МГУ
им.
М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. Б. КУДРЯВЦЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА– 1982 г.

УДК 519.95

Кудрявцев В.Б. Функциональные системы.М.:Изд-во Моск.ун-та,1982.-157 с.

Изучение свойств функциональных систем (ф.с.)представляет собой новое направление в дискретной математике и математической кибернетике. Функциональные системы состоят из функций и операций над ними. Примерами ф.с. являются многозначные логики, алгебры автоматов, алгебры вычислимых функций и др. К числу важнейших задач для ф.с. относится задача о полноте, состоящая в описании тех подмножеств функций, через которые с помощью операций ф.с. можно выразить все функции ф.с. В книге излагаются основные результаты по этой задаче, включавшиеся автором в лекции, которые он читал в течение ряда лет на механико-математическом факультете МГУ.

Книга предназначена для студентов,аспирантов, специализирующихся в области дискретной математики и математической кибернетики. Она может быть полезна также специалистам, работающим в области математической логики, алгебры и теории функций и интересующимся связями этих областей с математической кибернетикой.

Рецензенты:
проф. Ю.И.Журавлев;
проф. В.Н.Латышев

ВВЕДЕНИЕ

Функциональные системы (ф.с.) являются одним из важнейших объектов математической кибернетики. Ф.с. представляет собой множество функций с некоторым набором операций,применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого множества. Ф.с. является формализованным отображением следующих главных особенностей реальных и абстрактных управляющих систем:функционирования (в ф.с. это функции), правил построения более сложных управляющих систем из заданных и описание функционирования сложных систем по функционированию их компонент (последние два момента отражены в операциях ф.с.).Примерами ф.с. являются многозначные логики, алгебры автоматов, алгебры вычислимых функций и др. Ф.с. обладает определенной спецификой, состоящей в рассмотрении задач и подходов, возникающих при исследовании ф.с. с позиций математической кибернетики, математической логики и алгебры. Так, с позиций математической кибернетики ф.с. рассматриваются как модели, описывающие функционирование сложных кибернетических систем. С позиций математической логики ф.с. рассматриваются как модели логик, то есть как системы предложений с логическими операциями над ними. С точки зрения алгебры ф.с. могут рассматриваться как универсальные алгебры. Важной особенностью ф.с., выделяющей их из общего класса универсальных алгебр, является их содержательная связь с реальными кибернетическими моделями управляющих систем. Эта связь,с одной стороны, определяет серию существенных требований, которые накладываются на ф.с., а, с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

Проблематика ф.с. обширна. К числу важнейших в ней относится задача о полноте, которая непосредственно связана с содержательной сущностью понятия ф.с. и является функциональным вариантом задачи синтеза для управляющих систем. Задача о полноте для заданных ф.с. состоит в описании таких подмножеств функций ф.с., отправляясь от которых с помощью операций ф.с. можно выразить все функции ф.с. Изучение ф.с. осуществлялось путем исследования конкретных модельных ф.с., среди которых одной из первых была изучена двузначная логика. Здесь основополагающие результаты были получены Е. Постом в 1921 году, которые он затем изложил в виде монографии в 1941 г. [1] . Им была полностью описана структура замкнутых классов двузначной логики. Это описание по существу эквивалентно решению задачи о полноте для произвольных двузначных логик, в котором в качестве операций выступают операции суперпозиции. Им же были сделаны шаги по изучению k – значных логик. В 1954 году С.В.Яблонским [2] была решена задача о полноте в 3 – значной логике. Решение было сведено к описанию всех предполных классов в ней,то есть было показано,что множество функций является полным тогда и только тогда,когда оно не является подмножеством ни одного предполного класса.Сами предполные классы были описаны явно. Из этого описания вытекал алгоритм распознавания полноты для конечных систем. Идея решения задачи о полноте в терминах предполных классов стала после этого одной из главных для ф.с. Особые усилия различных авторов были сосредоточены на решении задачи о полноте для ключевой ф.с., которой является K - значная логика. В 1964 году А.И.Мальцев на этом пути решил задачу о полноте для четырехзначной логики. С.В.Яблонским, А.В.Кузнецовым, Ло Чжу-каем,И.Розенбергом и др. [3 - 8], были последовательно построены в явном виде все предполные классы для K - значных логик. Завершающее построение при этом провел в 1970 году последний из них. Наряду с этими ф.с. начали интенсивно изучаться алгебры автоматов и прежде всего ф.с. функций с задержками, ф.с. о.д. функций и д. функций, счетно-значные логики. Позже стали изучаться ф.с. вычислимых функций, ф.с. неоднородных функций и другие ф.с. Изучение этих моделей позволило, с одной стороны, исследовать задачу о полноте для конкретных и важных с точки зрения приложений моделей ф.с., а с другой - отточить и разнообразить проблематику для ф.с., накопить опыт в их исследовании. Наряду с позитивными результатами на пути применения подхода в терминах предполных классов были обнаружены ситуации, где язык предполных классов натолкнулся на трудности типа недостаточной эффективности, как, например, в случае K - значных логик при больших K, о.д. функций и счетно-значных логик, а также когда этот подход требовал дополнительных средств, как это было в случае функций с задержками, и т.п. Сама проблема породила ряд важных задач, примыкающих к ней, таких, как исследование базисов, изучение структуры замкнутых классов, изучение изоморфизмов, гомоморфизмов и конгруэнций, выявление особенностей индивидуальных ф.с., сравнение операций в ф.с. и т.п. Наконец, выбор для исследований конкретных ф.с. осуществлялся таким образом, чтобы каждый раз ф.с. имела важную содержательную особенность, рассмотрение которой (ф.с.) несло новое и диктовалось практической необходимостью. В качестве примера здесь можно указать все упомянутые ф.с. Следует отметить, что вместе с накоплением модельных ф.с. и изучением их свойств были попытки выработки общего понятия ф.с. и анализа ф.с. с точки зрения решения задачи о полноте для них (А.Саломаа и др. [9]). Но попытки эти носили слишком отвлеченный характер, поскольку фактически были эквивалентны рассмотрению произвольных замыканий на множествах. В качестве обобщений реальных ф.с., как это отмечалось, могут в принципе рассматриваться также и универсальные алгебры [10], однако и в этом случае теряются основные достоинства реальных ф.с. и, прежде всего, такие, как конструктивность множеств функций и операций и ряд других.

В книге предлагается общее понятие ф.с., которое является естественным обобщением реальных ф.с. и обладает их характерными свойствами, разработаны вопросы теории ф.с., связанные с решением задачи о полноте для них. Суть подхода состоит в рассмотрении в качестве ф.с. пар вида $\langle \mathfrak{M}, \Omega \rangle$. Здесь $\mathfrak{M}$

является множеством функций K - значной или счетно-значной логики или является множеством последовательностных функций, а также множеством некоторых ближайших обобщений таких функций (например, частичных или неоднородных таких функций и т.п.). В качестве Ω выступает множество в некотором смысле автоматных операций, которые обладают теми "хорошими" свойствами, какими наделены операции в примерах упомянутых ф.с.: это и локальность информации о функциях, используемой при применении операций к функциям, и вычислимый характер операций (причем вычислимый в определенном смысле простейшими средствами), и конструктивность заданий самих операций и т.п. Само понятие ф.с. в соответствии с реальными ф.с. распадается на понятие истинностной ф.с. (и.ф.с.) и последовательностной ф.с. (п.ф.с.). В первом случае в паре $<\mathfrak{M},\Omega>$ множество $\mathfrak{M}$ состоит из функций K - значной или счетно-значной логики, а во втором - из последовательностных функций. Возможно расширение этих классов за счет использования неоднородных функций, а также за счет рассмотрения не всюду определенных функций. Все реальные ф.с. оказываются либо и.ф.с., либо п.ф.с. Наряду с изучением свойств множества Ω общего характера (типа описания операторов замыкания, индуцируемых с помощью Ω, их выразительных возможностей, свойств структуры таких замыканий) выделяется важный класс финитных и.ф.с, подкласс которого образуют K - значные логики. Для конечно-порожденных финитных и.ф.с. решается задача о полноте как в плане алгоритмическом, так и на пути описания предполных классов.

Далее в книге строится теория полноты для таких важных модельных ф.с., какими являются ф.с. неоднородных функций, функций с задержками и излагаются соответствующие результаты для ф.с. о.д. функций, проводится изучение вопросов полноты для K - значных логик.

Для K - значных логик установлены границы эффективности критерия полноты в терминах предполных классов и найдено асимптотическое поведение числа этих классов и их типов при росте K , характеризующее сложность решения задачи о полноте в этом случае. Рассмотрены пути наложения основных ограничений на системы функций, исследуемых на полноту. В связи с этим исследованы свойства S - систем функций и решена задача о полноте для них. Разработанная при этом техника позволила решить проблему А.Саломаа об описании базисных групп, известную проблему об описании шефферовых функций. Исследованы соответствующие критерии с точки зрения эффективности их применимости.

Ф.с. неоднородных функций представляют собой в определенном отношении предельные обобщения K - значных логик. Неоднородные функции зависят от конечного числа переменных различных сортов. Переменные одного сорта принимают значение из одного и того же конечного множества. Эти функции используются для описания работы различных управляющих систем. Исследованы общие свойства этих ф.с., решена задача о полноте и проведено детальное исследование таких из них, для которых критерий полноты в терминах предполных классов является эффективным. Обнаружено, что с точки зрения сложности строения структуры замкнутых классов двузначная логика является уникальной не только среди K - значных логик, но и среди всех ф.с. неоднородных функций. Только двузначная логика имеет счетное множество замкнутых классов, а остальные имеют континуум их. Указано, когда возможно получение критериев полноты с помощью предполных классов.

Ф.с. функций с задержками занимают промежуточное положение между K - значными логиками и ф.с. о.д. функций и, как и последняя, является п.ф.с. Функция с задержкой представляет собой функцию алгебры логики с указанием времени ее вычисления. Операциями над такими функциями являются операции синхронной суперпозиции, учитывающие время их вычисления, и не выводящие за пределы классов этих функций. Изучены различные модификации задач о полноте для этих ф.с., получено их решение, обнаружены новые с точки зрения общей теории эффекты, возникающие для ф.с. функций с задержками, такие, как комбинированные критерии полноты, использующие предполные классы и семейства классов, невложимых в предполные классы. Приведены результаты по исследованию модификации задачи о полноте, являющейся основной в многообразии рассмотренных модификаций. Исследовано поведение соответствующих временных характеристик.

Ф.с. о.д. функций являются одними из важнейших ф.с. О.д. функциями называются отображения, реализуемые конечными автоматами. В качестве операций в этих ф.с. выступают операции суперпозиции и обратной связи. Для этих ф.с. установлено, что хотя в принципе критерий полноты и может быть сформулирован с помощью предполных классов, но он не является эффективным, поскольку таких классов континуум. В работе рассмотрены некоторые важные модификации задачи о полноте. Для ф.с. о.д. функций установлено существование базисов, состоящих из любого конечного числа о.д. функций, построены примеры простых универсальных о.д. функций. В работе указывается на связь проблематики и результатов для о.д. функций с другими разделами математики и прежде всего с алгеброй. Рассмотрены также свойства ф.с.д.-функций, то есть функций, реализуемых бесконечными автоматами.

В основу пособия был положен материал, использовавшийся автором в специальных курсах по теории многозначных логик и теории автоматов, которые он в течение ряда лет читал на механико-математическом факультете МГУ.

ГЛАВА I. ИСТИННОСТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

В главе осуществлен подход к выработке общего понятия функциональной системы (ф.с.), которое является естественным обобщением реальных ф.с., таких, как конечно-значные и счетно-значные логики, алгебры вычислимых функций и др., и обладает их характерными свойствами, разработаны вопросы теории ф.с., нацеленные на решение задачи о полноте для них. Суть подхода состоит в рассмотрении в качестве ф.с. пар вида $<M, \Omega>$. Здесь M является множеством функций k-значной или счетно-значной логик или является множеством последовательностных функций, а также множеством некоторого ближайшего обобщения таких функций (например, частичных или неоднородных функций и т.п.). В качестве Ω выступает множество в определенном смысле автоматных операций, обладающих теми "хорошими" свойствами, которыми наделены операции в примерах упомянутых ф.с. Само понятие ф.с. в соответствии с реальными ф.с. распадается на понятие истинностной ф.с. (и.ф.с.) и последовательностной ф.с. (п.ф.с.). В первом случае в паре $<M, \Omega>$ множество M состоит из функций k-значной или счетно-значной логик, а во втором - из последовательностных функций. В этой главе изучаются свойства и.ф.с., а свойства п.ф.с., во многом аналогичные рассмотренным здесь, изучаются в четвертой главе. Наряду с изучением свойств множества Ω общего характера типа описания операторов замыкания, индуцируемых с помощью Ω, их выразительных возможностей, свойств структуры таких замыканий, выделяется важный класс финитных и.ф.с., подкласс которого образуют k-значные логики. Для конечно-порожденных финитных и.ф.с. решается задача о полноте в плане алгоритмическом, так и на пути описания предполных классов.

§ I. Понятие истинностной функциональной системы

В этом параграфе вводится одно из основных понятий - понятие истинностной функциональной системы (и.ф.с.), которая представляет собой пару $<M, \Omega>$, где M - некоторое множество функций, а Ω - некоторое множество операций над функциями из M со значениями в M. Сначала вводятся понятия схемы, сети и логической сети, затем указывается, как они приводят к понятию операции над функциями. В конце параграфа определяется понятие и.ф.с.

§ I.I. Схемы и логические сети.

Для определения понятий сети и логической сети нам потребуются вспомогательные понятия элемента и схемы. Мы будем рассматривать элементы двух видов: элементы F_n ($n = 1, 2, \ldots$) и элемент G (элементы типа F и типа G соответственно). Множество этих элементов обозначим через E. Элемент F_n имеет n входов и один выход, а элемент G имеет один вход и один выход. Будем изображать эти элементы так, как это сделано на рис. I. Здесь стрелки, входящие в треугольники и прямоугольники, соответствуют входам элементов, остальные стрелки соответствуют их выходам. Входы элемента типа F считаются упорядоченными слева направо: сначала идет первый вход, затем - второй и т.д. Из элементов будем строить схемы, при этом один и тот же элемент может использоваться в построении схемы многократно. Сами схемы будут называться схемами над E или для краткости, если это не будет приводить к недоразумению, просто - схемами. Опишем правила построения схем. Графическая иллюстрация этих правил приведена на рисунках 1 – 6.

1. Каждый из элементов образует схему. Входами и выходами этих схем являются соответственно входы и выходы элементов (рис. 1).

2. Пусть имеется схема S с некоторым числом входов и выходов. Выделим в ней в качестве новых выходов некоторое непустое подмножество выходов схемы S. В результате получим схему, входами которой являются все входы схемы S, а множество выходов совпадает с выделенным множеством (рис. 2).

3. Пусть определены схемы S_1 и S_2, не имеющие общих выходов, входов и элементов. Объединение этих схем также есть схема S. Ее входами являются все входы схем S_1 и S_2, а выходами – все выходы схем S_1 и S_2 (рис. 3). Схема S называется объединением схем S_1 и S_2.

4. Пусть имеется схема S. Будем считать отождествленными произвольные два входа этой схемы, при этом, вообще говоря, один и тот же вход может быть отождествлен с самим собой. В результате получим схему S', входами которой являются все входы схемы S отличные от отождествленных, и любой (по выбору) из отождествленных входов, а выходами – выходы схемы S (рис. 4). Будем говорить в этом случае, что схема S' получена из схемы S при помощи операции отождествления входов.

5. Пусть заданы схемы S_1 и S_2, не имеющие общих входов, элементов и выходов. Отождествим произвольный выход схемы S_1 с произвольным входом схемы S_2. В результате получим схему S, входами которой являются входы схем S_1 и S_2, кроме того входа схемы S_2, который был отождествлен с выходом схемы S_1, а выходами – все выходы схем S_1 и S_2 (рис. 5). Будем говорить, что схема S получена из схем S_1 и S_2 при помощи операции подстановки схемы S_1 в схему S_2.

6. Пусть имеется схема S, имеющая не менее двух выходов. Пусть некоторый ее вход (случай а) или выход (случай б) являются одновременно входом или соответственно выходом только элементов типа G. Тогда:

а) отождествляя произвольный выход схемы S с указанным входом, получим схему S';

б) отождествляя произвольный вход схемы S с указанным выходом, получим новую схему S''.

Входами схем S' и S'' являются все входы схемы S, кроме отождествленного с выходом, а выходами – все выходы схемы S (рис. 6). Будем говорить, что схемы S' и S'' получены из схемы S при помощи операции обратной связи. На рис. 6 для обозначения схем S' и S'' использован символ S^*.

На рис. 7 приведен пример схемы S. Правила построения схем с 1 по 5 будем называть в дальнейшем операциями суперпозиции.

Далее мы будем рассматривать схемы, имеющие только один выход. Множество всех таких схем над E обозначим $\mathcal{Y}^{n}(E)$.

Для описания важнейшей характеристики схемы, которой является ее функционирование, введем ряд понятий и обозначений. Обозначим мощность множества C через $|C|$. Пусть A – некоторое содержащее не менее двух элементов конечное или счетное множество элементов a и $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ – алфавит переменных u_n, значениями которых являются элементы a из A. Обозначим через P_A множество всех функций $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$ со значениями в A, где $i_j < i_{j'}$ при $j < j'$; $j, j' = 1,2,\ldots, n$; $n = 1,2,\ldots$ Эти функции являются отображениями вида $f: A^n \to A$, где $A^n = A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}$, $A_{i_j} = A$ и называются иногда функциями $|A|$ – значной логики. Чтобы избежать сложных обозначений для индексов переменных, мы будем употреблять в качестве метаобозначений символы $x, y, z, \ldots$, а также эти символы с индексами. Таким образом, запись $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ понимается как запись из функции P_A, зависящей от переменных $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$ при указанных выше свойствах их индексов. Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменного x_i, если существуют такие наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n)$, что $a_i \neq a_i'$ и $f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Переменное x_i в этом случае называется существенным для функции. Переменное, не являющееся существенным, называется фиктивным для функции. Для указания того, что мы имеем два разных обозначения $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $h(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ для одной и той же функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем использовать знак равенства =, то есть писать $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = h(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Обозначим через $\vec{a}^{\,n} = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ произвольный элемент из A^n и через $(A^n)^*$ множество всех слов $\alpha^k = \vec{a}_1^{\,n} \vec{a}_2^{\,n} \ldots \vec{a}_k^{\,n}$, то есть конечных последовательностей длины k в алфавите A^n. Иногда для записи слова α^k из $(A^n)^*$ будем использовать обозначение $\alpha^k = \vec{a}^{\,n}(1)\vec{a}^{\,n}(2) \ldots \vec{a}^{\,n}(k)$.

Пусть F_n – элемент из E, занумеруем разнозначно некоторым образом его входы числами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (здесь i_ν – номер ν-го входа элемента). Пусть $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$ – функция из P_A. Будем считать ее приписанной элементу F_n с указанной нумерацией входов. Говорят в этом случае, что элемент F_n с указанной нумерацией входов реализует функцию f и интерпретируют это следующим образом. Вводится параметр t, называемый временем. Предполагается, что t пробегает значения 1,2,..., а "работа" элемента F осуществляется в эти моменты. Считается, что входы и выходы элемента могут находиться в некоторых состояниях, значения которых образуют множества A. Если входы элемента с учетом нумерации в момент t находятся в состояниях $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, то выход элемента в этот момент находится в состоянии $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$. Элемент типа G "работает" в эти же моменты и состояние $b(t+1)$ его выхода в момент $t+1$ совпадает с состоянием $a(t)$

его входа в момент t, то есть $b(t+1) = a(t)$. В первый момент выходу элемента типа G приписывается некоторое начальное состояние $b(1)$, вообще говоря, свое каждому элементу типа G. Говорят, что в этом случае элемент типа G реализует оператор единичной задержки.

Рассмотрим теперь произвольную схему S с n выходами. Припишем некоторым образом ее входам переменные $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$, где $i_j < i_{j'}$ при $j < j'$, а входы элементов схемы S занумеруем некоторым образом, как указано выше. Будем считать, что элементам, из которых построена схема, сопоставлены описанные выше операторы. "Работа" схемы S осуществляется в те же моменты $t = 1,2,\ldots$, и состоит в следующем. Предполагается, что в указанные моменты каждые вход и выход любого элемента схемы могут находиться в некоторых состояниях, при этом отождествленные входы, а также отождествленные выходы и входы находятся соответственно в одинаковых состояниях. Считается, что в моменты 1,2, ..., на входы схемы поступают побуквенно слова из $(A^n)^*$. В соответствии с законами функционирования элементов схемы и с учетом того, что состояния выходов элементов типа G уже определены, подача на входы схемы буквы $\vec{a}^n(1)$ определит состояния всех входов и выходов каждого элемента схемы S в момент $t=1$, а тем самым и состояния всех выходов элемента типа G в момент $t=2$. Подача буквы $\vec{a}^n(t)$ в следующий момент приводит к ситуации, аналогичной рассмотренной, и т.д. Таким образом, выход каждого элемента схемы S будет последовательно пробегать некоторые состояния. Описанная "переработка" слов α^k из $(A^n)^*$ с помощью схемы S в последовательности состояний, пробегаемых выходами каждого элемента схемы S, называется функционированием схемы S, а сама схема, чье функционирование только что было определено, называется логической сетью (л.с.).

§ 1.2. Вычисления с помощью логических сетей. Понятие сети

Пусть л.с. S имеет n входов и им приписаны переменные $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$, $i_\ell < i_{\ell'}$ при $\ell < \ell'$, и всего m элементов типа G или F, выходы которых занумерованы числами $j_1, j_2, \ldots, j_m$, $j_\tau < j_{\tau'}$ при $\tau < \tau'$; $m \geq 1$.

Выделим в множестве $A_{j_1} \times A_{j_2} \times \cdots \times A_{j_m}$ некоторое подмножество Q, элементы которого назовем заключительными состояниями, рассмотрим некоторую функцию $f(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n})$ из P_A. Будем говорить, что л.с. S вычисляет относительно Q функцию f в точке $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, если выполнены следующие условия:

1) существует такое $k \geq 1$, что при переработке слова $\alpha^k = \vec{a}^n(1)\vec{a}^n(2)\ldots\vec{a}^n(k)$, где $\vec{a}^n(\ell) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, $\ell = 1,2,\ldots,k$ выходы элементов л.с. S окажутся в момент k в состояниях, образующих набор $(q_{j_1}, q_{j_2}, \ldots, q_{j_m})$, который принадлежит Q;

2) состояние выхода л.с. S в момент k совпадает с $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$;

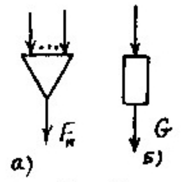

Рис.1

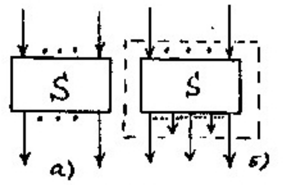

Рис.2

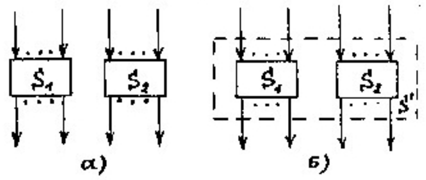

Рис.3

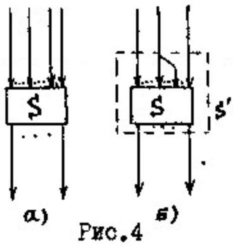

Рис.4

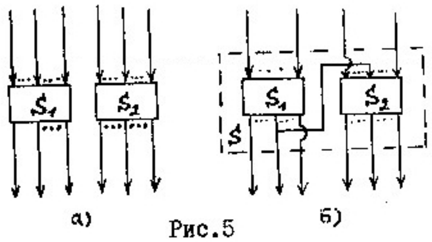

Рис.5

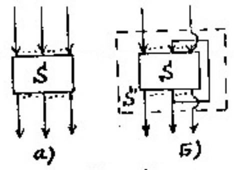

Рис.6

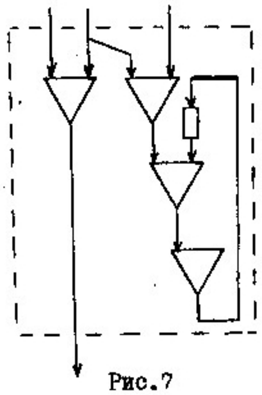

Рис.7

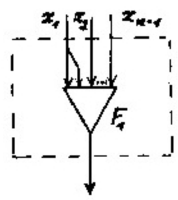

Рис.8

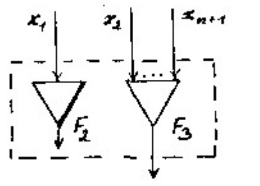

Рис.9

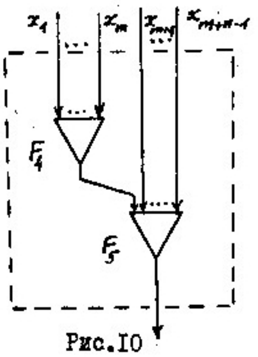

Рис.10

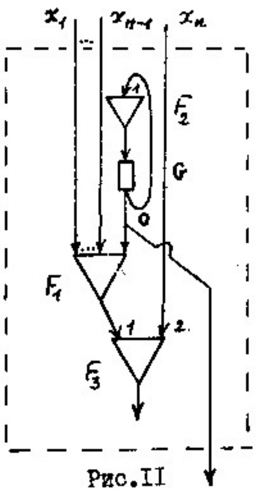

Рис.11

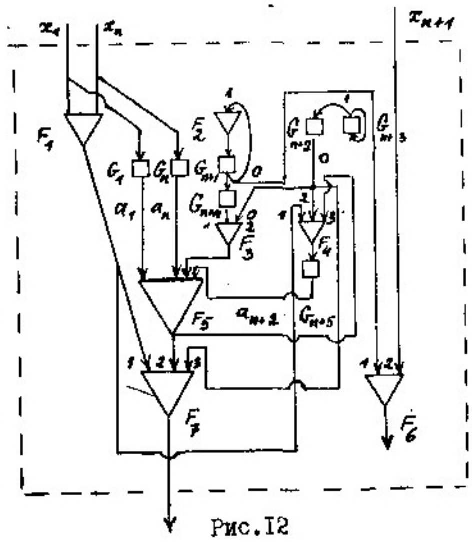

Рис.12

3) при $k>1$ для любого ρ такого, что $\rho<k$, при переработке слова $\alpha^\rho=\vec{a}^n(1)\vec{a}^n(2)\dots\vec{a}^n(\rho)$, где $\vec{a}^n(\ell')=(a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_n})$, $\ell'=1,2,\dots,\rho$, выходы элементов л.с. S будут находиться в момент ρ в состояниях, образующих набор ($q'_{j_1}, q'_{j_2}, \dots, q'_{j_m}$), который не принадлежит Q .

Будем говорить, что л.с. S вычисляет относительно Q функцию f , если л.с. S вычисляет относительно Q функцию в каждой точке. Для краткости в дальнейшем слова "относительно" иногда будем опускать. Таким образом, л.с. S выступает в роли вычислителя функций.

Отметим, что одна и та же схема S может задавать различные вычислители, если предположить возможным варьирование приписывания: (1) различных переменных входам схемы, (2) различных номеров входам элементов схемы, (3) различных функций из P_A элементам схемы, (4) набора начальных состояний ее элементов типа G, а также (5) выделения множества Q ее заключительных состояний.

Пусть в схеме S ее входам приписаны некоторые переменные, занумерованы входы ее элементов, некоторым элементам типа F, а также всем элементам типа G приписаны соответствующие операторы, указаны начальные состояния элементов типа G и фиксировано множество Q заключительных состояний. Полученный при этом объект назовем сетью S. Пусть элементам типа F, которые обозначим через $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_z}$, указанное приписывание не осуществлено. Тогда, предполагая, что этим элементам возможно приписывание любых функций из P_A от соответствующих переменных, можно считать, что сеть S задает некоторую частичную операцию $\omega: (P_A)_{i_1} \times (P_A)_{i_2} \times \dots \times (P_A)_{i_z} \to P_A$, которая определяется следующим образом. Пусть элементам $F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_z}$ приписаны соответственно функции $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_z}$, тогда сеть S может рассматриваться как л.с., то есть вычислитель некоторой функции из P_A. Если такая функция f из P_A существует, то она объявляется значением $\omega(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_z})$, в противном случае значение $\omega(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_z})$ считается неопределенным. Операция ω, задаваемая сетью S, никакому элементу типа F которой не приписана фиксированная функция, называется свободной операцией, указанные элементы сети S, а также сеть S тоже называются свободными. Операции, сети и элементы, не являющиеся свободными, будут называться связанными. Операции, задаваемые сетями, которые или не содержат элементов типа F, или в которых элементы типа F являются связанными, называются константными.

§ 1.3. Истинностные функциональные системы.

Множество всех сетей, которые получаются из множества $\mathcal{T}(E)$ с помощью соответствующих приписываний переменных входам сетей, нумерации входов их элементов, приписывания функций из P_A элементам типа F, выбора начальных состояний элементов типа G и фиксации множества заключительных состояний, обозначим через $\mathcal{T}(E, P_A)$. Множество всех операций над функциями, задаваемых с помощью сетей из множества N, $N \subseteq \mathcal{T}(E, P_A)$, обозначим через $\Omega(N)$. Пусть $M \subseteq P_A$, $M \neq \emptyset$ и $\Omega \subseteq \Omega(\mathcal{T}(E, P_A))$, $\Omega \neq \emptyset$; пару $\langle M, \Omega \rangle$ будем называть истинностной функциональной системой, если при применении операторов ω из Ω к элементам из M получаются элементы из M. Если и.ф.с. $\langle P_A, \Omega \rangle$ рассматривать как частичную алгебру, то с ней естественным образом можно связать оператор $\mathcal{J}_\Omega$, отображающий множество подмножеств P_A в себя. Этот оператор определяется следующим образом. Пусть $M \subseteq P_A$, введем по индукции множества M_ℓ, $\ell = 0, 1, \dots$. Полагаем M_0 равным M, а $M_{\ell+1}$ равным множеству всех таких функций f из P_A, которые или принадлежат M_ℓ, или для которых найдутся такие операция ω из Ω и функции $f_1, f_2, \ldots, f_s$ из M_ℓ, $s \geqslant 0$, что $\omega(f_1, f_2, \ldots, f_s) = f$. Тогда $\mathcal{J}_\Omega(M) = \bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_\ell$. Нетрудно видеть, что (1) $\mathcal{J}_\Omega(M) \supseteq M$, (2) $\mathcal{J}_\Omega(\mathcal{J}_\Omega(M)) = \mathcal{J}_\Omega(M)$ и (3) если $M_1 \supseteq M_2$, то $\mathcal{J}_\Omega(M_1) \supseteq \mathcal{J}_\Omega(M_2)$. Оператор $\mathcal{J}$, определенный на множестве всех подмножеств данного множества B и обладающий свойствами (1), (2) и (3), называется оператором замыкания. Таким образом $\mathcal{J}_\Omega$ является оператором замыкания и будет иногда называться автоматным замыканием или для краткости $\mathcal{A}$ -замыканием. Оператор $\mathcal{J}_\Omega$ сграет важную роль при изучении функциональных систем.

Построения, осуществленные в § 1.1. и §.1.2, могут быть расширены до более общей ситуации, включающей рассмотрение и не всюду определенных функций. Это может быть достигнуто следующим образом. Обозначим через $P_A^{\varkappa}$ множество всех функций $f: A_{i_1} \times A_{i_2} \times \cdots \times A_{i_n} \to A$, включая и не всюду определенные функции. Факт неопределенности функции f в точке $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ будет обозначаться символом $\varkappa$, точнее будем считать, что в этой точке функция f принимает новое значение $\varkappa$, $\varkappa \notin A$. Относительно элементов из E будем дополнительно предполагать, что их входы и выходы могут находиться также в состоянии $\varkappa$, при этом, если хотя бы один вход элементов типа F или G принял это значение, то его выход в этот же момент также принимает значение $\varkappa$. Понятие вычислимости не всюду определенной функции уточняется следующим образом.

Пусть определено значение $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$. Тогда понятие "л.с. S вычисляется относительно Q, где, как и выше, m – число элементов в S, $Q \subseteq A_{j_1} \times A_{j_2} \times \cdots \times A_{j_m}$, функцию f в точке $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$", совпадает со случаем всюду определенных функций с тем лишь уточнением, что в пункте 3) соответствующего определения нужно потребовать также, чтобы ни один выход элементов сети S не оказался в состоянии $\varkappa$ во все предшествующие моменты до K -го включительно.

Если же f не определена в указанной точке, то л.с. вычисляет f в точке $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий.

1) Существует такое K, что при переработке слова $\alpha^K = \vec{a}^n(1)\,\vec{a}^n(2)\ldots\vec{a}^n(K)$, где $\vec{a}^n(\ell) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ во все моменты, предшествующие моменту K, выходы и входы всех элементов сети S были определены и ни один из указанных наборов состояний выходов не входил в Q, а в момент K выход некоторого элемента сети оказался в состоянии $\varkappa$.

2) При переработке любого слова α^K вида, указанного в 1), выходы элементов сети S всегда будут определены и никогда не окажутся в состояниях, образующих набор из Q. Расширенное понимание вычислимости естественно приводит к более широкой трактовке операции ω, которая теперь будет определена на наборах функций из $P_A^{\varkappa}$ и принимать в качестве значений функции из $P_A^{\varkappa}$. Подчеркнем лишь, что так же, как и в случае вычисления всюду не опре-

деленных функций, операция ω является частичной и может быть определена лишь на наборах функций фиксированной арности. По аналогии со случаем всюду определенных функций вводим обозначения $\mathcal{F}^*(E,P_A^{\varkappa})$, $N \subseteq \mathcal{F}^*(E,P_A^{\varkappa})$, $\Omega(N)$, $M \subseteq P_A^{\varkappa}$, $\Omega \subseteq \Omega(\mathcal{F}^*(E,P_A^{\varkappa}))$ и расширяем понятия и.ф.с. также на пару $<M,\Omega>$. Для последней по аналогии вводится оператор замыкания, который для того, чтобы подчеркнуть отличие от рассмотренного выше случая, обозначается через $\mathcal{J}_\Omega^{\varkappa}$ и по-прежнему будет называться автоматным замыканием. Понятие и.ф.с. можно теперь расширить и на случай не всюду определенных функций.

§ 2. Примеры важнейших и.ф.с.

В этом параграфе будут рассмотрены примеры важнейших алгебр функций, возникающих в алгебре, математической логике и математической кибернетике. Будет показано, каким образом эти алгебры могут быть описаны с помощью понятия и.ф.с. К числу указанных алгебр относятся конечно-значные логики и их модификации, логики вычислимых по Тьюрингу функций, счетнозначные логики и ряд других.

§ 2.1. Конечно-значные и счетно-значные логики.

Существует несколько моделей конечно-значных логик. Остановимся на одной из них, используемой в логике. Рассмотрим множество P_A, где A – конечное множество. Обычно предполагают, что $A=\{0,1,2,\dots,k-1\}$, $k \geqslant 2$, и вместо A пишут E_k, а вместо P_A – используют обозначение P_k. Функции из P_k называются функциями k-значной логики. Пусть $M \subseteq P_k$; вводится понятие формулы над M. С этой целью функцию $f: A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n} \to A$ из P_k записывают с помощью переменных из алфавита $\mathcal{U}=\{u_1,u_2,\dots,u_n,\dots\}$, каждая из которых может принимать в качестве значений элементы из E_k, таким образом: $f(u_{i_1}, u_{i_2},\dots,u_{i_n})$. Определение формулы над M дается индуктивно.

1. Обозначение функции $f(u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_n})$ из M является формулой над M.

2. Если $f(u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_n})$ – функция из M, а $G_1,G_2,\dots,G_n$ – или формулы над M, или переменные из $\mathcal{U}$, то выражение $f(G_1,G_2,\dots,G_n)$ является формулой над M.

Множество всех формул над M обозначим через $<M>$. Каждой формуле над M сопоставляется некоторая функция из P_k, которую по определению реализует эта функция. Такие функции называются суперпозициями над M. Указанное сопоставление осуществляется индуктивно в соответствии с введением понятия формулы.

1. Формула $f(u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_n})$, являющаяся обозначением функции из M, реализует обозначаемую функцию.

2. Пусть формула имеет вид $f(G_1,G_2,\dots,G_n)$, предположим, что выражению G_i сопоставлена функция g_i из P_k, если G_i является формулой над M, и сопоставлено переменное $g_i=G_i$, если G_i – переменное из P_k. Тогда заданная формула реализует функцию $f(g_1,g_2,\dots,g_n)$.

Множество всех суперпозиций над M обозначается через $[M]$. Нетрудно видеть, что оператор $[\ ]$ является оператором замыкания на подмножествах множества M. K-значной логикой, порожденной множеством M, обычно называют тройку $(M, <M>, [M])$. В ряде задач в этой тройке изучаются, однако, только соответствия между M и $[M]$, а множество $<M>$ выступает лишь как средство, определяющее оператор $[\ ]$. Тем самым фактически переходят к изучению оператора замыкания $[\ ]$.

Отметим далее, что если функцию f из M интерпретировать как элемент из E, число входов которого равно числу переменных у f, причем эти входы занумерованы также, как и переменные у функции f, а правило 2 построения формул интерпретировать как объединение правил 4 и 5 построения схем, то каждой формуле $\mathfrak{A}$ над M можно естественно сопоставить схему S, которая фактически является графической формой задания формулы $\mathfrak{A}$. Если теперь с учетом правил построения формулы $\mathfrak{A}$ каждому элементу схемы S сопоставить соответствующую функцию из P_k, входам схемы приписать соответствующие формулы $\mathfrak{A}$ переменные и в качестве Q взять множество всевозможных наборов значений всех выходов элементов схемы S, то получится логическая сеть S, которая будет представлять собой графическую форму задания формулы $\mathfrak{A}$ и будет вычислять ту же функцию, что реализует формула $\mathfrak{A}$. Таким образом, если $N(M)$ - множество всех связей, соответствующих в указанном смысле формулам из $<M>$, то в и.ф.с $<M, \Omega(N(M))>$ оператор $\mathcal{J}_\Omega$ будет совпадать с оператором $[\ ]$ и, значит, изучение пар $(M, [M])$ сведется к изучению и.ф.с. $<M, \Omega(N(M))>$, точнее, действия оператора $\mathcal{J}_\Omega$ на подмножествах M множества P_k.

Совершенно аналогично рассматривается случай $P_k^{\varkappa}$ не всюду определенных функций K-значной логики с тем лишь уточнением пункта 2 о реализации функций формулами, которое состоит в следующем. Считается, что выражение $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$ не определено, если хотя бы одно из значений функций $g_1, g_2, \dots, g_n$ при фиксированных значениях переменных оказывается неопределенным.

Так же, как и в случае K-значных логик, существуют различные модели счетно-значных логик. Наиболее распространенная из них строится совершенно аналогично конечно-значной логике, рассмотренной выше, в предположении, что множество A является не конечным, а состоит из счетного числа элементов. Обычно предполагается, что $A = \{0, 1, 2, \dots\}$ и вместо обозначения P_A используется запись P_{m_0} (здесь и далее посредством m_i обозначается мощность вполне упорядоченного множества, имеющего порядковый тип ω_i, так что m_0 есть мощность счетного множества) в случае всюду определенных и $P_{m_0}^{\varkappa}$ - в случае не всюду определенных функций счетно-значной логики.

С точностью до однозначности восстановления оператора $[\ ]$ в предположении, что равенство между функциями понимается с точностью до добавления и изъятия фиктивных переменных конечно-значные, а также счетно-значные логики могут быть заданы и несколько иначе - в алгебраической форме, предложенной А. И.Мальцевым. Последнее осуществляется с помощью введения на множестве рассматриваемых функций операций $\eta, \tau, \Delta, \nabla, *$, которые будут определены ниже при рассмотрении логик вычислимых функций. При этом подходе под $|A|$ -значными логиками принято понимать подалгебры алгебры $< P_A, \eta, \tau, \Delta, \nabla, * >$.

§ 2.2. Логики вычислимых функций.

Рассмотрим алгебру $< P^{\varkappa}_{m_0}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \mu, R >$. В ней функции из $P^{\varkappa}_{m_0}$ по-прежнему считаются зависящими от переменных из алфавита $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$, для обозначения которых используются метасимволы x_i, $i = 1, 2, \ldots$. Операции над функциями из $P^{\varkappa}_{m_0}$ определяются следующим образом:

$$(\eta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, \ldots, x_n),$$
$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

если $n > 1$; и $\eta f = \tau f = \Delta f = f$, если $n = 1$;

$$(\nabla f)(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{m+1}).$$

Операция $*$ является бинарной и для заданных функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определяется так:

$$(f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Операция μ является унарной и определяется так. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^{\varkappa}_{m_0}$, зафиксируем какие-нибудь значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ аргументов этой функции и рассмотрим уравнение $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, y) = a_n$.

Наименьшее значение переменной y , для которого это равенство будет выполнено, в предположении, что для всех значений y', меньших, чем y , определено значение $f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, y')$, обозначается через $\mu_y(f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, y) = a_n)$. Тем самым μ_y может считаться значением новой функции

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n).$$

Значение $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ считается неопределенным, если указанного y не существует. Операция μ называется операцией минимизации.

Операция R является бинарной и называется операцией примитивной рекурсии. Она определяется следующим образом. Пусть заданы функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ из $P^{\varkappa}_{m_0}$, $n \geqslant 0$. Говорят, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ получается из функций g и h с помощью операции примитивной рекурсии R , если для всех целых неотрицательных значений ее переменных имеет место следующее рекуррентное задание этой функции:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)). \end{cases}$$

Результат применения операции R к функциям g и h иногда записывают так: $f = R(g,h)$. Подалгебра алгебры $< P^{æ}_{\omega_0}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \mu, R >$, порожденная функциями $0, x+1$ и селекторами $e_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = x_i$, $i, n = 1, 2, \ldots$, называется алгеброй частично-рекурсивных функций и обозначается через $< P_{чр}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \mu, R >$. Подалгебры последней алгебры иногда называют логиками вычислимых функций. Покажем, что в случае, когда рассмотрение этих логик представляет интерес как результат действия соответствующего оператора замыкания на подмножествах множества $P_{чр}$, можно перейти к рассмотрению и.ф.с.

Операции η и τ, очевидно, задаваемы с помощью сетей. На рис. 8 - 10 приведены сети, реализующие для фиксированных арностей операций Δ, ∇ и $*$. Предполагается, что входы элементов F_1, F'_2, F_3, F_4 и F'_5 на рис. 8 - 10 пронумерованы так. Номер i -го входа элемента F'_1, $i = 1, 2, \ldots$ совпадает с индексом переменного u_{j_k}, обозначаемого через x_i у функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, к которой применяется операция Δ. Входу элемента F'_2 приписан номер 1. Номер i -го входа элемента F_3 определяется так же, как и у элемента F_1. Номера входов элементов F_4 и F_5 определяются аналогично элементам F_1 и F_5 с тем лишь уточнением, что входам элемента F_4 будут соответствовать переменные функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а входам элемента F'_5 - переменные функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Элемент F_2 реализует функцию тождественно равную нулю. В сетях операций η, τ, Δ, ∇ и $*$ предполагается, что в качестве множества Q выступают всевозможные наборы значений (исключая $æ$) всех выходов элементов рассматриваемых сетей.

На рис. 11 приведена сеть, реализующая операцию μ применительно к функциям вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые приписываются элементу F_1 этой сети. В ней элемент F_1 является свободным и номер его i -го входа совпадает с индексом переменного, обозначенного у функции f через x_i. Элемент F_2 реализует функцию u_1+1; элемент F_3 - функцию $u_1 \sim u_2$, которая равна 1 при $u_1 = u_2$ и равна 0, если $u_1 \neq u_2$ в предположении, что значения u_1 и u_2 определены; элемент G реализует оператор единичной задержки с начальным состоянием выхода 0. Множество заключительных состояний Q для этой сети образовано всевозможными наборами значений выходов ее элементов, такими, что значение выхода элемента F_3 равно 1.

На рис. 12 приведена сеть, реализующая после приписывания элементам F_1 и F_5 соответственно функций $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $h(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ заданных арностей n и $n+2$ операцию $R(g, h)$ в следующем смысле. Пусть задан некоторый набор $\vec{a}^{\,n+2} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$ значений переменных функции h, тогда если $h(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$ определено, то есть на рис. 12 "вычисляет" функцию $f = R(g,h)$. Если $h(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2})$ не определено, то сеть эта вычисляет нигде не определенную функцию. Это нетрудно установить непосредственно с помощью указанной сети. В ней элементы F_1 и F_5 свободные, i-му входу элемента F_1 присвоен номер, совпадающий с индексом переменного, обозначаемого у функции g через x_i, аналогично j-му входу элемента F_5 присвоен номер переменного, обозначаемый у функции h через x_j. Элемент F_2 реализует функцию $u+1$, элемент F_3 реализует функцию $\ell(u_1,u_2)$, такую, что $\ell(0,0)=a_{n+1}$, $\ell(0,a)=0$ при $a>0$ и $\ell(b,a)=b$ при $b>0$; элемент F_4 реализует функцию $m(u_1, u_2, u_3)$ такую, что $m(x_1, 0, x_3) = x_1$ и $m(x_1, a, x_3) = x_3$ при $a>0$; элемент F_6 реализует функцию $p(u_1, u_2)$ такую, что $p(a, a) = 1$ и $p(a, b) = 0$ при $a \neq b$. Элемент F_7 реализует функцию $s(u_1, u_2, u_3)$ такую, что $s(a, b, 0) = a$ и $s(a, b, c) = b$ при $c>0$.

Множество заключительных состояний этой сети образовано всеми теми наборами значений выходов ее элементов, в которых значение выхода элемента F_6 равно 1. Варьируя теперь $\vec{a}^{\,n+2}$, мы для заданных функций g и h с помощью сетей вида, изображенных на рис. 1, будем получать функцию $f = R(g,h)$ или нигде не определенную функцию. Таким образом, операция R с точностью до добавления нигде не определенной функции задаваема с помощью сетей.

Из построений, приведенных на рис. 8 - 12 следует, что если N - множество всех сетей, соответствующих операторам η, τ, Δ, ∇, $*$, μ, R в указанном выше смысле, то и.ф.с. $< P_{\text{чр}}, \Omega(N) >$ и алгебра $< P_{\text{чр}}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \mu, R >$ будут эквивалентными в том смысле, что операторы замыкания в них будут совпадать (с точностью до добавления нигде не определенной функции), и иметь вид $\mathcal{I}_{\Omega}^{x}$. Из этих построений следует также, что рассмотрение конечно-значных и счетно-значных логик, заданных в алгебраической форме, также сводится к рассмотрению функциональных систем.

§ 2.3. Другие логики

Существуют различные модификации конечно-значных логик, а также логик, возникающих при учете специфических свойств реальных преобразователей информации и операций над ними.

Одной из модификаций конечно-значных логик является логика $< P_k, \Omega >$, в которой Ω состоит из операций η, τ, Δ, ∇, $*$, а также всех частичных многозначных операций $\lambda_{n,m}(u_1, u_2, \dots, u_\ell, v_1, v_2, \dots, v_\ell)$, $n, m, \ell = 1,2,\dots$ Операция $\lambda_{n,m}$ определяется так. Пусть заданы два семейства F и G функций из P_k, состоящие из ℓ элементов вида $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_m, y)$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, y)$ соответственно, $i = 1,2,\dots,\ell$. Тогда говорят, что операция $\lambda_{n,m}$ определяет с помощью этих функций новую функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P_k и пишут $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \lambda_{n,m}(f_1, f_2, \dots, f_\ell, g_1, g_2, \dots, g_\ell)$, если существует такой набор $\vec{c}^{\,m} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, что уравнение

(ж) $$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

является эквивалентным системе

(жж) $$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_m, y) = \\ \qquad = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_m, y), \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_m, y) = \\ \qquad = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_m, y), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_m, y) = \\ \qquad = g_\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_m, y). \end{cases}$$

В противном случае, считаем, что значением $\lambda_{n,m}$ является пустое множество. Введем следующий однозначный оператор $\lambda_{n,\vec{c}^m}(u_1, u_2, \ldots, u_\ell, v_1, v_2, \ldots, v_\ell)$, значением которого в точке $(f_1, f_2, \ldots, f_\ell, g_1, g_2, \ldots, g_\ell)$ будет одноэлементное множество $\{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ точно тогда, когда уравнения (ж) и (жж) эквивалентны. В противном случае множество значений оператора $\lambda_{n,\vec{c}^m}$ в точке $(f_1, f_2, \ldots, f_\ell, g_1, g_2, \ldots, g_\ell)$ считается пустым. Нетрудно ви-

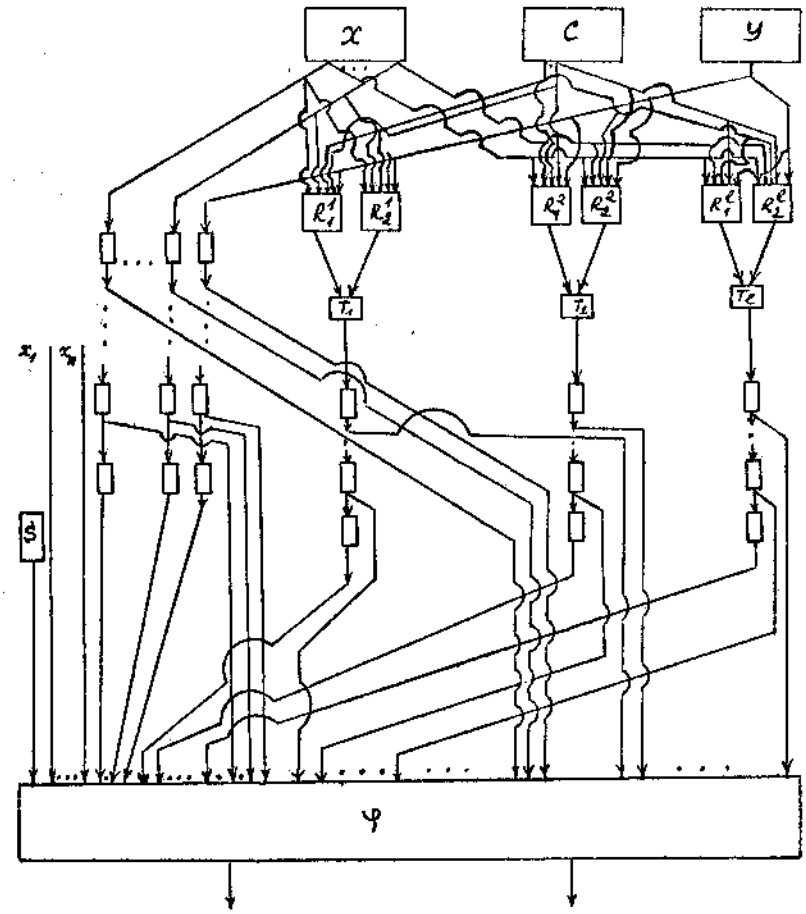

Рис.13.

деть, что для любого набора ($f_1, f_2, \ldots, f_e, g_1, g_2, \ldots, g_e$) имеет место

$$\lambda_{n,m}(f_1, f_2, \ldots, f_e, g_1, g_2, \ldots, g_e) = \bigcup_{\text{по всем } \tilde{c}^m} \lambda_{n,\tilde{c}^m}(f_1, f_2, \ldots, f_e, g_1, g_2, \ldots, g_e)$$

Тем самым, если в логике $<P_\kappa, \Omega$ каждый оператор $\lambda_{n,m}$ заменить на множество всех операторов вида $\lambda_{n,\tilde{c}^m}$, то в логиках $<P_\kappa, \Omega>$ и $<P_\kappa, \Omega'>$, возникшей в результате указанной замены, очевидно, операторы замыкания совпадут. Таким образом, для того, чтобы показать, что существует и.ф.с., оператор замыкания в которой совпадает с оператором замыкания в $<P_\kappa, \Omega>$, достаточно установить это по отношению к $<P_\kappa, \Omega'>$. Рассмотрим с этой целью сеть, которая приведена на рис. 13. В этой сети в блоках, обозначенных X, C, Y, располагаются генераторы наборов значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, набора значений $c_1, c_2, \ldots, c_m$ и значений b переменного y, которые для краткости обозначим через a, c и b. Указанные генераторы осуществляют выдачу наборов a, c и b следующим образом. В моменты с 1 по κ^{n+1} выдаются наборы ($a^{(1)}$, c, $b^{(1)}$), ($a^{(2)}$, c, $b^{(2)}$), ..., ($a^{(\kappa^{n+1})}$, c, $b^{(\kappa^{n+1})}$), где ($a^{(i)}$, $b^{(i)}$) $\neq$ ($a^{(j)}$, $b^{(j)}$) при $i \neq j$. Эта последовательность образует период вырабатываемой генераторами последовательности. Блок (R_1^u, R_2^u), $u = 1,2,\ldots,\ell$, после приписывания его частям соответственно функций f_i и g_i, $i = 1,2,\ldots,\ell$, перерабатывает набор ($a^{(j)}$, c, $b^{(j)}$) в пару значений f_i($a^{(j)}$, c, $b^{(j)}$) и g_i($a^{(j)}$, c, $b^{(j)}$), которая, поступая на блок T_i, перерабатывается в 1, если значения в указанной паре равны и перерабатывается в 0, если эта пара состоит из разных значений. В сети далее идет система последовательно соединенных задержек в количестве κ^{n+1} штук. В сеть входит блок S, который вырабатывает периодическую последовательность следующего вида

$$\underbrace{00\ldots0}_{\kappa^{n+1}}1\underbrace{00\ldots0}_{\kappa^{n+1}}10\ldots$$

Блок φ реализует вектор-функцию $\varphi: (E_\kappa)^\tau \to (E_2)^2$, значение которой

$$\varphi(\ell, a', a^{(1)}, b^{(1)}, d^{(1)}, a^{(2)}, b^{(2)}, d^{(2)}, \ldots, a^{(\kappa^{n+1})}, b^{(\kappa^{n+1})}, d^{(\kappa^{n+1})}),$$

где $d^{(s)}$ есть набор значений состояний выходов задержек, образующих s-ый слой, определяется следующим образом. Пусть $\ell = 1$ и для каждого $a^{(j)}$ существует единственное такое $b^{(j)}$ (условие однозначности), что в паре ($a^{(j)}$, $b^{(j)}$) выполнено $b^{(j)} = b$ и эта пара является решением системы (ж), то есть $d^{(j)} = (1,1,\ldots,1)$. Тогда для $a' = a^{(j)}$ значением φ является пара $(b^{(j)}, 1)$. Если условие однозначности нарушено, то значением φ является пара (0,0). Этому же значению φ равно при $\ell = 0$. Начальное состояние выходов задержек, не входящих в блоки X, C, Y и S, все равны 0. Множество Q заключительных состояний сети состоит из всех наборов значений выходов ее элементов, в которых значение правого выхода блока φ равно 1. Блоки X, C, Y и S могут быть построены, очевидно, с использованием элементов типа G.

Нетрудно видеть, что описанная сеть реализует оператор $\lambda_{n,\vec{c}^m}$. Отсюда, очевидно, следует, что если N – множество всех сетей, соответствующих в нашем смысле операторам η, τ, Δ, ∇, $*$ и $\lambda_{n,\vec{c}^m}$, $n,m = 1,2,\dots$; $\vec{c}^m \in E_k^m$, то и.ф.с. $<P_k, \Omega(N)>$ и логика $<P_k, \Omega'>$ будут эквивалентными в том смысле, что операторы замыкания в них будут совпадать. Тем самым в указанном смысле и.ф.с. $<P_k, \Omega(N)>$ будет эквивалентна логике $<P_k, \Omega>$.

Другой модификацией k-значных логик является логика $<P_\Sigma, \Omega>$. Определим класс P_Σ. Пусть $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$, где $\Sigma_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$; $\Sigma_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_t\}$; $A_i = \{a_1^i, a_2^i, \dots, a_{z_i}^i\}$; $B_j = \{b_1^j, b_2^j, \dots, b_{z_j}^j\}$; $A_i \neq A_k$; $B_j \neq B_\ell$ при $i \neq k$, $j \neq \ell$ и пусть $X_i = \{x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, \dots\}$, $1 \leq i, k \leq s$, $1 \leq j, \ell \leq t$. Множество X_i состоит из переменных, принимающих значения из A_i. Пусть $P_\Sigma^{B_j}$ – множество всех функций $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_s}^s)$ принимающих значения из B_j. Обозначим через P_Σ множество $\bigcup_{j=1}^{t} P_\Sigma^{B_j}$ элементы которого называются неоднородными функциями. Операции, образующие множество Ω, являются естественными обобщениями операций η, τ, Δ, ∇, $*$ из k-значной логики. Множество значений функции g обозначим $\hat{g}$.

Каждая из операций O, $O \in \{\eta, \tau, \nabla, \Delta\}$ заменяется набором операций O_1, O_2, ..., O_s таким образом, что операция O_i действует как операция O на множестве переменных X_i функции f. Операция $*$ также заменяется на набор операций $*_{ij}$, таким образом, что для функций

$$f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2, \dots x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_s}^s)$$

и

$$g(x_1^1, x_2^1, \dots x_{m_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_2}^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_{m_s}^s)$$

применимость операции $*_{ij}$ означает, что $g \in P_\Sigma^{B_j}$, а $\hat{g} \subseteq A_i$. Результатом применения операции $*_{ij}$ к функциям f и g является функция

$$h(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{m_1+n_1}^1, \dots, x_1^i, x_2^i, \dots, x_{m_i+n_i-1}^i, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_{m_s+n_s}^s) =$$
$$= f(x_{m_1+1}^1, x_{m_1+2}^1, \dots, x_{m_1+n_1}^1, \dots, x_{m_{i-1}+1}^{i-1}, x_{m_{i-1}+2}^{i-1}, \dots, x_{m_{i-1}+n_{i-1}}^{i-1}, g(x_1^1, x_2^1, \dots,$$
$$x_{m_1}^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_{m_2}^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_{m_s}^s), x_{m_i+1}^i, \dots, x_{m_i+n_i-1}^i, x_{m_{i+1}+1}^{i+1},$$
$$x_{m_{i+1}+2}^{i+1}, \dots, x_{m_{i+1}+n_{i+1}}^{i+1}, \dots x_{m_s+1}^s, x_{m_s+2}^s, \dots, x_{m_s+n_s}^s).$$

Сведение рассмотрения этих логик к функциональным системам может быть осуществлено путем рассмотрения более общего класса схем и сетей, элементам которых приписываются функции из P_Σ с учетом ограничений, естественно диктуемых особенностями операций из Ω. Нетрудно видеть, что на этом пути мы приходим к конструкциям полностью аналогичным уже рассмотренным для конечно-значных логик, заданных в алгебраической форме. Другие модификации конечно-значных логик получаются, например, на пути расширения класса рассматриваемых функций за счет включения также и не всюду определенных функций.

§ 3. Задача о полноте для и.ф.с.

С введенным понятием и.ф.с. $<M, \Omega>$ связывается целый ряд задач "функционального" характера, которые исследовались для конкретных и.ф.с. К их числу относятся такие важные вопросы, как задача "о выразимости" и вариант последней – "задача о полноте", которая и будет интересовать нас в первую очередь. Рассмотрение этих задач удобно начать для более общей модели, чем и.ф. с. Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое непустое множество, на подмножествах которого определен некоторый оператор замыкания $\mathfrak{I}$. Этот объект обозначим через $<\mathfrak{M}, \mathfrak{I}>$. Пусть $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}$; говорят, что $\mathfrak{M}_2$ выразимо через $\mathfrak{M}_1$ и $<\mathfrak{M}, \mathfrak{I}>$, если $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}_1) \supseteq \mathfrak{M}_2$, при этом множество $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}_1)$ называется замыканием множества $\mathfrak{M}_1$. Задача о выразимости для $<\mathfrak{M}, \mathfrak{I}>$ состоит в указании всех таких пар $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$, что $\mathfrak{M}_2$ выразимо через $\mathfrak{M}_1$. Задача о выразимости для класса всех таких пар $<\mathfrak{M}', \mathfrak{I}>$, таких, что $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}'$, в предположении, что в парах вида $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ выполнено $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$, эквивалентна задаче о полноте для пар $<\mathfrak{M}', \mathfrak{I}>$, которая состоит в следующем. Подмножество $\mathfrak{M}'$ множества $\mathfrak{M}$ называется полным в $<\mathfrak{M}, \mathfrak{I}>$ (иногда для краткости просто "полным"), если $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}') = \mathfrak{M}$. Задача о полноте состоит в описании всех подмножеств $\mathfrak{M}'$, полных в $<\mathfrak{M}, \mathfrak{I}>$. К числу основных подходов к решению задачи о полноте относится подход, впервые осуществленный в работах С.В.Яблонского [I] и состоящий в получении критериев полноты в терминах так называемых предполных классов. При этом подходе опираются на свойства структуры замкнутых, то есть совпадающих со своим замыканием подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Одним из основных является понятие критериальной системы. Пусть $\mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ – система всех замкнутых подмножеств множества $\mathfrak{M}$. Ясно, что $\mathfrak{T}(\mathfrak{M}) \neq \emptyset$. Подмножество Θ, $\Theta \subseteq \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$, называется критериальной системой, если всякое множество $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ является полным тогда и только тогда, когда для любого элемента $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \in \Theta$, имеет место $\mathfrak{M}' \nsubseteq \mathfrak{N}$. Примером критериальной системы является, очевидно, множество $\mathfrak{T}(\mathfrak{M}) \setminus \{\mathfrak{M}\}$. Вместе с тем, ясно, что если Θ – критериальная система и для некоторых ее элементов $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ имеет место $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2$, то множество $\Theta \setminus \{\mathfrak{N}_1\}$ также образует критериальную систему. Если при исследовании множеств на полноту выбирать в качестве основного инструмента критериальную систему, то естественно потребовать, чтобы она не была избыточной. Строение критериальной системы с этой точки зрения может быть уточнено. Назовем замкнутое множество $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}$, предполным классом в $<\mathfrak{M}, \mathfrak{I}>$ (для краткости просто предполным классом), если для любого элемента m такого, что $m \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}'$ имеет место $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}' \cup \{m\}) = \mathfrak{M}$. Нетрудно видеть, что если Θ – критериальная система, то каждый предполный класс содержится в Θ; тем самым критериальную систему можно представить в виде $\Theta = \Theta_1 \cup (\Theta \setminus \Theta_1)$, где Θ_1 – множество всех предполных классов. При этом, ограничивая себя по возможности, "неизбыточными" критериальными системами, можно, очевидно, считать, что во втором слагаемом $\Theta \setminus \Theta_1$, которое обозначим через Θ_2, не содержатся все такие элементы $\mathfrak{N}$, которые являются подмножествами предполных

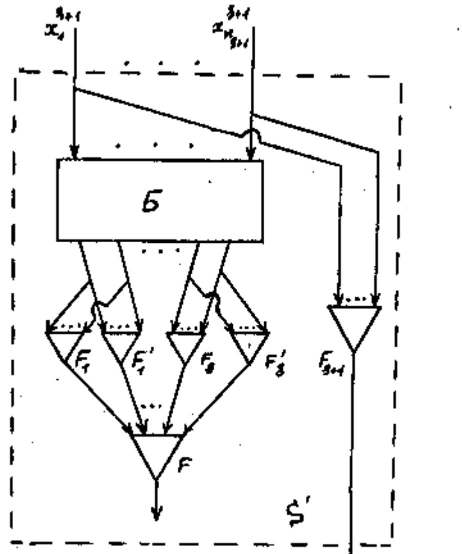

Рис.14

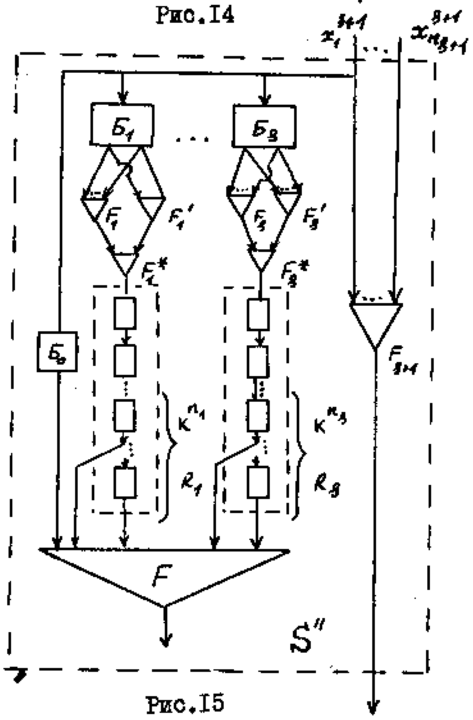

Рис.15

классов. Таким образом, Θ_2 состоит из таких замкнутых классов, каждый из которых не является подмножеством ни одного предполного класса. В общем случае построение соответствующих примеров [2] показывает, что реализуема любая из следующих логических возможностей: $\Theta_1 \neq \emptyset$ и $\Theta_2 = \emptyset$; $\Theta_1 \neq \emptyset$ и $\Theta_2 \neq \emptyset$; $\Theta_1 = \emptyset$ и $\Theta_2 \neq \emptyset$; $\Theta_1 = \emptyset$ и $\Theta_2 = \emptyset$. Последнее, очевидно, имеет место в том случае, когда в $<\mathfrak{M}, \mathfrak{I}>$ полным является пустое множество. Далее, как легко убедиться, в случае, когда $\Theta_2 \neq \emptyset$, можно утверждать, что для любого элемента $\mathfrak{N}$ из множества Θ_2 найдется в Θ_2 такой элемент $\mathfrak{N}'$, что $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$. Отсюда, очевидно, следует, что в указанном случае всегда существует такое подмножество Θ' множества Θ , которое само образует критериальную систему. Таким образом, вводя понятие приведенной критериальной системы как системы, не содержащей собственных подсистем, являющихся критериальными, приходим к тому, что приведенная критериальная система, если она существует, определяется однозначно и в случае непустоты ее состоит из всех предполных классов. Ясно, что существование непустой приведенной критериальной системы для пары $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ эквивалентно тому, что всякий замкнутый класс, отличный от $\mathfrak{M}$, содержится в некотором предполном классе пары $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$. Обозначим для $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ свойства существования непустой приведенной критериальной системы, вложимости любого замкнутого класса $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$ в некоторый предполный класс и пустоту множества θ_2 при одновременной непустоте множества θ_1 соответственно через A, B и C приходим к справедливости следующего утверждения.

Предложение 3.1. Для пары $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ свойства A, B и C эквивалентны и при выполнении любого из них множество $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$ полно в $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного предполного класса в $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$.

