скоростью v_i.

Можно показать, далее, что теорема и последнее замечание остаются в силе, если рассматривать произвольные области вида, указанного на рис. 135, где на $f(x)$ и $g(x)$, кроме рекурсивной аппроксимируемости, накладывается лишь условие $f(x) > g(x)$. Возможно и дальнейшее расширение класса допустимых областей (например, на неодносвязные области: кольца и т.д.); построение OC здесь, как и выше, основано на лемме 2, но конструкции значительно усложняются.

В случае, когда область G представляет собой круг, в OC из доказанной теоремы каждая ненулевая конфигурация инициирует распространение с постоянной скоростью круговой волны возбуждения.

рис 145

рис 146

ГЛАВА II

Взаимное моделирование $ОС$ и универсальные $ОС$

§ 1. Определения

Непосредственное вложение различных процессов в однородные структуры обычно приводит к сложным $ОС$, характеризующимся большими значениями параметров, в связи с чем и возникает задача построения более простых $ОС$, моделирующих исходную $ОС$, или, более общо, задача изучения взаимного моделирования $ОС$. Будем рассматривать следующий естественный способ взаимного моделирования $ОС$.

Пусть σ и σ' – две $ОС$ размерности k. Выберем натуральный вектор $\bar{\ell}=(\ell_1,\dots,\ell_k)$ и разобьем множество ячеек $ОС\,\sigma'$ на параллелепипеды $P_{\bar{v}}$:

$$P_{\bar{v}}=\{(x_1,\dots,x_k)\mid \ell_i v_i \le x_i < \ell_i(v_i+1)\}.$$

Очевидно, все $P_{\bar{v}}$ содержат по $\prod_{i=1}^{k}\ell_i$ ячеек и подобны некоторому стандартному параллелепипеду P. Пусть E_n и $E_{n'}$ – множества состояний ячейки $ОС\,\sigma$ и σ'. Выберем в множестве состояний P /ячейки которого принимают состояния из $E_{n'}$/ n-элементное подмножество M и рассмотрим произвольное взаимно-однозначное отображение $\zeta: E_n\to M$. Тогда определяется взаимно-однозначное отображение θ состояний $ОС\,\sigma$ на подмножество множества состояний $ОС\,\sigma'$, которое приписывает параллелепипеду $P_{\bar{v}}$ состояние, полученное применением ζ к состоянию ячейки $\bar{v}$ в $ОС\,\sigma$.

Если натуральное N таково, что для любого поведения $\{f_i\}$ $ОС\,\sigma$ существует поведение $\{g_i\}$ $ОС\,\sigma'$, такое, что $g_{Ni}=\theta(f_i)$, то σ называется представимой в σ' с замедлением N. k-мерная $ОС$ называется универсальной, если любая $ОС$ той же размерности представима в ней с некоторым замедлением. В случае, когда замедление N равно 1, говорим о представимости без замедления. Нам понадобятся также следующие определения.

Состояние $ОС$ назовем тождественным, если оно переходит само в себя; тождественная $ОС$ – такая $ОС$, у которой каждое состояние тождественное.

Состояние α ячейки $ОС$ с локальной функцией переходов $\varphi(x_0,\dots,x_{k-1})$ назовем поглощающим, если выполнены следующие условия:

1. $\varphi(\alpha,x_1,\dots,x_{k-1})=\alpha$ при любых $x_1,\dots,x_{k-1}$.
2. Если в окрестности ячейки имеются ячейки в состоянии α, то через некоторое время эта ячейка тоже переходит в состояние α.

§ 2. Моделирование без замедления

Пусть задана $ОС\,\sigma\in S(2,n,\bar{m})$. Нас будет интересовать возможность представления σ без замедления в $ОС\,\sigma'$ с заданным меньшим числом n' состояний ячейки. При этом $\bar{m}'$ должно быть, вообще говоря, больше, чем $\bar{m}$. Ограничения снизу на $\bar{m}'$ дается следующим утверждением.

Теорема 2.1 [43] При $n\to\infty$ равномерно по $\bar{m}$ почти все σ из $S(2,n,\bar{m})$ представимы без замедления лишь в $ОС$ из классов $S(2,n',\bar{m}')$ таких, что: $m_i'\ge m_i$, $i=1,2$; $\frac{(m_1'+1)(m_2'+1)}{(m_1+1)(m_2+1)}\ge \log_{n'} n$.

Можно также показать, что если $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i+1}\le 1$ и k – любое, то имеет место аналог теоремы 2.1, утверждающий, что при $n\to\infty$ равномерно по k и $\bar{m}$ из указанного класса почти все σ из $S(k,n,\bar{m})$ представимы без замедления лишь в $ОС$ из таких классов $S(k,n',\bar{m}')$, что $\prod_{i=1}^{k}\frac{m_i'+1}{m_i+1}\ge \log_{n'} n$.

Для доказательства теоремы нам потребуется рассмотреть один вспомогательный подкласс класса всех $ОС$.

Пусть $\sigma\in S(2,n,\bar{m})$. Введем на E_n отношения эквивалентности $R_{i\,s_1s_2}(x,y)$, $i=1,2$; $s_1,s_2\in E_n$. Пусть $\alpha_1=(m_1,0)$; $\alpha_2=(0,m_2)$, причем в шаблоне соседства $V_{\bar{m}}$ α_i стоит на n_i-м месте. Пусть, далее, для подходящих x $,x_{n_i-1},x_{n_i+1},\ ,x_{k-1}$ $x=\varphi(x_0,\ ,x_{n_i}\ \ s_1,x_{n_i+1}\ ,x_{k-1}$

$y=\varphi(x_0,\dots,x_{n_i-1},\ ,x\ \ \ x_{k-1})$

-да полагается $R_{i s_1 s_2}(\ ,y)$. Далее, $R_{-s_1 s_2}$ по рефлексивности, симметричности и транзитивности продолжается до отношения эквивалентности. Если для любых s_1 и s_2 из E_n, $s_1 \neq s_2$, имеет место $R_{i s_1 s_2}(x,y)$, то полагаем $R_i(x,y)$.

Рассмотрим класс $R(2,n,\bar{m}) \subset S(2,n,\bar{m})$, состоящий из всех OC таких, что для любых $x,y \in E_n$ и i $1,2$ выполнено $R_i(x,y)$. Докажем лемму.

Лемма. $\frac{|R(2,n,\bar{m})|}{|S(2,n,\bar{m})|} \to 1$ при $n \to \infty$ равномерно по $\bar{m}$.

Пусть заданы i, s_1, s_2. Оценим сверху мощность класса $K_{i s_1 s_2}(2,n,\bar{m})$ OC, для которых существуют x и y такие, что $\bar{R}_{i s_1 s_2}(x,y)$. Пусть $\varphi(x_0,\dots,x_{k-1})$ - функция переходов $OC\,\sigma$ из $K_{i s_1 s_2}$. Так как $\exists x \exists y\ \bar{R}_{i s_1 s_2}(x,y)$, то $R_{i s_1 s_2}$ имеет класс эквивалентности $Q \subset E_n$ такой, что $0<|Q|=k<n$. Для любых $x_0,\dots,x_{n_i-1},x_{n_i+1},\dots,x_{k-1}$ элементы $x_j=\varphi(x_0,\dots,x_{n_i-1},s_j,x_{n_i+1},\dots,x_{k-1})$, $j=1,2$, одновременно входят либо в Q, либо в $E_n \setminus Q$. Число функций φ, удовлетворяющих последнему ограничению, равно $n^{n^{k-1}(n-2)}(k^2+(n-k)^2)^{n^{k-1}}$. Так как различных Q существует C_n^k, то $|K_{i s_1 s_2}| \leq$

$$\leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(C_n^k n^{n^{k-1}(n-2)}(k^2+(n-k)^2)^{n^{k-1}}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k\left[n^{n^{k-1}(n-2)}(1+(n-1)^2)^{n^{k-1}}\right] \leq 2^n n^{n^k}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^{n^{k-1}} \leq$$

$$\leq 2^n n^{n^k} \frac{1}{e^{2n^{k-1}-2n^{k-3}}} \leq n^{n^k}/A^{n^{k-2}},$$

где A - некоторая константа, большая 1. Таким образом, число OC, не входящих в $R(2,n,\bar{m})$, не превосходит

$$\sum_{(s_1)}^{k}\sum_{s_1 s_2\ s_1 \neq s_2} |K_{i s_1 s_2}| \leq 2\,\frac{n^2}{2}\,\frac{1}{A^{n^{k-2}}}\,n^{n^k} = \varepsilon(n)\,|S(2,n,\bar{m})|,$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Нетрудно указать конкретную OC из $R(2,n,\bar{m})$. Для этого, например, достаточно положить

$$\varphi(x_0,x_1,\dots,x_{k-1}) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} x_i \pmod n & \text{при } x_0 \neq 0 \\ \sum_{i=0}^{k-1} x_i \pmod{n-1} & \text{при } x_0 = 0 \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2.1. Покажем, что утверждение теоремы выполняется для любой $OC\,\sigma$ из $R(2,n,\bar{m})$.

Пусть $OC\,\sigma$ из $R(2,n,\bar{m})$ представима без замедления в $OC\,\sigma'$ из $S(2,n',\bar{m}')$. При этом состояния ячеек σ кодируются при помощи отображения ζ (см. §) состояниями прямоугольников со сторонами (ℓ_1,ℓ_2) в $OC\,\sigma'$. В произвольном таком прямоугольнике $P=\{a_1,a_1+1,\dots,a_1+\ell_1-1\} \times \{a_2,a_2+1,\dots,a_2+\ell_2-1\}$ рассмотрим систему полос $P^i_{h;H} = P \cap \{(x_1,x_2) \mid a_i+h \leq x_i \leq a_i+H\}$. Пусть Σ'_i - класс всех $P^i_{h;H}$, по состоянию которых можно однозначно восстановить кодируемое состояние ячейки $OC\,\sigma$. Выкинув из Σ'_i все полосы, содержащие собственные подполосы из Σ'_i, получим класс $\Sigma_i = \{P^i_{h_{ij};H_{ij}}\}$. Выберем j^*, для которого h_{ij^*} минимально. Тогда найдутся различные $s_1,s_2 \in E_n$, для которых $\zeta(s_1)$ и $\zeta(s_2)$ совпадают на $P^i_{a_i,H_{ij^*}-1}$ так как в противном случае $P^i_{a_i,H_{ij^*}-1} \in \Sigma'_i$, и существует ее подполоса $P^i_{h',H'}$, входящая в Σ_i. У нее, в силу выбора j^*, $h' \geq h_{ij^*}$, а $H' \leq H_{ij^*}-1$, т.е. она является собственной подполосой полосы $P^i_{h_{ij^*},H_{ij^*}}$, чего быть не может.

Введем отношения эквивалентности ϱ_i на E_n, полагая $\varrho_i(x,y)$, если $\zeta(x)$ и $\zeta(y)$ совпадают на всех ячейках P с координатами $x_i \leq a_i+h_{ij^*}$. Как и выше, обозначим $\alpha_1=(m_1,0)$; $\alpha_2=(0,m_2)$; n_i - номер α_i в шаблоне соседства. Выберем произвольные $x_0,x_1,\dots,x_{n_i-1},x_{n_i+1},\dots,x_{k-1}$ и рассмотрим состояния f_1 и f_2 окрестности $V(0)$, определяемые в соответствии с шаблоном соседства наборами $x_0,x_1,\dots,x_{n_i-1},s_1,x_{n_i+1},\dots,x_{k-1}$ и $x_0,x_1,\dots,x_{n_i-1},s_2,x_{n_i+1},\dots,x_{k-1}$ соответственно. Эти состояния кодируются состояниями g_1 и g_2 прямоугольников $P_{\bar{v}}$ в $OC\,\sigma'$. Если $V(0)$ принимает состояние f_j в момент t, то определено состояние ячейки 0 в момент $t+1$; обозначим его y_j. Очевидно, $R_{i s_1 s_2}(y_1,y_2)$. Так как σ представима без замедления в σ', то при состоянии g_j в момент t системы прямоугольников $P_{\bar{v}}$, кодирующем f_j, P_0 в момент $t+1$ будет иметь состояние

$\zeta(y_j)$. По определению y_1 и y_2 отличаются лишь на ячейках прямоугольника с координатой $x_i \geq m_i l_i + H_{ij*}$ (см. рис. 147),

рис. 147

здесь приведен случай $i = 1$). Предположим, что $m_i' < m_i l_i + H_{ij*} - h_{ij*}$. Тогда для ячейки из P_0 с координатой $x_i \leq h_{ij*}$ ячейки с $x_i \geq m_i l_i + H_{ij*}$, на которых отличаются y_1 и y_2, не входят в ее окрестность. Поэтому $\zeta(y_1)$ и $\zeta(y_2)$ совпадают на всех ячейках с координатами $x_i \leq h_{ij*}$, что означает по определению $\rho_i(y_1, y_2)$. Так как при различных наборах $x_0, \ldots, x_{n_i-1}, x_{n_i+1}, \ldots, x_{k-1}$ имеем систему соотношений $R_{i s_1 s_2}(y_1, y_2)$, порождающую $R_{i s_1 s_2}$, то получаем, что из $R_{i s_1 s_2}(x, y)$ вытекает $\rho_i(x, y)$. Вместе с тем $\sigma \in R(2, n, \bar{m})$, т.е. для выбранных нами s_1 и s_2 $\forall x \forall y\, R_{i s_1 s_2}(x, y)$. Поэтому для любых $i, x, y, \rho_i(x, y)$, так что $P^i_{h_{ij*}+1, H_{ij*}} \in \Sigma_i'$ чего быть не может. Следовательно, $m_i' \geq m_i l_i + H_{ij*} - h_{ij*}$. Чтобы состояниями полосы $P'_{h_{ij*}, H_{ij*}}$ можно было закодировать элементы E_n, необходимо $l_2(H_{ij*} - h_{ij*} + 1) \geq \log_{n'} n$. Извлекая отсюда оценку для $H_{ij*} - h_{ij*}$, находим $m_1' + 1 \geq m_1 l_1 + \log_{n'} n / l_2$. Аналогично, $m_2' + 1 \geq m_2 l_2 + \log_{n'} n / l_1$. Перемножив полученные неравенства и обозначив $l_1 l_2 / \log_{n'} n = v$, будем иметь

$$\frac{(m_1'+1)(m_2'+1)}{(m_1+1)(m_2+1)} \geq \frac{(v m_1 + 1)(m_2 + 1/v)}{(m_1+1)(m_2+1)} \log_{n'} n$$

Так как $v \geq 1$, то, как нетрудно убедиться, коэффициент при логарифме не меньше единицы. Теорема 2.1 доказана.

В теореме 2.2 приведено достаточное условие представимости без замедления любой ОС из $S(2, n, \bar{m})$ в классе $S(2, n', \bar{m}')$.

Теорема 2.2 [43] Если $m_i' \geq m_i$, $i = 1, 2$; $\left[\frac{m_1'+1}{m_1+1}\right] \cdot \left[\frac{m_2'+1}{m_2+1}\right] \geq \log_{n'} n + \log_{n'} \log_{n'} n + 200$ то произвольная ОС из $S(2, n, \bar{m})$ представима без замедления в некоторой ОС из $S(2, n', \bar{m}')$. Доказательство. При $n' \geq n$ утверждение теоремы очевидно, выполняется, поэтому ниже считаем, что $n' < n$. Чтобы определить функцию переходов ОС σ', мы сначала укажем кодирование состояний ячейки ОС σ посредством состояний прямоугольников P_α из ОС σ'. Размеры l_1 и l_2 этих прямоугольников подберем так, чтобы окрестность $V(\alpha')$ любой ячейки $\alpha' \in P_\alpha$ содержала все прямоугольники P_ν, соответствующие $\nu \in V(\alpha)$; ζ выберем так, чтобы состояния окрестностей различных ячеек из всегда были различны. Тогда по состоянию f окрестности некоторой ячейки α' в ОС σ' будет однозначно восстанавливаться положение этой ячейки в прямоугольнике P_α, а следовательно, в силу выбора l_1 и l_2 состояния всех P_ν для $\nu \in V(\alpha)$. Таким образом, по f можно восстановить состояние $V(\alpha)$; затем при помощи φ найти состояние g ячейки α в следующий момент и принять значение φ' на состоянии f окрестности $V(\alpha')$ равным состоянию, которое ячейка α' получает в $\zeta(g)$. Очевидно, при таком определении φ' ОС σ будет представима без замедления в σ'. Покажем, что l_1, l_2 и ζ можно выбрать указанным образом. Предположим без потери общности, что $\left[\frac{m_1'+1}{m_1+1}\right] \geq \left[\frac{m_2'+1}{m_2+1}\right]$. Пусть $l_1 = \left[\frac{m_1'+1}{m_1+1}\right]$, $l_2 = \left[\frac{m_2'+1}{m_2+1}\right]$; при этом условие на l_1 и l_2, очевидно, выполнено. Выберем l_1' и l_2' так, чтобы $l_1' \leq l_1$, $l_2' \leq l_2$, $l_1' \geq l_2'$, $l' = l_1' l_2' \geq \log_{n'} n +]\log_{n'} \log_{n'} n[+ 12 = A$, но $(l_1' - 1) l_2' < A$. Очевидно, это всегда возможно. Так как $l_2' \leq \sqrt{l'}$, то $l'(1 - \frac{1}{\sqrt{l'}}) < A$, или, учитывая $A \geq 13$, $l' \sim \frac{7}{5} A$. Нетрудно проверить, что $l_1 \geq$

$>]\log_{n'} \log_{n'} n[+ 8 - a$

Рассмотрим P_a и выделим в нем P'_a, как это указано на рис. 148. В левом нижнем углу P_a выделим полосу π ширины 1 и длины a. Пусть первая слева ячейка π находится в состоянии 1, а прочие – в состоянии 0. Это состояние π обозначим f. Рассмотрим класс K состояний P_a, таких, что π находится в состоянии f; все ячейки из $P_a \setminus P'_a$ – в состоянии 1, причем:

рис. 148

1) никакая горизонтальная полоса длины a, отличная от π, не находится в состоянии f;

2) никакая горизонтальная полоса длины $\left[\frac{a}{2}\right]$, расположенная в P'_a выше π и примыкающая к одной из вертикальных сторон P'_a, не находится в нулевом состоянии.

Если для кодирования элементов E_n пользоваться состояниями только из K, то у каждого P_a полоса ячеек длины a в левом нижнем углу будет находиться в состоянии f, и никакая другая горизонтальная полоса ячеек $OC\,б'$ длины a состояния f иметь не будет. Следовательно, в состоянии окрестности произвольной ячейки $OC\,б'$ можно выделить решетку полос в состоянии f, причем для разных ячеек из P_a эти полосы расположены в окрестности по-разному, так что состояния окрестностей различных ячеек из P_a всегда различны. Для доказательства теоремы остается показать, что $|K| \geq n$.