В силу предложения 3.I. задача о полноте для пары $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ обладающей свойствами A, B или C тем самым становится в определенном смысле эквивалентной отысканию всех предполных классов в $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$. Назовем пару $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ правильной, если она обладает свойствами A, B или C. Будем говорить, что в паре $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ множество $\mathfrak{M}$ порождается подмножеством $\mathfrak{M}'\subseteq\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{I}(\mathfrak{M}')=\mathfrak{M}$. В случае, когда $\mathfrak{M}'$ - конечное, говорят, что $\mathfrak{M}$ или $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ являются конечно-порожденными. Оператор $\mathfrak{I}$ пары $<\mathfrak{M},\mathfrak{I}>$ называют алгебраическим, если для любых подмножеств $\mathfrak{M}'$ множества $\mathfrak{M}$ и элемента $m\in\mathfrak{M}$ из того, что $m\in\mathfrak{I}(\mathfrak{M}')$, следует существование такого конечного подмножества $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}''\subseteq\mathfrak{M}'$, что $m\in\mathfrak{I}(\mathfrak{M}'')$. Нетрудно видеть, что во всякой и.ф.с. $<M,\Omega>$ оператор $\mathfrak{I}_\Omega$ является алгебраическим. Поскольку нас будут интересовать и.ф.с. прежде всего с точки зрения действия в них оператора $\mathfrak{I}_\Omega$, мы распространим понятия, которые ввели выше для пары $<M,\mathfrak{I}_\Omega>$ на и.ф.с. $<M,\Omega>$. К ним относятся понятия полноты, предполноты, замкнутости и т.п. Учитывая алгебраичность оператора $\mathfrak{I}_\Omega$, с учетом [10] получаем справедливость следующего предложения, дающего достаточное условие правильности и.ф.с., которое будет использовано нами при рассмотрении конкретных и.ф.с.

Предложение 3.2. Конечно-порожденная и.ф.с. $<M,\Omega>$, в которой $\mathfrak{I}_\Omega(\emptyset)\neq M$, является правильной.

Далее нетрудно установить, что если на множестве $M\subseteq P_A$ задан алгебраический оператор замыкания $\mathfrak{I}$, то найдется алгебраический оператор замыкания $\mathfrak{I}'$, действующий на P_A и такой, что на подмножествах множества M действия $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{I}'$ совпадают. В качестве $\mathfrak{I}'$, очевидно, можно взять такой оператор для которого при любом $M' \subseteq P_A$ будет иметь место $\mathcal{J}'(M') = \mathcal{J}(M \cap M') \cup (M' \setminus M)$. Это позволяет заключить, что изучение действий алгебраических операторов замыкания на произвольных подмножествах M множества P_A включается в изучение действия алгебраических операторов на P_A.

§ 4. Свойства $\mathcal{A}$ - замыканий

В этом параграфе изучаются связи между различными классами замыканий и самими замыканиями. Сначала излагаются факты, затем следует их обоснование.

§ 4.1. Понятия и результаты

Особенности решения задачи о полноте для и.ф.с. $<M, \Omega>$ зависят как от свойств множества M, так и от класса операций Ω. Выясним, насколько широк класс операций Ω. Обозначим через $\mathcal{K}_a^A$ и $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^A$ соответственно классы всех алгебраических замыканий и автоматных замыканий на P_A, имеет место следующая

Теорема 4.1.1. Классы $\mathcal{K}_a^A$ и $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}^A$ совпадают.

Эта теорема показывает, что, несмотря на кажущуюся прозрачность операций, реализуемых сетями, порождаемые ими $\mathcal{A}$ - замыкания образуют такой достаточно мощный класс, каким является класс алгебраических замыканий. Тем самым при решении задач о выразимости и полноте для и.ф.с. в полном объеме возникают те трудности, которые имеются для алгебраических операторов замыкания.

Дополнительной характеристикой вычислительных возможностей сетей является выяснение того, какие функции из P_A можно "вычислять" с помощью свободных сетей, то есть из каких функций состоит множество $\mathcal{J}_{\Omega(N_{cb})}(\emptyset)$, где N_{cb} - множество всех свободных сетей из $\mathcal{Y}(E, P_A)$. Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_A назовем квазиселекторной, если существуют такое конечное подмножество $A_f \subseteq A$ и такое i, $1 \le i \le n$, что для любого набора $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ будет выполнено хотя бы одно из следующих условий: $f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A_f$ или $f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i$. Если функция f принимает при этом бесконечно много значений, то указанное переменное ее называется индикаторным. Ясно, что у квазиселекторной функции существует не более одного индикаторного переменного. Множество A_f для квазиселекторной функции f называется ее собственным множеством. Класс всех квазиселекторных функций обозначим через M_{KC}. Нетрудно видеть, что при $|A| < \aleph_0$ имеет место $P_A = M_{KC}$. Справедлива следующая

Теорема 4.1.2. Классы $\mathcal{J}_{\Omega(N_{cb})}(\emptyset)$ и M_{KC} совпадают.

Следствие 4.1.1. Равенство $\mathcal{J}_{\Omega(N_{cb})}(\emptyset) = P_A$ имеет место тогда и только тогда, когда $|A| < \aleph_0$.

Таким образом, для конечного множества A уже класс свободных операций задает столь сильное $\mathcal{A}$ - замыкание, что оно пустое множество отображает на P_A; в случае, когда A - бесконечно, это уже не имеет места, но так же, как и в случае алгебры частично-рекурсивных функций, будет справедливо

Предложение 4.1.1. И.ф.с. $<P_A, \Omega(N_{cl})>$ является конечно-порожденной.

Поскольку в силу теоремы 4.1.2. будет иметь место $\mathcal{J}_{\Omega(N_{cl})}(\phi) \neq P_A$, то с учетом предложения 4.1.1 заключаем, что ф.с. $<P_A, \Omega(N_{cl})>$ при $|A| = m_0$ является правильной. В целом конструктивный объект сеть содержит и неконструктивный параметр, каким пока является множество заключительных состояний. Освободиться от этого можно следующим образом. Множество B, $B = A_{j_1} \times A_{j_2} \times \dots \times A_{j_n}$, где $A_{j_i} = A$, при $i = 1,2,\dots, n$ назовем интервалом, если существуют такие числа $b_{j_{i_1}}, b_{j_{i_2}}, \dots, b_{j_{i_s}}$, что вхождение набора $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$ в B эквивалентно тому, что в нем $a_{j_{i_u}} = b_{j_{i_u}}$, при любом $u = 1,2,\dots, s$. В случае $s = 0$ считаем, что $B = A_{j_1} \times A_{j_2} \times \dots \times A_{j_n}$. Множество Q, $Q \subseteq A_{j_1} \times A_{j_2} \times \dots \times A_{j_n}$ называется регулярным, если существует конечное множество интервалов $B_1, B_2, \dots, B_t$; $B_i \subseteq A_{j_1} \times A_{j_2} \times \dots \times A_{j_n}$, $i = 1,2,\dots, t$, таких, что $Q = \bigcup_{i=1}^{t} B_i$. Понятие регулярности естественно распространяется на сети с регулярными множествами заключительных состояний, реализуемые ими операции, и.ф.с. $< M, \Omega >$ в которых множество Ω состоит из регулярных операций, и на $\mathcal{A}$ - замыкания в них. Заметим, что для случая, когда множество A конечно, понятие регулярности эквивалентно общей ситуации. Отметим, что построения, проведенные выше с использованием регулярных сетей, позволяют утверждать, что справедливо следующее

Предложение 4.1.2. Операторы замыкания в алгебрах

$$< P_K, \eta, \tau, \Delta, \nabla, * > , \quad < P_{m_0}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, * >,$$

$$< P_K, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots > , \quad < P_\Sigma, \Omega >$$

являются регулярными $\mathcal{A}$ - замыканиями.

В алгебре $< P_{ЧР}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \mu, R >$ с точностью до добавления нигде не определенной функции оператор замыкания также является регулярным $\mathcal{A}$ - замыканием.

Пусть $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A},p}$ - класс всех регулярных $\mathcal{A}$ - замыканий на множестве P_A.

Теорема 4.1.3. Классы $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A},p}$ совпадают.

Пусть $N_{cl,p}$ - класс всех свободных регулярных сетей.

Предложение 4.1.3. Равенство $\mathcal{J}_{\Omega(N_{cl,p})}(\phi) = P_A$ имеет место тогда и только тогда, когда множество A конечно.

Определим на $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A}}$ частичный порядок. Будем считать, что для $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ из $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A}}$ имеет место $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}'$, если для любого подмножества M множества P_A будет выполнено $\mathcal{J}(M) \subseteq \mathcal{J}'(M)$. Наибольшим элементам этого частичного порядка, очевидно, будет $\mathcal{A}$ - замыкание $\mathcal{J}_1$, для которого имеет место $\mathcal{J}_1(M) = P_A$ при любом $M \subseteq P_A$. Наименьшим элементом его является тождественное $\mathcal{A}$ - замыкание $\mathcal{J}_0$ такое, что $\mathcal{J}_0(M) = M$ при любом $M \subseteq P_A$.

Обычным образом выведем на $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A}}$ понятия ширины и высоты. Длиной цепи в $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A}}$ назовем мощность множества элементов в ней, верхнюю грань множества длины всех цепей в $\mathcal{K}_{k}^{A}$ назовем высотой семейства $\mathcal{K}_{k}^{A}$ и обозначим через $h(\mathcal{K}_{k}^{A})$. Шириной $b(\mathcal{K}_{k}^{A})$ множества $\mathcal{K}_{k}^{A}$ назовем верхнюю грань множества мощностей всех подмножеств элементов из $\mathcal{K}_{k}^{A}$, состоящих из попарно несравнимых элементов.

Пусть $M \subseteq P_A$. Оператор $\mathcal{J}_M$ назовем константным оператором замыкания. Обозначим через $\mathcal{K}_{k,\text{кон}}^{A}$ множество всех таких операторов замыкания в классе $\mathcal{K}_{k}^{A}$. Отношение частичного порядка на $\mathcal{K}_{k}^{A}$ индуцирует частичный порядок на $\mathcal{K}_{k,\text{кон}}^{A}$. Введем по аналогии с изложенным выше понятия высоты $h(\mathcal{K}_{k,\text{кон}}^{A})$ и ширины $b(\mathcal{K}_{k,\text{кон}}^{A})$ для $\mathcal{K}_{k,\text{кон}}^{A}$.

Предложение 4.1.4. Для любого элемента $\mathcal{K}$ из $\{\mathcal{K}_{k}^{A}, \mathcal{K}_{k,\text{кон}}^{A}\}$ имеет место

$$|\mathcal{K}| = h(\mathcal{K}) = b(\mathcal{K}) = 2^{|P_A|}$$

(При получении равенства $h(\mathcal{K}) = 2^{|P_A|}$ в случае $|A| = \aleph_0$ предполагается справедливый континуум-гипотеза). Имея тем самым те же мощностные параметры, что и множество $\mathcal{K}_{k}^{A}$, множество $\mathcal{K}_{k,\text{кон}}^{A}$ строго содержится в $\mathcal{K}_{k}^{A}$. В отличие от множества $\mathcal{K}_{k}^{A}$ мощность множества всех операторов замыкания на P_A равна $2^{2^{|P_A|}}$. В этом нетрудно убедиться с помощью следующего рассуждения. Выделим в P_A семейство $\mathbb{T}$ попарно не вложенных друг в друга подмножеств, имеющее мощность $2^{|P_A|}$ и такое, что дополнение к каждому из этих множеств содержит, по крайней мере, два элемента. Построим семейство $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ операторов замыкания $\mathcal{J}$ таких, что на $\mathbb{T}$ оператор $\mathcal{J}$ определяется произвольно таким образом, что для всякого M из $\mathbb{T}$ выполнено $\mathcal{J}(M) \supseteq M$. На всяком подмножестве множества P_A, которое строго содержит хотя бы одно подмножество, являющееся элементом множества $\mathbb{T}$, оператор $\mathcal{J}$ принимает в качестве значения множество P_A. На остальных подмножествах множества P_A оператор действует тождественно. Ясно, что оператор $\mathcal{J}$ является оператором замыкания и мощность множества таких операторов равна $2^{2^{|P_A|}}$.

§ 4.2. Доказательство теорем 4.1.1 и 4.1.3

Доказательство теоремы 4.1.1.

Ясно, что $\mathcal{K}_{k}^{A} \subseteq \mathcal{K}_{a}^{A}$. Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть $\mathcal{J} \in \mathcal{K}_{a}^{A}$ и задано произвольное конечное множество функций $M = \{f_1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1), f_2(x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2), \dots, f_s(x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_s}^s)\}$ из P_A. Пусть $g(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \dots, x_{n_{s+1}}^{s+1}) \in \mathcal{J}(M)$. Построим сеть S, $S \in \mathcal{Y}^{M}(E, P_A)$, которая будет реализовать s - местную операцию ω такую, что $\omega(f_1, f_2, \dots, f_s) = g$, и которая будет не определена в остальных точках. Эту операцию обозначим через ω_M^g. Рассмотрим два случая.

1. $|A| = \aleph_0$. Пусть S' - сеть, представленная на рис. 14. В ней блок Б построен только из элементов типа F, которым приписаны некоторые функции из P_A таким образом, что блок Б реализует d -мерную функцию $\mathcal{D}(x_1^{s+1}, \dots x_{n_{s+1}}^{s+1}) = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_{n_1}^1, z_1^1, z_2^1, \dots, z_{n_1}^1, z_1^2, z_2^2, \dots, z_{n_2}^2, z_1^2, z_2^2, \dots, z_{n_2}^2, \dots, z_1^s, z_2^s, \dots, z_{n_s}^s, z_1^s,$

$x_2^s, \ldots, x_{n_s}^s)$, где $d = 2\sum_{i=1}^{s} n_i$, которая осуществляет взаимооднозначное отображение множества $A^{n_{s+1}}$ на A^d. Входы элементов F_i и F_i', $i = 1,2,\ldots, s$, занумерованы соответственно одинаковым образом и так, что j-му входу (при отсчете слева направо) сопоставлен индекс того переменного u_ℓ из $\mathcal{U}$, которое у функции $f_i(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i)$ обозначено через x_j^i; каждому элементу F_i' сопоставлена функция $f_i(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i)$. Элементы F_i при $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ все являются свободными. У элемента F_{s+1} входы занумерованы при отсчете слева направо числами, которые являются соответственно индексами переменных из $\mathcal{U}$, обозначенных через $x_1^{s+1}, x_2^{s+1} \ldots x_{n_{s+1}}^{s+1}$, а самому элементу F_{s+1} приписана функция $g(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \ldots, x_{n_{s+1}}^{s+1})$. Входы элемента F занумерованы слева направо числами $1,2,\ldots, 2s$. Он реализует фкнкцию $f(u_1, u_2, \ldots, u_{2s-1}, u_{2s})$ такую, что она принимает только два значения 0 или I, при этом значение I она принимает на тех и только тех наборах $\vec{a}^{2s} = (a_1, a_2, \ldots, a_{2s-1}, a_{2s})$ у которых $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4, \ldots, a_{2s-1} = a_{2s}$. В случае, когда $s = 0$, считаем, что в построенной нами сети отсутствует блок Б и элементы F_i, F_i' и F. Тем самым сеть вырождается в сеть, состоящую из одного элемента F_{s+1}. Выберем в качестве множества Q для сети S' множество всех наборов значений всех выходов ее элементов, в которых значение выхода элемента F равно 1. Нетрудно видеть, что построенная сеть S' реализует операцию ω_M^g.

2. $|A| = k$, $k < m_0$. Рассмотрим сеть S'', представленную на рис. I5. В ней блок $Б_i$, $i = 1,2,\ldots, s$, построен только из элементов типа G и "вырабатывает" периодическую последовательность $\vec{b}^{n_i}(1)\vec{b}^{n_i}(2)\ldots\vec{b}^{n_i}(t)$ в которой $\vec{b}^{n_i}(\tau) \neq \vec{b}^{n_i}(\tau')$ при $\tau \neq \tau'$ и $\tau, \tau' \leq k^{n_i}$. Период этой последовательности равен k^{n_i}. Элементы F_i при $i = 1,2,\ldots, s$ являются свободными их входы, как и входы элементов F_i', занумерованы так же, как и у сети S'. Элементам F_i' приписаны функции f_i. Элементу F_{s+1} принивана функция $g(x_1^{s+1}, x_2^{s+1}, \ldots, x_{n_{s+1}}^{s+1})$. Входы элемента F_i^* занумерованы слева направо числами I и 2 и ему приписана функция $h_i(u_1, u_2)$ равная 1 при $u_1 = u_2$ и равная 0, если $u_1 \neq u_2$. Блок R_i состоит из последовательно соединенных элементов типа G в количестве z штук, где $z = max\{k^{n_1}, k^{n_2}, \ldots, k^{n_s}\}$.

Блок $Б_0$ построен только из элементов типа G. Он "вырабатывает" последовательность $b(1)\ b(2)\ldots\ b(t)\ldots$, в которой первые $z-1$ чисел равны 0, на z-м месте стоит 1, а затем идут снова и только нули. Входы элемента F слева направо занумерованы числами $1,2,\ldots, m$, где $m = \sum_{i=1}^{s} k^{n_i} + 1$. Он реализует функцию $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, которая равна 1 в точке $(1,1,\ldots,1)$ и равна 0 в остальных точках. Начальные состояния выходов задержек из R_i равны 0. Так же, как и в случае сети S', при $s = 0$ считаем, что сеть S'' "вырождается" в сеть, состоящую из одного элемента F_{s+1}. Выберем в качестве множества Q для сети S'' множество всех наборов значений всех выходов ее элементов, в которых значение выхода элемента F равно 1. Нетрудно видеть что построенная сеть S'' реализует операцию ω^{g}_{M}.

Таким образом, сети S' или S'' могут рассматриваться в качестве указанной выше сети S. Тот факт, что сеть S построена по множеству M и функции g, обозначим через S^{g}_{M}. Возьмем теперь в качестве множества N, $N \subseteq \mathcal{Y}(E, P_A)$, множество $\bigcup_{M,g} \{ S^{g}_{M} \}$, где объединение берется по всевозможным конечным подмножествам M множества P_A и функциям g при указанной выше связи M и g; получим и.ф.с. $< P_A, \Omega(N) >$. Покажем, что $\mathcal{J}_{\Omega(N)} = \mathcal{J}$. Пусть $M \subseteq P_A$.

Нетрудно видеть, что если $\mathcal{J}'$ – алгебраический оператор замыкания на заданном множестве $\mathfrak{M}$, то для любого подмножества M, $M \subseteq \mathfrak{M} \subseteq P_A$, будет иметь место $\mathcal{J}'(M) = \bigcup_{M'} \mathcal{J}'(M')$, где объединение берется по всем конечным подмножествам M' множества M. Отсюда в силу алгебраичности операторов $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_{\Omega(N)}$ будем иметь $\mathcal{J}_{\Omega(N)} = \mathcal{J}$. Теорема 4.1.1. доказана.

Нетрудно видеть, что использованные построения позволяют также установить справедливость теоремы 4.1.3.

§ 4.3. Доказательство теоремы 4.I.2

Пусть свободная сеть S вычисляет некоторую функцию f из P_A. Это, очевидно, означает, что сеть S является логической сетью и построена только из элементов типа G. Покажем, что $f \in M_{KC}$. Пусть y есть выход сети S. Выделим из сети S некоторую ее часть следующим образом. Будем двигаться по сети S, начиная с выхода y, против направления соответствующей выходной стрелки, затем через сам элемент G_1, выходом которого является y, затем, через вход этого элемента G_1 в противоположном направлении. Остановимся, если этот вход является входом сети S и движемся указанным способом далее, если он оказывается выходом другого элемента G_2. Движение продолжаем до тех пор, пока или не выйдем на вход сети или впервые встретим пройденный элемент. Очевидно, в результате получим одну из следующих двух конфигураций, приведенных на рис. 16 и 17. Пусть $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_s\}$ – множество начальных состояний выходов элементов в $G_1, G_2, \dots, G_s$ соответственно. Тогда в случае конфигурации, приведенной на рис. I6, сеть S очевидно будет вычислять такую функцию f, значения которой принадлежат $\mathcal{D}$. Пусть имеет место конфигурация, приведенная на рис. 17, тогда значением y может быть или элемент из $\mathcal{D}$, или значение a_i переменного x_i, то есть для любого набора ($a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$) будет выполнено или $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{D}$ или $f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i$, то есть $f \in M_{KC}$.

Пусть теперь S – произвольная сеть из N_{cl} и y – ее выход. Припишем ее элементам типа F функции из M_{KC} и покажем, что полученная логическая сеть будет вычислять функцию f из M_{KC}. Выделим из сети S некоторую ее часть следующим образом. Будем двигаться по сети S начиная с выхода y, против направления соответствующей выходной стрелки, затем проходим прямоугольник или треугольник элемента и выходим через тот вход против направления соответствующей стрелки, который в случае элемента F соответствует индикаторному переменному функции, приписанной этому элементу и который является входом в случае элемента G. Останавливаемся, если этот вход является входом сети S, и движемся указанным способом далее, если он оказывается выходом другого элемента сети. Движение продолжаем до тех пор, пока или не выйдем на вход сети, или впервые не встретим пройденный элемент. С учетом уже рассмотренных случаев, приведенных на рис. 16 и 17, можно, очевидно, считать, что в результате получим одну из следующих двух конфигураций, приведенных на рис. 18 и 19. В конфигурации заключены пройденные элементы вместе со всеми своими входами. В них для охвата общего случая элементы обозначены кружками со входами и выходами. Пусть $H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_t}$ – элементы типа G, а $H_{j_1}, H_{j_2}, \dots, H_{j_s}$ – элементы типа F в этих конфигурациях. Пусть d_{i_v} – начальное состояние выхода элемента H_{i_v}, f_{i_w} – функция, приписанная элементу H_{j_w}. Тогда в случае конфигурации, приведенной на рис. 18, сеть S, очевидно, будет вычислять такую функцию f, что $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (\bigcup\limits_{v=1}^{t} d_{i_v}) \cup (\bigcup\limits_{w=1}^{s} A_{f_{jw}})$, то есть $f \in M_{KC}$. Пусть имеет место конфигурация, приведенная на рис. 19, тогда значением может быть или элемент из множества $(\bigcup\limits_{v=1}^{t} d_{iv}) \cup (\bigcup\limits_{w=1}^{s} A_{f_{jw}})$ или значение a_i переменного x_i, то есть $f \in M_{KC}$.

Из сказанного следует, что $\mathfrak{J}_{\Omega(N_{CB})}(\phi) \subseteq M_{KC}$. Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M_{KC}$. Построим сеть из N_{CB}, которая будет вычислять функцию f.

Пусть функция f является константой и равна b. Рассмотрим сеть S, приведенную на рис. 20. В ней начальное состояние выхода элемента G_ℓ равно b_ℓ при $\ell = 1,2,\dots, n$, а элемента G_{n+1} равно b. Пусть для этой сети $Q = \{(b_1, b_2, \dots, b_n, b)\}$. Тогда, очевидно, сеть вычисляет f. Значит, далее можно считать, что f не константная и если у f имеется индикаторное переменное, то оно имеет номер i, $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Пусть $A_f = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$. Рассмотрим сеть S, приведенную на рис. 21. В ней начальное состояние выхода элемента G_j есть b_j, $j = 1,2,\dots, s$, а состояние выхода элемента G_0 есть b_1. Пусть в некоторой точке ($a_1, a_2, \dots, a_n$) имеет место $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq b_1$. Такая точка, очевидно, найдется. Начальное состояние выхода элемента G'_v будем считать равным a_v, $v = 1,2,\dots, n$. Множество Q для S пусть состоит из всех таких наборов $(q_0, q_1, q_2, \dots, q_s, q'_1, q'_2, \dots, q'_n)$ (где q_u есть состояние выхода элемента G_u, а q'_w – элемента G'_w, $u = 0,1,2,\dots, s$; $w = 1,2,\dots, n$), что $f(q'_1, q'_2, \dots, q'_n) = q_0$. Нетрудно видеть, что сеть S вычисляет функцию f. Теорема 4.1.2. доказана.

§ 4.4. Доказательство предложений 4.1.1., 4.1.3 , 4.1.4.

Доказательство предложения 4.1.1.

Покажем, что $\mathcal{J}_{\Omega(N_{c\ell})}(\{x+1\}) = P_A$, отсюда будет следовать наше утверждение. Рассмотрим сеть S , изображенную на рис. 22. В ней элементу F приписана функция $x+1$. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_A$ и функция f не является константной; полагаем в сети S начальные состояния выходов элементов G_{n+1} и G_{n+2} равными 0. Очевидно, найдется набор ($a_1, a_2, \dots, a_n$) такой, что f ($a_1, a_2, \dots, a_n$) $\neq 0$. Положим начальное состояние выхода элемента G_j , $j = 1,2,\dots, n$, равным a_j . Выберем в качестве множества Q для S множество всех наборов ($q_1, q_2, \dots, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, q_{n+3}$), где q_i – состояние выхода элемента G_i , $i = 1,2,\dots, n+2$, а q_{n+3} – состояние выхода элемента F таких, что f ($q_1, q_2, \dots, q_n$)= $= q_{n+2}$. Нетрудно видеть, что сеть S вычисляет функцию f . А так как в силу теоремы 4.1.2, все константы содержатся в $\mathcal{J}_{\Omega(N_{c\ell})}(\emptyset)$, то $\mathcal{J}_{\Omega(N_{c\ell})}(\{x+1\}) = P_A$. Доказательство предложения 4.1.3. получаем непосредственным использованием конструкции, которая применялась в доказательстве теоремы 4.1.2.

Доказательство предложения 4.1.4.

Нетрудно видеть, что каждый алгебраический оператор замыкания на P_A однозначно определяется своими значениями на системе всех конечных подмножеств множества P_A . Отсюда, очевидно, следует, что $|\mathcal{K}_k^A| \leq 2^{|P_A|}$, а тем самым $\sup\{h(\mathcal{K}_k^A), b(\mathcal{K}_k^A)\} \leq 2^{|P_A|}$. Покажем, что $h(\mathcal{K}_{k,кон}^A)$ и $b(\mathcal{K}_{k,кон}^A)$ не менее, чем $2^{|P_A|}$, отсюда с учетом того, что $\mathcal{K}_{k,кон}^A \subseteq \mathcal{K}_k^A$ будет, очевидно, следовать наше утверждение. Пусть $\mathbb{T}$ – семейство попарно невложенных друг в друга множеств M множества P_A имеющее мощность $2^{|P_A|}$. Рассмотрим семейство $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ замыканий $\mathcal{J}_M$ из $\mathcal{K}_k^A$, $M \in \mathbb{T}$. Нетрудно видеть, что если $M \in \mathbb{T}$, $M' \in \mathbb{T}$ и $M \neq M'$, то неверно, что $\mathcal{J}_M \leq \mathcal{J}_{M'}$. Таким образом, $b(\mathcal{K}_{k,кон}^A) \geq 2^{|P_A|}$. Установим сначала соотношение $h(\mathcal{K}_{k,кон}^A) \geq 2^{|P_A|}$ в случае, когда множество A является конечным. Пусть $\mathcal{R}[0,1]$ – множество всех рациональных чисел на отрезке [0, 1]. Оно равномощно множеству P_A . Пусть отображение $\delta: \mathcal{R}[0,1] \to P_A$ задает это соответствие и пусть $\xi \in [0,1]$. Обозначим через M_ξ множество всех чисел из $\mathcal{R}[0,1]$, не превосходящих числа ξ . Нетрудно видеть, что при $\xi < \xi'$ имеет место $M_\xi \subset M_{\xi'}$. Таким образом, множество всех подмножеств M_ξ имеет мощность $2^{|P_A|}$ и его элементы линейно упорядочены отношением включения. Пусть теперь $\delta(M_\xi)$ – подмножество всех функций f из P_A таких, что $\delta^{-1}(f) \in M_\xi$. Нетрудно видеть, что при разных ξ и ξ' операторы замыкания $\mathcal{J}_{\delta(M_\xi)}$ и $\mathcal{J}_{\delta(M_{\xi'})}$ различны, множество всех таких операторов замыкания имеет мощность $2^{|P_A|}$ и образует цепь в $\mathcal{K}_{k,кон}^A$.

В случае $|A| = \aleph_0$ рассмотрим множество Q_1 всех функций вида

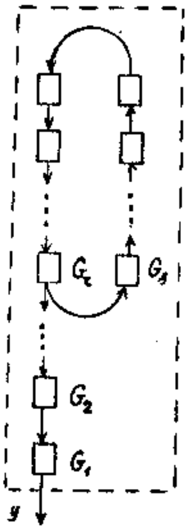

Рис.16

Рис.17

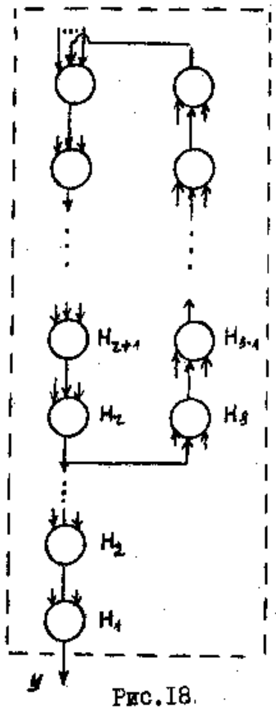

Рис.18

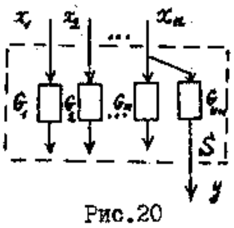

Рис.20

Рис.19

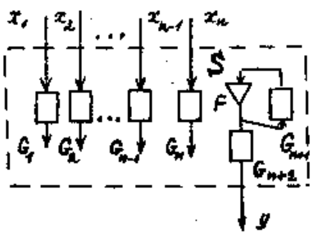

Рис.22

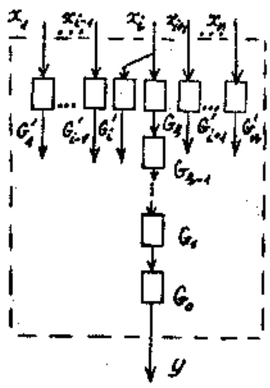

Рис.21

$f: \mathfrak{M} \to [0,1]$, где $\mathfrak{M}$ – вполне упорядоченное множество, имеющее порядковый тип ω_1 , то-есть $|\mathfrak{M}| = m_1$ и выделим подмножество Q_2 множества Q_1 , образованное всеми функциями f , для которых существует $x \in \mathfrak{M}$, такое, что $f(x) = 0$ при $x > x_0$. Очевидно, $|Q_1| = 2^{m_1}$; $|Q_2| = 2^{m_0}$. Пусть $f_1, f_2 \in Q_1$; $f_1 \neq f_2$. Рассмотрим наименьшее $x_0 \in \mathfrak{M}$, такое, что $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$; если $f_1(x_0) < f_2(x_0)$, то положим по определению $f_1 < f_2$. В результате Q_1 оказывается линейно упорядоченным, и для произвольного $f \in Q_1$ можно рассмотреть множество M_f всех функций f' из Q_2 таких, что $f' < f$. Нетрудно проверить, что при $f_1 < f_2$ множество M_{f_1} строго содержится в M_{f_2} , так что множество всех подмножеств M_f множества Q_2 имеет мощность 2^{m_1} и линейно упорядочено по включению. Рассуждая далее, так же, как и в случае $|A| < m_0$, получаем, что $h(\mathcal{X}^A_{\mathcal{A},кон}) \geq 2^{m_1}$. Так как $|\mathcal{K}^A_{\mathcal{A}}| \leq 2^{2^{m_0}}$, то в определении справедливости континуум-гипотезы (то есть при $m_1 = 2^{m_0}$) приходим к равенству $h(\mathcal{K}) = 2^{2^{m_0}} = 2^{|P_A|}$.

§ 5. Финитные и.ф.с.

В этом параграфе вводится понятие финитной и.ф.с., устанавливается ряд свойств таких и.ф.с. и решается задача о полноте для конечно-порожденных финитных и.ф.с.

§ 5.1. Понятия и результаты

Отношение частичного порядка, введенное в § 4 для семейства $\mathcal{K}^A_{\mathcal{A}}$ индуцирует на множестве $\mathcal{L}^A_{\mathcal{A}}$ всех подмножеств множества $\Omega(\mathcal{Y}^*(E, P_A))$ отношение предпорядка. Именно, считаем, что для элементов Ω_1 и Ω_2 из $\mathcal{L}^A_{\mathcal{A}}$ выполнено $\Omega_1 \leq \Omega_2$, если $\mathcal{J}_{\Omega_1} \leq \mathcal{J}_{\Omega_2}$. Как известно, этот предпорядок сводится к отношению эквивалентности $\Omega_1 \sim \Omega_2$, определяемому одновременным выполнением соотношений $\Omega_1 \leq \Omega_2$ и $\Omega_2 \leq \Omega_1$, и некоторому отношению частичного порядка $\preccurlyeq$ на фактор-множестве $\bar{\mathcal{L}}^A_{\mathcal{A}}$ по этой эквивалентности. Отношение $\preccurlyeq$ определяется следующим образом. Для элементов $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ из $\bar{\mathcal{L}}^A_{\mathcal{A}}$ полагаем $\bar{\Omega}_1 \preccurlyeq \bar{\Omega}_2$, если для некоторых элементов Ω' и Ω'' из $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ соответственно будет выполнено $\Omega' \leq \Omega''$. Ясно, что если $\bar{\Omega} \in \bar{\mathcal{L}}^A_{\mathcal{A}}$, то $\bar{\Omega}$ состоит из всех таких множеств Ω', что $\mathcal{J}_{\Omega'} = \mathcal{J}_{\Omega}$. Кроме того, если $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2 \in \bar{\mathcal{L}}^A_{\mathcal{A}}$, то отношение $\bar{\Omega}_1 \leq \bar{\Omega}_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}_{\Omega_1} \leq \mathcal{J}_{\Omega_2}$. Ниже нас будет интересовать случай, когда $|A| < m_0$ в соответствии с чем в обозначениях, содержащих символ A, мы будем использовать иногда символ k, где $k = |A|$.

Как показано в § 2, оператор замыкания $[\ \ ]$ в алгебре $\langle P_k, \eta, \zeta, \Delta, \nabla, * \rangle$ является $\mathcal{A}$ - замыканием. Это означает, что он совпадает с оператором замыкания в некоторой функциональной системе, то есть содержится в $\mathcal{K}^k_{\mathcal{A}}$. Для этого оператора будем использовать обозначение $\mathcal{J}_{cn}$.

Оператор $\mathcal{J}$ из $\mathcal{K}^k_{\mathcal{A}}$ называется финитным, если в множестве $\mathcal{L}^k_{\mathcal{A}}$ существует такой элемент Ω, для которого выполнены следующие условия:

а) $\mathcal{J}_{\Omega} = \mathcal{J}$;

б) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, причем $\mathcal{J}_{\Omega_1} = \mathcal{J}_{cn}$ и $|\Omega_2| < m_0$.

Элементы Ω из $\mathcal{L}^k_{\mathcal{A}}$ и $\bar{\Omega}$ из $\bar{\mathcal{L}}^k_{\mathcal{A}}$, а также ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$, где $M \subseteq P_k$, называются финитными, если $\mathcal{J}_{\Omega}$ - финитный оператор. Примером финитной ф.с. является k - значная логика. Пусть $\mathcal{K}^k_{\mathcal{A},фин}$, $\mathcal{L}^k_{\mathcal{A},фин}$ и $\bar{\mathcal{L}}^k_{\mathcal{A},фин}$ соответственно множества всех финитных замыканий из $\mathcal{K}^k_{\mathcal{A}}$, финитных элементов из $\mathcal{L}^k_{\mathcal{A}}$ и из $\bar{\mathcal{L}}^k_{\mathcal{A}}$ соответственно. Введенные выше отношения частичного порядка $\leq$, предпорядка $\leq$ и частичного порядка $\preccurlyeq$ для $\mathcal{K}^k_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{L}^k_{\mathcal{A}}$ и $\bar{\mathcal{L}}^k_{\mathcal{A}}$ будем считать заданными также и для множеств $\mathcal{K}^k_{\mathcal{A},фин}$, $\mathcal{L}^k_{\mathcal{A},фин}$ и $\bar{\mathcal{L}}^k_{\mathcal{A},фин}$ соответственно. Наибольшим элементом в $\mathcal{K}^k_{\mathcal{A},фин}$, очевидно, является финитное $\mathcal{A}$ - замыкание $\mathcal{J}_{\Omega}$, где

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, такое, что $\mathfrak{I}_{\Omega_1} = \mathfrak{I}$, а $\Omega_2 = \{ max(x, x_1) + 1 \ (mod\ k) \}$.
Минимальным элементом в $\mathcal{K}^k_{A,фин}$ является финитное A - замыкание $\mathfrak{I}_{сп}$. Как и выше, введем для $\mathcal{K}^k_{A,фин}$ понятия ширины и высоты, используя для них обозначения $h(\mathcal{K}^k_{A,фин})$ и $b(\mathcal{K}^k_{A,фин})$ соответственно. Обозначим через N множество всех натуральных чисел, а через N_0 - множество $N \cup \{0\}$.

Предложение 5.1.1. Для любого k из N такого, что $k \geq 2$ имеет место $h(\mathcal{K}^k_{A,фин}) = b(\mathcal{K}^k_{A,фин}) = |P_k|$.

Пусть $\bar{\Omega} \in \bar{\mathcal{Z}}^k_{A,фин}$ и $\mathfrak{I}_{\Omega} = \mathfrak{I}_{сп}$. Обозначим через $\Omega_{сп}$ произвольный элемент из $\bar{\Omega}$, для финитного элемента $\bar{\Omega}'$ из $\bar{\mathcal{Z}}^k_{A,фин}$ можем тогда использовать обозначение вида $\overline{\Omega_{сп} \cup \Omega_{кон}}$, где $\Omega_{кон} \in \mathcal{Z}^k_A$, $|\Omega_{кон}| < m_0$ и $\mathfrak{I}_{\Omega_{сп} \cup \Omega_{кон}} = \mathfrak{I}_{\Omega'}$

Замечание. Класс $\mathcal{K}^k_{A,фин}$ при $k \geq 2$ содержит как собственное подмножество множество всех A - замыканий вида $\mathfrak{I}_{\Omega}$, где $\Omega = \Omega_{сп} \cup \Omega_2$, $\Omega_2 \subseteq P_k$

Теорема 5.1.1. Существует алгоритм, который для любой пары финитных элементов ρ_1 и ρ_2 из $\bar{\mathcal{Z}}^k_{A,фин}$ устанавливает, справедливо ли отношение $\rho_1 \preccurlyeq \rho_2$.

Изучение свойств финитных операторов замыкания позволяет решать в алгоритмическом плане также и задачу о полноте для финитных функциональных систем.

Теорема 5.1.2. Существует алгоритм, который в конечно-порожденной и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ устанавливает полноту или произвольное конечное множество.

Следствие. Существует алгоритм, который в финитной и.ф.с. $\langle P_k, \Omega \rangle$ устанавливает, полно ли произвольное конечное множество $M \subseteq P_k$.

Для конечно-порожденной финитной и.ф.с. в которой пустое множество не является полным, решение задачи о полноте может быть получено с помощью описания предполных классов. С этой целью введем ряд обозначений.

Обозначим через P^n_k и $\bar{P}^n_k$ множества всех функций из P_k , зависящих только от переменных из алфавита $U_n = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и только от всех таких переменных соответственно. Пусть $p_k(n)$ и $\bar{p}_k(n)$ соответственно число элементов в этих множествах. Ясно, что $p_k(n) = \sum_{i=1}^{n} C^i_n k^{k^i}$ и $\bar{p}_k(n) = k^{k^n}$. Обозначим через S^n_k и $\bar{S}^n_k$ множества всех функций из P^n_k и $\bar{P}^n_k$ соответственно, каждая из которых при некотором i , $i = 1, 2, \ldots, n$, равна u_i . Если $M \subseteq P_k$ и $|M| < m_0$, то $n(M)$ обозначим наибольший номер переменного у функций из M .

Пусть в финитной и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$, где $M \subseteq P_k$, множество Ω таково, что $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\mathfrak{I}_{\Omega_1} = \mathfrak{I}_{сп}$ и $\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$. Пусть определено значение $\omega_i(f^i_1, f^i_2, \ldots, f^i_{s_i})$ и $n_i = n(\{f^i_1, f^i_2, \ldots, f^i_{s_i}, \omega_i(f^i_1, f^i_2, \ldots, f^i_{s_i})\})$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $r \geq 1$. Ясно, что n_i зависит только от ω_i , поэтому для n_i можно ввести обозначение $|\omega_i|$. Обозначим через $n(\Omega_2)$ число $max\{|\omega_1|, |\omega_2|, \ldots, |\omega_r|\}$. Если кроме того, и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ является конечно-порожденной и $\mathcal{M}$ - множество всех таких подмножеств M' множества M , что

$\mathcal{J}_\Omega(M') = M$, то обозначим n_0 число $\inf_{M' \in \mathcal{M}} n(M')$, а через s число $\max(n_0, n(\Omega))$. Назовем непустое множество M', $M' \subseteq P_k^s$, R - множеством в нашей и.ф.с., если $\mathcal{J}_\Omega(M') \cap P_k^s = M'$ и $M' \neq P_k^s \cap M$, обозначив его через $R^{(s)}$. Пусть $\mathcal{R}^{(s)} = (R^{(s)} \cup S_k^s, R^{(s)})$. Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_k сохраняет $\mathcal{R}^{(s)}$, если для любого набора функций $g_1, g_2, \ldots, g_n$ из $R^{(s)} \cup S_k^s$, будет выполнено $f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in R^{(s)}$. Класс всех функций из M, сохраняющих $\mathcal{R}$, обозначим через $U(\mathcal{R})$. Назовем R - множество $R^{(s)}$ максимальным, если не существует такого R - множества $R_1^{(s)}$, что $U(\mathcal{R}_1^{(s)}) \supseteq U(\mathcal{R}^{(s)})$ и при этом $R^{(s)} \neq R_1^{(s)}$. Для ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ пусть $\mathbb{R}$ - множество всех максимальных R - множеств, $\mathbb{R}$ - множество всех пар $\mathcal{R}^{(s)}$, для которых $R^{(s)} \in \mathbb{R}$ и $U(\mathbb{R})$ - множество всех классов сохранения элементов из $\mathbb{R}$.

Теорема 5.1.3. Для конечно-порожденной финитной и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ такой, что $\mathcal{J}_\Omega(\emptyset) \neq M$, справедливы следующие утверждения:

1) множество $U(\mathbb{R})$ является критериальной системой;

2) множество $U(\mathbb{R})$ совпадает с множеством всех предполных классов;

3) $|U(\mathbb{R})| \leq 2^{p_k(s)}$;

4) множество $\mathbb{R}$ строится эффективно.

Значительный интерес вызывает задача описания предполных классов в финитных конечно-порожденных функциональных системах. Исследованию этого вопроса посвящен целый ряд работ, например, [1 - 8]. Особый интерес представляет исследование случая $\langle P_k, \mathcal{J}_{cn} \rangle$, учитывающее также сложностной аспект задачи о полноте. Ему посвящена следующая глава.

§ 5.2. Доказательство вспомогательных утверждений

Пусть $M \subseteq P_k$ и $n \in N$. Построим последовательность множеств $\bar{M}_0, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots$ следующим образом. В ней $\bar{M}_0 = \emptyset$. Множество $\bar{M}_j$ при $j > 0$ состоит из всех функций h из P_k, для которых найдутся функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_\ell)$ из M и $G_1, G_2, \ldots, G_\ell$ из $\bar{M}_{j-1} \cup \bar{S}_k^n$, такие, что $h = f(G_1, G_2, \ldots, G_\ell)$. По множеству $\bar{M}_j$ определим множество M_j, которое будет состоять из всех таких функций из P_k^n, каждая из которых будет равна некоторой функции из $\bar{M}_j$.

Лемма 5.2.1. Если $M \subseteq P_k$, $M \neq \emptyset$ и $n \in N$, то справедливы следующие свойства:

а) $M_j \subseteq M_{j+1} \subseteq P_k^n$ для любого j из N_0;

б) $M_{p_k(n)} = M_{p_k(n)+m}$ для любого m из N_0;

в) $\mathcal{J}_{cn}(M) \cap P_k^n = M_{p_k(n)}$.

Доказательство. Свойство а) следует из определения множества M_j. Нетрудно видеть, что если при некотором t выполнено $M_t = M_{t+1}$, то для любого m из N_0 будет иметь место $M_t = M_{t+m}$. Отсюда с учетом свойства а) и того, что $|M_j| \leq |P_k^n| \leq p_k(n)$, следует существование такого t_0, что $t_0 \leq p_k(n)$ и $M_{t_0} = M_{t_0+1}$. В качестве такого числа, очевидно, можно выбрать число $p_k(n)$, а тем самым будет выполнено свойство б).

Покажем, что верно свойство в). Последнее, очевидно, будет следовать из того, что $\mathcal{J}_{сп}(M)\cap \bar{P}_k^n = \bar{M}_{p_k(n)}$. Установим это равенство. Для этого воспользуемся формульным способом задания A - замыкания $\mathcal{J}_{сп}$. Отметим, что пр этом способе мы будем считать вместе с заданием произвольной функции заданными все такие функции, которые равны ей, то есть отличающиеся от нее только несущественными переменными. Пусть $M' \subseteq P_k$. Введем понятие глубины $l(\mathfrak{A})$ формулы $\mathfrak{A}$ над M' , при этом $l(\mathfrak{A})\in N$. Ясно, что каждая формула $\mathfrak{A}$ над M' имеет вид $f(H_1,H_2,\dots,H_v)$, где $f(x_1,x_2,\dots,x_v)\in M'$, а H_i , $i=1,2,\dots,v$, - либо формула над M' , либо переменное из $\mathcal{U}$. Если каждое H_i есть переменное, то $l(\mathfrak{A})=1$. Пусть теперь некоторое H_i есть формула над M' и для всех таких H_i определено $l(H_i)$. Пусть l - наибольшее из этих чисел. Тогда $l(\mathfrak{A})=l+1$. Индукцией по l покажем, что каждая формула $\mathfrak{A}$ над M , которая имеет глубину l и в которую в качестве переменных входят только переменные из $\mathcal{U}_n$, реализует функцию h , равную некоторой функции из $\bar{M}_l$. Пусть $l(\mathfrak{A})=1$ и, значит, $\mathfrak{A}$ имеет вид $f(u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_v})$, где $f(x_1,x_2,\dots,x_v)\in M$ и $u_{i_w}\in\mathcal{U}_n$, $w=1,2,\dots,v$. Перестроим эту формулу в формулу $\mathfrak{A}'$ над $M\cup\bar{S}_k^n$, заменив в ней u_{i_w} на $g_n^{i_w}(u_1,u_2,\dots,u_n)$, т.е. на обозначение функции, значение которой есть u_{i_w} . Пусть $\mathfrak{A}'$ реализует функцию h' . Ясно, что $h'\in\bar{M}_1$ и $h'=h$. Предположим, что для всех l таких, что $1\le l\le z$, наше утверждение доказано. Покажем, что оно верно и для $l=z+1$. Пусть $\mathfrak{A}=f(H_1,H_2,\dots,H_v)$, где $f(x_1,x_2,\dots,x_v)\in M$, а каждое H_i , $i=1,2,\dots,v$ - либо формула над M , либо переменное из $\mathcal{U}_n$. Так как в формулу $\mathfrak{A}$ входят только переменные из $\mathcal{U}_n$, то это же будет справедливо по отношению к каждому из выражений H_i . Если H_i является формулой над M , то, очевидно, $l(H_i)\le z$ и если H_i реализует функцию h_i , то по предположению индукции в $\bar{M}_{l(H_i)}$ найдется функция h_i' такая, что $h_i=h_i'$. По формуле $\mathfrak{A}$ построим новую формулу $\mathfrak{A}'$, имеющую вид $f(H_1',H_2',\dots,H_i',\dots,H_v')$, где H_i' реализует h_i' , если H_i является формулой над M , и H_i' есть $g_n^{i_w}(u_1,u_2,\dots,u_n)$, если $H_i=u_{i_w}\in\mathcal{U}_n$. Пусть формула $\mathfrak{A}'$ реализует функцию h' . Ясно, что $h'\in\bar{M}_{z+1}$. Далее, нетрудно видеть, что если формула $\mathfrak{A}$ реализует функцию h , то $h=h'$.

Покажем теперь, что для любого натурального l и каждой функции h' из $\bar{M}_l$, найдется формула $\mathfrak{A}$ глубины не более, чем l , которая реализует функцию h такую, что $h=h'$. Нетрудно видеть, что если $h'\in\bar{M}_l$, то найдется формула $\mathfrak{A}'$ над $M\cup\bar{S}_k^n$ вида $f(H_1,H_2,\dots,H_v)$, где $f(x_1,x_2,\dots,x_v)\in M$, а H_i - формулы над $M\cup\bar{S}_k^n$, которая реализует h' . Преобразуем эту формулу с помощью такого правила: $g_n^j(G_1,G_2,\dots,G_n)=G_j$ где G_j - формула над $M\cup\bar{S}_k^n$ или переменное. Применение этого правила к

$\mathfrak{A}'$ означает замену левой части, входящей в $\mathfrak{A}'$, на правую. Нетрудно видеть, что формула, получающаяся из $\mathfrak{A}'$ после каждого такого применения, реализует функцию h' и имеет глубину не большую, чем $l(\mathfrak{A}')$. Ясно также, что после конечного числа применений нашего правила к $\mathfrak{A}'$ мы получим формулу $\mathfrak{A}$ уже над M, которая будет иметь глубину $l(\mathfrak{A})$ такую, что $l(\mathfrak{A})\le l(\mathfrak{A}')\le l$ и при этом она будет реализовать функцию h такую, что $h=h'$.

Так как при $l>t_0$, очевидно, имеет место $\bar M_l = \bar M_{t_0}$, то при задании функций из $\mathcal{J}_{cn}(M)$, зависящих только от переменных из алфавита $\mathcal{U}_n$, можно ограничиться формулами над M глубины не более, чем t_0 и при этом будет иметь место $\mathcal{J}_{cn}(M)\cap \bar P_k^n = M_{t_0}$, отсюда будет следовать свойство в). Лемма доказана.

Лемма 5.2.2. Существует алгоритм, который для любого непустого конечного множества $M\subseteq P_k$ и для любого n из N эффективно строит множество $\mathcal{J}_{cn}(M)\cap P_k^n$.

Доказательство. В силу леммы 5.2.I имеет место соотношение $\mathcal{J}_{cn}(M)\cap P_k^n = M_{\rho_k(n)}$. Заметим, что при конечном M каждое из множеств M_j, очевидно, строится эффективно. Отсюда получаем утверждение леммы.

Лемма 5.2.3. Существует алгоритм, который для любых непустых конечных множеств M_1 и M_2 фунуций из P_k устанавливает справедливо ли в.лючение $\mathcal{J}_{cn}(M_1)\supseteq M_2$.

Доказательство. Пусть $M_1, M_2\subseteq P_k$ и $\tau = n(M_2)$. Построим множество $M_1'=\mathcal{J}_{cn}(M_1)\cap P_k^{\tau}$, что с учетом леммы 5.2.2 можно сделать эффективно. Нетрудно видеть, что включение $\mathcal{J}_{cn}(M_1)\supseteq M_2$ справедливо тогда и только тогда, когда $M_1'\supseteq M_2$. Последнее соотношение проверяется, очевидно, эффективно. Лемма доказана.

По заданному множеству $M\subseteq P_k$ и q из N_0 построим последовательность множеств M_j^q, $j=0,1,2,\dots$, которые назовем соответствующими оператору $\mathcal{J}_{\Omega_{cn}\cup\Omega_{кон}}$. Пусть $M_0^q=M$ и для $j\ge 0$ определено множество M_j^q. Положим, что

$$M_{j+1}^q = \mathcal{J}_{\Omega_{cn}}(M_j^q)\cup \mathcal{J}_{\Omega_{кон}}\left(\mathcal{J}_{\Omega_{cn}}(M_j^q)\cap P_k^q\right).$$

Лемма 5.2.4. Если $M\subseteq P_k$, $M\ne\emptyset$, $j\in N_0$, $q\in N$, $\mathcal{J}_{\Omega_{cn}\cup\Omega_{кон}}\in \mathfrak{X}^k_{A,фин}$, $q\ge n(\Omega_{кон})$, M_j^q – множество, соответствующее $\mathcal{J}_{\Omega_{cn}\cup\Omega_{кон}}$, то справедливы следующие соотношения:

а) $M_j^q\subseteq M_{j+1}^q\subseteq \mathcal{J}_{\Omega_{cn}\cup\Omega_{кон}}(M)$ для любого j из N_0;

б) $M^q_{\rho_k(q)+1} = M^q_{\rho_k(q)+m}$ для любого m из N;

в) $\mathcal{J}_{\Omega_{cn}\cup\Omega_{кон}}(M) = M_\tau^q$ для любого $\tau>\rho_k(q)$.

Доказательство. Свойство а) легко следует из определения множества M_j^q. Далее нетрудно видеть, что если при некотором τ будет выполнено $M_\tau^q = M_{\tau+1}^q$, то для любого m из N_0 будет иметь место $M_\tau^q = M_{\tau+m}^q$. Покажем, что в качестве такого τ можно выбрать число $\rho_k(q)+1$. Легко видеть, что имеет место следующее представление

$$\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M)=\bigcup_{j=0}^{\infty}\left(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_j^q)\cup\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{сп}(M_j^q)\cap P_k^q)\right). \qquad (1)$$

Так как с учетом свойства а), очевидно, при любом j из N имеет место $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_j^q)\subseteq\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{j+1}^q)$, $\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_j^q)\cap P_k^q)\subseteq\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{j+1}^q)\cap P_k^q)$, а при $q\geqslant n(\Omega_{кон})$ соответственно $\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_j^q)\cap P_k^q)\subseteq P_k^q$, то при некотором t' таком, что $t'\leqslant p_k(q)-1$, будет иметь место $\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{t'}^q)\cap P_k^q)=$ $=\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{t'+1}^q)\cap P_k^q)$. Отсюда будет следовать, что $M_{t'+2}^q=M_{t'+3}^q$ и $M_{p_k(q)+1}^q=M_{p_k(q)+2}^q$, а, значит, в качестве τ, указанного выше, можно выбрать число $p_k(q)+1$. Отсюда следует свойство б). Свойство в) следует из представления (I) и свойства б). Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}\in\mathcal{K}_{k,фин}^{k}$, $M\subseteq P_k$ и $q\in N$. Наряду с множеством M_j^q, соответствующих оператору $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}$, определим множество $\bar{M}_j^q$, соответствующее оператору $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}$, следующим образом; если $j\in N_0$, то $\bar{M}_j^q=\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_j^q)\cap P_k^q)$.

Лемма 5.2.5. Если $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}\in\mathcal{K}_{k,фин}^{k}$, $j\in N_0$, $M\subseteq P_k$, $|M|<m$, $M\neq\emptyset$, $q\in N$, $q\geqslant\max(n(M),n(\Omega_{кон}))$, $M_j^q,\bar{M}_j^q$ – множества, соответствующие $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}$, то справедливы следующие соотношения:

а) $\bar{M}_j^q\subseteq\bar{M}_{j+1}^q\subseteq P_k^q$,

б) $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar{M}_j^q)=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{j+1}^q)$,

в) $\bar{M}_j^q$ можно построить эффективно.

Доказательство. Свойство а) является очевидным. Свойства б) и в) установим индукцией по j.

Пусть $j=0$. Проверим свойство б). Так как при $M_1^q=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_0^q)\cup\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_0^q)\cap P_k^q)$ $\bar{M}_0^q=\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_0^q)\cap P_k^q)$ и $M_0^q=M$, то $M_1^q=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M)\cup\bar{M}_0^q$. Отмечая, что $\bar{M}_0^q\supseteq M$, будем иметь $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_1^q)=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar{M}_0^q)$. Тем самым свойство б) выполнено. Проверим теперь свойство в). В силу леммы 5.2.2 множество $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M)\cap P_k^q$ строится эффективно. Отсюда, очевидно, следует, что множество $\bar{M}_0^q$ так же может быть построено эффективно.

Пусть теперь свойства б) и в) установлены для $j=\ell$, $\ell\geqslant 0$, покажем, что они будут выполнены и для $j=\ell+1$.

Проверим свойство б). По определению множеств M_j^q и $\bar{M}_j^q$ имеем

$$M_{\ell+2}^q=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{\ell+1}^q)\cup\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{\ell+1}^q)\cap P_k^q)=\mathcal{J}_{сп}(M_{\ell+1}^q)\cup\bar{M}_{\ell+1}^q. \qquad (I)$$

Далее, по предположению индукции должно быть

$$\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar{M}_\ell^q)=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{\ell+1}^q). \qquad (2)$$

Из соотношений (I) и (2) следует, что

$$M_{\ell+2}^q=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar{M}_\ell^q)\cup\bar{M}_{\ell+1}^q. \qquad (3)$$

Из (3) с учетом свойства а) получим, что $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M_{\ell+2}^q)=\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar{M}_{\ell+1}^q)$. Тем самым свойство б) установлено.

Проверим свойство в). По определению множества $\bar{M}_j^q$ имеем

$$\bar M^q_{\ell+1} = \mathcal{J}_{\Omega_{кон}}\left(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M^q_{\ell+1}) \cap P^q_k\right). \tag{4}$$

В силу свойства б) и соотношения (4) будем иметь

$$\bar M^q_{\ell+1} = \mathcal{J}_{\Omega_{кон}}\left(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar M^q_\ell) \cap P^q_k\right). \tag{5}$$

По предположению индукции множество $\bar M^q_\ell$, которое в силу свойства а) является подмножеством P^q_k, строится эффективно. Отсюда по лемме 5.2.2 множество $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar M^q_\ell)\cap P^q_k$, а тем самым в силу (5) множество $\bar M^q_{\ell+1}$ также строится эффективно. Свойство в) установлено. Лемма доказана.

Лемма 5.2.6. Если $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}} \in \mathcal{K}^k_{\mathfrak{K},фин}$, $M \subseteq P_k$, $|M| < \infty$, $M \neq \emptyset$, $q \geqslant \max(n(M), n(\Omega_{кон}))$ и $\bar M^q_{p_k(q)}$ – множество, соответствующее $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}$, то

$$\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M) = \mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar M^q_{p_k(q)})$$

Доказательство. В силу леммы 5.2.4 имеем

$$\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M) = M^q_{p_k(q)+1},$$

отсюда по лемме 5.2.5 будем иметь

$$\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M) = \mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(M^q_{p_k(q)+1}) = \mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar M^q_{p_k(q)}).$$

Лемма доказана.

Лемма 5.2.7. Если $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}} \in \mathcal{K}^k_{\mathfrak{K},фин}$, то существует алгоритм, который для любого конечного непустого множества M, $M \subseteq P_k$ и для любого n из N эффективно строит множество $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M)\cap P^n_k$.

Доказательство. В силу леммы 5.2.6 имеем

$$\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M) = \mathcal{J}_{\Omega_{сп}}(\bar M^q_{p_k(q)}),$$

где по лемме 5.2.5 $\bar M^q_{p_k(q)} \subseteq P^q_k$ и $\bar M^q_{p_k(q)}$ строится эффективно. Применяя к множеству $\bar M^q_{p_k(q)}$ лемму 5.2.2, получаем утверждение нашей леммы.

Лемма 5.2.8. Существует алгоритм, который при $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}} \in \mathcal{K}^k_{\mathfrak{K},фин}$ для любых непустых конечных множеств M_1 и M_2 функций из P_k устанавливает, справедливо ли включение $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M_1) \supseteq M_2$.

Доказательство. Пусть $q = n(M_2)$. Построим множество $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M_1)\cap P^q_k$. По лемме 5.2.7 это можно сделать эффективно. Нетрудно видеть, что $\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M_1) \supseteq M_2$ тогда и только тогда, когда $(\mathcal{J}_{\Omega_{сп}\cup\Omega_{кон}}(M_1)\cap P^q_k) \supseteq M_2$. Последнее соотношение проверяется, очевидно, эффективно. Лемма доказана.

Лемма 5.2.9. Если $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}\cup\Omega'_{кон}}$, $\mathcal{J}_{\Omega''_{сп}\cup\Omega''_{кон}} \in \mathcal{K}^k_{\mathfrak{K},фин}$, $n(\Omega'_{кон}) \geqslant 1$, $n(\Omega''_{кон}) \geqslant 1$, $q = \max(n(\Omega'_{кон}), n(\Omega''_{кон}))$, то $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}\cup\Omega'_{кон}} \leq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп}\cup\Omega''_{кон}}$ тогда и только тогда, когда для любого множества M такого, что $M \subseteq P^q_k$ имеет место

$$\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}\cup\Omega'_{кон}}(M) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп}\cup\Omega''_{кон}}(M).$$

Доказательство. Необходимость условий ясна, покажем их достаточность, то есть если для любого множества $M \subseteq P^q_k$ имеет место $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}\cup\Omega'_{кон}}(M) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп}\cup\Omega''_{кон}}(M)$, то $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}\cup\Omega'_{кон}} \leq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп}\cup\Omega''_{кон}}$.

Пусть $M \subseteq P_k$. Покажем, что для любого множества M^q_j, $j \in N_0$, соответствующего оператору $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп} \cup \Omega'_{кон}}$, будет выполнено $M_j^q \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M)$. В частности, будет справедливо включение $M^q_{p_k(q)+1} \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M)$, откуда в силу леммы 5.2.4 будет следовать, что $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп} \cup \Omega'_{кон}}(M) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M)$, а значит, и $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп} \cup \Omega'_{кон}} \leq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}$. Включение $M_j^q \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M)$ установим индукцией по j.

Пусть $j=0$. Тогда $M_0^q = M$ и, очевидно, $M \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M)$.

Пусть утверждение установлено для $j=\ell$, $\ell \geq 0$, покажем, что оно верно для $j=\ell+1$. По определению множества M_j^q имеем $M^q_{\ell+1} =$
$= \mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cup \mathcal{J}_{\Omega'_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q)$.
В силу предположения индукции можем считать, что $M_\ell^q \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M)$, а тем самым, очевидно, будет выполнено

$$\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M), \quad \mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M). \tag{1}$$

Таким образом, для установления соотношения $M^q_{\ell+1} \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}$ достаточно установить, что справедливо включение

$$\mathcal{J}_{\Omega'_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(M). \tag{2}$$

Покажем, что (2) имеет место. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{J}_{\Omega'_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega'_{сп} \cup \Omega'_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q), \tag{3}$$

и так как $\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q \subseteq P_k^q$, то по условию будем иметь

$$\mathcal{J}_{\Omega'_{сп} \cup \Omega'_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega'_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{сп} \cup \Omega''_{кон}}(\mathcal{J}_{\Omega''_{сп}}(M_\ell^q) \cap P_k^q). \tag{4}$$

Из (1), (3) и (4) следует условие (2). Лемма доказана.

Лемма 5.2.10. Для пары $\mathcal{R}^{(s)}$ конечно-порожденной финитной и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ где $M \subseteq P_k$, имеет место $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^s = R^{(s)}$.

Доказательство. Покажем, что $R^{(s)} \subseteq U(\mathcal{R}^{(s)})$. Пусть

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^{(s)}, \quad g_1(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n_1}), \ g_2(y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n_2}), \ldots$$
$$\ldots, g_m(y_{m1}, y_{m2}, \ldots, y_{mn_m}) \in R^{(s)} \cup S_k^s,$$

тогда в силу того, что выполнено равенство $\mathcal{J}_\Omega(R^{(s)}) \cap P_k^s = R^{(s)}$ и того, что функция h, реализуемая формулой $f(g_1, g_2, \ldots, g_m)$, очевидно, содержится в P_k^s, будем иметь $h \in R^{(s)}$, то есть $R^{(s)} \subseteq U(\mathcal{R}^{(s)})$. Покажем теперь, что $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^s \subseteq R^{(s)}$. Пусть это не так. Тогда для некоторой функции $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^s$ будем иметь, что $g \notin R^{(s)}$. Пусть $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$ – последовательность таких функций из S_k^s, что при $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено $g'_i = y_i$. Тогда, так как $g \in U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^s$, то функция h', реализуемая формулой $g(g'_1, g'_2, \ldots, g'_n)$ будет содержаться в $R^{(s)}$. Но, вместе с тем, очевидно, $g(g'_1, g'_2, \ldots, g'_n) = g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тем самым предположение, что $g \notin R^{(s)}$, привело к тому, что $g \in R^{(s)}$, то есть к противоречию. Таким образом, $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^s \subseteq R^{(s)}$. С учетом того, что, как показано выше, $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^s \supseteq R^{(s)}$, получаем утверждение леммы.

Лемма 5.2.11. Для пары $\mathcal{R}^{(s)}$ конечно-порожденной финитной и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$, где $M \subseteq P_k$, имеет место $\mathcal{J}_\Omega(U(\mathcal{R}^{(s)})) = U(\mathcal{R}^{(s)})$ и $U(\mathcal{R}^{(s)}) \neq M$.

Доказательство. Покажем, что если $\Omega = \Omega_{сл} \cup \Omega_{кон}$, то (1) $\mathcal{J}_{\Omega_{сл}}(U(\mathcal{R}^{(s)})) = U(\mathcal{R}^{(s)})$ и (2) при $\Omega_{кон} \neq \varnothing$ имеет место $\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(U(\mathcal{R}^{(s)})) = U(\mathcal{R}^{(s)})$. Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение леммы. Начнем с установления соотношения (1). Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U(\mathcal{R}^{(s)})$ и задана конечная последовательность $G_1(y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,m_1})$, $G_2(y_{2,1}, y_{2,2}, \ldots y_{2,m_2}), \ldots, G_n(y_{n,1}, y_{n,2}, \ldots, y_{n,m_n})$, где каждый член является или функцией из $U(\mathcal{R}^{(s)})$, или переменным из $\mathcal{U}$. Покажем, что формула $f(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ реализует функцию из $U(\mathcal{R}^{(s)})$. Пусть задана конечная последовательность функций из $R^{(s)} \cup S^s_k$: $H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{1m_1}, H_{21}, H_{22}, \ldots, H_{2m_2}, \ldots, H_{n1}, H_{n2}, \ldots, H_{nm_n}$.

Рассмотрим формулу

$$\mathfrak{A} = f(G_1(H_{11}, H_{12}, \ldots, H_{1m_1}), G_2(H_{21}, H_{22}, \ldots, H_{2m_2}), \ldots, G_n(H_{n1}, H_{n2}, \ldots, H_{nm_n})).$$

Для каждой функции g_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, реализуемой формулой $G_i(H_{i1}, H_{i2}, \ldots, H_{im_i})$, имеет место $g_i \in R^{(s)} \cup S^s_k$. Если G_i - функция из $U(\mathcal{R}^{(s)})$, то это вытекает из определения функции G_i; если G_i - переменное, то $m_i = 1$ и формула $G_i(H_{i1})$ реализует функцию H_{i1}, а $H_{i1} \in R^{(s)} \cup S^s_k$.

Таким образом, $\mathfrak{A} = f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$. По условию $f \in U(\mathcal{R}^{(s)})$, отсюда следует, что функция, реализуемая формулой $f(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, содержится в $R^{(s)}$, а значит функция, реализуемая формулой $f(G_1, \ldots, G_n)$ - в $U(\mathcal{R}^{(s)})$. Таким образом, $\mathcal{J}_{\Omega_{сл}}(U(\mathcal{R}^{(s)})) = U(\mathcal{R}^{(s)})$. Покажем теперь, что верно соотношение (2). Так как при $\Omega_{кон} \neq \varnothing$, очевидно, имеем $\mathcal{J}_{\Omega}(U(\mathcal{R}^{(s)})) = U(\mathcal{R}^{(s)})$, и в силу леммы 5.2.10 получаем, что $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P^s_k = R^{(s)}$, и при этом $R^{(s)} \neq P^s_k \cap M$, то есть $U(\mathcal{R}^{(s)}) \neq M$, то можно считать далее, что $\Omega_{кон} = \{\omega_1, \ldots \omega_r\}$, $r \geq 1$. По определению $s \geq n(\Omega_{кон})$. Отсюда следует, что если для некоторой последовательности функций $f_1, f_2, \ldots, f_t \in U(\mathcal{R}^{(s)})$ определено значение $\omega_j(f_1, \ldots, f_t)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, то для любого ℓ из $\{1, 2, \ldots, t\}$ справедливо $f_\ell \in P^s_k$, а в силу леммы 5.2.10 будет иметь место $f_\ell \in R^{(s)}$. Далее, по определению множества $R^{(s)}$ должно быть $\mathcal{J}_{\Omega}(R^{(s)}) \cap P^s_k = R^{(s)}$ и тем более $\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(R^{(s)}) \cap P^s_k = R^{(s)}$. Отсюда следует, что $\omega_j(f_1, f_2, \ldots, f_t) \in R^{(s)}$, а, значит, $\mathcal{J}_{\Omega_{кон}}(U(\mathcal{R}^{(s)})) = U(\mathcal{R}^{(s)})$. Неравенство $U(\mathcal{R}^{(s)}) \neq M$ следует из леммы 5.2.10 и того, что $R^{(s)} \neq P^s_k \cap M$. Лемма доказана.

Лемма 5.2.12. Для пар $\mathcal{R}^{(s)}_1$ и $\mathcal{R}^{(s)}_2$ конечно-порожденной финитной и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$, где $M \subseteq P_k$, включение $U(\mathcal{R}^{(s)}_1) \subseteq U(\mathcal{R}^{(s)}_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$U(\mathcal{R}^{(s)}_1) \cap P_k^{\rho_k(s)} \subseteq U(\mathcal{R}^{(s)}_2) \cap P_k^{\rho_k(s)}.$$

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Покажем его достаточность то есть, что если $U(\mathcal{R}^{(s)}_1) \cap P_k^{\rho_k(s)} \subseteq U(\mathcal{R}^{(s)}_2) \cap P_k^{\rho_k(s)}$, то $U(\mathcal{R}^{(s)}_1) \subseteq U(\mathcal{R}^{(s)}_2)$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U(\mathcal{R}^{(s)}_1)$. Если $n \leq \rho_k(s)$, то $f \in U(\mathcal{R}^{(s)}_2)$ по условию. Пусть $n > \rho_k(s)$ и конечная последовательность функций из $G_1, G_2, \ldots, G_n$ образована элементами множества $R^{(s)}_2 \cup S^s_k$. Покажем, что, функция, реализуемая формулой $f(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ содержится в $R^{(s)}_2$. Отсюда будет вытекать достаточность нашего условия.

Так как $|R_2^{(1)}| \leq p_k(1)$, то в последовательности (1) обязательно встретятся одинаковые функции. Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что последовательность (1) разбита на последовательность кусков, следующих друг за другом и таких, что функции из одного куска равны между собой, а из разных кусков не равны между собой. Занумеруем эти куски слева направо числами 1,2,..., ℓ. Ясно, что $1 \leq \ell \leq p_k(1)$.

Пусть j-й кусок имеет вид $G_{i_j}, G_{i_j+1}, \dots, G_{i_j+n_j}$. Подставим в функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ вместо переменных $x_{i_j}, x_{i_j+1},\dots, x_{i_j+n_j}$ переменное u_j. Так поступим для любого j. В результате получим функцию $g(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$. Ясно, что $g \in U(\mathcal{R}_1^{(1)})$, а, значит, $g \in U(\mathcal{R}_2^{(1)})$. Нетрудно видеть, что имеет место

$$g(G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_\ell}) = f(G_1, G_2, \dots, G_n).$$

Отсюда следует, что $f(G_1, G_2,\dots, G_n) \in R_2^{(1)}$, $f \in U(\mathcal{R}_2^{(1)})$. Лемма доказана.

§ 5.3. Доказательство теорем 5.1.1 – 5.1.3 и предложения 5.1.1.

Доказательство теоремы 5.1.1.

Пусть $\Omega' = \Omega'_{cn} \cup \Omega'_{кон}$ и $\Omega'' = \Omega''_{cn} \cup \Omega''_{кон}$. Очевидно, можно считать, что $n(\Omega'_{кон}) \geqslant 1$ и $n(\Omega''_{кон}) \geqslant 1$. Тогда в силу леммы 5.2.9 соотношение $\Omega' \leq \Omega''$ эквивалентно тому, что для любого множества $M \subseteq P_k^q$, где $q = max(n(\Omega'_{кон}), n(\Omega''_{кон}))$, имеет место $\mathcal{J}_{\Omega'}(M) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''}(M)$. Покажем, что это соотношение эффективно проверяемо. Пусть $\mathcal{J}_{\Omega^a_{cn} \cup \Omega^a_{кон}} \in \mathcal{K}^k_{k,фин}$, $a \in \{', ''\}$, тогда, чтобы подчеркнуть, что рассматривается множество $\bar{M}_j^q$, соответствующее этому оператору, вместо $\bar{M}_j^q$ будем писать $\bar{M}_j^q(a)$. Рассмотрим множества $\bar{M}^q_{p_k(q)}(')$ и $\bar{M}^q_{p_k(q)}('')$, которые в силу леммы 5.2.5 являются подмножествами для P_k^q. В силу леммы 5.2.6 будем иметь $\mathcal{J}_{\Omega'_{cn} \cup \Omega'_{кон}}(M) = \mathcal{J}_{cn}(\bar{M}^q_{p_k(q)}(')),$ $\mathcal{J}_{\Omega''_{cn} \cup \Omega''_{кон}}(M) = \mathcal{J}_{cn}(\bar{M}^q_{p_k(q)}(''))$. Нетрудно видеть, что включение

$$\mathcal{J}_{\Omega'_{cn} \cup \Omega'_{кон}}(M) \subseteq \mathcal{J}_{\Omega''_{cn} \cup \Omega''_{кон}}(M)$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\bar{M}^q_{p_k(q)}(') \subseteq \mathcal{J}_{cn}(\bar{M}^q_{p_k(q)}('')) \qquad (1)$$

Так как множество всех множеств вида $\bar{M}^q_{p_k(q)}(a)$, $a \in \{', ''\}$ при фиксированном q конечно, не превосходит $2^{p_k(q)}$ и строится в силу леммы 5.2.5 эффективно, то соотношение (1) в силу леммы 5.2.3 эффективно проверяемо. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.1.2.

По условию и.ф.с. $< M, \Omega >$ является конечно-порожденной, поэтому можно считать заданным множество M' такое, что $M' \subseteq M$, $|M'| < m_0$ и $\mathcal{J}_\Omega(M') = M$. Пусть $M'' \subseteq M$ и $|M''| < m_0$. Ясно, что множество M'' является полным в ф.с. $< M, \Omega >$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}_\Omega(M'') \supseteq M'$. Для установления справедливости этого включения в силу леммы 5.2.8 существует алгоритм. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.1.3.

Покажем сначала, что выполнено 2). Пусть $M' \subseteq P_k$ и M' – предполный класс в и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$, тогда, как легко видеть, $M' \cap P_k^s \neq P_k^s \cap M$ и множество $M' \cap P_k^s$ является R – множеством относительно $\langle M, \Omega \rangle$

Пусть $R^{(s)} = M' \cap P_k^s$. Нетрудно видеть, что любая функция из M' сохраняет $\mathcal{R}^{(s)}$, а тем самым $M' \subseteq U(\mathcal{R}^{(s)})$. С другой стороны, по лемме 5.2.10 $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^s = R^{(s)}$, то есть $U(\mathcal{R}^{(s)}) \neq M$ и по лемме 5.2.11 справедливо $\mathcal{J}_\Omega(U(\mathcal{R}^{(s)})) = U(\mathcal{R}^{(s)})$. Отсюда с учетом того, что M' – предполный класс, получаем, что $M' = U(\mathcal{R}^{(s)})$, то есть каждый предполный класс в $\langle M, \Omega \rangle$ является элементом множества $U(\mathcal{R})$. Пусть теперь $M'' \in U(\mathcal{R})$ и $M'' \in U(\mathcal{R}_1^{(s)})$. Покажем, что M'' – предполный класс. Для этого с учетом лемм 5.2.10 и 5.2.11 достаточно показать, что для любой функции f из $M \setminus M''$ имеет место равенство $\mathcal{J}_\Omega(M'' \cup \{f\}) = M$. Ясно, что f не сохраняет $\mathcal{R}_1^{(s)}$. Это означает, что можно указать такую конечную последовательность функций $G_1, G_2, \dots, G_n$ из $R_1^{(s)} \cup S_k^s$, что для функции g, реализуемой формулой $f(G_1, G_2, \dots, G_n)$ будет иметь место $g \notin R_1^{(s)}$ и при этом $g \in \mathcal{J}_\Omega(M'' \cup \{f\}) \cap (P_k^s \cap M)$. Рассмотрим множество $M''' = \mathcal{J}_\Omega(M'' \cup \{g\}) \cap (P_k^s \cap M)$. Если $M''' \neq M \cap P_k^s$, то M''', очевидно, является R – множеством. Пусть $M''' = R_2^{(s)}$. Нетрудно видеть, что $U(\mathcal{R}_2^{(s)}) \supseteq U(\mathcal{R}_1^{(s)})$. В силу леммы 5.2.10 имеем $U(\mathcal{R}_2^{(s)}) \cap P_k^s = R_2^{(s)}$ и $U(\mathcal{R}_1^{(s)}) \cap P_k^s = R_1^{(s)}$ и, так как, очевидно, $g \in (R_2^{(s)} \setminus R_1^{(s)})$, то $R_2^{(s)} \neq R_1^{(s)}$. Таким образом, $R_1^{(s)}$ не является максимальным в и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ R– множеством что противоречит условию. Отсюда следует, что $M''' = P_k^s \cap M$, а значит, в силу полноты $P_k^s \cap M$ в и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$, получаем, что M'' – предполный класс. Свойство 2) установлено.

Свойства 1) и 3) следуют соответственно из предположения 3.2 и того, что число всех R – множеств для ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ не превосходит $2^{P_k(s)}$

Покажем справедливость свойства 4). Так как ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ конечно-порожденная, то считаем заданным конечное множество M', такое, что $\mathcal{J}_\Omega(M') = M$. В силу леммы 5.2.8 можно эффективно указывать все подмножества M'' множества $P_k^{n(M')}$, такие, что $\mathcal{J}_\Omega(M'') \supset M'$, а тем самым эффективно вычислять для и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$ величину n_0 и затем величину s. Используя лемму 5.2.7, можно эффективно построить все подмножества множества P_k^s, которые являются R – множествами, связанными с и.ф.с. $\langle M, \Omega \rangle$. Для каждого такого R – множества $R^{(s)}$, очевидно, можно эффективно построить множество $U(\mathcal{R}^{(s)}) \cap P_k^{P_k(s)}$, а тем самым с учетом леммы 5.2.12 эффективно проверить для заданной пары R – множеств $R_1^{(s)}$ и $R_2^{(s)}$ справедливость включения $U(\mathcal{R}_1^{(s)}) \subseteq U(\mathcal{R}_2^{(s)})$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{R}$ строится эффективно. Теорема доказана.

Доказательство предложения 5.1.1.

Заметим, что $|P_k| = m_0$. Пусть $h_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{\mu+1})$ – функция из P_k

такая, что она равна функции $\bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_{\mu+1}$ на наборах из нулей и единиц равна нулю на остальных наборах при этом $\mu \geqslant 2$. Используя результаты Е.Поста [1], нетрудно видеть, что классы $\mathcal{I}_{cn}(\{h_\mu\})$ и $\mathcal{I}_{cn}(\{h_{\mu'}\})$ различны при $\mu \neq \mu'$ и если $\mu > \mu'$, то $\mathcal{I}_{cn}(\{h_\mu\}) \subset \mathcal{I}_{cn}(\{h_{\mu'}\})$. Рассмотрим последовательность A - замыканий $\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{h_2\}}$, $\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{h_3\}}, \ldots, \mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{h_\mu\}}, \ldots$ Она, очевидно, образует цепь в $\mathcal{K}^{\kappa}_{A,\text{фин}}$ и, так как все элементы в ней различны, то $h(\mathcal{K}^{\kappa}_{A,\text{фин}}) = m_0$. Установим теперь, что $b(\mathcal{K}^{\kappa}_{A,\text{фин}}) = m_0$. Для этого рассмотрим регулярный оператор $\omega_{\mu,\mu'}$ такой, что $\omega_{\mu,\mu'}(h_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu+1})) = h_{\mu'}(x_1, \ldots, x_{\mu'+1})$ и не определенный в остальных точках. На рис. 15 приведена сеть, реализующая такой оператор. Пусть задано A - замыкание $\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu+1,\mu}\}}$ из $\mathcal{K}^{\kappa}_{A,\text{фин}}$. Покажем, что $\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu+1,\mu}\}} \neq \mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu'+1,\mu'}\}}$ при $\mu \neq \mu'$. Пусть для определенности $\mu < \mu'$, тогда, очевидно, $\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu+1,\mu}\}}(\{h_{\mu'+1}\}) =$

$$= \mathcal{I}_{\Omega_{cn}}(\{h_{\mu'+1}\}), \quad \mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu+1,\mu}\}}(\{h_{\mu+1}\}) = \mathcal{I}_{\Omega_{cn}}(\{h_\mu\}),$$

$$\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu'+1,\mu'}\}}(\{h_{\mu'+1}\}) = \mathcal{I}_{\Omega_{cn}}(\{h_{\mu'}\}), \quad \mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu'+1,\mu'}\}}(\{h_{\mu+1}\}) =$$

$$= \mathcal{I}(\{h_{\mu+1}\}).$$

Отсюда следует попарная несравнимость указанных A - замыканий. Предложение доказано.

Как отмечалось в § 5.1, класс $\mathcal{K}^{\kappa}_{A,\text{фин}}$ не состоит только из A - замыканий вида $\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \Omega'}$, где $\Omega' = M$, $M \subseteq P_\kappa$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть введенные выше A - замыкания вида $\mathcal{I}_{\Omega_{cn} \cup \{\omega_{\mu,\mu'}\}}$.

ГЛАВА II. ВОПРОСЫ ПОЛНОТЫ ДЛЯ κ - ЗНАЧНЫХ ЛОГИК

В этой главе будут рассмотрены три задачи о полноте для κ - значных логик: задача о сложности критерия полноты в P_κ в терминах предполных классов, задача о полноте S - систем, к которой примыкают задачи об описании базисных групп в P_κ и о шефферовых функциях.

§ 1. О сложности распознавания полноты в терминах предполных классов в P_κ

Как отмечалось, одним из путей решения задачи о полноте в P_κ является отыскание всех предполных классов в P_κ. В 1921 г. появилось обобщение о результатах Е.Поста, которые были подробно опубликованы лишь в 1941 г. [1]. Е. Постом были построены, в частности, все предполные классы в P_2. В 1954 г. в работе С.В.Яблонского [2] были описаны все предполные классы в P_3. Примерно в то же время А.В.Кузнецов указал на принципиальную возможность построения всех предполных классов в P_κ и установил, что число $\pi(\kappa)$ этих классов не больше, чем 2^{2^κ} [2]. В связи с этим возник вопрос о явном описании всех предполных классов в P_κ. Некоторые семейства предполных классов были построены в 1953 г. А.В.Кузнецовым и С.В.Яблонским и подробно описаны в [3]. В 1959 г. В.В.Мартынюк [21], в 1962 - 1964 гг. - Ло Чжу-кай, Пан Юн-цзе, Ван

Сяо-хао и Лю Сюй-хуа [4 - 6], в 1965 г. Е.Ю.Захарова [8] построили другие семейства предполных классов. В 1965 г. появилась заметка И.Розенберга [24] в которой сообщалось, что все предполные классы в P_k исчерпываются 6 семействами, из которых 4 были известны полностью и 2 частично. Одновременно с задачей описания предполных классов встал вопрос об оценке числа $\pi(k)$ предполных классов в P_k. В 1952 г. А.В.Кузнецов анонсировал следующий результат: $\pi(k) \geq 2^{2^{k(1-\varepsilon)}}$, где $\varepsilon \to 0$ при $k \to \infty$, о чем было сообщено в [25]. Однако впоследствии выяснилось, что доказательством этого факта он не располагает. В этом параграфе мы найдем асимптотическое поведение функций $\pi(k)$ и $\varkappa(k)$, последняя из которых равна числу типов предполных классов. Будут исследованы также поведения этих функций при малых значениях k.

§ 1.1. Основные понятия и результаты

Введем ряд понятий. Пусть $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ - h - местный предикат, аргументы которого принимают значения из $E_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Область истинности называется h - арным отношением и обозначается через ρ. Для наборов ($a_1, a_2, \ldots, a_h$) из ρ будем иногда писать $R(a_1, a_2, \ldots, a_h) = 1$, для наборов ($b_1, b_2, \ldots, b_h$), не входящих в ρ, будем писать соответственно $R(b_1, b_2, \ldots, b_h) = 0$. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_k сохраняет предикат (или соответствующее отношение ρ), если из истинности строки $(R(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_h^1), R(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_h^2), \ldots, R(a_1^n, a_2^n, \ldots a_h^n))$ вытекает истинность $R(f(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n), f(a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n), \ldots, f(a_h^1, a_h^2, \ldots, a_h^n))$.
Множество $\mathfrak{M}$ функций из P_k сохраняет предикат R, если каждая функция из $\mathfrak{M}$ сохраняет R. Класс всех функций, сохраняющих R, обозначим через $U(R)$. Опишем шесть специальных семейств предикатов.

Семейство Г. Пусть область истинности предиката $R(y_1, y_2)$ является графиком подстановки $\sigma(x)$, $\sigma(x) \in P_k$, разлагающейся в произведение циклов одинаковой простой длины p, $p \geq 2$. Семейство Г состоит из всех предикатов указанного вида и только из них.

Семейство А. Пусть $E_k = E^1 \cup E^2 \cup \cdots \cup E^\ell$, где $1 < \ell < k$, $E^i \cap E^j = \emptyset$ при $i \neq j$. Рассмотрим предикат $R(y_1, y_2)$, истинный в точках (a, b) таких, что при некотором i имеет место $a, b \in E^i$, и ложный в остальных точках. Семейство А состоит из всех предикатов $R(y_1, y_2)$, соответствующих указанным разбиениям множества E_k, и только из них.

Семейство L. Это семейство не пустое только при $k = p^m$, где p - простое. Пусть $k = p^m$ и $G = \langle E_k, + \rangle$ - абелева группа, в которой каждый ненулевой элемент имеет простой порядок p (элементарная p - группа). При $p = 2$ рассмотрим предикат $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$, истинный в точках (a, b, c, d) таких, что $a + b = c + d$ и ложный в остальных точках. При указанном p семейство L содержит для каждой описанной группы G предикат $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$ и только такие предикаты. Пусть $p \neq 2$. Рассмотрим предикат $R_G(y_1, y_2, y_3)$, истинный в точках (a, b, c), для которых $c = 2^{-1}(a+b)$, где 2^{-1} - такое число из E_p, для которого $2 \cdot 2^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$, и ложный в остальных точках. При указанном p семейство L содержит для каждой описанной группы G предикат $R_G(y_1, y_2, y_3)$ и только такие предикаты.

Семейство $\mathcal{I}$. Пусть h и m - натуральные числа, такие что $h \geq 3$, $m \geq 1$ и $h^m \leq k$, а $\varphi(x)$ - произвольное отображение E_k на E_{h^m}. Пусть $a \in E_{h^m}$; обозначим через $[a]_\ell$ ℓ-й коэффициент в разложении $a = \sum_{\ell=0}^{m-1} [a]_\ell h^\ell$, где $[a]_\ell \in E_h$. Рассмотрим предикат $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$, истинный в тех и только тех точках $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$, для которых набор $([\varphi(a_1)]_\ell, [\varphi(a_2)]_\ell, \ldots, [\varphi(a_h)]_\ell)$ является неразнозначным при любых ℓ, $\ell = 0,1,2,\ldots, m-1$. Будем говорить, что предикат определяется тройкой (h, m, φ). Семейство $\mathcal{I}$ содержит все предикаты, определяемые всеми указанными тройками (h, m, φ), и только их. Предикат из $\mathcal{I}$, для которого $\varphi(x) = x$, будем называть элементарным предикатом.

Семейство $\mathcal{Z}$. Предикат $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ называется рефлексивным, если из неразнозначности набора $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$ следует истинность $R(a_1, a_2, \ldots, a_h)$, и симметричным, если для любой подстановки $t(u)$ чисел $1,2,\ldots, h$ имеет место

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_h) = R(y_{t(1)}, y_{t(2)}, \ldots, y_{t(h)}).$$

Непустое множество всех элементов c из E_k, таких, что $R(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, c) = 1$ для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}$, называется центром симметричного предиката $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$. Предикат $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$ называется центральным, если он симетричен, рефлексивен и имеет центр c, $\varnothing \subset c \subset E_k$. Семейство $\mathcal{Z}$ состоит из всех h - местных центральных предикатов, $1 \leq h \leq k-1$, и только из них.

Семейство M. Пусть на E_k определено отношение частичного порядка $<$ с одним максимальным и одним минимальным элементами. Рассмотрим предикат $R(y_1, y_2)$, истинный в точках (a, b) таких, что $a < b$, и ложный в остальных точках. Семейство M содержит все предикаты, соответствующие указанным отношениям частичного порядка и только их.

Обозначим через W множество $\Gamma \cup A \cup L \cup \mathcal{I} \cup \mathcal{Z} \cup M$.

Сформулируем отмечавшуюся выше теорему И.Розенберга.

Теорема 1.1.1. Множество всех предполных классов в P_k совпадает с множеством всех классов сохранения предикатов из W.

Мы установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1.2. $\pi(k) \sim \delta(k) \cdot k \cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}}$ при $k \to \infty$, где $\delta(k) = 1$, если k - нечетно, $\delta(k) = 2$, если k - четно. h - местные предикаты R_1 и R_2 называются изоморфными, если существует такая подстановка $\sigma(x)$, $\sigma(x) \in P_k$, что для любого набора $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$ истинность $R_1(a_1, a_2, \ldots, a_h)$

эквивалентна истинности $R_2(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_k))$ (обозначение: $\sigma(R_1) = R_2$). Пусть $\tau(x)$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_k$, где $\tau(x)$ – подстановка. Обозначим через $f^{\tau}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцию $\tau^{-1}(f(\tau(x_1), \ldots, \tau(x_n)))$ и назовем функцию f^{τ} двойственной к функции f относительно подстановки $\tau(x)$, аналогично – через $\mathfrak{M}^{\tau}$ обозначим множество всех функций, двойственных к функциям из $\mathfrak{M}$ относительно $\tau(x)$. Множества функций $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называют двойственными, если для некоторой подстановки $\tau(x)$ имеет место $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2^{\tau}$. Нетрудно видеть, что если предикаты R_1 и R_2 изоморфны, то есть $\sigma(R_1) = R_2$, то $U(R_1) = [U(R_2)]^{\sigma}$. Отношение двойственности на множестве всех предполных классов является отношением эквивалентности; число классов этого отношения эквивалентности обозначим через $\varkappa(k)$. Такой класс эквивалентности будем называть также типом предполного класса. Мы установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1.3. $\varkappa(k) \sim \frac{\pi(k)}{k!}$ при $k \to \infty$.

§ 1.2. Доказательство теоремы 1.1.2.

Оценим число предикатов в семействах Γ, A, L, $\mathcal{J}$, M. В семействе Γ их, очевидно, не более, чем $k!$. Для оценки мощности семейства A воспользуемся тем, что число отношений эквивалентности на E_k не превосходит $k!$ [3]. Далее, каждый предикат из L, как отмечалось, однозначно задается указанием абелевой группы, каждый ненулевой элемент которой имеет при $k = p^m$ один и тот же простой порядок p. Все эти группы изоморфны и потому их число не превосходит $k!$. Для оценки числа предикатов в семействе $\mathcal{J}$ напомним, что каждый предикат из $\mathcal{J}$ однозначно определяется тройкой (h, m, φ). Так как, очевидно, $h \le k$, $m \le k$ и для выбора φ имеется не более, чем k^k возможностей, то семейство $\mathcal{J}$ должно содержать не более k^{k+2} предикатов. Далее, нетрудно видеть, что семейство M содержит не более, чем 2^{k^2} предикатов. Собирая полученные оценки, получим, что семейства Γ, A, L, $\mathcal{J}$, M в совокупности содержат не более, чем

$$3 \cdot k! + k^{k+2} + 2^{k^2} \le 5 \cdot 2^{k^2}$$

предикатов. Оценим теперь число предикатов в семействе $\mathcal{Z}$.

Будем понимать под сочетанием $C(a_1, a_2, \ldots, a_h)$ где $a_i \in E_k$ и $a_i \ne a_j$ при $i \ne j$, $i, j = 1, 2, \ldots, h$, множество всех перестановок, получающихся из набора ($a_1, a_2, \ldots, a_h$). Пусть $R(y_1, y_2, \ldots, y_h) \in \mathcal{Z}$. Так как R рефлексивен и симметричен, то он однозначно определяется заданием множества всех сочетаний, которые входят в область его истинности. Пусть, далее, $c \in E_k$, тогда предикат R, в центр которого входит c, обязательно в своей области истинности содержит C_{k-1}^{h-1} сочетаний вида $C(c, b_2, b_3, \ldots, b_h)$. Остальные сочетания из элементов E_k могут варьироваться. Число варьируемых сочетаний равно C_{k-1}^{h}.

Пусть $\mathcal{Z}(h)$, $\mathcal{Z}(k, h)$, $\mathcal{Z}(k, h, c)$ – соответственно число всех предикатов в $\mathcal{Z}$, число всех h - местных предикатов в $\mathcal{Z}$ и число h - местных предикатов в $\mathcal{Z}$, центр которых содержит элемент c. Тогда, так как $\mathcal{Z}(k)=\sum_{h=1}^{k-1}\mathcal{Z}(k,h)$, $\mathcal{Z}(k,h)\leq\sum_{c=0}^{k-1}\mathcal{Z}(k,h,c)$ и $\mathcal{Z}(k,h,c)=2^{C_{k-1}^{h}}-1$ то получаем, что $\mathcal{Z}(k)\leq\sum_{h=1}^{k-1}\sum_{c=0}^{k-1}\mathcal{Z}(k,h,c)\leq k\cdot\sum_{h=1}^{k-1}2^{C_{k-1}^{h}}$. Для оценки последней суммы заметим, что если $k=2l+d$, где $d\in\{0,1\}$, то как легко убедиться, при $d=1$, $C_{k-1}^{l}-C_{k-1}^{l-1}\geqslant 2^{l}$, а при $d=0$ $C_{k-1}^{l-1}-C_{k-1}^{l-2}\geqslant 2^{l}$, откуда следует, что

$$k\cdot\sum_{h=1}^{k-1}2^{C_{k-1}^{h}}\lessapprox\delta(k)\cdot k\cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}}.$$

(при этом обозначение $f(n)\gtrapprox g(n)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\geqslant 1$). Оценим теперь величину $\mathcal{Z}(k)$ снизу. Пусть $\mathcal{Z}(\ k,\ h,\ c,\ d\ )$ - число h - местных предикатов из $\mathcal{Z}$, центр которых содержит элементы c и d. Ясно, что $\mathcal{Z}(k,h,c,d)=2^{C_{k-2}^{h}}-1$. Отсюда следует, что для числа $\bar{\mathcal{Z}}(k,c)$ предикатов из $\mathcal{Z}$, центр которых состоит в точности из одного элемента c, имеет место

$$\bar{\mathcal{Z}}(k,c)\geqslant\sum_{h=1}^{k-2}((2^{C_{k-1}^{h}}-1)-(k-1)(2^{C_{k-2}^{h}}-1))+1.$$

Учитывая, что c может принимать k значений, получаем, что для числа $\bar{\mathcal{Z}}(k)$ всех предикатов, центр которых состоит из одного элемента, имеет место

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{Z}}(k)&\geqslant k\cdot[\sum_{h=1}^{k-2}((2^{C_{k-1}^{h}}-1)-(k-1)(2^{C_{k-2}^{h}}-1))+1]\gtrapprox\\&\gtrapprox k\cdot[\delta(k)\cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}}-(k-1)(k-2)\cdot 2\cdot 2^{C_{k-2}^{[\frac{k-3}{2}]}}+1]\gtrapprox\\&\gtrapprox\delta(k)\cdot k\cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}}\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{Z}(k)\sim\delta(k)\cdot k\cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}}$, то есть $\mathcal{Z}(k)$ асимптотически совпадает с числом центральных $[\frac{k-1}{2}]$ - местных предикатов при k - нечетном и с числом центральных $[\frac{k-1}{2}]$ - местных и $[\frac{k-1}{2}]+1$ - местных предикатов, при k - четном. Собирая оценки для числа предикатов в семействах Γ, A, L, $\mathcal{J}$, $\mathcal{Z}$, M, получаем, что число предикатов в W асимптотически равно $\mathcal{Z}(k)$. Покажем теперь, что для семейства $\mathcal{Z}$ классы сохранения разных предикатов различны. Пусть $R_1, R_2\in\mathcal{Z}$ и $R_1(\ y_1,\ y_2,\dots,\ y_h)\neq R_2(\ y_1,\ y_2,\dots,\ y_{h'})$. Предположим, что $h<h'$, тогда, очевидно, класс $U(R_2)$ содержит все функции, принимающие не более $h'-1$ значений, а класс $U(R_1)$ этим свойством не обладает, то есть тем самым $U(R_1)\neq U(R_2)$. Предположим теперь, что $h=h'$ и рассмотрим два подслучая: $h=1$ и $h>1$. Пусть $h=1$, тогда найдется такое a, что $R_1(a)\neq R_2(a)$; без ограничения общности $R_1(a)=$ I и $R_2(a)=0$. Отсюда следует, что константа a содержится в $U(R_1)$ и $a\in U(R_2)$, то есть $U(R_1)\neq U(R_2)$. Пусть $h>1$, тогда найдется такой набор (a_1, $a_2,\dots,\ a_h$), что $R_1(\ a_1,\ a_2,\dots,a_h)\neq$ $\neq R_2(\ a_1,\ a_2,\dots,\ a_h)$; без ограничения общности $R_1(\ a_1,\ a_2,\dots,a_h)=$

$= 1$ и $R_2(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, которая на наборах

$$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}),$$
$$\alpha_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2r}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kr}),$$

столбцами которых являются всевозможные неразнозначные столбцы высоты k, принимает столбец значений

$$f(\alpha_1) = a_1,$$
$$f(\alpha_2) = a_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(\alpha_k) = a_k,$$

а на наборах, отличных от α_i, $i = 1,2,\ldots,k$, принимает значение a_1. Нетрудно видеть, что $f \in U(R_1)$ и $f \notin U(R_2)$, тем самым $U(R_1) \neq \neq U(R_2)$. Таким образом, $\pi(k) \sim \varkappa(k)$ и теорема доказана.

§ 1.3. Доказательство теоремы 1.1.3.

Как отмечалось в доказательстве предыдущей теоремы, число предикатов в семействах $W \setminus Z$ не превосходит $5 \cdot 2^{k^2}$ и тем самым число классов эквивалентности, на которые распадается множество всех предполных классов, определяемых предикатами из $W \setminus Z$, также не превосходит $5 \cdot 2^{k^2}$. Покажем, что для предикатов R и R' из Z классы $U(R)$ и $U(R')$ двойственны тогда и только тогда, когда R и R' изоморфны. Для этого достаточно установить, что если для некоторой подстановки $\sigma(x)$ из P_k имеет место $U(R) = (U(R'))^{\sigma}$, то $R' = \sigma(R)$. Пусть $U(R) = (U(R'))^{\sigma}$. Рассмотрим $\sigma(R)$. Если $\sigma(R) \neq R'$, то как отмечалось при доказательстве предыдущей теоремы, $U(\sigma(R)) \neq U(R')$. Остается заметить, что так как $U(R) = (U(\sigma(R)))^{\sigma}$ и по условию $U(R) = (U(R'))^{\sigma}$, то $U(R') = U(\sigma(R))$, что противоречиво. Таким образом, число классов эквивалентности, на которые разбивается множество предполных классов определяемых предикатами из Z, не менее, чем $\frac{\varkappa(k)}{k!}$, а с учетом того, что, как было показано при доказательстве предыдущей теоремы, $\varkappa(k) \sim \pi(k)$, имеем, что указанное число классов асимптотически не менее, чем $\frac{\pi(k)}{k!}$, то есть $\varkappa(k) \gtrsim \frac{\pi(k)}{k!}$. Найдем теперь асимптотику величины $\varkappa(k)$. Как отмечалось при доказательстве предыдущей теоремы, если $k = 2\ell + \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, то $\pi(k)$ асимптотически совпадает с числом центральных $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ - местных предикатов при $\alpha = 1$ и с числом $\left[\frac{k-1}{2}\right]$- и $\left[\frac{k-1}{2}\right]+1$ - местных предикатов при $\alpha = 0$. Таким образом, $\pi(k) \sim k \cdot \delta(k) \cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}}$. Число центральных предикатов, отличных от указанных не превосходит $u(k)$, где

$$
u(k) = \begin{cases} k \cdot \sum\limits_{\substack{h=1 \\ h \neq [\frac{k-1}{2}]}}^{k-1} 2^{C_{k-1}^{h}} & \text{при } \alpha = 1 \\ k \cdot \sum\limits_{\substack{h=1 \\ h \neq [\frac{k-1}{2}],\, [\frac{k-1}{2}]+1}}^{k-1} 2^{C_{k-1}^{h}} & \text{при } \alpha = 0 \end{cases}
$$

Тем самым при $k \geqslant 2$

$$
u(k) \leq k^2 \cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]-1}}.
$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ имеем $C_{k-1}^{\ell} - C_{k-1}^{\ell-1} \geqslant 2^{\ell}$, а при $\alpha = 0$ аналогично $C_{k-1}^{\ell-1} - C_{k-1}^{\ell-2} \geqslant 2^{\ell}$, а тем самым

$$
\frac{\pi(k)}{k!} + u(k) \leqslant \frac{1}{k!}\,\delta(k) \cdot k \cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}} + k^2 \cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]-1}} \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\pi(k)}{k!}\left(1 + \frac{k \cdot k!}{\delta(k)} \cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]-1} - C_{k-1}^{[\frac{k-1}{2}]}}\right) \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\pi(k)}{k!}\left(1 + 2^{\frac{1}{\ln 2}[(k+\frac{3}{2})\ln k - k + \ln\sqrt{2\pi} - 2^{[\frac{k}{2}]}}\right) \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{\pi(k)}{k!}\left(1 + 2^{-2^{[\frac{k}{4}]}}\right).
$$

Откуда следует, что $\frac{\pi(k)}{k!} + u(k) \sim \frac{\pi(k)}{k!}$

Пусть $\mathcal{Z}(h, a)$ - множество всех центральных предикатов, центр которых содержит a и местность которых равна h, $h \leq k-1$. Область истинности каждого предиката R из $\mathcal{Z}(h, a)$ содержит все сочетания вида $C(a, a_2, \ldots, a_h)$, поэтому число всех предикатов в $\mathcal{Z}(h, a)$ равно $2^{C_{k-1}^{h}-1}$ Говорят, что предикат R инвариантен относительно подстановки $\sigma(x)$ если $\sigma(R) = R$. Оценим сверху число предикатов в $\mathcal{Z}(h, a)$ инвариантных относительно хотя бы одной нетождественной подстановки.

Пусть $\sigma(a) = a$ и для некоторого c имеет место $\sigma(c) = d$, где $c \neq d$. Число сочетаний $C(a_1, a_2, \ldots, a_h)$, не содержащих a и d, но содержащих c, очевидно, равно C_{k-3}^{h-1}. Тем самым, если предикат R из $\mathcal{Z}(h, a)$ инвариантен относительно σ, то значения его на всех сочетаниях вида $C(c, a_2, \ldots, a_h)$, не содержащих a и d автоматически будут определять его значения на всех сочетаниях вида $C(d, \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_h))$, а, значит, с учетом того, что предикат R определен на всех сочетаниях вида $C(a, a_2, \ldots, a_h)$, указанных предикатов в $\mathcal{Z}(h, a)$ будет не более, чем $2^{C_{k-1}^{h} - C_{k-3}^{h-1}}$. Таким образом, число всех предикатов из $\mathcal{Z}(h, a)$ инвариантных относительно хотя бы нетождественной подстановки $\sigma(x)$, такой, что $\sigma(a) = a$ не более, чем $(k-1)! \cdot 2^{C_{k-1}^{h} - C_{k-3}^{h-1}}$.

Пусть теперь $\sigma(a) = b$, $a \neq b$. Тогда предикат R из $\mathcal{Z}(h, a)$,

инвариантный относительно $\sigma(x)$, будет истинным на всех сочетаниях вида $C(a, a_2, \ldots, a_k)$ и также на всех сочетаниях вида $C(b, a_2, \ldots, a_k)$. Так как число сочетаний, не содержащих a и содержащих b равно $C_{\kappa-2}^{k-1}$, то R будет автоматически определен на $C_{\kappa-1}^{k-1}+C_{\kappa-2}^{k-1}$ наборах. Так как $C_\kappa^k - (C_{\kappa-1}^{k-1}+C_{\kappa-2}^{k-1}) = C_{\kappa-1}^k - C_{\kappa-2}^{k-1}$, то число указанных предикатов R в $\mathcal{Z}(k, a)$ будет не более, чем $2^{C_{\kappa-1}^k - C_{\kappa-2}^{k-1}}$.
Таким образом, число всех предикатов из $\mathcal{Z}(k, a)$ инвариантных относительно хотя бы одной подстановки $\sigma(x)$, такой, что $\sigma(a)=b$, $a\neq b$, не более, чем

$$(\kappa! - (\kappa-1)!)\cdot 2^{C_{\kappa-1}^k - C_{\kappa-2}^k} = (\kappa-1)!\,(\kappa-1)\cdot 2^{C_{\kappa-1}^k - C_{\kappa-2}^{k-1}}.$$

Тем самым число всех предикатов в $\mathcal{Z}(k, a)$ инвариантных относительно хотя бы одной нетождественной подстановки, не превосходит величины

$$\tau(\kappa, k) = (\kappa-1)!\cdot 2^{C_{\kappa-1}^k - C_{\kappa-3}^{k-1}} + (\kappa-1)!\,(\kappa-1)\,2^{C_{\kappa-1}^k - C_{\kappa-2}^{k-1}} =$$

$$= (\kappa-1)!\, 2^{C_{\kappa-1}^k}\left(\frac{1}{2^{C_{\kappa-3}^{k-1}}} + \frac{\kappa-1}{2^{C_{\kappa-2}^{k-1}}}\right).$$

В соответствии со значением α в предположении $\kappa = 2\ell+\alpha$ рассмотрим множества $\mathcal{Z}_1^a = \mathcal{Z}([\frac{\kappa-1}{2}], a)$ при $\alpha=1$ и $\mathcal{Z}_0^a = \mathcal{Z}([\frac{\kappa-1}{2}], a)\ \cup$ $\cup\,\mathcal{Z}([\frac{\kappa-1}{2}]+1, a)$ при $\alpha=0$. Как отмечалось, число предикатов в каждом из этих множеств равно $\delta(\kappa)(2^{C_{\kappa-1}^{[\frac{\kappa}{2}]}}-1)$. Далее, нетрудно видеть, что при $\kappa=2\ell$ имеет место неравенство

$$\tau(\kappa, [\tfrac{\kappa-1}{2}]+1) \le \tau(\kappa, [\tfrac{\kappa-1}{2}]),$$

а тем самым число предикатов в $\mathcal{Z}_i^a$, $i\in\{0,1\}$ инвариантных относительно хотя бы одной нетождественной подстановки, не превосходит величины

$$\tau(\kappa) = 2\cdot(\kappa-1)!\cdot 2^{C_{\kappa-1}^{[\frac{\kappa-1}{2}]}}\left(\frac{1}{2^{C_{\kappa-3}^{[\frac{\kappa}{2}]-1}}} + \frac{\kappa-1}{2^{C_{\kappa-2}^{[\frac{\kappa}{2}]-1}}}\right).$$

Во множестве $\bigcup_{a=0}^{\kappa-1}\mathcal{Z}_i^a$ число предикатов, инвариантных относительно хотя бы одной подстановки, тем самым, не более, чем $\kappa\cdot\tau(\kappa)$, а само множество $\bigcup_{a=0}^{\kappa-1}\mathcal{Z}_i^a$, как отмечалось, имеет мощность асимптотически равную $\pi(\kappa)$.
Отсюда заключаем, что

$$\varkappa(\kappa) \le \frac{\pi(\kappa)}{\kappa!} + \kappa\cdot\tau(\kappa) + 5\cdot 2^{\kappa^2} + U(\kappa) \le$$

$$\le \frac{\pi(\kappa)}{\kappa!}\left[1 + (\kappa!)^2\left(\frac{1}{2^{C_{\kappa-3}^{[\frac{\kappa}{2}]-1}}} + \frac{\kappa-1}{2^{C_{\kappa-2}^{[\frac{\kappa}{2}]-1}}}\right)\right] \le$$

$$\le \frac{\pi(\kappa)}{\kappa!}\left[\left(1+(\kappa!)^2\cdot\kappa\cdot 2^{-2^{[\frac{\kappa}{2}]}}\right)\right] \le \frac{\pi(\kappa)}{\kappa!}\left[\left(1+2^{-2^{(\frac{\kappa}{4})}}\right)\right]$$

Тем самым $\varkappa(\kappa) \sim \dfrac{\pi(\kappa)}{\kappa!}$. Теорема доказана.

§ 1.4. Поведения $\pi(k)$ и $\varkappa(k)$ при малых k

Оценим эффективность критериев полноты, формулируемых в терминах предполных классов, для малых значений k. Детальное изучение семейств предполных классов позволяет составить таблицу 1, в которой через $U(Q)$ обозначено множество всех классов сохранения предикатов из Q, $Q \subseteq W$, причем в клетке с координатами $(i, U(Q))$, $i = 2,3,\ldots,7$, сверху написано число предполных классов в $U(Q)$, а снизу – число классов эквивалентности, на которые разбивается множество $U(Q)$ отношением двойственности.

Таблица 1

$U(Q)$ \ k	2	3	4	5	6	7
$U(\Gamma)$	1	1	3	6	35	120
	1	1	1	1	2	1
$U(A)$	0	3	13	50	201	875
	0	1	3	6	13	26
$U(L)$	1	1	1	6	0	120
	1	1	1	1	0	1
$U(\mathcal{J})$	0	1	7	36	171	813
	0	1	2	4	7	11
$U(\mathcal{Z})$	2	9	40	355	11490	7758205
	1	3	7	19	77	1500
$U(M)$	1	3	18	190	3285	88851
	1	1	2	4	12	39
общее число	5	18	82	643	15182	7848984
	4	8	16	35	111	1500

Из таблицы 1 видно, что критерии полноты в терминах предполных классов практически приемлемы при $k \le 4$ и малоприемлемы при $k \geq 5$, а в терминах типов предполных классов соответственно при $k \le 6$ и при $k \geq 7$. Заметим, что теоремы I.I.2 и I.I.3 уже при $k = 8$ позволяют вычислять $\pi(k)$ и $\varkappa(k)$ с относительной погрешностью 10^{-5}.

§ 2. Условия полноты S – систем функций в P_k.

Исследования, проведенные в § 1, показывают практическую ограниченность возможностей подхода с использованием аппарата предполных классов к задаче о полноте в общем случае. В связи с этим особый интерес вызывают исследования на полноту систем, обладающих некоторыми наперед заданными и в то же время достаточно общими свойствами. К числу таковых относятся, прежде всего, системы, состоящие из так называемой существенной функции и группы подстановок, системы, состоящие из одной функции, и ряд других. В этом параграфе будет рассмотрена задача о полноте S – систем, указанных выше. S – системы состоят только из функций, принимающих все k значений из E_k. По аналогии с общим случаем вводятся понятия S – замыкания, S – замкнутого,

S - предполного и S - полного S - множеств. Устанавливается, что решение задачи об S - полноте получается на пути отыскания всех S - предполных S - множеств как S - множеств сохранения специальных и в некотором смысле простейших предикатов, зависящих не более, чем от четырех аргументов. Устанавливается асимптотическое поведение числа S - предполных S - множеств и их типов. В качестве следствия отсюда выводится простой по форме критерий S - полноты. Показывается, что структура по включению, которую образуют S - замкнутые S - множества, имеет ряд черт, общих со структурой всех замкнутых классов в P_k.

§ 2.1. Основные понятия и результаты

Введем основные понятия. Функция f из P_k называется S - функцией, если она принимает все k значений. Напомним, что S - функция называется существенной, если она существенно зависит не менее, чем от двух аргументов. Множество, элементами которого являются только S - функции, называется S - множеством. Множество всех S - функций обозначим через SP_k. S - замыканием S - множества $\mathfrak{M}$ называется множество $[\mathfrak{M}]_S$ всех S - функций, которые получаются из функций множества $\mathfrak{M}$ при помощи операций суперпозиции. Нетрудно видеть, что для любых S - множеств имеет место $[\mathfrak{M}]_S \supseteq \mathfrak{M}$, $[[\mathfrak{M}]_S]_S = [\mathfrak{M}]_S$ и, если $\mathfrak{M}_1 \supseteq \mathfrak{M}_2$, то $[\mathfrak{M}_1]_S \supseteq [\mathfrak{M}_2]_S$. S - множество $\mathfrak{M}$ называется S - замкнутым, если $\mathfrak{M} = [\mathfrak{M}]_S$, S - полным, если $[\mathfrak{M}]_S = SP_k$ и S - предполным, если оно не является S - полным, но для любой S - функции f, такой, что $f \notin \mathfrak{M}$, множество $\{f\} \cup \mathfrak{M}$ является S - полным. Нас будет интересовать задача об S - полноте S - систем. Ясно, что S - множество является S - полным тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном предполном классе данной k - значной логики P_k. Естественно, однако, предположить, что для установления S - полноты S - множеств система, состоящая из всех предполных классов в P_k, является слишком громоздкой и что решение этой задачи может быть получено в более компактной и ближе связанной с исходной задачей форме. Пусть задан некоторый предикат $R(y_1, y_2, \ldots, y_h)$. Множество всех S - функций, сохраняющих предикат R, обозначим через $S(R)$. Нетрудно видеть, что множество $S(R)$ является S - замкнутым. Опишем три специальных семейства предикатов.

Семейство $\mathcal{Z}_1$. Пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset E_k$, $1 \le r \le k-1$, рассмотрим предикат $R(y)$, истинный в точках $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и ложный в остальных точках. Семейство $\mathcal{Z}_1$ состоит из всех предикатов $R(y)$, соответствующих указанным подмножествам множества E_k, и только из них.

Семейство $\mathcal{I}_4$. Это семейство не пусто только при $k = h^m$, где $h \geq 5$, $m > 1$. Пусть $k = h^m$, обозначим через $[a]_\ell$ ℓ-ый коэффициент в разложении $a = \sum_{\ell=0}^{m-1} [a]_\ell h^\ell$, $a \in E_k$, $[a]_\ell \in E_h$. Для указанных

k и m рассмотрим предикат $R(y_1, y_2)$, истинный в точках (a, b), для которых $[a]_\ell \neq [b]_\ell$ при любом $\ell = 0, 1, \dots, m-1$, ложный в остальных точках. Семейство $\mathcal{J}_1$ содержит при каждых k и m предикат R, все изоморфные ему предикаты и только их.

Семейство B не пусто при $k \geq 5$ и состоит из одного предиката $R^*(y_1, y_2)$, истинного только в точках (a, b), таких, что $a \neq b$.

Обозначим через $W_1 = \Gamma \cup A \cup L \cup \mathcal{J}_1 \cup Z_1 \cup B$.

Сформулируем наши основные результаты по S - системам.

Теорема 2.1.1. S - множество является S - полным тогда и только тогда, когда оно не сохраняет ни одного предиката из множества W_1.

Теорема 2.1.2. S - множество $\mathfrak{M}$ является S - предполным тогда и только тогда, когда для некоторого предиката R, $R \in W_1$, имеет место $S(R) = \mathfrak{M}$.

Для предикатов R_1, R_2 из Γ будем писать $R_1 \sim R_2$, если подстановка, определяемая одним из этих предикатов, является степенью другой, аналогично для R_{G_1}, R_{G_2} из L будем писать $R_{G_1} \approx R_{G_2}$, если для групп $G_1 = \langle E_k, + \rangle$ и $G_2 = \langle E, \oplus \rangle$ при некотором фиксированном c, $c \in E_k$, для любых элементов a и b имеет место $a \oplus b = a + b + c$

Теорема 2.1.3. Пусть R_1, $R_2 \in W_1$ тогда, если:

а) R_1 и R_2 из разных семейств Γ, A, L, $\mathcal{J}_1$, Z_1, B, то $S(R_1) \neq S(R_2)$;

б) R_1, $R_2 \in A \cup \mathcal{J}_1 \cup Z_1$, то при $R_1 \neq R_2$ $S(R_1) \neq S(R_2)$;

в) R_1, $R_2 \in \Gamma$, то $S(R_1) = S(R_2)$ эквивалентно $R_1 \sim R_2$;

г) R_1, $R_2 \in L$, то $S(R_1) = S(R_2)$ эквивалентно $R_1 \approx R_2$.

Предикат $R(y_1, y_2, \dots, y_k)$, $k \geq 1$ такой, что $S(R) \neq SP_k$, назовем нормальным, если для любого предиката $R'(z_1, z_2, \dots, z_{k'})$, $k' < k$, область истинности которого получается из области истинности предиката $R(y_1, y_2, \dots, y_k)$ вычеркиванием произвольных строк и столбцов, имеет место $S(R') \neq S(R)$.

Теорема 2.1.4. Каждый предикат из W_1 является нормальным.

Приведем более компактный по форме критерий S - полноты, который является, конечно, менее сильным, чем теорема 2.1.1.

Назовем S - множество $\mathfrak{M}$ τ - транзитным (τ - степень транзитности) если для любого τ - местного предиката R, такого, что $S(R) \neq SP_k$ имеет место $\mathfrak{M} \nsubseteq S(R)$. На основании теорем 2.1.3, 2.1.4 может быть установлена

Теорема 2.1.5. S - множество является S - полным тогда и только тогда, когда оно

а) 4-транзитивно при $k = 2^m$, $m \geq 1$;

б) 3-транзитивно при $k = p^m$, p - простое, $p \neq 2$, $m \geq 1$;

в) 2-транзитивно при $k \neq p^m$, p - простое, $m \geq 1$;

Отметим, что в общем случае степень транзитивности в каждом из пунктов а), б) и в) не может быть уменьшена. Обозначим через $\pi_1(k)$ число S - предполных S - множеств.

Теорема 2.1.6.

$$\pi_1(k) = k^{k(1-\varepsilon(k))}, \quad \text{где } \varepsilon(k) > 0, \text{ причем}$$
$$\varepsilon(k) = O\left(\frac{\ln \ln k}{\ln k}\right) \quad \text{при } k \to \infty.$$

Для сравнения напомним, что число $\pi(k)$ предполных множеств в P_k асимптотически равно $\delta(k)\cdot k \cdot 2^{C_{k-1}^{[\frac{k}{2}]}}$. Отношение двойственности разбивает множество всех S - предполных S - множеств на классы эквивалентности. Можно описать все эти классы. Пусть $\varkappa_1(k)$ - число указанных классов или типов.

Теорема 2.1.7.

$$\varkappa_1(k) \sim \frac{1}{4k\sqrt{3}}\, e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}k}} \quad \text{при } k \to \infty.$$

Для сравнения напомним, что число таких типов предполных классов в P_k асимптотически равно $\frac{\pi(k)}{k!}$.

Интересно отметить, что каждое S - предполное S - множество, являющееся S - множеством сохранения предикатов из $\mathcal{J}$, с точностью до переименования переменных конечно, все остальные S - предполные S - множества бесконечны. Нетрудно видеть, что справедливы следующие утверждения.

Предложение 2.1.1. S - множество является S - полным тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном S - предполном S - множестве.

Предложение 2.1.2. Для любого S - предполного S - множества $\mathcal{M}$ найдется в W предикат R, такой, что $\mathcal{M} = S(R)$.

Заметим, что предложение 2.1.2 не допускает обращения, то есть не для всякого предиката R из W множество $S(R)$ является S - предполным множеством. В последующем мы выделим в W все те предикаты, S - множества сохранения которых являются S - предполными, заменив при этом некоторые из предикатов на нормальные. Точнее, мы покажем, что для всякого предиката R из W найдется предикат R', $R' \in W_1$, такой, что $S(R') \supseteq S(R)$. Отсюда будет следовать справедливость теоремы 2.1.1. Затем мы выясним какие предикаты в W_1 описывают разные S - предполные S - множества и докажем остальные утверждения этого параграфа.

§ 2.2. Анализ семейств Γ, A, L, Z, M

В § 4.2 будет показано, что каждое предполное множество, которое является множеством сохранения предиката из семейств Γ, A, Z_1 содержит S - функцию, которая не принадлежит никакому другому предполному множеству. Отсюда, очевидно, следует справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.2.1. Пусть R_1, R_2 - предикаты, причем $R_1 \in \Gamma \cup A \cup Z_1$

и $R_2 \in W$; тогда, если $U(R_1) \neq U(R_2)$, то $S(R_1) \nsubseteq S(R_2)$.

Лемма 2.2.2. Пусть $R \in \mathcal{Z}$, тогда для некоторого предиката R' из $\mathcal{Z}_1$ имеет место $S(R) \subseteq S(R')$.

Доказательство. Пусть $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ – центр предиката R (y_1, $y_2, \ldots, y_h$). Нетрудно видеть, что для всякой функции f ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) из $S(R)$ и любого набора ($c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$), где $c_{i_j} \in C$, $j = 1, 2, \ldots, n$, имеет место $f(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}) \in C$, то есть в качестве предиката R' можно выбрать одноместный предикат, истинный в точках c_1, $c_2, \ldots, c_t$ и ложный в остальных точках. Лемма доказана.

Лемма 2.2.3. Пусть $R \in M$, тогда для некоторого предиката R' из $\mathcal{Z}_1$ имеет место $S(R) \subseteq S(R')$.

Доказательство. Пусть в отношении частичного порядка, определяемом предикатом R, число a – максимальный элемент. Тогда очевидно, что для всякой функции f ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) из $S(R)$ имеет место $f(a, a, \ldots, a) = a$, то есть в качестве предиката R' можно выбрать одноместный предикат, истинный только в точке a. Лемма доказана.

Лемма 2.2.4. Пусть $R_1 \in L$ и $R_2 \in W$; тогда, если $U(R_1) \neq U(R_2)$, то $S(R_1) \nsubseteq S(R_2)$.

Доказательство. Утверждение леммы, очевидно, будет следовать из того, что $[S(R_1)] = U(R_1)$. Пусть R_1 определяется группой $G = \langle E_k, + \rangle$, где $k = p^m$. Построим поле K над E, аддитивная группа которого совпадает с G. В этом поле всякое выражение вида

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} x_i^{p^j} \qquad (*)$$

определяет функцию из $U(R_1)$, причем справедливо и обратное утверждение[7]. Нетрудно видеть, что функции вида $ax + b$, $a \neq 0$ (здесь 0 – нулевой элемент G), $x + y$ и $x - y$ являются S – функциями. Покажем, что x^{p^j} при $0 \leq j \leq m-1$ также является S – функцией. В самом деле, как известно, K имеет примитивный элемент e, такой, что все элементы из E_K могут быть записаны в виде строки $0, 1, e, e^2, \ldots, e^{p^m-2}$, где 1 – единица поля K, при этом для каждого b из E_K имеет место $b^{p^m} = b$, а для каждого a из E_K, $a \neq 0$, – $a^{p^m-1} = 1$. Предположим, что x^{p^j} не является S – функцией, тогда при некоторых c и d таких, что $c \neq d$ должно иметь место $c^{p^j} = d^{p^j}$. Очевидно, можно считать, что c и d отличны от 0. Поэтому при некоторых u и v, таких, что $u, v \in \{1, 2, \ldots, p^m-1\}$ $c = e^u$ и $d = e^v$, то есть $e^{up^j} = e^{vp^j}$. Пусть $u > v$, тогда $e^{(u-v)p^j} = 1$, а, значит, $(u-v)p^j = 0 \pmod{p^m-1}$, что невозможно. Таким образом, x^{p^j} является при указанных j S – функцией. Заметим еще, что для любой константы c имеет место $c = (ax + c) - ax$. Изложенное показывает, что каждый полином вида ($*$) может быть получен при помощи операций суперпозиции из S -

функций вида $ax+b$, $x+y$, $x-y$ и x^{pi}. Лемма доказана.

§ 2.3. Анализ семейства $\mathcal{J}$.

Лемма 2.3.1. Пусть R_1 – κ- местный предикат из $\mathcal{J}$, тогда при

а) $\kappa \in \{3,4\}$ для некоторого предиката R_2 из L имеет место $S(R_1) \subseteq S(R_2)$;

б) $\kappa \geqslant 5$ для предиката R^* из B имеет место $S(R_1) = S(R^*)$, и для любого предиката R_2 из W, если $R_1 \neq R_2$, то $S(R_1) \nsubseteq S(R_2)$.

Доказательство. Заметим, что в $\mathcal{J}$, очевидно, имеется единственный κ-местный предикат. Он является истинным на любом неразнозначном наборе и ложен на остальных наборах. Ясно, что $S(R_1)$ содержит все одноместные S-функции и, в силу леммы Яблонского [3] не может содержать существенной функции. Далее, как известно [13] при κ, равном 3 или 4, все предикаты из L определяют одно и то же предполное множество, которое содержит все одноместные S- функции. Отсюда следует, что для рассматриваемых значений κ имеет место $S(R_1) \subseteq S(R_2)$, где R_2 - любой предикат из L. Пусть теперь $\kappa \geqslant 5$. Легко видеть, что $S(R^*)$ содержит все одноместные S - функции и, в силу теоремы Саломаа [13] о полноте системы всех одноместных S - функций и существенной функции, не может содержать ни одной существенной функции. Отсюда следует, что $S(R_1) = S(R^*)$. Пусть, далее, $R_2 \in W$ и $R_2 \neq R_1$. Нетрудно видеть, что для всякого предиката из W, отличного от R_1, в его области истинности содержится разнозначный набор и существует разнозначный набор, который не входит в его область истинности. Так как $U(R_1)$ содержит все подстановки, то $S(R_1) \nsubseteq S(R_2)$. Лемма доказана.

Пусть R^{**} - κ- местный предикат из $\mathcal{J}$. Обозначим через $\mathcal{J}_2$ множество $\mathcal{J} \setminus \{R^{**}\}$.

Лемма 2.3.2. Пусть R_1 из $\mathcal{J}_2$ определяется тройкой (h, m, φ) и $h^m < \kappa$, тогда для некоторого предиката R_2 из A имеет место $S(R_1) \subseteq S(R_2)$.

Доказательство. В случае, когда $h^m < \kappa$, как это показано в [18], предикат $R_1(y_1, y_2, \ldots, y_h)$, который, очевидно, является рефлексивным и симметричным, имеет абсолютную пару, то есть существуют такие числа a и b, $a \neq b$, что для всяких чисел $a_3, a_4, \ldots, a_h$ справедливо $R(a, b, a_3, a_4, \ldots, a_h) = 1$. Рассмотрим двухместный рефлексивный симметричный предикат $R_2(y_1, y_2)$, истинный только на тех разнозначных наборах, которые являются абсолютными парами для R_1. Очевидно, что всякая функция из $S(R_1)$ сохраняет R_2. Покажем, что R_2 обладает свойством транзитивности, то есть если $R_2(a,b) = R_2(b,c) = 1$, то $R_2(a,c) = 1$. Как показано в [7], в исследуемом случае предикат R_1 является однородным, то есть обладает следующим свойством. Пусть для некоторого u, $u \in E_\kappa$ и набора $(v_1, v_2, \ldots, v_h)$ выполнено $R_1(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_h) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, h$, тогда $R_1(v_1, v_2, \ldots, v_h) = 1$. Воспользуемся однородностью для доказательства транзитивности R_2. Пусть $R_2(a,b) = R_2(b,c) = 1$. Без ограничения общности можно, очевидно, предположить, что $a \neq b$ и $b \neq c$. Рассмотрим произвольный набор (a, c, $d_3, \ldots, d_h$), выберем в качестве u элемент b, тогда, очевидно, $R_1(b,c,d_3,\ldots,d_h) = R_1(a,b,d_3,\ldots,d_h) = R_1(a,c,d_3,\ldots,d_{i-1},b,d_{i+1},\ldots,d_h) = 1$ при любом $i = 3,4,\ldots, h$. Отсюда вытекает, что $R_2(a,c) = 1$. Кроме того, как легко видеть, предикат R_2 не является тождественно истинным. Тем самым $R_2 \in A$. Лемма доказана.

Пусть $k = h^m$, $h \geqslant 3$, $m > 1$ и $a \in E_k$.

Представим число a в виде вектора $\vec{a} = ([a]_0, [a]_1, \ldots, [a]_{m-1})$, аналогичную запись $\vec{f}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ будем использовать для задания функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то есть $\vec{f}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = ([f]_0, [f]_1, \ldots, [f]_{m-1})$, где функция $[f]_\ell$ из P_h, $\ell = 0,1,\ldots, m-1$, зависит от переменных $[x_1]_0$, $[x_1]_1, \ldots, [x_1]_{m-1}, [x_2]_0, [x_2]_1, \ldots, [x_2]_{m-1}, \ldots, [x_n]_0, [x_n]_1, \ldots, [x_n]_{m-1}$.

Учитывая [14], докажем следующее утверждение.

Лемма 2.3.3. Пусть элементарный предикат R из $\mathcal{J}$ определяется тройкой (h, m, x) и $h^m = k$, тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S(R)$ в том и только в том случае, когда каждая функция $[f]_\ell$ является подстановкой из P_h и при $i \neq j$ функции $[f]_i$ и $[f]_j$ зависят от разных переменных, а $i,j,\ell = 0,1,\ldots, m-1$.

Доказательство. Достаточность условий леммы очевидна. Покажем, что условия являются и необходимыми. В самом деле, нетрудно видеть, что каждая из функций $[f]_\ell$ должна быть S - функцией в P_h, ибо в противном случае функция f не была бы S - функцией в P_k. Предположим, что $[f]_\ell$ при некотором ℓ существенно зависит более чем от одного переменного, тогда в силу леммы Яблонского [3] можно было бы подобрать h неразнозначных наборов, на которых функция $[f]_i$ приняла бы все h значений. Легко видеть, что это противоречило бы тому, что $f \in S(R)$. Далее, функции $[f]_i$ и $[f]_j$ при $i \neq j$ должны зависеть от разных переменных, так как в противном случае функция f, очевидно, не могла бы принимать все k значений. Лемма доказана.

Лемма 2.3.4. Пусть предикат R_1 из $\mathcal{J}_2$ определяется тройкой (h, m, φ) и $h^m = k$, тогда при h равном 3 или 4 для некоторого предиката R_2 из L имеет место $S(R_1) \subseteq S(R_2)$.

Доказательство. Пусть $k = p^m$, где p - простое, $G = \langle E_k, \oplus \rangle$ и $R_G \in L$. Так как G имеет базис e_0, $e_1, \ldots, e_{m-1}$, то каждый элемент из G однозначно представляется в виде $a = a_0 e_0 \oplus a_1 e_1 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus a_{m-1} e_{m-1}$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in E_p$. Элементу a сопоставим вектор $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$. Обозначим через $\mathcal{Y}_p$ m - мерное векторное пространство над полем K_p вычетов по модулю p. Нетрудно видеть, что описанное отображение является изоморфизмом группы G и группы сложения по модулю p в Y_p. Каждой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_k при этом изоморфизме соответствует векторная функция $\vec{f}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$, отображающая Y_p^n в Y_p. В работе [7] показывается, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \in U(R_6)$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{f}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = \vec{a}_0 + \vec{x}_1 A_1 + \vec{x}_2 A_2 + \cdots + \vec{x}_n A_n, \qquad (*)$$

где $a_0 \in Y_p$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть матрицы порядка $m \times m$ над полем K_p, а произведение $\vec{x}_i A_i$ является произведением вектора $\vec{x}_i$, рассматриваемого в качестве матрицы порядка $1 \times m$, на матрицу A_i; сложение и умножение по модулю p. Без ограничения общности можно считать в последующем, что R_1 является элементарным предикатом. В силу леммы 2.3.3 S - функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $S(R_1)$ может быть представлена в виде

$$\vec{g}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n) = ([g]_0, [g]_1, \ldots, [g]_{m-1}), \qquad (**)$$

где $[g]_i$ - подстановка из R. Пусть теперь $k = 3$. Выберем элементарную 3-группу G_1, в которой базисом являются элементы $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^{m-1}$, и для любого a разложение $(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$ по этому базису таково, что $a_i = [a]_i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

В силу того, что все подстановки в P_3 представимы в виде $a \cdot x + b$, где $a \neq 0$, очевидно, можно подобрать так матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ над K_3 и вектор $\vec{a}$ над Y_3, что правая часть выражения (*) совпадает с правой частью выражения (**). Отсюда следует, что $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S(R_{G_1})$.

Пусть теперь $k = 4$. Выберем элементарную 2-группу, в которой базисом являются элементы $2^0, 2^1, \ldots, 2^{2m-1}$ и для любого элемента a разложение $(a_0, a_1, \ldots, a_{2m-1})$ по этому базису таково, что $a_i = [a]_i$, $i = 0, 1, \ldots, 2m-1$. Заметим, что семейство L при $k = 4$ определяет один и тот же предполный класс, который содержит все подстановки из P_4 [13]. Нетрудно видеть теперь, что в правой части (*) можно подобрать вектор a_0 над E_2 и матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ над K_2, что получится выражение, равное для функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $S(R_1)$ тому, которое получается из представления (**) после разложения каждой компоненты его правой части по степеням двойки 2^0 и 2^1. Отсюда следует, что $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S(R_{G_2})$. Лемма доказана.

Следуя [8], введем понятие ранга существенной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть $H_i \in E_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $|H_i|$ - мощность множества H_i и r - наибольшая из мощностей H_i, число r назовем рангом набора $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$. Говорят, что функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет ранг r, если на множестве $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ она принимает все k значений и на любом множестве $H_1' \times H_2' \times \cdots \times H_n'$ таком, что ранг набора $(H_1', H_2', \ldots, H_n')$ меньше r, она выпускает хотя бы одно значение.

Для данной K - значной логики P_K обозначим через $\mathcal{J}_3$ множество всех таких предикатов из $\mathcal{J}_2$, которые определяются тройками (h, m, φ), где $h \geqslant 5$ и $h^m = K$.

Лемма 2.3.5. Пусть предикат R из $\mathcal{J}_3$ определяется тройкой (h, m, φ) и $t \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, тогда ранг любой существенной функции из $S(R)$ можно представить в виде h^t и для каждого t найдется в $S(R)$ существенная функция ранга h^t.

Доказательство. Очевидно, что без ограничения общности можно считать, что R является элементарным предикатом. Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $S(R)$ является существенной. Перейдем к векторной записи $\vec{f}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = ([f]_0, [f]_1, \dots, [f]_{m-1})$, где в силу леммы 2.3.3 $[f]_i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, - подстановка над E_h и при $i \neq j$ $[f]_i$ и $[f]_j$ зависят от разных переменных $[x_u]_v$ и $[x_w]_z$, $u, w = 1, 2, \dots, n$; $v, z = 0, 1, \dots, m-1$. Пусть t_u - число таких подстановок $[f]_i$, которые зависят от аргументов $[x_u]_{v_i}$ при фиксированном u. Пусть t - наибольшее из таких чисел. Очевидно, $t \leqslant m-1$. Легко видеть, что ранг функции f равен h^t. С другой стороны, очевидно, всегда можно подобрать подстановки $[f]_i$ таким образом, чтобы в векторе $([f]_0, [f]_1, \dots, [f]_{m-1})$ наибольшее из чисел t_u было равно наперед заданному числу t, $1 \leqslant t \leqslant m-1$. Лемма доказана.