Займемся оценкой $|K|$. Пусть $\mathfrak{A}_i$ – i-я снизу полоса в P_a, $i=1,\dots,\ell_2$; класс ее состояний, удовлетворяющих указанным выше ограничениям, обозначим K_i. При $i \geq 2$ существует не более $(\ell_1'-a+1)\times(n')^{\ell_1'-a}$ состояний $\mathfrak{A}_i$, не удовлетворяющих ограничению 1 (при $\ell_1'<a$ их вообще нет), и не более $2(n')^{\ell_1'-[a/2]}$ состояний, не удовлетворяющих ограничению 2. Поэтому при $\ell_1' \geq a$ $\quad |K_i| \geq (n')^{\ell_1'}\left(1-\frac{\ell_1'-a+1}{(n')^a}-\frac{2}{(n')^{[a/2]}}\right),\ i\geq 2,$

а при $\ell_1'<a$ $|K_i| \geq (n')^{\ell_1'}\left(1-\frac{2}{(n')^{[a/2]}}\right),\ i\geq 2$

Аналогично находим, что при $\ell_1' \geq 2a$ $\quad |K_1| \geq (n')^{\ell_1'-a}\left(1-\frac{\ell_1'-2a+1}{(n')^a}\right)$

а при $a \leq \ell_1' < 2a$ $\quad |K_1| \geq (n')^{\ell_1'-a}$

Из последних неравенств вытекает, что при $\ell_1' \geq a$

$$|K_1| \geq (n')^{\ell_1'-a}\left(1-\frac{\ell_1'-a+1}{(n')^a}-\frac{2}{(n')^{[a/2]}}\right)$$

Оценим сверху выражение $B = \frac{\ell_1'-a+1}{(n')^a}+\frac{2}{(n')^{[a/2]}}$. Имеем

$$\frac{\ell_1'-a+1}{(n')^a} \leq \frac{\ell'}{(n')^a} < \frac{7A}{5(n')^a} = \frac{\frac{7}{5}(\log_{n'} n+]\log_{n'}\log_{n'} n[+12)}{(n')^{]\log_{n'}\log_{n'} n[}\cdot(n')^8} \leq \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{(n')^8}+\frac{7}{5}\frac{]\log_{n'}\log_{n'} n[}{(n')^8(n')^{]\log_{n'}\log_{n'} n[}}+\frac{7}{5}\cdot\frac{12}{(n')^8}$$

Заметим, что $\frac{x}{(n')^x} \leq \frac{x}{2^x} \leq \frac{1}{e\ln 2}$ при $x \geq 0$, т.е.

$$\ell'/(n')^a < \frac{7}{5}\frac{1}{(n')^8}\left(13+\frac{1}{e\ln 2}\right) < \frac{7}{5\cdot 28}\left(13+\frac{1}{e\ln 2}\right) < \frac{1}{12} \quad \text{т.е. } B \leq \frac{1}{3}$$

Далее $2/(n')^{[a/2]} \leq 2/2^{\sqrt{\log_{n'} n}} \leq 1/4$

Итак, при $\ell_1' \geq a$ $\quad |K_i| \geq (n')^{\ell_1'}(1-B),\ i\geq 2;\ |K_1| \geq (n')^{\ell_1'-a}(1-B)$

при $\ell_1'<a$ имеем $|K_i| \geq (n')^{\ell_1'}\left(1-2/(n')^{[a/2]}\right),\ i\geq 2$.

Очевидно, $|K| = \prod_{i=1}^{\ell_2'}|K_i|$. Поэтому при $\ell_1' \geq a$ $|K| \geq (n')^{\ell'-a}(1-B)^{\ell_2'-1}$, а при $\ell_1' \geq a$ $\quad |K| \geq (n')^{\ell'-a}\left(1-\frac{2}{(n')^{[a/2]}}\right)^{\ell_2'-1}$. Нетрудно проверить, что при $B \leq \frac{1}{2}$ имеет место неравенство $\log_{n'}(1-B) \geq -\frac{2B}{\ln n'}$. Рассмотрим случай $\ell_1' \geq a$; случай $\ell_1' < a$ аналогичен.

Поэтому $\log_{n'}|K| \geq \ell'-a-\ell_2\frac{2B}{\ln n'} = \ell'-a-\frac{2}{\ln n'}\left(\frac{\ell_1'(\ell_1'-a+1)}{(n')^a}+\frac{2\ell_2'}{(n')^{[a/2]}}\right) \geq \ell'-a-\frac{2}{\ln n'}\frac{1}{12}-\frac{4}{\ln n'}\frac{\sqrt{\ell'}}{(n')^{[a/2]}}$

Но $\frac{\sqrt{\ell'}}{(n')^{[a/2]}} \leq \frac{\sqrt{7/5}\sqrt{\log_{n'} n}\sqrt{1+\frac{]\log_{n'}\log_{n'} n[}{\log_{n'} n}+\frac{12}{\log_{n'} n}}}{\sqrt{\log_{n'} n}\,(n')^3} \leq \frac{\sqrt{7/5}}{2^3}\sqrt{14+\frac{1}{e\ln 2}} < \frac{5}{8}$

Итак, $\log_{n'}|K| > \ell'-a-\frac{1}{e\ln 2}-\frac{4\cdot 5}{e\ln 2\cdot 8} > \ell'-a-4 \geq 4\cdot a-4 = \log_{n'} n$

откуда и получаем $|K| \geq n$. Теорема 2.2 доказана.

Можно показать, что в случае $k \geq 3$ утверждение теоремы 2.2 выполне-

но при $m_i' \geq m_i$, $i=1,\dots,k$; $\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{m_i'+1}{m_i+1}\right] \leq \log_{n'} n + 2\frac{k-1}{k}\log_{n'}\log_{n'} n + (k)$

Таким образом, если $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i+1} \leq 1$, то имеются необходимое и достаточное условия представимости без замедления любой $ОС$ из $S(k,n,\bar{m})$ в классе $S(k,n',\bar{m}')$, записанные в виде неравенств с асимптотически равными при $n\to\infty$ и $m_i'/m_i \to \infty$ соответствующими частями. В этом смысле будем говорить, что найденные условия асимптотически "совпадают". Оказывается, что при $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i+1} > 1$ необходимое условие можно ослабить.

Теорема 2.3 [43] Если $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i+1} > 1$, то существуют функции $c(\bar{m},k)$ и $a(\bar{m},k) < 1$ такие, что при $\log_{n'} n > c(\bar{m},k)$ $ОС$ из $S(k,n,\bar{m})$ представимы без замедления в некотором классе $S(k,n',\bar{m}')$, для которого

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{m_i'+1}{m_i+1} \leq a(\bar{m},k)\log_{n'} n .$$

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма. Пусть $m \geq 1$; $k \geq 2$. Тогда существует взаимно однозначное отображение $\psi : (E_m)^{k-1} \to K \subset (E_m)^k$ такое, что по любым $k-1$ компонентам любого вектора $x \in K$ однозначно восстанавливается $\psi^{-1}(x)$.

Для доказательства достаточно положить $(x_1,\dots,x_{k-1}) \xrightarrow{\psi} (x_1,\dots,x_{k-1}, x_1+\dots+x_{k-1} (\mathrm{mod}\, m))$.

Для доказательства теоремы 2.3 выберем $ОС\,\sigma$ из произвольного класса $S(k,n,\bar{m})$, где $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i+1} > 1$, и укажем некоторое кодирование ζ элементов E_n состояниями параллелепипедов P_α, ячейки которых принимают состояния из $E_{n'}$; ζ будет зависить от параметров ℓ и α. Затем выберем $\bar{m}'$, тоже зависящее от ℓ и α, и покажем, что σ представима без замедления (при данном ζ) в некоторой $ОС\,\sigma'$ из $S(k,n',\bar{m}')$. После этого останется подобрать ℓ, α и $c(\bar{m},k)$ так, чтобы выполнялось утверждение теоремы.

Пусть ℓ и α – натуральные, причем $\ell \geq 3\alpha$. Положим $P_0 = \{(x_1,\dots,x_k) \mid 0 \leq x_i \leq \ell-1\}$, где x_i – целые. Выделим в P_0 следующие области:

$$R = \{(x_1,\dots,x_k) \mid \alpha \leq x_i \leq \ell-\alpha+1\},$$

$$R_j^1 = \{(x_1,\dots,x_k) \mid 0 \leq x_i \leq \alpha-1;\ i \neq j \Rightarrow \alpha \leq x_i \leq \ell-\alpha+1\}$$

$$R_j^2 = \{(x_1,\dots,x_k) \mid \ell-\alpha \leq x_j \leq \ell-1,\ i \neq j \Rightarrow \alpha \leq x_i \leq \ell-\alpha+1\}$$

В случае $k=2$ эти области указаны на рис. 149. Пусть $S = P_0 \setminus (R \cup \bigcup_{i,j} R_j^i)$.

рис. 149

Определим состояние f области S, у которой все ячейки из параллелепипеда $\Pi = \{(x_1,\dots,x_k) \mid 1 \leq x_1 \leq \ell-1,\ 0 \leq x_2 \leq \alpha-1,\ \dots,\ 0 \leq x_k \leq \alpha-1\}$ находятся в состоянии 1, а прочие ячейки – в состоянии 0. Кодирование ζ будет отображать элементы E_n в состояния P_0, у которых S находится в состоянии f. При этом на состояния R_1^i накладывается ограничение, состоящее в том, что никакая область из R_1^1 вида $\{(x_1,\dots,x_k) \mid 0 \leq x_1 \leq \alpha-1,\ b_1 \leq x_2 \leq b_1+\alpha-1,\dots,\ b_{k-1} \leq x_k \leq b_{k-1}+\alpha-1\}$ либо из R_1^2 вида $\{(x_1,\dots,x_k) \mid \ell-\alpha \leq x_1 \leq \ell-1,\ b_1 \leq x_2 \leq b_1+\alpha-1,\dots,\ b_{k-1} \leq x_k \leq b_{k-1}+\alpha-1\}$ не находится в единичном состоянии. Количество таких состояний R_1^i не менее $N_1 = (n')^{(\ell-2\alpha)^{k-1}\alpha}\cdot\left(1-(\ell-3\alpha+1)^{k-1}(n')^{-\alpha^k}\right)$ (так как $\ell \geq 3\alpha$). Выберем в множестве состояний каждой области R_j^i подмножество Q_j^i из N_1 элементов, причем при $j=1$ эти состояния пусть удовлетворяют указанному ограничению. Отобразим взаимно однозначное $(E_{N_1})^{2k}$ на $\prod_{i,j} Q_j^i$: $(E_{N_1})^{2k} \xrightarrow{\chi} \prod_{i,j} Q_j^i$. Пусть ψ – отображение, определяемое леммой: $(E_{N_1})^{2k-1} \xrightarrow{\psi} (E_{N_1})^{2k}$. Пусть Q – множество всех состояний R_j^i $|Q| = N_2$. Предположим, что ℓ и α таковы, что $|(E_{N_1})^{2k-1} \times Q| = N_1^{2k-1}\cdot N_2 \geq n$. Тогда отобразим взаимно однозначно E_n в $(E_{N_1})^{2k-1} \times Q$ отображением μ. Определим теперь $\zeta(x)$ так, чтобы R находилось в состоянии $pr_2\,\mu(x)$, а состоя-

астей R_j определялись набором состояний $\mathcal{X}(\psi(pr_1\mu(x_{11}))$. Очевидно, при таком определении x можно однозначно восстановить по состоянию и с состоянию любых $2k\ 1$ из множеств R_j^i. Положим $m' = (m_1+1)\ell$ и 1. В силу ограничения, наложенного на состояния областей R_1^i, при кодировании состояний $OC\sigma$ не будут возникать параллелепипеды в единичных состояниях, конгруэнтные π и отличные от них. Следовательно, по состоянию g окрестности $V(\alpha')$ ячейки $\alpha' \in P_\alpha$ можно однозначно восстановить положение в ней параллелепипедов π, а значит, и положение α' в P_α. Таким образом, состояния окрестностей различных ячеек α' из P_α всегда различны.

Если $\alpha' \in R$, то $V(\alpha')$ содержит все P_ν для $\nu \in V(0)$. Если же $\alpha' \in R_j^1\ (R_j^2)$, то $V(\alpha')$ содержит для любого $\nu \in V(0)$ целиком все области R, R_j^i из P_ν за исключением, быть может, области $R_j^2\ (R_j^1)$. В обоих случаях кодируемое состояние ячейки ν по состоянию $V(\alpha')$ восстанавливается однозначно. Функцию переходов $\varphi' OC\sigma \in S(k, n', m')$ теперь можно определить так, же, как это делалось при доказательстве теоремы 2.2.

Займемся подбором параметров. Обозначим $\lambda = \frac{a}{\ell} \le 1/3$. Имеем $\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i'+1}{m_i+1} = \ell^k \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{\lambda}{m_i+1}\right) \le \ell^k(1-\varkappa\lambda)^k$, где $\varkappa = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i+1} > \frac{1}{k}$. Очевидно, $N_2 = (n')^{(\ell-2a)k}$. Кроме того, $N_1 \ge (n')^{(k-2a)k-1}\left[1-\ell^{k-1}(n')^{-ak}\right]$. Обозначим $N = (N_1)^{2k-1}N_2$. Тогда, перемножая и логарифмируя, найдем $\log_{n'} N \ge (2k-1)\log_{n'} A + \ell^k(1-2\lambda)^{k-1}(1+\lambda(2k-3))$, где $A = 1-\ell^{k-1}(n')^{-\ell^k\lambda^k}$. Обозначим $(1-2\lambda)^{k-1}(1+\lambda(2k-3)) = P(\lambda)$. Очевидно, $P(\lambda) < 1$ при $0 < \lambda \le 1/3$, причем $P(\lambda)$ монотонно убывает. Рассмотрим $\prod_{i=1}^{k}\frac{m_i'+1}{m_i+1} / (\ell^k P(\lambda)) = B(\lambda)$.

Очевидно, $B(\lambda) \le \left(\frac{1-\varkappa\lambda}{1-2\lambda}\right)^{k-1} \Big/ \frac{1+\lambda(2k-3)}{1-\varkappa\lambda} = c_1(\lambda)/c_2(\lambda)$

Имеем $c_1(\lambda) = \left(1+\frac{(2-\varkappa)\lambda}{1-2\lambda}\right)^{k-1} = 1+(k-1)(2-\varkappa)\lambda+o(\lambda)$, $c_2(\lambda) = 1+\frac{\lambda(2k-3+\varkappa)}{1-\varkappa\lambda} = 1+(2k-3+\varkappa)\lambda+o(\lambda)$

Отсюда находим $c_1(\lambda)-c_2(\lambda) = [(2-\varkappa)(k-1)-(2k-3+\varkappa)]\lambda+o(\lambda) = (1-\varkappa k)\lambda+o(\lambda)$

Но $1-\varkappa k < 0$, так что существует $\gamma > 0$ такое, что при $\lambda \le \gamma$ $B(\lambda) \le \frac{c_1(\lambda)}{c_2(\lambda)} < 1$. Будем считать, что $\gamma \le 1/3$. Возьмем произвольное δ_1, $0 < \delta_1 < \gamma$ и положим $\alpha_1 = \max_{\delta_1 \le \lambda \le \gamma} B(\lambda) < 1$. Рассмотрим $\varepsilon_1 > 1$ такое, что $\alpha_1 \cdot \varepsilon_1 = \alpha_2 < 1$, и найдем такое $\delta \ge \delta_1$, что $P(\delta)/P(\gamma) \le \varepsilon_1$. Тогда для любого $\lambda \in [\delta, \gamma]$ будем иметь $P(\lambda)/P(\gamma) \le \varepsilon_1$.

Оценим A снизу. Можно показать, что при $\lambda \ge \frac{1}{e}\sqrt[k]{(k-1)\log_{n'}\ell+1}$ имеет место $\lambda \ge 1-\frac{1}{k'} \ge \frac{1}{2}$. Имеем $\frac{\sqrt[k]{(k-1)\log_{n'}\ell+1}}{e} \le \sqrt[k]{k\ell+1}/\ell \le \sqrt[k]{k}\sqrt[k]{\ell}+1/\ell \le 2\sqrt[k]{\ell}+1/\ell \le 3/\ell^{k-1/k} \le \frac{3}{\ell^{2/3}}$ ибо $k \ge 3$. Положив $\beta_1 = (3/\delta)^{3/2}$, будем иметь при $\ell \ge \beta_1$

$$\delta \ge \frac{1}{e}\sqrt[k]{(k-1)\log_{n'}\ell+1} \qquad (12)$$

Таким образом, при $\ell \ge \beta_1$, $\lambda \in [\delta, \gamma]$ получаем $\log_{n'} N \ge \ell^k P(\lambda) - (2k\ 1)\log_{n'} 2$

Пусть $\beta_2 = \frac{1}{\gamma-\delta}$. Тогда $\delta\ell+1 \le \gamma\ell$, если $\ell > \beta_2$, т.е. для любого такого ℓ на отрезке $[\delta, \gamma]$ найдется λ такое, что $\lambda\ell$ – целое.

Пусть далее $\varepsilon_2 > 1$ и $\alpha_2 \cdot \varepsilon_2 = \alpha_3 < 1$. Очевидно, $(2k\ 1)\log_{n'} 2 < 2k$. Пусть $\beta_3 = \sqrt[3]{\frac{2k}{\varepsilon_2-1}}$. Тогда $(\beta_3)^k(\varepsilon_2-1) > \frac{(\beta_3)^k(\varepsilon_2-1)}{2k} > \frac{(\beta_3)^3(\varepsilon_2-1)}{2k} = 1$, т.е. $(2k\ 1)\log_{n'} 2 < (\varepsilon_2-1)(\beta_3)^k$ (13) $(2k-1)\log_{n'} 2$

Далее, возьмем $\varepsilon_3 > 1$ такое, что $\alpha_3 \cdot \varepsilon_3 < 1$. Можно проверить, что при $\beta_4 = 1+\frac{k}{\ln\varepsilon_3}$ и любом $\ell > \beta_4$ выполнено неравенство $k < (\ell\ 1)^k\varepsilon_3$. Положим теперь $\beta = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$, и пусть $n \ge (n')^{\beta^k}$, т.е. $\log_{n'} n \ge c(m, k) = \beta^k$. Найдем наименьшее целое ℓ такое, что $\ell^k P(\gamma) > (2k\ 1)\log_{n'} 2 + \log_{n'} n$. Так как $P(\gamma) < 1$, то, очевидно, $\ell \cdot \beta > \beta_2$, т.е. для найденного ℓ существует $\lambda \in [\delta, \gamma]$ такое, что $\lambda\ell$ – целое.

Учитывая неравенство (12) и $P(\lambda) \geq P(\gamma)$, получаем, что для указанных ℓ, n, α имеет место $N \geq n$. Покажем, что $\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i'+1}{m_i+1} \leq \alpha \log_{n'} n$ где $\alpha < 1$. Имеем $(\ell-1)^k P(\gamma) < (2k-1)\log_{n'} 2 + \log_{n'} n$.
Но $\log_{n'} n \geq (\beta_3)^k$, т.е. из (13) получаем $(2k-1)\log_{n'} 2 \leq (\varepsilon_2 - 1)\log_{n'} n$ и $(2k-1)\log_{n'} 2 + \log_{n'} n \leq \varepsilon_2 \log_{n'} n$

Далее, так как $\ell \geq \beta_4$, то $\ell^k < (\ell-1)^k \varepsilon_3$, поэтому имеем $\ell^k P(\gamma) \leq \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 \log_{n'} n$. Так как $\lambda \in [\delta, \gamma]$, то $P(\lambda)/P(\gamma) \leq \varepsilon_1$, откуда $\ell^k P(\lambda) \leq \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \log_{n'} n$. Наконец, $\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i'+1}{m_i+1} = \ell^k P(\lambda) B(\lambda) \leq B(\lambda)\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \log_{n'} n$ где $B(\lambda) \leq \alpha_1 < 1$, т.е. $\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i'+1}{m_i+1} \leq \alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \log_{n'} n = \alpha(\bar{m}, k) \log_{n'} n$ и $\alpha(\bar{m}, k) < 1$. Теорема 2.3 доказана.

Конструкция, использованная при доказательстве теоремы , показывает, что в ряде случаев для уменьшения величины окрестности ячейки моделирующей ОС полезно вводить некоторую избыточность при кодировании состояний ячеек моделируемой ОС состояниями соответствующих параллелепипедов, увеличивая тем самым размеры этих параллелепипедов.