Пусть имеем функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P_K и матрицу C порядка $m \times n$, элементы которой принадлежат E_K обозначим через $f(C)$ столбец значений функции f на строках матрицы C.

Лемма 2.3.6. Пусть предикаты R_1 и R_2 из $\mathcal{J}_3$ определяются тройками (h, m, φ) и (h', m', φ'), $h^m = (h')^{m'}$ и $h^t = h'$, $t > 1$, тогда $S(R_2) \nsubseteq S(R_1)$.

Доказательство. Предположим противное, то есть, что $S(R_2) \subseteq S(R_1)$ и придем к противоречию. Перейдем к рассмотрению элементарного h^t- местного предиката $\sigma(R_2) = R_3$, изоморфного предикату R_2. Нетрудно видеть, что имеет место $S(\sigma(R_2)) \subseteq S(\sigma(R_1))$. Здесь возможны два случая: $\sigma(R_1)$ является элементарным предикатом и $\sigma(R_1)$ не является таковым.

Рассмотрим первый случай и покажем, что в $S(R_3)$ найдется функция, которая не сохраняет $\sigma(R_1)$, тем самым будет достигнуто противоречие с предположением о том, что $S(\sigma(R_2)) \subseteq S(\sigma(R_1))$. Выберем разнозначный набор (a_1, $a_2, \dots, a_h$) такой, чтобы $\sigma(R_1)(a_1, a_2, \dots, a_h) = 1$, и в матрице

$$T = \begin{bmatrix} [a_1]_0 & [a_1]_1 & \dots & [a_1]_{m-1} \\ [a_2]_0 & [a_2]_1 & \dots & [a_2]_{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [a_h]_0 & [a_h]_1 & \dots & [a_h]_{m-1} \end{bmatrix}$$

для столбцов с номерами $0,1,\dots,t-1$ имело место следующее: набор $(b_1, b_2, \dots, b_k)$, где $b_i = \sum_{\tau=0}^{t-1} [a_i]_\tau k^\tau$, $i=1,2,\dots,k$ является разнозначным. Очевидно, что это всегда возможно. Представим существенную функцию $f(x_1, x_2)$ из $S(R_3)$ в векторном виде $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = ([f]_0, [f]_1, \dots, [f]_{m'-1})$, где в силу леммы 2.3.3 $[f]_i$ является подстановкой из P_{k^t}, причем $[f]_i \neq [f]_j$ при $i \neq j$, $i, j = 0,1,\dots,m'-1$. Подберем f так, чтобы подстановка $[f]_\nu$ зависела от $[x_1]_\nu$ при $\nu = 1,2,\dots,m'-1$, и $[f]_0$ – от $[x_2]_0$, при этом пусть $[f]_\nu([x_1]_\nu) = [x_1]_\nu$, $[f]_0(b_u) = u-1$, $u=1,2,\dots,k$.

В силу набора $f(x_1, x_2)$, очевидно, имеем

$$f\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_k \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ k-1 \end{bmatrix}$$

И так как

$$\sigma(R_1)(0, 0, \dots, 0) = \sigma(R_1)(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1,$$

а $\sigma(R_1)(0, 1, \dots, k-1) = 0$, то $f(x_1, x_2) \notin S(R_1)$

Перейдем ко второму случаю. Теперь $\sigma(R_1)$ не является элементарным предикатом, то есть существует такой разнозначный набор $(b_1, b_2, \dots, b_k)$, что $\sigma(R_1)(b_1, b_2, \dots, b_k) = 1$, и в матрице

$$T_1 = \begin{bmatrix} [b_1]_0 & [b_1]_1 & \dots & [b_1]_{m-1} \\ [b_2]_0 & [b_2]_1 & \dots & [b_2]_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [b_k]_0 & [b_k]_1 & \dots & [b_k]_{m-1} \end{bmatrix}$$

имеется разнозначный столбец. Разобьем столбцы этой матрицы на последовательные группы по t столбцов в каждой. Пусть указанный разнозначный столбец стоит в W-ой группе при отсчете слева направо, начиная с нуля. Очевидно, эта группа столбцов

$$T_2 = \begin{bmatrix} [b_1]_z & [b_1]_{z+1} & \dots & [b_1]_{z+t-1} \\ [b_2]_z & [b_2]_{z+1} & \dots & [b_2]_{z+t-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [b_k]_z & [b_k]_{z+1} & \dots & [b_k]_{z+t-1} \end{bmatrix}$$

такова, что набор

$$\left(\sum_{i=0}^{t-1} [b_1]_{z+i} k^i, \sum_{i=0}^{t-1} [b_2]_{z+i} k^i, \dots, \sum_{i=0}^{t-1} [b_k]_{z+i} k^i\right)$$

является разнозначным и его элементы принадлежат E_{k^t}. Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ – произвольный разнозначный набор элементов из E_K. Покажем, как используя матрицу T_1, построить матрицу T_V, содержащую m' столбцов, которые принадлежат области истинности предиката $\sigma(R_1)$, и существенную функцию $f(x_0, x_1, \dots, x_{m'-1})$ из $S(\sigma(R_2))$, которая на матрице T_V принимает в качестве значения столбец $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Отсюда будет следовать, что $S(\sigma(R_2)) \notin S(\sigma(R_1))$. Рассмотрим матрицу

$$T_3 = \begin{bmatrix} [a_1]_0 & [a_1]_1 & \dots & [a_1]_{m'-1} \\ [a_2]_0 & [a_2]_1 & \dots & [a_2]_{m'-1} \\ \cdot & & & \\ [a_k]_0 & [a_k]_1 & \dots & [a_k]_{m'-1} \end{bmatrix},$$

где $[a_i]_j$ - коэффициенты из разложения $a_i = \sum_{j=0}^{m'-1} [a_i]_j (k^t)^j$, $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть в ней на местах $i_1, i_2, \dots, i_q$ стоят разнозначные столбцы ($q = 0$ означает отсутствие этих мест), а на остальных местах - неразнозначные столбцы. Заменим в матрице T_3 каждый столбец с номером i_j, $j = 1, 2, \dots, q$, на столбец ($b_1, b_2, \dots, b_k$). Получим матрицу T_4, столбцы которой, очевидно, принадлежат области истинности предиката $\sigma(R_1)$. Рассмотрим m'- местную существенную функцию $f(x_0, x_1, \dots, x_{m'-1})$ из $S(\sigma(R_2))$, такую, что в ее векторном представлении

$$\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{m'-1}) = ([f]_0, [f]_1, \dots, [f]_{m'-1}),$$

где разложение берется по степеням числа k^t, подстановки, стоящие на местах j, отличных от $i_1, i_2, \dots, i_q$; $j \in \{0, 1, \dots, m'-1\}$; являются тождественными и зависят от переменных $[x_j]_0$; на месте под номером i_u стоит подстановка $[f]_{i_u}([x_{i_u}]_w)$ такая, что

$$[f]_{i_u}\left(\sum_{z=0}^{t-1} [b_v]_{z+z} k^z\right) = [a_v]_{i_u}, \quad v = 1, 2, \dots, k.$$

Нетрудно видеть, что значение $f(T_4)$ совпадает со столбцом ($a_1, a_2, \dots, a_k$). Лемма доказана.

Лемма 2.3.7. Пусть предикаты R_1 и R_2 из $\mathcal{J}_3$ определяются тройками (k, m, φ) и (k', m', φ'), $k^m = (k')^{m'}$ и $k \neq k'$, тогда $S(R_1) \notin S(R_2)$.

Доказательство. В силу леммы 2.3.5 множества $S(R_1)$ и $S(R_2)$ содержат существенные функции f и g соответственно, причем ранг g равен k', а ранг f равен k. Пусть для определенности $k < k'$, тогда по лемме 2.3.5 $f \notin S(R_2)$, и, значит, $S(R_1) \subseteq S(R_2)$. Для доказательства того, что $S(R_1) \not\supseteq S(R_2)$, рассмотрим два случая: когда k' не является степенью k и является степенью k. В первом случае по той же лемме 2.3.5 $g \notin S(R_1)$ и потому $S(R_1) \not\supseteq S(R_2)$. Во втором случае пользуемся леммой 2.3.6. Лемма доказана.

Лемма 2.3.8. Если $R_1 \in \mathcal{Z}_1$ и $R_2 \in \mathcal{J}_3$, то $S(R_1) \not\supseteq S(R_2)$.

Доказательство. Пусть область истинности предиката R_1 есть $\{i_1, i_2, \dots, i_z\}$, $1 \le z \le k-1$ и R_2 определяется тройкой (k, m, φ). Без ограничения общности можно считать, что R_2 является элементарным предикатом. Выберем в E_k произвольное число a, такое, что $R_1(a) = 0$ и рассмотрим набор подстановок из P_k $\{\tau_0(x), \tau_1(x), \dots, \tau_{m-1}(x)\}$ таких, что $\tau_j([i_1]_j) = [a]_j$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, где через $[a]_j$ обозначен j-й коэффициент в разложении a по степени числа k. Нетрудно видеть, что подстановка $\tau(x)$ из $S(R_2)$, векторное выражение которой имеет вид $\vec{\tau}(\vec{x})=(\tau_0([x]_0), \tau_1([x]_1), \ldots, \tau_{m-1}([x]_{m-1}))$, такова, что $\tau(i_1)=a$, то есть $\tau(x)\notin S(R_1)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3.9. Если $R_1 \in A$ и $R_2 \in \mathcal{I}_3$, то $S(R_1) \not\supseteq S(R_2)$.

Доказательство. Предположим противное, то есть, что $S(R_1) \supseteq S(R_2)$. Без ограничения общности можно считать, что R_2 является элементарным предикатом и определяется тройкой (k, m, φ). Пусть $a \neq b$ и $R_1(a,b)=1$. Разложим числа a и b по степеням k : $a=\sum_{\ell=0}^{m-1}[a]_\ell \cdot k^\ell$, $b=\sum_{\ell=0}^{m-1}[b]_\ell \cdot k^\ell$ и составим матрицу

$$T=\begin{bmatrix}[a]_0 & [a]_1 & \ldots & [a]_{m-1}\\ [b]_0 & [b]_1 & \ldots & [b]_{m-1}\end{bmatrix}.$$

Эта матрица содержит, очевидно, хотя бы один разнозначный столбец. Пусть все ее разнозначные столбцы стоят на местах под номерами i_0, $i_1, \ldots, i_{t-1}$. Заметим, что для любого набора подстановок τ_0, $\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$ из P_k и любой подстановки $\varkappa$ из P_m множество $S(R_2)$ содержит подстановку Δ из P_k, векторная запись которой

$$\vec{\Delta}(\vec{x})=([\Delta]_0, [\Delta]_1, \ldots, [\Delta]_{m-1})$$

будет иметь следующий вид $\vec{\Delta}([x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{m-1})=$

$$=(\tau_0([x]_{\varkappa(0)}), \tau_1([x]_{\varkappa(1)}), \ldots, \tau_{m-1}([x]_{\varkappa(m-1)})).$$

Это, очевидно, позволяет выбрать такую подстановку Δ_1 из $S(R_2)$, что для матриц T и

$$T_1=\begin{bmatrix}u & u & \ldots & u & v & \ldots & v\\ v & v & \ldots & v & v & \ldots & v\end{bmatrix},$$

где $u \neq v$ и в первой строке встречается подряд t значений u, будет иметь место $\vec{\Delta}_1(T)=T_1$. Тем самым для чисел a_1 и b_1 из E_k, таких что

$$\vec{a}_1=(u, u, \ldots, u, v, \ldots, v),$$
$$\vec{b}_1=(v, v, \ldots, v, v, \ldots, v),$$

будет выполнено $R_1(a_1,b_1)=1$ и при этом $a_1 \neq b_1$. Отметим, что в матрице T_1 содержится ровно t, $t \geqslant 1$, разнозначных столбцов. Далее, в $S(R_2)$ можно подобрать такую подстановку Δ_2, что для матриц T_1 и

$$T_2=\begin{bmatrix}w & w & \ldots & w & v & u & v \ldots & v\\ v & v & \ldots & v & v & v & v \ldots & v\end{bmatrix}$$

где в первой строке встречается подряд $t-1$ раз w, $w \notin \{u,v\}$ будет иметь место $\vec{\Delta}_2(T_1)=T_2$. Тем самым для чисел a_2 и b_1 из E_k, где

$$\vec{a}_2=(w, w, \ldots, w, v, u, v, v, \ldots, v),$$

будет выполнено $R_1(a_2,b_1)=1$ и с учетом равенства $R_1(a_1,b_1)=1$ получим $R_1(a_1,a_2)=1$. Отметим, что в матрице

$$T_3 = \begin{bmatrix} u & u & \dots & u & u & v & v & \dots & v & v \\ w & w & \dots & w & v & u & v & \dots & v & v \end{bmatrix}$$

содержится ровно $\tau+1$ разнозначных столбцов. Тем самым можно сказать, что для любого s такого, что $\tau \le s \le m$ найдется пара различных чисел a' и b', таких, что $R_1(a',b')=1$ и в матрице

$$T' = \begin{bmatrix} [a']_0 & [a']_1 & \dots & [a']_{m-1} \\ [b']_0 & [b']_1 & \dots & [b']_{m-1} \end{bmatrix}$$

содержится ровно s разнозначных столбцов.

Заметим далее, что в $S(R_1)$ найдется такая подстановка Δ_3, что для матриц T_1 и

$$T_4 = \begin{bmatrix} w & w & \dots & w & u & v & v & \dots & v \\ v & v & \dots & v & v & v & v & \dots & v \end{bmatrix},$$

где в первой строке встречается подряд $\tau-1 \ge 1$ раз значение w, будет иметь место $\vec{\Delta}_3(T_1) = T_4$. Тем самым для чисел a_3 и b_1 из E_k, где

$$\vec{a}_3 = (w, w, \dots, w, u, v, v, \dots, v),$$

будет выполнено $R_1(a_3, b_1) = 1$ и с учетом равенства $R_1(a_1, b_1) = 1$ получим $R_1(a_1, a_3) = 1$. Отметим, что в матрице

$$T_5 = \begin{bmatrix} u & u & \dots & u & u & v & v & \dots & v \\ w & w & \dots & w & u & v & v & \dots & v \end{bmatrix}$$

содержится ровно $\tau-1$ разнозначных столбцов. Тем самым можно считать, что для любого s', такого, что $1 \le s' \le \tau$, найдется пара различных чисел a'' и b'', таких, что $R_1(a'', b'') = 1$, и в матрице

$$T'' = \begin{bmatrix} [a'']_0 & [a'']_1 & \dots & [a'']_{m-1} \\ [b'']_0 & [b'']_1 & \dots & [b'']_{m-1} \end{bmatrix}$$

содержится ровно s' разнозначных наборов.

Пусть теперь для некоторых различных чисел c и d из E_k выполнено $R_1(c,d) = 0$. Рассмотрим матрицу

$$T_6 = \begin{bmatrix} [c]_0 & [c]_1 & \dots & [c]_{m-1} \\ [d]_0 & [d]_1 & \dots & [d]_{m-1} \end{bmatrix}$$

В этой матрице имеется хотя бы один разнозначный столбец. Пусть все ее разнозначные столбцы стоят на местах с номерами $j_0, j_1, \dots, j_{t-1}$, $t \ge 1$. По доказанному выше найдутся в E_k такие различные числа e и f, что $R_1(e,f) = 1$ и в матрице

$$T_7 = \begin{bmatrix} [e]_0 & [e]_1 & \dots & [e]_{m-1} \\ [f]_0 & [f]_1 & \dots & [f]_{m-1} \end{bmatrix}$$

встречаются ровно t разнозначных столбцов, номера которых суть $k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$. Нетрудно видеть, что в $S(R_1)$ найдется подстановка Δ_4, отображающая матрицу T_7 в матрицу T_8, содержащую так же, как и матрица T_7, t разнозначных столбцов, номера которых суть $j_0, j_1, \dots, j_{t-1}$, а для чисел

e' и f', разложения по степеням h которых совпадает соответственно с первой и второй строками матрицы T_8, будет выполнено $R_1(e',f')=1$. Таким образом, можно считать, что в матрице T_7 разнозначные столбцы стоят на тех же местах, что и матрице T_6.

Выберем теперь в $S(R_2)$ подстановку Δ_5, такую, что

$$\vec{\Delta}_5(\vec{x}) = ([\Delta_5]_0([x]_0),\ [\Delta_5]_1([x]_1), \ldots, [\Delta_5]_{m-1}([x]_{m-1})),$$

где

$$[\Delta_5]_i \begin{bmatrix} [e]_i \\ [f]_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [c]_i \\ [d]_i \end{bmatrix},$$

$i = 0, 1, \ldots, m-1$. Ясно, что такую подстановку в $S(R_2)$ подобрать можно. Таким образом, для пары (c,d) будет выполнено $R_1(c,d)=1$, что противоречит исходному соотношению $R_1(c,d)=0$. Лемма доказана.

Лемма 2.3.10. Если $R_1 \in \Gamma$ и $R_2 \in \mathcal{Y}_3$, то $S(R_1) \not\supseteq S(R_2)$.

Доказательство. Отметим одно свойство предиката R_1: для всякого a из E_k существует единственное b, такое, что $R_1(a,b)=1$, причем $a \neq b$. Пусть R_2 определяется тройкой (h, m, φ). Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что $\varphi = x$. Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{bmatrix} [a]_0 & [a]_1 & \ldots & [a]_{m-1} \\ [b]_0 & [b]_1 & \ldots & [b]_{m-1} \end{bmatrix}$$

где $R_1(a,b)=1$. Пусть в ней на i-м месте стоит разнозначный столбец. Выберем в $S(R_2)$ подстановку $\tau(x)$, такую, что

$$\vec{\tau}(\vec{x}) = ([x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{i-1}, [\tau]_i, [x]_{i+1}, \ldots, [x]_{m-1}),$$

где $[\tau]_i$ зависит от $[x]_i$, $[\tau]_i([a]_i)=[a]_i$ и $[\tau]_i([b]_i) \neq [b]_i$. Тем самым $\tau(a)=a$ и $\tau(b)=c$, причем $b \neq c$. В силу описанного выше свойства предиката R_1 имеет место $\tau(x) \in S(R_1)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3.11. Если $R_1 \in L$ и $R_2 \in \mathcal{Y}_3$, то $S(R_1) \not\supseteq S(R_2)$.

Доказательство. Пусть предикат R_1 определяется элементарной p-группой $G = \langle E_k, + \rangle$, а предикат R_2 – тройкой (h, m, φ). Без ограничения общности можно считать, что R_2 – элементарный предикат. Для предиката $R_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из L, $n = 3,4$, как легко видеть, выполнено следующее. Для любых попарноразличных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ из E_k найдется единственное число a_n, такое, что $R_1(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)=1$; при этом $a_n \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Выберем в качестве чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ числа $0, 1, \ldots, n-2$. Разложим a_n по степеням h. Пусть

$$\vec{a}_n = ([a_n]_0, [a_n]_1, \ldots, [a_n]_{m-1}).$$

Так как $n \leq 4$ и $h \geq 5$, то очевидно, найдется такое i, $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, что $[a_n]_i \notin \{[a_1]_i, [a_2]_i, \ldots, [a_{n-1}]_i\}$. В соответствии с этим выберем в $S(R_2)$ подстановку $\tau(x)$, такую, что

$$\vec{\tau}(\vec{x}) = ([x]_0, [x]_1, \ldots, [x]_{i-1}, [\tau]_i([x]_i), [x]_{i+1}, \ldots, [x]_{m-1}),$$

где $[\tau]_i([a_j]_i)=[a_j]_i$ при $j=1,2,\dots,n-1$ и $[\tau]_i([a_n]_i)\neq[a_n]_i$. Ясно, что при указанных n и h выбор такой подстановки возможен. Нетрудно видеть, что $\tau(a_j)=a_j$ при $j=1,2,\dots,n-1$ и $\tau(a_n)\neq a_n$. Тем самым, если бы подстановка $\tau(x)$ сохраняла R_1, то имело бы место $R_1(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n)=$ $=R_1(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},\tau(a_n))$, что противоречиво. Лемма доказана.

Лемма 2.3.12. Для любого предиката R из $\mathcal{J}_3$ имеет место $S(R)\notin S(R^*)$

Доказательство. Как отмечалось в доказательстве леммы 2.3.1, $S(R^*)$ не содержит существенной функции. С другой стороны, в силу леммы 2.3.5, $S(R)$ содержит существенную функцию. Отсюда следует доказываемое утверждение.

§ 2.4. Доказательство теорем 2.1.1 - 2.1.3.

Обозначим через $W_2=\Gamma\cup A\cup L\cup \mathcal{J}_3\cup Z_1\cup B$. Из предложений 2.1.1, 2.1.2 и лемм 2.2.1 - 2.2.4, 2.3.1 - 2.3.12 вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.4.1.

а) S - множество $\mathfrak{M}$ является S - предполным тогда и только тогда, когда для некоторого предиката R из W_2 имеет место $S(R)=\mathfrak{M}$;

б) для предикатов R_1 и R_2 из W_2 равенство $S(R_1)=S(R_2)$ эквивалентно соотношению $U(R_1)=U(R_2)$.

Для доказательства теорем 2.1.1 и 2.1.2 нам понадобится следующая

Лемма 2.4.1. Существует взаимно-однозначное соответствие между предикатами семейств $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_3$, при котором S - множества, являющиеся множествами сохранения соответствующих предикатов, совпадают.

Доказательство. Пусть $R_1\in\mathcal{J}_3$ и является элементарным, то есть определяется тройкой (h,m,φ).

Рассмотрим предикат R_2, $R_2\in\mathcal{J}_1$, истинный в тех и только тех точках (a,b), для которых в разложениях чисел a и b по степеням h имеет место $[a]_\ell\neq[b]_\ell$ при любом $\ell=0,1,\dots,m-1$. Используя лемму 2.3.3, легко получаем, что $S(R_1)\subseteq S(R_2)$. Так как в силу предложения 2.4.1, $S(R_1)$ является S - предполным S - множеством и, с другой стороны, очевидно, $S(R_2)\neq SP_k$, то $S(R_1)=S(R_2)$.

Далее нетрудно видеть, что для любой подстановки $\sigma(x)$, $\sigma(x)\in P_k$ имеет место $S(\sigma(R_1))=S(\sigma(R_2))$.

Сопоставим предикату R_1 предикат R_2 и для любой подстановки $\sigma(x)$ из P_k сопоставим предикату $\sigma(R_1)$ предикат $\sigma(R_2)$. Поступая аналогично для каждого h', $h'\geqslant 5$, такого, что $(h')^{m'}=k$ получим, очевидно, утверждение леммы.

Доказательство теорем 2.1.1 и 2.1.2 теперь немедленно следует из предложения 2.4.1 и леммы 2.4.1. Для доказательства теоремы 2.1.3 воспользуемся тем, что, как показано в [ ], для любых предикатов R_1 и R_2 из разных семейств $\Gamma, A, L, \mathcal{J}, Z_1$ имеет место $U(R_1)\neq U(R_2)$; далее, если $R_1,R_2\in Z_1\cup A\cup\mathcal{J}$, то при $R_1 \neq R_2$ имеет место $U(R_1) \neq U(R_2)$; если $R_1, R_2 \in \Gamma$, то $U(R_1) = U(R_2)$ в том и только том случае, когда $R_1 \sim R_2$; если $R_1, R_2 \in L$, то $U(R_1) = U(R_2)$ тогда и только тогда, когда $R_1 \approx R_2$. Отсюда из лемм 2.2.1 - 2.2.4, 2.3.1 - 2.3.12, 2.4.1, очевидно, вытекает справедливость теоремы 2.1.3.

§ 2.5. Доказательство теорем 2.1.4 и 2.1.5.

Из теоремы 2.1.3 и определений семейств $\Gamma, A, L, \mathcal{J}_1, \mathcal{Z}_1, B$ вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.5.1. Справедливо следующее:

а) любой предикат R из $\mathcal{Z}_1$ является нормальным;

б) для любого одноместного предиката R, такого что $S(R) \neq SP_k$, и любого предиката R_1 из $W_1 \setminus \mathcal{Z}_1$ имеет место $S(R_1) \not\subseteq S(R)$.

Лемма 2.5.2. Пусть $R \in A$, тогда если $R(a,b) = R(c,d) = 1$, $a \neq b$, $c \neq d$, то в $S(R)$ найдется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что $f(a, a, \dots, a) = c$ и $f(b, b, \dots, b) = d$.

Доказательство. Пусть с предикатом R связано разбиение $E_k = E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^\ell$, $1 < \ell < k$. Задание разбиения равнозначно заданию отношения эквивалентности на E_k. Пусть $n > 1$, распространим наше отношение эквивалентности на множество всех наборов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in E_k$, следующим образом: наборы $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ эквивалентны, если для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ a_i и b_i эквивалентны относительно описанной выше эквивалентности на E_k. Ясно, что множество всех наборов распадается на классы эквивалентности и что любая функция, значения которой на наборах одного и того же класса эквивалентности принадлежат, в свою очередь, одному и тому же классу эквивалентности на E_k, сохраняет предикат R. Учитывая это, определим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пусть $f(a, a, \dots, a) = c$, $f(b, b, \dots, b) = d$. На остальных наборах, эквивалентных набору $(a, a, \dots, a)$, доопределим функцию так, чтобы она приняла все значения, эквивалентные c и только их. Затем выбираем набор $\mathcal{E} = (e, e, \dots, e)$, не эквивалентный $(a, a, \dots, a)$, и определяем f на наборах, эквивалентных набору $\mathcal{E}$ так, чтобы она приняла все значения эквивалентные e и только их, и так далее, пока не рассмотрим всех наборов вида $(g, g, \dots, g)$. На оставшихся наборах функцию f доопределим так, чтобы она приняла все значения, эквивалентные a и только их. Ясно, что выбирая n достаточно большим, нашу процедуру можно сделать корректной. Нетрудно видеть, что функция f сохраняет R и удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.5.3. Пусть $R \in \mathcal{J}_1$, тогда если $R(a,b) = R(c,d) = 1$, $a \neq b$, $c \neq d$, то в $S(R)$ найдется функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такая, что $f(a, a, \dots, a) = c$ и $f(b, b, \dots, b) = d$.

Доказательство. Без ограничения общности можно, очевидно, считать, что область истинности R состоит из всех пар (e, f) таких, что в разложениях

$e = \sum_{l=0}^{m-1} [e]_l h^l$ и $f = \sum_{l=0}^{m-1} [f]_l h^l$ будет иметь место $[e]_l \neq [f]_l$ для всех l, и только из них.

Рассмотрим подстановку $\tau(x)$ из $S(R)$, векторная запись которой $\vec{\tau}(\vec{x}) = ([\tau]_0, [\tau]_1, \ldots, [\tau]_{m-1})$ такова, что $[\tau]_i$ зависит от $[x]_i$ и $[\tau]_i([a]_i) = [c]_i$, $[\tau]_i([b]_i) = [d]_i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Нетрудно видеть, что $\tau(a) = c$ и $\tau(b) = d$. Лемма доказана.

Лемма 2.5.4. Пусть $R \in \Gamma$, тогда если $R(a,b) = R(c,d) = 1$ и $a \neq b$, $c \neq d$, то в $S(R)$ найдется функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такая, что $f(a, a, \ldots, a) = c$ и $f(b, b, \ldots, b) = d$.

Доказательство. Пусть область истинности предиката есть график подстановки τ. Наборы $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ назовем эквивалентными, если существует такое m, что $b_i = \tau^m(a_i)$ для всех i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, введенное отношение обладает всеми свойствами эквивалентности, поэтому множество всех n-местных наборов распадается на классы эквивалентности, причем, если r – наименьшее такое, что $\tau^r(x) = x$, то для каждого набора α класс ему эквивалентных наборов содержит только α, $\tau(\alpha)$, $\tau^2(\alpha)$, $\ldots$, $\tau^{r-1}(\alpha)$, где $\tau^i(\alpha) = (\tau^i(a_1), \tau^i(a_2), \ldots, \tau^i(a_n))$, $i = 1, 2, \ldots r-1$. Отсюда вытекает, что каждая функция f из $U(R)$ полностью определяется заданием ее на каком-нибудь представителе каждого класса эквивалентности. Ясно также, что значения на выбранных по одному из разных классов представителях могут определяться произвольно. Учитывая это, определим функцию $f(x)$. Пусть $f(a) = c$, $f(b) = d$, в каждой точке $\tau^i(a)$ положим функцию f равной $\tau^i(c)$. Затем выбираем число e, не эквивалентное e, и определяем f на e так, чтобы $f(e)$ не было эквивалентно c и для каждого i имело место $f(\tau^i(e)) = \tau^i(f(e))$. Затем выбираем число g, не эквивалентное числам a и e, и определяем f на g так, чтобы $f(g)$ не было эквивалентно c и $f(e)$, а для каждого i имело бы место $f(\tau^i(g)) = \tau^i(f(g))$. Так поступаем до тех пор, пока не рассмотрим всех классов эквивалентности на E_k. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что, очевидно, f является подстановкой и сохраняет R. Лемма доказана.

Очевидно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.5.5. Если $R^*(a,b) = R^*(c,d) = 1$, $a \neq b$, $c \neq d$, то в $S(R)$ найдется подстановка $\tau(x)$, такая, что $\tau(a) = c$, $\tau(b) = d$.

Лемма 2.5.6. Пусть $k = p^m$ и $R_a \in L_1$, тогда для любого двухместного, а при $p = 2$ для любого трехместного предиката R_1, такого, что $S(R_1) \geq S(R_a)$, имеет место $S(R_1) = SP_k$.

Доказательство. Пусть сначала R_1 – двухместный предикат. В силу леммы 2.5.1 можно, очевидно, считать, что существует разнозначный набор (a, b) такой, что $R_1(a, b) = 1$. Как отмечалось в доказательстве леммы 2.2.4, $S(R_a)$ содержит для любых c и d таких, что c отлично от нуля элементарной p-

группы $G=\langle E_k,+\rangle$, подстановку $c\cdot x+d$. Отсюда, в предположении, что $S(R_1)\supseteq S(R_G)$, очевидно, получаем, что для любой пары (e,f), такой, что $e\neq f$, можно так подобрать числа c и d, что $c\cdot a+d=e$ и $c\cdot b+d=f$. Далее, так как $x+y\in S(R_G)$ и $pa=\underbrace{a+a\cdots+a}_{p\ \text{раз}}=0$ для любого a, где 0 – ноль группы G, то $R_1=1$, то есть $S(R_1)=SP_k$. Рассмотрим тепер случай, когда $p=2$ и предикат R_1 является трехместным. Так же как и выше, предполагая, что $S(R_1)\supseteq S(R_G)$, нетрудно видеть, что для любого набора (a,a,a) имеет место $R_1(a,a,a)=1$.

Выберем в G базис $e_0,e_1,\ldots,e_{m-1}$ и так же как в доказательстве леммы 2.3.4, функцию $f\in U(R_G)$ представим в виде $\vec{f}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,\vec{x}_n)=\vec{q}+\vec{x}_1A_1+\cdots+\vec{x}_nA_n$. Заметим теперь, что, очевидно, для любой пары столбцов из матрицы T над E_2, $2\geq 2$,

$$T=\begin{bmatrix}\alpha & \gamma & \nu\\ \alpha & \beta & \varepsilon\\ \beta & \delta & \nu\end{bmatrix},$$

где $\alpha\neq\beta$, $\gamma\neq\delta$, $\varepsilon\neq\nu$, если $2=2$, то можно подобрать такую линейную функцию из P_2, которая на этой паре столбцов в качестве значения примет любой столбец с двумя значениями 0 или 1 высоты три. Учитывая это, рассмотрим следующие два случая.

i) Существует разнозначный набор (a,b,c), такой, что $R_1(a,b,c)=1$. Это означает, что в матрице

$$T'=\begin{bmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{m-1}\\ \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{m-1}\\ \xi_0 & \xi_1 & \ldots & \xi_{m-1}\end{bmatrix},$$

где $\vec{a}=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1})$, $\vec{b}=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{m-1})$, $\vec{c}=(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{m-1})$, найдутся, по крайней мере, два столбца, принадлежащие некоторой матрице T. Пусть они стоят на местах u и v в матрице T'. Выберем теперь произвольную матрицу T'' над E_2

$$T''=\begin{bmatrix}\gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_{m-1}\\ \delta_0 & \delta_1 & \ldots & \delta_{m-1}\\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{m-1}\end{bmatrix}.$$

Используя матрицы T' и T'' построим такую функцию из $S(R_1)$, которая на матрице, столбцами которой являются столбцы вида (z,z,z) и столбец (a,b,c) примет в качестве значения столбец (g,d,e), векторная запись которого совпадает с T''. Пусть для определенности в матрице T' на местах u и v стоят столбцы (α_u,β_u,ξ_u) и (α_v,β_v,ξ_v), такие что $\alpha_u=\beta_u\neq\xi_u$, $\alpha_v\neq\beta_v=\xi_v$. Обозначим через $\langle y\rangle_i$ i-ый коэффициент в разложении y по базису $e_0,e_1,\ldots,e_{m-1}$ и рассмотрим функцию $f(x_0,x_1,\ldots,x_m)$, такую, что

$$\vec{f}(\vec{x}_0,\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m)=(\langle f\rangle_0,\langle f\rangle_1,\ldots,\langle f\rangle_{m-1}),$$

где $<f>_i = \varphi_i(<x_0>_u, <x_0>_v) + <x_{i+1}>_0$, φ_i – линейная функция из P_2, такая что

$$\varphi_i \begin{bmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \\ \xi_u & \xi_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix},$$

$i = 0, 1, \ldots, m-1$. Нетрудно видеть, что $f \in S(R_1)$ и

$$f \begin{bmatrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ b & 0 & \ldots & 0 \\ c & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ d \\ e \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $R_1 \equiv 1$ и $S(R_1) = SP_k$

ii) Не существует разнозначного набора (a , b , c), такого что R_1(a , b , c) = 1. Тогда нетрудно видеть, что если R_1 существенно зависит от каждого из переменных, то найдутся два столбца из некоторой матрицы T над E_k, которые принадлежат области истинности R_1 . Пусть этими столбцами являются для определенности (q , q , s) и (t , l , l) где $q \neq s$, $t \neq l$. Нетрудно видеть, что найдутся такие u и v , $0 \leq u, v \leq m-1$, что $<q>_u \neq <s>_u$ и $<t>_v \neq <l>_v$. Зафиксируем два таких значения u и v и рассмотрим функцию h(x_0, x_1, ..., x_{m-1}), такую что $\underline{h}(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{m-1}) = (<h>_0, <h>_1, \ldots, <h>_{m-1})$, где $<h>_i = \psi_i(<x_0>_u, <x_1>_v) + <x_{i+2}>_0$ и ψ_i – линейная функция из P_2 , такая что

$$\psi_i \begin{bmatrix} <q>_u & <t>_v \\ <q>_u & <l>_v \\ <s>_u & <l>_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix},$$

здесь, как и выше, правый столбец берется из матрицы T'', $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Нетрудно видеть, что $h \in S(R_1)$ и

$$h \begin{bmatrix} q & t & 0 & \ldots & 0 \\ q & l & 0 & \ldots & 0 \\ s & l & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ d \\ e \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $R_1 \equiv 1$ и $S(R_1) = SP_k$. Лемма доказана.

Лемма 2.5.7. Любой предикат R_G из L является нормальным.

Доказательство. В силу леммы 2.5.6 нам достаточно установить, что $S(R_G)$, где $G = <E_k, +>$, не сохраняет никакого предиката R , область истинности которого есть собственное подмножество области истинности предиката R_G . Здесь возможны два случая, когда в выражении $k = p^m$ имеет место $p = 2$ и $p \neq 2$.

Предположим, что $S(R_G)$ сохраняет указанный предикат R и рассмотрим два случая.

а) Случай $p \neq 2$. При сделанных предположениях предикат R должен быть, очевидно, истинным на некотором разнозначном наборе (a , b , c). Покажем, что для всякого набора (d , e , f), такого что R_G(d , e , f) = 1 будет иметь место $R(d, e, f) = 1$. Для набора (d, e, f) в силу определения R_G имеются только две возможности. Первая, когда $d = e = f$ и вторая, когда d, e, f попарно различные. То, что $R(d, d, d) = 1$, следует из того, что $x_1 + x_2 + \dots + x_p \in S(R_G)$ и из того, что $pg = 0$ для любого g, $g \in E_k$, где 0 – ноль группы G.

Пусть d, e, f попарно различные и для определенности a и b отличны от нуля. Как отмечалось при доказательстве леммы 2.5.6, можно так подобрать отличие от нуля h и i, что для подстановки $h \cdot x + i$ будет иметь место $h \cdot a + i = d$ и $h \cdot b + i = e$. Далее из определения R_G вытекает, что для всякой пары (u, v) найдется единственное w, такое, что $R_G(u, v, w) = 1$. Отсюда следует, что $h \cdot c + i = f$. Таким образом, область истинности совпала с областью истинности R_G. Полученное противоречие исчерпывает рассмотрение случая $p \neq 2$.

б) Случай $p = 2$. Обозначим через Π_1, Π_2, Π_3 множества всех столбцов вида $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$, $(\alpha, \beta, \alpha, \beta)$ и $(\alpha, \beta, \beta, \alpha)$ соответственно, $\alpha, \beta \in E_k$. Так как $S(R_G)$ содержит все подстановки вида $a \cdot x + b$, то вместе с каждым представителем из Π_i таким, что $\alpha \neq \beta$, $i = 1,2,3$, область истинности R должна содержать все Π_i. Далее из того, что $x_1 + x_2 \in S(R_G)$, легко следует, что вместе с представителями из семейств Π_{i_1} и Π_{i_2}, такими, что $\alpha \neq \beta$, $i_1 \neq i_2$, область истинности должна содержать представителя из Π_{i_3}, $i_3 \neq i_1$, $i_3 \neq i_2$. Рассмотрим следующие два подслучая:

1) $k = 2$. В этом случае область истинности R_G совпадает с $\Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Pi_3$. Нетрудно видеть, что область истинности R при сделанных предложениях должна содержать по представителю из семейств Π_{i_1} и Π_{i_2} и, в силу сказанного, совпадать с областью истинности R_G. Полученное противоречие исчерпывает рассмотрение случая.

2) $k > 2$. В этом случае область истинности предиката $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$ содержит семейства Π_1, Π_2, Π_3 и некоторые разнозначные наборы. Рассмотрим трехместный предикат $R'(y_1, y_2, y_3)$, область истинности которого получается из области истинности предиката R после проектирования ее на гиперплоскость (y_1, y_2, y_3). Ясно, что матрица, столбцами которой являются все точки (a, b, c), такие что $R'(a, b, c) = 1$, не имеет одинаковых строк и что $S(R') \supseteq S(R)$. В силу леммы 2.5.6, $R' \equiv 1$ и поэтому, в частности, $R'(d, d, e) = R'(d, e, d) = R'(e, d, d) = R'(e, d, f) = 1$, где $e \neq d$, $e \neq f$, $d \neq f$. Отсюда с учетом изложенного выше, симметрии R_G и того, что для всякой тройки (g, h, e) найдется единственный элемент z, такой, что $R_G(g, h, e, z) = 1$, очевидно, следует, что область истинности R совпадает с областью истинности R_G. Полученное противоречие исчерпывает случай. Лемма доказана.

Доказательство теорем 2.1.4 и 2.1.5 легко следует из лемм 2.5.1 и 2.5.7.

§ 2.6. Доказательство теорем 2.1.6 и 2.1.7

По аналогии с § 1.4 введем обозначение $S(Q)$ для множества всех S-предполных S-множеств, являющихся классами сохранения предикатов из Q, где $Q \subseteq W$. Как отмечалось в § 1, в $S(\Gamma)$ не более $k!$ классов и не более $\log_2 k$ типов. В множестве $S(A)$ содержится столько S-предполных S-классов, сколько существует нетривиальных отношений эквивалентности на E_k. Как известно, это число равно $k^{k(1-\varepsilon(k))}$, где $\varepsilon(k)>0$, $\varepsilon(k)=O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right)$.

Далее, нетрудно видеть, что в $S(A)$ число типов асимптотически совпадает с числом всевозможных различных представлений k в виде суммы натуральных слагаемых. Как показано в [28], это число асимптотически равно $\frac{1}{4k\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}k}}$. Каждый предикат из L, как отмечалось, однозначно задается указанием абелевой группы, каждый ненулевой элемент которой имеет при $k=p^m$ один и тот же простой порядок p. Все эти группы изоморфны и потому их число не превосходит $k!$. Значит, в $S(L)$ не более $k!$ элементов и всего I тип. В множестве $S(J_1)$ каждый элемент задается тройкой (h, m, φ). Так как h может принимать не более $\log_2 k$ значений, а для выборов φ имеется $k!$ возможностей, то в $S(J_1)$ имеется не более $(\log_2 k)\cdot k!$ элементов и $\log_2 k$ типов. В множестве $S(Z_1)$ имеется 2^k-2 элементов и k типов. Множество $S(B)$ имеет один тип и один элемент. Собирая полученные оценки, получим утверждения теорем 2.1.6 и 2.1.7.

§ 2.7. Число S-предполных S-множеств при малых k

Оценим эффективность критериев S-полноты, формулируемых в терминах S-предполных S-множеств, для малых k. Детальное изучение S-предполных S-множеств позволяет составить таблицу 2. Из этой таблицы видно, что критерии S-полноты в терминах S-предполных S-множеств практически приемлемы при $k\le 6$ и мало обозримы при $k>6$, а в терминах типов S-предполных S-множеств соответственно при $k\le 10$ и при $k>10$. В таблице нет семейств J_1 и B, так как семейство J_1 пусто для $k<25$, а семейство B состоит из одного S-предполного S-множества при $k\ge 5$ и пусто при $k\le 4$. В таблице 2 через $S(Q)$ обозначено семейство S-предполных классов, являющихся классами S-сохранения предикатов из Q, $Q\subseteq W$, в клетке с координатами $(i, S(Q))$, $i=2,3,\dots,10$, сверху написано число S-предполных классов в $S(Q)$, а снизу - число классов эквивалентности, на которые разбивается множество $S(Q)$ отношением двойственности.

Сравнение таблиц 1 и 2 позволяет заметить, что порог практического использования критерия полноты повышается с $k=6$ для произвольных систем в терминах типов предполных классов до $k=9,10$ для S-систем в терминах типов S-предполных S-классов.

Таблица 2.

$S(Q)$ \ K	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(\Gamma)$	1 1	1 1	3 1	6 1	35 2	120 1	105 1	1120 1	19689 2
$S(A)$	0 0	3 1	13 3	50 6	201 13	875 26	4138 53	21145 106	234163 133
$S(L)$	1 1	1 1	1 1	6 1	0 0	120 1	30 1	840 1	0 0
$S(Z_1)$	2 1	6 2	14 3	30 4	62 5	126 6	254 7	510 8	1022 9
общее число	4 3	11 5	31 8	92 11	298 16	1241 21	4527 62	23615 116	238146 144

§ 3. Критерий близости групп подстановок в P_K.

Специальным случаем исследования на полноту S - систем является задача об описании базисных групп подстановок в P_K. Группа Π подстановок из P_K называется базисной, если она вместе с любой существенной функцией образует полную систему. Известно [13], что при $K \leq 4$ в P_K нет базисных групп а при любом $K \geq 5$ они существуют. А.Саломаа в работе [33] провел первое исследование, связанное с выяснением условий, достаточных для того, чтобы группа была базисной. Им, в частности, показано, что всякая четырежды транзитивная а при $K \neq 2^m$ всякая трижды-транзитивная группа являются базисными. А позже в работе [29] для $K \neq h^m$, $h > 1$, $m > 1$, а также для простых K сформулированы необходимые и достаточные условия базисности групп подстановок. Используя результаты § 2, мы приведем описание базисных групп при любых $K \geq 5$.

§ 3.1. Основные понятия и результаты.

Пусть $R(y_1, y_2, \dots, y_h)$ - h- местный предикат. Обозначим через $\Pi(R)$ множество всех подстановок из P_K, $K \geq 5$, сохраняющих R. Рассмотрим четыре специальных семейства предикатов.

Семейство A_1. Это семейство не пустое только при составном K. Пусть t - делитель K, $t \neq 1$, $t \neq K$. Рассмотрим разбиение $E_K = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(K/t)}$, где $E^{(i)} \cap E^{(j)} = \emptyset$ при $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, K/t$; и мощности компонент $E^{(i)}$ равны t. Пусть $R(y_1, y_2)$ - предикат истинный в точках (a, b), таких, что $a \neq b$ и для некоторого i имеет место $\{a, b\} \subseteq E^{(i)}$; и ложный в остальных точках. Семейство A_1 для каждого t содержит предикат R (y_1, y_2), все ему изоморфные и только их.

Семейство L_1. Это семейство не пусто только при $K = p^m$, где p - простое и $p \geq 2$. Пусть $K = p^m$ и $G = \langle E_K, + \rangle$ - абелева группа, в которой ненулевой элемент имеет простой порядок p.

При $p = 2$ рассмотрим предикат R_G (y_1, y_2, y_3, y_4), истинный в тех и только тех точках, для которых $y_1+y_2=y_3+y_4$ и $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$, $i,j=1,2,3,4$. При указанном p семейство L_1 содержит для каждой описанной группы G предикат $R_G(y_1, y_2, y_3, y_4)$, все изоморфные ему предикаты и только их.

При $p \neq 2$ рассмотрим предикат $R_G(y_1, y_2, y_3)$, истинный в тех и только тех точках, для которых $y_3 = 2^{-1}\cdot(y_1+y_2)$, где 2^{-1} – такое число из E_p, для которого $2\cdot 2^{-1} \equiv 1 (mod\, p)$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$, $i,j=1,2,3$. При указанном p семейство L_1 содержит для каждой описанной группы G предикат $R_G(y_1, y_2, y_3)$, все изоморфные ему предикаты и только их.

Семейство Z_2. Пусть задано натуральное число r, $1 \leq r < [\frac{K}{2}]$, $r \neq \frac{K}{2}$, и выбрано подмножество $\{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq E_K$. Семейство Z_2 для каждого r содержит предикат $R(y)$, область истинности которого состоит из точек i_1, $i_2, \dots$, i_r, все ему изоморфные предикаты и только их.

Обозначим через $W_2 = A_1 \cup L_1 \cup J_1 \cup Z_2$.

Имеет место следующая

Теорема 3.1.1. При $K \geq 5$ группа подстановок Π из P_K является базисной тогда и только тогда, когда она не сохраняет ни одного предиката из W_2.

Замечание 3.1.1. Описание базисных групп подстановок упрощается при $K=p$, p – простое, или при $K \neq h^m$, $h>1$, $m>1$. Так, в случае $K=p$, $p \geq 5$, группа подстановок Π является базисной тогда и только тогда, когда она не сохраняет ни одного предиката из множества $L_1 \cup Z_2$. В случае, когда $K \geq 5$, $K \neq h^m$, $h>1$, $m>1$, группа является базисной тогда и только тогда, когда она не сохраняет ни одного предиката из множества $A_1 \cup Z_2$.

Замечание 3.1.2. Для любых предикатов R_1 и R_2 из разных семейств A_1, L_1, J_1, Z_2 имеет место $\Pi(R_1) \notin \Pi(R_2)$.

Имеет место следующее утверждение, которое проще по форме, но менее точно, чем теорема 3.1.1.

Теорема 3.1.2. При $K \geq 5$ группа подстановок является базисной, если она:

1) 4-транзитивная при $K=2^m$, $m>2$;
2) 3-транзитивная при $K=p^m$, p – простое, $p \geq 3$, $m \geq 1$;
3) 2-транзитивная при $K \neq p^m$, p – простое, $m \geq 1$.

Степень транзитивности при указанных K не может быть понижена.

§ 3.2. Доказательство теоремы 3.1.1.

Покажем, что для любого предиката R из множества $W_3 = \Gamma \cup A \cup L \cup J_1 \cup Z_1$ S – множество $S(R)$ содержит как существенную функцию так и некоторую подстановку. В самом деле, $S(R)$, очевидно, содержит подстановку $\sigma(x)=x$. Далее, S – множество $S(R)$ при $R \in \Gamma \cup A \cup Z_1$ в силу лемм 4.2.1-4.2.3 содержит существенную функцию, при $R \in L$ – имеет место включение $x+y \in S(R)$, где операция сложения "+" берется из группы G, задающей R, и функция $x+y$, очевидно, является существенной; при $R \in \mathcal{Y}_1$, S – множество $S(R)$ содержит существенную функцию в силу леммы 2.3.3. Заметим еще, что $S(R^*)$ состоит из всех подстановок. Из сказанного с учетом теоремы 2.I.I следует, что группа Π является базисной тогда и только тогда, когда она не сохраняет ни одного предиката из W_3. Покажем, что для любого предиката R из W_3 найдется предикат R' из W_2, такой, что $\Pi(R) \subseteq \subseteq \Pi(R')$, отсюда, очевидно, будет вытекать утверждение нашей теоремы. Последнее, очевидно, выполнено для семейств L и $\mathcal{J}_1$. Пусть $R \in \mathcal{Z}_1$, тогда, очевидно, имеет место $\Pi(\rho) = \Pi(E_k \setminus \rho)$. Далее заметим, что если $k = 2\tau$, то для предиката $R(y)$ из $\mathcal{Z}_1$, область истинности которого состоит из τ элементов, то есть $\rho = \{a_1, a_2, \ldots, a_\tau\}$, будет иметь, очевидно, место $\Pi(\rho) \le \Pi(R')$, где $R'(y_1, y_2) \in A_1$ и R' соответствует разбиению

$$E_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_\tau\} \cup \{a_{\tau+1}, a_{\tau+2}, \ldots, a_{2\tau}\}.$$

Таким образом, для каждого предиката R из $\mathcal{Z}_1$ в семействах $\mathcal{Z}_2$ или A_1 найдется предикат R', такой, что $\Pi(R') \geqslant \Pi(R)$. Пусть теперь взят предикат R из семейства A, тогда если ему соответствует разбиение $E_k = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \cdots \cup E^{(s)}$, в котором не все компоненты имеют одну и ту же мощность, то, как показано в работе [30], найдется предикат R' из $\mathcal{Z}_1$ или из A, такой, что $\Pi(R) \subseteq \Pi(R')$, причем, если $R' \in A$, то все компоненты в разбиении, соответствующем предикату R', имеют одну и ту же мощность. Таким образом, можно считать, что для всякого предиката R из A найдется предикат R'' из $\mathcal{Z}_2 \cup A_1$, такой, что $\Pi(R) \subseteq \Pi(R'')$. Пусть теперь $R \in \Gamma$. Возможны следующие два случая. Предположим, что область истинности предиката R есть график подстановки σ, разлагающейся в некоторое число $t > 1$ циклов. Рассмотрим разбиение $E_k = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \ldots \cup E^{(t)}$, в котором каждая компонента $E^{(i)}$ совпадает с множеством элементов, встречающихся в i-м цикле указанной подстановки, $i = 1, 2, \ldots, t$. Возьмем в A_1 предикат R', соответствующий построенному разбиению. Нетрудно видеть, что $\Pi(R) \subseteq \Pi(R')$. Пусть теперь в указанной подстановке оказался один цикл. Тогда, как это отмечалось в [3], класс $\Pi(R)$ содержит только такие подстановки $\tau(x)$, которые являются степенями $\sigma(x)$, при этом $\sigma(x) \in \Pi(R)$. Отметим теперь, что так как в рассматриваемом случае $k = p$, p – простое, $p \geqslant 5$, то в L_1 содержится предикат R', определяемый группой $G = \langle E_k, + \rangle$, где операция "+" является сложением по $\bmod\, p$. Так как $x+1 \in \Pi(R')$, то, как нетрудно видеть, $\sigma(x) \in \in \Pi(\sigma'(R'))$ для некоторой подстановки σ' и тем самым для некоторого R'' из L_1 будет иметь место $\Pi(R'') \geqslant \Pi(R)$. Теорема доказана.

§ 3.3. Доказательство теоремы 3.I.2

Справедливость условий I), 2) и 3) следует из теоремы 3.I.I. Покажем, что степень транзитивности при указанных в теореме 3.I.2 значениях K не может быть понижена. В самом деле, если $K \neq p^m$, p - простое, $m \geq 1$, то только пользуемся тем, что для R из A_1 группа $\Pi(R)$ является I-транзитивной. Если $K = p^m$, p - простое, $p > 2$, то пользуемся 2-транзитивностью группы $\Pi(R)$, если $R \in L_1$. Последнее нами устанавливалось при доказательсве леммы 2.5.6. Пусть $K = 2^m$, $m > 2$ и $R \in L_1$. Выберем в G базис e_0, $e_1, \ldots, e_{m-1}$ и так как и ранее (см. леммы 2.3.4 и 2.5.6) представим подстановку $\sigma(x)$ из $S(R)$ в виде

$$\underset{\to}{\sigma}(\underset{\to}{x}) = (<\sigma>_0, <\sigma>_1, \ldots, <\sigma>_{m-1}),$$

где $<\sigma>_i$ зависит от переменных $<x>_0, <x>_1, \ldots, <x>_{m-1}$; $i = 0, 1, \ldots, m-1$; каждая из которых принимает в качестве значений 0 или I. Отсюда отметим, что для любой пары столбцов из матрицы T над E_2,

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \varepsilon \\ \alpha & \delta & \nu \\ \beta & \delta & \varepsilon \end{bmatrix},$$

где $z \geq 2$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$, $\varepsilon \neq \nu$; , если $z = 2$, то можно подобрать такую линейную функцию из P_2, которая на этой паре столбцов в качестве значений примет любой наперед заданный столбец из нулей и единиц высоты три. Пусть теперь заданы произвольные разнозначные наборы (a, b, c) и (a', b', c'). Покажем, что в $S(R)$ найдется подстановка $\sigma(x)$, такая, что будет иметь место

$$\sigma\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Представим наборы (a, b, c) и (a', b', c') в виде матриц

$$T' = \begin{bmatrix} \underset{\to}{a} \\ \underset{\to}{b} \\ \underset{\to}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{m-1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_{m-1} \\ \xi_0 & \xi_1 & \ldots & \xi_{m-1} \end{bmatrix}$$

и

$$T'' = \begin{bmatrix} \underset{\to}{a'} \\ \underset{\to}{b'} \\ \underset{\to}{c'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_{m-1} \\ \delta_0 & \delta_1 & \ldots & \delta_{m-1} \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что в каждой из этих матриц найдутся, по крайней мере, два столбца, принадлежащие некоторой своей матрице вида T. Пусть в матрице T' они стоят на местах под номерами u' и v', а в матрице T'' - под номерами u'' и v''. Ясно, что в $S(R)$ можно выбрать такую подстановку $\sigma'(x)$, которая при применении к T' может переставить в ней столбцы, таким образом, чтобы столбцы с номерами u' и v' оказались на местах с номерами u'' и v'' соответственно. Поэтому сразу можно считать, что $u'=u''$ и $v'=v''$. Используя матрицы T' и T'', построим указанную подстановку $\sigma(x)$. Пусть для определенности в столбцах $(\alpha_{u''}, \beta_{u''}, \xi_{u''})$ и $(\alpha_{v''}, \beta_{v''}, \xi_{v''})$ имеет место $\alpha_{u''}=\beta_{u''}\neq\xi_{u''}$ и $\alpha_{v''}\neq\beta_{v''}=\xi_{v''}$. Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что в столбце $(\gamma_{u''}, \delta_{u''}, \varepsilon_{u''})$ выполнено $\gamma_{u''}=\delta_{u''}\neq\varepsilon_{u''}$. Далее, нетрудно видеть, что покоординатное сложение по $mod\, 2$ двух любых столбцов из матрицы T' приводит к столбцу, который имеет вид третьего столбца из T'. Учитывая это, определим функции $<\sigma>_i$ следующим образом. При $i=u''$

$$\sigma_{u''}(<x>_{u''}) = <x>_{u''} + a_{u''} \pmod 2,$$

где $a_{u''}$ выбрано так, чтобы выполнялось соотношение

$$<\sigma>_{u''}\begin{bmatrix}\alpha_{u''}\\ \beta_{u''}\\ \xi_{u''}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_{u''}\\ \delta_{u''}\\ \varepsilon_{u''}\end{bmatrix}.$$

При $i=v''$ $\sigma_{v''}(<x>_{u''}, <x>_{v''}) = a_{v''}<x>_{u''}+<x>_{v''}+c_{v''} \pmod 2$, где $a_{v''}=0$, если в столбце $(\gamma_{v''}, \delta_{v''}, \varepsilon_{v''})$ выполнено $\gamma_{v''}\neq\delta_{v''}=\varepsilon_{v''}$ и $a_{v''}=1$, если $\gamma_{v''}=\varepsilon_{v''}\neq\delta_{v''}$, а $c_{v''}$ выбрано так, чтобы выполнялось соотношение

$$<\sigma>_{v''}\begin{bmatrix}\alpha_{u''} & \alpha_{v''}\\ \beta_{u''} & \beta_{v''}\\ \xi_{u''} & \xi_{v''}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_{v''}\\ \delta_{v''}\\ \varepsilon_{v''}\end{bmatrix}.$$

Пусть для определенности $u''<v''$

При $i\in\{u'', v''\}$ $\sigma_i(<x>_{u''}, <x>_{v''}, <x>_i) = a_i<x>_{u''} + b_i<x>_{v''} + <x>_i + c_i \pmod 2$, где a_i, b_i, c_i выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$<\sigma>_i\begin{bmatrix}\alpha_{u''} & \alpha_{v''} & \alpha_i\\ \beta_{u''} & \beta_{v''} & \beta_i\\ \xi_{u''} & \xi_{v''} & \xi_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_i\\ \delta_i\\ \varepsilon_i\end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что выбор указанных у коэффициентов возможен, что построенная функция $\sigma(x)$ является подстановкой из $S(R)$ и

$$\sigma\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a'\\ b'\\ c'\end{bmatrix}.$$

Теорема 3.1.2 тем самым доказана.

Перейдем к рассмотрению замечания 3.1.2. Известно, что если $R_1\in A_1\cup Z_2$, то $\Pi(R_1)$ – максимальная подгруппа подстановок и для R_2 из $A_1\cup Z_2$ имеет место $\Pi(R_1)\subseteq\Pi(R_2)$, если $R_1\neq R_2$ [30]. Отсюда с учетом построений, используемых в леммах 2.3.8 – 2.3.12, а также того, что при $R \in L_1$ группа $\Pi(R)$ является дважды транзитивной получаем, что если R_1 и R_2 из разных семейств, то $\Pi(R_1) \not\subseteq \Pi(R_2)$

По аналогии с понятием предполного класса можно ввести понятие предбазисной группы подстановок. Группа подстановок G называется предбазисной, если G не является базисной, но всякая группа подстановок G', содержащая G и отличная от G, является базисной. Пусть Δ – множество всех предбазисных групп в P_k, тогда группа подстановок является, очевидно, базисной тогда и только тогда, когда она не является подгруппой ни одной группы из Δ. Тем самым задача об описании базисных групп сводится в указанном смысле к описанию всех предбазисных групп. Из теоремы 3.I.I следует, что множество $\Pi(W_2) = \{\Pi(R) : R \in W_2\}$ содержит все предбазисные группы, при этом, в силу замечания 3.1.2, для $Q_1, Q_2 \in \{A_1, L_1, \mathcal{J}_1, \mathcal{Z}_2\}$, если $Q_1 \neq Q_2$, то классы $\Pi(Q_1) = \{\Pi(R) : R \in Q_1\}$ и $\Pi(Q_2) = \{\Pi(R) : R \in Q_2\}$ не пересекаются. Таким образом, об эффективности критерия полноты систем, состоящих из подстановок и образующих полную систему при добавлении к ним любой существенной функции, можно судить по числу $\pi_2(k)$ предбазисных групп в P_k и по числу $\varkappa_2(k)$ классов двойственности типов группы подстановок. Асимптотическое поведение величины $\pi_2(k)$ существенно зависит от вида k, а само значение $\pi_2(k)$ как нетрудно убедиться, удовлетворяет соотношению $2^{[\frac{k}{2}]} \leq \pi_2(k) \leq k!(\log_2 k + 3)$. Для величины $\varkappa_2(k)$, очевидно, имеем $\varkappa_2(k) \sim [\frac{k}{2}]$, причем $[\frac{k}{2}] \leq \varkappa_2(k) \leq [\frac{k}{2}] + \log_2 k + \tau(k)$, где $\tau(k)$ – число делителей числа k; известно [16], что $\tau(k) = O(k^{\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$.

. В таблице 3 через $\Pi(Q)$ обозначено семейство всех групп, каждая из которых является множеством всех подстановок сохраняющих заданный предикат из Q, $Q \in \{A_1, L_1, \mathcal{J}_1, \mathcal{Z}_2\}$. В клетке с координатами $(i, \Pi(Q))$, $i = 5, 6, \ldots, 11$ сверху написано число элементов в $\Pi(Q)$, а снизу – число классов эквивалентности, на которые разбиваются множества $\Pi(Q)$ относительно двойственности. В таблице 3 отсутствует семейство $\Pi(\mathcal{J}_1)$, которое при $k < 25$ является пустым.

Таблица 3.

$\Pi(Q)$ \ k	5	6	7	8	9	10	11	100	120	200
$\Pi(A_1)$	0	25	0	140	280	1071	0			
	0	2	0	2	2	2	0			
$\Pi(L_1)$	63	0	120	30	840	0	362880			
	1	0	1	1	1	0	1			
$\Pi(\mathcal{Z}_2)$	15	41	63	162	255	385	1028			
	2	3	3	4	4	5	5			
Общее	21	66	183	332	1375	1456	363903			
число	3	5	4	7	6	7	6	57	85	109

Из этой таблицы видно, что критерии полноты в терминах предбазисных групп практически приемлемы при $k \leq 7$ и мало обозримы при $k > 7$, а в терминах типов предбазисных групп соответственно приемлемы при $k \leq 200$. Сопоставление таблиц 2 и 3 показывает естественное повышение эффективности последнего критерия.

§ 4. Критерий шефферовости функций в P_k

Другим специальным случаем исследования на полноту S - систем является задача о полноте систем, состоящих из одной функции. Такого рода системы исторически начали исследоваться на полноту одними из первых. Шеффером [11] был приведен пример функции в P_2, которая уже одна представляла пример полной системы. Учитывая это, функцию f из P_k называют шефферовой, если для нее выполняется соотношение $[\{f\}] = P_k$. Существует целая серия работ [11,14, 31,32-36], посвященных исследованию вопроса о том, когда заданная функция f является шефферовой. В большинстве из указанных работ найдены условия, при которых функция из P_k являлась шефферовой, фактически сводились к указанию тех множеств предполных классов, непринадлежность к которым давала возможность функции f быть шефферовой. В этом параграфе мы дадим полное описание всех систем предполных классов, непринадлежность к которым является критерием того, что функция f оказываетчя шефферовой. Такие системы предполных классов назовем шефферовыми.

§ 4.1. Основные понятия и результаты

Пусть $U(W) = \{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_q\}$ и $\mathcal{U} \subseteq U(W)$. Обозначим через $|\mathcal{U}|$ множество всех функций из P_k, входящих хотя бы в один из предполных классов множества $\mathcal{U}$. Множество $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subseteq U(W)$, назовем покрытием множества $U(W)$, если $|\mathcal{U}| = |U(W)|$. Нетрудно видеть, что функция f из P_k является шефферовой тогда и только тогда, когда для некоторого покрытия $\mathcal{U}$ множества $U(W)$ имеет место $f \notin |\mathcal{U}|$. Таким образом, совокупность $\mathcal{T}$ всех покрытий множества $U(W)$ исчерпывает шефферовы системы предполных классов. Описание $\mathcal{T}$ получается из следующей теоремы.

Теорема 4.1.1. Подмножество $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subseteq U(W)$, является покрытием множества $U(W)$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{U} \supseteq U(\Gamma) \cup U(A) \cup U(Z_1).$$

Таким образом, множество $\mathcal{T}$ состоит из всевозможных подмножеств множества $U(W)$, содержащих $U(\Gamma)$, $U(A)$ и $U(Z_1)$, тем самым "простейший" шефферовой системой является множество

$$\Phi = U(\Gamma) \cup U(A) \cup U(Z_1).$$

§ 4.2. Доказательство вспомогательных утверждений

В этом параграфе будут доказаны три леммы, которые условно использовались также при рассмотрении задачи об S - полноте. Ниже при рассмотрении семейства L будут использоваться 4-местные предикаты, взятые в форме, соответствующей случаю, когда $k = 2^m$.

Лемма 4.2.1. Пусть $\mathcal{N} \in U(\mathfrak{Z}_1)$, тогда в $\mathcal{N}$ найдется функция f, не принадлежащая остальным предполным классам из $U(W)$.

Доказательство. Мы покажем, что f можно выбирать таким образом, чтобы она не сохраняла ни одного предиката из W, кроме тех, которые описывают класс $\mathcal{N}$. Заметим, что в рассматриваемом случае одноместный предикат R из W такой, что $U(R)=\mathcal{N}$, находится однозначно и его область истинности является отношением

$$\rho = (i_0, i_1, \dots, i_r), \quad i_j \in E_k, \quad 0 \leqslant r < k-1 .$$

Для простоты положим, что $i_j = j$, $j = 0, 1, \dots, r$.