Необходимое условие в теореме 2.1 было получено в основном из геометрических соображений; следствие из теоремы 2.4 позволяет получить из мощностных соображений несколько более слабое необходимое условие, имеющее место для любой размерности. При росте размеров окрестностей ячейки в обеих ОС и росте числа состояний ячейки моделируемой ОС эти условия асимптотически совпадают и сводятся к требованию, чтобы состояниями окрестности моделирующей ОС можно было закодировать все состояния окрестности ячейки моделируемой ОС. В следующем параграфе мы выясним, в какой мере можно ослабить это ограничение на размеры окрестности моделирующей ОС, если допускать моделирование с замедлением.

§ 3. Моделирование с замедлением.

Следующая теорема показывает, что при моделировании с замедлением, не превосходящим некоторой величины Q, зависящей от параметров обеих ОС, существенного уменьшения /по сравнению с моделированием без замедления/ величины окрестности моделирующей ОС не происходит.

Теорема 2.4 [43] При $n \to \infty$ равномерно по $\bar{m}$ и k почти все ОС из $S(k, n, \bar{m})$ представимы с замедлением, не превосходящим величины

$$Q = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'} n^k \log_{n'} n (1 - \varepsilon(n))}$$

лишь в таких классах $S(k, n', \bar{m}'), n' \leq n$, что

$$\frac{k'}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{2m_i'+1}{2m_i+1} \geq (1 - \delta(n)) \log_{n'} n.$$

Здесь $\varepsilon(n)$ и $\delta(n)$ – некоторые функции, такие, что $\varepsilon(n) > 0, \delta(n) > 0$, $\varepsilon(n) \to 0, \delta(n) \to 0$ при $n \to \infty$; k и k' – число ячеек в окрестности ячейки ОС σ и σ' соответственно.

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм.

Пусть задана ОС $\sigma \in S(k, n, \bar{m})$ с локальной функцией переходов φ. Тогда для каждого множества $P \subset E_n$ определено замыкание $\bar{P}$, являющееся наименьшим содержащим P множеством, которое вместе с каждыми элементами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ содержит и $\varphi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$. Имеет место

Лемма 1. При $n \to \infty$ равномерно по $\bar{m}$ и k доля ОС из $S(k, n, \bar{m})$, у которых существует $\alpha \in E_n$ такое, что $\overline{\{\alpha\}} = E_n$, стремится к 1.

Обозначим $Q = Q(k, n, \bar{m})$ класс всех ОС из $S(k, n, \bar{m})$, не обладающих указанным свойством. Пусть $\sigma \in Q$. Тогда для каждого $j \in E_n$ $\overline{\{j\}} = S_j \subset E_n, 1 \leq |S_j| \leq n-1$. Очевидно, $(\forall j)((\forall i)(\alpha_i \in S_j) \Rightarrow \varphi(j, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}) \in S_j)$. (14)

Класс всех ОС из $S(k, n, \bar{m})$, у которых найдутся множества

S_n, такие, что $j \in S_j$, $1 \le |S_j| \le n-1$, и выполнено (14), обозначим $Q_1(k,n,\bar m) = Q_1$. В силу вышесказанного $Q \subset Q_1$. Число элементов в Q_1, как нетрудно проверить, не превосходит $\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1}\, i^{i^{k-1}}\, n^{k-1-i^{k-1}}\right)^n = n^{nk}\left(\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1}(i/n)^{i^{k-1}}\right)^n$.

Оценим $\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1}(i/n)^{i^{k-1}}$. Имеем $\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1}(i/n)^{i^{k-1}} < \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{i^{i^{k-1}}}{n^{i^{k-1}-i+1}} + 2^{n-1} \max_{[n/2]+1 \le i \le n-1} (i/n)^{i^{k-1}}$.

Максимум $i^{i^{k-1}}/n^{i^{k-1}-i+1}$ при $2 \le i \le [n/2]$ достигается для $i=2$; находим

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1}(i/n)^{i^{k-1}} \le 1/n + \frac{2^{2^{k-1}}}{n^{2^{k-1}-1}}\cdot\frac{n}{2} + 2^{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{(n-1)^{k-1}} \le \frac{1}{n} + \frac{2^{2^{k-1}-1}}{n^{2^{k-1}-2}} + \frac{1}{e^{\frac{(n-1)^{k-1}}{n}}} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ибо $k \ge 3$. Итак, $|Q| \le n^{n^{k-n}}(1+o(1))^n = o(|S|)$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. Для заданного N^* при $n \to \infty$ равномерно по $\bar m$ и k для почти всех ОС $\sigma \in S(k,n,\bar m)$ из того, что σ $\bar\ell$-представима с замедлением, не превышающим N^*, в ОС σ' из $S(k,n',\bar m')$, где $n' < n$, вытекает $\prod_{i=1}^{k} \ell_i \ge A = n^k\left(1 - \frac{n+2(k+1)k}{n^k}\right)\log_{n'} n - \log_{n'} N^* - (n')^{k'}$.

В силу леммы 1 достаточно рассматривать лишь ОС, не входящие в $Q(k,n,\bar m)$. Обозначим $K(k,n,\bar m)$ класс всех ОС σ из $S(k,n,\bar m)\setminus Q(k,n,\bar m)$, для которых найдутся $\bar m'$, $n' < n$ и ОС σ' из $S(k,n',\bar m')$ такие, что σ $\bar\ell$-представима в σ' с замедлением N, не превосходящим N^*, причем $\prod_{i=1}^{k} \ell_i < A$. Если известен набор состояний параллелепипедов $P_{\bar\nu}$ (в σ'), кодирующих элементы из некоторого множества $R \subset E_n$, то, моделируя в σ' различные переходы ОС σ, можно найти все состояния этих параллелепипедов, кодирующие элементы из $\bar R$.

Выберем $\alpha \in E_n$ такое, что $\overline{\{\alpha\}} = E_n$. Тогда из сделанного замечания вытекает, что при заданных $\sigma', \bar\ell, N$ для задания области значений отображения ξ, кодирующего элементы E_n состояниями $P_{\bar\nu}$, достаточно задать лишь $\zeta(\alpha)$. Выбрав некоторое упорядочение всех состояний параллелепипеда со сторонами $\ell_1, \dots, \ell_k$, мы можем перенумеровать в порядке возрастания найденные элементы области значений ζ и для определения самого отображения ξ указать перестановку f множества E_n, сопоставляющую элементу $x \in E_n$ номер $\zeta(x)$. В результате по набору $(\sigma', \bar\ell, N, \zeta(\alpha), f)$ можно будет найти ξ и, следовательно, восстановить функцию переходов φ ОС σ. Следовательно, для оценки сверху $|K|$ достаточно оценить число таких наборов.

Очевидно, $(n')^{k'} \le n^{k+1}$, ибо иначе $A < 0$. Отсюда $k' \le (k+1)\log_2 n \le (k+1)n$, и нетрудно подсчитать, что существует не более $[(k+1)n]^k$ различных $\bar m'$, удовлетворяющих этому ограничению. Так как $n' < n$, то для набора $(n', \bar m')$ имеем не более $(k+1)^k n^k n < n^{k(k+1)}$ возможностей. После того, как выбраны $\bar m'$ и n', для σ' имеется не более чем $(n')^{(n')^{k'}}$ возможностей: для $\bar\ell$ – не более A^k; для N – не более N^*; для $\zeta(\alpha)$ – не более $(n')^{A}$; для f – $n!$. В результате $|K(k,n,\bar m)| \le N^* A^k (n')^A (n')^{(n')^{k'}} n!\, n^{k(k+1)}$. Подставляя значение A, найдем $|K(k,n,\bar m)| \le n!\, n^{n^k - n} = n^{n^k} o(1) = o(|S(k,n,\bar m)|)$, что и требовалось.

Лемму 2 можно интерпретировать следующим образом. Пусть $N^* = o(n^{n^k})$; $n', \bar m'$ заданы и достаточно малы по сравнению с n. Тогда для почти любой σ размеры параллелепипеда в ОС σ', кодирующего состояния ячейки ОС σ, должны быть столь велики, чтобы состояниями этого параллелепипеда можно было закодировать таблицу функции переходов любой ОС из $S(k,n,\bar m)$.

Лемма 3. При $n \to \infty$ равномерно по $\bar m$ и k для почти всех ОС σ из $S(k,n,\bar m)$ из того, что σ $\bar\ell$-представима с N-кратным замедлением в σ' из $S(k,n',\bar m')$, вытекает $N \ge \ell_i \frac{m_i}{m_i'}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Пусть ОС σ из $S(k,n,\bar m)$ представима указанным образом в ОС σ' из

$S(k, n', \bar{m}')$. Тогда состояние, которое ячейка ОС σ' принимает через V моментов времени, зависит только от состояния увеличенной в N раз ее окрестности в настоящий момент. Эта окрестность, очевидно, определяется набором $N\bar{m}' = (Nm_1', \ldots, Nm_k')$, и можно по φ' построить функцию $\tilde{\varphi}$ (полученную суперпозициями из φ'), осуществляющую данную зависимость. Легко заметить, что $\tilde{\varphi}$ определяет ОС $\tilde{\sigma}$ из $S(k, n', N\bar{m}')$, в которой σ $\bar{e}$- представима без замедления.

При доказательстве теоремы 2.1 нами было установлено, что для почти все ОС σ из $S(2, n, \bar{m})$ ($n \to \infty$ равномерно по $\bar{m}$) из того, что σ представима без замедления в ОС $\sigma' \in S(2, n', \bar{m}')$, вытекает

$$m_i' \geq m_i \ell_i + H_{ij*} - h_{ij*} \geq m_i \ell_i \quad (15)$$

Совершенно аналогично это неравенство можно доказать и для любых $k \neq 2$, причем доля ОС, для которых оно верно, стремится к 1 при $n \to \infty$ равномерно по $\bar{m}$ и k. В случае представления σ в $\tilde{\sigma}$ неравенство (15) дает $Nm_i' \geq m_i \ell_i$, или $N \geq \ell_i \frac{m_i}{m_i'}$, $i = 1, \ldots, k$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Положив

$$N^* = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'} n^k \log_{n'} n (1 - 1/\log_2 n)}$$

и воспользовавшись леммами 2 и 3, получим, что для почти всех (при $n \to \infty$, равномерно по $\bar{m}$ и k) ОС $\sigma \in S(k, n, \bar{m})$ из того, что σ $\bar{e}$ -представима с замедлением, не превосходящим N^* в ОС σ' из $S(k, n', \bar{m}')$, где $n' < n$, вытекает $\prod_{i=1}^{k} \ell_i \geq A = n^k \left(1 - \frac{n + 2(k+1)k}{n^k}\right) \log_{n'} n - \log_{n'} N^* - (n')^{k'}$,

а также $N^* \geq \ell_i \frac{m_i}{m_i'}$, $i = 1, \ldots, k$

Если $A \leq 0$, то заведомо выполнено приведенное ниже неравенство (16). Покажем, что оно верно и для $A > 0$. Имеем $N^* \geq \max\{\ell_1 \frac{m_1}{m_1'}, \ldots, \ell_k \frac{m_k}{m_k'}\}$

Если рассмотреть все наборы $\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$, где $\ell_i > 0$, $\prod_{i=1}^{k} \ell_i \geq A$, то наименьшее значение, равное $\sqrt[k]{A \prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'}}$

этот максимум имеет при $\ell_1 \frac{m_1}{m_1'} = \ldots = \ell_k \frac{m_k}{m_k'}$, $\prod_{i=1}^{k} \ell_i = A$

Отсюда $N^* \geq \sqrt[k]{A \prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'}}$,

или подставляя значение N^* и возводя обе части неравенства в k -ю степень, $\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'} n^k \left(1 - \frac{1}{\log_2 n}\right)^k \log_{n'} n \geq A \prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'}$

Сокращая на $\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'}$, опуская степень при $\left(1 - \frac{1}{\log_2 n}\right)$ и подставляя значение A, найдем

$$(16): \quad n^k \left(1 - \frac{1}{\log_2 n}\right) \log_{n'} n \geq n^k \left(1 - \frac{n + 2(k+1)k}{n^k}\right) \log_{n'} n - \log_{n'} N^* - (n')^{k'}$$

Нетрудно заметить, что $N^* \leq \sqrt[k]{k n^{k+1}} \leq n^{2k}$. Подставив это в (16), найдем

$$(n')^{k'} \geq n^k \left(\frac{1}{\log_2 n} - \frac{n + 2(k+2)k}{n^k}\right) \log_{n'} n \quad (17)$$

Так как $k = \prod_{i=1}^{k} (2m_i + 1) \geq 3^k \geq 2k+1$, то $\frac{n + (2k+4)k}{n^k} \leq \frac{n + (k+3)k}{n^k}$,

причем наибольшее значение $\frac{n+18}{n^3}$ это выражение имеет для наименьшего k, т.е. для $k = 3$. Поэтому скобка в правой части (17) оценивается снизу выражением $B = \frac{1}{\log_2 n} - \frac{n+18}{n^3}$, что заведомо положительно при $n \geq 5$. Прологарифмировав (17), в котором скобка в правой части заменена выражением B, а также отбросив член $\log_{n'} \log_{n'} n > 0$, будем иметь $k' > k \log_{n'} n \quad \log_{n'} \left(\frac{n^3 \log_2 n}{n^3 - \log_2 n (n+18)}\right)$,

$k' \quad (1 \ \delta) \log_{n'} n$, где $0 \quad \log_{n'} (1/B) / k \log_{n'} n \leq \frac{\log_{n'} (1/B)}{3 \log_{n'} n}$

[illegible]

Имеем $\frac{1}{B} \le \log_2 n + \frac{(\log_2 n)^2 (n+18)}{n^3 - \log_2 n (n+18)} \le \log_2 n + \frac{n^2 (n+18)}{n^3 - n(n+18)} < \log_2 n + 2$

< 22. В результате получаем $h' \ge (1-\delta) \log_{n'} n$,

где $\le \frac{\log_2(\log_2 n + 2)}{3 \log_2 n} \le \frac{\log_2(3\log_2 n)}{3\log_2 n}$. Теорема 2.4 доказана.

Так как при $h' \le h \log_{n'} n$, $n' \le n$ и $n \to \infty$ величина Q стремится к ∞, получаем

Следствие. При $n \to \infty$ равномерно по $\bar{m}$ и k почти все OC из $S(k,n,\bar{m})_k$ представимы без замедления лишь в OC из классов $S(k,n',m')$ таких, что $\prod_{i=1}^{k} \frac{2m_i'+1}{2m_i+1} \ge \log_{n'} n(1-\delta(n))$, где $\delta(n)$ – некоторая функция, стремящаяся к 0 при $n \to \infty$.

Оказывается, что при моделировании с замедлением, несколько большим Q, существенных ограничений на размеры окрестности моделирующей OC не возникает.

Теорема 2.5 [43] Если $k \ge 2$, $n' \ge c(k)$, $m_i' \ge 3$, то любая OC из $S(k,n,\bar{m})$ представима с замедлением в некоторой OC из $S(k,n,\bar{m}')$. При $n \to \infty$, $n' \to \infty$, $n' < n$, $h' \le h \log_{n'} n$ это замедление можно выбрать асимптотически равным $\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'} n^k \log_{n'} n}$

Для доказательства теоремы мы построим класс универсальных OC σ', ограничившись для простоты случаем $k = 2$; при $k > 2$ имеют место аналогичные конструкции и оценки.

Пусть заданы $\bar{m}'$, где $m_i' \ge 3$, $i = 1, 2$, а также $n \ge 20$. В множестве $E_{n'}$ выделим 18 вспомогательных состояний, которые обозначим

$0, x_i\ (1 \le i \le 18), \tau_1, \tau_2, \nu, \mu, \rho_1, \rho_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Оставшиеся состояния обозначим $1, 2, \ldots, r$, где $r = n' - 18$. Опишем функцию переходов φ' универсальной OC $\sigma' \in S(r, n', \bar{m}')$. Для этого укажем набор правил изменения состояния ячейки α, соответствующих тем или иным ситуациям в $V(\alpha)$. Если состояние $V(\alpha)$ не допускает применения ни одного из этих правил, либо допускает применение более чем одного, то состояние α не изменяется. Для описания правил нам будет удобно выделить в $V(\alpha)$ ряд ячеек, как указано на рис. 150 и обозначить их состояния $A, B, \ldots, G, H, K, L, M, A_i\ (i = 1, \ldots, 8)$. Состояние, в которое переходит α, обозначаем A'.

Рис. 150

1. Пусть $D = x_i$. Тогда $A' = A$.

2. Если $B = \tau_1$, то $A' = G$, если же $B = \tau_2$, то $A' = D$.

В случае 1 x_i, а в случае 2 τ_i служит, таким образом, адресом ячейки, состояние которой перенимает α. Назовем линией последовательность ячеек $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, рядом с каждой из которых (кроме первой) расположен адрес предыдущей ячейки. Если каждый из этих адресов есть x_j, то говорим, что линия имеет направление x_j. Правило введено для того, чтобы при необходимости можно было менять значение по $\mathrm{mod}\ m_i$ i-й координаты ячеек линии.

Приводимые ниже правила позволят нам промоделировать в σ поведение некоторых автоматов $\mathfrak{A}_i$, каждый из которых будет иметь несколько входов и выходов. Правила 1 и 2 позволяют срединять в σ' произвольным образом эти входы и выходы и тем самым моделировать поведение различных сетей, составленных из автоматов $\mathfrak{A}_i$. Используемые для соединения линии на рисунках будем изображать ломаными, направления отрезков которых будут воспроизво-

дить направления соответствующих линий.

Правила 1 и 2 дают возможность разветвлять линию и устраивать пересечение двух линий (так как $m_i' \geq 2$); для того чтобы можно было склеить две линии, нам придется ввести еще одно правило.

3. Пусть $D = \nu$. Тогда $A' = G$ при $A_5 = 0$, иначе $A' = A_5$.

Здесь ячейка, расположенная слева от α, а также ячейка, находящаяся на m_2' ниже α, являются последними ячейками склеиваемых линий. Если по второй из них передаются ненулевые сигналы, то α воспроизводит их и не реагирует на сигналы, приходящие по первой линии, иначе она воспроизводит и эти сигналы.

Перейдем к описанию автоматов $\mathfrak{A}_i$. Автомат $\mathfrak{A}_1$ имеет два входа и один выход. Он пропускает на выход значение первого входа, если одновременно на второй вход подано ненулевое значение; в противном случае его выход принимает нулевое состояние. Для реализации $\mathfrak{A}_1$ в σ' вводится правило.

4. Пусть $D = \mu$. Тогда $A' = A_7$ при $G \neq 0$ и $A' = 0$ при $G = 0$. Первым входом $\mathfrak{A}_1$ служит ячейка, расположенная на m_1 левее α, вторым – ячейка слева от α; выходом служит сама ячейка α.

Автомат $\mathfrak{A}_2$ имеет один вход и два выхода. При подаче на вход $\mathfrak{A}_2$ записи числа x, $0 \leq x \leq r^n - 1$, на его первом выходе возникает запись числа $x-1$ (если $x = 0$, то запись $r^n - 1$). На втором выходе возникает 1 при $x = 0$ и 0 при $x \neq 0$. Набор правил, позволяющих промоделировать $\mathfrak{A}_2$, следующий.

5. Пусть $D = \rho_1$. Тогда при $A_5 \in \{2, \dots, r\}$ $A' = A_5 - 1$, а при $A_5 = 1$ $A' = r$.

6. Пусть $F = \rho_1$, $H = 1$. Тогда $A' = 1$.

7. Пусть $D = \rho_2$, $K = 1$. Тогда при $A_5 \in \{2, \dots, r\}$ $A' = A_5 - 1$, а при $A_5 = 1$ $A' = r$.

8. Пусть $F = \rho_2$, $A_4 = 1$, $H = 1$. Тогда $A' = 1$.

9. Пусть $A = 1$, $F \in \{\rho_1, \rho_2\}$. Тогда $A' = 0$.

10. Пусть $D = \rho_2$, $K \neq 1$. Тогда $A' = A_5$.

На рис. 151 изображено устройство автомата $\mathfrak{A}_2$ (указаны все ячейки, участвующие в его работе). Входом служит группа ячеек $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, на которую подается набор $B_1+1, \dots, B_n+1$, определяющий число $x = \sum_{i=0}^{n-1} e_{i+1} r^i$. Правила 5–10 реализуют обычный процесс вычитания единицы, ход его нетрудно проследить по рис. 151. Отметкой о переносе единицы из $i+1$-го разряда служит 1 в ячейке γ_i. Если $x = 0$, то эта единица беспрепятственно доходит до ячейки γ_n, которая и служит вторым выходом автомата $\mathfrak{A}_2$. Запись числа $x-1$ появляется в ячейках $\beta_1, \dots, \beta_n$. Существенным является одновременное возникновение разрядов подаваемого на вход $\mathfrak{A}_2$ числа на каждой из n входных линий. Для обеспечения такой синхронности можно создавать на линиях задержки, вставляя между соседними на линии ячейками α_1 и α_2 ячейку β, например, так, как это указано на рис. 152. В дальнейшем, описывая сети из $\mathfrak{A}_i$, будем предполагать, что задержки, обеспечивающие необходимую синхронность, уже расставлены на соединительных линиях.

рис.151

рис.152

Автомат $\mathfrak{A}_3$ имеет два входа и один выход. Он используется для

хранения и выдачи информации. Состояниями $\mathfrak{A}_3$ служат элементы некоторого множества $\mathfrak{M}$, а также особое состояние 0. Если на первый вход $\mathfrak{A}_3$ подается 1, причем состояние $x \in \mathfrak{M}$, то на выходе возникает x, и автомат переходит в состояние 0. Если же $\mathfrak{A}_3$ находится в состоянии 0 и на его второй вход подан элемент $x \in \mathfrak{M}$, то он переходит в состояние x. Для реализации $\mathfrak{A}_3$ вводятся следующие правила.

11. Пусть $A \in \{1, \dots, r\}$, $B = \varepsilon_1$, $D \notin \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$. Тогда $A' = \varepsilon_1$.
12. Пусть $A = \varepsilon_1$, $D \in \{1, \dots, r\}$, $E \notin \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$. Тогда $A' = D$.
13. Пусть $A \in \{1, \dots, r\}$, $B \in \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$, $L = \varepsilon_1$. Тогда $A' = \varepsilon_1$.
14. Пусть $A = \varepsilon_1$, $E \in \{x_2, x_4, x_6, x_8\}$, $M \in \{1, \dots, r\}$. Тогда $A' = M$.
15. Пусть $A = 0$, $G = \varepsilon_2$, $D \in \{1, \dots, r\}$. Тогда $A' = \varepsilon_2$.
16. Пусть $G = 1$, $D = \varepsilon_3$. Тогда $A' = \varepsilon_2$.
17. Пусть $D = \varepsilon_2$, $E \in \{1, \dots, r\}$. Тогда $A' = E$.
18. Пусть $A \in \{1, \dots, r\}$, $B = \varepsilon_2$. Тогда $A' = \varepsilon_1$.
19. Пусть $A = \varepsilon_2$, $D = E = \varepsilon_1$. Тогда $A' = 0$.
20. Пусть $A = \varepsilon_2$, $D = \varepsilon_3$. Тогда $A' = 0$.
21. Пусть $D = \varepsilon_2$, $E = \varepsilon_1$. Тогда $A' = 0$.

Устройство $\mathfrak{A}_3$ показано на рис. 153. Первым входом служит ячейка γ, вторым – группа ячеек $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Выходом является группа ячеек $\beta_1, \dots, \beta_s$.

рис.153

рис.154

Элементы $\mathfrak{M}$ кодируются состояниями некоторых ячеек заштрихованных на рис. 153 вертикальных полос; эти ячейки могут находиться в состояниях из $\{1, 2, \dots, r\}$. Единственными ячейками из заштрихованной области, не относящимися к $\mathfrak{A}_3$, могут быть ячейки линий с направлениями x_2, x_4, x_6, x_8, пересекающих эту область. Правила 11–21 подобраны так, что если при этом друг под другом на расстоянии, меньшем 2, не окажется двух ячеек в состоянии x_i, работа $\mathfrak{A}_3$ не нарушится. Предполагается, что в каждой вертикальной полосе ровно ℓ ячеек относится к $\mathfrak{A}_3$.

При появлении 1 на входе γ, как нетрудно проверить, ячейки, расположенные под $\beta_1, \dots, \beta_s$, переходят последовательно в состояние ε_2. Изменения, происходящие далее в каждой из полос, можно проследить на рис. 154. Особо рассмотрен случай пересечения (рис. 154,б) полосы с линией направления x_i. Видно, что состояния $a_1, a_2, \dots$ ячеек, кодирующих состояние $\mathfrak{A}_3$, последовательно (с промежутком в один такт) появляются в ячейке выхода β_j. Процесс продолжается $\sim 2\ell + s$ тактов, после чего все ячейки полос, относящиеся к $\mathfrak{A}_3$, переходят в состояние ε_1, а ячейки, расположенные под $\beta_1, \dots, \beta_s$, возвращаются в нулевое состояние. Аналогично происходит заполнение полос при подаче сигналов из $\{1, \dots, r\}$ на входы $\alpha_1, \dots, \alpha_s$.

Опишем способ представления $OC\,\sigma$ из $S(2, n, \bar{m})$ в $OC\,\sigma'$, для реализации которого мы и воспользуемся сетями из автоматов $\mathfrak{A}_i$. Заметим, что если некоторая $OC\,\sigma$ из $S(2, n, \bar{m})$ представима в $OC\,\sigma'$ из $S(2, n', \bar{m}')$, то при повороте решеток обоих OC на $90°$ получаются новые

$OC\,\sigma_1$ и σ_1', причем σ_1, очевидно, представима в σ_1 с тем же замедлением, что и σ в σ'. Векторы, определяющие шаблоны соседства этих , получены из соответствующих векторов $\bar{m}$ и $\bar{m}'$ перестановкой компонент. Если теперь положить $\tau_i = \frac{m_i'}{m_i}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1' m_2'}}$,

то при указанной перестановке τ_1 перейдет в τ_2 и наоборот. Поэтому, если теорема доказана в случае $\tau_1 \le \tau_2$, она верна и при $\tau_2 \le \tau_1$. Приводимые ниже конструкции можно осуществить для любых $n' \ge 20$, $m_i' \ge 3$, n и $\bar{m}$, однако подбор параметров и оценки будут производиться в предположении $\tau_1 \le \tau_2$ $n' \to \infty$, $n \to \infty$, $n' < n$, $h' \le h \log_{n'} n$.

Пусть P_α – прямоугольник со сторонами ℓ_1 и ℓ_2 (в σ'), кодирующий своими состояниями состояния ячейки α в $OC\,\sigma$. В центре P_α находится автомат $\mathfrak{A}_3$, который и служит собственно для хранения записи состояния α. Кроме того, в P_α расположены h автоматов $\mathfrak{A}_3$, каждый из которых хранит таблицу функции $\varphi_i(x_1,\dots,x_{h-1}) = \varphi(i, x_1, \dots, x_{h-1})$, $i = 0, \dots, n-1$, где φ – функция переходов $OC\,\sigma$. При $h' \to \infty$, $\tau \sim n'$, так что каждый такой автомат будет содержать асимптотически $n^{h-1}\log_{n'} n$ ячеек, а весь P_α, в предположении, что размеры вспомогательных конструкций малы по сравнению с числом ячеек, используемых для хранения функции переходов $OC\,\sigma$, будет содержать асимптотически $n^h \log_{n'} n$ ячеек.

Вычисление значения $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{h-1})$, где набор $(x_0, x_1, \dots, x_{h-1})$ определяет состояние $V(\alpha)$, и соответствующее изменение записи состояния α в P_α происходят за N тактов функционирования σ' следующим образом.

1. К центру P_α доставляется из центра каждого P_β такого, что $\beta \in V(\alpha)$, запись состояния ячейки β. Это осуществляется при помощи системы линий, исходящих из центра каждого P_β и ведущих к центрам соседних P_α (т.е. таких, что $\beta \in V(\alpha)$). Выберем $\ell_i \sim \tau_i \sqrt{n^h \log_{n'} n}$. Так как $m_i' \le h' \le h \log_{n'} n$, то $m_i' = o(\ell_i)$. Поэтому, если центр P_β имеет координаты (x_1, x_2), а центр P_α – (y_1, y_2), причем $x_i \ne y_i$, то $m_i' = o(|x_i - y_i|)$, и при расположении линий на рис. 155 сигналы из центра P_β к центру P_α будут приходить за время, асимптотически равное $\max_{i=1,2} |x_i - y_i| / m_i'$

рис.155

Наибольшее из таких времен асимптотически равно $\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1' m_2'} n^h \log_{n'} n}$ оно и будет фактически определять величину замедления. Число наклонных линий, проходящих через каждый P_α, не превосходит, очевидно, $2h$.

2. Одновременно к центру P_α доставляется из соответствующего автомата $\mathfrak{A}_3$, расположенного в P_α, запись таблицы функции $\varphi_{x_0}(x_1, \dots, x_{h-1})$, где x_0 – состояние ячейки α. Для этого из центра P_α сначала посылается сигнал с указанием адреса нужного $\mathfrak{A}_3$, который достигает последнего за время, асимптотически не превосходящее $\frac{1}{2}\max\left\{\frac{\ell_1}{m_1'}, \frac{\ell_2}{m_2'}\right\}$

после чего копия таблицы φ_{x_0} посылается к центру P_α. На весь процесс уходит асимптотически не более $\max\left\{\frac{\ell_1}{m_1'}, \frac{\ell_2}{m_2'}\right\}$

тактов.

3. После завершения процессов 1 и 2 в центре P_α оказываются информация о состоянии $V(\alpha)$ и таблица функции $\varphi_{x_0}(x_1, \dots, x_{h-1})$, по которым и находится запись состояния, в которое переходит α.

Опишем устройство сети из автоматов $\mathfrak{A}_i$, осуществляющей доставку таблицы φ_{x_0} к центру P_α. Прежде всего рассмотрим конструкцию, позволяющую вос-

...вливать состояние $\mathfrak{A}_i$ после считывания таблицы. Можно было бы пользо-
...ься конструкцией на рис. 156,а ,

рис. 156

однако при этом ширина прямоугольника, содержащего $\mathfrak{A}_3$ с линиями восстановления, увеличилась бы вдвое, и соответственно увеличились бы размеры P_α. Поэтому будет использован блок на рис. 156,б , который обслуживает сразу q автоматов $\mathfrak{A}_3$. Этот блок обозначаем далее $\mathfrak{B}_1$. Пусть $0<\varepsilon_1<1/2$, $0<\varepsilon_2<1/2$ и ℓ, s – параметры автоматов $\mathfrak{A}_3$. Выберем $\ell \sim \tau_2 n^{(h/2)-\varepsilon_2}$, $s \sim \tau_1 n^{\frac{h}{2}+\varepsilon_1-1}\log_{n'} n$, $q \sim n^{\varepsilon_2}$. Так как $\tau_1 \le \tau_2$, то $s=o(\ell)$. Из $m_1' \le h's\log_{n'} n$ вытекает $m_1'=o(s)$, $m_2'=o(\ell)$. Поэтому соединительные линии не вносят вклада в асимптотику ширины λ_1 и высоты λ_2 прямоугольника, содержащего блок $\mathfrak{B}_1$, так что

$$\lambda_1 \sim sq \sim \tau_1 n^{\frac{h}{2}+\varepsilon_1+\varepsilon_2-1}\log_{n'} n = o(\ell_1) \text{ и } \lambda_2 \sim \ell = o(\ell_2)$$

При размещении блоков $\mathfrak{B}_1$ внутри P_α может возникнуть необходимость пересечения их наклонными линиями из сети, доставляющей к центру каждого P_β информацию о состоянии $V(\beta)$. Чтобы линия не пересекала верхнюю или нижнюю сторону $\mathfrak{A}_3$, а проходила через его боковую сторону, в промежутках между соседними автоматами $\mathfrak{A}_3$ блока $\mathfrak{B}_1$ устраивается изгиб линии, смещающий ее вниз или вверх на нужное число ячеек. Число наклонных линий из указанной сети, проходящих через P_α, не превосходит, как замечено выше, $2h=o(\ell)$. Поэтому их пересечение с блоком $\mathfrak{B}_1$ не влияют на асимптотику λ_1 и λ_2. Нетрудно проверить, что изгибы этих линий не увеличивают также асимптотику их длины. На рис. 156,б , кроме линий сети восстановления, указана также цепь из автоматов $\mathfrak{A}_2$, служащая для подачи считывающего сигнала на нужный автомат $\mathfrak{A}_3$. Именно, при подаче на входы $\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu_1}$ записи числа i, $0 \le i \le q-1$, сигнал поступает на вход $(i+1)$-го справа автомата $\mathfrak{A}_3$. Выберем $\nu_1 = \lceil \log_2 q \rceil \le \varepsilon_2 \log_{n'} n + 1$.

При размещении блоков $\mathfrak{B}_1$ в P_α последний разбивается на области $S_1, \dots, S_8$, как это указано на рис. 157 . В каждой из этих областей расположена сеть, служащая для отыскания автомата $\mathfrak{A}_3$, хранящего таблицу φ_{τ_0}, и передачи записи этой таблицы к центру P_α. На рис. 158 приведено устройство сети, расположенной в области S_1; сети в областях $S_2, \dots, S_8$ устроены аналогично. Стрелками на рис. 158 обозначены системы линий одинакового направления. На вход A подается запись набора чисел (i_3, i_2, i_1), служащего адресом отыскиваемого $\mathfrak{A}_3$. Каждый блок $\mathfrak{B}_2$, расположенный вдоль системы наклонных линий, ведущих от A, при $i_3>0$ вычитает из i_3 единицу, а при $i_3=0$ посылает на горизонтальную ветку запись набора (i_2, i_1). Возможная схема такого блока приведена на рис. 159 .

рис. 157

рис 158

рис.159

Блоки $\mathfrak{B}_2$, расположенные на горизонтальной ветке, вычитают единицу из i_2 до тех пор, пока не окажется $i_2 = 0$, после чего на вход соответствующего блока $\mathfrak{B}_1$ подается запись числа i_1. В результате на выходе $\mathfrak{B}_1$ возникает запись таблицы φ_{x_0}, полученной из (i_1+1) -го автомата $\mathfrak{A}_3$ этого блока, которая перемещается к выходу B. Выберем числа v_2 и v_3 линий, по которым передаются i_2 и i_3. Для областей S_1, S_4, S_5, S_8 достаточно положить $v_2 =]\log_2 \frac{\ell_1}{2\lambda_1}[$, $v_3 =]\log_2 \ell_2/2\lambda_2[$ а для S_2, S_3, S_6, S_7 — $v_2 =]\log_2 \frac{\ell_2}{2\lambda_2}[$, $v_3 =]\log_2 \frac{\ell_1}{2\lambda_1}[$

В обоих случаях, как нетрудно проверить, $v_1 + v_2 + v_3 \lesssim \log_n n + 3$

Для выбора области S_i, содержащей таблицу φ_{x_0}, в центре P_α располагается цепочка из восьми блоков $\mathfrak{B}_2$, на вход которой подается запись четверки чисел (i_4, i_3, i_2, i_1), где i_4+1 — номер области S_i. Боковые выходы этих блоков соединяются со входами сетей, расположенных в соответствующих областях. Для передачи i_4 требуется не более трех линий, поэтому $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \lesssim \log_n n + 6$

Опишем устройство таблицы φ_{x_0}. Пусть $p = n^{[\frac{h-1}{3}]}$. Очевидно, $p = o(s)$ так что s можно выбрать делящимся на p. Разобьем вертикальные полосы автомата $\mathfrak{A}_3$ на группы по s/p полос. В группе с номером

$$j = \sum_{i=1}^{[h-1/3]} x_i n^{i-1} + 1$$

будем записывать значения φ_{x_0}, соответствующие набору $(x_1, \ldots, x_{[\frac{h-1}{3}]})$ значений первых $[\frac{h-1}{3}]$ аргументов.

Выберем $d = [\log_2 n]$ и разобьем все значения φ_{x_0}, соответствующие заданному набору $(x_1, \ldots, x_{[h-1/3]})$, на наборы по d значений; если последний набор содержит $d' < d$ значений, то к нему присоединяются произвольные $d - d'$ элементов из E_n. Для записи каждого такого набора $y_1, \ldots, y_d$, который можно рассматривать в качестве n -ичного числа, используется набор $(z_1+1) \ldots (z_u+1)$, где $z_1 \ldots z_u$ — 2 -ичная запись того же числа. Очевидно, достаточно положить $u =]d \log_2 n[$. Каждая вертикальная полоса автомата $\mathfrak{A}_3$ разбивается на группы по u ячеек; так как $u = o(\ell)$, то можно выбрать ℓ делящимся на u. В этих группах и размещаются произвольно (внутри соответствующих s/p полос) записи указанных наборов. Ячейки используемых групп находятся в произвольных состояниях из $\{1, \ldots, r\}$. Нетрудно проверить, что выбранные асимптотики ℓ и s позволяют разместить указанным образом записи всех значений φ_{x_0}.

Перейдем к описанию сети, вычисляющей по таблице значение $\varphi_{x_0}(x_1, \ldots, x_{h-1})$. Склеим выходы сетей, расположенных в областях $S_1, \ldots, S_8$, и получившуюся систему из s линий соединим со входами p автоматов $\mathfrak{A}_3$, имеющих параметры ℓ и $w = s/p$, так, чтобы в j -м автомате $\mathfrak{A}_3$ оказалась j -я группа из s/p вертикальных полос таблицы φ_{x_0}. Указанные автоматы будем обозначать далее $A_1, \ldots, A_p$.

Состояние x ячейки $O \subset \sigma$ будем кодировать набором $\langle i_4, i_3, i_2, i_1 \rangle$, адресующим автомат $\mathfrak{A}_3$ с таблицей φ_x. Линии, проводящие к центру P_α элементы $(x_1, \ldots, x_{[\frac{h-1}{3}]})$ набора, определяющего состояние $V(\alpha) \setminus \alpha$, соединяются со входами автомата $\mathfrak{A}_3$, имеющего $[\frac{h-1}{3}]$ вертикальных полос. Набор $(x_{[\frac{h-1}{3}]+1}, \ldots, x_{h-1})$ записывается в другом автомате $\mathfrak{A}_3$. Нам понадобятся два вспомогательных блока. На рис. 160 изображен блок $\mathfrak{B}_3$. Задержки подобраны так, что если на вход α_1 подавать последовательность $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ и одновременно на вход α_2 подать ненулевой сигнал, то через некоторое время

на выходе β_i, $i=1, \ldots, m$, возникнет γ_i. На рис. 161

рис. 160

рис. 161

изображен блок $\mathcal{B}_4$. На выходе этого блока через каждые N тактов, где N - величина замедления, возникает сигнал. Запись числа N/ℓ^*, где ℓ^* - длина цикла, связанного с автоматом $\mathcal{U}_2$, хранится в автомате $\mathcal{U}_3$. Задержки подобраны так, что это число приходит от $\mathcal{U}_3$ к месту склейки выходных и входных линий $\mathcal{U}_2$ одновременно с набором $(\tau, \ldots, \tau)$ который возникает на выходе $\mathcal{U}_2$ после того, как на его входе возникла запись нуля. В результате набор $(\tau, \ldots, \tau)$ удаляется из цикла автомата $\mathcal{U}_2$. Блоки $\mathcal{B}_4$ с соответствующим образом смещенными моментами возникновения сигнала на выходе используются для последовательного запуска следующих процессов.