Рассмотрим матрицы $T_1, T_2, \dots, T_s$, элементы которых принадлежат E_k и каждая из которых имеет n столбцов. Матрицы $T_3, T_4, \dots, T_s$ имеют $k-r-1$ строк. Число n выберем позже.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ r & \dots & r \end{bmatrix}; \qquad T_2 = \begin{bmatrix} r+1 & \dots & r+1 \\ r+2 & \dots & r+2 \\ \vdots & & \vdots \\ k-1 & \dots & k-1 \end{bmatrix};$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} r+1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & r+1 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r+1 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad T_4 = \begin{bmatrix} r+2 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & r+2 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r+2 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_s = \begin{bmatrix} k-1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & k-1 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k-1 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $M = \{R_{11}, R_{21}, \dots, R_{r_1 1}\}$, построим матрицу T_{s+1}:

$$T_{s+1} = \begin{pmatrix} \boxed{\rho_{11}} & 0 & \dots & & 0 \\ & 0 & \dots & & 0 \\ 0 \dots 0 & \boxed{\rho_{21}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 \dots 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & 0 & \boxed{\rho_{r_1 1}} \\ 0 & \dots & & 0 & \end{pmatrix}$$

Аналогично, пусть $\Gamma = \{R_{12}, R_{22}, \dots, R_{r_2 2}\}$, $L = \{R_{13}, R_{23}, \dots, R_{r_3 3}\}$, $A = \{R_{14}, R_{24}, \dots, R_{r_4 4}\}$, $\mathfrak{Z} \setminus \mathfrak{Z}_1 = \{R_{15}, R_{25}, \dots, R_{r_5 5}\}$, $\mathcal{Y} = \{R_{16}, R_{26}, \dots, R_{r_6 6}\}$. Построим матрицы:

$$T_{s+2} = \begin{pmatrix} \boxed{\rho_{12}} & \begin{matrix}0\\ i_1\end{matrix} & & \cdots & \begin{matrix}0\\ i_1\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 \cdots 0\\ i_2 \cdots i_2\end{matrix} & \boxed{\rho_{22}} & \begin{matrix}0\\ i_2\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}0\\ i_2\end{matrix} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \begin{matrix}0\\ i_{r_2}\end{matrix} & \cdots & & \begin{matrix}0\\ i_{r_2}\end{matrix} & \boxed{\rho_{r_2 2}} \end{pmatrix},$$

где набор $(0, i_j)$ принадлежит ρ_{j2}.

$$T_{s+3} = \begin{pmatrix} \boxed{\rho_{13}} & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} & & \vdots & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 \cdots 0\\0 \cdots 0\\0 \cdots 0\\0 \cdots 0\end{matrix} & \boxed{\rho_{23}} & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} & \vdots & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} & \vdots & & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix} & \boxed{\rho_{r_3 3}} \end{pmatrix}.$$

Аналогично строятся матрицы T_{s+4}, T_{s+5}, T_{s+6} для оставшихся семейств A, $\mathcal{Z} \setminus \mathcal{Z}_1$, $\mathcal{J}$. Выберем теперь n так, чтобы возможно было построить следующие матрицы:

$$T = \begin{array}{c} \\ \\ \mathcal{J}_1\{ \\ \\ \mathcal{J}_2\{ \\ \\ \mathcal{J}_3\{ \\ \vdots \\ \mathcal{J}_6\{ \end{array} \begin{pmatrix} & & T_1 & & & \\ & & T_2 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & T_s & & & \\ \hline \boxed{T_{s+1}} & & & & & \begin{matrix}0\\ i_1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0 \cdots 0\\ i_1 \cdots i_1\end{matrix} \ \boxed{\rho_{12}} & \begin{matrix}0\\ i_1\end{matrix} & & & & \\ & T_{s+2} & & & & \\ \begin{matrix}0\\ i_{r_2}\end{matrix} \ \cdots & \begin{matrix}0\\ i_{r_2}\end{matrix} \ \boxed{\rho_{r_2 2}} & \begin{matrix}0\\ i_{r_2}\end{matrix} & & & \begin{matrix}0\\ i_{r_2}\end{matrix} \\ \hline 0 & & \boxed{T_{s+3}} & & 0 & \\ \hline & & & \ddots & & \\ \hline 0 & & & & & \boxed{T_{s+6}} \end{pmatrix}$$

Отметим следующие свойства матрицы T, вытекающие из построений и свойств отношений:

i) все строки в ней различны;

ii) каждая из строк в ней, кроме входящих в $T_1, T_2, \ldots, T_s$, содержит в качестве компонент все элементы из E_k;

iii) строки, входящие в $T_2, T_3, \ldots, T_s$ содержат элементы, не входящие в E_t.

Это делает возможным следующим образом определить функцию f. Пусть сначала $t > 0$. На i-ой строке матрицы T_1, $1 \le i \le t+1$, пусть f равна $i(\mathrm{mod}\, t+1)$, на строках матрицы T_2 пусть f равна 0, на ℓ-ой строке матрицы T_j, $s+1 > j > 2$, пусть f равна $t+\ell$, $1 \le \ell \le k-t-1$. Отсюда немедленно следует, что f не сохраняет ни одного одноместного отношения ρ', отличного от ρ и такого, что $U(\rho') \ne P_k$. Перейдем к определению f на оставшихся строках матрицы T. Разобьем строки подматрицы $\mathcal{J}_1$ на пары по порядку следования их в $\mathcal{J}_1$ сверху вниз. На первых двух строках $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ определим f так, чтобы

$$\begin{bmatrix} f(\tilde{\alpha}) \\ f(\tilde{\beta}) \end{bmatrix} \notin \rho_{11},$$

аналогично, на третьей и четвертой строках $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$ определим f так, чтобы

$$\begin{bmatrix} f(\tilde{\gamma}) \\ f(\tilde{\delta}) \end{bmatrix} \notin \rho_{21}$$

и т.д., пока не исчерпаем всю подматрицу $\mathcal{J}_1$. На строках подматрицы $\mathcal{J}_2$ f определим равной нулю. Строки подматрицы $\mathcal{J}_3$ разобьем на четверки по порядку их следования в $\mathcal{J}_3$. На первых четырех строках $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\nu}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\varkappa}$ определим f так, чтобы

$$\begin{bmatrix} f(\tilde{\varepsilon}) \\ f(\tilde{\nu}) \\ f(\tilde{\mu}) \\ f(\tilde{\varkappa}) \end{bmatrix} \notin \rho_{13},$$

на 5 - 8-й строках $\tilde{\xi}$, $\tilde{\iota}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\lambda}$ определим f так, чтобы

$$\begin{bmatrix} f(\tilde{\xi}) \\ f(\tilde{\iota}) \\ f(\tilde{\theta}) \\ f(\tilde{\lambda}) \end{bmatrix} \notin \rho_{23}$$

и т.д., пока не исчерпаем всю подматрицу $\mathcal{J}_3$. Аналогично поступаем с оставшимися подматрицами. На всех наборах, не вошедших в T, полагаем f равной нулю. Из построения вытекает, что f принадлежит классу $\mathcal{R}$ и не принадлежит другим предполным классам. Пусть теперь $z=0$. Берем ту же матрицу T и полагаем, что $f(0,0,\ldots,0)=0$. На остальных наборах f определяется так же, как и в рассмотренном случае. Лемма доказана.

Лемма 4.2.2. Пусть $\mathcal{R} \in U(A)$, тогда в $\mathcal{R}$ найдется функция f, не принадлежащая остальным предполным классам из $U(W)$.

Доказательство. Мы покажем, что f можно выбрать таким образом, чтобы она не сохраняла ни одного предиката из W кроме тех, которые описывает класс $\mathcal{R}$. Заметим, что в рассматриваемом случае двуместный предикат R из W такой, что $U(R)=\mathcal{R}$, находится однозначно и его область истинности ρ равносильна заданию разбиения E_k на непересекающиеся подмножества $E_k = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_s$, $s>1$, где Δ_i - класс эквивалентных элементов.

Пусть

$$\Delta_1 = \{0, 1, \ldots, i\},$$

$$\Delta_2 = \{i+1, i+2, \ldots, j\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_s = \{\ell, \ell+1, \ldots, k-1\}.$$

Рассмотрим матрицы $T_1', T_2', \ldots, T_s'$, каждая из которых имеет n столбцов. Продолжим отношение эквивалентности на наборы длины n. Два набора назовем эквивалентными, если при всяком t, $1 \leq t \leq n$, t-е координаты этих наборов эквивалентны. Очевидно, все наборы длины n распадаются на классы эквивалентности.

$$T_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i & i & \ldots & i \end{bmatrix}, \quad T_2' = \begin{bmatrix} i+1 & i+1 & \ldots & i+1 \\ i+2 & i+2 & \ldots & i+2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ j & j & \ldots & j \end{bmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T_s' = \begin{bmatrix} \ell & \ell & \ldots & \ell \\ \ell+1 & \ell+1 & \ldots & \ell+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k-1 & k-1 & \ldots & k-1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично тому, как это делалось в лемме 4.2.1 строим матрицы T_{s+1}', T_{s+2}', T_{s+3}', T_{s+4}', T_{s+5}', T_{s+6}'.

Вновь построенная матрица T_{s+4}' отличается от аналогичной матрицы в лемме 4.2.1 тем, что в ее построении не участвует отношение ρ.

Далее, рассмотрим все собственные подмножества $\Delta_{s+1}, \Delta_{s+2}, \ldots, \Delta_{s+q}$ множества E_k, каждое из которых не есть подмножество никакого множества

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$. Построим матрицу

$$
T'_{s+7} = \begin{pmatrix}
\boxed{\Delta_{s+1}} & \alpha_1 & \ldots & & \alpha_1 \\
\alpha_2 \ldots \alpha_2 & \boxed{\Delta_{s+2}} & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\
\alpha_q & \ldots & & \alpha_q & \boxed{\Delta_{s+q}}
\end{pmatrix},
$$

где α_j в j-й строке принадлежит Δ_{j+s}. Исходя из матриц T'_1, T'_2, $\ldots$, T'_s, $T'_{s+1}, \ldots, T'_{s+7}$, по аналогии с тем, как строилась T, построим матрицу T' с соответствующим набором n. Она обладает тем же свойством $i)$, что и матрица T, и еще одним: строки внутри каждой из матриц T'_1, $T'_2, \ldots, T'_s$ эквивалентны, но строки из разных матриц $T'_1, T'_2, \ldots, T'_s$ не эквивалентны; любая пара строк из T', в которой хотя бы одна строка принадлежит $\bigcup_{i=1}^{7} T'_{s+i}$, не эквивалентна между собой. Эти свойства позволяют следующим образом определить функцию f. На строках матрицы T'_i при $i < s$ полагаем f равной произвольному фиксированному значению из Δ_{i+1} и на T'_s полагаем f равной какому-нибудь значению из Δ_1. Отсюда немедленно следует, что f не сохраняет никакого подмножества множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$, и, кроме того, f "пока" сохраняет отношение ρ. На матрицах T'_{s+1}, $T'_{s+2}, \ldots, T'_{s+6}$ f определяем так же, как и в лемме 4.2.I. Рассмотрим теперь подматрицу $\mathcal{I}'_7$ матрицы T'

$$
\mathcal{I}'_7 = \begin{pmatrix}
\alpha_1 & \ldots & \alpha_1 & \\
\alpha_2 & \ldots & \alpha_2 & \boxed{T'_{s+7}} \\
 & \ldots & & \\
\alpha_q & \ldots & \alpha_q &
\end{pmatrix}.
$$

Определим f на ν-й строке матрицы $\mathcal{I}'_7$, $\nu = 1, 2, \ldots, q$, равной некоторому числу, не входящему в $\Delta_{\nu+s}$.

Легко видеть, что на остальных наборах длины n f можно доопределить так, чтобы f сохраняла отношение ρ. С другой стороны, из построений вытекает, что f не принадлежит ни одному предполному классу, отличному от $\mathcal{R}$. Лемма доказана.

Лемма 4.2.3. Пусть $\mathcal{R} \in U(\Gamma)$, тогда в $\mathcal{R}$ найдется функция f, не принадлежащая остальным предполным классам из $U(W)$.

Доказательство. Мы покажем, что f можно выбрать таким образом, чтобы она не сохраняла ни одного отношения из семейства W, кроме тех, которые описывают класс $\mathfrak{N}$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ – подстановки, описывающие все разные предполные классы из $U(\Gamma)$. Нетрудно видеть, что ни одна из этих подстановок не является степенью другой. Пусть σ_1 описывает класс $\mathfrak{N}$. Наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ назовем эквивалентными, если существует такое m, что $\beta_1 = \sigma_1^m(\alpha_1)$, $\beta_2 = \sigma_1^m(\alpha_2), \ldots, \beta_n = \sigma_1^m(\alpha_n)$. Очевидно, введенное отношение обладает всеми свойствами эквивалентности. Поэтому множество всех n – местных наборов распадается на классы эквивалентности, причем, если τ – наименьшее такое, что $\sigma_1^{\tau}(x) \equiv x$, то для каждого набора $\tilde{\alpha}$ класс ему эквивалентных содержит только наборы $\tilde{\alpha}$, $\sigma_1(\tilde{\alpha})$, $\sigma_1^2(\tilde{\alpha}), \ldots, \sigma_1^{\tau-1}(\tilde{\alpha})$, где $\sigma_1^i(\tilde{\alpha}) = (\sigma_1^i(\alpha_1), \sigma_1^i(\alpha_2), \ldots, \sigma_1^i(\alpha_n))$, $i = 1, 2, \ldots, \tau-1$. Отсюда вытекает, что каждая функция φ, $\varphi \in \mathfrak{N}$, полностью определяется заданием ее на каком-нибудь представителе каждого класса эквивалентности. Ясно также, что значения на выбранных по одному представителю из разных классов могут определяться произвольно.

По условию σ_1 разлагается в циклы одинаковой простой длины p. Без ограничения общности можно считать, что элементы внутри циклов упорядочены в порядке возрастания и элементы левого цикла меньше элементов любого цикла, стоящего правее. Рассмотрим матрицы $T_1'', T_2'', \ldots, T_s''$, $s = \frac{k}{p}$:

$$T_1'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p-1 & p-1 & \cdots & p-1 \end{bmatrix}, \qquad T_2'' = \begin{bmatrix} p & p & \cdots & p \\ p+1 & p+1 & \cdots & p+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2p-1 & 2p-1 & \cdots & 2p-1 \end{bmatrix},$$

. . . .

$$T_s'' = \begin{bmatrix} k-p-1 & k-p-1 & \cdots & k-p-1 \\ k-p & k-p & \cdots & k-p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k-1 & k-1 & \cdots & k-1 \end{bmatrix},$$

каждая из которых имеет n столбцов. Аналогично тому, как это делалось в лемме 4.2.1 строим матрицы

$$T_{s+1}'', \quad T_{s+2}'', \quad T_{s+3}'', \quad T_{s+4}'', \quad T_{s+5}'', \quad T_{s+6}'',$$

отличие T_{s+2}'' от T_{s+2} состоит только в том, что в построении T_{s+2}'' участвует лишь подстановки $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_m$. Далее рассмотрим все собственные подмножества E_k, содержащие больше одного элемента $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$, и построим матрицу, где α_j в j-й строке принадлежит Δ_j. Исходя из матриц

$$T_1'', \quad T_2'', \ldots, T_s'', \quad T_{s+1}'', \ldots, T_{s+7}'',$$

по аналогии с тем, как строилась T, построим матрицу T'' с соответствующим набором n. Она обладает тем же свойством $i)$, что и матрица T, и еще одним свойством: строки внутри каждой из матриц $T_1'', T_2'', \ldots, T_s''$

$$T''_{s+7} = \begin{pmatrix} \boxed{\Delta_1} & \alpha_1 & \dots & & \alpha_1 \\ \alpha_2 \dots \alpha_2 & \boxed{\Delta_2} & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ & \dots & & \ddots & \dots \\ \alpha_q & & \dots & \alpha_q & \boxed{\Delta_q} \end{pmatrix}$$

эквивалентны, но строки из разных матриц $T''_1, T''_2, \dots, T''_s$ не эквивалентны; любая пара строк из T'', в которой хотя бы одна строка принадлежит $\bigcup_{i=1}^{7} T''_{s+i}$ не эквивалентны между собой. Эти свойства дают возможность следующим образом определить функцию f. На i-й строке матрицы T''_j функция f равна $\sigma_1(p(j-1)+i-1)$; $j=1,2,\dots,s$; $i=1,2,\dots,p$. Отсюда сразу следует, что f не сохраняет ни одного одноэлементного подмножества множества E_k. На матрицах $T''_{s+1}, T''_{s+2}, \dots, T''_{s+6}$ f определяем так же, как и в лемме I. Рассмотрим подматрицу J''_7 матрицы T'', которая строится по матрице T''_{s+7} так же, как и J'_7 по матрице T'_{s+7} в лемме 4.2.2. Определим f на j-й строке этой матрицы равной некоторому числу, не входящему в Δ_j. Легко видеть, что на остальных наборах длины n f можно доопределить так, чтобы $f \in \mathcal{N}$. С другой стороны, из построений вытекает, что f не принадлежит ни одному предполному классу, отличному от $\mathcal{N}$. Лемма доказана. Отметим наконец, что некоторые из матриц в наших построениях в зависимости от значности логики могли отсутствовать.

§ 4.3. Доказательство теоремы 4.I.I

Если $\mathcal{U} \subseteq U(W)$ и $\mathcal{U} \supseteq U(\Gamma) \cup U(A) \cup U(Z_1)$, то как показано в работе [ ], $\mathcal{U}$ является покрытием множества $U(W)$, то есть $|\mathcal{U}| = |U(W)|$. Пусть теперь $\mathcal{U} \subseteq U(W)$ и $|\mathcal{U}| = |U(W)|$, тогда в силу лемм 4.2.I - 4.2.3 имеет место $\mathcal{U} \supseteq U(\Gamma) \cup U(A) \cup U(Z_1)$. Теорема доказана. Обозначим через $\pi_3(k)$ мощность множества Φ, а через $\varkappa_3(k)$ - число классов эквивалентности, на которые разбивается Φ отношением двойственности. Проводя вычисления, подобные тем, которые использовались в § 2.6, можно убедиться, что $\pi_3(k) = k^{k(1-\varepsilon(k))}$, где $\varepsilon(k) > 0$; $\varepsilon(k) = O\left(\frac{\ln\ln k}{\ln k}\right)$ при $k \to \infty$, и $\varkappa_3(k) \sim \frac{1}{4k\sqrt{3}} \cdot e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}k}}$, то есть поведения функций $\pi_3(k)$ и $\varkappa_3(k)$ совпадают асимптотически соответственно с поведениями функций $\pi_1(k)$ и $\varkappa_1(k)$.

Сопоставление критериев полноты в терминах предполных классов для задачи о полноте в общем случае и для задачи о шефферовых функциях указывает на существенное упрощение решения во втором случае. Для малых значений k непосредственные вычисления величин $\pi_3(k)$ и $\varkappa_3(k)$ приводят к следующей таблице 4.

Таблица 4.

κ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi_s(\kappa)$	3	10	30	86	298	1121	4497	22775	238146
$\varkappa_s(\kappa)$	2	4	7	11	20	34	61	115	144

из которой следует, что критерий полноты в терминах предполных классов для задачи о шефферовых функциях является практически приемлемым при $\kappa \leq 5$, а в терминах типов предполных классов – при $\kappa \leq 10$ (соответственно 4 и 6 – для задачи о полноте в общем случае).

ГЛАВА III. ВОПРОСЫ ПОЛНОТЫ ДЛЯ И.Ф.С. $\mathcal{P}_\Sigma$

В этой главе будут изучены свойства и.ф.с. $\mathcal{P}_\Sigma$. Эта система связана с моделями автоматов и операций над ними, рассматриваемых в структурной теории автоматов. $\mathcal{P}_\Sigma$ представляет также и самостоятельный интерес, поскольку является в известном смысле предельным обобщением конечно-значных логик. С позиций структурной теории автоматов $\mathcal{P}_\Sigma$ возникает следующим образом. Рассматриваются конечные автоматы с некоторым числом входных и выходных каналов. Из этих автоматов строятся автоматные схемы путем отождествления тех входных каналов, которые принимают одни и те же значения, а также путем подсоединения выходного канала одного автомата к входному каналу другого в том случае, когда все значения, принимаемые выходным каналом, принимаются также и указанным входным каналом. Если ограничиться рассмотрением конечных автоматов без памяти, в автоматных схемах исключить циклы и считать, что автоматные схемы реализуют соответствующую композицию отображений, задаваемых автоматами, из которых построена автоматная схема, то придем к и.ф.с. $\mathcal{P}_\Sigma$. В главе будут рассмотрены вопросы полноты для произвольных $\mathcal{P}_\Sigma$ и для и.ф.с., являющихся ближайшими обобщениями "простейших" и.ф.с. типа $\mathcal{P}_\Sigma$.

§ 1. Основные понятия и результаты для $\mathcal{P}_\Sigma$

Здесь будут использованы понятия и обозначения из § 2 гл.1. Пусть $\Sigma=(\Sigma_1, \Sigma_2)$, где $\Sigma_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$, $\Sigma_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_t\}$,

и $\mathcal{P}_\Sigma = < P_\Sigma, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s, \nabla_1, \nabla_2, \dots, \nabla_s, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_s, *_{11}, *_{12}, \dots, *_{st} >$.

Операции в $\mathcal{P}_\Sigma$ по аналогии с κ – значными логиками будем называть операциями суперпозиции. Естественно, далее, считать, что для $\mathcal{P}_\Sigma$ выполнено $|A_i|>1, |B_j|>1$, $B_j \nsubseteq B_\ell$ при любых i , j , ℓ , таких, что $j \neq \ell$. По аналогии с κ – значной логикой введем понятия замыкания, замкнутого, предполного и полного множеств в $\mathcal{P}_\Sigma$, обозначая соответствующий оператор замыкания через $[\ \ ]$.

Теорема 1.1. Множество предполных классов в $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно и строится эффективно.

Теорема 1.2. Существует алгоритм, который для любой $\mathcal{P}_\Sigma$ и любого конечного множества $M \subseteq P_\Sigma$ устанавливает, полно ли множество M в $\mathcal{P}_\Sigma$.

Теорема 1.3. а) $\mathcal{P}_\Sigma$ – правильная тогда и только тогда, когда существуют A_i в Σ_1 и B_j в Σ_2, такие, что $|A_i \cap B_j| \geq 2$. б) $\mathcal{P}_\Sigma$ содержит предполные классы и замкнутые классы, отличные от P_Σ и не содержащиеся ни в одном предполном классе тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ справедливо $|A_i \cap B_j| \leq 1$ и существуют $A_{i'} \in \Sigma_1$ и $B_{j'} \in \Sigma_2$ такие, что $|A_{i'} \cap B_{j'}| = 1$. в) $\mathcal{P}_\Sigma$ не содержит предполных классов тогда и только тогда, когда для любых $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ имеет место $A_i \cap B_j = \emptyset$.

Теорема 1.4. $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ правильная.

Полное множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется базисом, если любое его собственное подмножество не полно.

Теорема 1.5. $\mathcal{P}_\Sigma$ имеет базис тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная.

Теорема 1.6. Минимальная мощность базиса в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна $|\Sigma_2|$.

Теорема 1.7. Мощность множества замкнутых классов в $\mathcal{P}_\Sigma$ равна континууму тогда и только тогда, когда $\Sigma \neq (\{\{a,b\}\}, \{\{a,b\}\})$, где $a \neq b$.

Замкнутое множество $M \subseteq P_\Sigma$ называется открыто-замкнутым, если его дополнение замкнуто. По определению считаем пустое множество также замкнутым. Опишем все открыто-замкнутые множества в $\mathcal{P}_\Sigma$. На множестве Σ_2 введем отношение эквивалентности R, такое что $B_j R B_{j'}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_\ell}$ элементов B_{j_u} из Σ_2 такая, что $B_{j_1} \cap B_j \neq \emptyset$, $B_{j_\ell} \cap B_{j'} \neq \emptyset$ и для любого p, $1 \leq p \leq \ell - 1$, имеет место $B_{j_p} \cap B_{j_{p+1}} \neq \emptyset$. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_q$ – соответствующие классы эквивалентности. Если $f \in P_\Sigma$, то через K_f обозначим множество всех таких функций g из P_Σ, что при помощи только отождествления и переименования переменных из g может быть получена функция f. Пусть $C = (\bigcup_{i=1}^{s} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{t} B_j)$. Элементы непустого множества C назовем абсолютными константами. Пусть Q – множество всех таких функций f из P_Σ, которые зависят только от переменных $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s$; $Q' \subseteq Q$; $C' \subseteq C$, и пусть каждое A_i содержит не более одной абсолютной константы. Обозначим через $C'(Q')$ множество всех функций из Q, которые получаются из функций множества Q' путем обязательной подстановки всех абсолютных констант из C' вместо всех возможных переменных. Далее, если $Q'' \subseteq C'(Q)$, то через $(C')^{-1}(Q'')$ обозначим множество всех тех функций f из Q, для которых $C'(\{f\}) \subseteq Q''$ / вместо $C'(\{f\})$ будем использовать обозначение $C'(f)$, понимая под ним функцию, из которой состоит множество $C'(\{f\})$ /. В случае, когда $C' = \emptyset$, по определению полагаем $C(Q) = Q = \overset{-1}{C}(Q)$. Теорема 1.8. Множество $M \subseteq P_\Sigma$ является открыто-замкнутым тогда и только тогда, когда:

а) если каждое A_i содержит не более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $S \subseteq C(Q)$ имеет место

$$M = \bigcup_{f \in C^{-1}(S)} K_f \quad ,$$

б) если некоторое A_i содержит более одной абсолютной константы, то для некоторого множества $T \subseteq \{1, 2, \ldots, q\}$ имеет место

$$M = \bigcup_{\tau \in T} \ \bigcup_{B_j \in E_\tau} P_\Sigma^{B_j}$$

§ 1.1. Доказательство теорем 1.5 и 1.6

Докажем сначала следующее утверждение.

Предложение 1.1.1. Если для некоторых $A_i \in \Sigma_1$ и $B_j \in \Sigma_2$ имеет место $(A_i \cap B_j) \supseteq \{a, b\}$, где $a \neq b$, то существует множество $M \in P_\Sigma$ такое, что $|M| \leq |\Sigma_2|$ и $|M| = P_\Sigma$.

Доказательство. Без ограничения общности можно, очевидно, считать, что $a = 0$, $b = 1$, $j = 1$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{i-1}, x_1^i, x_2^i, \ldots, x_u^i, x_{u+1}^i, x_{u+2}^i, \ldots, x_{u+\tau_1}^i, x_1^{i+1}, \ldots, x_1^s)$$

из $P_\Sigma^{B_1}$, где $s = |\Sigma_1|$, а u равно числу одноместных функций в $P_\Sigma^{B_1}$, зависящих от переменных из алфавита $\{x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s\}$; $\tau_1 = [\log_2 |B_1|] + 1$. Пусть для f выполнены следующие условия:

а) если $g_1, g_2, \ldots, g_u$ суть все одноместные функции из $P_\Sigma^{B_1}$, то при любом v, $1 \leq v \leq u$

$$f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{i-1}, 0, 0, \ldots, \overset{v}{0}, 1, 0, 0, \ldots, 0, x_{u+1}^i, x_{u+2}^i, \ldots, x_{u+\tau_1}^i, x_1^{i+1}, \ldots, x_1^s) = g_u \,;$$

б) если $a_{u+1}^i, a_{u+2}^i \in A_i$, то

$$f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{i-1}, \overline{x_u^i, x_u^i, \ldots, x_u^i}, a_{u+1}^i, a_{u+2}^i, x_{u+3}^i, \ldots, x_{u+\tau_1}^i, x_1^{i+1}, \ldots, x_1^s) =$$

$$= \begin{cases} a_{u+1}^i \vee a_{u+2}^i \quad, & \text{если } \{a_{u+1}^i, a_{u+2}^i\} \subseteq \{0,1\} \\ 0 \quad, & \text{если } \{a_{u+1}^i, a_{u+2}^i\} \nsubseteq \{0,1\}, \end{cases}$$

обозначим эту функцию через $g(x_{u+1}^i, x_{u+2}^i)$;

в) функция

$$f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^{i-1}, 0, 1, 1, \ldots, 1, x_{u+1}^i, x_{u+2}^i, \ldots, x_{u+\tau_1}^i, x_1^{i+1}, x_1^{i+2}, \ldots, x_1^s)$$

зависит только от переменных $x_{u+1}^i, x_{u+2}^i, \ldots, x_{u+\tau_1}^i$ и на наборах из нулей и единиц, являющихся значениями этих переменных, принимает все значения из B_1. Обозначим эту функцию через $g'(x_{u+1}^i, x_{u+2}^i, \ldots, x_{u+\tau_1}^i)$. Нетрудно видеть, что в $P_\Sigma^{B_1}$ такая функция f существует. Заметим, что $g(x_{u+1}^i, g(x_{u+1}^i, x_{u+1}^i)) \equiv 0$ и $g(0,0) = 1$, поэтому с учетом б) получаем

$[\{f\}] \supseteq [\{g\}] \supseteq \{0,1\}$. Далее, используя подстановки констант 0 и I в функцию f вместо переменных $x_1^i, x_2^i, \ldots, x_u^i$, в силу указанного выше свойства а) функции f, получим все функции от одного переменного из $P_\Sigma^{B_1}$, которые, таким образом войдут в $[\{f\}]$. Заметим теперь, [1,3], что любая функция алгебры логики (ф.а.л.) может быть получена при помощи операций суперпозиции из ф.а.л. $\overline{w_1 \vee w_2}$. Здесь через w_j, $j=1,2,\ldots$ обозначаются булевские переменные, то есть такие переменные, которые в качестве значений принимают 0 или 1. Отсюда, очевидно, следует, что для любой ф.а.л. $h(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ в $[\{g\}]$ содержится функция $h'(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$, которая на наборах из нулей и единиц совпадает с функцией $h(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ и, кроме значений 0 или I, не принимает других значений. Далее, как нетрудно видеть, для любой функции $\ell \in P_\Sigma^{B_1}$ со значениями во множестве $\{0,1\}$ можно подобрать ф.а.л. h и некоторые одноместные функции из $P_\Sigma^{B_1}$ также со значениями в $\{0,1\}$ так, что, подставляя эти одноместные функции вместо некоторых переменных функции h, получим функцию ℓ. Тем самым каждая функция ℓ содержится в $[\{f\}]$

Добавим теперь к f следующие функции: $g''(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{t_2}^i)$, $g'''(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{t_3}^i), \ldots$ $\ldots, g^{(t)}(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{t_t}^i)$, где $t = |\Sigma_2|$, такие что $g^{(m)} \in P_\Sigma^{B_m}$ и $g^{(m)}$ принимает на наборах из 0 и 1 каждое значение из B_m, $2 \leq m \leq t$. Нетрудно видеть, что для каждой функции f' из $P_\Sigma^{B_j}$ найдутся такие функции ℓ_1, $\ell_2, \ldots, \ell_{t_j}$ со значениями из множества $\{0,1\}$, что $f' = g^{(j)}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{t_j})$. Тем самым $f' \in [\{f, g', g'', \ldots, g^{(t)}\}]$, и предположение доказано. Доказательство теоремы 1.6 теперь легко следует из предложения 1.1.1 и того, что, очевидно, всякая полная система функций в $\mathcal{P}_\Sigma$ состоит не менее, чем из $|\Sigma_2|$ функций.

Из предложения 1.1.1 легко выводится также следующее утверждение.

Предложение 1.1.2. $\mathcal{P}_\Sigma$ является конечно-порожденной тогда и только тогда, когда для некоторых A_i из Σ_1 и B_j из Σ_2 имеет место $A_i \cap B_j \supseteq \{a, b\}$, где $a \neq b$.

Доказательство. Достаточность условий вытекает из предложения I.I.I. Для получения необходимости остается заметить, что если для любых A_i и B_j выполнено $|(A_i \cap B_j)| \leq 1$, то для всякой конечной системы M, $M \subseteq P_\Sigma$, число существенных переменных у функций из $[M]$, очевидно, не превосходит наибольшего числа существенных у функций из M, откуда вытекает справедливость предложения.

Перейдем к доказательству теоремы 1.5. Если $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная, то она, очевидно, имеет базис. Пусть теперь $\mathcal{P}_\Sigma$ имеет базис M, покажем, что она конечно-порожденная. Предположим противное, то есть, что $\mathcal{P}_\Sigma$ не является конечно-порожденной, и покажем, что M не является базисом. В этом случае по предложению I.I.2 можно считать, что для любых A_i и B_j имеет место $|A_i \cap B_j| \leq 1$. Пусть C - множество всех абсолютных констант. Выделим в M произвольное конечное подмножество M', такое, что $[M'] \supseteq C$. Множество M', очевидно, существует. Возьмем любую функцию g из $M \setminus M'$ и рассмотрим произвольную функцию g', которая имеет больше существенных переменных, чем g, и из которой функция g может быть получена при помощи переименования переменных (возможно, с отождествлением) и подстановки абсолютных констант. Нетрудно видеть, что $g' \in [M \setminus \{g\}]$, отсюда, с учетом выше изложенного, имеем $g \in [M \setminus \{g\}]$, что противоречит тому, что M базис. Тем самым теорема 1.5 доказана.

§ 1.2. Доказательство теорем 1.1 – 1.4.

Начнем с доказательства теоремы 1.3.

Покажем сначала, что если при любых A_i и B_j имеет место $A_i \cap B_j = \varnothing$, то есть если в $\mathcal{P}_\Sigma$ нет абсолютных констант, то в $\mathcal{P}_\Sigma$ нет предполных классов. В самом деле, пусть $M \subset P_\Sigma$ и M предполный класс, тогда для всякой функции f из $P_\Sigma \setminus M$ должно иметь место равенство $[\{f\} \cup M] = P_\Sigma$. С другой стороны, нетрудно видеть, что для любой функции g, которая существенно зависит от большего, чем функция f числа переменных и из которой функция f получается путем переименования и отождествления переменных, имеет место $g \notin [\{f\} \cup M]$, что противоречит указанному выше соотношению.

Теперь покажем, что если для любых A_i и B_j имеет место $|A_i \cap B_j| \leq 1$ и существуют $A_{i'}$ и $B_{j'}$, такие, что $|A_{i'} \cap B_{j'}| = 1$, то в $\mathcal{P}_\Sigma$ имеются такие замкнутые классы, отличные от $\mathcal{P}_\Sigma$, которые не содержатся ни в одном предполном классе, и имеются предполные классы. Пусть C – множество всех абсолютных констант. Покажем, что всякий замкнутый класс M, отличный от P_Σ и содержащий C, не является предполным. Последнее следует из того, что если $f \notin M$, то, очевидно и всякая функция g, из которой f получается переименованием, отождествлением переменных и подстановкой абсолютных констант, не содержится в $[M \cup \{f\}]$. Покажем теперь, что в $\mathcal{P}_\Sigma$ существуют предполные классы. Пусть $C' \subset C$. Рассмотрим множество $\mathcal{Z}(C')$ всех таких функций, подстановка вместо переменных которых констант из C' и переменных из алфавита $\{x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s\}$ не приводит к получению констант из $C \setminus C'$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{Z}(C') = [\mathcal{Z}(C')]$, $\mathcal{Z}(C') \neq P_\Sigma$. Покажем, что $\mathcal{Z}(C')$ является предполным классом. Для этого, очевидно, достаточно установить, что если $f \notin \mathcal{Z}(C')$, то $[\{f\} \cup \mathcal{Z}(C')] = P_\Sigma$. Покажем последнее. Пусть $f \notin \mathcal{Z}(C')$. Отсюда следует, что для некоторой константы a из $C \setminus C'$ будет выполнено $a \in [\{f\} \cup \mathcal{Z}(C')]$. Пусть, далее,

$$g(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_{n_s}^s) -$$

произвольная функция из P_Σ и $h \in Q \cap \mathcal{Z}(C')$. Рассмотрим функцию ℓ, зависящую от всех переменных функции g и еще от одного переменного x_m^q, которое может принимать в качестве значения a и от которого g не зависит. Функция ℓ на наборах, в которых $x_m^q = a$, совпадает с g, а на наборах, в которых $x_m^q \neq a$, совпадает с k. Нетрудно видеть, что $\ell \in \mathcal{Z}(C')$ и $g \in [\{\ell\} \cup \{a\}]$. Отсюда, очевидно, следует, что $[\mathcal{Z}(C') \cup \{\ell\}] = P_\Sigma$, то есть множество $\mathcal{Z}(C')$ образует предполный класс. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ – произвольный предполный класс из $\mathcal{P}_\Sigma$ и $C' = \mathfrak{M} \cap C$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{Z}(C') \supseteq \mathfrak{M}$, а значит, в силу того, что, очевидно, $C' \neq C$, будем иметь $\mathcal{Z}(C') = \mathfrak{M}$. Тем самым все предполные классы в $\mathcal{P}_\Sigma$ в рассматриваемом случае однозначно определяются соответствующим подмножеством C'.

Итак, показано, что если $\mathcal{P}_\Sigma$ правильная, то с необходимостью найдутся два множества A_i и B_j такие, что $|(A_i \cap B_j)| \geqslant 2$, то есть в силу предложения 1.1.2 $\mathcal{P}_\Sigma$ является конечно-порожденной. С другой стороны, в силу предложения 3.2 из главы 1, если $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная, то она правильная. Тем самым теорема 1.3 доказана. Фактически доказана и теорема 1.4.

Доказательство теоремы 1.1. В силу теоремы 1.3 и рассмотрения при ее доказательстве случая б) можно считать, что для некоторых A_i и B_j выполняется неравенство $|(A_i \cap B_j)| \geqslant 2$. Обозначим через $P_\Sigma(q)$, $q \geqslant 1$ подмножество всех функций из P_Σ вида $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_q^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_q^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_q^s)$ и через X^q – множество $\{x_1^1, x_2^1, \dots, x_q^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_q^2, \dots, x_1^s, x_2^s, \dots, x_q^s\}$. Назовем подмножество F, $F \subseteq P_\Sigma(q)$, регулярным, если оно замкнуто относительно подстановок переменных из X^q и функций из F в функции из F. Будем говорить, что функция g из P_Σ сохраняет регулярное множество F, если после любой подстановки вместо каждого переменного функции g переменного из X^q или функции из F (при этом подстановка осуществляется одновременно вместо каждого переменного функции g), снова получается функция из F. Класс всех функций, сохраняющих F, обозначим через $U(F)$. Нетрудно видеть, что $[U(F)] = U(F)$, и для любого замкнутого множества M имеет место: $M \cap P_\Sigma(q)$ – регулярно и $U(M \cap P_\Sigma(q)) \supseteq M$. Отметим еще, что $U(F) \cap P_\Sigma(q) = F$. При доказательстве предложения 1.1.1 было, в частности, установлено, что в $\mathcal{P}_\Sigma$ существуют конечные полные системы функций N такие, что $N \subseteq P_\Sigma(2u)$, где u равно числу одноместных функций в $\mathcal{P}_\Sigma$, зависящих от переменных из алфавита $\{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^s\}$. Пусть M_1 и M_2 – два произвольных предполных класса в $\mathcal{P}_\Sigma$, покажем, что $(M_1 \cap P_\Sigma(2u)) \neq (M_2 \cap P_\Sigma(2u))$. Предположим, что для некоторых M_1 и M_2 это неравенство не выполнено. Возможны два случая: $(M_1 \cap P_\Sigma(2u)) \neq P_\Sigma(2u)$ и $(M_1 \cap P_\Sigma(2u)) = P_\Sigma(2u)$. В первом случае, в силу описанных выше свойств регулярных множеств, имеем $M_1 \subseteq U(M_1 \cap P_\Sigma(2u))$ и $M_2 \subseteq U(M_1 \cap P_\Sigma(2u))$, причем $U(M_1 \cap P_\Sigma(2u)) \neq P_\Sigma$, что при условии предполноты каждого из множеств M_1 и M_2 противоречит тому, что M_1 и M_2 различны. Во втором случае, очевидно, $[M_1] = P_\Sigma$, а это противоречит предполноте M_1. Таким образом, установлено, что число предполных классов не превосходит числа регулярных подмножеств множества $P_\Sigma(2u)$ и, значит, конечно. Остается теперь построить все регулярные подмножества множества $P_\Sigma(2u)$, отличные от $P_\Sigma(2u)$, и выбрать среди них те, классы сохранения которых являются предполными. Покажем, что этот выбор может быть осуществлен с помощью эффективной процедуры. Нетрудно видеть, что если F_1 и F_2 – два регулярных собственных подмножества множества $P_\Sigma(2u)$, то $U(F_1) \subseteq U(F_2)$ тогда и только тогда, когда $(P_\Sigma(|P_\Sigma(2u)|) \cap U(F_1)) \subseteq (P_\Sigma(|P_\Sigma(2u)|) \cap U(F_2))$. Это позволяет эффективно описать все регулярные подмножества F множества $P_\Sigma(2u)$ такие, что $U(F)$ является предполным классом. Тем самым теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2.

Поскольку в силу теорем 1.3 и 1.4 $\mathcal{P}_\Sigma$ не может быть конечно-порожденной, если она не является правильной, то можно считать, что для некоторых A_i и B_j из Σ_1 и Σ_2 соответственно будет выполнено $|(A_i \cap B_j)| \geqslant 2$. Теперь из приведенного доказательства теоремы I.I нетрудно извлечь алгоритм для распознавания полноты или неполноты произвольных конечных систем функций. В самом деле, пусть $M \subseteq P_\Sigma$ – конечное подмножество. Рассмотрим последовательность подмножества множества $P_\Sigma(2u)$:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots ,$$

где M_1 состоит из всех функций, которые получаются из функций множества M подстановкой вместо каждого переменного некоторого переменного из X^{2u} (подстановка производится одновременно для всех переменных), а множество M_{i+1} состоит из всех функций, которые получаются из функций множества M_i подстановкой вместо каждого переменного рассматриваемой функции переменного из X^{2u} или функции из M_i. Непосредственно ясно, что $M_i \subseteq M_{i+1}$; при этом если для некоторого i имеем $M_i = M_{i+1}$, то для любого k будет выполнено $M_i = M_{i+k}$. Пусть p – наименьшее такое число, что $M_p = M_{p+1}$. Ясно, что p не превосходит числа всех функций от переменных из X^{2u}. Ясно также, что M_p является регулярным и если $M_p \neq P_\Sigma(2u)$, то $U(M_p) \supseteq [M]$. Таким образом, множество M является полным тогда и только тогда, когда $M_p = P_\Sigma(2u)$. Тем самым теорема 1.2 доказана.

§ 1.3. Доказательство теорем 1.7 и 1.8

Доказательство теоремы 1.7.

Если $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$, где $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{a, b\}$, $a \neq b$, то, как показал Е.Пост [1], в $\mathcal{P}_\Sigma$ существует в точности счетное множество замкнутых классов. Пусть теперь Σ не входит в рассмотренный случай. Покажем, что в $\mathcal{P}_\Sigma$ имеется континуум замкнутых классов. Возможны следующие подслучаи. Существуют такие $A_{i'}$ и $B_{j'}$, что $|B_{j'} \setminus A_{i'}| \geqslant 1$, или же найдется такое $A_{i''}$, что $|A_{i''}| \geqslant 3$. В обоих подслучаях найдутся, очевидно, такие A_i и B_j и такие элементы a, b из A_i и c, d из B_j, что $|(\{c,d\} \setminus \{a,b\})| \geqslant 1$

Пусть для определенности $c \notin \{a, b\}$ и $d \neq b$. Построим последовательность M функций $h_\mu(x_1^i, x_2^i, \dots, x_\mu^i)$ из $P_\Sigma^{B_j}$, $\mu \geq 2$, таких что h_μ принимает в качестве значений только c или d, причем значение d принимается в точности на тех наборах значений, в которых одна из координат равна a, а остальные координаты равны b. Непосредственно ясно, что переименованием с возможным отождествлением переменных функция $h_{\mu'}$ не может быть получена из h_μ при $\mu \neq \mu'$. Пусть теперь $\mathcal{D}$ - произвольная формула, построенная из функций вида h_μ и пусть $\mathcal{D} = h_\mu(\dots, G_1, \dots, G_2, \dots)$, где G_1 и G_2 также формулы указанного вида, тогда, очевидно, функция, реализуемая формулой $\mathcal{D}$, не встречается в последовательности M.

Пусть теперь $\mathcal{D} = h_\mu(y_{j_1}^i, \dots, y_{j_{t-1}}^i, G, y_{j_{t+1}}^i, \dots, y_{j_\ell}^i)$, где каждое из переменных y_{j_u}, $u = 1, 2, \dots, \ell$, совпадает с некоторым переменным из X_i, причем при разных значениях u, u' переменные $y_{j_u}^i$ и $y_{j_{u'}}^i$ могут совпадать. Подставим в формулу $\mathcal{D}$ вместо переменного $y_{j_1}^i$ значение a, а вместо остальных - значение b, тогда, очевидно, $\mathcal{D}$ примет значение c, то есть $\mathcal{D}$ реализует функцию, отличную от $h_{\mu'}$, при любом μ'. Таким образом, если для любых подмножеств M' и M'' множества M выполнено $M' \neq M''$, то $[M'] \neq [M'']$, то есть в $\mathcal{P}_\Sigma$ континуум замкнутых классов. Теорема 1.7 доказана.

Доказательство теоремы 1.8.

Случай 1. Существует такое A_i, которое содержит более чем одну абсолютную константу. Пусть a и b разные абсолютные константы из A_i и N - открыто-замкнутое множество. Покажем, что для любого B_j справедливо следующее: если $(P_\Sigma^{B_j} \cap N) \neq \emptyset$, то $N \supseteq P_\Sigma^{B_j}$. Возможны следующие подслучаи.

Подслучай а. $a, b \in N$. Пусть $f \in (N \cap P_\Sigma^{B_j})$. Рассмотрим для любой функции g из $P_\Sigma^{B_j}$ функцию h, которая зависит от всех переменных, от которых зависят функции f или g и еще от двух переменных x_k^i, x_{k+1}^i, от которых не зависят функции f и g. Пусть эта функция обладает следующим свойством: после отождествления x_k^i и x_{k+1}^i у функции h получается функция f, а после подстановки в функцию h вместо x_k^i и x_{k+1}^i соответственно констант a и b получается функция g. Ясно, что такая функция существует и входит в N. Отсюда следует, что $N \supseteq P_\Sigma^{B_j}$.

Подслучай б. $a \in N$, $b \in (P_\Sigma \setminus N)$. Предположим, что $(P_\Sigma^{B_j} \cap N) \neq \emptyset$ и $(P_\Sigma^{B_j} \setminus N) \neq \emptyset$. Тогда найдутся такие функции f и g в $P_\Sigma^{B_j}$, что $f \in N$ и $g \in (P_\Sigma^{B_j} \setminus N)$. Рассмотрим функцию h, зависящую от всех трех переменных, которые встречаются у f или g, и которая зависит еще от одного переменного x_k^i, не встречающегося как у f, так и у g. Пусть h обладает таким свойством: после подстановки в h вместо x_k^i константы a получается функция g, а после подстановки вместо x_k^i константы b получается функция f. Ясно, что такая функция существует, а ее вхождение в N или $P_\Sigma \setminus N$ противоречит тому, что N открыто-замкнутое множество. Таким образом, если $(P_\Sigma^{B_j} \cap N) \neq \emptyset$, то $(P_\Sigma^{B_j} \setminus N) = \emptyset$.

Далее, нетрудно видеть, что если $E_1, E_2, \ldots, E_q$ – классы эквивалентности, соответствующие отношению эквивалентности R на Σ_2, то для любого множества $T \subseteq \{1, 2, \ldots, q\}$ множество функций $\bigcup_{\tau \in T} \bigcup_{B_j \in E_\tau} P_\Sigma^{B_j}$ является открыто-замкнутым. Отсюда с учетом изложенного выше следует часть б) теоремы I.8.

Случай 2. Каждое A_i содержит не более одной абсолютной константы. Если в P_Σ множество C абсолютных констант пусто, то утверждение а) теоремы I.8 становится очевидным. Пусть $C \neq \emptyset$. Покажем сначала, что для любого множества $Q' \subseteq C(Q)$ множество $N = \bigcup_{f \in C^{-1}(Q')} K_f$ является открыто-замкнутым. Нетрудно видеть, что, очевидно, имеет место $[N] = N$, $C^{-1}(C(Q) \setminus Q') = (Q \setminus C^{-1}(Q'))$ и $(P_\Sigma \setminus N) = \bigcup_{g \in C^{-1}(C(Q') \setminus Q')} K_g$, откуда следует, что $[P_\Sigma \setminus N] = (P_\Sigma \setminus N)$. Таким образом N является открыто-замкнутым множеством. Больше того, мы фактически показали, что по $C^{-1}(Q)$ однозначно определяется открыто-замкнутое множество N такое, что $(N \cap Q) = C^{-1}(Q')$. Покажем теперь, что для любого открыто-замкнутого множества N' имеет место следующее. Если $Q' = (N' \cap C(Q))$, то $C^{-1}(Q') \subseteq N'$. Отсюда с учетом изложенного выше будет следовать утверждение а) теоремы I.8. Пусть $C' = (Q' \cap C)$, $C'' = (C \setminus C')$. Разобьем переменные $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s$ на три группы. К первой группе S_1 отнесем те переменные $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n$, вместо которых возможна подстановка констант из C', ко второй группе S_2 – те переменные $x_1^{n+1}, x_1^{n+2}, \ldots, x_1^{n+m}$, вместо которых возможна подстановка констант из C'', к третьей группе S_3 отнесем остальные переменные. Пусть функция f из Q зависит только от переменных из групп S_1 и S_3, причем функция $g = C'(f)$ содержится в Q'. Ясно, что $f \in C^{-1}(Q')$, и мы покажем, что $f \in N'$. Предположим, что $f \notin N'$. Тогда $f \in N''$, где $N'' = (P_\Sigma \setminus N')$. . С другой стороны, $K_g \subseteq N'$, и нетрудно видеть, что в K_g найдется такая функция $h(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_1^n, x_2^n, x_1^{n+1}, x_1^{n+2}, \ldots, x_1^{n+m}, x_1^{n+m+1}, \ldots, x_1^s)$, что $h(x_1^1, x_1^1, x_1^2, x_1^2, \ldots, x_1^n, x_1^n, x_1^{n+1}, x_1^{n+2}, \ldots, x_1^{n+m}, x_1^{n+m+1}, \ldots, x_1^s) = g(x_1^{n+m+1}, \ldots, x_1^s)$, $h(x_1^1, c_1, x_1^2, c_2, \ldots, x_1^n, c_n, x_1^{n+1}, x_1^{n+2}, \ldots, x_1^{n+m}, x_1^{n+m+1}, \ldots, x_1^s) = f(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n, x_1^{n+m+1}, \ldots, x_1^s)$,

где $c_i \in C'$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что противоречит открыто-замкнутости множества N'. Возьмем также произвольную функцию ℓ из $C^{-1}(Q')$. Предположим, что $\ell \in N''$, тогда для функции $\kappa = C''(\ell)$, зависящей только от переменных из групп S_1 и S_3, с одной стороны, имело бы место $C'(\kappa) \in Q'$ что вместе с вышеуказанным давало бы $\kappa \in N'$, а с другой стороны, должно быть $\kappa \in N''$, что противоречиво. Тем самым $\ell \in N'$ и утверждение а) теоремы I.8 доказано. Из этой теоремы вытекает, что открыто-замкнутых множеств в P_Σ конечное число, все они строятся эффективно.

В заключение укажем еще одно свойство функциональной системы $\mathcal{P}_\Sigma$. Пусть $\mathcal{P}_\Sigma$ – конечно-порожденная система и конечное множество M является полным в $\mathcal{P}_\Sigma$. Обозначим через $\mu(M)$ наибольшее число существенных переменных у функций множества M и через $\mu(P_\Sigma)$ – наименьшее значение $\mu(M)$ для всех указанных множеств M. Число $\mu(P_\Sigma)$ обычно, называется порядком функциональной системы. В силу предложения 1.1.2 для некоторых i и j имеет место $|A_i \cap B_j| \geqslant 2$, и пусть τ – наибольшая из мощностей указанного пересечения, а ρ – наибольшая из мощностей множеств B_j, $1 \leq j \leq t$.

Предложение 1.3.1. $\mu(P_\Sigma) = \max(]\log_2 \rho[, 2)$.

Нетрудно видеть, что $\mu(P_\Sigma) \geqslant \max(]\log_2 \rho[, 2)$. Покажем, что имеет место обратное неравенство. Пусть $\mathcal{D} = A_i \cap B_j$ и $|\mathcal{D}| = \tau$. Рассмотрим функцию $f(x_1^i, x_2^i)$ из $P_\Sigma^{B_j}$ такую, что $f(a,b) = \max(a,b) + 1 \pmod{\tau}$ для всех a и b из $\mathcal{D}$. Нетрудно видеть, что для всякой функции $g(x_{i_1}^i, x_{i_2}^i, \ldots, x_{i_n}^i)$ из $P_\Sigma^{B_j}$, которая на наборах элементов из $\mathcal{D}$ также принимает значения из $\mathcal{D}$, то есть сохраняет множество $\mathcal{D}$, найдется функция $h(x_{i_1}^i, x_{i_2}^i, \ldots, x_{i_n}^i)$ из $[\{f\}]$, которая на наборах элементов из множества $\mathcal{D}$ совпадает с g. Далее, пусть имеется последовательность функций

$$g_1(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_\ell^i),\ g_2(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_\ell^i),\ \ldots,\ g_t(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_\ell^i),$$

где $\ell =]\log_2 \rho[$, такая, что функция g_k, $1 \leq k \leq t$, на наборах, состоящих из элементов множества $\mathcal{D}$, принимает все значения из B_k и только эти значения. В силу выбора ℓ такие функции в P_Σ существуют. Рассмотрим теперь множество $M = \{g_1, g_2, \ldots, g_t, f\} \cup P_\Sigma'(1)$, где $P_\Sigma'(1)$ – множество всех одноместных функций, зависящих от переменных из множества $\{x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^s\}$ и принимающих в качестве значений только элементы из $\mathcal{D}$. Так же, как и при доказательстве предложения 1.1.1 теперь легко можно убедиться в том, что $[M] = P_\Sigma$. Так как $\mu(M) = \max\{]\log_2 \rho[, 2\}$, то тем самым наше предложение доказано.

§ 2. Исследование "простейших" $\mathcal{P}_\Sigma$

В этом параграфе на множестве $\mathcal{I}$ всех и.ф.с. $\mathcal{P}_\Sigma$ вводится частичный предпорядок $\leqslant$, соответствующий в определенном смысле "вложимости" одних и.ф.с. в другие. Относительно этого предпорядка в множестве $\mathcal{I}$ имеется ровно три минимальных класса, ровно один из которых K_1 состоит из конечно-порожденных и.ф.с. Здесь будут рассмотрены свойства наиболее характерных элементов окрестности K_1 и прежде всего решена задача о полноте для них. Отношение $\leqslant$ с содержательной точки зрения можно считать характеризующим логическую сложность и.ф.с. $\mathcal{P}_\Sigma$ и рассмотрение окрестности K_1 тем самым несет информацию относительно "простейших" в указанном смысле и.ф.с. из $\mathcal{I}$.

Пусть заданы $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2)$ и $\Sigma' = (\Sigma_1', \Sigma_2')$, где $\Sigma_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_s\}$, $\Sigma_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$, $\Sigma_1' = \{A_1', A_2', \ldots, A_{s'}'\}$, $\Sigma_2' = \{B_1', B_2', \ldots, B_{t'}'\}$.

Назовем Σ подсистемой для Σ' и будем это обозначать $\Sigma \subseteq \Sigma'$, если для некоторых множеств

$$\mathcal{J}_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}, \quad \mathcal{J}_1 \subseteq \{1, 2, \dots, s'\},$$

$$\mathcal{J}_2 = \{j_1, j_2, \dots, j_t\}, \quad \mathcal{J}_2 \subseteq \{1, 2, \dots, t'\}$$

имеет место $A_u \subseteq A'_{i_u}$ и $B_v \subseteq B'_{j_v}$ для всех $u \in \{1, 2, \dots, s\}$ и $v \in \{1, 2, \dots, t\}$.

Пусть $C(\Sigma) = (\bigcup_{i=1}^{s} A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{t} B_j)$, $C' \subseteq C(\Sigma)$, $\mathcal{D}$ – некоторое множество, такое, что $|C(\Sigma)| = |\mathcal{D}|$, и θ – взаимно-однозначное отображение C на $\mathcal{D}$. Обозначим через $\theta(C')$ множество всех образов элементов из C', а через $\theta(\Sigma)$ – пару $(\theta(\Sigma_1), \theta(\Sigma_2))$, где $\theta(\Sigma_i) = \{\theta(E_1), \theta(E_2), \dots, \theta(E_w)\}$, и при $i = 1$ имеет место $E_j = A_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, а при $i = 2$ имеет место $E_k = B_k$, $k = 1, 2, \dots, t$.

Будем говорить, что Σ предшествует Σ' и писать в этом случае $\Sigma \leq \Sigma'$ если существуют подсистема Σ'' пары Σ' и такое указанное выше отображение θ, что имеет место $\theta(\Sigma'') = \Sigma$. Нетрудно видеть, что отношение $\leq$ транзитивно и рефлексивно. Пусть $\Sigma \leq \Sigma'$ и $\Sigma' \leq \Sigma$, будем писать в этом случае $\Sigma \sim \Sigma'$. Нетрудно видеть, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности и тем самым отношение $\leq$ является отношением частичного пердпорядка на множестве всех пар Σ. Это отношение перенесем на множество $\mathcal{I}$ всех и.ф.с. $\mathcal{P}_\Sigma$ следующим образом. Будем считать, что $\mathcal{P}_\Sigma$ предшествует $\mathcal{P}_{\Sigma'}$ и обозначать этот факт через $\mathcal{P}_\Sigma \leq \mathcal{P}_{\Sigma'}$, если $\Sigma \leq \Sigma'$. Аналогично, будем писать $\mathcal{P}_\Sigma \sim \mathcal{P}_{\Sigma'}$, если $\Sigma \sim \Sigma'$. Заметим, что отношение $\Sigma \sim \Sigma'$ означает получение Σ' из Σ за счет фактически только перенумерации элементов множества $C(\Sigma)$. Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{I}$ относительно введенного частичного предпорядка содержит ровно три минимальных класса K_1, K_2 и K_3, каждый из которых получается с помощью соответствующих отображений θ из и.ф.с. $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^{**}}$ и $\mathcal{P}_{\Sigma^{***}}$ соответственно, где $\Sigma_1^* = \Sigma_2^* = \Sigma_1^{**} = \Sigma_1^{***} = \{\{0,1\}\}$, $\Sigma_2^{**} = \{\{0,2\}\}$, $\Sigma_2^{***} = \{\{2,3\}\}$. $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$ в силу теорем 1.3 и 1.4 является конечно-порожденной, а $\mathcal{P}_{\Sigma^{**}}$ и $\mathcal{P}_{\Sigma^{***}}$ не являются таковыми. Особый интерес представляют, естественно, конечно-порожденные $\mathcal{P}_\Sigma$. Отметим, что $\mathcal{P}_\Sigma$ является конечно-порожденной тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_{\Sigma^*} \leq \mathcal{P}_\Sigma$, а также то, что если $\mathcal{P}_\Sigma$ конечно-порожденная, то и всякая $\mathcal{P}_{\Sigma'}$ такая, что $\mathcal{P}_{\Sigma'} \geq \mathcal{P}_\Sigma$ также является конечно-порожденной.

И.ф.с. $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$ исследовалась различными авторами. Наибольший вклад в ее изучение внес Е.Пост [1] , описавший решетку по включению всех замкнутых классов в $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$. С точки зрения теории k - значных логик ближайшим обобщением двузначной логики $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$ является трехзначная логика, которая, как установлено в работах [2,37] , обладает рядом существенных особенностей в сравнении с $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$. К их числу могут быть отнесены различие в решении задач о числе замкнутых классов, о базисах замкнутых классов и ряд других отличий. При рассмотрении более общей ситуации, приводящей к множеству $\mathcal{I}$ с указанным частичным предпорядком на нем, "ближайшими" обобщениями $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$ окажутся уже другие и.ф.с., более того, в множестве $\mathcal{I}$ цепь, состоящая из k - значных логик $\mathcal{P}_k$ допускает при любом k "уплотнение", то есть между любыми и.ф.с. $\mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_{k+1}$ в $\mathcal{I}$, очевидно, найдется $\mathcal{P}_\Sigma$ такая, что $\mathcal{P}_k \leq \mathcal{P}_\Sigma \leq \mathcal{P}_{k+1}$ причем $\mathcal{P}_\Sigma \nleq \mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_\Sigma \not\geq \mathcal{P}_{k+1}$. "Ближайшие" обобщения $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$, то есть соединение с $\mathcal{P}_{\Sigma^*}$ элементы из $\mathcal{I}$ образуют множество $\mathcal{D}=\{\mathcal{P}_{\Sigma^1},\mathcal{P}_{\Sigma^2},\dots \mathcal{P}_{\Sigma^6}\}$, где $\Sigma^1=(\{\{0,1\},\{0,3\}\},\{\{0,1\}\})$, $\Sigma^2=(\{\{0,1\},\{2,3\}\},\{\{0,1\}\})$,

$$\Sigma^3=(\{\{0,1\}\},\{\{0,1\},\{0,3\}\}),\quad \Sigma^4=(\{\{0,1\}\}\{\{0,1\},\{2,3\}\}),$$

$$\Sigma^5=(\{\{0,1\}\},\{\{0,1,2\}\}),\quad \Sigma^6=(\{\{0,1,2\}\},\{\{0,1\}\})$$

$\mathcal{P}_{\Sigma^6}$ является замкнутым классом в трехзначной логике $\mathcal{P}_3$, другие из названных и.ф.с. являются качественно новыми. Ниже мы рассмотрим задачу о полноте для этих и.ф.с. Отметим еще, что в [51,54,55,58] исследованы другие и.ф.с. $\mathcal{P}_\Sigma$, которые вместе с рассматриваемыми здесь образуют ту окрестность и.ф.с., где критерий полноты в терминах предполных классов оказывается еще эффективным. Для этих и.ф.с. явно вычислены все предполные классы.

§ 2.1. Некоторые свойства $\mathcal{P}_{\Sigma^1}$ и $\mathcal{P}_{\Sigma^2}$

Пусть $\mathcal{P}_\Sigma$ - произвольная из и.ф.с. $\mathcal{P}_{\Sigma^1}$ или $\mathcal{P}_{\Sigma^2}$. Сведем в таблицу 5 все функции от одного переменного в $\mathcal{P}_\Sigma$:

Таблица 5

x_1^1	0	1	x_1^1	$\bar{x}_1^1$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x_1^2	$e_1(x_1^2)$	$e_2(x_1^2)$
a	0	1
3	1	0

,

где $a=0$, если $A_2=\{0,3\}$ и $a=2$, если $A_2=\{2,3\}$. Обозначим через P_2 множество всех функций в $\mathcal{P}_{\Sigma^1}$, зависящих от переменных из X^1, а через L, S, M, T_0, T_1 - предполные классы в P_2, где L - класс всех линейных, S - самодвойственных, M - монотонных, T_0 - сохраняющих 0, T_1 - сохраняющих 1 функций [45].

Лемма 2.1.1. Если $i\in\{1,2\}$, то $[\{e_i, P_2\}]=\mathcal{P}_\Sigma$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $l_i(x_1^1)$, равную a, если $x_1^1=e_i(a)$, и равную 3, если $x_1^1=e_i(3)$. Очевидно, $l_i(e_i(x_1^2))=x_1^2$. Пусть $f(x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\dots,x_m^2)\in\mathcal{P}_\Sigma$, рассмотрим функцию $g(x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1,x_{n+1}^1,\dots,x_{n+m}^1)=f(x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1,l_i(x_{n+1}^1),l_i(x_{n+2}^1),\dots,l_i(x_{n+m}^1))$. Очевидно, что $g\in P_2$ и $f(x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\dots,x_m^2)=$
$=g(x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1,e_i(x_1^2),e_i(x_2^2),\dots,e_i(x_m^2))$.

Лемма доказана.

Следствие. Если $i\in\{1,2\}$, то $[\{e_i(x_1^2),\overline{x_1^1\vee x_2^1}\}]=\mathcal{P}_\Sigma$.

Пусть $b, c \in A_2$, рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_1^{bc} = \{ f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2);\ f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, b, b, \dots, b) = \bar{f}(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \dots, \bar{x}_n^1, c, c, \dots, c);\ n, m = 1, 2, \dots \}$$

Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_1^{bc} = \mathfrak{M}_1^{de}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: 1) $b \neq c$ и $d \neq e$ или 2) $b = d = c = e$.

Лемма 2.1.2. Множество $\mathfrak{M}_1^{bc}$ является предполным классом.

Доказательство. Очевидно, $[\mathfrak{M}_1^{bc}] = \mathfrak{M}_1^{bc}$ и $\mathfrak{M}_1^{bc} \neq P_\Sigma$. Пусть $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) \in \mathfrak{M}_1^{bc}$. Это означает, что при некоторых $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеет место

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots, b) = f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, c, c, \dots, c).$$

Возможны два случая.

1. $b \neq c$. Тогда $e_1, e_2 \in \mathfrak{M}_1^{bc}$. Подставим в f вместо переменного x_i^1 функцию e_j такую, что $e_j(b) = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, а вместо переменного x_ℓ^2 – переменное x_1^2, $\ell = 1, 2, \dots, m$. В результате, очевидно, получим константу d. Далее, так как множество S всех функций f из P_2, то есть таких, что $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) = \bar{f}(\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \dots, \bar{x}_n^1)$, содержится, очевидно, в $\mathfrak{M}_1^{bc}$, то с учетом леммы 2.1.1 и [45] будем иметь $[\mathfrak{M}_1^{bc} \cup \{f\}] = P_\Sigma$.

2. $b = c$. Подставим в f вместо x_i^1 функцию x_1^1, если $a_i = 0$, и функцию $\bar{x}_1^1$, если $a_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, а вместо переменных x_j^2 – переменные x_1^2, $j = 1, 2, \dots, m$. В результате получим функцию $g(x_1^1, x_1^2)$ такую, что $g(0, b) = g(1, b)$. Пусть для определенности $b = 3$. Так как $\bar{x}_1^1 \in \mathfrak{M}_1^{bc}$, то можно считать, что $g(0, 3) = 0$. Нетрудно видеть, что $g(x_1^1, x_1^2) \in \{0,\ e_2(x_1^2),\ x_1^1 \cdot e_2(x_1^2),\ \bar{x}_1^1 \cdot e_2(x_1^2)\}$. Пусть $g(x_1^1, x_1^2) \equiv 0$. Тогда в силу того, что $\bar{x}_1^1 \cdot e_1(x_1^2) \in \mathfrak{M}_1^{bc}$ и $S \subseteq \mathfrak{M}_1^{bc}$, имеем $[\mathfrak{M}_1^{bc} \cup \{g\}] \supseteq \{P_2, e_1\}$, то есть система $\mathfrak{M}_1^{bc} \cup \{f\}$ полна. Пусть $g(x_1^1, x_1^2) \in \{e_2(x_1^2),\ x_1^1 \cdot e_2(x_1^2)\}$. Подставим $g(x_1^1, x_1^2)$ вместо x_1^1 в функцию $x_1^1 \cdot e_1(x_1^2) \in \mathfrak{M}_1^{bc}$, получим константу 0 и сводим этот случай к предфдущему. Остается заметить, что при $g(x_1^1, x_1^2) = \bar{x}_1^1 \cdot e_2(x_1^2)$ имеет место $g(g(x_1^1, x_1^2), x_1^2) = x_1^1 \cdot e_2(x_1^2)$. Лемма доказана.

Пусть $b \in A_1$ и $c \in A_2$ рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_2^{bc} = \{ f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) : f(b, b, \dots, b, c, c, \dots, c) = b;\ m, n = 1, 2, \dots \}.$$

Лемма 2.1.3. Множество $\mathfrak{M}_2^{bc}$ является предполным классом, кроме случая, когда $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ и $(b, c) = (0, 3)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_2^{bc}$ в указанных в лемме случаях является замкнутым и отлично от P_Σ. Пусть $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) \notin \mathfrak{M}_2^{bc}$. Это означает, что $f(b, b, \dots, b, c, c, \dots, c) \neq b$.
Ясно, что $b \in \mathfrak{M}_2^{bc}$. Подставим в f вместо x_i^1 константу b и вместо x_j^2 – переменное x_1^2, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$. Получим функцию $g(x_1^2)$

такую, что $g(c) \neq b$. Если $g(x_1^2)$ – константа d, то, используя предполноту в P_2 класса $T_b \subseteq P_2$ всех функций f, таких, что $f(b,b,\dots,b)=b$ включение $T_b \subseteq \mathfrak{M}_2^{b,c}$ и то, что $e_i(x_1^2) \in \mathfrak{M}_2^{b,c}$ при $e_i(c)=b$, получаем, что $[\mathfrak{M}_2^{b,c} \cup \{f\}] = P_\Sigma$. Если $g(x_1^2)$ не константа, то $g(x_1^2)=e_j(x_1^2)$, $j \neq i$. Рассмотрим два подслучая. Пусть $b=0$, тогда $x_1^1 \vee e_i(x_1^2) \in \mathfrak{M}_2^{b,c}$, пусть $b=1$, тогда $x_1^1 \cdot e_i(x_1^2) \in \mathfrak{M}_2^{b,c}$. В обоих случаях подставим вместо x_1^1 функцию $e_j(x_1^2)$, в результате получим константы I и 0 соответственно и сведем функцию к случаю, когда функция $g(x_1^2)$ была константой. Лемма доказана.