I. По набору $(x_1, \ldots, x_{[k-1/3]})$ находится автомат A_j с номером

$$j = \sum_{i=1}^{[k-1/3]} x_i n^{i-1} + 1,$$

и содержимое этого автомата пересылается в ω автоматов $\mathcal{U}_3$, каждый из которых содержит одну вертикальную полосу длины ℓ. Последние автоматы обозначим $B_1, \ldots, B_\omega$. Для реализации такого процесса сигнал с выхода блока $\mathcal{B}_4$ поступает на вход автомата $\mathcal{U}_3$ хранящего $(x_1, \ldots, x_{[k-1/3]})$. Далее запись набора $(x_1, \ldots, x_{[k-1/3]})$, рассматриваемая как $\left[\frac{k-1}{3}\right]v$ -разрядное число i^*, проходит через цепочку автоматов $\mathcal{U}_2$, в результате чего на выходе (i^*+1) -го из этих автоматов, соединенном со входом автомата A_j, возникает сигнал. Выходы всех A_i склеены и образуют ω линий, каждая из которых соединена со входом соответствующего автомата B_i.

2. По набору $(x_{[k-1/3]}, \ldots, x_{k-1})$ находятся записи чисел i^*, j^* и k^* таких, что $\varphi_{x_0}(x_1, \ldots, x_{k-1})$ хранится в (j^*+1) -й сверху группе из u ячеек автомата B_{i^*+1} и является (k^*+1) -м элементом набора, кодируемого этой группой. Для этого набор $[x_{[\frac{k-1}{3}]+1}, \ldots, x_{k-1}]$ пропускается через цепочку блоков $\mathcal{B}_2$, изображенную на рис. 162.

рис. 162

Набор $(x_{[\frac{k-1}{3}]+1}, \ldots, x_{2[\frac{k-1}{3}]})$ рассматривается как запись числа i', а $(x_{2[\frac{k-1}{3}]+1}, \ldots, x_{k-1})$ - как запись числа j'; $(i'+1)$-й блок $\mathcal{B}_2$ пропускает запись j' на горизонтальную цепочку автоматов $\mathcal{U}_2$, после чего $(j'+1)$-й автомат этой цепочки подает считающий сигнал на соединенный с его выходом автомат $\mathcal{U}_3$. В трех вертикальных полосах этого автомата хранятся соответственно записи i^*, j^* и k^*. Длина полос асимптотически не превосходит $\log_2 \frac{\ell}{u} \sim (\frac{k}{2} - \varepsilon_1) \log_n n$. Каждый $\mathcal{U}_3$ имеет свои линии восстановления; выходы всех $\mathcal{U}_3$ склеены в три линии, по которым направляются записи i^*, j^* и k^*. Эти линии соединены со входами автоматов $\mathcal{U}_3$, которые будем обозначать C_1, C_2 и C_3. Нетрудно проверить, что размеры описанной сети сколь угодно малы по сравнению с ℓ_1 и ℓ_2.

3. Содержимое автомата B_{i^*+1} пересылается в некоторый автомат $\mathcal{U}_3$, ко-

торый далее обозначаем D. Для этой цели запись i^+, хранящаяся в C_1, пропускается через блок $\mathcal{B}_3$ и далее проходит через цепочку автоматов $\mathcal{U}_2$, соединенных со входами автоматов B_i.

4. Последовательно расположенные группы по u ячеек перемещаются из D в ℓ/u автоматов $\mathcal{U}_3$, которые обозначаем $E_1, \dots, E_{\ell/u}$. Для этого выход D соединяется со входом блока $\mathcal{B}_3$, ℓ выходных линий которого разбиваются на группы по u линий и с соответствующими задержками склеиваются в каждой такой группе в одну линию; последняя и соединяется со входом автомата E_i.

5. Запись набора $y_1, \dots, y_d$, содержащего $\varphi_{x_0}(x_1, \dots, x_{k-1})$, хранится теперь в автомате E_{j+1}; она извлекается оттуда и записывается в отдельном автомате $\mathcal{U}_3$ (обозначим его F) так же, как это происходило в 3.

6. Запись набора $y_1 \dots y_d$, рассматриваемая, как запись некоторого числа i, пропускается через цепочку автоматов $\mathcal{U}_2$, в результате чего на выходе $(i+1)$-го автомата $\mathcal{U}_2$ появляется сигнал. Этот выход соединяется со входом автомата $\mathcal{U}_3$, имеющего d вертикальных полос и хранящего в них записи состояний $y_1, \dots, y_d$ (записью y_j служит адрес (i_4, i_3, i_2, i_1) автомата $\mathcal{U}_3$ с таблицей φ_{y_j}). Набор состояний $y_1, \dots, y_d$ пересылается в d автоматов $\mathcal{U}_3$, которые обозначим $G_1, \dots, G_d$.

7. Запись $\varphi_{x_0}(x_1, \dots, x_{k-1})$ хранится теперь в автомате G_{k+1}; она извлекается оттуда и записывается в отдельном автомате $\mathcal{U}_3$ (обозначим его H) так же, как это происходило в 3.

8. Для завершения цикла моделирования перехода ОС σ на входы автоматов A_i, B_i, D, E_i, F, G_i подаются последовательно сигналы, переводящие их в исходное состояние; прочие автоматы (кроме H) уже находятся в этом состоянии.

В начале следующего цикла запись состояния d из автомата H направляется по линиям, ведущим к центрам соседних P_β, а также, пропущенная через блок $\mathcal{B}_3$, к сети, отыскивающей таблицу φ_{x_0}.

Нетрудно проверить, что указанная конструкция не дает вклада в асимптотику размеров P_α. Кроме того, описанная процедура вычисления $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ занимает время, сколь угодно малое по сравнению с $\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1' m_2'} n^k \log_{n'} n}$

Поэтому при $n' \to \infty, n \to \infty$ замедления, с которым σ представима указанным образом в σ', асимптотически равно $\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1' m_2'} n^k \log_{n'} n}$

Теорема 2.5 доказана. Из теоремы 2.4 и 2.5 вытекает

Следствие. При фиксированных $k \geq 2, m_i' \geq 3, n' \to \infty$ и $\log_{n'} n \to \infty$ наименьшее замедление, с которым любая ОС из $S(k, n, \bar{m})$ представима в ОС из класса $S(k, n', \bar{m}')$, асимптотически равно $\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'} n^k \log_{n'} n}$.

§ 4. Распознавание универсальности ОС.

Для воспроизведения в ОС различных процессов особый интерес представляют универсальные ОС, которые могут моделировать поведение любых ОС той же размерности. В связи с этим возникают задачи распознавания универсальности ОС и построения универсальных ОС, характеризующихся минимальными значениями параметров, которые и будут рассмотрены в оставшихся параграфах данной главы.

Оказывается, что на серьезные алгоритмические трудности наталкивается не только задача распознавания универсальности ОС, но уже задача распознавания представимости одной ОС в другой. Именно, имеет место

Теорема 2.6. Пусть $k, n, n' \geq 2$ и ОС σ из $S(k, n, \bar{m})$ не является тождественной и не имеет поглощающих состояний. Тогда не существует

алгоритма, который по произвольной $OC\,\sigma'$ размерности k с n' состояниями ячейки устанавливал бы, представима ли σ в σ'.

Доказательство. Пусть $\bar{v}=(v_1,\dots,v_k)\neq 0$ – целочисленный вектор. Скажем, что OC является $\bar{v}$ – вырожденной, если выполнены условия:

1. В поведении, начинающемся с произвольной ненулевой конфигурации K, ненулевые состояния принимают лишь ячейки вида $\bar{m}+p\bar{v}$, где $\bar{m}$ – нулевая ячейка K и p – целое.

2. Существует конфигурация K, такая, что множество ячеек, хотя бы однажды принимающих в ее поведении ненулевое состояние, бесконечно.

Нетрудно проверить, что если $\bar{v}$ и $\bar{w}$ неколлинеарны, то OC не может быть одновременно $\bar{v}$ и $\bar{w}$ – вырожденной.

Для доказательства теоремы без ограничения общности рассуждений рассмотрим случай $k=2$. Кроме того, предположим сначала, что σ не обладает поглощающим состоянием, не тождественна и не является горизонтально вырожденной. Воспользуемся вспомогательной двумерной универсальной $OC\,\sigma^*$ с шаблоном соседства, изображенным на рис. 163.

рис.163

рис.164

Существование такой OC вытекает, например, из доказываемой ниже теоремы 29. Рассмотрим $OC\,\tilde{\sigma}$, в которой возможно следующее моделирование поведения $OC\,\sigma^*$: выделяется квадратная подрешетка в $\tilde{\sigma}$, в узлах которой располагаются ячейки, кодирующие состояния ячеек $OC\,\sigma^*$, причем сигналы между ними перемещаются по горизонтальным и вертикальным линиям из ячеек в особых передающих состояниях /см. рис. 164/. Прочие ячейки находятся в нулевом состоянии. Конкретное задание функции переходов такой $OC\,\tilde{\sigma}$ не вызывает затруднений.

Нетрудно установить существование машины Тьюринга T с алгоритмически неразрешимой проблемой остановки на словах без пробелов /то есть без пустых ячеек в середине слова/, причем такой, что при применении ее к этим словам выполняются условия:

1. Все промежуточные слова на ленте не имеют пробелов.

2. Если T не останавливается, то слово на ленте неограниченно расширяется вправо и влево.

3. Остановка происходит только на пустой ленте.

Положим $X=\{0,\xi_0,\dots,\xi_r\}$, где $0,\xi_1,\dots,\xi_r$ – символы, позволяющие записывать конфигурации машины T (0 обозначает пустое состояние на ленте) и ξ_0 – вспомогательный символ. Выберем начальную конфигурацию A_0 машины T, соответствующую слову без пробелов, и рассмотрим следующее ограничение на состояния двумерной решетки, ячейки которой принимают состояния из X:

1. Под всякой ячейкой в состоянии ξ_0 размещается окаймленная ℓ нулями конфигурация A_0, как это показано на рис. 165.

рис 165

2. Под всякой окаймленной ℓ нулями конфигурацией η машины T, отличной от заключительной, расположена окаймленная ℓ нулями конфигурация η', в которую переходит η, см. рис. 166.

0	...	0	η	0	...	0
0	.	0	η'	0	...	0

ℓ рис. 166 ℓ

Это ограничение носит локальный характер, поэтому можно указать /эффективно/ шаблон соседства V_{A_0} и множество состояний окрестности ячейки M_{A_0}, и множество этим шаблоном, такие, что ограничение выполняется тогда и только тогда, когда состояние окрестности каждой ячейки решетки принадлежит M_{A_0}. Потребуем, чтобы V_{A_0} включал шаблон соседства $OC\,\tilde{\sigma}$. Рассмотренное ограничение будем далее называть ограничением R.

Построим $OC\,\sigma'_{A_0}$ с шаблоном соседства V_{A_0}, состояниями ячейки которой служат состояние α и всевозможные пары (x, y), где y – состояние ячейки $OC\,\tilde{\sigma}$ и $x \in X$. Пусть $(z_0, \ldots, z_{k'-1})$ определяет состояние окрестности ячейки $OC\,\sigma'_{A_0}$, причем $z_i = (x_i, y_i)$ либо $z_i = \alpha$. Определим функцию переходов φ_{A_0} $OC\,\sigma'_{A_0}$ следующим образом:

1. Если хотя бы одно z_i равно α, то $\varphi_{A_0}(z_0, \ldots, z_{k'-1}) = \alpha$ /то есть α –поглощающее состояние/.

2. Если набор $(y_0, \ldots, y_{k'-1})$ (точнее, соответствующий шаблону соседства $OC\,\tilde{\sigma}$ поднабор) определяет состояние окрестности ячейки $OC\,\tilde{\sigma}$, не встречающееся в состояниях $OC\,\tilde{\sigma}$ вида, указанного на рис. 164, то $\varphi_{A_0}(z_0, \ldots, z_{k'-1}) = \alpha$.

3. Если $(x_0, \ldots, x_{k'-1}) \in M_{A_0}$, то $\varphi_{A_0}(z_0, \ldots, z_{k'-1}) = \alpha$.

4. Если y_0 является состоянием, используемым для кодирования состояния ячейки $OC\,\sigma^*$, то при $x_0 \neq \xi_0$ выполняется $\varphi_{A_0}(z_0, \ldots, z_{k'-1}) = \alpha$.

5. Если $\varphi_{A_0}(z_0, \ldots, z_{k'-1})$ не равно α по 1–4, то полагается $\varphi_{A_0}(z_0, \ldots, z_{k'-1}) = (x_0\, y_0')$, где y_0' определяется по набору $(y_0, \ldots, y_{k'-1})$ в соответствии с функцией переходов $OC\,\tilde{\sigma}$.

Пусть T не останавливается при переработке слова A_0 без пробелов. Предположим, что σ представима в $\sigma' = \sigma'_{A_0}$. Если в некотором состоянии $OC\,\sigma'$, появляющемся в процессе моделирования поведения $OC\,\sigma$, имеется ячейка в состоянии α, то, в силу I, область из ячеек $OC\,\sigma'$ в состоянии α неограниченно расширяется. Это означает, что некоторое состояние ячейки $OC\,\sigma$ кодируется посредством состояния прямоугольника $OC\,\sigma'$, все ячейки которого находятся в состоянии α. Нетрудно проверить, что такое состояние ячейки $OC\,\sigma$ должно быть поглощающим в противоречие с предположением о σ. Поэтому в поведениях $OC\,\sigma'$, моделирующих поведения $OC\,\sigma$, не появляются ячейки в состоянии α. Это означает, в частности, что первые компоненты состояний $OC\,\sigma'$, возникающих в таких поведениях, удовлетворяют ограничению R.

Пусть f –состояние $OC\,\sigma'$, встречающееся при моделировании поведения $OC\,\sigma$. Если ячейка a имеет в f состояние (ξ_0, y), то под ней располагаются последовательные конфигурации $A_0, A_1, A_2, \ldots$ машины T. В силу условия 2 на машину T эти конфигурации неограниченно расширяются вправо и влево. Если некоторая другая ячейка находится в состоянии вида (ξ_0, y), то под ней тоже можно выделить группу конфигураций $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Рассмотрим горизонтальные линии, на которых встречаются конфигурации из обеих групп. При перемещении вниз расстояние между конфигурациями на этих линиях будет уменьшаться и, если ℓ достаточно велико, должно будет оказаться в конце концов меньше чем ℓ. Так как это противоречит ограничению R, получаем, что в f не может быть более одной ячейки в состоянии вида (ξ_0, y).

Пусть a имеет в f состояние вида (x, y), где y используется для кодирования состояния ячейки $OC\,\sigma^*$. Тогда, учитывая условие 4 на функцию переходов φ_{A_0}, находим $x = \xi_0$ и получаем, что такая ячейка

единственная. Учитывая, далее, условие 2 на φ_{A_0}, получаем, что имеет вид, указанный на рис. 167 (изображены вторые компоненты состояний ячеек). Теперь легко заметить, что при любом сопоставлении состояниям ячейки OC_6 состояний прямоугольников в $\sigma' f$ не может служить изображением конечного состояния $OC\sigma$. Таким образом, при моделировании поведений конфигураций $OC\sigma$ вторые компоненты состояний ячеек в f не являются состояниями ячейки $OC\sigma$, используемыми для кодирования состояний ячейки $OC\sigma^*$. Так как на рис. цепочки из горизонтальных и вертикальных передающих состояний заканчиваются только на состояниях указанного вида, то, в силу условия 2 на φ_{A_0}, при наличии хотя бы одной ячейки с передающей второй компонентой состояния, f имеет вид рис. 168,а,

рис.167

а)

б)

рис.168

либо рис.168,б. Если такой ячейки нет, то все вторые компоненты нулевые, а так как по условию 5 на φ_{A_0} первые компоненты не меняются, то f изображает тождественное состояние $OC\sigma$. Очевидно, что не существует двух различных конфигураций $OC\sigma$, одна из которых кодируется состоянием $OC\sigma'$ вида рис. 168,а, а другая – вида рис. 168,б, так как тогда некоторые конфигурации $OC\sigma'$ кодировались бы состояниями, отличными от состояний вида рис. 168. Если каждая нетождественная конфигурация $Oc\sigma$ кодируется состоянием $Oc\sigma'$ вида рис. 168,а, то σ является горизонтально вырожденной, если же состоянием вида рис. 168,б, то вертикально вырожденной. Это противоречит предположению о σ и опровергает предположение о представимости σ в σ'.

Пусть теперь T останавливается при переработке конфигурации A_0. Тогда нетрудно получить представление σ в σ'_{A_0}, воспользовавшись состояниями σ'_{A_0}, у которых вторые компоненты образуют структуру на рис. 164, причем расстояния между ячейками, кодирующими состояния ячеек $OC\sigma^*$, выбраны так, чтобы соответствующие им группы конфигураций машины T не пересекались. Так как σ представима в σ^*, она будет представима и в σ'. Мы получили, что к проблеме распознавания представимости σ в OC из класса $\Sigma = \{\sigma'_{A_0}\}$ сводится проблема остановки для T и, следовательно, первая алгоритмически неразрешима. OC из Σ имеют одно и то же число состояний ячейки, поэтому доказана также неразрешимость проблемы распознавания представимости σ в классе всех OC с некоторым фиксированным числом состояний ячейки n_0.

Пусть σ_0 – OC с n_0 состояниями ячейки и $n' \geq 2$. Построим $OC\sigma'$ с n' состояниями ячейки, в которой σ_0 представима без замедления, причем состояние $i \in E_{n_0}$ кодируется состоянием квадрата, изображенным на рис. 169. Здесь каждый квадрат A состоит из нулей и единиц, причем число единиц в каждой строке и каждом столбце A равно i. Заштрихованный квадрат B состоит из единиц. Состояния $OC\sigma'$, кодирующие состояния $OC\sigma_0$, задаются теперь неко-

рис.169

торым локальным ограничением. Определим функцию переходов $ОС\sigma'$ так, чтобы при нарушении этого локального ограничения в окрестности ячейки состояние этой ячейки в следующий момент становилось равном 0. Тогда при достаточно большом шаблоне соседства $ОС\sigma'$ любое нарушение локального ограничения влечет появление расширяющейся области из ячеек в состоянии 0. При $ОС\sigma$ представима в $ОС\sigma'$, причем состояния ячеек $ОС\sigma$ кодируются состояниями прямоугольников в $ОС\sigma'$ со сторонами h_1 и h_2. Если при моделировании поведения $ОС\sigma$ используются состояния $ОС\sigma'$, не являющиеся изображениями состояний $ОС\sigma_0$, то в этих состояниях $ОС\sigma'$ появляется расширяющаяся область из нулей, так что некоторому состоянию ячейки $ОС\sigma$ должно соответствовать нулевое состояние прямоугольника. Нетрудно проверить, что такое состояние ячейки $ОС\sigma$ является поглощающим, а так как поглощающих состояний у σ по предположению нет, заключаем, что при моделировании поведений $ОС\sigma$ используются только состояния, являющиеся изображениями состояний $ОС\sigma_0$.

Из рассмотрения рис. 169 теперь можно установить, что

1. h_1 и h_2 кратны длине стороны квадрата на рис. 169.

2. Если в состоянии $ОС\sigma'$, изображающем состояние $ОС\sigma$, квадраты, соответствующие ячейкам из σ_0, смещены по отношению к прямоугольникам, соответствующим ячейкам из σ, то образованные частями квадратов края любых двух прямоугольников имеют одинаковые состояния.

Таким образом, состояния ячеек $ОС\sigma$ в действительности кодируются состояниями некоторых подпрямоугольников соответствующих этим ячейкам прямоугольников $ОС\sigma'$, причем каждый такой подпрямоугольник допускает разбиение на квадраты, кодирующие состояния ячеек в σ_0. Это позволяет передвинуть решетку прямоугольников, соответствующих ячейкам σ, так, чтобы она оказалась согласованной с решеткой квадратов, соответствующих ячейкам $ОС\sigma_0$, и чтобы при получающемся кодировании состояний ячеек $ОС\sigma$ эта $ОС$ была представима в $ОС\sigma'$. Последнее кодирование очевидным образом определяет кодирование состояний ячейки $ОС\sigma$ посредством состояний прямоугольников в $ОС\sigma_0$, при котором σ представима в σ_0.

Так как, обратно, из представимости σ в σ_0 вытекает ее представимость в σ', проблема распознавания представимости σ в классе всех $ОС$ с n_0 состояниями ячейки сведена к проблеме распознавания ее представимости в некотором специальном классе $ОС$ с n' состояниями ячейки и, следовательно, последняя алгоритмически неразрешима.

Мы доказали утверждение теоремы для $ОС\sigma$, не являющихся горизонтально либо вертикально вырожденными. Если σ горизонтально либо вертикально вырождена, то она не является ни $(1,1)$, ни $(1,-1)$ -вырожденной. Воспользовавшись этим обстоятельством, нетрудно видоизменить рассуждения, взяв вместо σ^* универсальную $ОС$ с шаблоном соседства, указанным на рис. 170 и устраивая соединения на рис. 164 по диагоналям. Теорема 2 б доказана.

рис. 170

Нетрудно установить существование универсальной $ОС$ без поглощающих состояний ячейки. Для этого достаточно рассмотреть произвольную универсальную $ОС\sigma^*$, ввести вспомогательное состояние β ее ячейки и доопределить функцию переходов φ^* так, чтобы $\varphi^*(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ равнялось x_0 на каждом наборе $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, содержащем β. Взяв в теореме в качестве σ полученную $ОС$, приходим к следующему утверждению:

Следствие. Не существует алгоритма, распознающего в классе $ОС$ данной размерности $k \geq 2$ и с данным числом $n' \geq 2$ состояний ячейки универсальную $ОС$.

Представляет интерес вопрос о существовании критерия универсальности ОС, основанного на представимости в ней некоторого множества "простых" ОС. Как показывает следующая теорема, для рекурсивно перечислимых множеств неуниверсальных ОС такого критерия не существует.

Теорема 27. Для любого рекурсивно перечислимого множества M неуниверсальных k-мерных $(k \geq 2)$ ОС существует неуниверсальная ОС, в которой представима каждая ОС из M.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{A}_k$ множество всех k-мерных ОС, не обладающих поглощающим состоянием. Докажем следующее вспомогательное утверждение:

Лемма. Для любой ОС σ из $S(k,n,\bar{m})$ существует ОС σ' размерности k, шаблон соседства которой состоит из всех векторов вида $(0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$, такая, что σ представима в σ' и каждая $\tilde{\sigma}$ из $\mathfrak{A}_k$, представимая в σ', представима в σ.

Без ограничения общности рассуждений рассмотрим случай $k=1$. Пусть $\sigma \in S(1,n,m)$. Состояниями ячейки ОС σ' служат некоторые наборы длины $2m+1$ с элементами из $E_n \cup \{*\}$, которые будем изображать в виде столбцов. При этом используется набор, состоящий из одних только $*$, обозначаемый Δ, а также всевозможные наборы вида рис. 171,

рис.171

рис.172

рис.173

где $0 \leq i \leq m$ и заштрихованы все компоненты, равные $*$. Число i назовем рангом состояния. Для определения функции переходов ОС σ' обозначим компоненты состояний A, B, C ячейки α и двух ее соседей так, как указано на рис. 172. Компоненты состояния A', в которое переходит α, обозначаем $A'_0, A'_1, A'_{-1}, \ldots$. Положим:

1. Если $\Delta \in \{A, B, C\}$, то $A' = \Delta$.
2. Если ранги каких-то двух состояний из $\{A, B, C\}$ различны, то $A' = \Delta$.

Ниже считаем, что ранги состояний A, B, C равны i.

3. Если для некоторого j, $-i \leq j \leq i-1$, нарушается требование $A_j = B_{j+1}$, $C_j = A_{j+1}$, то $A' = \Delta$.

Если не имеет места случаи 1–3, то

4. При $i < m$ полагаем $A'_{i+1} = C_i$, $A'_{-i-1} = B_{-i}$ и $A'_j = A_j$ для всех прочих j.
5. При $i = m$ полагаем $A'_0 = \varphi(A_0, A_{-m}, \ldots, A_{-1}, A_1, \ldots, A_m)$, где φ – функция переходов ОС σ и $A'_j = *$ для $j \neq 0$.

Чтобы получить представление ОС σ в σ', закодируем каждое состояние $i \in E_k$ состоянием $(\underbrace{* \ldots *}_{m}\, i \,\underbrace{* \ldots *}_{m})$ ячейки ОС σ'. Если рассмотреть теперь произвольное состояние ОС σ', изображающее состояние ОС σ, то, как нетрудно проверить, в компонентах $A_{-m}, \ldots, A_{-1}, A_1, \ldots, A_m$ состояния каждой ячейки ОС σ' будет последовательно формироваться запись состояния окрестности соответствующей ей ячейки ОС σ, к которой затем применится функция переходов ОС σ. В результате σ окажется представимой в σ' с замедлением $m+1$.

Предположим теперь, что $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{A}_1$ представима в σ'. Так как у $\tilde{\sigma}$ нет поглощающего состояния, в поведениях σ', моделирующих поведе-

ния $\tilde{\sigma}$, не могут возникать ячейки в состоянии Δ. Поэтому состояния ячейки $OC\tilde{\sigma}$ кодируются состояниями отрезков $OC\sigma'$, у которых состояния всех ячеек имеют один и тот же ранг i. Из условия 3 на функцию переходов $OC\sigma'$ видно, что состояние $OC\sigma'$, кодирующее состояние $OC\tilde{\sigma}$, есть состояние, появляющееся в i-м такте моделирования некоторого перехода $OC\sigma$. Всякое такое состояние, как легко проверить, определяется однозначно значениями компонент A_0 своих ячеек. Поэтому наборы компонент A_0 у различных состояний отрезков $OC\sigma'$, кодирующих состояния ячейки $OC\tilde{\sigma}$, должны быть различны. Очевидно также, что замедление, с которым $\tilde{\sigma}$ представима в σ', кратно $m+1$. Так как компоненты A_0 ячеек $OC\sigma'$ через каждые $m+1$ тактов меняются в соответствии с функцией переходов $OC\sigma$, кодирование состояний ячейки $OC\tilde{\sigma}$ состояниями отрезков $OC\sigma$, определяемыми наборами компонент A_0 в соответствующих состояниях отрезков $OC\sigma'$, задает представление $\tilde{\sigma}$ в σ. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы рассмотрим без ограничения общности рассуждений случай $k=2$. Пусть M -произвольное рекурсивно перечислимое множество неуниверсиальных двумерных OC. Для каждой $\sigma \in M$ рассмотрим в соответствии с леммой $OC\sigma'$, имеющую шаблон соседства вида рис. 163. Так как σ' строится по σ эффективно, множество M' таких $OC\sigma'$ рекурсивно перечислимо. Если бы существовала универсальная OC из M', то в ней была бы представима некоторая универсальная $OC\tilde{\sigma}$ из $\mathfrak{A}_2$ /очевидно, в этом классе имеются универсальные OC /. Но тогда, в силу леммы, $\tilde{\sigma}$ была бы представима также в соответствующей OC из M, что невозможно. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно ограничиться рассмотрением множества M, состоящего из OC с шаблоном соседства вида рис. 163.

Займемся построением неуниверсальной $OC\sigma^*$, в которой представима каждая OC из M. Будем считать, что каждое состояние ячейки $OC\sigma^*$, отличное от некоторого состояния ω, определяется набором компонент; число этих компонент и значения, которые они могут принимать, определяется в ходе дальнейших рассуждений. Для обозначения компонент используем греческие буквы. Шаблон соседства $OC\sigma^*$ изображен на рис. 173. Для задания функции переходов $OC\sigma^*$ обозначим состояния ячеек, соседних с данной ячейкой a так, как показано на том же рисунке. Состояние a после перехода обозначим A'. Значение i-компоненты состояния x обозначаем $(x)_i$. Положим:

I. Если $\omega \in \{A, B, \ldots, G, H, K\}$, то $A' = \omega$.

α-компонента состояния ячейки $OC\sigma^*$ может принимать четыре значения: 0, горизонтальное состояние $\leftrightarrow$, вертикальное состояние $\updownarrow$, узловое состояние $*$. Полагаем:

2. Если $(A)_\alpha = \leftrightarrow$ и $\{0, \updownarrow\} \cap \{(H)_\alpha, (D)_\alpha\} \neq \varnothing$, то $A' = \omega$.

Если $(A)_\alpha = \updownarrow$ и $\{0, \leftrightarrow\} \cap \{(B)_\alpha, (F_\alpha)\} \neq \varnothing$, то $A' = \omega$.

Если неверно, что $(H)_\alpha = (D)_\alpha = \leftrightarrow$, $(B)_\alpha = (F)_\alpha = \updownarrow$, причем $(A_\alpha) = *$, то $A' = \omega$.

θ-компонента принимает значения $0, \rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow$. Приведем условия, невыполнение которых влечет $A' = \omega$:

3. Если $(A)_\theta \in \{\uparrow, \downarrow\}$, то $(A)_\alpha \notin \{*, \leftrightarrow\}$ и $(A)_\theta = (H)_\theta = (D)_\theta$. Если $(A)_\theta \in \{\rightarrow, \leftarrow\}$, то $(A)_\alpha = \leftrightarrow$.

4. При $(A)_\alpha = \leftrightarrow$ не более чем одно из $(H)_\theta, (A)_\theta, (D)_\theta$ отлично от нуля. При $(A)_\alpha \in \{\updownarrow, 0\}$ не более чем одно из $(B)_\theta, (A)_\theta, (F)_\theta$ отлично от нуля.

5. Если $(A)_\alpha = *$, то либо $(B)_\theta = (D)_\theta = (F)_\theta = (H)_\theta = 0$, либо $(B)_\theta = \downarrow$ $(H)_\theta = \rightarrow, (D)_\theta = (F_\theta) = 0$, либо $(B)_\theta = (H)_\theta = 0$, $(D)_\theta = \leftarrow, (F)_\theta = \uparrow$.

Если из других условий не вытекает $A' = \omega$, то определим $(A')_\theta$ так, чтобы каждый из сигналов $\rightarrow, \leftarrow, \uparrow, \downarrow$ перемещался в соответствующем на-

правлении, причем сигналы $\rightarrow, \leftarrow$ при встрече с ячейкой, α -компонента состояния которой равна $*$, а сигналы $\uparrow, \downarrow$ - при встрече с ячейкой, α -компонента состояния которой равна $*$ либо $\leftrightarrow$, меняли направление на противоположное. если из других условий не следует $A' = \omega$, накладываем на A' следующие ограничения:

6. $(A')_\alpha = (A)_\alpha$

7. Если $(A)_\alpha = 0$ и $i \neq \theta$, то $(A')_i = (A)_i$.

8. Если $(A)_\alpha = \leftrightarrow$, то A' однозначно определяется значениями H, A, D и характеристикой $\varphi(F)$ состояния F, равной 1, если $(F)_\theta = \uparrow$ и равной нулю в протинном случае. Если $(A)_\alpha = \updownarrow$, то A' определяется однозначно значениями B, A, F.

Пусть $\tilde{\sigma}$ - универсальная двумерная OC, обладающая состоянием η ячейки, таким, что $\tilde{\varphi}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = x_0$ при $\eta \in \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. Очевидно, $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{A}_2$. Предположим, что $\tilde{\sigma}$ представима в σ^* и обозначим S класс всех состояний $OC\ \sigma^*$, используемых для кодирования состояний $OC\ \tilde{\sigma}$. Так как у $\tilde{\sigma}$ нет поглощающего состояния, в поведениях $OC\ \sigma^*$, начинающихся с элементов S, не должны появляться ячейки в состоянии ω. Учитывая теперь 2, находим, что в состояниях из S ячейки с горизонтальными /вертикальными/ α -компонентами образуют бесконечные горизонтальные /вертикальные/ линии, которые могут пересекаться только по ячейкам с узловыми α -компонентами, и узловые α -компоненты появляются только на пересечениях таких линий. Предположим, что состояния ячейки $OC\ \tilde{\sigma}$ кодируются только состояниями прямоугольников в σ^* без узловых α -компонент. Тогда, очевидно, все α -компоненты состояний ячеек этих прямоугольников принадлежат либо множеству $\{\leftrightarrow, 0\}$, либо $\{\updownarrow, 0\}$. Учитывая 7,8 и определение изменения θ -компонент состояний ячеек, нетрудно проверить, что функция переходов $OC\ \tilde{\sigma}$ должна зависеть существенно лишь от состояний соседей ячейки, расположенных в первом случае на той же горизонтали, что и сама ячейка, а во втором случае - на той же вертикали. В обоих случаях $\tilde{\sigma}$ не может быть универсальной. Таким образом, найдется состояние прямоугольника в σ^*, кодирующее состояние ячейки $OC\ \tilde{\sigma}$, у которого некоторые α -компоненты равны $*$. Ячейки с узловыми α -компонентами расположены внутри этого прямоугольника на пересечении линий ячеек с горизонтальными и вертикальными α -компонентами /см. рис. 174 /. Так как в состояниях из S

Рис.174

рис.175

эти линии нигде не обрываются, размещение их в каждом прямоугольнике, кодирующем состояние ячейки $OC\ \tilde{\sigma}$, должно быть одним и тем же. Отсюда вытекает, что α -компоненты любого состояния из S образуют некоторую решетку / см. рис. 175 /, которую будем называть α -решеткой состояния.

β -компонента состояния ячейки $OC\ \sigma^*$ принимает значения 0 и 1. Полагаем:

9. Если $(A)_\alpha = *$ и $(A)_\beta = 0$, то $A' = \omega$.

10. Если $(A)_\beta = 1$ и либо $(K)_\beta$, либо $(E)_\beta$ есть 0, то $A' = \omega$.

11. Если $(A)_\beta = 0$ и $(A)_\alpha \in \{\leftrightarrow, \updownarrow\}$, то $A' = \omega$.

Если из других условий вытекает $A' = \omega$, полагаем также:

12. $(A')_\beta = (A)_\beta$.

В состояниях из S ячейки с β -компонентами, равными 1, образуют

диагональные линии, проходящие через каждый узел α -решетки и пересекающие ее линии только в узлах. Как нетрудно проверить, такая система диагональных линий возможна только для квадратной α -решетки. Шаг ее однозначно определяется размещением узловых ячеек в прямоугольнике на рис. 174, так что все входящие в S состояния имеют квадратные α -решетки с одним и тем же шагом. γ- и δ -компоненты состояния ячейки $OC\sigma^*$ принимают значения 0 и 1. Положим:

13. Если неверно, что $(B)_\gamma = (A)_\gamma = (F)_\gamma$ и $(A)_\delta = (K)_\delta = (E)_\delta$, то $A' = \omega$.

14. Если $(A)_\alpha \in \{\leftrightarrow, *\}$ и $(A)_\delta \neq (A)_\gamma$, то $A' = \omega$.

Если из других условий не вытекает $A' = \omega$, полагаем

15. $(A')_\gamma = (A)_\gamma$ и $(A')_\delta = (A)_\delta$.

Учитывая 13, найдем, что в состояниях из S совпадают между собой как γ -компоненты ячеек любой вертикальной линии, так и δ -компоненты ячеек любой диагональной линии, ведущей сверху вниз и слева направо. Из 14 видно, что в точках пересечения такой линии с горизонтальными линиями α -решетки γ -компонента совпадает с δ -компонентой. Если шаг α -решетки равен h, то отсюда нетрудно получить, что любые две ячейки a и b, расположенные на одной горизонтали и отстоящие друг от друга на h, имеют одну и ту же γ -компоненту /см. рис. 176 /. Таким образом, слово, образованное γ -компонентами ячеек, расположенных между двумя соседними по горизонтали узлами α -решетки, не зависит от выбора узлов; будем обозначать это слово P. Очевидно, P определяется однозначно набором состояний прямоугольников, кодирующих состояния ячейки $OC\tilde{\sigma}$ и не зависит от выбора состояния из S.

Для $i \in \{1,2,3,4\}$ вводятся, далее, ν_i -компоненты, принимающие значения $0, 1, 2$. Полагаем:

16. Если $(A)_{\nu_i} \neq 0$ и при $i \in \{1,2\}$ выполняется $(A)_\alpha \notin \{*, \updownarrow\}$, а при $i \in \{3,4\}$ — $(A)_\alpha \notin \{*, \leftrightarrow\}$, то $A' = \omega$.

Если из других условий не вытекает $A' = \omega$, то

17. Если $(A)_\alpha \neq *$, то $(A')_{\nu_i}$ равно $(B)_{\nu_i}$ при $i = 1$, $(F)_{\nu_i}$ при $i = 2$, $(H)_{\nu_i}$ при $i = 3$ и $(D)_{\nu_i}$ при $i = 4$.

В поведениях, начинающихся с состояний из S, ненулевые ν_i -компоненты появляются только на линиях α -решетки, причем из значения перемещаются по этим линиям без изменений до ближайшего узла в направлениях, указанных на рис. 177.

λ -компонента принимает значения 0 и 1. Положим $A' = \omega$, как только не выполнены условия:

18. Если $(A)_\alpha \neq \leftrightarrow$, то $(A)_\lambda = 0$. Если $(A)_\alpha = *$, то $(H)_\lambda = 1$.

19. Если $(H)_\lambda = 1$ и $(A)_\alpha \neq *$, то $(A)_\lambda = 1$.

20. Если $(A)_\alpha = \leftrightarrow$, то $(A)_\theta \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(A)_\lambda = 1$ и $(H)_\lambda = 0$.

Из приведенных условий вытекает, что в состояниях из S на каждом горизонтальном отрезке, соединяющем два соседних узла α -решетки, находится ровно один ненулевой θ -сигнал, причем λ -компоненты ячеек отрезка, расположенных слева на него, обнулены, а λ -компоненты прочих ячеек этого отрезка равны 1. Определим $(A')_\lambda$ так, чтобы при переходах это соответствие λ и θ -компонент сохранялось.

В состояниях из S θ -сигналы $\rightarrow, \leftarrow$ могут появляться только на горизонтальных отрезках, соединяющих соседние узлы α -решетки, а θ -сигналы $\uparrow, \downarrow$ — на вертикальных отрезках между соседними линиями этой решетки. Из 4 нетрудно получить, что на каждом таком отрезке находится не более одного θ -сигнала. Из 3 вытекает, что θ -сигнал $\uparrow$ либо $\downarrow$ может появляться только в горизонтальной линии совпадающих с ним θ -сигналов, причем эта

линия циркулирует между соседними горизонтальными линиями α -решетки. Будем определять положение θ -сигнала на горизонтальном отрезке между соседними узлами α -решетки индексом, равным числу тактов, прошедших с того момента, как сигнал находился на левом конце отрезка. Аналогично, определим индекс сигнала для вертикального отрезка как число тактов, прошедших с момента нахождения сигнала в верхнем конце отрезка. Из 5 находим, что ненулевой θ -сигнал имеется на каждом горизонтальном отрезке между соседними узлами α -решетки, причем индексы всех этих сигналов равны. Нетрудно проверить, что все состояния из S характеризуются одним и тем же индексом; обозначим его ℓ.