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_3 = \{ & f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) : \forall c_1, c_2, \dots, c_n \in \{0,1\} \\ & \forall d_1, d_2, \dots, d_m, d_1', d_2', \dots, d_m' \\ & (((\forall i,j \in \{1,2,\dots,m\} \ (d_i, d_j' \in \{0,3\})) \Rightarrow (f(c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_m) = \\ & = f(c_1, c_2, \dots, c_n, d_1', d_2', \dots, d_m'))) \,\&\, ((d_1, d_1' \in \{2,3\}) \Rightarrow \\ & (f(c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_1, \dots, d_1) = f(c_1, c_2, \dots, c_n, d_1', d_1', \dots, d_1'))), \\ & n, m = 1, 2, \dots \}.\end{aligned}$$

Лемма 2.1.4. Множество $\mathfrak{M}_3$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_3$ является замкнутым множеством и $\mathfrak{M}_3 \neq P_\Sigma$. Пусть $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) \notin \mathfrak{M}_3$. Возможны два случая.

I. Пусть $A_2 = \{0,3\}$. Тогда для некоторых $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0,1\}$ и $b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_m \in \{0,3\}$ имеет место $f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, 0, b_{i+1}, \dots, b_m) \neq f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{i-1}, 3, b_{i+1}, \dots, b_m)$. Подставим в f вместо x_i^1 константу a_i, $a_i \in \mathfrak{M}$, $i=1,2,\dots,n$ и вместо x_j^2 – константу 0, если $b_j = 0$; вместо остальных переменных x_l^2, $l \neq i$ подставим x_1^2. Получим функцию $g(x_1^2, x_i^2)$. Если $g(x_1^2, x_1^2) \not\equiv const$, то имеем $g(x_1^2, x_1^2) = e_2(x_1^2)$. Если $g(x_1^2, x_1^2) \equiv const$, то подставляя вместо x_i^2 функцию 0, тоже получаем функцию $e_p(x_1^2)$. Остается воспользоваться леммой 2.I.I.

2. Пусть $A_2 = \{2,3\}$. Это означает, что при некоторых $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0,1\}$ имеет место $f(a_1, a_2, \dots, a_n, x_1^2, x_1^2, \dots, x_1^2) = e_q(x_1^2)$. Так как $\mathfrak{M}_3 \supseteq P_2$, то остается воспользоваться леммой 2.I.I. Лемма доказана.

Пусть $b \in A_2$, L – класс всех линейных функций из P_2, то есть функций, представимых в виде $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^1 + d \pmod 2$, и M – класс всех монотонных функций из P_2, то есть функций, сохраняющих отношение $0 \leq 1$. Обозначим через

$$\mathfrak{M}_4^b = \{ f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) : f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, b, b, \dots, b) \in L, \ n, m = 1, 2, \dots \}$$

и через

$$\mathfrak{M}_5^b=\{f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\ldots,x_m^2): f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,b,b,\ldots,b)\in M,\ n,m=1,2,\ldots\}$$

Лемма 2.1.5. Если $i\in\{4,5\}$, то множество $\mathfrak{M}_i^b$ является предполным классом, кроме случая, когда $A_2=\{0,3\}$ и $b=3$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в указанных случаях $\mathfrak{M}_i^b$ является замкнутым множеством и $\mathfrak{M}_i^b\neq P_\Sigma$. Пусть $f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\ldots,x_m^2)\notin\mathfrak{M}_i^b$. Это означает, что для функции $g(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1)=f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,b,b,\ldots,b)$ имеет место $g\notin\mathfrak{N}_i$, где $\mathfrak{N}_i=L$, если $i=4$, и $\mathfrak{N}_i=M$, если $i=5$. Пусть $e_\ell(b)=1$. Рассмотрим функцию $g_1(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_{n+1}^1,x_1^2)=g(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1)\cdot e_j(x_1^2)\vee x_{n+1}^1\cdot e_\ell(x_1^2)$, где $j\neq\ell$, из $\mathfrak{M}_i^b$. Нетрудно видеть, что

$$g_1(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,x_1^2,x_1^2,\ldots,x_1^2),x_1^2)=$$
$$=g(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1).$$

Для завершения доказательства леммы с учетом леммы 2.1.1 остается заметить, что предполный в P_2 класс $\mathfrak{N}_i$, а также функции e_1 и e_2 содержатся в $\mathfrak{M}_i^b$. Пусть $b\in A_1$ обозначим через

$$\mathfrak{M}_6^b=\{f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\ldots,x_m^2): \forall g_1,g_2,\ldots,g_n\in\{b,e_1(x_1^2),e_2(x_1^2)\}$$
$$(f(g_1,g_2,\ldots,g_n,x_1^2,x_1^2,\ldots,x_1^2)\in\{b,e_1(x_1^2),e_2(x_1^2)\},\ n,m=1,2,\ldots\}.$$

Лемма 2.1.6. Множество $\mathfrak{M}_6^b$ является предполным классом, кроме случая, когда $b=0$ и $A_2=\{0,3\}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в указанных случаях $\mathfrak{M}_6^b$ замкнутое множество и $\mathfrak{M}_6^b\neq P_\Sigma$. Пусть $f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\ldots,x_m^2)\in\mathfrak{M}_6^b$. Это означает, что при некоторых $g_1,g_2,\ldots,g_n\in\{b,e_1(x_1^2),e_2(x_1^2)\}$ имеет место $f(g_1,g_2,\ldots,g_n,x_1^2,x_1^2,\ldots,x_1^2)\equiv\bar b$. Возможны два случая.

1. Пусть $b=1$. Тогда, так как $x_1^1\vee\bar x_2^1\in\mathfrak{M}_6^b$, то в силу того, что $\{x_1^1\vee\bar x_2^1,0\}\not\subseteq T_0,T_1,L,M,S$, имеем $[\mathfrak{M}_6^b\cup\{f\}]\supseteq P_2$. Отсюда, в силу леммы 2.1.1 имеем $[\mathfrak{M}_6^b\cup\{f\}]=P_\Sigma$

2. Пусть $b=0$. Тогда $x_1^1\cdot\bar x_2^1\in\mathfrak{M}_6^b$, отсюда как и выше, $\{x_1^1\cdot\bar x_2^1,1\}\not\subseteq T_0,T_1,L,M,S$ и, значит, $[\mathfrak{M}_6^b\cup\{f\}]=P_\Sigma$

Лемма доказана.

Пусть $b\in\{1,2\}$, обозначим через

$$\mathfrak{M}_7^b=\{f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\ldots,x_m^2\}:\forall g_1,g_2,\ldots,g_n,g_{n+1},\ldots,g_{n+m}\in$$
$$\in\{0,1,e_b(x_1^2),x_1^2\}\ (!\,f(g_1,g_2,\ldots,g_n,g_{n+1},\ldots,g_{n+m})\in$$
$$\in\{0,1,e_b(x_1^2)\}),\ n,m=1,2,\ldots\},$$

где выражение $!a\in T$ читается так: если a определено, то $a\in T$.

Лемма 2.1.7. Если $A_2=\{1,3\}$, то множество $\mathfrak{M}_7^b$ является предполным классом.

Доказательство. Пусть $A_2=\{1,3\}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_7^b$ замкнутое множество и $\mathfrak{M}_7^b\neq P_\Sigma$. Пусть $f(x_1^1,x_2^1,\ldots,x_n^1,x_1^2,x_2^2,\ldots,x_m^2)\notin\mathfrak{M}_7^b$

это означает, что при некоторых

$$g_1, g_2, \dots, g_n, g_{n+1}, \dots, g_{n+m} \in \{0, 1, e_b(x_1^2), x_1^2\}$$

имеет место $f(g_1, g_2, \dots, g_n, g_{n+1}, \dots, g_{n+m}) = e_c(x_1^2)$, $c \neq b$.

Пусть для определенности $b=2$. Рассмотрим функцию

$$g(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \bar{x}_1^1 \cdot e_2(x_1^2) \vee \bar{x}_1^1 \cdot x_2^1 \cdot e_1(x_1^2) \vee x_2^1 \cdot e_2(x_1^2),$$

содержащуюся, очевидно, в $\mathcal{M}_7^b$. Нетрудно видеть, что

$$g(x_1^1, e_1(x_1^2), x_1^2) = \bar{x}_1^1 \cdot e_2(x_1^2) \vee \bar{x}_1^1 \cdot e_1(x_1^2) \vee e_1(x_1^2) \cdot e_2(x_1^2) = \bar{x}_1^1.$$

Так как $x_1^1 \cdot x_2^1 \in \mathcal{M}_7^b$ и $\{x_1^1 \cdot x_2^1, \bar{x}_1^1\} \notin T_0, T_1, M, S, L$, то с учетом леммы 2.1.1 $[\mathcal{M}_7^b \cup \{f\}] = P_\Sigma$. Лемма доказана.

§ 2.2. Решение задачи о полноте в $\mathcal{P}_{\Sigma'}$.

Обозначим через

$$\mathcal{N}_1 = \{\mathcal{M}_1^{0,3}, \mathcal{M}_1^{3,3}, \mathcal{M}_1^{0,0}, \mathcal{M}_2^{0,0}, \mathcal{M}_2^{1,3}, \mathcal{M}_2^{1,0}, \mathcal{M}_3, \mathcal{M}_4^0, \mathcal{M}_5^0, \mathcal{M}_6^1\}.$$

Если $\mathcal{M}_i^{a,b} \in \mathcal{N}_1$, где индексы a или b могут отсутствовать, то через $\mu_i^{a,b}$ обозначим функцию такую, что $\mu_i^{a,b} \notin \mathcal{M}_i^{a,b}$. Замкнутое множество $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} \subseteq P_{\Sigma_2}$, назовем регулярным, если для любого $\mathcal{M}_i^{a,b}$ из $\mathcal{N}_1$ имеет место $\mathcal{Z} \notin \mathcal{M}_i^{a,b}$.

Лемма 2.2.1. Если множество $\mathcal{Z}$ регулярно и содержит константу 0, то $\mathcal{Z} = P_{\Sigma'}$.

Доказательство. Воспользуемся системой $\mathcal{M} = \{\mu_4^0, \mu_1^{0,0}, \mu_5^0, \mu_2^{0,0}, 0\}$. Ясно, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Z}$. Подставим вместо каждого переменного x_i^2 в функции системы $\mathcal{M}$ константу 0, получим систему булевых функций $\mathcal{M}'$. Ясно, что $\mathcal{M}' \notin L, S, M, T_0, T_1$. Таким образом, $\mathcal{Z} \supseteq P_2$. Нетрудно видеть, что из функции μ_3, $\mu_3 \in \mathcal{Z}$ подстановкой констант и отождествлением переменных можно получить функцию $g(x_1^2, x_2^2)$, существенно зависящую от x_1^2. При этом говорят, что $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)$ существенно зависит от переменного u_i, если найдутся два таких набора значений переменных, у которых отличаются только значения переменного u_i и на которых функция f принимает разные значения. Таким образом, при некотором b $g(0,b) \neq g(3,b)$. Если $b=0$, то $g(y,0) \in \{e_1(x_1^2), e_2(x_1^2)\}$. Заметим далее, что $g(x_1^2, x_1^2) \in \{0, 1, e_1(x_1^2), e_2(x_1^2)\}$, и рассмотрим случай, когда $g(x_1^2, x_1^2) \equiv const$ и $g(0,3) \neq g(3,3)$, то есть $g(0,3) \neq g(0,0)$. Нетрудно видеть, что $g(0, x_1^2) \in \{e_1(x_1^2), e_2(x_1^2)\}$. Таким образом, при некотором i $e_i(x_1^2) \in \mathcal{Z}$ и тем самым с учетом леммы 2.1.1, $\mathcal{Z} = P_{\Sigma'}$.

Лемма 2.2.2. Если множество $\mathcal{Z}$ регулярно и содержит константу 1, то $\mathcal{Z} = P_{\Sigma'}$.

Доказательство. Воспользуемся функциями $\mu_2^{1,0}$ и $\mu_2^{1,3}$ из $\mathcal{Z}$. Подставим вместо каждого переменного x_i^1 и x_j^2 в них константу 1 и переменное x_1^2 соответственно. В результате получим функции $g_1(x_1^2)$, $g_2(x_1^2)$ такие, что $g_1(0) = g_2(3) = 0$. Если хотя бы одна из функций g_1 или g_2 константа, то $0 \in \mathcal{Z}$ и, в силу леммы 2.2.1, $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^1}$. Пусть обе функции не константы, то есть $g_1(x_1^2) = e_1(x_1^2)$, $g_2(x_1^2) = e_2(x_1^2)$. Возьмем в $\mathcal{Z}$ функцию μ_6^1, из нее подстановкой $1,\ x_1^2,\ e_1(x_1^2),\ e_2(x_1^2)$, очевидно, можно получить константу 0 и вновь воспользоваться леммой 2.2.1. Лемма доказана.

Лемма 2.2.3. Если множество $\mathcal{Z}$ регулярно и при некотором i $i \in \{1,2\}$ содержит функцию $e_i(x_1^2)$, то $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^1}$.

Доказательство. Воспользуемся функциями $\mu_2^{0,0}$ и $\mu_2^{1,0}$ из $\mathcal{Z}$. Подставим в каждую из них вместо каждого переменного x_j^1 функцию $e_i(x_1^2)$, а вместо каждого x_j^2 – переменное x_1^2. В результате получим функции $g_1(x_1^2)$ и $g_2(x_1^2)$, причем хотя бы для одной из них будет иметь место $e_i(0) \neq g_r(0)$, $r \in \{1,2\}$. Если $g_r(x_1^2)$ константа, то в силу леммы 2.2.1 и леммы 2.2.2 будет выполнено $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^1}$. Пусть $g_r(x_1^2)$ не константа, это означает, что $g_r(x_1^2) = \bar{e}_i(x_1^2)$.

Возьмем функцию $\mu_1^{0,3}(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2)$ из $\mathcal{Z}$. Для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место $\mu_1^{0,3}(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots, 0) = \mu_1^{0,3}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, 3, 3, \ldots, 3)$. Подставим в $\mu_1^{0,3}$ вместо каждого переменного x_j^1 функцию $e_1(x_1^2)$, если $a_j = 0$, и функцию $e_2(x_1^2)$, если $a_j = 1$; а вместо каждого переменного x_e^2 – переменное x_1^2. В результате, очевидно, получим функцию $g(x_1^2) \equiv const$, и снова пользуемся леммами 2.2.1 и 2.2.2. Лемма доказана.

Лемма 2.2.4. Если множество $\mathcal{Z}$ регулярно и содержит функцию $\bar{x}_1^1$, то $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^1}$.

Доказательство. Воспользуемся функцией $\mu_1^{0,0}$ из $\mathcal{Z}$. Для нее найдутся значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такие, что

$$\mu_1^{0,0}(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots, 0) = \mu_1^{0,0}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, 0, 0, \ldots, 0).$$

Подставим в $\mu_1^{0,0}$ вместо каждого переменного x_i^1 функцию $\bar{x}_1^1$, если $a_i = 0$, и переменное x_1^1, если $a_i = 1$. Вместо каждого переменного x_j^2 подставим переменное x_1^2. В результате получим функцию $g(x_1^1, x_1^2)$ такую, что $g(0,0) = g(1,0)$. Так как $\bar{x}_1^1 \in \mathcal{Z}$, то можно считать, что $g(0,0) = 0$. Нетрудно видеть, что $g(x_1^1, x_1^2) \in \{0,\ e_1(x_1^2),\ x_1^1 \cdot e_1(x_1^2),\ \bar{x}_1^1 \cdot e_1(x_1^2)\}$, если $g(x_1^1, x_1^2) \in \{0, e_1(x_1^2)\}$, то используя леммы 2.2.1 и 2.2.3, получаем, что $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^1}$. Так как $\bar{x}_1^1 \in \mathcal{Z}$, то можно считать, что $g(x_1^1, x_1^2) = x_1^1 \cdot e_1(x_1^2)$. Воспользуемся теперь функцией $\mu_1^{3,3}$, $\mu_1^{3,3} \in \mathcal{Z}$. Для нее при некоторых $b_1, b_2, \ldots, b_m$ имеет место:

$$\mu_1^{3,3}(b_1, b_2, \ldots, b_m, 3, 3, \ldots, 3) = \mu_1^{3,3}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m, 3, 3, \ldots, 3).$$

Так же как и выше, подставим в нее вместо x_i^1 функцию $\bar{x}_1^1$, если $b_i = 0$ и x_1^1, если $b_i = 1$, а переменные x_j^2 отождествим. Получим функцию $h(x_1^1, x_1^2)$ такую, что $h(0,3) = h(1,3)$. Нетрудно видеть, что можно считать верным

$$h(x_1^1, x_1^2) \in \{0,\ e_2(x_1^2),\ x_1^1 \cdot e_2(x_1^2),\ \bar{x}_1^1 \cdot e_2(x_1^2)\}.$$

Если $h(x_1^1, x_1^2) \in \{0, e_2(x_1^2)\}$, пользуемся леммами 2.2.1 и 2.2.3. Таким образом, можно считать, что $h(x_1^1, x_1^2) = x_1^1 \cdot e_2(x_1^2)$. Но $h(g(x_1^1, x_1^2), x_1^2) \not\equiv 0$ и снова пользуемся леммой 2.2.1. Лемма доказана.

Лемма 2.2.5. Если множество $\mathcal{L}$ регулярно, то $\mathcal{L} = P_{\Sigma^1}$.

Доказательство. Воспользуемся функцией $\mu_2^{0,0}$ из $\mathcal{L}$. Отождествим в ней все переменные x_i^1 и x_j^2 соответственно. Получим функцию $\varepsilon(x_1^1, x_1^2)$. Если бы $\varepsilon(x_1^1, x_1^2)$ зависела только от одного аргумента, то она содержалась бы среди $\{e_2(x_1^2), \bar{x}_1^1, 1\}$, и мы могли бы воспользоваться леммами 2.2.2 – 2.2.4. Поэтому можно считать, что нам остается рассмотреть случаи, когда $\varepsilon(x_1^1, x_1^2) \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$, где функции ε_i определены в таблице 6.

Таблица 6.

x_1^1	x_1^2	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5
0	0	1	1	1	1	1
0	3	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	3	0	1	1	1	0

Возможны следующие случаи.

1. $\varepsilon(x_1^1, x_1^2) = \varepsilon_1(x_1^1, x_1^2)$. Воспользуемся функцией $\mu_1^{0,0}$ из $\mathcal{L}$. Очевидно, можно считать, что $\mu_1^{0,0}$ зависит только от x_1^1, x_2^1, x_1^2 и $\mu_1^{0,0}(0,1,0) = \mu_1^{0,0}(1,0,0)$. Рассмотрим $\nu(x_1^1, x_1^2) = \mu_1^{0,0}(x_1^1, \varepsilon_1(x_1^1, x_1^2), x_1^2)$. Очевидно, $\nu(0,0) = \nu(1,0)$. Так же, как и выше, можно считать, что ν зависит существенно от двух аргументов и что для нее тем самым возможны лишь подслучаи, когда $\nu \in \{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4\}$, где $\nu_1(x_1^1, x_1^2) = x_1^1 \cdot e_1(x_1^2)$, $\nu_2(x_1^1, x_1^2) = \bar{x}_1^1 \cdot e_1(x_1^2)$, $\nu_3(x_1^1, x_1^2) = \bar{\nu}_2(x_1^1, x_1^2)$, $\nu_4(x_1^1, x_1^2) = \bar{\nu}_1(x_1^1, x_1^2)$.

Непосредственное проверкой убеждаемся в том, что

$$\nu_1(\varepsilon_1, x_1^2) \equiv 0, \quad \nu_2(\varepsilon_1, x_1^2) = e_1(x_1^2), \quad \nu_3(\varepsilon_1, x_1^2) = e_2(x_1^2), \quad \nu_4(\varepsilon_1, x_1^2) \equiv 1,$$

и пользуемся леммами 2.2.1 – 2.2.3.

2. $\varepsilon(x_1^1, x_1^2) = \varepsilon_2(x_1^1, x_1^2)$. Воспользуемся функцией $\mu_2^{1,3}$ из $\mathcal{L}$. Отождествим все переменные x_i^1 и x_j^2 у $\mu_2^{1,3}$ соответственно. Получим функцию $\varkappa(x_1^1, x_1^2)$. Как и выше, можно считать, что $\varkappa$ существенно зависит от x_1^1 и x_1^2. Тем самым остается рассмотреть подслучаи, когда $\varkappa \in \{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5\}$, где $\varkappa_5 = \varepsilon_1$, а остальные случаи собраны в таблице 7.

Таблица 7.

x_1^1	x_1^2	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	$\varkappa_4$
0	0	0	0	0	1
0	3	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	3	0	0	0	0

Заметим, что $\mathcal{E}_2(\mathscr{X}_1(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=\mathcal{E}_1(x_1^1,x_1^2)$, поэтому, когда $\mathscr{X}\in\{\mathscr{X}_4,\mathscr{X}_5\}$, попадаем в разобранный случай 1. Далее, так как $\mathcal{E}_2(\mathscr{X}_3,x_1^2)=\bar{x}_1^1$, при $\mathscr{X}=\mathscr{X}_3$ пользуемся леммой 2.2.4. Если $\mathscr{X}=\mathscr{X}_2$, то $\mathcal{E}_2(\mathscr{X}_2,x_1^2)=\mathscr{X}_4$. Таким образом, остается рассмотреть один случай, когда $\mathscr{X}=\mathscr{X}_4$. Воспользуемся функцией $\mu_1^{3,3}$, $\mu_1^{3,3}\in\mathcal{Z}$. Очевидно, можно считать, что она зависит только от x_1^1, x_2^1, x_1^2. Рассмотрим $\delta(x_1^1,x_1^2)=\mu_1^{3,3}(x_1^1,\mathscr{X}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^2)$. Очевидно, $\delta(0,3)=\delta(1,3)$, и, как и выше, можно считать, что δ существенно зависит от x_1^1 и x_1^2. Поэтому $\delta\in\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$, где $\delta_1=\mathscr{X}_1$, $\delta_2=x_1^1\vee e_1(x_1^2)$, $\delta_3=\bar{x}_1^1\vee e_1(x_1^2)$, $\delta_4=\mathcal{E}_1(x_1^1,x_1^2)$. Заметим, что $\mathcal{E}_2(\delta_1(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=\mathcal{E}_1(x_1^1,x_1^2)$, $\delta_2(\mathscr{X}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^2)\equiv 1$, $\delta_3(\mathscr{X}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=e_1(x_1^2)$.

Таким образом, попадаем в случай 1, либо пользуемся леммами 2.2.2 и 2.2.3.

3. $\mathcal{E}(x_1^1,x_1^2)=\mathcal{E}_3(x_1^1,x_1^2)$. Вновь пользуемся функцией $\mu_2^{1,3}$ из $\mathcal{Z}$, и получаем из нее функцию $\mathscr{X}$, для которой возможные случаи собраны в таблице 7. Заметим, что $\mathcal{E}_3(\mathscr{X}_1(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=e_2(x_1^2)$, и мы можем при $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1$ воспользоваться леммой 2.2.3. Остается рассмотреть следующие подслучаи.

а). $\mathscr{X}\in\{\mathscr{X}_2,\mathscr{X}_3\}$. Рассмотрим функцию $\mu_1^{3,3}$, $\mu_1^{3,3}\in\mathcal{Z}$. Нетрудно видеть, что отождествлением некоторых переменных из $\mu_1^{3,3}$ можно получить функцию $\alpha(x_1^1,x_2^1,x_1^2)$, такую, что $\alpha(0,1,3)=\alpha(1,0,3)$. Рассмотрим функцию $\beta(x_1^1,x_1^2)=\alpha(x_1^1,\mathscr{X}(x_1^1,x_1^2),x_1^2)$. Нетрудно видеть, что $\beta(0,3)=\beta(1,3)$. Можно считать, что β существенно зависит от x_1^1 и x_1^2, поэтому $\beta\in\{\mathscr{X}_1,\mathcal{E}_1,\rho_1,\rho_2\}$, где $\rho_1=x_1^1\vee e_1(x_1^2)$ и $\rho_2=\bar{x}_1^1\vee e_1(x_1^2)$. При $\beta\in\{\mathscr{X}_1,\mathcal{E}_1\}$ попадаем в уже рассмотренные случаи. При $\beta\in\{\rho_1,\rho_2\}$ рассматриваем $\mathcal{E}_3(\rho_2(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=\mathcal{E}_3(\rho_1(x_1^1,x_1^2),x_1^2)\equiv 1$, затем пользуемся леммой 2.2.2.

б). $\mathscr{X}=\mathscr{X}_4$. Воспользуемся функцией $\mu_2^{1,0}$, $\mu_2^{1,0}\in\mathcal{Z}$. Отождествим все переменные x_i^1 и x_j^2 в $\mu_2^{1,0}$ соответственно, получим функцию $\omega(x_1^1,x_1^2)$ такую, что $\omega(1,0)=0$. Можно считать, что $\omega\in\{\mathscr{X}_2,\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\lambda_1,\lambda_2\}$, где $\lambda_1(x_1^1,x_1^2)=x_1^1\cdot e_1(x_1^2)$, $\lambda_2(x_1^1,x_1^2)=\bar{x}_1^1\vee e_1(x_1^2)$.
Так как $\lambda_1(\mathscr{X}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=\mathscr{X}_2(x_1^1,x_1^2)$, $\lambda_2(\mathscr{X}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=e_1(x_1^2)$, то во всех случаях либо попадаем в разобранные случаи, либо пользуемся леммой 2.2.3.

4. $\mathcal{E}(x_1^1,x_1^2)=\mathcal{E}_4(x_1^1,x_1^2)$. Вновь пользуемся функцией $\mathscr{X}(x_1^1,x_1^2)$. Так как $\mathscr{X}_3(\mathcal{E}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=\mathcal{E}_1(x_1^1,x_1^2)$ и $\mathscr{X}_4(\mathscr{X}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^2)=\mathcal{E}_3(x_1^1,x_1^2)$, то остается рассмотреть 2 случая, когда $\mathscr{X}\in\{\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2\}$. Рассмотрим функцию $\mu_1^{0,3}$. Можно считать, что $\mu_1^{0,3}$ зависит только от x_1^1, x_2^1, x_1^2 и $\mu_1^{0,3}(0,1,0)=\mu_1^{0,3}(1,0,3)$. Рассмотрим $\psi(x_1^1,x_1^2)=\mu_1^{0,3}(\mathcal{E}_4(x_1^1,x_1^2),x_1^1,x_1^2)$. Очевидно, $\psi(0,3)=\psi(1,0)$ и можно считать, что $\psi\in\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathscr{X}_3,\mathscr{X}_4,\xi_1,\xi_2\}$, где $\xi_1(x_1^1,x_1^2)=x_1^1\cdot e_1(x_1^2)$, $\xi_2=x_1^1\vee e_1(x_1^2)$. Если $\psi\in\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathscr{X}_3,\mathscr{X}_4\}$, то попадаем в рассмотренные случаи. Если

$\psi = \xi_1$, то в силу того, что $\varepsilon_4(\xi_1(x_1^1, x_1^2), x_1^2) \equiv 1$, пользуемся леммой 2.2.1. Пусть $\psi = \xi_2$. Заметим, что $\varkappa_2(\xi_2(x_1^1, x_1^2), x_1^2) \equiv 0$, поэтому остается рассмотреть случай, когда $\varepsilon_4, \varkappa_1, \xi_2 \in \mathcal{Z}$. Воспользуемся функцией $\mu_1^{0,0}$, $\mu_1^{0,0} \in \mathcal{Z}$. Можно считать, что для $\mu_1^{0,0}$ имеет место $\mu_1^{0,0}(0,1,0) = \mu_1^{0,0}(1,0,0)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x_1^1, x_1^2) = \mu_1^{0,0}(x_1^1, \varepsilon_4(x_1^1, x_1^2), x_1^2)$. Ясно, что $\varphi(0,0) = \varphi(1,0)$, поэтому можно считать, что $\varphi(x_1^1, x_1^2) = \varepsilon_5$ в остальных случаях попадаем в уже разобранные ситуации.

5. $\varepsilon(x_1^1, x_1^2) = \varepsilon_5(x_1^1, x_1^2)$. Так как $\varepsilon_5(\varepsilon_5(x_1^1, x_1^2), x_1^2) = \varepsilon_3(x_1^1, x_1^2)$, то попадем в случай 3. Лемма доказана.

Теорема 2.2.1. Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \in P_{\Sigma'}$, является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из следующих попарно различных предполных классов.

$$\mathfrak{M}_1^{0,3},\ \mathfrak{M}_1^{3,3},\ \mathfrak{M}_1^{0,0},\ \mathfrak{M}_2^{0,0},\ \mathfrak{M}_2^{1,3},\ \mathfrak{M}_2^{1,0},\ \mathfrak{M}_6,\ \mathfrak{M}_4^0,\ \mathfrak{M}_5^0,\ \mathfrak{M}_6^1.$$

Доказательство. Предполнота этих классов установлена в леммах 2.1.2 – 2.1.7. В таблице 8 приведены распределения некоторых функций по этим классам. Из нее видно, что все эти классы попарно различны. Из леммы 2.2.5 вытекает, что других предполных классов в $\mathcal{P}_{\Sigma}$, нет. Утверждение следует теперь из замкнутости и неполноты предполных классов и из леммы 2.2.5. Таблица 8.

	$\mathfrak{M}_1^{0,3}$	$\mathfrak{M}_1^{3,3}$	$\mathfrak{M}_1^{0,0}$	$\mathfrak{M}_2^{0,0}$	$\mathfrak{M}_2^{1,3}$	$\mathfrak{M}_2^{1,0}$	$\mathfrak{M}_3$	$\mathfrak{M}_4^0$	$\mathfrak{M}_5^0$	$\mathfrak{M}_6^1$
0	–	–	–	+	–	–	+	+	+	–
1	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+
$\bar{x}_1^1$	+	+	+	–	–	–	+	+	–	–
$e_1(x_1^2)$	+	–	–	+	+	–	–	+	+	+
$e_2(x_1^2)$	+	–	–	–	–	+	–	+	+	+
$x_1^1 \cdot e_1(x_1^2)$	–	+	–	+	+	–	–	+	+	–

§ 2.3. Специальные предполные классы в $\mathcal{P}_{\Sigma}$.

Пусть имеются функции $g_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ и $g_2(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ из P_2, обозначим через $\lambda_{g_1, g_2} = g_1 \cdot e_2(x_1^2) \vee g_2 \cdot e_1(x_1^2)$.

Лемма 2.3.1. Пусть $\mathfrak{M} \supseteq \{\lambda_{0, x_i^1}, \lambda_{1, x_i^1}, \lambda_{x_i^1, 0}, \lambda_{x_i^1, 1}, \lambda_{g_1, g_2}\}$ и существуют такие переменные x_i^1, x_j^1, $i \neq j$, от которых g_1 и g_2 соответственно зависят существенно, тогда $\lambda_{x_i^1, x_j^1} \in [\mathfrak{M}]$.

Доказательство. Пусть $\lambda_{g_1, g_2} = g(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_n^1, x_1^2)$, тогда для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_n$ будет иметь место

$$g_1(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq g_1(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

и

$$g_2(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, 0, b_{j+1}, \ldots, b_n) \neq g_2(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, 1, b_{j+1}, \ldots, b_n).$$

Нетрудно видеть, что

$$g(\lambda_{a_1, x_1^1}, \lambda_{a_2, x_2^1}, \ldots, \lambda_{a_{i-1}, x_{i-1}^1}, x_i, \lambda_{a_{i+1}, x_{i+1}^1}, \ldots, \lambda_{a_n, x_n^1}, x_1^2) =$$
$$= \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, g_2} = \varphi(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, x_1^2),$$

$$\varphi(\lambda_{x_1^1, b_1}, \lambda_{x_2^1, b_2}, \ldots, \lambda_{x_{j-1}^1, b_{j-1}}, x_j^1, \lambda_{x_{j+1}^1, b_{j+1}}, \ldots, \lambda_{x_n^1, b_n}, x_1^2) =$$
$$= \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, (x_j^1)^{\sigma_2}} = \psi(x_i^1, x_j^1, x_1^2).$$

Остается заметить, что $\psi(\psi(x_i^1, x_j^1, x_1^2), \psi(x_i^1, x_j^1, x_1^2), x_1^2) = \lambda_{x_i^1, x_j^1}$.

Лемма доказана.

Обозначим через

$$\mathfrak{M}_1 = \{ f(x_1^1, x_2^1, \ldots x_n^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2) : (f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, x_1^2, x_1^2, \ldots, x_1^2) =$$
$$= \lambda_{f_1, f_2}) \Rightarrow ((f_1 \equiv c_1) \vee (f_2 \equiv c_2) \vee (f_1, f_2 \in \{(x_i^1)^{\sigma_1}, (x_i^1)^{\sigma_2}\})),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots \},$$

где

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Лемма 2.3.2. Множество $\mathfrak{M}_1$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_1$ является замкнутым классом, $\mathfrak{M}_1 \neq P_{\Sigma^2}$. Пусть $f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2) \notin \mathfrak{M}_1$. Это означает, что для функций $f_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ и $f_2(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ из разложения
$f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, x_1^2, x_1^2, \ldots, x_1^2) = f_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) \cdot e_2(x_1^2) \vee$
$\vee f_2(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) \cdot e_1(x_1^2)$ найдутся такие переменные x_i^1 и x_j^1, $i \neq j$; $1 \leq i$, $j \leq n$, от которых они соответственно зависят существенно. Заметим, что при любых c, $c \in \{0, 1\}$ и $\ell = 1, 2, \ldots$ выполнено $\lambda_{c, x_\ell^1}, \lambda_{x_\ell^1, c} \in \mathfrak{M}_1$. Таким образом, в силу леммы 2.3.1 $\theta(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, x_2^1} \in \mathfrak{M}_1$. Далее, $\omega_1(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \overline{(x_1^1 \vee x_2^1)} \cdot c_2(x_1^2)$ и $\omega_2(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \overline{(x_1^1 \vee x_2^1)} \cdot e_1(x_1^2)$ содержатся в $\mathfrak{M}_1$. Нетрудно видеть, что $\theta(\omega_1, \omega_2, x_1^2) = \overline{x_1^1 \vee x_2^1}$ и так как $e_1, e_2 \in \mathfrak{M}_1$, то с учетом следствия из леммы 2.1.1 имеем $[\mathfrak{M}_1 \cup \{f\}] = P_{\Sigma^2}$. Лемма доказана.

Пусть $a \in \{1, 2\}$, $b \in \{0, 1\}$, $\ell \in \{1, 2\}$, $\ell \neq a$ и

$$C_{a,b} = \{ f(x_1^1, x_1^2) : (f(x_1^1, x_1^2) = \lambda_{f_1, f_2}) \Rightarrow ((f_a \in \{0, 1\} \vee$$
$$\vee ((f_a \in \{x_1^1, \bar{x}_1^1\}) \mathbin{\&} (f_\ell \in \{x_1^1, b\}))), f \in P_{\Sigma^2} \}.$$

Обозначим через

$$\mathfrak{M}_1^{a,b} = \{ f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2) : \forall g_1, g_2, \ldots, g_n \in C_{a,b}$$
$$(f(g_1, g_2, \ldots, g_n, x_1^2, x_1^2, \ldots, x_1^2) \in C_{a,b}), \ f \in P_{\Sigma^2} \}.$$

Ясно, что $\mathfrak{M}_1^{a,b} \supseteq C_{a,b}$.

Лемма 2.3.3. Множество $\mathfrak{M}_1^{a,b}$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_9^{a,b}$ замкнуто и отлично от P_{Σ^2}. Пусть $f(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2) \notin \mathfrak{M}_9^{a,b}$. Это означает, что при некоторых $g_1, g_2, \dots, g_n \in C_{a,b}$ для $\varphi(x_1^1, x_1^2) = f(g_1, g_2, \dots, g_n, x_1^2, x_1^2, \dots, x_1^2) = \lambda_{\varphi_1, \varphi_2}$ имеет место $\varphi_a \in \{x_1^1, \bar{x}_1^1\}$ и $\varphi_\ell \in \{\bar{x}_1^1, \bar{b}\}$, $\ell \neq a$. Нетрудно видеть, что λ_{c, x_ℓ^1}, $\lambda_{x_\ell^1, c}$, $\rho_1 = \overline{(x_1^1 \vee x_2^1)} \cdot e_2(x_1^2) \vee d \cdot e_1(x_1^2)$ и $\rho_2 = d \cdot e_2(x_1^2) \vee \overline{(x_1^1 \vee x_2^1)} \cdot e_1(x_1^2)$ содержатся в множестве $[\mathfrak{M}_9^{a,b} \cup \{f\}]$ при любых $c \in \{0,1\}$, $\ell \in \{1,2,\dots\}$ и некотором d, $d \in \{0,1\}$. Заметим еще, что $\psi(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \lambda_{\psi_1, \psi_2}$, где $\psi_\ell(x_1^1, x_2^1) = x_1^1 \circledast x_2^1$ и $\psi_a(x_1^1, x_2^1) = x_1^1$, $\ell \neq a$ и при этом $\circledast$ обозначает $\vee$, если $b=0$, и обозначает $\&$, если $b=1$, также содержится в $\mathfrak{M}_9^{a,b}$. По лемме 2.3.1 имеем $\theta(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, x_2^1} \in [\mathfrak{M}_9^{a,b} \cup \{f\}]$. Остается заметить, что $\theta(\rho_1, \rho_2, x_1^2) = \overline{x_1^1 \vee x_2^1}$ и $e_1, e_2 \in \mathfrak{M}_9^{a,b}$. Теперь утверждение леммы следует из следствия леммы 2.1.1.

§ 2.4. Решение задачи о полноте в $\mathcal{P}_{\Sigma^2}$.

Применительно к $\mathcal{P}_{\Sigma^2}$ по аналогии вводим функции $\mu_i^{a,b}$ и понятие регулярности множества $\mathfrak{X}$ по отношению к системе

$$\mathfrak{N}_2 = \{ \mathfrak{M}_1^{2,2}, \mathfrak{M}_1^{2,3}, \mathfrak{M}_1^{3,3}, \mathfrak{M}_2^{0,2}, \mathfrak{M}_2^{0,3}, \mathfrak{M}_2^{1,2}, \mathfrak{M}_2^{1,3},$$
$$\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4^2, \mathfrak{M}_4^3, \mathfrak{M}_5^2, \mathfrak{M}_5^3, \mathfrak{M}_6^0, \mathfrak{M}_6^1, \mathfrak{M}_7^1,$$
$$\mathfrak{M}_7^2, \mathfrak{M}_8, \mathfrak{M}_9^{1,0}, \mathfrak{M}_9^{1,1}, \mathfrak{M}_9^{2,0}, \mathfrak{M}_9^{2,1} \}.$$

Нетрудно видеть, что с учетом критерия полноты в $\mathcal{P}_2$ справедливо следующее замечание.

Замечание. Если $\mathfrak{X}$ регулярно, то для любых функций f_1, f_2 из P_2 найдутся такие функции g_1, g_2 из P_2, что $\{\lambda_{f_1, g_2}, \lambda_{g_1, f_2}\} \subseteq \mathfrak{X}$.

Лемма 2.4.1. Если множество $\mathfrak{X}$ регулярно и содержит не менее трех функций из $\lambda_{x_1^1, 0}$, $\lambda_{x_1^1, 1}$, λ_{0, x_1^1}, λ_{1, x_1^1}, то $\mathfrak{X} = P_{\Sigma^2}$.

Доказательство. Предположим сначала, что все указанные в лемме функции $\lambda_{x_1^1, 0}, \dots, \lambda_{1, x_1^1}$ содержатся в $\mathfrak{X}$, и покажем, что $\mathfrak{X} = P_{\Sigma^2}$. Воспользуемся функцией μ_8, $\mu_8 \in \mathfrak{X}$. По лемме 2.3.1 функция $\theta(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, x_2^1}$ содержится в $\mathfrak{X}$. Далее, в силу замечания, при некоторых f_2, g_1 из P_2 будет иметь место λ_{f_1, f_2}, $\lambda_{g_1, g_2} \in \mathfrak{X}$, где $f_1 = \overline{x_1^1 \vee x_2^1}$, $g_2 = \overline{x_1^1 \vee x_2^1}$. И, так как $\theta(\lambda_{f_1, f_2}, \lambda_{g_1, g_2}, x_1^2) = \overline{x_1^1 \vee x_2^1}$ то $\mathfrak{X} \supseteq P_2$. Воспользуемся теперь функцией $\mu_3(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)$ из $\mathfrak{X}$. Найдутся такие константы $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0,1\}$, что $\mu_3(a_1, a_2, \dots, a_n, x_1^2, x_1^2, \dots, x_1^2) \in \{e_1(x_1^2), e_2(x_1^2)\}$.
Отсюда в силу леммы 2.1.1 $\mathfrak{X} = P_{\Sigma^2}$. Сведем теперь утверждение леммы к этому случаю. Пусть для определенности λ_{0, x_1^1}, λ_{1, x_1^1}, $\lambda_{x_1^1, 0} \in \mathfrak{X}$. При некоторых $h_1, h_2 \in \{0, 1, x_1^1, \bar{x}_1^1\}$ справедливо $\lambda_{\bar{x}_1^1, h_1}$, $\lambda_{h_2, \bar{x}_1^1} \in \mathfrak{X}$. Так как $[\{\lambda_{\bar{x}_1^1, 1}\}] \ni \lambda_{x_1^1, 1}$, $[\{\lambda_{x_1^1, 0}, \lambda_{\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^1}\}] \ni \lambda_{x_1^1, 1}$,

$[\{\lambda_{x_i^1,0},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,x_i^1}\}] \ni \lambda_{\bar{x}_i^1,0}$, то можно считать, что $\mathcal{Z} \supseteq \mathfrak{M} = \{\lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{1,x_i^1},\ \lambda_{x_i^1,0}, \lambda_{\bar{x}_i^1,0}\}$. Аналогично, так как

$[\{\lambda_{x_i^1,0},\ \lambda_{x_i^1,\bar{x}_i^1}\}] \ni \lambda_{x_i^1,1}$, $[\{\lambda_{x_i^1,0},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,\bar{x}_i^1}\}] \ni \lambda_{x_i^1,1}$,

$[\{\lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{1,\bar{x}_i^1}\}] \ni \lambda_{0,\bar{x}_i^1}$

то можно считать, что $\mathcal{Z} \supseteq (\mathfrak{M} \cup \{\lambda_{0,\bar{x}_i^1}\})$. Замкнем множество $\mathfrak{M} \cup \{\lambda_{0,\bar{x}_i^1}\}$ и получим, что

$$\mathcal{Z} \supseteq \{\lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{1,x_i^1},\ \lambda_{x_i^1,0},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,0},\ \lambda_{0,0},\ \lambda_{1,0},\ \lambda_{0,\bar{x}_i^1},\ \lambda_{0,1},\ \lambda_{1,1},\ \lambda_{1,\bar{x}_i^1}\}.$$

Воспользуемся теперь функцией $\mu_9^{1,0}$, $\mu_9^{1,0} \in \mathcal{Z}$. Можно считать, что

$$\mu_9^{1,0}(\lambda_{0,0},\ \lambda_{0,1},\ \lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{0,\bar{x}_i^1},\ \lambda_{1,0},\ \lambda_{1,1},\ \lambda_{1,x_i^1},\ \lambda_{1,\bar{x}_i^1},\ \lambda_{x_i^1,0},\ \lambda_{x_i^1,x_i^1},$$
$$\lambda_{\bar{x}_i^1,x_i^1},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,0},\ x_i^2) \in \{\lambda_{x_i^1,1},\ \lambda_{x_i^1,\bar{x}_i^1},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,1},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,\bar{x}_i^1}\}.$$

Учитывая это, получаем, что

$$\mu_9^{1,0}(\lambda_{0,0},\ \lambda_{0,1},\ \lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{0,\bar{x}_i^1},\ \lambda_{1,0},\ \lambda_{1,1},\ \lambda_{1,x_i^1},\ \lambda_{1,\bar{x}_i^1},$$
$$\lambda_{x_i^1,0},\ \lambda_{x_i^1,x_i^1},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,x_i^1},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,0},\ x_i^2) \in$$
$$\in \mathcal{Z} \cap \{\lambda_{x_i^1,1},\ \lambda_{x_i^1,\bar{x}_i^1},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,1},\ \lambda_{\bar{x}_i^1,\bar{x}_i^1}\}.$$

Далее, так как $\lambda_{x_i^1,1} \in [\{\lambda_{x_i^1,\bar{x}_i^1},\ \lambda_{x_i^1,0}\}],\ [\{\lambda_{\bar{x}_i^1,1}\}],\ [\{\lambda_{\bar{x}_i^1,\bar{x}_i^1}, \lambda_{x_i^1,0}\}]$, то $\lambda_{x_i^1,1} \in \mathcal{Z}$ и приходим к уже рассмотренному случаю. Остальные случаи включения функций $\lambda_{x_i^1,0}, \dots, \lambda_{1,x_i^1}$ в $\mathcal{Z}$ рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.4.2. Если множество $\mathcal{Z}$ регулярно и содержит подмножества $\{\lambda_{x_i^1,0},\ \lambda_{x_i^1,1}\}$ или $\{\lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{1,x_i^1}\}$, то $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^2}$.

Доказательство. Пусть для определенности $\mathcal{Z} \supseteq \{\lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{1,x_i^1}\}$. При некоторых $\varphi, \psi, \delta \in \{0, 1, x_i^1, \bar{x}_i^1\}$ справедливо $\lambda_{\varphi,\bar{x}_i^1}$, $\lambda_{\psi,0}$, $\lambda_{\delta,1} \in \mathcal{Z}$. Воспользуемся функцией μ_8 из $\mathcal{Z}$, для которой можно считать выполненным $\mu_8 = \lambda_{g_1,g_2}$, где для g_1 и g_2 из P_2 найдутся такие переменные x_i^1 и x_j^1, $i \neq j$, от которых они соответственно зависят существенно. Нетрудно видеть, что

$$[\{\mu_8,\ \lambda_{0,x_i^1},\ \lambda_{1,x_i^1}\}] \ni \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1},\ g_2}$$

при некотором σ_1, $\sigma_1 \in \{0,1\}$. Далее, ясно, что $[\{\lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, g_2},\ \lambda_{\psi,0},\ \lambda_{\delta,1}\}] \ni f$, где $f = \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, f_2}$ и f_2 зависит только от x_i^1 и x_j^1, причем от x_j^1 зависит существенно. Запишем $f_2(x_i^1, x_j^1)$ в виде

$$f_2(x_i^1, x_j^1) = a x_i^1 x_j^1 + b x_i^1 + c x_j^1 + d.$$

Если $a = 0$, то $c = 1$, и либо $f(x_i^1, x_i^1, x_i^2) = \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, d}$, либо $f(x_i^1, x_j^1, x_i^2) = \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1},(x_j^1)^{\sigma_2}}$, $\sigma_2 \in \{0, 1\}$. Так как $[\{\lambda_{\psi,0}, \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1},(x_j^1)^{\sigma_2}}\}] \ni \lambda_{x_i^1,\bar{\sigma}_2}$, то в обоих случаях пользуемся леммой 2.4.1. Пусть теперь $a = 1$. Если $b = 0$, то $f(x_i^1, \lambda_{\psi,0}, x_i^2) = \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, d}$; если $b = 1$ и $c = 0$, то $f(x_i^1, x_i^1, x_i^2) = \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, d}$; если $b = 1$ и $c = 1$, то $f(x_i^1, \lambda_{\varphi,\bar{x}_i^1}, x_i^2) = \lambda_{(x_i^1)^{\sigma_1}, \bar{d}}$. Заметим, что

$[\{\lambda_{(x_1^1)^{\sigma}, d^{\sigma}}\}] \ni \lambda_{x_1^1, d^{\sigma}}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, во всех случаях пользуемся леммой 2.4.1. Случай, когда $\mathcal{Z} \supseteq \{\lambda_{x_1^1, 0}, \lambda_{x_1^1, 1}\}$, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2.4.3. Если множество $\mathcal{Z}$ регулярно и содержит подмножество $\{\lambda_{x_1^1, c_1}, \lambda_{c_2, x_1^1}\}$, $c_1, c_2 \in \{0, 1\}$, то $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^2}$.

Доказательство. При некоторых φ, ψ , $\varphi, \psi \in \{0, 1, x_1^1, \bar{x}_1^1\}$ будет иметь место $\lambda_{\bar{x}_1^1, \varphi}, \lambda_{\psi, \bar{x}_1^1} \in \mathcal{Z}$. Пусть для определенности $c_1 = 0$ Возможны следующие случаи.

I. $c_1 = c_2$. Так как

$$\lambda_{x_1^1, 1} \in [\{\lambda_{\bar{x}_1^1, 1}\}] , \quad \lambda_{1, x_1^1} \in [\{\lambda_{1, \bar{x}_1^1}\}],$$

$$\lambda_{1, x_1^1} \in [\{\lambda_{\bar{x}_1^1, x_1^1}, \lambda_{0, x_1^1}\}] , \quad \lambda_{x_1^1, 1} \in [\{\lambda_{x_1^1, \bar{x}_1^1}, \lambda_{x_1^1, 0}\}],$$

$$\lambda_{1, x_1^1} \in [\{\lambda_{0, x_1^1}, \lambda_{\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^1}\}] ,$$

то в силу леммы 2.4.1 можно считать, что $\lambda_{\bar{x}_1^1, 0}, \lambda_{0, \bar{x}_1^1} \in \mathcal{Z}$.
Таким образом, $\mathcal{Z} \supseteq \{\lambda_{x_1^1, 0}, \lambda_{0, x_1^1}, \lambda_{0,0}, \lambda_{\bar{x}_1^1, 0}, \lambda_{0, \bar{x}_1^1}, \lambda_{0,1}, \lambda_{1,0}\}$.
Воспользуемся функцией μ_6^0, тогда $\lambda_{1,1} \in [\{\mu_6^0, \lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \lambda_{1,0}\}]$.
Рассмотрим функцию $\mu_9^{1,0} \in \mathcal{Z}$. Можно считать, что

$$\mu_9^{1,0}(\lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \lambda_{0, x_1^1}, \lambda_{0, \bar{x}_1^1}, \lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}, \lambda_{1, x_1^1}, \lambda_{1, \bar{x}_1^1}, \lambda_{x_1^1, x_1^1},$$
$$\lambda_{x_1^1, 0}, \lambda_{\bar{x}_1^1, x_1^1}, \lambda_{\bar{x}_1^1, 0}, x_1^2) \in \{\lambda_{x_1^1, 1}, \lambda_{x_1^1, \bar{x}_1^1}, \lambda_{\bar{x}_1^1, 1}, \lambda_{\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^1}\}.$$

Подставив в левую часть и правую часть последнего соотношения вместо x_1^1 функцию $\lambda_{x_1^1, 0}$ найдем:

$$\mu_9^{1,0}(\lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \lambda_{1,0}, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,1}, \lambda_{x_1^1, 0},$$
$$\lambda_{x_1^1, 0}, \lambda_{\bar{x}_1^1, 0}, \lambda_{\bar{x}_1^1, 0}, x_1^2) \in \mathcal{Z} \cap \{\lambda_{x_1^1, 1}, \lambda_{\bar{x}_1^1, 1}\}. \qquad (*)$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{Z}$ содержит $\lambda_{x_1^1, 1}$, и пользуемся леммой 2.4.I.

2. $c_1 \neq c_2$. Аналогично изложенному выше, можно считать, что $\lambda_{\bar{x}_1^1, 0}, \lambda_{1, \bar{x}_1^1} \in \mathcal{Z}$. Тем самым

$$\mathcal{Z} \supseteq \{\lambda_{x_1^1, 0}, \lambda_{1, x_1^1}, \lambda_{\bar{x}_1^1, 0}, \lambda_{1, \bar{x}_1^1}, \lambda_{1,0}, \lambda_{0,0}, \lambda_{1,1}\}.$$

Воспользуемся функцией μ_7^2 из $\mathcal{Z}$. Ясно, что

$$\lambda_{0,1} \in [\{\mu_7^2, \lambda_{0,0}, \lambda_{1,1}, \lambda_{1,0}\}].$$

Вновь воспользуемся функцией $\mu_9^{1,0}$, $\mu_9^{1,0} \in \mathcal{Z}$ и соотношением (*) из которого вытекает, что $\lambda_{x_1^1, 1} \in \mathcal{Z}$, и пользуемся леммой 2.4.I. Лемма доказана.

Лемма 2.4.4. Если множество $\mathcal{Z}$ регулярно, то $\mathcal{Z} = P_{\Sigma^2}$.

Доказательство. При некоторых $\varphi, \psi, \eta, \nu \in \{0, 1, x_1^1, \bar{x}_1^1\}$ имеет место $\lambda_{\bar{x}_1^1, \varphi}, \lambda_{0, \psi}, \lambda_{\eta, \bar{x}_1^1}, \lambda_{\nu, 0} \in \mathcal{Z}$. С учетом лемм 2.4.2 и 2.4.3 можно считать, что или $\mathcal{Z} \supseteq \{\lambda_{\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^1}, \lambda_{0,0}, \lambda_{1,1}\}$ или $\mathcal{Z} \supseteq \{\lambda_{\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^1}, \lambda_{0,0}, \lambda_{1,0}\}$. В первом случае пользуемся функцией μ_3 из $\mathcal{Z}$ и получаем, что $\lambda_{0,1}, \lambda_{1,0} \in \mathcal{Z}$. Во втором пользуемся функцией $\mu_1^{2,3}$ из $\mathcal{Z}$ и получаем, что $\lambda_{0,0}, \lambda_{1,1} \in \mathcal{Z}$. Таким образом, приходим к одному случаю, когда $\mathcal{Z} \supseteq \{ \lambda_{0,0}, \lambda_{1,1}, \lambda_{0,1}, \lambda_{1,0}, \lambda_{\bar{x}_1^1, x_1^1} \}$. Для некоторой функции g_2 из P_2 множество $\mathcal{Z}$ содержит функцию $g(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \lambda_{g_1, g_2}$, где $g_1 = x_1^1 \cdot x_2^1$. Рассмотрим

$$g_2(x_1^1, x_2^1) = a x_1^1 x_2^1 + b x_1^1 + c x_2^1 + d.$$

Пусть $a = 0$. Тогда при $b = c$ имеем $g(x_1^1, x_1^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, c_1}$. Если $b \neq c$, то $g(x_1^1, \lambda_{1,1}, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, c_2}$, когда $b = 0$, и $g(\lambda_{1,1}, x_1^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, c_3}$, когда $b = 1$.

Пусть $a = 1$. Тогда при $b = c = 0$ имеем $g(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = x_1^1 \cdot x_2^1$, если $d = 0$, и $g(x_1^1, x_2^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1 \cdot x_2^1, \overline{x_1^1 \cdot x_2^1}}$, если $d = 1$; во втором случае получаем $g(x_1^1, x_1^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, \bar{x}_1^1}$ и тем самым

$$g(g(x_1^1, x_2^1, x_1^2), g(x_1^1, x_2^1, x_1^2), x_1^2) = x_1^1 \cdot x_2^1.$$

Заметим, что $x_1^1 \cdot \lambda_{1,0} = \lambda_{x_1^1, 0}$. Если $b = c = 1$, то $g(\lambda_{1,1}, x_1^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, c_4}$. Пусть, наконец, $b \neq c$. Имеем $g(\lambda_{1,1}, x_1^1, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, c_5}$, если $b = 0$ и $g(x_1^1, \lambda_{1,1}, x_1^2) = \lambda_{x_1^1, c_6}$, если $b = 1$. Во всех случаях $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 \in \{0, 1\}$. Таким образом, учитывая, что $\lambda_{\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^1} \in \mathcal{Z}$, получаем, что $\mathcal{Z} \supseteq \{ \lambda_{x_1^1, 0}, \lambda_{x_1^1, 1} \}$, и пользуемся леммой 2.4.2. Лемма доказана.

Теорема 2.4.1. Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq P_{\Sigma^2}$, является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из следующих попарно различных предполных классов.

$$\mathfrak{M}_1^{2,2}, \mathfrak{M}_1^{2,3}, \mathfrak{M}_1^{3,3}, \mathfrak{M}_2^{0,2}, \mathfrak{M}_2^{0,3}, \mathfrak{M}_2^{1,2}, \mathfrak{M}_2^{1,3},$$
$$\mathfrak{M}_3, \mathfrak{M}_4^{2}, \mathfrak{M}_4^{3}, \mathfrak{M}_5^{2}, \mathfrak{M}_5^{3}, \mathfrak{M}_6^{0}, \mathfrak{M}_6^{1},$$
$$\mathfrak{M}_7^{1}, \mathfrak{M}_7^{2}, \mathfrak{M}_8, \mathfrak{M}_9^{1,0}, \mathfrak{M}_9^{1,1}, \mathfrak{M}_9^{2,0}, \mathfrak{M}_9^{2,1}.$$

Доказательство. Предполнота этих классов установлена в леммах 2.1.2 -

Таблица 9.

	$\mathfrak{M}_1^{2,3}$	$\mathfrak{M}_1^{2,2}$	$\mathfrak{M}_1^{3,3}$	$\mathfrak{M}_2^{0,2}$	$\mathfrak{M}_2^{1,2}$	$\mathfrak{M}_2^{0,3}$	$\mathfrak{M}_2^{1,3}$	$\mathfrak{M}_3$	$\mathfrak{M}_4^{2}$	$\mathfrak{M}_4^{3}$	$\mathfrak{M}_5^{2}$	$\mathfrak{M}_5^{3}$	$\mathfrak{M}_6^{0}$	$\mathfrak{M}_6^{1}$	$\mathfrak{M}_7^{1}$	$\mathfrak{M}_7^{2}$	$\mathfrak{M}_8$	$\mathfrak{M}_9^{1,0}$	$\mathfrak{M}_9^{1,1}$	$\mathfrak{M}_9^{2,0}$	$\mathfrak{M}_9^{2,1}$
$\lambda_{0,0}$	–	–	–	+	–	+	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+
$\lambda_{1,1}$	–	–	–	–	+	–	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	+
$\lambda_{\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^1}$	+	+	+	–	–	–	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–	–
$\lambda_{0,1}$	+	–	–	+	–	–	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+
$\lambda_{1,0}$	+	–	–	–	+	+	–	–	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
$\lambda_{x_1^1, \bar{x}_1^1}$	–	+	+	+	+	–	–	–	+	+	–	+	–	–	–	–	+	–	–	+	+
$\lambda_{\bar{x}_1^1, 0}$	–	+	–	–	–	+	–	–	+	+	+	–	+	–	–	+	+	+	–	+	+
$\lambda_{1, \bar{x}_1^1}$	–	–	+	–	+	–	–	–	+	+	–	+	–	+	–	+	+	+	+	–	+
$\lambda_{x_1^1 + x_2^1 \bar{x}_1^1}$	–	–	+	+	–	+	+	–	+	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–	–
$\lambda_{x_1^1, x_1^1 \cdot x_2^1}$	–	+	–	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	–	–	+	–	+	–	–	–

2.1.7., 2.3.2., 2.3.3. Из леммы 2.4.4. вытекает, что других предполных классов в $\mathcal{P}_{\Sigma^2}$ нет. Остается показать, что все указанные классы попарно различны. С этой целью составим таблицу 9, в которой указано распределение некоторых функций по рассматриваемым классам, и из которой видно, что все рассматриваемые классы различны. Утверждение теперь вытекает из неполноты и замкнутости предполных классов и из леммы 2.4.4. Теорема доказана.

§ 2.5. Некоторые общие свойства и.ф.с.

$$\mathcal{P}_{\Sigma^3},\ \mathcal{P}_{\Sigma^4},\ \mathcal{P}_{\Sigma^5},\ \mathcal{P}_{\Sigma^6}.$$

Пусть $\mathcal{P}_{\Sigma}$ – произвольная из и.ф.с. $\mathcal{P}_{\Sigma^3}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^4}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^5}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^6}$. Поскольку все функции в этих и.ф.с. зависят от переменных из алфавита X^1, будем для краткости элементы x_n^1 из X^1 обозначать через x_n, $n=1,2,\ldots$. Пусть $\Sigma \in \{\Sigma^3, \Sigma^4, \Sigma^5, \Sigma^6\}$ и $\Sigma = (\{A_1\}, \{B_1, B_2\})$; $d \in A_2$, где для того, чтобы в рассмотрениях охватить сразу все случаи, будем предполагать, что B_2 может быть и пустым. Обозначим через C_d множество $\{d\} \cup ((B_1 \cup B_2) \setminus A_1)$ и рассмотрим множество

$$\mathfrak{M}_d = \{ f(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) : \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in C_d$$
$$(f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in C_d,\ n=1,2,\ldots \}.$$

Лемма 2.5.1. Множество $\mathfrak{M}_d$, $\mathfrak{M}_d \subseteq P_\Sigma$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_d$ является замкнутым классом и $\mathfrak{M}_d \neq P_\Sigma$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}_d$, покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_d] = P_\Sigma$. Нетрудно видеть, что $C_d \subseteq \mathfrak{M}_d$, и так как $f \notin \mathfrak{M}_d$, то найдутся такие константы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в C_d, что для константы $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d'$ будет иметь место $d' \notin C_d$. Ясно, что $d' \in A_1$. Далее, нетрудно видеть, что для всякой функции $g(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1)$ из P_Σ найдется такая функция $g'(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$, что $g' \in \mathfrak{M}_d$ и

$$g'(x_1, x_2, \ldots, x_m, d') = g(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

тем самым $g \in [\mathfrak{M}_d \cup \{f\}]$. Лемма доказана.

На множестве $\{0,1\}$ введем отношение линейного порядка $\leq$, положив $0 \leq 1$. Обозначим через

$$\mathfrak{M}_M = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{0,1\}$$
$$[\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ (a_i \leq b_i) \& (f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in$$
$$\in \{0,1\} \Rightarrow (f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq f(b_1, b_2, \ldots, b_n))],\ n = 1, 2, \ldots \}.$$

Лемма 2.5.2. Множество $\mathfrak{M}_M$, $\mathfrak{M}_M \subseteq P_\Sigma$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_M$ является замкнутым классом.

$\mathfrak{M}_M \neq P_\Sigma$, $\mathfrak{M}_M \supseteq P_\Sigma^{B_1}$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}_M$, покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_M] = P_\Sigma^{B_1}$, а тем самым будет выполнено $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_M] = P_\Sigma$. Нетрудно видеть, что $\{0,1\} \subseteq \mathfrak{M}_M$, и, так как, $f \notin \mathfrak{M}_M$, то для некоторой функции $e(x_1)$, такой, что $e(0)=1$, $e(1)=0$, имеет место $e(x_1) \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_M]$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $B_2 \neq \emptyset$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{M}_M \cap P_\Sigma^{B_1} = M$ и $e(x_1) = \bar{x}_1$, отсюда, в силу предполноты M в P_2, будем иметь $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_M] \supseteq P_\Sigma^{B_1}$.

2. Пусть $B_2 = \emptyset$. Тогда, в силу предполноты M в P_2, для любой функции g, $g \in P_2$ найдется такая функция g', $g' \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_M]$, которая на наборах из нулей и единиц совпадет с g. Рассмотрим два подслучая.

а) $A_1 = \{0, 1\}$. Нетрудно видеть, что функция $g_1(x_1, x_2)$, такая, что $g_1(0,0) = g_1(0,1) = 0$, $g_1(1,0) = 1$, $g_1(1,1) = 2$, содержится в $\mathfrak{M}_M$. Пусть $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная функция из P_Σ. Рассмотрим табличное задание этой функции, приведенное в таблице 10.

Таблица 10.

	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	h	φ_1	φ_2
A	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	0	0	0
	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	0	0
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$a_{\mu 1}$	$a_{\mu 2}$	$\ldots$	$a_{\mu n}$	0	0	0
B	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	b_{1n}	1	1	0
	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	b_{2n}	1	1	0
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$b_{\nu 1}$	$b_{\nu 2}$	$\ldots$	$b_{\nu n}$	1	1	0
C	c_{11}	c_{12}	$\ldots$	c_{1n}	2	1	1
	c_{21}	c_{22}	$\ldots$	c_{2n}	2	1	1
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$c_{\omega 1}$	$c_{\omega 2}$	$\ldots$	$c_{\omega n}$	2	1	1

В этой таблице отдельные блоки наборов A, B и C могут оказаться пустыми. Эта же таблица задает еще две функции φ_1 и φ_2. Нетрудно видеть, что имеет место $g_1(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а, так как, очевидно, $\varphi_1, \varphi_2 \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_M]$, то $h \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_M]$.

б) $A_1 = \{0, 1, 2\}$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_M$ содержит все одноместные функции, кроме функций $e_0(x_1)$, $e_3(x_1)$, таких что $e_0(0) = e_3(0) = 1$, $e_0(1) = e_3(1) = 0$, $e_0(2) = 0$, $e_3(2) = 1$. Далее, хотя бы одна из них, очевидно, содержится в $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_M]$. Так как, очевидно, $\mathfrak{M}_M \supseteq \{e_4(x_1), h(x_1, x_2)\}$, где $e_4(0) = e_4(1) = 1$, $e_4(2) = 0$, $h(0,0) = h(0,1) = 0$, $h(1,0) = 0$, $h(1,1) = 1$, то, учитывая, что $h(e_4(x_1), e_3(x_1)) = e_0(x_1)$, можно считать, что $e_0(x_1) \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_M]$. Заметим теперь, что для любой функции φ, $\varphi \in P_\Sigma$, такой, что $\varphi \not\equiv 0$, очевидно, имеет место

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ \varphi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} e_{\sigma_1}(x_1) \& e_{\sigma_2}(x_2) \& \cdots \& e_{\sigma_n}(x_n), \qquad (*)$$

где $e_1(a)=0$ при $a\in\{0,2\}$, $e_1(1)=1$; $e_2(b)=0$ при $b\in\{0,1\}$, $e_2(2)=1$.
Так как множество $[\{f\}\cup\mathcal{M}_M]$, очевидно, содержит некоторые функции $x_1\dot{\vee}x_2$, $x_1\dot{\&}x_2$, такие что $a_1\dot{\vee}a_2=a_1\vee a_2$, $b_1\dot{\&}b_2=b_1\& b_2$ при $a_1, a_2, b_1, b_2\in\{0,1\}$, то, заменяя в формуле (ж) функции $\vee$ и $\&$ на функции $\dot{\vee}$ и $\dot{\&}$, получим формулу над системой $[\{f\}\cup\mathcal{M}_M]$, которая, очевидно, реализует функцию φ. Для завершения рассмотрения случая б) заметим, что, очевидно, $0\in\mathcal{M}_M$. Лемма доказана. Функции $e_\sigma(x_1)$, $x_1\dot{\vee}x_2$, $x_1\dot{\&}x_2$ будут играть в дальнейшем особую роль, поэтому мы закрепим за ними введенные обозначения.

Пусть $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ содержится в P_Σ. Будем говорить, что функция f является квазилинейной, если она или не принимает значения 0 или 1, или существует такая линейная функция $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ из P_2, которая совпадает с f на тех наборах из нулей и единиц, на которых f принимает значения 0 или 1.