Введем ε -компоненту со значениями $0, 1, 2$, ρ -компоненту со значениями $0, 1, 2, 3$, χ_1 и χ_2 -компоненты со значениями 0 и 1, а также для $i \in \{1,2,3,4\}$ μ_i -компоненты со значениями $0, 1, 2, 3$. Полагаем $A' = \omega$, как только не выполнены следующие условия:

21. Если $(A)_\alpha \neq *$, то $(A)_\varepsilon = 0$. Если $(A)_\alpha \notin \{\leftrightarrow, *\}$, то $(A)_{\mu_i} = (A)_{\chi_1} = (A)_{\chi_2} = 0$. Если $(A)_\alpha \neq \leftrightarrow$, то $(A)_\rho = 0$. Если $(A)_\alpha = *$ то $(D)_\rho \neq 3$.

22. Если $(D)_\alpha \neq *$ и $(A)_{\mu_i} = 3$, то $(D)_{\mu_i} = 3$. Если $(D)_\alpha \neq *$ и $(A)_\rho = 3$, то $(D)_\rho = 3$.

23. Если $(D)_\alpha \neq *$ и $(D)_{\chi_1} = 1$, то $(A)_{\chi_1} = 1$. Если $(H)_\alpha \neq *$ и $(H)_{\chi_2} = 1$, то $(A)_{\chi_2} = 1$.

24. Если $(A)_\varepsilon = 1$, то $(A)_{\chi_1} = (A)_{\chi_2} = 0$.

25. Если $(D)_\theta = \rightarrow$ и $(A)_\alpha = *$, то $(A)_\varepsilon = 0$.

Если из других условий не вытекает $A' = \omega$, то положим:

26. Если $(D)_\theta = \rightarrow$ и $(A)_\alpha = *$, то $(A')_\varepsilon = 1$.

27. Если $(A)_\varepsilon = 1$, то $(A')_{\mu_1} = (B)_{\nu_1}$, $(A')_{\mu_2} = (F)_{\nu_2}$, $(A')_{\mu_3} = (H)_{\nu_3}$, $(A')_{\mu_4} = (D)_{\nu_4}$.

28. Если $(A)_\alpha = *$ и $(A)_\varepsilon \neq 1$, то $(A')_{\mu_i} = 0$.

29. Если $(A)_\alpha \neq *$, то $(A')_\varepsilon = 0$. Если $(A)_\alpha \notin \{\leftrightarrow, *\}$, то $(A')_{\mu_i} = (A')_{\chi_1} = (A')_{\chi_2} = 0$. Если $(A)_\alpha \neq \leftrightarrow$, то $(A')_\rho = 0$.

30. Если $(A)_\alpha = *$ и $(A)_\varepsilon \neq 1$, то $(A')_{\nu_i} = 0$.

31. Если $(A)_\alpha = *$ и $(A)_\varepsilon = 1$, то $(A')_{\nu_i} = (D)_\rho$.

32. Пусть $(A)_\alpha = \leftrightarrow$, $(A)_{\chi_1} = 0$. Тогда при $(A)_\rho = 0$, $(D)_\rho \in \{1,2\}$ полагаем $(A')_\rho = (D)_\rho$, при $(A)_\rho \in \{1, 2\}$ и либо $(H)_\varepsilon = 1$, либо $(H)_\alpha \neq *$ и $(H)_\rho = 0$ полагаем $(A')_\rho = 0$, а в остальных случаях $(A')_\rho = (A)_\rho$.

33. Пусть $(A)_\alpha \neq *$ и $(A)_{\chi_1} = 0$. Тогда при $(A)_{\mu_i} = 0$ полагаем $(A')_{\mu_i} = (H)_{\mu_i}$, при $(A)_{\mu_i} \in \{1, 2\}$ и $(D)_{\mu_i} = 0$ — $(A')_{\mu_i} = 0$, а в остальных случаях $(A')_{\mu_i} = (A)_{\mu_i}$.

34. Пусть $(A)_\varepsilon = 1$. Тогда при $(A)_{\mu_1} \neq 0$ и $(D)_{\mu_1} \neq 0$ полагаем $(A')_\varepsilon = 2$, иначе $(A')_\varepsilon = 1$.

35. Если $(A)_\varepsilon = 0$, $(A)_\alpha = *$ и $(D)_\theta \neq \rightarrow$, то $(A')_\varepsilon = 0$.

Рассмотрим некоторое поведение $OC\,6*$, начинающееся с состояния из S. Пусть в момент t все горизонтальные θ -сигналы расположены на левых концах соответствующих отрезков α -решетки и направлены вправо /то есть их индексы равны 0/. Тогда, в силу 26, ε -компонента каждого узла решетки в момент $t+1$ будет равна 1. Из 23 и 24 вытекает, что χ_1 и χ_2 -компоненты ячеек горизонтальных линий α -решетки будут равны в этот момент 0. Учитывая 31 и 32, найдем далее, что ρ -компоненты ячеек горизонтальных линий α -решетки начнут перемещаться по ν_i -компонентам линий этой решетки /между ними возникнут при этом промежутки из нулей/; см. рис. 178. Если у некоторого узла ближайшие справа τ ячеек

рис.178

имеют нулевые μ_i -компоненты, то в них будет происходить запись появляющихся ν_i -сигналов до тех пор, пока не изменится ε -компонента узла либо свободные μ_i -компоненты не окажутся целиком заполненными; остальные ν_i -сигналы пропадут. Из 25 вытекает, что ε -компоненты узлов должны в некоторый момент измениться, а из 34 - что это происходит при переполнении μ_1 -компонент, причем ε -компоненты узлов становятся равными 2. Введем, далее, ξ и ξ -компоненты состояний ячеек OC σ^* со значениями из множеств Σ и L. Пусть . Положим:

36. Если $(A)_{\xi_1}$ $(A)_{\chi_2} = 0$ и $(A)_{\xi} \neq 0$, то $A' = \omega$.

37. Если $(A)_{\xi} = \sigma_u$, то $A' = \omega$.

Тогда до момента изменения ε -компонент состояний узлов α -решетки значения ξ -компонент состояний ячеек OC σ^* будут равны 0; определим переходы так, чтобы после этого изменения χ_1 и χ_2 -компоненты состояний узлов были равны 1, а ξ -компоненты - σ_0.

Выделим произвольный узел α -решетки и рассмотрим примыкающие к нему слева и справа отрезки этой решетки. Скажем, что i -компоненты ячеек этих отрезков образуют i -ленту. Определим переходы так, чтобы после появления на ξ -ленте символа σ_0 дальнейшие изменения моделировали поведение некоторой машины Тьюринга T с рабочей ξ -лентой, причем работа головки T воспроизводилась на ξ -ленте. Машина T может считывать содержимое любой из компонент состояния ячейки, а также изменять μ_i и ρ -ленты, как это указано ниже. Если головка машины находится справа /слева/ от узла и перемещается в ячейку с нулевой χ_1 / χ_2 /-компонентой, то эта компонента принимает значение 1. Перед переходом в заключительное состояние σ_q машина переводит в 0 χ_1 и χ_2 -компоненты ячеек, расположенных слева и справа от узла /не нарушая условия 23/ и головка ее перемещается в этот узел. Затем значения ε, ξ, χ_1 и χ_2 -компонент состояния узла становятся равными 0.

Множество ненулевых символов ξ -ленты разбито на четыре попарно непересекающихся подмножества: L_1, L_2, L_3, L_4, состоящих из одного и того же числа символов; фиксировано некоторое соответствие между символами любых двух из этих подмножеств. Пусть $A' = \omega$, как только нарушены условия:

38. Если $(A)_{\alpha} \neq *$ и $(A)_{\xi} = 0$, то $(H)_{\xi} \in L_1 \cup L_2 \cup \{0\}$ и $(D)_{\xi} \in L_3 \cup L_4 \cup \{0\}$.

39. Если $(A)_{\xi} \in L_1 \cup L_2$, то $(H)_{\xi} \notin L_3 \cup L_4$.

Будем далее считать, что узлам α -решетки сопоставлены естественным образом ячейки решеток OC из M. Наложим на T следующие условия:

I. Пусть выбран некоторый способ записи состояний ячеек OC из M посредством слов на ξ и μ_i -лентах и слова, используемые для j -й OC из M, имеют одну и ту же длину ℓ_j. Пусть начало слова P, записанного на γ -ленте, имеет вид $\underbrace{0 \ldots 0}\,1$. Тогда T проверяет, имеют ли ρ, μ_i и ξ -ленты вид рис.179, где $Q_0', Q_0, Q_1, \ldots, Q_4$ -записи состояний ячеек j -й OC из M /обозначим ее $\varkappa_j$ /, причем Q_0 и Q_0' -запись одного и того же состояния посредством символов из L_1 и L_3 соответственно. Если это не так, то головка T переходит в состояние σ_ω. В противном случае T моделирует переход $\varkappa_j$, рассматривая Q_0 как состояние ячейки этой OC, сопоставленной данному узлу, а $Q_1, \ldots, Q_4$ -как состояния ячеек, сопоставленных соседним узлам /именно, тем, из которых происходит заполнение соответствующих μ_i -компонент/. В результате ξ -

ρ	3	3	...	3	0	0	...	0	0	3
μ_1	3	3	...	3	0	Q_1			3	3
μ_2	3	3	...	3	0	Q_2			3	3
μ_3	3	3	...	3	0	Q_3			3	3
μ_4	3	3	...	3	0	Q_4			3	3
ξ	0	Q_0'			0	Q_0			0	0

ℓ_j рис.179 ℓ_j

-лента принимает вид рис. 180 , где R_0 и R_0' - новое состояние ячей-
и, записанное соответственно символами из L_1 и L_3 , а $\overline{Q_0}$ и $\overline{Q_0}'$
- состояние Q_0 , записанное символами из L_2 и L_4 . Из условий 38 и 39

...	0	$\overline{Q_0}'$	R_0'	0	R_0	$\overline{Q_0}$	0 ...

ℓ_j ℓ_j рис.180 ℓ_j ℓ_j

вытекает, что остальная часть ξ -ленты имеет нулевое состояние.

2. По окончании моделирования перехода $OC\ x_j$ машина T переводит левую часть μ_j -лент в нулевое состояние и переносит R_0 на ρ -ленту, так что в результате эти ленты принимают вид рис. 181 / точнее говоря, на ρ -ленту переносится запись R_0 , состоящая из единиц и двоек и согласованная с записью состояний ячейки $OC\ x_j$ на μ_i -лентах/. Единица в ρ -компоненте ячейки a на рис. 181 служит для создания переполнения в μ_1 -лентах соседних

μ_1	0	0	...	0	3	3
μ_2	0	0	...	0	3	3
μ_3	0	0	...	0	3	3
μ_4	0	0	...	0	3	3
ρ	0	R_0			1	3

ℓ_j a

рис.181

узлов при пересылке в них содержимого данной ρ -ленты /см. 34/.

3. На каждом такте работы T состояние Q_0 однозначно восстанавливается как по правой, так и по левой половине ξ -ленты.

4. После каждого перемещения головка машины T в течение хотя бы одного такта остается на месте.

При $A' \neq \omega$ положим:

40. Если $(A)_\xi \in L_2 \cup L_4$ и $(F)_\theta = 1$, то $(A')_\xi = 0$.

Тогда после того, как вертикальные θ -сигналы вернутся к ξ -ленте, ξ -компоненты ячеек, участвующих в записи $\overline{Q_0}'$ и $\overline{Q_0}$, одновременно обратятся в 0 .

Таким образом, каждое поведение $OC\ \sigma^*$, начинающееся с состояния из S , с некоторого момента сводится к последовательным циклам моделирования переходов $OC\ x_j$. Чтобы головка машины T успела вернуться к узлу α -решетки и перейти в заключительное состояние до возвращения к этому узлу горизонтального θ -сигнала, она, в силу условия 4, не должна уходить от узла более чем на половину расстояния до соседнего узла. Поэтому на каждом такте моделирования состояние Q_0 однозначно восстанавливается как по положению отрезка, примыкающего к узлу справа, так и отрезка, примыкающего слева. Будем называть Q_0 отметкой узла. Нетрудно проверить, что в каждом цикле моделирования перехода $OC\ x_j$ /кроме, быть может, первого/ состояния отрезков α -решетки, примыкающих к ее узлу, однозначно определяются отметками этого узла и четырех соседних с ним узлов, а также номером такта моделирования /равным индексу θ -сигналов/. Обратно, любое состояние $OC\ \sigma^*$, появляющееся в поведениях с началом из S , у которого состояния линий α —

-решетки определяются тем же образом по отметкам соседних узлов и индексу i θ -сигналов, есть состояние, появляющееся на i -м такте моделирования некоторого перехода $OC\ \varkappa_j$. Покажем, что каждое состояние из S удовлетворяет этому условию. Выделим в состоянии из S произвольный узел α -решетки и четыре соседних с ним узла. Очевидно, все эти узлы располагаются внутри некоторой системы из девяти прямоугольников, кодирующих состояния ячеек /рис. 182 /. Начиная с некоторого момента, состояния со-

рис. 182

рис. 183

единяющих рассматриваемые узлы линий однозначно определяются указанным выше образом отметками узлов и индексом θ -сигналов. Чтобы показать, что это же имеет место и в начальный момент, достаточно убедиться, следовательно, в том, что в поведениях с началом из S любая система из девяти прямоугольников вида рис. 182 , кодирующих состояния ячеек $OC\ \tilde{\sigma}$, может появляться в сколь угодно удаленные от начального моменты. Это сводится, далее, к тому, чтобы показать, что любое состояние квадрата из девяти ячеек $OC\tilde{\sigma}$ может появиться после любого числа переходов. Если выбрать в качестве шаблона соседства $OC\tilde{\sigma}$ квадрат со стороной 5, то последний факт вытекает из того, что любое состояние вида рис. 183 , где заштрихованные ячейки имеют состояние ϱ /см. определение функции $\tilde{\varphi}$ /, при переходах не меняется.

Таким образом, любое состояние из S есть состояние, возникающее на $\ell_{-\mu}$ -такте некоторого цикла моделирования перехода $OC\ \varkappa_j$.

Прямоугольники, кодирующие состояния ячейки $OC\ \tilde{\sigma}$, будем называть K -прямоугольниками. Так как отметка любого узла определяется по половине любой из примыкающих к нему горизонтальных линий α -решетки, то по K -прямоугольнику однозначно находятся отметки его узлов. Предположим, что найдутся два различных K -прямоугольника с одинаково отмеченными узлами. Тогда, помещая их поочередно внутрь блока из восьми произвольных K -прямоугольников на рис. 184 , получим, что в одном из случаев соответствие состояний линий α -решетки отметкам узлов нарушится. Следовательно, каждый K -прямоугольник однозначно определяется отметками своих узлов. Если теперь закодировать состояния ячейки $OC\tilde{\sigma}$ состояниями прямоугольников в $OC\ \varkappa_j$, у которых состояния

рис. 184

ячеек определяются отметками узлов в кодирующем это состояние K -прямоугольнике, то получим, как не трудно проверить, представление $\tilde{\sigma}$ в $\varkappa_j$. Так как $\varkappa_j$ не универсальна, приходим к противоречию, доказывающему, что $\tilde{\sigma}$ не представима в σ^* , то есть что σ^* не универсальна. Очевидно, в ней представима любая OC из M . Теорема 2.7 доказана.

§ 5 . Примеры универсальных OC , характеризующихся небольшими значениями параметров

Установим существование универсальных OC некоторых специальных типов.

Теорема 2.8 . Существует универсальная OC с двумя состояниями ячейки и квадратной окрестностью ячейки вида рис. 185 .

рис. 185

Рассмотрим множество M состояний окрестности ячейки a , определяемое посредством рис. 186 . Здесь

штрихованы ячейки, находящиеся в состоянии 1 ; ячейки, отмеченные * , т принимать любое состояние. Состояния на рис. 186,б рассматриваются с чётью до поворота на угол, кратный 90° . Покажем, что ОС б с двусостояниями ячейки и окрестностью ячейки вида рис.185, функция переходов

рис.186

рис.187

которой принимает значение 1 в точности на состояниях из M , универсальна. Для этого сначала опишем способ моделирования в б произвольных сетей, составленных из автоматов некоторого набора $\mathfrak{N}$. В качестве сигналов, циркулирующих между автоматами, будем использовать конфигурации вида рис.187,а и нетрудно проверить, что за один такт конфигурация на этом рисунке перемещается на одну ячейку вправо, причем при повороте ее на угол, кратный 90 , направление перемещения изменяется на такой же угол. Если сигнал движется слева направо, то его можно повернуть вверх, поместив перед ним пару возбужденных ячеек α и β , как показано на рис. 187,б /по окончании процесса состояния α и β сохраняются и могут быть использованы снова/. Аналогичным образом осуществляются и три остальных поворота, указанных на рис.187,в . Очевидно, что при помощи нескольких таких поворотов можно произвольно изменять направление перемещения сигнала.

Перейдем к описанию автоматов из $\mathfrak{N}$. Автомат P имеет один вход и два выхода /см. рис. 188,а /. Он осуществляет раздвоение сигнала, поступающего на вход. Для реализации P в б используется конструкция на рис. 188,б.

Выделим в произвольном сигнале s ячейку α , как показано на рис. 187,а, и обозначим $\delta(s)$ величину $x+y \pmod 2$, где (x, y) -координаты α . Нетрудно заметить, что при движении s и во время поворота $\delta(s)$ в каждом такте меняет значение на противоположное. Кроме того, при раздвоении сигнала s возникают сигналы s_1 и s_2 , для которых

рис. 188

рис. 189

рис 190

рис. 192

$$\delta(s_1)+\delta(s_2)\equiv 0 \pmod 2.$$

Автомат C осуществляет соединение двух линий перемещения сигналов. При подаче на один из его входов /см. рис. 189,а / этот сигнал передается на выход. Для реализации C в σ используется конструкция на рис. 189,б. Сигнал s, поступающий на вход 1, разделяется на сигналы s_1 и s_2, причем длина ℓ линии задержки выбирается так, чтобы s_1 и s_2, внутри вертикального отрезка L. Так как $\delta(s_1)+\delta(s_2)=0 \pmod 2$, то при встрече s_1 и s_2 возникает ситуация на рис. 189,в, в результате чего появляется перемещающийся влево сигнал. Линию входа 2 выбираем так, чтобы она совпадала с линией, по которой движется этот сигнал. Заметим, что горизонтальные сигналы, имеющие небольшое вертикальное смещение по отношению к линии входа 2, беспрепятственно проходят через C в любом направлении.

Автомат T / рис. 190,а / имеет два состояния: 0 и 1. При подаче сигнала на вход 1 T меняет нулевое состояние на единичное. Сигнал, поданный на вход 2, передается на выход либо 1 в зависимости от того, находится T в состоянии 0 либо 1, причем в последнем случае T меняет состояние на нулевое. Конструкция T указана на рис. 190,б, причем нулевому состоянию соответствует нулевой отрезок L. В этом случае поданный на вход 1 сигнал s разделяется на сигналы s_1 и s_2, при встрече которых /рис. 190,в / на отрезке L возникает возбужденная ячейка α / что соответствует единичному состоянию T /. Линию второго входа выбираем проходящей через α. Если α возбуждена и на вход 2 подан сигнал, то при подходе его к α возникает ситуация на рис. 190,г, в результате чего α переходит в нулевое состояние, сигнал поворачивает направо и, пройдя сквозь C, попадает на первый выход.

Нам понадобятся далее цепочки из автоматов T вида рис. 191,а, которые будем обозначать T_n. Состояние T_n, у которого все автоматы T,

рис.191

кроме i-го сверху $(i\in\{1,2,\dots,n\})$, находятся в состоянии 0, обозначим τ_i.

Рассмотрим теперь произвольную двумерную ОС $\tilde{\sigma}$ и покажем, что она представима в σ. В силу леммы из § 4 σ представима в некоторой ОС σ' с шаблоном соседства вида рис. 163. Пусть число состояний ячейки ОС σ' равно n; определим представление σ' в σ. Каждой ячейке α ОС σ' сопоставим квадрат в σ со стороной n, внутри которого расположим блок T_n, кодирующий своим состоянием τ_{i+1} состояние i $(i\in\{0,1,\dots,n\})$ ячейки α; далее обозначаем этот блок A. Внутри квадрата размещена вспомогательная сеть, изменяющая через каждые τ тактов состояние блока A в соответствии с переходами ОС σ'. Каждый цикл вычисления нового состояния A начинается с появления сигнала на выходе блока B. Этот блок представляет собой замкнутую линию вида рис. 191,б, по которой циркулирует сигнал; длина линии равна τ. С выхода блока B сигнал поступает на $(n+1)$-й вход блока A, в результате чего все автоматы T этого блока переходят в нулевое состояние, а на i-м выходе возникает сигнал. Для передачи информации о состоянии моделируемой ячейки α в соседние квадраты служат расположенные на каждой стороне квадрата n входных и n выходных линий. Соединения устроены так, что

сигнал, появившийся на i -м выходе блока A, разделяется на пять сигналов, четыре из которых поступают на i -е выходные линии каждой из сторон, а пятый – на линию задержки C_i, с которой затем переходит на вход блока D_i. Входами каждого блока D_i служат также все входные линии квадрата; в этом блоке происходит вычисление нового состояния α. Блок D_i имеет n выходов, причем появление сигнала на $(j+1)$ -м из них означает, что α должна перейти в состояние j. Выходы различных D_i с одним и тем же номером соединяются в одну линию, и полученные n линий присоединяются ко входам блока E /см. рис. 192 /. Все автоматы T верхнего ряда в этом блоке вначале находятся в состоянии 1, а нижнего ряда – в состоянии 0. От i -го выхода E $(1 \le i \le n)$ для каждого $j \ne i$ ответвляются не указанные на рис. 192 линии, ведущие к первому входу j-го автомата нижнего ряда и второму входу j -го автомата верхнего ряда. Поступающий на i -й вход блока E сигнал $(1 \le i \le n)$ проходит на i-й выход, причем все автоматы T в E переходят в нулевое состояние. Возникающие при этом $(n-1)$ сигналов на $(n+2)$ -и выходе E уничтожаются при помощи блока F на рис. 193. Автомат T этого блока постоянно находится в единичном состоянии.

рис.193

Для возвращения E в исходное состояние достаточно подать на $(n+1)$ -й вход сигнал. Сигнал с i -го выхода E подается на i -й вход блока A, что и завершает цикл вычисления нового состояния α.

Блок D_i представляет из себя набор автоматов T_n, соединенных в виде четырехярусного дерева. При этом $1-n$ выходы автомата T_n ведут к $(n+1)$-м входам автоматов следующего яруса, а к $1-n$ входам автоматов T_n каждого яруса присоединены входные линии одной из четырех сторон квадрата. Выход блока C_i присоединен к $n+1$-му входу автомата T_n верхнего яруса. В зависимости от состояний соседних ячеек поступающий на верхний ярус дерева сигнал проходит на одну из n^4 выходных линий/берутся $1-n$ выходы/автоматов T_n нижнего яруса. Эти линии присоединяются к выходам блока D_i в соответствии с функцией переходов ОС σ'. $(n+1)$-е выходы автоматов T_n соединяем с выходами блоков D_i произвольным образом.

Для возвращения автоматов блоков D_i в исходные нулевые состояния служит блок G /рис. 194 /. В начальный момент все автоматы T этого блока, кроме верхнего, находятся в нулевом состоянии. Ко входу G присоединены $1-n+1$ выходы блока E; $1-k$ выходы блока G присоединяются ко вторым входам всех автоматов T, входящих в блоки D_i, а $(k+1)$ -й выход – к $(n+1)$ -му входу E. На этом описание сети, моделирующей переход ОС σ', заканчивается. Мы получили, что $\tilde{\sigma}$ представима в σ, так что σ универсальна. В заключение заметим, что из 512 возможных состояний окрестностей ячеек в описанной конструкции используется лишь 111 состояний. Теорема 2.8 доказана.

рис.194

Теорема 2.9. Существует универсальная ОС с тремя состояниями ячейки и окрестностью ячейки вида рис. 163.

Доказательство. Будем изображать состояния 0, 1 и 2 ячейки ОС σ соответственно белыми, заштрихованными и черными клетками. Состояния клеток с отметкой $*$ произвольны. Переходы σ определим при помощи рис. 195 следующим образом:

1. Если состояние окрестности ячейки, рассматриваемое с точностью до поворота на угол, кратный $90°$, указано на рис. 195,а.

рис.195

/рис. 195,б /, то ячейка переходит в состояние 1 /соответственно в состояние 2 /.

2. Если состояние окрестности ячейки указано на рис. 195,в /рис. 195,г /, то ячейка переходит в состояние 1 /соответственно 2 /.

3. В прочих случаях ячейка переходит в нулевое состояние.

Как и в теореме 2.8, для доказательства универсальности σ достаточно показать, что она позволяет моделировать произвольные сети автоматов из $\mathfrak{N}$. В качестве сигналов, циркулирующих между автоматами, используем конфигурации вида рис. 196,а.

рис.196

Поворот сигнала происходит, как показано на рис. 196,б. Конструкция, используемая для раздвоения сигнала, показана на рис. 196,в. Для моделирования автомата C построим вспомогательный автомат E с одним входом, "поглощающий" поступающие на него сигналы. Поведение E изображено на рис. 197. Устройство C показано на рис. 198,а;

рис.197

отличие от теоремы 2.8 здесь заключается в том, что при столкновении двух вертикальных сигналов/ рис. 198,б /

рис.198

возникают два горизонтальных противоположно направленных сигнала. Для уничтожения одного из них и служит автомат E. Для моделирования в σ автомата T нам понадобится вспомогательный автомат T' с двумя входами и одним выходом. T' имеет два состояния, причем в нулевом состоянии пропускает сигнал с 1-го входа на выход, а в единичном- уничтожает этот сигнал, переходя в нулевое состояние. При подаче сигнала на второй вход T' меняет нулевое состояние на единичное. Схема T' изображена на рис. 199,а; вертикальная линия γ на этом рисунке смещена по отношению к линии δ на одну

рис.199

клетку вправо. Поступающий на вход 2 сигнал раздваивается на сигналы, направляемые по линии γ и σ. При их столкновении /см. рис. 199,б/ на линии γ возникает пара ячеек в состоянии 1, что соответствует единичному состоянию T'. Переход T' в нулевое состояние при подаче сигнала на вход 1 изображен на рис. 199,в. Схема автомата T указана на рис. 200. Здесь автомат B в исходной ситуации находится в нулевом состоянии, а состояние A совпадает с состоянием моделируемого автомата T. Длина ℓ линии задержки выбирается так, чтобы переход B в единичное состояние под действием сигнала на входе 2 происходил до поступления сигнала на вход 1.

рис.200

Так как σ позволяет моделировать все автоматы из $\mathfrak{N}$ осуществлять любые соединения между ними, для завершения доказательства достаточно воспользоваться конструкцией из теоремы 2.8. При этом из возможных 243 состояний окрестностей ячеек в поведениях ОС σ будут появляться лишь 95 состояний. Теорема доказана.

Теорема 2.10. Для любой размерности $k \geq 2$ существует $c(k)$, такое, что при $n \geq c(k)$ в любом классе $S(k, n, \bar{m})$ имеется универсальная ОС с симметрической функцией переходов.

Доказательство теоремы будем проводить для случая $k = 2$, для прочих k рассуждения аналогичны. Выберем произвольное $\bar{m} = (m_1, m_2)$ и построим вспомогательные симметрические ОС σ_1 и σ_2 с шестью состояниями ячейки и шаблоном соседства, определяемым вектором $\bar{m}$. Для задания функций переходов φ_1 и φ_2 введем функции $f_1(x_1, \ldots, x_5)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_5)$, определенные на целых неотрицательных x_i. Пусть набор (a_3, a_4, a_5) таков, что $a_j = 1$ и $a_i = 0$ при $i \neq j$. Положим:

$f_1(m_1+1, 2m_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 1$, $f_2(2m_1, 2m_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \alpha$

$f_1(m_1, 2m_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 1$, $f_2(i, 2m_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 1$

$f_1(m_1-1, 2m_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \alpha$, $(m_1 \le i \le 2m_1-1)$

$f_1(m_1-1, i, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 2$ $f_2(2m_1, i, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 2$

$(m_2 \le i \le 2m_2-1)$ $(m_2 \le i \le 2m_2-1)$

В остальных случаях значения f_1 и f_2 равны нулю. Определим $\varphi_i(x_0, \dots, x_{n-1})$ равным $f_i(y_1, \dots, y_5)$, где y_5 – число аргументов x_j, равных S. Нетрудно проверить, что конфигурация вида рис. 201,а в ОС σ_1 за один такт смещается вправо на одну ячейку, а конфигурация вида рис. 201,б в ОС σ_2 – остается неизменной. Наборы состояний ячеек, входящих в окрестность ячейки a на рис. 201,а и рис. 201,б обозначим соответственно p_α и q_α. Рассмотрим ОС σ^* из $S(2, 6^5, \bar{m})$

рис.201

с симметрической функцией переходов, состояниями ячейки которой служат наборы $(i_1, i_2, \dots, i_5)$, где $i_j \in \{0, 1, \dots, 5\}$.
Для определения переходов ОС σ^* выберем универсальную ОС σ из теоремы 2.9; пусть ее функция переходов есть $\varphi(y_0, y_1, \dots, y_4)$. Здесь y_0 –состояние центральной ячейки, y_1 –состояние левого соседа и т.д. по часовой стрелке. Обозначим ν_j набор j -х компонент состояний ячеек из окрестности некоторой ячейки a ОС σ^*. Если $\nu_1 = p_{\alpha_1}, \dots, \nu_4 = p_{\alpha_4}$, $\nu_5 = q_{\alpha_0}$, то a переходит в состояние $(\beta, \dots, \beta)$, где $\beta = \varphi(\alpha_0-3, \dots, \alpha_4-3)+3$. В остальных случаях j -я компонента состояния a определяется по набору ν_j в соответствии с функцией переходов ОС σ_1 при $1 \le j \le 4$ и ОС σ_2 при $j = 5$. Выберем в σ^* квадратную решетку с достаточно большим шагом, сопоставим ее узлам ячейки ОС σ^* и закодируем состояние β ячейки ОС σ состоянием $(\beta+3, \dots, \beta+3)$ соответствующей ей ячейки ОС σ^*. Состояния ячеек σ^*, расположенных возле узла решетки, выбираем так, чтобы первые их компоненты образовали конфигурацию рис. 201,а, вторые – аналогичную конфигурацию, перемещающуюся вниз, третьи – влево и четвертые – вправо. Пятые компоненты этих состояний образуют конфигурацию на рис. 201,б. Нетрудно проверить, что при таком кодировании состояний ОС σ она представима в σ^*, так что σ^* универсальна. Очевидно, что в любом классе $S(2, n, \bar{m})$ при $n \ge 6^5$ универсальную ОС можно получить, если положить значение локальной функции переходов на наборах из элементов $\{0, 1, \dots, 6^5\}$ равным значению функции переходов ОС σ^*.
Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С.В. Основные понятия кибернетики. Сб.Проблемы кибернетики, вып. 2, М. 1959, стр.23
2. Кудрявцев В.Б. Лекции по теории автоматов. Изд-во МГУ,1976,стр.88.
3. Математическая энциклопедия, т.I, статьи "Автомат" (стр.47-51) "Автомат конечный" (стр. 52-57), "Автоматов теория" (стр.77-78), "Автоматов спосообы задания" (стр.72-77), М., 1977.
4. Беркс А.В.,Райт Д.Б., Теория логических сетей. "Кибернетический сборник" вып.4, ИЛ, 1962, стр.33-57.
5. Кобринский Н.Е., ТРАХТЕНБРОТ Б.А., Введение в теорию конечных автоматов. М. 1962, стр.404.
6. Мур. Э.Ф. Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. Сб. "Автоматы", М., ИЛ, 1956, стр.179-210.
7. Карацуба А.А. Решение одной задачи из теории конечных автоматов. УМН, 1960, т.15, вып.3.
8. Клини С.К. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. Сб. "Автоматы" М. ИЛ 1956, стр.15-67.
9. Mc Naughton R Testing and generating infinite sequences by a finite automation, Information and Control 9, N5, 1966, 521-530
10. Копи И.М., Элгот К.С., Райт Д.Б. Реализация события логическими сетями "Кибернетический сборник", вып.3, М. ИЛ,1961, стр.147-166.
11. Арбиб М.А. Мозг, машина и математика. М. "Наука",1968,стр.224.
12. Подколзин А.С. О сложности распознавания автоматов-генераторов. Сб. "Дискретный анализ", вып.21,Новосибирск, 1972, стр. 31-61.
13. Шеннон К. Сообщение о машине, решающей лабиринтную задачу. Сб., "К.Шеннон. Работы по теории информации и кибернетики", М., ИЛ, 1963.
14. Dopp K Automaten in labyrinthen, EIK 7 (1971) 2, p 79-94
15. Budach L Labirinths and automata, Mimeographed notes
16. Будах Л. Лабиринты и автоматы. Сб."Проблемы кибернетики", вып.34, М. "Наука".
17. Harrison MA A census of finite automata Canad. J. Math ", 1965, V 17, N1, p 100-113
18. Корщунов А.Д. Об асимптотических оценках числа приведенных конечных автоматов. Сб."Дискретный анализ", вып.6,Новосибирск, 1966, стр.35-50.
19. Кон П. Универсальная алгебра. М., "Мир", 1968, стр.352.
20. Алешин С.В. О суперпозициях автоматных отображений. "Кибернетика", № 1, Киев, 1975, стр.29-34.
21. Буевич В.А. Кандидатская диссертация, 1973.
22. Кудрявцев В.Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. Сб. "Проблемы кибернетики", вып.13, М.Физматгиз, 1965, стр.45-74.

23. Буевич В.А. Построение универсальной о.-д.функции от двух переменных Сб. "Проблемы кибернетики", вып.I5, М.I965, стр.267

24. Буевич В.А. Построение универсальной о.-д.функции, имеющей два внутренних состояния. Сб."Проблемы кибернетики", вып.22 М., I970, стр.75-83.

25. Кратко М.И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов. ДАН СССР, I964,т.I55, № I.

26. Буевич В.А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания - полноты для о.-д.функций.Математические заметки,II,т.6, М. I972, стр.687-697.

27. Кудрявцев В.Б. О функциональных свойствах логических сетей., вып.55, I973, I-6, стр.I87.

28. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., Физматгиз, I966, I20, стр.

29. Алешин С.В. Über ein Vollständigkeitskriterium für Automatenabbildungen bezüglich der Superposition. Rostocker Math. Kolloq., 1977, H3, s 119-132

30. Алешин С.В. Об отсутствии базисов в некоторых классах инициальных автоматов. Сб."Проблемы кибернетики". вып.22,I970, М., Физматгиз. стр.67-75.

3I. Алешин. С.В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах. Математические заметки, II,вып.3,I972,стр.3I9-328.

32. Алешин С.В. О базисах в группах автоматных подстановок. Сб."Дискретный анализ", № I7, Новосибирск, I970, стр.3-8.

33. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М. "Наука", I972, стр.207.

34. Мур Э.Ф. Математические модели самовоспроизведения. Сб."Математические проблемы в биологии", М., "Мир",I966,стр.36-62.

35. Мур Э.Ф. Задача о синхронизации цепи стрелков. "Кибернетический сборник", новая серия, М.,ИЛ,I965,вып.I,стр.76-77.

36. Goto E. A minimum time solution of the firing squad problem Ditted course note for applied mathematics, 218, Harvard, 1962

37. Подколзин А.С. О поведениях однородных структур. Сб."Проблемы кибернетики", вып.3I, М.,"Наука", I975, стр.I33-I66.

38. Berger R The undecidability of the domino problem Memoirs Amer Math. Soc., 66, 1966

39. Myhill G A converse to Moore's Garden of Eden theorem, Proc Amer Math Soc, 14, 1963, p 685-686

40. Гжегорчик А., Некоторые классы рекурсивных функций. Сб. "Проблемы математической логики", М., "Мир",I970, стр.9-49.

4I. Подколзин А.С. О времени существования конфигураций в однородных структурах. Ж.ВМиМФ, М.I975, № 3,стр.737-748.

42. Фишер П., Мейер А., Розенберг А. Счетчиковые языки и счетчиковые машины. Сб."Проблемы математической логики", М.,"Мир", I970, стр.380-400.

43. Подколзин А.С. О сложности моделирования в однородных структурах. Сб."Проблемы кибернетики", вып.30, М., "Наука", I975, стр.I99-225.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение 3

Часть I. Конечный автоматы 5

Глава I. Понятие конечного автомата 5

§ I. Примеры и содержательная модель конечного автомата 5

§ 2. Понятие абстрактного конечного автомата 9

§ 3. Понятие структурного конечного автомата I2

Глава 2. Поведения конечных автоматов I7

§ I. Ограниченно-детерминированные функции I8

§ 2. Отличимость конечных автоматов 2I

§ 3. Эксперименты с конечными автоматами 26

§ 4. Конечные автоматы как акцепторы 3I

§ 5. Конечные автоматы как сверхакцепторы 37

§ 6. Конечные автоматы как перечислители 43

§ 7. Взаимодействие конечных автоматов и конечные автоматы в лабиринтах 50

§ 8. Оценка числа о.-д. функций 6I

Глава 3. Полнота конечных автоматов 62

§ I. Реализация о.-д. функций схемами 63

§ 2. Замкнутые множества о.-д. функций 70

§ 3. Задачи о полноте и об A - полноте о.-д. функций 73

§ 4. Базисы в $P^{к}_{од}$ 77

§ 5. Алгебраический подход к задаче о полноте в $P^{к}_{о.д.}$ 90

§ 6. Алгебраический подход к задаче об A -полноте 95

§ 7. Алгоритмический подход к задаче о полноте и об A - полноте конечных систем о.-д.функций 98

§ 8. Модификации задачи о полноте I04

§ 9. Базисы в системах $P^{c}_{о.д.}$ и $P^{c}_{д.}$ II4

§ I0. Система $P^{c}_{о.д.}$ I22

§ II. Группа AS_2 ..... I27

§ I2. Полугруппа и кольцо линейных автоматов I34

Часть 2. Однородные структуры I38

Глава I. Поведения однородных структур I39

§ I. Определения и примеры I39

§ 2. Графы переходов о.с. I44

§ 3. Замкнутые классы состояний о.с. I52

§ 4. Рост конфигураций о.с. I59

Глава 2. Взаимное моделирование о.с. и универсальная о.с. I78

§ I. Определения I78

§ 2. Моделирование без замедления I78

§ 3. Моделирование с замедлением I74

§ 4. Распознавание универсальности о.о. ..... I[illegible]

§ 5. Примеры универсальных о.с., характеризующиеся небольшими значениями параметров ..... 2[illegible]

Литература 2I