Множество всех квазилинейных функций из $\mathcal{P}_\Sigma$ обозначим через $\mathcal{M}_L$. Ясно, что $\mathcal{M}_L\neq P_\Sigma$.

Лемма 2.5.3. Множество $\mathcal{M}_L$, $\mathcal{M}_L\subseteq P_\Sigma$, является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathcal{M}_L$ является замкнутым классом, и $\mathcal{M}_L\neq P_\Sigma$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f\notin\mathcal{M}_L$, покажем, что $[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]=P_\Sigma$. Так как, очевидно, для любой функции алгебры логики g из L, $L\subset P_2$, в $\mathcal{M}_L$ найдется функция g', совпадающая с g на наборах из нулей и единиц, то, в силу предполноты L в P_2, для любой функции h из P_2 в $[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]$ найдется функция h', совпадающая с h на наборах из нулей и единиц. Тем самым если $B_2\neq\emptyset$, то, в силу того, что, очевидно, $\mathcal{M}_L\supset P_\Sigma^{B_2}$, будем иметь включение $[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]\supseteq P_\Sigma^{B_1}$, то есть в этом случае $[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]=P_\Sigma$. Пусть теперь $B_2=\emptyset$. Возможны два подслучая.

а). $A_1=\{0,1\}$. Нетрудно видеть, что функция $g_1(x_1,x_2)$ такая, что $g_1(0,0)=0$, $g_1(0,1)=g_1(1,0)=1$, $g_1(1,1)=2$, содержится в $\mathcal{M}_L$. Пусть h – произвольная функция из P_Σ, а φ_1 и φ_2 – функции со значениями 0 или I, заданные с помощью таблицы I0. Нетрудно видеть, что имеет место

$$g_1(\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_n))=h(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

а, так как, очевидно, $\varphi_1,\varphi_2\in[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]$, то $h\in[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]$.

б). $A_1=\{0,1,2\}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{M}_L$ содержит все одноместные функции, а множество $[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]$ содержит функции $\dot{\vee}$ и $\dot{\&}$. Остается для произвольной функции φ из P_Σ при $\varphi\neq 0$ воспользоваться формулой (ж) и ее "перестройкой" с помощью функций $\dot{\vee}$ и $\dot{\&}$. Тем самым $\varphi\in[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]$. Включение $0\in[\{f\}\cup\mathcal{M}_L]$, очевидно, также выполнено. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{P}_\Sigma$ – произвольная из и.ф.с. $\mathcal{P}_{\Sigma^4}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^5}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^6}$. Обозначим через

$\mathfrak{M}_S$ множество всех функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P_Σ таких, что для любых $a_1, a_2, \dots, a_n$ из $\{0,1\}$ выполняется условие: если $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \in \{0, 1\}$, то $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$. Для м.ф.с. $\mathcal{P}_{\Sigma^3}$ обозначим через $\mathfrak{M}_S$ множество всех функций из $\mathcal{P}_{\Sigma^3}$ таких, что или $f \in S$, $S \subseteq P_2$, или, если $f \in P_{\Sigma^3}^{\{0,3\}}$, то для любого набора $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будет иметь место условие: или $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$, или, если $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ то $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 3$. Ясно, что $\mathfrak{M}_S \neq P_\Sigma$.

Лемма 2.5.4. Множество $\mathfrak{M}_S$, $\mathfrak{M}_S \subseteq P_\Sigma$, является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}_S$ является замкнутым классом и $\mathfrak{M}_S \neq P_\Sigma$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}_S$, покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S] = P_\Sigma$. Рассмотрим два случая.

1. $\mathcal{P}_\Sigma \in \{\mathcal{P}_{\Sigma^4}, \mathcal{P}_{\Sigma^5}, \mathcal{P}_{\Sigma^6}\}$. Так как, очевидно, для любой функции алгебры логики g из S, $S \subseteq P_2$, в $\mathfrak{M}_S$ найдется функция g', совпадающая с g на наборах из нулей и единиц, то в силу предполноты S в P_2, для любой функции h из P_2 в $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S]$ найдется функция h', совпадающая с h на наборах из нулей и единиц. Тем самым, если $B_2 \neq \varnothing$, то, в силу того, что, очевидно, $\mathfrak{M}_S \supseteq P_\Sigma^{B_2}$, будем иметь включение $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S] \supseteq P_\Sigma^{B_1}$, то есть в этом случае $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S] = P_\Sigma$. Пусть теперь $B_2 = \varnothing$. Возможны два подслучая.

а) $A_1 = \{0, 1\}$. Нетрудно видеть, что функция g_1, используемая в лемме 2.5.2, содержится в $\mathfrak{M}_S$ и, вновь используя функции таблицы 10, получаем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S] = P_\Sigma$.

б) $A_1 = \{0, 1, 2\}$. Нетрудно видеть, что $e_0(x_1)$, $e_1(x_1) \in \mathfrak{M}_S$, и так как некоторая функция $g(x_1, x_2)$ такая, что $g(0,1) = g(1,0) = 0$, $g(0,0) = 1$, очевидно, содержится в $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S]$, то, поскольку $e_2(x_1) = g(e_0(x_1), e_1(x_1))$, имеем $e_2(x_1) \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_S]$. Так как функции $\dot{V}$ и $\dot{\&}$ также содержатся в $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S]$, то остается для произвольной функции φ из P_Σ при $\varphi \not\equiv 0$ воспользоваться формулой (*) и ее "перестройкой" с помощью функций $\dot{V}$ и $\dot{\&}$. Тем самым $\varphi \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_S]$; включение $0 \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_S]$, очевидно, также выполнено.

2. $\mathcal{P}_\Sigma = \mathcal{P}_{\Sigma^3}$. По условию для f найдется набор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ такой, что $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ и $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0, 1\}$. Так как $\bar{x}_1 \in \mathfrak{M}_S$, то, очевидно, $0 \in [\{f, \bar{x}_1\}]$. В силу предполноты S в P_2 имеет место $[S \cup \{0\}] = P_2$. Далее, очевидно, функция $g(x_1)$, такая, что $g(0) = 0$ и $g(1) = 3$ содержится в $\mathfrak{M}_S$. Наконец, нетрудно видеть, что $[P_2 \cup \{g(x_1)\}] = P_{\Sigma^3}$, а тем самым $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_S] = P_{\Sigma^3}$. Лемма доказана.

Пусть $E = B_2 \setminus A_1$ и $B_2 \neq \varnothing$, обозначим через $\mathfrak{M}_E$ подмножество множеств $\mathcal{P}_{\Sigma^3}$ или $\mathcal{P}_{\Sigma^4}$, состоящие из всех таких функций f, что f

или является константой из E , или $f \in P_2$. Ясно, что $\mathfrak{M}_E \neq P_{\Sigma^3}$ и $\mathfrak{M}_E \neq P_{\Sigma^4}$.

Лемма 2.5.5. Множество $\mathfrak{M}_E$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{M}_E$ является замкнутым классом, $\mathfrak{M}_E \neq P_{\Sigma^i}$, $i=3,4$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}_E$. Покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_E] = P_\Sigma$, где $\Sigma \in \{\Sigma^3, \Sigma^4\}$. Ясно, что $f \in P_\Sigma^{B_2}$ и $f \not\equiv const$. Значит, как легко видеть, функция $g(x_1)$ из $P_\Sigma^{B_2}$ такая, что $g(0)=a$, $g(1)=b$, $a \neq b$ содержится в $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_E]$. Далее, нетрудно видеть, что $[P_2 \cup \{g(x_1)\}] = P_\Sigma$ отсюда в силу включения $(P_2 \cup \{g(x_1)\}) \subseteq [\{f\} \cup \mathfrak{M}_E]$ следует утверждение леммы.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{F_1}$ множество всех функций f из P_{Σ^5} таких, что f не принимает хотя бы одного значения. Ясно, что $\mathfrak{M}_{F_1} \neq P_{\Sigma^5}$.

Лемма 2.5.6. Множество $\mathfrak{M}_{F_1}$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}_{F_1}$ является замкнутым классом, $\mathfrak{M}_{F_1} \neq P_{\Sigma^5}$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}_{F_1}$. Покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_1}] = P_{\Sigma^5}$. Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что f зависит от трех аргументов и для нее справедливо задание с помощью частичной таблицы II.

Таблица II.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	2

Выбирая функции ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 из $P_{\Sigma^5}^{\{0,1\}}$, $P_{\Sigma^5}^{\{0,1\}} \subseteq \mathfrak{M}_{F_1}$, такие, как указано в таблице I2, очевидно, будем иметь для $g(x_1,x_2) = f(\psi_1(x_1,x_2), \psi_2(x_1,x_2), \psi_3(x_1,x_2))$ следующие соотношения $g(0,0)=0$, $g(1,0)=1$, $g(1,1)=2$

Таблица I2.

x_1	x_2	ψ_1	ψ_2	ψ_3
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Пусть h - произвольная функция из P_{Σ^5} , а φ_1 и φ_2 - функции из $P_\Sigma^{\{0,1\}}$ заданные с помощью таблицы I0. Нетрудно видеть, что имеет место

$$g(\varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n), \varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_n)) = h(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Тем самым $h \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_1}]$ и лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{F_2}$ множество всех функций f из P_{Σ^5} таких, что

$f(x_1, x_1, \dots, x_1) = x_1$ или $f(x_1, x_1, \dots, x_1)$ принимает значение 2.

Лемма 2.5.7. Множество $\mathfrak{M}_{F_2}$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}_{F_2}$ является замкнутым классом и $\mathfrak{M}_{F_2} \neq P_{\Sigma 5}$. Пусть при некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}_{F_2}$. Покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_2}] = P_{\Sigma 5}$. Нетрудно видеть, что $f(x_1, x_1, \dots, x_1) \in \in \{0, 1, \bar{x}_1\}$. Пусть $f(x_1, x_1, \dots, x_1) = \bar{x}_1$, тогда, учитывая, что $x_1 \& x_2 \in \mathfrak{M}_{F_2}$ и $0 = x_1 \& \bar{x}_1$, $1 = \bar{0}$, получим, что $0, 1 \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_2}]$. Далее, если $f(x_1, x_1, \dots, x_1) = c$, $c \in \{0, 1\}$, то, используя функцию $e(x_1)$ из $\mathfrak{M}_{F_2}$ такую, что $e(c) = \bar{c}$ и $e(\bar{c}) = 2$, получим, что $c, \bar{c} \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_2}]$. Таким образом, всегда можно считать, что $\{0, 1\} \subseteq [\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_2}]$. Далее, нетрудно видеть, что для всякой функции $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $P_{\Sigma 5}$ найдется функция $h'(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$ из $\mathfrak{M}_{F_2}$ такая, что $h'(0, 0, \dots, 0, 0, 0) = h'(1, 1, \dots, 1, 1, 1) = 2$ и $h'(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 1) = = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Отсюда следует, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_2}] = P_{\Sigma 5}$.

Лемма доказана.

Пусть M_1 – множество всех функций $g(x_1, x_2)$ из $P_{\Sigma 5}$, таких, что либо $g(x_1, x_2)$ принимает значение 2, либо $g(x_1, x_2)$ зависит существенно не более чем от одной переменной. Обозначим через $\mathfrak{M}_{F_3}$ множество всех функций f из $P_{\Sigma 5}$, таких, что для любых функций $g_1, g_2, \dots, g_n$ из M_1 функция $f(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2), \dots, g_n(x_1, x_2))$ принадлежит M_1.

Лемма 2.5.8. Множество $\mathfrak{M}_{F_3}$ является предполным классом. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}_{F_3}$ является замкнутым классом, $\mathfrak{M}_{F_3} \neq P_{\Sigma 5}$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}_{F_3}$. Покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_3}] = P_{\Sigma 5}$. Нетрудно видеть, что $0, 1, x_1, \bar{x}_1 \in \mathfrak{M}_{F_3}$ и при некоторых $g_1, g_2, \dots, g_n$ из $\{0, 1, x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2\}$ функция $h_1(x_1, x_2) = f(g_1, g_2, \dots, g_n)$ не входит в M_1, так что $h_1(x_1, x_2) \in P_2$ и h_1 существенно зависит от x_1 и x_2. Если $h_1 \notin L$, то $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_3}] \supseteq P_2$; если же $h_1 \in L$, то можно считать, что $h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. В последнем случае рассмотрим функцию $h_2(x_1, x_2, x_3)$, такую, что $h_2(0, 0, 0) = h_2(0, 1, 1) = = h_2(1, 0, 1) = 1$, $h_2(1, 1, 0) = 0$ и равную 2 на остальных наборах. Нетрудно видеть, что $h_2 \in \mathfrak{M}_{F_3}$ и $h_2(x_1, x_2, x_1 + x_2)$ есть функция Шеффера, так что и в этом случае $[\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_3}] \supseteq P_2$. Пусть теперь h – произвольная функция из $P_{\Sigma 5}$, φ_1 и φ_2 – функции из P_2, заданные с помощью таблицы 10, и h_3 – функция, определенная соотношениями $h_3(0, 0) = 0$, $h_3(0, 1) = h_3(1, 0) = 1$, $h_3(1, 1) = 2$. Тогда $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = h_3(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, \dots, x_n))$ и, так как $h_3(x_1, x_2)$, очевидно, входит в $\mathfrak{M}_{F_3}$, получаем $h \in \in [\{f\} \cup \mathfrak{M}_{F_3}]$. Лемма доказана.

Пусть $a \in \{0, 1\}$. Обозначим через $\mathfrak{M}^a$ множество всех функций из $P_{\Sigma 6}$, сохраняющих разбиение $\{\bar{a}, 2\} \cup \{a\}$. Ясно, что $\mathfrak{M}^a \neq P_{\Sigma 6}$.

Лемма 2.5.9. Множество $\mathfrak{M}^a$ является предполным классом.

Доказательство. Нетрудно видеть, что множество $\mathfrak{M}^a$ является замкнутым классом, $\mathfrak{M}^a \neq P_{\Sigma^6}$. Пусть для некоторой функции f выполнено $f \notin \mathfrak{M}^a$. Покажем, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}^a] = P_{\Sigma^6}$. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай, когда, например, $a = 1$. Ясно, что для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ найдутся два набора $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ такие, что для любой пары (a_i, b_i), $i = 1, 2, \dots, n$ будет иметь место $(a_i, b_i) \in \{(0,0), (1,1), (0,2), (2,0), (2,2)\}$, а для функции f будет выполнено $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq f(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Рассмотрим набор из нулей и единиц $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, в котором $c_i = 0$, если $(a_i, b_i) \in \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2)\}$, и $c_i = 1$, если $(a_i, b_i) = (1,1)$. Пусть для определенности $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq f(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Так как, очевидно, $\mathfrak{M}^a \supseteq \{0, 1, \bar{e}_1(x_1)\}$, где $\bar{e}_1(0) = 1$, $\bar{e}_1(1) = 0$, $\bar{e}_1(2) = 1$, то можно считать, что f зависит от одного переменного и $f(0) = 0$, $f(2) = 1$. Заметим далее, что для любой функции алгебры логики h из P_2 найдется, очевидно, функция h' из $\mathfrak{M}^a$, которая на наборах из нулей и единиц совпадает с функцией h. В частности, найдется в $\mathfrak{M}^a$ функция $h'(x_1, x_2, x_3)$, которая на наборах $(0,1,0)$, $(1,0,f(1))$, $(0,1,1)$, примет заданный набор (a_1, a_2, a_3) значений. Так как функции $e_1(x_1)$ и $\bar{e}_1(x_1)$ содержат в $\mathfrak{M}^a$ и $e(x_1) = h'(e_1(x_1), \bar{e}_1(x_1), f(x_1))$ в точках 0,1,2 принимает заданную последовательность значений (a_1, a_2, a_3), то можно считать, что $[\{f\} \cup \mathfrak{M}^a]$ содержит все одноместные функции, и, в частности, функции $e_0(x_1)$, $e_1(x_1)$, $e_2(x_1)$. Остается для произвольной функции h из P_{Σ^6} такой, что $h \not\equiv 0$, воспользоваться представлением ($*$) и перестройкой его с помощью функций вида $\dot{\vee}$ и $\dot{\&}$, а также тем, что $0 \in \mathfrak{M}^a$. Лемма доказана.

§ 2.6. Решение задачи о полноте для $\mathcal{P}_{\Sigma^3}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^4}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^5}$, $\mathcal{P}_{\Sigma^6}$.

Теорема 2.6.1.. Если $\mathfrak{M} \subseteq P_{\Sigma^i}$, $i \in \{3, 4\}$, то множество $\mathfrak{M}$ является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из следующих попарно различных предполных классов

$$\mathfrak{M}_0,\ \mathfrak{M}_1,\ \mathfrak{M}_M,\ \mathfrak{M}_L,\ \mathfrak{M}_S,\ \mathfrak{M}_E.$$

Доказательство. Если множество $\mathfrak{M}$ полно, то оно не может быть подмножеством ни одного из указанных предполных классов в силу их замкнутости и отличия от P_{Σ^i}. Пусть $\mathfrak{M}$ не является подмножеством ни одного из указанных предполных классов, покажем, что $[\mathfrak{M}] = P_{\Sigma^i}$. По условию, $\mathfrak{M} \supseteq \{f_0, f_1, f_M, f_L, f_S, f_E\}$, где $f_D \notin \mathfrak{M}_D$, $D \in \{0, 1, M, L, S, E\}$. Ясно, что $\{f_0, f_M, f_L\} \subseteq P_2$ и $f_0(x_1, x_1, \dots, x_1) \in \{\bar{x}_1, 1\}$. Рассмотрим два случая.

1. $f_0(x_1, x_1, \dots, x_1) \equiv 1$.

Тогда, очевидно, $[\{f_0, f_1(1,1,\dots,1), f_M, f_L\}] = P_2$, а подстановкой констант 0,1 в f_E, как легко видеть, можно получить функцию $g(x_1)$ такую, что $g(0)=a$ и $g(1)=3$, где $a=0$, если $i=3$, и $a=2$, если $i=4$. Ясно, что $[\{g(x_1)\}\cup P_2] = P_{\Sigma^i}$ при $i \in \{3,4\}$.

2. $f_0(x_1, x_1, \dots, x_1) = \overline{x}_1$. Используя функцию f_S и $\overline{x}_1$, очевидно, можно получить константы 0 и 1. И так как, очевидно, $[\{0,1,f_M,f_L\}] = P_2$, то так же, как и в случае I, используя функцию f_E, получаем $g(x_1)$ и тем самым получим, что $[\mathfrak{M}] = P_{\Sigma^i}$. . Далее, нетрудно видеть, что все предполные классы, указанные в теореме, различны. Теорема доказана.

Теорема 2.6.2. Если $\mathfrak{M} \subseteq P_{\Sigma^i}$, $i \in \{5,6\}$, то множество $\mathfrak{M}$ является полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из следующих попарно различных предполных классов:

а) $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_M, \mathfrak{M}_L, \mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}_{F_1}, \mathfrak{M}_{F_2}, \mathfrak{M}_{F_3}$ при $i=5$;

б) $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_M, \mathfrak{M}_L, \mathfrak{M}_S, \mathfrak{M}^0, \mathfrak{M}^1$ при $i=6$.

Доказательство. Если множество $\mathfrak{M}$ полно, то оно не может быть подмножеством ни одного из указанных предполных классов в силу замкнутости и отличия от P_{Σ^i}. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ не является подмножеством ни одного из указанных предполных классов, покажем, что $[\mathfrak{M}] = P_{\Sigma^i}$. По условию $\mathfrak{M}$ содержит функции f_0, f_1, f_M, f_L, f_S, где $f_\square \in \mathfrak{M}_\square$ $(\square \in \{0,1,M,L,S\})$, а также $g_1 \notin \mathfrak{M}_{F_1}$, $g_2 \notin \mathfrak{M}_{F_2}$, $g_3 \notin \mathfrak{M}_{F_3}$, при $i=5$ и функции $g_1 \notin \mathfrak{M}^0$, $g_2 \in \mathfrak{M}^1$ при $i=6$. Рассмотрим два случая.

1. $i=5$. Покажем, что для любой функции алгебры логики g из P_2 найдется функция g' из $[\mathfrak{M}]$, которая совпадает с g на наборах из нулей и единиц. Воспользуемся функцией g_2. Ясно, что $g_2(x_1, x_1, \dots, x_1) \in \{0,1,\overline{x}_1\}$. Если $g_2(x_1,x_1,\dots,x_1) \in \{0,1\}$, то, используя функции f_0 и f_1, получим, что $0,1 \in [\mathfrak{M}]$. Если $g_2(x_1,x_1,\dots,x_1) = \overline{x}_1$, то используя функции f_S и $\overline{x}_1$ получим, что $\{0,1\} \subseteq [\mathfrak{M}]$. Таким образом, можно считать, что всегда $\{0,1\} \subseteq [\mathfrak{M}]$. Далее, ясно, что $[\{0,1,f_M\}] \ni \overline{x}_1$. Используя функцию g_3 и функции $0, 1, \overline{x}_1$, получаем функцию $\varphi(x_1,x_2) \in P_2$, существенно зависящую от x_1 и x_2. Если $\varphi \notin L$, то $[\mathfrak{M}] \supseteq P_2$. Пусть $\varphi \in L$; тогда можно считать, что $\varphi(x_1,x_2) = x_1 + x_2$. Используем теперь функцию f_L. Нетрудно видеть, что функцию f_L можно считать зависящей не более, чем от восьми переменных и обладающей свойствами, указанными в таблице 13

Таблица 13.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	f_L
0	1	0	1	0	1	0	1	a_1
0	1	0	1	1	0	1	0	a_2
0	1	1	0	1	0	0	1	a_3
0	1	1	0	0	1	1	0	a_4

где среди чисел a_1, a_2, a_3, a_4 ровно три совпадают и для всех a_i выполнено $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Используя функции $0, 1, \bar{x}_1, x_1 + x_2$ из функции f_L, очевидно, можно получить функцию $\psi(x_1, x_2)$, задаваемую таблицей 14.

Таблица 14.

x_1	x_2	$\psi(x_1, x_2)$
0	0	a_1
0	1	a_2
1	0	a_3
1	1	a_4

Ясно, что $\psi \in P_2$ и $\psi \notin L$, $L \subseteq P_2$. Отсюда следует, что $[\{0, 1, \bar{x}_1, \psi\}] = P_2$, то есть $[\mathfrak{M}] \supseteq P_2$. Используем теперь функцию g_1. Из нее с помощью функций из P_2, очевидно, можно получить функцию $g(x_1, x_2)$ такую, что $g(0,0) = g(0,1) = 0$, $g(1,0) = 1$; $g(1,1) = 2$. Пусть теперь h – любая функция из $P_{\bar{2},5}$, заданная с помощью таблицы 10, тогда, выбирая функции φ_1 и φ_2 из $[\mathfrak{M}]$, заданные с помощью той же таблицы, получим, что
$g(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2. $i = 6$. В этом случае, как нетрудно видеть, множество $[\{f_0, f_1, f_m, f_L, f_5\}]$ для каждой функции алгебры логики g из P_2 содержит функцию g', совпадающую с g на наборах из нулей и единиц. Воспользуемся теперь функциями g_1 и g_2. Для этих функций можно считать справедливыми таблицы 15 и 16.

Таблица 15.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	g_2
0	0	2	2	1	a_1
0	2	0	2	1	$\bar{a}_1$
0	0	0	0	1	a_2

Таблица 16.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	g_1
0	1	2	2	1	b_1
0	2	1	2	1	$\bar{b}_1$
0	1	1	1	1	b_2

Отсюда следует, что путем подстановки констант 0 и 1 и отождествлением переменных из функций g_1 и g_2 можно получить функции $g_1'(x_1)$ и $g_2'(x_1)$ приведенные в таблице 17.

Таблица 17.

x_1	g_1'	g_2'	g_3
0	c_1	d_1	i_1
1	c_2	d_2	i_2
2	c_3	d_3	i_3

где $d_1 \neq d_3$, $c_2 \neq c_3$, функция g_3 взята из $[\mathfrak{M}]$ и такова, что $i_1 \neq i_2$. Для произвольных чисел j_1, j_2, j_3 из множества $\{0, 1\}$ выберем теперь в

$[\mathfrak{M}]$ функцию $\chi(x_1, x_2, x_3)$ такую, что $\chi(e_1, d_1, i_1) = j_1$, $\chi(e_2, d_2, i_2) = j_2$, $\chi(e_3, d_3, i_3) = j_3$.

Тогда для функции $e(x_1) = \chi(g_1'(x_1), g_2'(x_1), g_3(x_1))$ будет иметь место $e(0) = j_1$, $e(1) = j_2$ и $e(2) = j_3$. Таким образом, все одноместные функции содержатся в $[\mathfrak{M}]$, а кроме них также еще некоторые функции типа $\dot{\vee}$, $\dot{\&}$. Теперь для установления того, что любая функция φ из $P_{\Sigma 6}$ содержится в $[\mathfrak{M}]$, остается воспользоваться соотношением (ж) и тем, что $0 \in [\mathfrak{M}]$.

Для завершения доказательства теоремы заметим, что, очевидно, все указанные классы попарно различны. Теорема доказана.

ГЛАВА IУ.

ВОПРОСЫ ПОЛНОТЫ ДЛЯ АВТОМАТОВ

В этой главе понятие истинностной функциональной системы из главы I обобщается до понятия последовательностной функциональной системы (п.ф.с.). Ряд свойств и.ф.с. распространяется на случай п.ф.с. Выделяются важнейшие примеры п.ф.с. и для них исследуются вопросы полноты.

§ 1. Последовательностные функциональные системы

Проведенные в главе I построения допускают обобщения за счет замены в них объекта, каким являются функции из P_A, на объект последовательностной функции с соответствующими уточнениями всех основных понятий типа схемы, сети, логической сети, вычисления и т.п., включая понятие и.ф.с. Сначала вводятся основные понятия, затем устанавливается ряд свойств операторов замыкания в п.ф.с. и рассматривается задача о полноте для п.ф.с.

§ 1.1. Основные понятия

Пусть $\mathcal{A} = A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n}$, где $A_{i_j} = A$, $j = 1, 2, \dots, n$ и $\alpha^\tau \in \mathcal{A}$ то есть $\alpha^\tau = \vec{a}^n(1)\vec{a}^n(2)\dots\vec{a}^n(\tau)$, где $\vec{a}^n(j) = (a_{i_1}(j), a_{i_2}(j), \dots, a_{i_n}(j))$ Обозначим через $\alpha^\tau]_m$ начало слова α^τ длины m. Отображение $g\colon \mathcal{A}^* \to A^*$ называется последовательностной функцией (п.ф.). П.ф. g называется детерминированной (сокращенно: д.функцией), если выполнены следующие условия:

1) для любых слова α^τ из $\mathcal{A}^*$ и слова $\beta^\ell = g(\alpha^\tau)$, где $\beta^\ell = b(1)b(2)\dots b(\ell)$, $b(i) \in A$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, справедливо $\tau = \ell$;

2) для любых слов α_1^τ и α_2^s из $\mathcal{A}^*$ и любого ℓ, $1 \le \ell \le \min(\tau, s)$, если $\alpha_1^\tau]_\ell = \alpha_2^s]_\ell$, то $g(\alpha_1^\tau)]_\ell = g(\alpha_2^s)]_\ell$. Для заданного слова α^τ из $\mathcal{A}^*$ определим функцию g_{α^τ}, которую назовем остаточной для функции g. Пусть $\alpha_1^{\tau_1}$ является началом слова $\alpha_2^{\tau_2}$, $\tau_2 \geq \tau_1$, тогда через $\alpha_2^{\tau_2}/\alpha_1^{\tau_1}$ обозначим конец слова $\alpha_2^{\tau_2}$, который образуется после удаления из $\alpha_2^{\tau_2}$ его начала $\alpha_1^{\tau_1}$. По определению полагаем $g_{\alpha^\tau}(\alpha_1^{\tau_1}) = g(\alpha^\tau \alpha_1^{\tau_1})/g(\alpha^\tau)$. Весом д.функции g называется число ее остаточных функций. Если это число

конечно, то д.функция называется ограниченно-детерминированной функцией (о.-д. функцией). Известно, что д.функцию можно задать следующим образом. Пусть вес g равен m, где m - конечное число или $\aleph_0$. Занумеруем все остаточные функции для g с помощью чисел, непревосходящих m. Пусть множество этих номеров есть $C=\{c_1, c_2, \dots\}$ и C^*, как обычно, - множество всех слов $c^\tau = c(1)c(2)\dots c(\tau)$, где $c(i) \in C$, $i=1,2,\dots,\tau$. Элементы множества C называются состояниями д.функции g, а $c(1)$ - ее начальным состоянием. Можно показать, что существуют такие функции φ и ψ, что $\varphi: C \times A \to C$, $\psi: C \times A \to A$, с помощью которых д.функция g может быть задана рекуррентно соотношениями вида

$$\begin{cases} c(1) = c_j \\ c(t+1) = \varphi(c(t), \vec{a}^n(t)) \\ b(t) = \psi(c(t), \vec{a}^n(t)), \end{cases} \qquad (*)$$

где $g(\vec{a}^n(1), \dots, \vec{a}^n(\tau)) = b(1)\dots b(\tau)$ (каноническая система уравнений для д.функции g). Это обстоятельство позволяет рассматривать д.функцию как оператор, реализуемый некоторым дискретным преобразователем T следующего вида. Его схемное представление дано на рис. 23. T имеет входы, изображенные с помощью стрелок, входящих в прямоугольник, и выход, изображенный стрелкой, исходящей из прямоугольника. "Работа" T осуществляется в тактовые моменты I,2,3... В каждый момент на входы T поступают сигналы, то есть входные буквы $\vec{a}^n$, прямоугольник - "корпус" T находится в одном из "внутренних" состояний, кодируемых с помощью элементов из C, а с выхода T снимаются сигналы, то есть выходная буква b. Входная буква и состояние T в данный момент однозначно определяют выходную букву в этот же момент и состояние T в следующий момент, то есть если в момент t на входы подавалась буква $\vec{a}^n(t)$, а T находился в состоянии $c(t)$, то $b(t) = \psi(c(t), \vec{a}^n(t))$ и $c(t+1) = \varphi(c(t), \vec{a}^n(t))$. Пусть в первый момент T находится в некотором состоянии $c(1)$ (начальное состояние). Используя функции φ и ψ, свяжем с T некоторую вычислительную процедуру, позволяющую по входному слову α^τ определить слово состояний $\varkappa^{\tau+1}$ и выходное слово β^τ следующим образом. По паре $(a(1), c(1))$ вычисляются два параметра $b(1) = \psi(c(1), a(1))$ и $c(2) = \varphi(c(1), a(1))$, затем по паре $(a(2), c(2))$ вычисляются $b(2) = \psi(c(2), a(2))$ и $c(3) = \varphi(c(2), a(2))$ и так далее: если для t, $t < \tau$, уже вычислены значения $c(t)$, то вычисляются $b(t) = \psi(c(t), a(t))$ и $c(t+1) = \varphi(c(t), a(t))$. Описанную вычислительную процедуру, устанавливающую соответствие между входными последовательностями состояний и выходными последовательностями, называют функционированием T. Если при этом интересуются только соответствием между входными и выходными словами, то функционирование T фактически совпадает с д.функцией g и в этом смысле T реализует g. Терминология, связанная с функционированием T, переносится также и на g.

Отметим далее, что каждое слово α^{τ} из A^* можно представить также в виде $(\alpha_{i_1}^{\tau}, \alpha_{i_2}^{\tau}, \ldots, \alpha_{i_n}^{\tau})$, где $\alpha_{i_\nu}^{\tau} = a_{i_\nu}(1)\, a_{i_\nu}(2) \ldots a_{i_\nu}(\tau)$, $\nu = 1, 2, \ldots n$, откуда следует, что д.функцию g можно рассматривать как частичную функцию $g: (A_{i_1})^* \times (A_{i_2})^* \times \cdots \times (A_{i_n})^* \to A^*$, определенную только на всех наборах из n слов множества A^*, имеющих одинаковую длину. Таким образом, если $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots\}$ – алфавит переменных u_m, принимающих в качестве значений элементы из A^*, то д.функцию g можно записать в виде $g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Класс всех д.функций и о.-д.функций, зависящих от переменных из алфавита $\mathcal{U}$, обозначим через $P_{д}^{A}$ и $P_{о.д}^{A}$ соответственно. Иногда д.функции будут рассматриваться в предположении, что значениями их переменных могут быть бесконечные последовательности букв из A. Значениями д.функций будут также бесконечные последовательности, вычисляемые с помощью системы (*).

Считая определенным так же, как и выше, понятие схемы, введем понятия обобщенной логической сети и обобщенной сети. Пусть F_n – элемент из E, занумеруем разнозначно некоторым образом его входы числами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (здесь i_ν – номер ν-го входа элемента; $\nu = 1, 2, \ldots, n$). Пусть $g(u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}) \in P_{Д}^{A}$. Будем считать ее приписанной элементу F_n с указанной нумерацией входов. Говорят в этом случае, что элемент F_n с указанной нумерацией входов реализует функцию g и интерпретируют это так же, как и факт реализации g дискретным преобразователем. Элемент G "работает" так же, как и ранее при определении сети. Нетрудно видеть, что его функционирование описывается д.функцией.

Рассмотрим теперь произвольную схему S с n входами. Припишем некоторым образом ее входам переменные $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}$, где $i_j < i_{j'}$ при $j < j'$ а входы элементов схемы S занумерованы так, как и в случае рассмотрения сети. Будем считать, что элементам, из которых построена схема, сопоставлены д. функции из $P_{Д}^{A}$. "Работа" схемы S осуществляется в те же моменты $t = 1, 2, \ldots$ и состоит в следующем. Предполагается, что в указанные моменты каждые вход и выход любого элемента схемы могут находиться в некоторых состояниях, при этом отождествленные входы, а также отождествленные входы и выходы находятся соответственно в одинаковых состояниях. Считается, что моменты I,2,... на входы схемы поступают побуквенно слова из A^*. В соответствии с законами функционирования элементов схемы и с учетом того, что состояния выходов элементов типа G уже определены, подача на входы схемы буквы $\vec{a}^{n}(1)$ определит состояние всех входов и выходов каждого элемента схемы S в момент $t=1$, а также "внутренние" состояния ее элементов в момент $t=2$. Подача буквы $\vec{a}^{n}(2)$ в следующий момент приводит к ситуации, аналогичной рассмотренной, и т.д. Таким образом, выход каждого элемента схемы S будет последовательно находиться в некоторых состояниях, аналогично обстоит дело с внутренними состояниями элементов. Описанная "переработка" слов α^{τ} из A^{*} с помощью схемы S в последовательности состояний, пробегаемых выходами и внутренними состояниями каждого элемента схемы S, называется функционированием схемы S, а сама схема, с определенным для нее указанным образом функционированием называется обобщенной логической сетью (сокращенно: о.л.с.). Можно показать, что "переработка" слов α^{τ} в слова β^{τ} состояний выхода о.л.с. S такова, что возникающее соответствие является д.функцией, а в случае, когда всем элементам типа F схемы S приписаны о.д. функции, является о.д.функцией. В этом смысле о.л.с. S реализует д.функцию.

Введем понятие "вычисление с помощью о.л.с.". Пусть в о.л.с. S имеется m элементов, выходы которых занумерованы числами $j_1, j_2, \dots, j_m$, $j_{\nu} < j_{\nu'}$ при $\nu < \nu'$, $m \geqslant 1$. Выделим в множестве $A' = A_{j_1} \times A_{j_2} \times \dots \times A_{j_m}$ некоторое подмножество Q, элементы которого назовем заключительными состояниями, и рассмотрим некоторую п.функцию $g(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n})$. Будем говорить, что о.л.с. S вычисляет относительно Q п.функцию g в точке $(\alpha_{i_1}^{\tau}, \alpha_{i_2}^{\tau}, \dots, \alpha_{i_n}^{\tau})$, понимая под этим следующее.

Будем подавать на входы о.л.с. S в моменты $t = 1, 2, \dots$ букву $\vec{a}^{n}(1)$ тогда или наступит первый раз момент κ_1 такой, что в этот момент выходы о.л.с. S окажутся в состояниях, образующих набор $\vec{q}^{\,m}(\kappa_1) = (q_{j_1}(\kappa_1), q_{j_2}(\kappa_1), \dots, q_{j_m}(\kappa_1))$, такой, что $\vec{q}^{\,m}(\kappa_1) \in Q$ (условие (I)), или такого момента не наступит. Если выполнено условие (I), то проверяем, имеет ли место равенство $g[\alpha^{\tau}]]_1 = b(\kappa_1)$ (условие (2)), где $b(\kappa_1)$ – состояние выхода о.л.с. S в момент κ_1. Если (2) выполнено, то в моменты, начиная с $t = \kappa_1 + 1$, подаем на входы о.л.с. S букву $\vec{a}^{n}(2)$ до тех пор, пока в момент κ_2 не будет выполнено условие (I) (с заменой κ_1 на κ_2). Затем проверяем условие (2), то есть равенство $g[\alpha^{\tau}]]_2 = b(\kappa_1)b(\kappa_2)$ и т.д. Если описанные моменты $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{\tau}$ с выполнением условий (I) и (2) наступят, то считаем, что о.л.с. S вычисляет п.функцию g в точке α^{τ}. В противном случае это не имеет места. Если о.л.с. S вычисляет относительно Q п.функцию g в каждой точке α^{τ}, то говорят, что S вычисляет относительно Q п.функцию g (для краткости слова "относительно Q" иногда опускаются). Нетрудно видеть, что если о.л.с. вычисляет п.функцию g, то $g \in P_{Д}^{A}$. Можно показать также, что если в о.л.с. S всем элементам приписаны о.д.функции, то д.функция g, вычисляемая с помощью S, также будет о.д.функцией. Установим это. Пусть всем элементам о.л.с. S приписаны л.д.функции, причем S вычисляет д.функцию g. Тогда множество $\mathcal{D}$ "внутренних состояний" о.л.с. S конечно; пусть d_0 – начальное состояние о.л.с. S и $\mathcal{P}'$ – множество пар $(d, \vec{a}^{n})$ таких, что d – состояние о.л.с. S и $\vec{a}^{n}$ – набор состояний входов о.л.с. S, возникающие в процессах вычисления значений функций g в те моменты, когда состояния выходов о.л.с. S

образуют набор из Q. Пусть также $\mathcal{P}=\{d_0\}\cup\mathcal{P}'$. Определим отображения $\varphi: \mathcal{P}\times\mathcal{A}\to\mathcal{P}$; $\psi: \mathcal{P}\times\mathcal{A}\to A$. Если $(d,\vec{a}^n)\in\mathcal{P}'$, $\vec{b}^n\in\mathcal{A}$, причем в момент t о.л.с. S имеет состояние d и на ее входы подается буква $\vec{a}^n$, а в моменты $t+1$, $t+2$, ... на ее входы подается буква $\vec{b}^n$, то в некоторый момент $t'>t$ состояния выходов о.л.с. S впервые определяет набор из Q; положим $\varphi((d,\vec{a}^n),\vec{b}^n)=(d',\vec{b}^n)$; $\psi((d,\vec{a}^n),\vec{b}^n)=c$, где d' – состояние о.л.с. S в момент t', c – состояние ее выхода в этот же момент. Если в моменты $t=1,2,3,\ldots$ на входы о.л.с. S подается буква $\vec{b}^n$, причем в момент t' впервые набор состояний выходов о.л.с. S оказывается принадлежащим Q, то положим $\varphi(d_0,\vec{b}^n)=(d',\vec{b}^n)$, $\psi(d_0,\vec{b}^n)=c$, где d' – состояние S в момент t', c – состояние выхода S в тот же момент. Вычисление значения функции g в точке $\alpha^\tau=\vec{a}^n(1)\ldots\vec{a}^n(\tau)$ можно представить теперь происходящим по схеме приведенного выше вида (*):

$$\begin{cases} \rho(1)=d_0, \\ \rho(t+1)=\varphi(\rho(t),\vec{a}^n(t)), \\ b(t)=\psi(\rho(t),\vec{a}^n(t)), \end{cases}$$

где $g(\alpha^\tau)=\beta^\tau=b(1)b(2)\ldots b(\tau)$, и функция g оказывается о.д.функцией. Так же, как и при рассмотрении л.с., определенная о.л.с. выступает в роли вычислителя теперь уже д.функций, при этом различные такие вычислители, как и ранее, возникают за счет приписывания (1) различных переменных входам схемы, (2) различных номеров входам элементов схемы, (3) различных д.функций из $P_Д^A$ элементам типа F схемы, (4) выбора начальных состояний ее элементов типа G а также (5) выделения множества Q ее заключительных состояний. Пусть в схеме S фиксированы условия (1), (2), (3), (5), а условие (4) реализовано, вообще говоря, частично, тогда возникающий объект называется обобщенной сетью (о.с.). Если в о.с. S элементам $F_{\ell_1}, F_{\ell_2},\ldots, F_{\ell_s}$, $s\geq 0$ не приписаны д.функции из $P_Д^A$, тогда, предполагая, что этим элементам возможно приписывание любых д.функций из $P_Д^A$ от соответствующих аргументов, можно считать, что сеть S задает некоторую частичную операцию $\omega_n: (P_Д^A)_{\ell_1}\times(P_Д^A)_{\ell_2}\times\cdots\times(P_Д^A)_{\ell_s}\to P_Д^A$, которая определяется следующим образом. Пусть элементам $F_{\ell_1}, F_{\ell_2},\ldots, F_{\ell_s}$ приписаны соответствующие функции $g_{\ell_1}, g_{\ell_2},\ldots, g_{\ell_s}$, тогда о.с. S можно рассматривать как о.л.с., то есть вычислитель некоторой д.функции из $P_Д^A$. Если такая д.функция g из $P_Д^A$ существует, то она объявляется значением $\omega_n(g_{\ell_1}, g_{\ell_2},\ldots, g_{\ell_s})$, в противном случае значение $\omega_n(g_{\ell_1}, g_{\ell_2},\ldots, g_{\ell_s})$ считается неопределенным. Операция ω_n, задаваемая о.с. S, никакому элементу типа F которой не приписана д.функция, называется свободной операцией, указанные элементы о.с. S, а также о.с. S называются свободными. Операции, о.с. и элементы, не являющиеся свободными, называются связанными. Операции, задаваемые сетями, которые или не содержат элементов типа F, или которых элементы типа F являются связанными, называются константными.

Множество всех о.с. получающихся из сетей множества $\mathcal{Y}(E)$ с помощью правил (1) - (5), обозначим через $\mathcal{Y}_n^*(E, P_Д^A)$. Множество всех операций над д.функциями, задаваемых с помощью о.с. из N_n, $N_n \subseteq \mathcal{Y}_n^*(E, P_Д^A)$, обозначим через $\Omega_n(N_n)$. Пусть $M \subseteq P_Д^A$, $M \neq \emptyset$ и $\Omega_n \subseteq \Omega_n(\mathcal{Y}_n^*(E, P_Д^A))$, $\Omega_n \neq \emptyset$. Пару $\langle M, \Omega_n \rangle$ будем называть последовательностной функциональной системой (п.ф.с.), если при применении операций из Ω_n к элементам из M получаются элементы из M. Как и для и.ф.с., с п.ф.с. $\langle P_Д^A, \Omega_n \rangle$ естественно связать рассмотрение оператора замыкания $\mathfrak{I}_{\Omega_n}$, который вводится полностью аналогично оператору $\mathfrak{I}_{\Omega}$ для и.ф.с. Оператор $\mathfrak{I}_{\Omega_n}$ назовем обобщенно-автоматным замыканием и для краткости ОА-замыканием. В случае, когда описанные построения используют только о.-д.функции, во всех обозначениях вместо буквы д. будем использовать сочетание о.-д.

§ 1.2. Примеры важнейших п.ф.с.

По аналогии с тем, как это делалось для P_A, введем операции η, τ, Δ, ∇ и $*$ для д.функций из $P_Д^A$. Нетрудно видеть, что эти операции при фиксированных арностях д.функций задаваемы с помощью о.с. На рис. 8,9,10 приведены соответствующие реализации для Δ, ∇ и $*$. Реализуемость для операций η и τ с помощью о.с. очевидна. В этих о.с. в качестве множества Q выступают всевозможные наборы значений всех выходов элементов рассматриваемых о.с. Опишем еще одну операцию над д.функциями. Она является унарной и частичной. Обозначим ее через i. Пусть $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_Д^A$, будем говорить, что g зависит со сдвигом от x_n, если существует такая система канонических уравнений $(*)$, задающая g, в которой при всех фиксированных значениях $c(t)$, являющихся значениями функции φ, функция ψ фиктивно зависит от значения $\tilde{a}^n(t)$. Предположим, что x_n - такое переменное для g. Определим новую п.функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ следующим образом. Пусть задано произвольное слово $\alpha^\tau = (\alpha_1^\tau, \alpha_2^\tau, \ldots, \alpha_{n-1}^\tau, \alpha_n^\tau)$, определим с помощью д.функции g и слова α^τ новое слово $\tilde{\alpha}_n^\tau = \tilde{a}_n(1)\tilde{a}_n(2)\ldots\tilde{a}_n(\tau)$ таким образом.

1. Пусть $c(1) = q_i$, тогда $\tilde{a}_n(1) = \psi(c(1), a_1(1), a_2(1), \ldots, a_{n-1}(1))$.

2. Пусть определены значения $\tilde{a}_n(t)$ и $c(t)$, тогда значения $\tilde{a}_n(t+1)$ и $c(t+1)$ определяем так:

$$c(t+1) = \varphi(c(t), a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{n-1}(t), \tilde{a}_n(t)),$$
$$\tilde{a}_n(t+1) = \psi(c(t), a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{n-1}(t)).$$

По определению полагаем, что $f(\alpha_1^\tau, \alpha_2^\tau, \ldots, \alpha_{n-1}^\tau) = g(\alpha_1^\tau, \alpha_2^\tau, \ldots, \alpha_{n-1}^\tau, \tilde{\alpha}_n^\tau)$, и пишем: $i(g) = f$. Важно подчеркнуть, что п.функция $i(g)$, очевидно, является д.функцией, а в случае, когда g - о.-д.функция, то $i(g)$ - о.-д.функция. Ясно также, что $i(g)$ однозначно определяется по f и не зависит от вида системы $(*)$.

Д.функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем функцией с задержкой, если существуют такое число τ из N_0 и функция $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из P_A, что для любого набора $(d_1^t, d_2^t, \ldots, d_n^t)$, где $t \geq \tau$, если $\beta^t = f(d_1^t, d_2^t, \ldots, d_n^t)$, то для любого t такого, что $z \geq t \geq \tau$ будет иметь место равенство $b(t) = f(a_1(t-\tau), a_2(t-\tau), \ldots, a_n(t-\tau))$. Число τ называется задержкой, с которой g реализует функцию f. Класс всех функций с задержками обозначим через $P^A_{\varphi.з}$. Введем в этом классе операцию $*_c$, которую назовем синхронной подстановкой. Пусть заданы функции с задержками $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1})$, $h_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m_2}), \ldots, h_n(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm_n})$ множества переменных у которых не пересекаются и которые реализуют функции $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $f_1(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1m_1})$,

$$f_2(y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2m_2}), \ldots, f_n(y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nm_n})$$

из P_A с задержками $\tau, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ соответственно, и при этом $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n$. Обозначим через $g_{*_c}(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ п.функцию, которая задается формулой такого вида

$$g(h_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1}), h_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m_2}), \ldots, h_n(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm_n}))$$

Нетрудно видеть, что эта п.функция является функцией с задержкой, которая реализует функцию $f(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, по определению равную $f_{*_c}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ с задержкой $\tau + \tau_1$, то есть операция $*_c$, как, впрочем, и операции $\eta, \tau, \nabla, \Delta$, при применении к классу $P^A_{\varphi.з}$ не выводит за его пределы. Операции $\mathcal{L}$ и $*_c$ для д.функций фиксированной арности задаваемы с помощью о.с. Соответствующие о.с. приведены на рис. 24 и 25. О.с. S, изображенная на рис. 24, имеет $n-1$ вход, 1 выход и состоит из четырех элементов. Элемент F_1 является свободным элементом, у которого входы занумерованы слева направо так, что j-й вход имеет номер индекса переменного, обозначенного у д.функции g через x_j. Элемент F_2 реализует д.функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ такую, что $\mathcal{L}(g) = f$. Таким образом, элементу F_2 приписана фиксированная д.функция. Его входы занумерованы также, как и первые $n-1$ входов элемента F_1. Элемент F_3 с задержкой 0 реализует ф.з. $h(x_1, x_2, x_3)$, которая, в свою очередь, реализует функцию $\ell(y_1, y_2, y_3)$ из P_A такую, что $\ell(0, b, c) = 0$; $\ell(1, b, c) = 0$ если $b \neq c$ и $\ell(1, b, c) = 1$ при $b = c$; четвертый элемент представляет собой элемент G, начальное состояние выхода которого есть 1. Множество заключительных состояний о.с. S состоит из всех наборов состояний выходов его элементов, в которых значение выхода элемента F_3 есть 1.

О.с. S, изображенная на рис. 25, имеет $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ выходов, один выход и состоит из $2n+3$ элементов. Каждый из элементов F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, является свободным, его входы занумерованы слева направо так, что j-ый вход имеет номер индекса переменного, обозначенного у ф.з. h_i через x_{ij}. Элемент F_i' реализует ф.с. h_i, то есть тем самым фиксированную ф.з. Его входы занумерованы так же, как и у F_i. Элемент F_{n+1}, входы которого занумерованы слева направо числами 1,2,..., $2n$, реализует такую ф.з. $h(u_1, u_2, \ldots, u_{2n}, u_{2n+1})$ с задержкой 0, что для реализуемой ею функции $\delta(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}, y_{2n+1})$ справедливо следующее. Равенство $\delta(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}) = 0$ имеет место точно тогда, когда или $a_{2n+1} = 0$, или при $a_{2n+1} = 1$ хотя бы для одной пары вида (a_{2k-1}, a_{2k}), $k = 1, 2, \ldots, n$, будет выполнено $a_{2k-1} \neq a_{2k}$. В остальных случаях функция δ равна 1. Начальное состояние выхода элемента G равно 1. Элемент F_{n+2} является свободным, его выходы занумерованы слева направо числами 1,2,... Множество заключительных состояний о.с. S состоит из всех наборов состояний выходов его элементов, в которых значение выхода элемента F_{n+1} равно 1.

Рассмотрим алгебры

$$\mathcal{P}^1 = < P^A_{ф.з.}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *_c >, \quad \mathcal{P}^2 = < P^A_{о.д.}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, * >,$$
$$\mathcal{P}^3 = < P^A_{д}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, * >, \quad \mathcal{P}^4 = < P^A_{о.д.}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \mathfrak{i} >,$$
$$\mathcal{P}^5 = < P^A_{д}, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *, \mathfrak{i} >,$$

в которых, очевидно, каждая из операций не выводит за пределы соответствующего множества P, $P \in \{P^A_{ф.з.}, P^A_{о.д.}, P^A_{д}\}$. Носитель алгебры $\mathcal{P}^j$ обозначим через P^j, $j = 1, 2, \ldots 5$. Из построений, приведенных выше, следует, что N_j – множество о.с., соответствующих для заданной алгебры $\mathcal{P}^j$ ее операциям, то алгебра $\mathcal{P}^j$ будет эквивалентна п.ф.с. $< P^j, \Omega_n(N_j) >$ в том смысле, что операторы замыкания в них будут совпадать, тем самым в указанном смысле рассмотрение этих алгебр сводится к рассмотрению п.ф.с. Алгебры $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \ldots, \mathcal{P}^5$ являются важнейшими модельными объектами при изучении алгебр последовательностных функций. Соответствующие им п.ф.с. будем считать примерами важнейших п.ф.с.

§ 1.3. Общие свойства п.ф.с.

Вводя по аналогии со случаем P_A понятия фиктивных и существенных переменных для д.функций, отметим, что в важнейших примерах п.ф.с. задание любой д.функции фактически эквивалентно заданию всех д.функций, которые отличаются от нее лишь фиктивными переменными. Учитывая это, будем далее считать, что в рассматриваемых п.ф.с. это свойство будет также выполнено.

Для п.ф.с. так же, как и для и.ф.с., основной для нас будет задача о полноте, которая становится так же, как и в § 3 в общем случае для пары $<\mathcal{M}, \mathfrak{J}>$ с распространением на п.ф.с. всех основных понятий. При этом в силу того, что в п.ф.с. $<M, \Omega_n>$ оператор $\mathfrak{J}_{\Omega_n}$ является алгебраическим, будет справедливо

Предложение 1.3.1. Конечно-порожденная п.ф.с. $<M, \Omega_n>$, в которой $\mathfrak{J}_{\Omega_n}(\phi) \neq M$, является правильной.

Особенностями решения задачи о полноте для п.ф.с. $<M, \Omega_n>$, как и в случае и.ф.с., зависят от свойств множества M и от класса операций Ω_n. Пусть $\mathcal{K}^A_{a;ф.з.}$, $\mathcal{K}^A_{a;о.д.}$ и $\mathcal{K}^A_{a;д}$ – классы всех алгебраических замыканий на множествах $P^A_{ф.з.}$, $P^A_{о.д.}$ и $P^A_{д}$ соответственно, а $\mathcal{K}^A_{OA,ф.з.}$, $\mathcal{K}^A_{OA,о.д.}$ и $\mathcal{K}^A_{OA,д}$ - классы всех обобщенно-автоматных замыканий на тех же множествах соответственно. Имеет место следующая

Теорема 1.3.1. Если $\Omega \in \{$ф.з., о.д., д.$\}$, то $\mathcal{K}^A_{A,\Omega} = \mathcal{K}^A_{OA,\Omega}$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 4.1.1, поэтому мы его здесь приводим не полностью, а лишь покажем, что для любого конечного множества $M = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$, $s > 0$, $M \subseteq P$, и любой п.функции g из P, где P есть $P^A_{ф.з.}$, $P^A_{о.д.}$ или $P^A_{д}$ найдется о.с. S над P такая, что реализуемая ею операция ω_n обладает следующим свойством: $\omega_n(g_1, \dots, g_s) = g$ и ω_n не определена в остальных точках. Это свойство является ключевым при доказательстве теоремы 1.3.1.

Так как мы рассматриваем п.функции с точностью до фиктивных переменных, то можно считать, что все п.функции g_j, $j = 1, 2, \dots, s$, и п.функция g зависят от одних и тех же переменных $u_1, u_2, \dots, u_r$.

Рассмотрим о.с. S приведенную на рис. 26. Она имеет r входов и один выход и состоит из $2s+3$ элементов. Элементы $F_1, F_2, \dots, F_s$ являются свободными, их входы занумерованы слева направо числами 1,2,..., r. Элементы $F'_1, F'_2, \dots, F'_s$ являются связанными, их входы занумерованы так же, как и у элементов $F_1, F_2, \dots, F_s$. Элементу F'_j приписана п.функция g_j. Элементу F_{s+2} приписана п.функция g. Входы элемента F_{s+2} занумерованы так же, как и у F_1. Выход элемента G в начальный момент времени находится в состоянии 1. Элементу F_{s+1} приписана ф.з. $h(u_1, u_2, \dots, u_{2s}, u_{2s+1})$, которая реализует функцию $f(y_1, y_2, \dots, y_{2s}, y_{2s+1})$ из P_A с задержкой 0, такую, что $f(a_1, a_2, \dots, a_{2s}, a_{2s+1}) = 0$ точно тогда, когда или $a_{2s+1} = 0$, или при $a_{2s+1} = 1$ найдется такая пара (a_{2k-1}, a_{2k}), $k = 1, 2, \dots, s$, что $a_{2k-1} \neq a_{2k}$. Множество заключительных состояний о.с. S состоит из всех таких наборов значений выходов ее элементов, в которых значение выхода элемента F_{s+1} равно 1. Нетрудно видеть, что о.с. S обладает указанными выше свойствами, то есть реализует операцию ω_n.

Неконструктивность О.А. - замыкания для п.ф.с., возникающую за счет произвольного выбора множества заключительных состояний, можно устранить путем рассмотрения только регулярных заключительных состояний. Вводя по аналогии с и.ф.с. соответствующие понятия, в которых фигурирует регулярность, с учетом осуществленных построений получаем следующее

Предложение 1.3.2. Операторы замыкания в алгебрах $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3, \mathcal{P}^4, \mathcal{P}^5$ являются регулярными ОА-замыканиями. Пусть $\Omega \in \{$ф.з., о.д., д$\}$ и $\mathcal{K}^A_{OA,P,\Omega}$ - класс всех регулярных ОА-замыканий из $\mathcal{K}^A_{OA,\Omega}$. Аналогично случаю п.ф.с. с учетом построенных в этом параграфе о.с. можно утверждать, что справедлива

Теорема 1.3.2. Если $\Omega \in \{$ф.з., о.д., д$\}$, то $\mathcal{K}^A_{OA,P,\Omega} = \mathcal{K}^A_{OA,\Omega}$.

§ 2. Вопросы полноты для функций с задержками.

В этом параграфе будут рассмотрены несколько естественно возникающих задач, представляющих собой модифицированные задачи о полноте для функций с задержками из класса $P^A_{\varphi.з.}$, где $|A| = 2$.

§ 2.1. Модификации задачи о полноте для функций с задержками

Рассмотрим класс $P^A_{\varphi.з.}$ при $|A|=2$. Введем в нем отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом. Для f и g из $P^A_{\varphi.з.}$ будем писать $f \sim g$, если они реализуют одну и ту же функцию из P_2 с одной и той же задержкой. Тем самым $P^A_{\varphi.з.}$ распадается на классы эквивалентности по отношению $\sim$. Если f содержится в таком классе K и реализует функцию h из P_2 с задержкой τ, то для обозначения класса K будем использовать пару (h, τ). Множество всех пар указанного вида обозначим через $\widetilde{P}_2$. Очевидно, $\widetilde{P}_2$ состоит из всех пар (h, τ), где $h \in P_2$ и $\tau \in N_0$. Операции из алгебры $\mathcal{P}'$ естественно индуцируют над парами из $\widetilde{P}_2$, которые мы будем называть операциями синхронной суперпозиции. В нашем случае эти операции выглядят если $\Diamond \in \{\eta, \tau, \Delta, \nabla\}$, то $\Diamond((h,\tau)) = (\Diamond(h), \tau)$, а если заданы пары $(g(y_1, y_2, \dots, y_m), \tau), (f_1, \tau_1), (f_2, \tau_1), \dots, (f_m, \tau_1)$, то $(g, \tau) *_c ((f_1, \tau_1), (f_2, \tau_1), \dots, (f_m, \tau_1)) = (g *_c (f_1, f_2, \dots, f_m), \tau + \tau_1)$.

Таким образом, приходим к алгебре $\widetilde{\mathcal{P}}_2 := \langle \widetilde{P}_2, \eta, \tau, \Delta, \nabla, *_c \rangle$.
В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства алгебры $\mathcal{P}_2 = \langle P_2, \eta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$.
Пусть $\Omega = \{\eta, \tau, \Delta, \nabla, *_c\}$ и $\Omega' = \{\eta, \tau, \Delta, \nabla, *\}$. Определим на парах из $\widetilde{P}_2$ операцию $\circledast_c$ следующим образом: если заданы пары $(f(x_1, x_2, \dots, x_n), t)$ и $(g_1, t_1), (g_2, t_1), \dots, (g_n, t_1)$, то $(f, t) \circledast_c ((g_1, t_1), (g_2, t_1), \dots, (g_n, t_1)) = (f(g_1, g_2, \dots, g_n), t + t_1)$.

Отличие операции $\circledast_c$ от $*_c$ состоит в том, что при ее применении не предполагается, что множества переменных у функций $f, g_1, g_2, \dots, g_n$ не пересекаются. Нетрудно видеть, что операторы замыкания в алгебрах $\langle \widetilde{P}_2, \eta, \tau, \Delta; \nabla, *_c \rangle$ и $\langle \widetilde{P}_2, \eta, \tau, \Delta, \nabla, \circledast_c \rangle$ совпадают, поэтому мы вместо операции $*_c$ для упрощения выкладок будем пользоваться операцией $\circledast$.
Пусть Φ – множество всех пар вида $(x_i, 0)$, $i \in N$. На подмножествах множества $\widetilde{P}_2$ определим оператор $\mathfrak{I}_{\Omega,\Phi}$ следующим образом: для $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$ полагаем $\mathfrak{I}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{I}_{\Omega}(\mathfrak{M} \cup \Phi)$. Ясно, что $\mathfrak{I}_{\Omega,\Phi}$ является оператором замыканий.

Рассмотрим следующие модификации задачи о полноте.
Множество $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$ называется:

Π_1 – полным, если $\forall f\ \forall t\ ((f,t) \in \mathfrak{I}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}))$,

Π_2 – полным, если $\exists t\, \forall f\, \forall t' ((t' \geq t) \to ((f, t') \in \mathfrak{I}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})))$,

Π_3 – полным, если $\exists t_1 \exists t_2 ((t_1 < t_2) \& \forall t\, \forall f ((t_1 \leq t \leq t_2) \to ((f,t) \in \mathfrak{I}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}))))$,

Π_4 – полным, если $\forall f \exists t\, \forall t' ((t' \geq t) \to ((f, t') \in \mathfrak{I}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})))$,

Π_5- полным, если $\exists t \forall f \exists t' ((t' \leq t) \& ((f,t') \in \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})))$,

Π_6- полным, если $\exists t \forall f ((f,t) \in \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}))$,

Π_7- полным, если $\forall f \exists t ((f,t) \in \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}))$.

Очевидно, что если $\mathfrak{M}$ есть Π_i- полное множество при $i = 1,2,\ldots,6$, то оно и Π_7- полное. Тем самым решение задачи о Π_i-полноте, то есть задачи об отыскании всех Π_i-полных множеств, связано с решением задачи о Π_7-полноте. Основные моменты, связанные с решением последней задачи, рассматриваются в следующем параграфе.

§ 2.2. Задача о Π_7- полноте.

Следующая теорема дает неявный критерий Π_7- полноты, который проясняет структуру Π_7- полных множеств.

Теорема 2.2.1. Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$, является Π_7- полным тогда и только тогда, когда для некоторого t из N_0 множество $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$ содержит такое подмножество $\mathfrak{M}_1 = \{(f_j,\ \kappa_j \cdot t) : j \in \mathcal{J}\} \cup \{(x,t)\}$, $\mathcal{J} \subseteq N$, что $\mathcal{J}_{\Omega'}(\{f_j : j \in \mathcal{J}\}) = P_2$.

Теорема 2.2.2. Если множество $\{(f,t)\}$ является Π_7- полным, то $t = 0$.

Теорема 2.2.1. не дает эффективного способа для проверки Π_7 - полноты заданного множества. Для построения такого способа опишем некоторые классы пар из $\widetilde{P}_2$.

Пусть $\mathcal{Z} \subseteq P_2$ и $\mathcal{Z} \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ обозначим через $\widetilde{\mathcal{Z}}$ множество всех пар (f,t) таких, что $f \in \mathcal{Z}$, $t \in N_0$.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_2 называется α-, β-, γ- или δ- функцией, если $f(x, x, \ldots, x)$ равна x, 1, 0 или $\bar{x}$ соответственно. Обозначим через A, B, Γ, Δ - классы всех α-, β-, γ- и δ- функций соответственно.

Обозначим через $\widetilde{C}$ множество всех пар вида $(f, t+1)$, $(\varphi, t+1)$, $(\psi, 0)$, где $f \in B$, $\varphi \in \Gamma$, $\psi \in A$, $t \in N_0$. Пусть $i \in \{0,1\}$, обозначим через $\widetilde{E}_i$ множество всех пар вида $(f, 0)$, $(\bar{i}, t+1)$, (i, t), где $f \in T_i$, $t \in N_0$.

Назовем функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_2 четной, если имеет место равенство $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Обозначим через $\mathcal{Y}$ множество всех четных функций.

Обозначим через $\widetilde{H}$ множество всех пар вида $(f, 0)$, $(\varphi, t+1)$, где $\varphi \in \mathcal{Y}$, $f \in S$, $t \in N_0$.

Для каждого τ из N_0 обозначим через $\widetilde{\mathcal{Z}}_\tau$ множество всех пар вида $(f, (2t+1)2^\tau)$, $(\varphi, (2t+1)2^s)$, $(\psi, 0)$, где $f \in \Delta$, $\varphi \in A$, $\psi \in A$, $t \in N_0$, $s \in N_0 \setminus \{0, 1, 2, \ldots, \tau\}$.

Для каждого τ из N_0 обозначим через $\widetilde{W}_\tau$ множество всех пар вида $(f, (2t+1)2^\tau)$, $(0,t)$, $(1,t)$, $(\varphi, (2t+1)2^s)$, $(\psi, 0)$, где $\bar{f} \in M$, $\varphi \in M$, $\psi \in M$, $t \in N_0$, $s \in N_0 \setminus \{0, 1, 2, \ldots, \tau\}$.

Назовем множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$, Π_7- предполным, если оно не Π_7 - полно, но для всякой пары (f, t), такой, что $(f,t) \notin \mathfrak{M}$, множество $\{(f,t)\} \cup \mathfrak{M}$ является Π_7 – полным.

Обозначим через $\mathcal{W}$ множество $\{\widetilde{T}_0, \widetilde{T}_1, \widetilde{S}, \widetilde{M}, \widetilde{L}, \widetilde{C}, \widetilde{E}_0, \widetilde{E}_1, \widetilde{H}, \widetilde{Z}_0, \widetilde{Z}_1, \dots, \widetilde{W}_0, \widetilde{W}_1, \dots\}$.

Теорема 2.2.3.

1. Каждый из классов, образующих множество $\mathcal{W}$, является Π_7 – предполным классом.

2. Множество всех Π_7 – предполных классов в $\widetilde{\mathcal{P}}_2$ совпадает с $\mathcal{W}$.

3. Любое множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$, не являющееся Π_7– полным, содержится в некотором Π_7– предполном классе.

Теорема 2.2.4. Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$ является Π_7-полным тогда и только тогда, когда оно не есть подмножество ни одного из классов, образующих множество $\mathcal{W}$.

Теорема 2.2.5. Существует алгоритм, устанавливающий, Π_7– полна ли наперед заданная конечная система пар из $\widetilde{P}_2$.

Теорема 2.2.6.

1. Всякое Π_7 – полное множество содержит Π_7– полное подмножество мощности не более, чем пять.

2. Существует Π_7– полное множество мощности пять, всякое собственное подмножество которого не является Π_7 – полным.

Доказательство теорем 2.2.1 – 2.2.6 содержится в [41].

§ 2.3. Задачи о Π_i – полноте при $i \neq 7$.

Приведем основные результаты, связанные с задачами о Π_i – полноте при i = 1,2,3,4,5,6.

Для множества $\mathfrak{M}$ обозначим через $\mathfrak{M}^{(1)}$ множество всех функций f таких, что при некотором t имеет место $(f,t) \in \mathfrak{M}^{(1)}$. Очевидно, что если $\mathfrak{M}$ есть Π_i– полное множество, то $J_{\Omega'}(\mathfrak{M}^{(1)}) = P_2$. Сформулируем утверждения, связанные с условиями Π_i – полноты.

Теорема 2.3.1. Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$ является Π_1– полным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{M} \supseteq \{(f_1,0),(f_2,0),\dots,(f_s,0)\}$, и при этом $J_{\Omega'}(\{f_1,f_2,\dots,f_s\}) = P_2$;

2) $\mathfrak{M} \ni (f,0)$, и при этом $f \notin \{0,1\}$.

Обозначим через н.о.д. $(t_1,t_2,\dots,t_r)$ наибольший общий делитель чисел $t_1, t_2, \dots, t_r$ из $\mathcal{N}$.

Теорема 2.3.2. Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \widetilde{P}_2$ является Π_4 – полным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условий:

1) $\mathfrak{M}$ является Π_7– полным;

2) $\mathfrak{M} \supseteq \{(f_1,t_1),(f_2,t_2),\dots,(f_r,t_r)\}$, где каждая функция f_i, $i=1,2,\dots,r$ не есть константа и н.о.д. $(t_1,t_2,\dots,t_r) = 1$.

Теорема 2.3.3. Конечное множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_2$ является Π_6 - полным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{M}$ является Π_7 - полным;

2) существует функция $f \notin L$, такая, что $(f,0) \in \mathfrak{M}$.

Теорема 2.3.4. Задачи о Π_5 - полноте и Π_6 - полноте эквивалентны.

Теорема 2.3.5. Множество $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_2$ является Π_2 - полным тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{M}$ является Π_6 - полным;

2) $\mathfrak{M} \supseteq \{(f_1,t_1),(f_2,t_2),\dots,(f_s,t_s)\}$, где f_i при любом $i = 1,2,\dots,s$ не есть константа и н.о.д. $(t_1, t_2, \dots, t_s) = 1$.

Теорема 2.3.6. Задачи о Π_2 - полноте и Π_3 - полноте эквивалентны.

Приведем еще один критерий Π_7 - полноты, который будет использован при доказательстве теорем этого параграфа.

Теорема 2.3.7. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_2$, $\mathcal{J}_{\Omega'}(\mathfrak{M}^{(1)}) = P_2$ и в $\mathfrak{M}$ входит пара (f,t) такая, что f не есть константа, $t>0$. Тогда $\mathfrak{M}$ является Π_7 - полным тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий а) и б):

а) при некотором $t'>0$ выполнено $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(x,t'),(\bar{x},t')\}$;

б) при некотором $t'>0$ выполнено $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(0,t'),(1,t'),(x,t'),(\bar{x},t')\}$.

Теорема 2.3.8. В системе K_i всех Π_i - полных множеств каждое $\mathfrak{M} \in K_i$ содержит конечное Π_i - полное подмножество тогда и только тогда, когда $i \in \{1,4,7\}$. При исследовании понятий Π_i - полноты, когда $i \in \{2,3,5,6\}$, естественным образом возникает вопрос об оценке параметра t фигурирующего в определении соответствующей Π_i - полноты. Пусть имеется конечное множество $\mathfrak{M}$, обозначим через $\|\mathfrak{M}\|$ наибольшее из чисел t в парах (f,t) из $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ является Π_i - полным, то через $L_{\Pi_i}(\mathfrak{M})$ обозначим наименьшее возможное значение t, к которому относится первый квантор существования в определении Π_i - полноты. Пусть $L_{\Pi_i}(n) = \sup_{\|\mathfrak{M}\| \le n} L_{\Pi_i}(\mathfrak{M})$.

Теорема 2.3.9. Если $i \in \{2,3\}$, то $n^2 \le L_{\Pi_i}(n) \le n^6$.

Теорема 2.3.10. Если $i \in \{5,6\}$, то $n^2 \le L_{\Pi_i}(n) \le n^3$.

§ 2.4. Доказательство утверждений из § 2.3

Доказательство теоремы 2.3.1.

Нетрудно видеть, что условия 1) и 2) являются необходимыми для Π_1 - полноты. Далее, так как $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ не константна, то можно считать, что f существенно зависит от x_1, а, значит, для некоторых $a_2, a_3, \dots, a_n$ из $\{0,1\}$ будем иметь $f(0,a_2,\dots,a_n) \ne f(1,a_2,\dots,a_n)$. Так как $(\bar{x},c) \in \mathcal{J}_{\Omega\Phi}(\mathfrak{M})$, то можно считать, что $f(0,a_2,\dots,a_n) = 0$. Рассмотрим пару $(h,1) = (f,1) *_c ((x,0),(a_2,0),\dots,(a_n,0))$. Ясно, что $(h,1) \in \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$ и $h = x$. Отсюда, очевидно, следует Π_1 - полнота $\mathfrak{M}$, а тем самым и достаточность условий теоремы 2.3.1.

Лемма 2.4.1. Если $\mathfrak{M}=\{f_i : i\in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I}\subseteq N$, $\mathcal{I}_{\Omega'}(\mathfrak{M})=P_2$, $g\in A$, $t_i\in N_0$, $t\in N$, $t_i=\ell_i\cdot t$ для любого $i\in\mathcal{I}$, то множество $\mathfrak{N}=\{(g,t)\}\cup\{(f_i,t_i): i\in\mathcal{I}\}$ является Π_7-полным.

Доказательство. Легко видеть, что в любой паре (f,t') из $\mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{N})$ число t' кратно t. Используя это, покажем, что для любой последовательности пар $(f(x_1,x_2,\dots,x_n),t_0),(g_1,t_1),(g_2,t_2),\dots,(g_n,t_n)$ из $\mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{N})$ существует такое $\tilde{t}$, что $(f(g_1,g_2,\dots,g_n),\tilde{t})\in \mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{N})$. Отсюда в силу того, что $\mathcal{I}_{\Omega'}(\mathfrak{M})=P_2$, очевидно, будет следовать Π_7-полнота множества $\mathfrak{N}$. Если $t_j=0$ при любом j из $\{1,2,\dots,n\}$, то в качестве пары $(f(g_1,g_2,\dots,g_n),\tilde{t})$ можно взять $(h,t)=(f,t_0)\circledR_c((g_1,0),(g_2,0),\dots,(g_n,0))$. Пусть для некоторого j выполнено $t_j>0$ и пусть t' – наименьшее общее кратное всех положительных чисел t_j. Для таких t_j имеет место представление $t'=k_j\cdot t_j$, $t_j=\ell_j t$, где $k_j,\ell_j\in N$.

Для пары (g_j,t_j), где $t_j>0$ при $k_j>1$ рассмотрим пару $(h_j,t')= =(x,(k_j-1)\cdot\ell_j\cdot t)\circledR_c((g_j,t_j))$, где $(x,(k_j-1)\cdot\ell_j\cdot t)$ получается $(k_j-1)\ell_j$-кратной подстановкой пары $(x,t)=(g(x_1,x_2,\dots,x_m),t)\circledR_c((x,0),(x,0),\dots,(x,0))$ в себя. Для пары (g_j,t_j), где $t_j=0$, рассмотрим пару $(h_j,t')=(x,t')\circledR_c((g_j,0))$. Наконец, при $t_j=t'$ положим $(h_j,t')=(g_j,t_j)$. Ясно, что во всех случаях $h_j=g_j$. Рассмотрим теперь пару $(h,t_0+t')=(f,t_0)\circledR_c((h_1,t'),(h_2,t'),\dots,(h_n,t'))$. Ясно, что $(h,t_0+t')\in\mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{N})$ и $h=f(g_1,g_2,\dots,g_n)$. Лемма доказана.

Лемма 2.4.2. Если $f\notin L$, $t\in N_0$, то при (1) $t_1,t_2\in N$, а также при (2) $t_1=t_2=0$ справедливо

$$\mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\{(f,t),(0,t_1),(1,t_1),(x,t_2),(\bar{x},t_2)\})\ni(x_1\cdot x_2,\,t+t_2(t_1+2)).$$

Доказательство. Известно [2,45], что если $f\notin L$, то найдется набор $(b_3,b_4,\dots,b_n)$ такой, что $g(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,b_3,b_4,\dots,b_n)=x_1x_2+a_1x_1+a_2x_2+a_3$. Ясно, что в случаях (1) и (2) будет иметь место $\mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\{(0,t_1),(1,t_1),(x,t_2),(\bar{x},t_2)\})\supseteq\{(0,t_1t_2),(1,t_1t_2),(x,t_1t_2)\}$. Рассмотрим пару $(h_1,t+t_1t_2)=(f,t)\circledR_c((g_1,t_1t_2),(g_2,t_1t_2),\dots,(g_n,t_1t_2))$, где $g_1=x_1$, $g_2=x_2$, $g_j=b_j$ при $j=3,4,\dots,n$. Ясно, что $h_1=g(x_1,x_2)$. Рассмотрим пару $(h_2,t+t_1t_2+t_2)=(h_1,t+t_1t_2)\circledR_c(((x_1+a_2),t_2),((x_2+a_1),t_2))$. Ясно, что $h_2(x_1,x_2)=x_1x_2+a_1a_2+a_3$. Отмечая, что в паре $(h_3,t+t_1t_2+t_2+t_2)=(x+a_1a_2+a_3,t_2)\circledR_c((h_2,t+t_1t_2+t_2))$ выполнено $h_3=x_1\cdot x_2$, получаем утверждение леммы.

Лемма 2.4.3. Если $\mathfrak{M}=\{f_i : i\in\mathcal{I}\}$, $\mathcal{I}\subseteq N$, $\mathcal{I}_{\Omega'}(\mathfrak{M})=P_2$, $t_i\in N_0$, $t\in N$, то множество $\mathfrak{N}=\{(x,t),(\bar{x},t)\}\cup\{(f_i,t_i): i\in\mathcal{I}\}$ является Π_7-полным.

Доказательство. Из того, что $\mathcal{I}_{\Omega'}(\mathfrak{M})=P_2$ следует, что $\mathfrak{M}\supseteq\{f_{i_1},f_{i_2}\}$, где $f_{i_1}\notin S$, $f_{i_2}\notin L$. Нетрудно видеть, что при некотором t' из N выполнено $\mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\{(f_{i_1},t_{i_1}),(x,t),(\bar{x},t)\})\supseteq\{(0,t'),(1,t')\}$. По лемме 2.4.2 $\mathcal{I}_{\Omega,\phi}(\{(0,t'),(1,t'),(f_{i_2},t_{i_2}),(x,t),(\bar{x},t)\})\ni(x_1\cdot x_2,t'')$

при некотором t'' из N. Отметим, что $\mathcal{J}_{\mathcal{R}'}(\{x_1 \cdot x_2, \bar{x}\}) = P_2$, и рассмотрим два случая.

1. t'' кратно t. Тогда по лемме 2.4.1 система $\{(x_1 \cdot x_2, t''), (x,t), (\bar{x},t)\}$ является Π_7-полной.

2. t'' не кратно t. Ясно, что $t>1$. Заметим, что $(x_1 \cdot x_2, t'') \circledast_c ((x,0), (x,0)) = (x, t'')$, и рассмотрим пару $(x, (t-1)\cdot t'')$, получающуюся $t-1$-кратной подстановкой пары (x,t'') в себя. Ясно, что $(x,(t-1)\cdot t'') \circledast_c (x_1 \cdot x_2, t'') = (x_1 \cdot x_2, t\cdot t'')$, поэтому снова можно применительно к системе $\{(x_1 \cdot x_2, t\cdot t''), (x,t), (\bar{x},t)\}$ воспользоваться леммой 2.4.1. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3.7.

Достаточность условий а) и в) следует из леммы 2.4.3. Покажем, что они необходимы. Для этого достаточно установить необходимость пункта б). Из Π_7-полноты $\mathfrak{M}$ следует, что при некотором t' будет выполнено $(\theta, t') \in \mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M})$, где $\theta(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$. Рассмотрим два случая.

1. $t'=0$. Тогда, очевидно, $\{(0,0), (1,0), (\bar{x},0)\} \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M})$. По условию $(f,t) \in \mathfrak{M}$, где f не константа и $t>0$. Можно считать, что x_1 существенное для f и потому при некоторых $a_2, a_3, \ldots, a_n$ из $\{0,1\}$ будем иметь $f(0,a_2,a_3,\ldots,a_n) \neq f(1,a_2,a_3,\ldots,a_n)$. Рассмотрим $(h,t) = (f,t) \circledast_c \circledast_c ((x,0),(a_2,0),(a_3,0),\ldots,(a_n,0))$. Ясно, что $h \in \{x, \bar{x}\}$, причем $(x,t) = (\bar{x},t) \circledast_c (\bar{x},0)$, то есть в каждом из случаев имеем $(x,t) \in \mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M})$. Нетрудно видеть, что $(x,t) \circledast_c (c,0) = (c,t)$ и $(x,t) \circledast_c (\bar{x},0) = (\bar{x},t)$, поэтому $\mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(0,t), (1,t), (x,t), (\bar{x},t)\}$.

2. $t'>0$. Заметим, что $(\theta(x,x,x), t') = (\bar{x}, t')$, а тем самым верно, что $(x, 2t') \in \mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M})$. Из Π_7-полноты $\mathfrak{M}$ следует, что при некоторых t_1, t_2 выполнено $\{(0,t_1), (1,t_2)\} \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M})$, причем, очевидно, можно считать, что $t_1 = t_2 > 0$. Для $\varphi \in \{0,1,x\}$ получаем теперь, что $(\varphi, 2t_1 \cdot t') \in \mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M})$. Так как $\theta(x,1,0) = x$, $\theta(x,1,1) = \bar{x}$, $\theta(0,0,0) = 1$ и $\theta(1,1,1) = 0$, то с помощью пар вида $(\varphi, 2t_1 \cdot t')$ из пары (θ, t'), используя операцию $\circledast_c$, можно получить пары $(0, t'(2t_1+1)), (1, t'(2t_1+1)), (x, t'(2t_1+1)), (\bar{x}, t'(2t_1+1))$, а тем самым теорема 2.3.7 доказана.

Лемма 2.4.4. Пусть $\mathfrak{M}$ конечное Π_7-полное множество, причем $\{(x,t), (\bar{x},t)\} \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M})$ при $t>0$. Тогда при некотором t', $0 < t' \leq 3t \cdot \|\mathfrak{M}\|$, имеет место $\mathcal{J}_{\mathcal{R},\phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(x,t'), (\bar{x},t'), (0,t'), (1,t')\}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{M}$ есть Π_7-полное множество, то в $\mathfrak{M}$ содержится пара (f_1, t_1), где $f_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – несамодвойственная функция. Рассмотрим последовательность пар $(f_1,t_1), (f_2, 2t_1), (f_3, 3t_1), \ldots$ где $(f_{i+1}, (i+1)t_1) = (f_i, t\cdot i) \circledast_c ((f_1,t_1), \ldots, (f_1,t_1))$, $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Так как $f_1 \notin S$, то существует набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f_1(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$; нетрудно видеть, что тогда и $f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = f_i(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ при $i = 1,2,3,\ldots$ Поэтому в паре

$(g, t_1\cdot t+t)=(f_1, t\cdot t_1)\circledast_c((g_1,t),(g_2,t),\dots,(g_n,t))$, где $g_i=x$ при $\alpha_i=1$ и $g_i=\bar{x}$ при $\alpha_i=0$ функция g есть константа; $g\in\{0,1\}$. Так как $(\bar{g}, t_1\cdot t+2t)=(\bar{x},t)\circledast_c$ $\circledast_c(g, t_1\cdot t+t)$ и $(g, t_1\cdot t+2t)=(x,t)\circledast_c(g, t_1\cdot t+t)$, то $\{(0,t_1\cdot t+2t),(1,t_1\cdot t+2t)\}\subseteq$ $\subseteq \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$. Кроме того, пара $(x, t_1\cdot t+2t)$ получается t_1+2 - кратной подстановкой пары (x,t) в себя, а пара $(\bar{x}, t_1\cdot t+2t)$ равна $(\bar{x},t)\circledast_c(x, t(t_1+1))$, где $(x, t(t_1+1))$ получено t_1+1 - кратной подстановкой пары (x,t) в себя. Окончательно имеем: $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})\supseteq\{(0, t(t_1+2)),$ $(1, t(t_1+2)), (x, t(t_1+2)), (\bar{x}, t(t_1+2))\}$, причем $0<t(t_1+2)\le 3t\cdot\|\mathfrak{M}\|$.
Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3.2.

Лемма 2.4.5. Если $\mathfrak{M}\subseteq\tilde{P}_2$, $\mathfrak{M}$ является Π_7- полным и $\mathfrak{M}\supseteq\{(x,t_1),\dots$ $(x,t_\tau)\}$, $\tau\ge 1$, причем н.о.д.$(t_1,t_2,\dots,t_\tau)=1$, то $\mathfrak{M}$ является Π_4 - полным.

Доказательство. Из того, что н.о.д.$(t_1,t_2,\dots,t_\tau)=1$, следует, что найдется такое t' , что для всякого $t\ge t'$ будет для некоторых a_i из N_0, $i=1,2,\dots,\tau$, иметь место $\sum_{i=1}^{\tau}a_i\cdot t_i=t$. Из Π_7 - полноты $\mathfrak{M}$ следует, что для любой функции $f\in P_2$ при некотором $\tilde{t}$ пара $(f,\tilde{t})$ содержится в $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$. Рассмотрим пары $(x, \sum_{i=1}^{\tau}a_i\cdot t_i)$ и $(f,\tilde{t})$. Ясно, что $(f, \tilde{t}+\sum_{i=1}^{\tau}a_i\cdot t_i)\in\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$, а тем самым при любом t'' таком, что $t''\ge\tilde{t}+t'$, будем иметь $(f,t'')\in\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$. Лемма доказана.

Лемма 2.4.6. Пусть $\mathfrak{M}\subseteq\tilde{P}_2$, непустое множество $\mathfrak{M}_1$ состоит из всех пар (f,t) из $\mathfrak{M}$ таких, что f не есть константа, и пусть существует такое a , что для всякой пары (f,t) из $\mathfrak{M}_1$ число t кратно a . Тогда для любой пары (g,t') из $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$ такой, что g не есть константа, t' кратно a .

Доказательство. Пусть $(g,t')\in\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$ и g не есть константа. Очевидно, можно считать, что $t'>0$. Индукцией по числу применений операций $\circledast_c$ покажем, что t' кратно a . Возможны следующие случаи.

1. $(g,t')=(f,t')\circledast_c((g_1,0),(g_2,0),\dots,(g_n,0))$, где $(f,t')\in\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$, $(g_i,0)\in\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})\cup\Phi$ при $i=1,\dots,n$. Так как $g\notin\{0,1\}$ то, очевидно, $f\notin\{0,1\}$, а, значит по предположению индукции в паре (f,t') t' будет кратно a .

2. $(g,t')=(f,0)\circledast_c((g_1,t'),(g_2,t'),\dots,(g_n,t'))$, где $(f,0),(g_i,t')\in\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$ при $i=1,2,\dots,n$. Так как $g\notin\{0,1\}$, то при некотором i будет выполнено $g_i\notin\{0,1\}$, а, значит, по предположению индукции t' будет кратно a .

3. $(g,t')=(f,t_1)\circledast_c((g_1,t_2),(g_2,t_2),\dots,(g_n,t_2))$, где $t_1+t_2=t'$ и $t_1\cdot t_2>0$, $(f,t_1),(g_i,t_2)\in\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$; при любом $i=1,2,\dots,n$. Так как $g\notin\{0,1\}$, то, очевидно, $f, g_i\notin\{0,1\}$ при некотором i .

Отсюда следует, что t_1 и t_2 кратны a , а тем самым и t' кратно a
Лемма доказана.

Воспользуемся этими леммами для доказательства теоремы 2.3.2. Покажем сначала необходимость условий 1) и 2). Необходимость первого условия очевидна. Предположим, что второе условие не выполнено. Выделим в множестве $\mathfrak{M}$ подмножество $\mathfrak{M}_1$, содержащее все пары (f,t), где $f \notin \{0,1\}$ и $t>0$. Возможны следующие подслучаи.

а. Множество $\mathfrak{M}_1$ пусто. Тогда, очевидно, для любой пары $(f,t) \in J_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$ такой, что $t>0$, имеет место $f \in \{0,1\}$, то есть $\mathfrak{M}$ не является Π_4- полным.

б. Множество $\mathfrak{M}_1$ не пусть. В этом случае невыполнение условия 2) влечет существование такого $a>1$, что для любой пары $(f,t) \in \mathfrak{M}_1$ число t будет кратно a. Отсюда в силу леммы 2.4.6 следует, что $\mathfrak{M}$ не является Π_4 - полным.

Перейдем к доказательству достаточности условий. В силу теоремы 2.3.7 можно считать, что при некотором $t'>0$ будем иметь $J_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_2 = \{(0,t'),(1,t'),(x,t'),(\bar{x},t')\}$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_3 = \{(f_1,t_1),(f_2,t_2),\ldots,(f_s,t_s)\}$ из условий теоремы. Нетрудно видеть, что $J_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}_3 \cup \mathfrak{M}_2) \supseteq \{(x,t'),(x,t_1+t'),\ldots,(x,t_s+t')\}$ и н.о.д.$(t', t_1+t',\ldots, t_s+t')=1$. Отсюда по лемме 2.4.5 множество $\mathfrak{M}$ является Π_4 - полным. Теорема 2.3.2 доказана.

Доказательство теорем 2.3.3 и 2.3.4.

Пусть функция f задана с помощью полинома Жегалкина. Наибольшее число сомножителей в слагаемых этого полинома, отличных от константы, назовем степенью функции f и обозначим через $|f|$. Для конечного $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_2$ обозначим через $|\mathfrak{M}|$ наибольшую из степеней функций f таких, что при некотором t имеет место $(f,t) \in \mathfrak{M}$. Множество всех пар вида $(f,0)$ из $\mathfrak{M}$ обозначим через $\mathfrak{M}^0$.

Лемма 2.4.7. Если $\mathfrak{M} \subseteq \tilde{P}_2$, $\mathfrak{M}$ - конечное и $(\mathfrak{M}^0)^{(1)} \subseteq L$, то для любой пары (f,t) из $J_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$ имеет место $|f| \leqslant |\mathfrak{M}|^{t+1}$.

Доказательство. Пусть $(h,t) = (f_1,t_1) \circledast_c ((g_1,t_2),(g_2,t_2),\ldots,(g_n,t_2))$, тогда, очевидно, $|h| \leqslant max\{|f|\cdot|g_1|, |f|\cdot|g_2|, \ldots, |f|\cdot|g_n|\}$, причем в случае, когда либо все функции $g_1,g_2,\ldots,g_n$ - линейные, либо когда f линейная, это неравенство превращается в соотношение $|h| \leqslant max\{|f|,|g_1|,|g_2|,\ldots,|g_n|\}$. Отсюда следует утверждение леммы.

Перейдем к доказательству теоремы 2.3.3. Необходимость первого условия очевидна, необходимость второго следует из леммы 2.4.7. Покажем достаточность условий теоремы 2.3.3. Рассмотрим два случая.

1. $(J_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}^0))^{(1)} = P_2$. В этом случае множество $\mathfrak{M}$ является, очевидно, Π_6 -полным и в качестве t, о котором речь в определении Π_6 -полноты, может быть взят ноль.

2. $(J_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}^0))^{(1)} \neq P_2$. В этом случае можно считать, что множество $\mathfrak{M}$ со-

держит пару (f,t), где $t>0$ и $f\notin\{0,1\}$, так как в противном случае, очевидно, имели бы $(\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}))^{(1)}\subseteq((\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}^\circ))^{(1)}\cup\{0,1\}\neq P_2$. Последнее противоречит тому, что по условию I) должно быть $(\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}))^{(1)}=P_2$. Таким образом, с учетом теоремы 2.3.7 можно считать, что при некотором $t>0$ выполнено $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})\supseteq\{(x,t),(1,t),(0,t),(\bar{x},t)\}$. Рассмотрим множество $(\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}^\circ))^{(1)}=$ $=\mathcal{J}_{cn}((\mathfrak{M}^\circ)^{(1)})$. Как следует из теоремы Поста [1,45], для классов функций, содержащих нелинейную функцию, возможны лишь следующие подслучаи.

а) $\mathcal{J}_{cn}((\mathfrak{M}^\circ)^{(1)})\supseteq S_1$, где S_1 - класс всех функций f, таких, что $f=\bigvee_{i=1}^{n}x_i$. Заметим, что $\mathop{\&}_{i=1}^{n}x_i^{\sigma_i}=\overline{\bigvee_{i=1}^{n}x_i^{\bar{\sigma}_i}}$, отсюда легко следует, что $(\mathop{\&}_{i=1}^{n}x_i^{\sigma_i},2t)\in\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$. Далее, как известно, всякая функция $f\neq 0$ может быть представлена в виде

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}}\left(\mathop{\&}_{i=1}^{n}x_i^{\sigma_i}\right), \qquad (*)$$

отсюда легко видеть, что $(f,2t)\in\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$. Заметим далее, что $(0,2t)\in$ $\in\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$. Тем самым $\mathfrak{M}$ является Π_6-полным.

б) $\mathcal{J}_{cn}((\mathfrak{M}^\circ)^{(1)})\supseteq P_1$, где P_1 - класс всех функций f, таких, что $f=\mathop{\&}_{i=1}^{n}x_i$. Этот случай является двойственным случаю а).

в) $\mathcal{J}_{cn}((\mathfrak{M}^\circ)^{(1)})=\mathcal{D}_2$, где $\mathcal{D}_2$ - класс всех самодвойственных монотонных функций. Легко проверить, что для любой монотонной функции $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет место $f_\varphi(x,y,x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathcal{D}_2$, где $f_\varphi=xy\vee\bar{x}y\cdot\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\vee x\bar{y}\cdot\bar{\varphi}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Далее, нетрудно видеть, что всякое выражение вида (*) получается отождествлением некоторых групп переменных из выражения $\mathcal{U}=\bigvee_{j=1}^{s}\alpha_j$, где α_j есть элементарная конъюнкция и разные выражения α_j и $\alpha_{j'}$ не зависят от одинаковых переменных, $j\neq j'$. Заметим в $\mathcal{U}$ всюду $\bar{x}_i$ на переменное x_i, получим в результате монотонную функцию ψ. Пусть Ψ - класс всех построенных функций ψ. Очевидно, $\psi=f_\psi(0,1,x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Отсюда, очевидно, следует, что $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\{(f_\psi,0),(0,t),(1,t),(x,t),(\bar{x},t)\})\ni(\psi,t)$. Остается заметить, что используя (x,t) и $(\bar{x},t)$ из (ψ,t) при соответствующем наборе ψ, можно получить с помощью операции $\circledast_c$ любую пару $(f,2t)$, где f задается выражением (*). Ясно также, что $(0,2t)\in\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$. Отсюда следует Π_6-полнота множества $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Анализ доказательства теоремы 2.3.3 с учетом леммы 2.4.4 позволяет установить справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.4.I. Если $\mathfrak{M}$ - конечное Π_6-полное множество, причем при некотором $t'>0$ выполнено $\{(x,t'),(\bar{x},t')\}\subseteq\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$, то при некотором t'', $0<t''\leqslant 6\cdot t'\cdot\|\mathfrak{M}\|$, множество $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$ содержит все пары (φ,t''). Для доказательства теоремы 2.3.4 заметим сначала, что Π_5-полнота множества, очевидно, следует из его Π_6-полноты. Обратное следование вытекает из леммы 2.4.7.

Доказательство теоремы 2.3.5 и 2.3.6.

Начнем с теоремы 2.3.5. Необходимость условия 1) следует из определений Π_2 - и Π_6 -полноты. Заметим далее, что из Π_2 -полноты множества следует его Π_4 -полнота, а отсюда, в силу теоремы 2.3.2, вытекает необходимость условия 2). Покажем достаточность условий теоремы. На основании определения Π_6 -полноты можно утверждать, что при некотором t любая пара (f,t) содержится в $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$. В частности, $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(x,t),(\bar{x},t),(0,t),(1,t)\}$. Возьмем любуё пару (f_i,t_i) из условия 2, из нее с помощью операции $\circledast_c$, используя пары $(0,t)$, $(1,t)$, (x,t) и $(\bar{x},t)$, очевидно, можно получить пару (x, t_i+t) .

Далее, нетрудно видеть, что при некотором $t'>0$ для любого $t''>t'$ выполнено $(x,t'')\in \mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\{(x,t),(x,t_1+t),\dots,(x,t_s+t)\})$. Так как

$(f,t+t'')=(f,t)\circledast_c((x_1,t''),(x_2,t''),\dots,(x_n,t''))$, то, подбирая число t'' , получим, что любая пара (f,t''') , где $t'''>t'+t$ содержится в $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$. Тем самым множество $\mathfrak{M}$ является Π_2 - полным. Теорема доказана.

Для доказательства теоремы 2.3.6 заметим сначала, что свойство Π_3- полноты следует из Π_2- полноты по определению. Обратное следование легко вытекает из теоремы 2.3.5.

Анализ доказательства теоремы 2.3.5 позволяет установить справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.4.2. Если $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.5 и $\mathfrak{M}\supseteq\{(x,t),(\bar{x},t),(0,t),(1,t)\}$, то $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(x,t),(x,t_1+t),\dots,(x,t_s+t)\}$ где $t_1,t_2,\dots,t_s$ - те же, что в условии теоремы 2.3.5.

Доказательство теоремы 2.3.8.

То, что каждое Π_i - полное множество $\mathfrak{M}$ при $i\in\{1,4,7\}$ содержит конечное полное подмножество, вытекает из теорем 2.3.1,2.3.2 и 2.3.7. Так как свойство Π_5 - и Π_6 - полноты, а также Π_2 - и Π_3 - полноты соответственно эквивалентны, то достаточно рассмотреть свойства Π_5 - и Π_2 - полноты. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех пар (f,t) , где $t>0$, которое является Π_5 - и Π_2 - полным. В силу леммы 2.4.7 любое его конечное подмножество не является Π_5 - или Π_2 - полным. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3.10.

Лемма 2.4.8. Если $\mathfrak{M}$ - конечное, Π_7 - полное множество, то либо $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})\supseteq\{(0,0),(1,0),(x,0),(\bar{x},0)\}$, либо при некотором T , $0<T\leqslant c\cdot\|\mathfrak{M}\|^2$ выполнено $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})\supseteq\{(x,T),(\bar{x},T)\}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{M}$ Π_7- полно, то оно не содержится ни в одном Π_7-предполном классе. Возможны следующие случаи:

I. В $\mathfrak{M}$ нет пары (f,t) , где $f\in\Delta$. Здесь возможны следующие подслучаи:

1). $\mathfrak{M}$ содержит пару (g,t'), где $g\in A,\ t'>0$. Тем самым можно считать, что $(x,t')\in\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}^{(1)}\subseteq A\cup B\cup\Gamma$, то $\mathfrak{M}\supseteq\{(h_1,t_1),(h_2,t_2),(h_3,t_3)\}$, где $h_1\notin M,\ h_2\in B,\ h_3\in\Gamma$, и можно считать, что $\{(1,t_2),(0,t_3)\}\subseteq\mathfrak{M}$. Используя пару (x,t') из пар $(1,t_2)$ и $(0,t_3)$ нетрудно получить пары $(0,\tilde t_1)$ и $(1,\tilde t_2)$, где $0<\tilde t_1,\ \tilde t_2\leq 2\|\mathfrak{M}\|$. Подставляя теперь каждую из пар $(0,\tilde t_1)$ и $(1,\tilde t_2)$ в себя t' раз, получим пары $(1,t'\tilde t_2)$ и $(0,t'\tilde t_1)$. Тем самым $\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})\supseteq\{(x,t'),(h_1,t_1),(1,t'\tilde t_2),(0,t'\tilde t_1)\}$. Пусть сначала $t_1=at',\ a\in N_0$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde t_1\geq\tilde t_2$; в случае $\tilde t_1>\tilde t_2$, подставив $(\tilde t_1-\tilde t_2)$ раз пару (x,t') в пару $(1,t'\tilde t_2)$, получим пару $(1,t'\tilde t_1)$. Подставляя (x,t') в себя $\tilde t_1$ раз, получим пару $(x,t'\tilde t_1)$. Подставляя теперь в пару (h_1,t_1) пары $(0,t'\tilde t_1),(1,t'\tilde t_1),(x,t'\tilde t_1)$, можно получить пару $(\bar x,t'(\tilde t_1+a))$. Теперь нетрудно видеть, что в качестве T из условия леммы можно взять величину $t'(\tilde t_1+a)$.

Пусть теперь t_1 не делится на t'. Если $h_1\in A$, то, заменяя пару (g,t') на (h_1,t_1), приходим к только что разобранному случаю. Если же $h_1\in B\cup\Gamma$, то многократными подстановками нетрудно получить пару $(h_1',t_1\cdot t')$, где $h_1'\in(B\cup\Gamma)\setminus M$, и случай сводится к рассмотренному выше.

2) $\mathfrak{M}$ не содержит пары (g,t'), где $g\in A$ и $t'>0$. Пусть сначала $\mathfrak{M}\ni(h_4,t_4)$, где $h_4\in(B\cup\Gamma)\setminus\{0,1\}$ и $t_4>0$. Так как $\mathfrak{M}\notin\tilde{C}$, то $\mathfrak{M}\ni(h_5,0)$, где $h_5\in B\cup\Gamma$, и, можно считать, что для некоторого $c\in\{0,1\}$ пара $(c,0)$ входит в $\mathfrak{M}$. Подставляя теперь эту пару в (h_4,t_4), получаем либо пару (x,t_4), либо $(\bar x,t_4)$. Таким образом, $(x,2t_4)\in\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$, и, заменяя $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}\cup\{(x,2t_4)\}$, приходим к случаю I,1); оценка для T при этом возрастает не более чем в 4 раза. Пусть теперь в $\mathfrak{M}$ отсутствует пара (h_4,t_4) указанного вида. Тогда из того, что $\mathfrak{M}\notin\tilde E_0,\tilde E_1,\tilde T_0,\tilde T_1$, следует, что в $\mathfrak{M}$ входят пары $(h_6,0)$, $(h_7,0)$, где $h_6\in B$, $h_7\in\Gamma$, то есть $\{(0,0),(1,0)\}\subseteq\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$. Возьмем пару $(h_8,t_8)\in\mathfrak{M}$, где $h_8\notin\mathfrak{M}$, тогда в рассматриваемой ситуации $t_8=0$ и $\{(x,0),(\bar x,0)\}\subseteq\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$, откуда и вытекает утверждение леммы.

II. В $\mathfrak{M}$ входит пара (f,t), где $f\in\Delta$, то есть можно считать, что $(\bar x,t)\in\mathfrak{M}$. Если $t=0$, то $\{(x,0),(\bar x,0)\}\subseteq\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$, и так как $\mathfrak{M}\notin\tilde H$, то, либо существует пара $(f_1,0)$, где $f_1\notin S$, либо существует пара (f_2,τ), где $f_2\notin\mathcal{Y}$ и $\tau>0$. В первом случае, очевидно, $\{(0,0),(1,0),(x,0),(\bar x,0)\}\subseteq\mathcal{J}_{\Omega,\phi}(\mathfrak{M})$, во втором, подставляя в пару (f_2,τ) пары $(x,0)$ и $(\bar x,0)$, нетрудно получить пары (x,τ) и $(\bar x,\tau)$. В качестве T из условия леммы в последнем случае берем величину τ, $0<\tau\leq\|\mathfrak{M}\|$. Пусть теперь в $\mathfrak{M}$ отсутствует пара $(f',0)$, где $f'\in\Delta$. Рассмотрим ряд подслучаев.

1) $\mathfrak{M}$ содержит пару (h_1, t_1), где $h_1 \in (B \cup \Gamma) \setminus \{0,1\}$. В этом случае, очевидно, $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(x,2t), (c,t_1), (\bar{c}, t_1+t), (h_1, t_1)\}$, где $c \in \{0,1\}$, $h_1 \notin M$. Далее рассуждаем так же, как в случае I.1) верхняя оценка для T при этом возрастает не более чем в 4 раза.

2) В $\mathfrak{M}$ не входит пара вида (h_1, t_1), где $h_1 \in (B \cup \Gamma) \setminus \{0,1\}$, но входит пара (c, t_2), где $c \in \{0,1\}$. По условию $\mathfrak{M} \notin \widetilde{W}_i$ при $i = 0, 1, \ldots$, Возможны следующие подслучаи.

а). $\mathfrak{M}$ содержит пару (h_3, t_3), где $h_3 \notin M$, $\bar{h}_3 \in M$. Тогда, подставляя в (h_3, t_3) пары $(x, 2t(t+t_2)), (0, 2t(t+t_2)), (1, 2t(t+t_2))$, входящие в $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$, получаем пары $(x, t_3 + 2t(t+t_2))$ и $(\bar{x}, t_3 + 2t(t+t_2))$, и в качестве T из условия леммы берем величину $t_3 + 2t(t+t_2)$, $0 < t_3 + 2t(t+t_2) \leq$ $\leq \|\mathfrak{M}\| + 4\|\mathfrak{M}\|^2 \leq 5 \cdot \|\mathfrak{M}\|^2$.

б). $\mathfrak{M}$ содержит пару $(h_4, 0)$, где $h_4 \notin M$. Очевидно, $h_4 \in A$ и $\bar{h}_4 \notin M$, то есть приходим к подслучаю а).

в). $\mathfrak{M}$ содержит пару $(h_5, 2k+1)$, где $h_5 \in A$. Легко видеть, что $\{(\bar{x}, t(2k+1)), (x, t(2k+1))\} \subseteq \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$ и в качестве T из условия леммы берем величину $t(2k+1)$, $0 < t(2k+1) \leq \|\mathfrak{M}\|^2$.

г). $\mathfrak{M}$ содержит пары (h_6, t_6) и (h_7, t_7), где $\{h_6, h_7\} \subseteq \Delta$ и $\frac{t_6}{t_7} = \frac{2k}{2k'+1}$, $k > 0$. Легко видеть, что в случае $\{(x, t_6(2k'+1)), (\bar{x}, t_6(2k'+1))\} \subseteq \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$, и в качестве T из условия леммы взять величину $t_6(2k'+1)$, $0 < t_6(2k'+1) \leq \|\mathfrak{M}\|^2$.

д). $\mathfrak{M}$ содержит пары (h_8, t_8) и (h_9, t_9), где $h_8 \in A$, $h_9 \in \Delta$ и $\frac{t_8}{t_9}$ есть либо $\frac{2k+1}{2k'+1}$, либо $\frac{2k+1}{2k''}$, где $k'' > 0$. В этом случае получаем, что либо $\{(x, t_8(2k'+1)), (\bar{x}, t_8(2k'+1))\} \subseteq \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$, либо $\{(x, 2t_8 k''), (\bar{x}, 2t_8 k'')\} \subseteq$ $\subseteq \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M})$, и для T имеем верхнюю оценку $\|\mathfrak{M}\|^2$.

3). $\mathfrak{M}$ не содержит ни одной пары (h_1, t_1), где $h_1 \in B \cup \Gamma$. Так как $\mathfrak{M} \notin \widetilde{\mathfrak{X}}_i$ при $i = 0, 1, \ldots$, то возможны следующие подслучаи.

а). $\mathfrak{M}$ содержит пару $(h_2, 2k+1)$, где $h_2 \in A$. Случай сводится к разобранному выше случаю II,2),в).

б). $\mathfrak{M}$ содержит пары (h_3, t_3), (h_4, t_4), где $h_3, h_4 \in \Delta$ и $\frac{t_3}{t_4} = \frac{2k}{2k'+1}$, $k > 0$. Случай сводится к разобранному выше случаю II.2),г).

в). $\mathfrak{M}$ содержит пары (h_5, t_5), (h_6, t_6), где $h_5 \in A$, $h_6 \in \Delta$ и $\frac{t_5}{t_6}$ есть либо $\frac{2k+1}{2k'+1}$, либо $\frac{2k+1}{2k''}$, где $k'' > 0$. Случай сводится к разобранному выше случаю II,2),д). Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{M}_n$ есть $\{(xy, 0), (x, 2k+1), (\bar{x}, 2k)\}$, если $n = 2k+1$, и есть $\{(xy, 0), (x, 2k-1), (\bar{x}, 2k)\}$, если $n = 2k$.

Лемма 2.4.9. Если $\mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\mathfrak{M}_n) \supseteq \{(x,t), (\bar{x},t)\}$, то $t \geq n(n-1)$.

Доказательство. Пусть для определенности $n = 2k$. Рассмотрим вначале случай, когда $\{(x,t), (\bar{x},t)\} \subseteq \mathcal{J}_{\Omega,\Phi}(\{(x, 2k-1), (\bar{x}, 2k)\})$. Очевидно, при получении $(\bar{x}, t)$ и (x,t) с помощью операции $\circledS_c$ пара $(\bar{x}, 2k)$ должна в первом случае использоваться нечетное число $2r+1$, а во втором – четное число $2s$ раз и при этом должно иметь место

$$(2r+1)2k + \ell(2k-1) = 2s \cdot 2k + m(2k-1) = t, \qquad (*)$$

где ℓ и m суть числа, показывающие, сколько раз использовалась пара $(x, 2k-1)$ при построении пар $(\bar{x}, t)$ и (x, t) соответственно.

Из соотношения ($*$) получаем, что $(2r+1-2s)2k = (m-\ell)(2k-1)$; отсюда следует, что при некотором ρ имеет место $2r+1-2s = \rho(2k-1)$. Нетрудно видеть, что отсюда, в силу соотношения ($*$), получается $t \geq 2k(2k-1)$. Остается заметить, что рассмотрение общего случая при построении пар (x,t) и $(\bar{x}, t)$ для $t < 2k(2k-1)$, очевидно, сводится к уже рассмотренной ситуации. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.3.10. Рассмотрим сначала случай $i=6$. Справедливость нижней оценки следует из леммы 2.4.9. Оценим сверху $L_{\Pi_6}(n)$. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное Π_6 - полное конечное множество, такое, что $\|\mathfrak{M}\| \leq n$

По лемме 2.4.8 либо $\mathfrak{I}_{\mathfrak{Q},*}(\mathfrak{M}) \supseteq \{(0,0),(1,0),(x,0),(\bar{x},0)\}$, и тогда $L_{\Pi_6}(\mathfrak{M}) = 0$, либо при некотором t', $0 < t' \leq c \cdot n^2$ будем иметь $\mathfrak{I}_{\mathfrak{Q},\varphi}(\mathfrak{M}) \supseteq$ $\supseteq \{(x,t'),(\bar{x},t')\}$. Отсюда, в силу предложения 2.4.1, получаем $L_{\Pi_6}(n) \leq$ $\leq 6cn^3$. Далее, нетрудно видеть, что пример множества $\mathfrak{M}_n$ позволяет утверждать, что $L_{\Pi_5}(n) \geq n(n-1)$. Отсюда с учетом рассмотренного случая $i =$ $= 6$ получаем утверждение и для $i = 5$.

Доказательство теоремы 2.3.9.

Пусть $\text{н.о.д.}(n_1, n_2, \dots, n_r) = 1$, где $n_i \in N$, тогда, как нетрудно видеть, все достаточно большие натуральные числа будут представимы в виде $\sum_{i=1}^{r} a_i n_i$ $(*)$, где $a_i \in N_0$. Пусть $\tau(n_1, n_2, \dots, n_r)$ – наименьшее чиз чисел, представимых в виде $(*)$, и такое, что все большие натуральные числа также представимы в виде $(*)$. Обозначим через $\tau(n)$, $n > 1$, наибольшее из чисел $\tau(n, n_2, \dots, n_r)$ по всем последовательностям $n_1, n_2, \dots, n_r$, в которых $n_j \leq n$, $j = 1,2,\dots r$.

Лемма 2.4.10. $\tau(n) \leq n^2$.

Доказательство. Индукцией по r покажем, что $\tau(n_1, n_2, \dots, n_r) \leq$ $\leq \max(n_1^2, n_2^2, \dots, n_r^2)$. Можно считать, что $n_1 < n_2 < \dots < n_r$. Пусть наше утверждение справедливо для всех последовательностей длины не более r натуральных чисел, покажем справедливость утверждения для последовательностей длины $r+1$. В силу того, что, очевидно, $\tau(n_1, n_2) \leq n_1 \cdot n_2$, можно считать, что в наших рассмотрениях $r > 1$ и $n_{r+1} - n_2 \geq 2$. Пусть b – наибольший общий делитель чисел $n_1, n_2, \dots, n_r$ и $n_i = b \cdot m_i$, $i = 1,2,\dots, r$. По предположению индукции $\tau(m_1, m_2, \dots, m_r) \leq m_r^2$ выражение $\sum_{i=1}^{r+1} a_i \cdot n_i$ представим в виде $\sum_{i=1}^{r} a_i \cdot n_i + a_{r+1} \cdot n_{r+1}$. Первое слагаемое в нем при вариации коэффициентов принимает все значения вида $b(z + m_r^2)$, где $z \geq 0$. Перепишем нашу сумму в виде $b(z + m_r^2) + a_{r+1} \cdot n_{r+1} = bz + \frac{n_r^2}{b} + a_{r+1} \cdot n_{r+1}$. Так как b и n_{r+1} взаимно простые, при $b = 1$, полагая $a_{r+1} = 0$, уже только подбором z

можно сделать нашу сумму равной любому натуральному числу, не меньшему n_t^2. Пусть $b>1$, тогда $\tau(b, n_{t+1}) \le b \cdot n_{t+1}$, то есть подбором z и a_{t+1} можно сделать нашу сумму равной любому числу, не меньшему чем

$$\frac{n_t^2}{b} + b \cdot n_{t+1} \le \frac{(n_{t+1}-2)^2}{2} + b \cdot n_{t+1} = \frac{n_{t+1}^2}{2} + (b-2) \cdot n_{t+1} + 2 \le$$

$$\le \frac{n_{t+1}^2}{2} + \left(\frac{n_{t+1}}{2} - 2\right) n_{t+1} + 2 = n_{t+1}^2 - 2n_{t+1} + 2 \le n_{t+1}^2,$$

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.3.9. Рассмотрим сначала случай $L_{\Pi_2}(n)$. Нетрудно видеть, что рассмотренный ранее пример множества $\mathcal{M}_k$ позволяет утверждать, что $L_{\Pi_2}(n) \geqslant n^2$. Оценим сверху $L_{\Pi_2}(n)$. Пусть $\mathcal{M}$ - произвольное конечное Π_2- полное множество, такое, что $\|\mathcal{M}\| \le n$. По лемме 2.4.7 либо $\{(0,0), (1,0), (x,0), (\bar{x},0)\} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R},\Phi}(\mathcal{M})$, либо при некотором t', $0<t' \le \le cn^2$ имеет место $\mathcal{I}_{\mathcal{R},\Phi}(\mathcal{M}) \supseteq \{(x,t'), (\bar{x},t')\}$. Отсюда в силу леммы 2.4.4, предложения 2.4.2, а также теоремы 2.3.5 получаем, $\mathcal{I}_{\mathcal{R},\Phi}(\mathcal{M}) \supseteq \supseteq \{(x,t''), (x,t''+t_1), \ldots, (x,t''+t_2)\}$, где $t_i \le \|\mathcal{M}\|$, $i = 1,2,\ldots,z$, $t'' \le 3cn^3$. По лемме 2.4.10 $(x,t) \in \mathcal{I}_{\mathcal{R},\Phi}(\mathcal{M})$ при всех $t \geqslant (3cn^3+n)^2$. В силу теоремы 2.3.10 при некотором $t' \le 6cn^3$ имеет место $\mathcal{I}_{\mathcal{R},\Phi}(\mathcal{M}) \ni \ni (f, t_1')$ при любой f из P_2. Используя теперь пары (x,t), получим все пары (f, t_1''), где t_1'' - любое число, не меньшее $(3cn^3+n)^2 + 6cn^3$, и случай оценки $L_{\Pi_2}(n)$ разобран.

Далее, пример множества $\mathcal{M}_k$ в силу леммы 2.4.9 позволяет также утверждать, что $L_{\Pi_3}(n) \geqslant n(n-1)$. Отсюда с учетом уже разобранного для $L_{\Pi_2}(n)$ случая и определений Π_2- и Π_3- полноты получаем, что $n^2 \leqslant L_{\Pi_3}(n) \leqslant n^6$. Теорема доказана.

Отметим еще взаимосвязь понятий Π_i- полноты. Свойство Π_7- полноты следует из Π_i- полноты и не эквивалентно Π_i- полноте при любом $i<7$. Свойства Π_4- и Π_5- полноты несравнимы между собой, но оба следуют из Π_2 - полноты и не эквивалентны Π_2- полноте. Π_2- полнота следует из Π_1- полноты и не эквивалентна ей.

В заключение этого параграфа отметим одно интересное обстоятельство, связанное с решением задачи о Π_i- полноте в терминах Π_i - предполных классов. Понятие Π_i- предполного класса вводим по аналогии с Π_7- предполным классом. Можно показать, что в случае задачи о Π_2-, либо Π_6- полноте решение ее в терминах Π_2- (соответственно, Π_6-) предполных классов (в этих случаях их имеется счетное множество) не может быть получено. Если же ограничиться рассмотрением Π_2- (либо Π_6-) полных конечных систем, то критерий Π_2 - (соответственно, Π_6-) полноты можно получить в следующем виде. Строится система замкнутых классов, содержащая все Π_2- (Π_6-) предполные классы и возрастающую цепочку замкнутых классов, каждый из которых не содержится ни в одном Π_2- (Π_6-) предполном классе; произвольное конечное множество $\mathcal{M} \subseteq \widetilde{P}_2$

оказывается Π_2- полным (соответственно, Π_6- полным) тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из указанных классов. Это невключение проверяется эффективно, так как указанный критерий дает алгоритм проверки Π_2- (Π_6-) полноты конечного множества. Аналогичным образом обстоит дело с модификацией задачи о Π_6- полноте, когда рассматриваются системы, состоящие из функций с задержками 0 либо 1 и модифицированное понятие полноты заключается в возможности выразить все функции с задержкой 1 (см. [47]).

§ 3. Вопросы полноты для о.-д.функций.

В этом параграфе будут рассмотрены задачи о полноте, некоторые их модификации и задача о базисах для алгебр $\mathcal{P}^2$ и $\mathcal{P}^4$, будет отмечена связь проблематики для них с некоторыми задачами алгебры.

§ 3.1. Задача о полноте для алгебр $\mathcal{P}^2$ и $\mathcal{P}^4$.

Известно [64], что алгебра $\mathcal{P}^4$ является конечно-порожденной, а тем самым с учетом алгебраичности оператора замыкания в ней и предложения 1.3.1 $\mathcal{P}^4$ является правильной, то есть, в частности, задачу о полноте в ней можно решать с помощью предполных классов. Однако автором [42] показано, что имеет место следующая

Теорема 3.1.1. Мощностью множества предполных классов в $\mathcal{P}^4$ равна континууму.

Это обстоятельство показывает, что путь построения предполных классов в $\mathcal{P}^4$ с целью решения задачи о полноте для нее не может быть эффективным. С этим согласуется и другая трудность, обнаруженная М.И.Кратко [17], состоящая в алгоритмической неразрешимости задачи о полноте для конечных систем о.-д. функций. При рассмотрении свойств базисов автором установлено [64], что справедлива следующая

Теорема 3.1.2. В $\mathcal{P}^4$ для любого $n \in N$ существует счетное множество попарно различных базисов длины n.

Отсюда, в частности, следует, что в $\mathcal{P}^4$ существуют аналоги функций Шеффера из P_k, то есть универсальные о.-д.функции. Первая такая о.-д.функция и почти простейшего вида была построена автором в работе [41]. Эта о.-д. функция зависит от трех переменных и имеет вес, равный двум. Позже В.А.Буевичем была построена универсальная о.-д.функция веса два от двух переменных. Ясно, что одноместных или веса один универсальных о.-д.функций не существует, поэтому последняя о.-д.функция является простейшей в этом смысле.

Для алгебры $\mathcal{P}^2$ задача о полноте с точки зрения эффективности ее решения имеет дополнительные сложности, поскольку она не является конечно-порожденной. Для $\mathcal{P}^2$ так же, как и для $\mathcal{P}^4$, имеет место следующая

Теорема 3.1.3. Мощность множества предполных классов в $\mathcal{P}^2$ равна континууму.

Доказательство этого утверждения может быть получено следующим образом.

Напомним сначала построения, осуществленные для доказательства теоремы 3.1.1. Было построено континуальное семейство замкнутых в $\mathcal{P}^4$ множеств $\mathfrak{M}_\gamma$, отличных от $P_{о.д.}$, о.-д.функций, со следующими свойствами: (1) $\mathfrak{M}_\gamma \neq \mathfrak{M}_{\gamma'}$ при $\gamma \neq \gamma'$; (2) $\mathfrak{M}_\gamma \cup \mathfrak{M}_{\gamma'}$ полное множество при $\gamma \neq \gamma'$; (3) для всякого $\mathfrak{M}_\gamma$ существует такая константная о.-д.функция g, что для любой о.-д.функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ найдется в $\mathfrak{M}_\gamma$ о.-д.функция $h(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, что $h(x_1, x_2, \dots, x_n, g) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Теперь заметим, что в работе Г.П.Гаврилова [38], в частности, установлено следующее. Если в счетно-значной логике имеется замкнутый класс $\mathfrak{M}$, отличный от $P_{\aleph_0}$ и такой, что для некоторого конечного множества N имеет место $[\mathfrak{M} \cup N] = P_{\aleph_0}$, то существует предполный класс в $P_{\aleph_0}$, содержащий $\mathfrak{M}$. Это утверждение, очевидно, может быть распространено и на функциональные системы, а значит, в частности, и на $\mathcal{P}^2$. Отсюда будет следовать, что каждое $\mathfrak{M}_\gamma$, будучи замкнутым также и в $\mathcal{P}^2$, содержится в некотором предполном классе и разные $\mathfrak{M}_\gamma$ содержатся в разных предполных классах. Значит, в $\mathcal{P}^2$ континуум предполных классов.

Как отмечалось, в $\mathcal{P}^2$ всякая полная система является счетной и, как установлено в работе С.В.Алешина [65], имеет место следующее: существует счетный базис и в то же время существует полная счетная система, никакое подмножество которой не является базисом.

§ 3.2. Модификации задачи о полноте для алгебр $\mathcal{P}^2$ и $\mathcal{P}^4$.

В целом негативные с точки зрения эффективности результаты по задаче о полноте приводят к необходимости рассматривать различные ее модификации. Одни из них получаются на пути сужения класса систем, исследуемых на полноту, другие – на пути моделирования лишь отдельных свойств о.-д.функций. В связи с этим рассмотрим следующие три задачи: задачу о полноте связных о.-д.функций, задачу об A – полноте и задачу о K – полноте.

Задача о полноте для связных о.-д.функций.

О.-д.функция $f(x_1, x_2, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_n)$ называется связной, если, во-первых, она может быть задана с помощью систем вида

$$\begin{cases} q_i(1) = c_i, \\ q_i(t+1) = \varphi_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_r(t), x_{\ell+1}(t), \dots, x_n(t)), \\ y(t) = \psi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_r(t), x_1(t), \dots, x_\ell(t)), \\ \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{cases} \qquad (*)$$

где значениями величин $q_i(t), y(t), x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ являются элементы из A, а набор $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_r(t))$ задает состояние о.-д.функции f. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_\ell$ о.-д.функции f называются переменными первого рода, а переменные $x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \dots, x_n$ – второго рода. Во-вторых, для любых двух наборов $(c_1, c_2, \dots, c_r)$ и $(c_1', c_2', \dots, c_r')$ существует такой набор $(a_{\ell+1}, a_{\ell+2}, \dots, a_n)$, что для любого i будет выполнено $c_i' = \varphi_i(c_1, c_2, \dots, c_r, a_{\ell+1}, a_{\ell+2}, \dots, a_n)$, то есть любые два состояния о.-д.функции f соединимы однобуквенным словом значений переменных второго рода.

Если $f \in P^A_{о.д}$, то при $i \in N$ через f^i обозначим отображение слов из A^* длины i, осуществляемое о.-д.функцией f. Пусть $\mathcal{Z} = \{\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_s\}$ – множество всех предполных классов в P_A, обозначим через $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}_i}$ множество всех о.-д.функций f таких, что $f^1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{Z}_i}$, $i = 1, 2, \dots, s_p$. Пусть $\mathcal{M}^2$ – множество всех таких о.-д.функций f, что для любых двух слов $\alpha^2 = \vec{a}^n(1)\vec{a}^n(2)$ и $(\alpha')^2 = (\vec{a}')^n(1)(\vec{a}')^n(2)$ имеет место $f(\alpha^2)/f(\vec{a}^n(1)) = f((\alpha')^2)/f((\vec{a}')^n(1))$. Проверяя в отдельности каждую из операций алгебры $\mathcal{P}^4$, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.2.1. Каждый из классов $\mathcal{M}^2$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}_i}$ является замкнутым.

Назовем замкнутое множество $\mathcal{M}$, состоящее из связных о.-д.функций, регулярным, если для любого $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ имеет место $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{Z}_i}$ и $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{M}^2$. Нетрудно видеть, что пара вида $(\xi, 0)$, где $\xi \in P_A$, определяет класс эквивалентности, состоящий из одной функции с задержкой. Эту функцию назовем истинностной о.-д.функцией и будем иногда обозначать тоже через $\tilde{\xi}$ или $(\xi, 0)$.

Лемма 3.2.2. Регулярное множество $\mathcal{M}$ содержит все истинностные о.-д. функции.

Доказательство. Пусть $f_i \in \mathcal{M}$ и $f_i \notin \mathcal{M}_{\mathcal{Z}_i}$, тогда множество $\mathcal{M}^1 = \{f_1^1, f_2^1, \dots, f_s^1\}$ функций из P_A будет полно в P_A. В частности, для каждой константы c найдется формула $\mathfrak{A}_c$ над $\mathcal{M}_1$, реализующая c. Отметим, что у каждой функции f_i^1 переменные реализуются на две группы: на группу переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{\ell_i}}$ и на группу переменных $x_{i_{\ell_i+1}}, x_{i_{\ell_i+2}}, \dots, x_{i_{n_i}}$, соответствующих группам переменных первого и второго рода у о.-д.функции f_i. Очевидно, f_i^1 зависит фиктивно от переменных второй группы, поэтому можно считать, что при построении формулы $\mathfrak{A}_c$ подстановка осуществлялась только вместо переменных первой группы, а переменные второй группы у всех функций, участвующих в построении формулы $\mathfrak{A}_c$, попарно различны. Перейдем теперь от формулы $\mathfrak{A}_c$ к формуле $\bar{\mathfrak{A}}_c$ получающейся из $\mathfrak{A}_c$ заменой в ней каждого знака f_i^1 на f_i. В силу того, что f_i – связная о.д.функция, найдется такой набор значений $\vec{a}_i^{\,n_i-\ell_i} = (a_{i,\ell_i+1}, a_{i,\ell_i+2}, \dots, a_{i,n_i})$ ее переменных второго рода, что каноническая система уравнений для f_i, вычисляя набор $(q_1(2), q_2(2), \dots, q_r(2))$, установит его совпадение с набором $(q_1(1), q_2(1), \dots, q_r(1))$, то есть состояние f_i не изменится. Переменные второго рода в формуле $\bar{\mathfrak{A}}_c$ разобьем на группы под номерами $0, 1, 2, \dots, |A|-1$, отнеся к j-й группе те из них, для которых значение в соответствующем слове вида $\vec{a}_i^{\,n_i-\ell_i}$ равно j.

Рассмотрим теперь графическое представление, которое можно интерпретировать как формулу в алгебре $\mathcal{P}^4$. Берем формулы $\bar{\mathfrak{A}}_0, \bar{\mathfrak{A}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{A}}_{|A|-1}$. Выделяем среди них формулу $\bar{\mathfrak{A}}_c$. Каждую из этих формул так же, как это мы делали при рассмотрении K-значных логик, изображаем в виде схемы. Затем берем объединение схем, соответствующих этим формулам, и выход схемы, которой соответствует $\widetilde{\mathfrak{A}}_j$, соединяем со всеми входами рассматриваемых схем, соответствующими переменными второго рода из j-ой группы. Это проделываем для каждого j. Остальные переменные отождествляем, приписывая им переменное x, а выходом схемы объявляем выход схемы, соответствующий $\widetilde{\mathfrak{A}}_c$. Нетрудно видеть, что восстановленная на этой схеме формула будет реализовывать константную о.-д.функцию $(c,0)$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_\xi$ – формула над $\mathfrak{M}^1$, реализующая заданную функцию ξ из P_A. Построим ее по тому же принципу, что и выше, и подставим вместо переменных j-й группы о.-д.функцию $(j,0)$. В результате, очевидно, получим формулу, реализующую о.-д.функцию $(\xi,0)$. Лемма доказана.

Пусть $z_\sigma(x)$ такая о.-д.функция, что $z_\sigma(a(1))=\sigma$ и $z_\sigma(a(1)a(2)\ldots a(t-1)a(t))=\sigma a(1)\ldots a(t-1)$ при $t>1$. Она называется единичной задержкой и реализуется дискретным преобразователем, каким является, например, G в определении понятия сети и обобщенной сети.

Лемма 3.2.3. Регулярное множество $\mathfrak{M}$ содержит каждую единичную задержку.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ содержит при некотором σ о.-д.функцию $z_\sigma(x)$. Покажем, что при любом $\sigma'\neq\sigma$ будет выполнено $z_{\sigma'}(x)\in\mathfrak{M}$. В силу леммы 3.2.2 можно считать, что $\mathfrak{M}$ содержит такую о.-д.функцию $(\xi,0)$, что $\xi(\sigma')=\sigma$, $\xi(\sigma)=\sigma'$ и $\xi(\delta)=\delta$ при $\delta\notin\{\sigma,\sigma'\}$. Переходя от обозначения $(\xi,0)$ к обозначению типа $\widetilde{\xi}(x)$, теперь нетрудно заметить, что $z_\sigma(\widetilde{\xi}(x))=z_{\sigma'}(x)$, то есть $z_{\sigma'}(x)\in\mathfrak{M}$. Отсюда для доказательства леммы остается показать, что хотя бы одна единичная задержка содержится в $\mathfrak{M}$. Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_\ell,x_{\ell+1},\ldots,x_n)\in(\mathfrak{M}\setminus\mathfrak{M}^2)$, где переменные с номером $i\leq\ell$ – первого рода, а остальные – второго рода. Нетрудно видеть, что найдутся такие наборы $\vec{a}^{\,\ell}=(a_1,a_2,\ldots,a_\ell)$ и $(\vec{a}^{\,j})^{n-\ell}=(a^j_{\ell+1},a^j_{\ell+2},\ldots,a^j_n)$, $j=1,2,3,4$, что под действием набора $(\vec{a}^{\,1})^{n-\ell}$ о.-д.функция f останется в начальном состоянии под действием $(\vec{a}^{\,2})^{n-\ell}$ она из начального перейдет в новое состояние такое, что $f^1(\vec{a}^{\,\ell})\neq(f_{(\vec{a}^2)^{n-\ell}})^{-1}(\vec{a}^{\,\ell})$; под действием $(\vec{a}^{\,3})^{n-\ell}$ она из "нового" состояния перейдет в него же; под действием $(\vec{a}^{\,4})^{n-\ell}$ она из "нового" состояния перейдет в начальное состояние. Подставляя в f вместо каждого переменного первого рода x_i константную о.-д.функцию $\widetilde{a}_i$ получим о.-д.функцию $g(x_{\ell+1},\ldots,x_n)$. Пусть $f^1(\vec{a}^{\,\ell})=b$ и $(f_{(\vec{a}^2)^{n-\ell}})^{-1}(\vec{a}^{\,\ell})=c$. Тогда вместо знака g будем писать $g_{b,c}$. С учетом леммы 3.2.2 можно выбрать такую истинностную о.-д.функцию $\xi(x)$ из $\mathfrak{M}$, что пара значений $(\xi(b),\xi(c))$ может быть сделана наперед заданной, поэтому можно считать, что значения b и c у $g_{b,c}$ являются произвольными и неравными. В частности, можно считать, что они пробегают значения (0,1), (1,0), (2,0),... $(k-1,0)$, где $k=|A|$. Пусть $\eta^{b,c}(x_1,x_2)=(\eta^{b,c}_{\ell+1}(x_1,x_2),\ldots,\eta^{b,c}_n(x_1,x_2))$ истинностная векторная о.-д.функция такая,что

$$\eta^{b,c}(e_1,e_2)=\begin{cases}(\vec{a}^1)^{n-\ell}, & \text{если } e_1=b,\ e_2=b,\\ (\vec{a}^2)^{n-\ell}, & \text{если } e_1\neq b,\ e_2=b,\\ (\vec{a}^3)^{n-\ell}, & \text{если } e_1\neq b,\ e_2=c,\\ (\vec{a}^4)^{n-\ell}, & \text{если } e_1=b,\ e_2=c.\end{cases}$$

Рассмотрим о.-д.функцию $h_{b,c}(x_1)$, которая получается из о.-д.функции $g_{b,c}(\eta_{l+1}^{b,c}(x_1,x_2),\ldots,\eta_n^{b,c}(x_1,x_2))$ применением операции $\hat{\ell}$ к переменному x_2. Пусть истинностная о.-д.функция $\mu(x_0,x_1,\ldots,x_k)$ такова, что $\mu(0,1,2,\ldots,k-1)=\mu(0,0,\ldots,0)=0$, $\mu(1,1,0,\ldots,0)=1$, $\mu(1,0,2,0,\ldots,0)=2,\ldots$ $,\mu(1,0,\ldots,0,k-1)=k-1$. Рассмотрим о.-д.функцию $\chi(x)=\mu(h_{0,1}(x),h_{1,0}(x),h_{1,0}(x),\ldots,h_{k-1,0}(x))$. Нетрудно видеть, что $\chi(x)=\zeta_0(x)$. Лемма доказана.

Теорема 3.2.1. Множество $\mathfrak{M}$ связанных о.-д.функций является полным тогда и только тогда, когда оно регулярно.

Доказательство этого утверждения следует из того,что $\mathfrak{M}_{d_i}\neq P^A_{о.д.}$ и $\mathfrak{M}^2\neq P^A_{о.д.}$, а также из лемм 3.2.1 - 3.2.3 и того, что, как известно [39] , множество всех истинностных о.-д.функций и единичных задержек образует полную в $\mathcal{P}^4$ систему.

Задача об A - полноте.

С прикладной точки зрения представляет интерес рассмотрение следующей задачи об аппроксимационной полноте (A - полноте) для о.-д.функций. О.-д.функции f и g от одних и тех же переменных называются t -эквивалентными, если они совпадают на словах длины t . Пусть Ω и Ω' - множества операций в алгебрах $\mathcal{P}^4$ и $\mathcal{P}^2$ соответственно.

Множество $\mathfrak{M}$ о.-д.функций называется A - полным в алгебре $\mathcal{P}^4$, если для всякой о.-д.функции f из $P_{о.д.}$ и всякого t найдется о.-д.функция g из $\mathcal{J}_\Omega(\mathfrak{M})$, что f и g t - эквивалентны. Аналогично вводится понятие A - полноты в $\mathcal{P}^2$. Изложим некоторые результаты по A - полноте, полученные В. А.Буевичем [65]. Установлено, что свойство быть A - полным в алгебре $\mathcal{P}^2$ эквивалентно A - полноте в алгебре $\mathcal{P}^4$, то есть в последнем случае операция $\hat{\ell}$ может быть устранена. Тем самым задача сводится к рассмотрению условий A - полноты в алгебре $\mathcal{P}^2$. Показано, что в $\mathcal{P}^2$ существуют базисы любой конечной длины, а также счетные базисы. Особый интерес вызывает исследование на A - полноту конечных систем. Вводится по аналогии с понятием предполного класса понятие A - предполного класса. Этих классов оказывается счетное множество, все они в определенном смысле строятся эффективно, и произвольное множество является A - полным тогда и только тогда, когда оно не является подмножеством ни одного из A - предполных классов. Однако не существует алгоритма, который для произвольного конечного множества о.-д.функций устанавливал, что оно не является подмножеством ни одного A - предполного класса. С этим согласуется также и следующее обстоятельство: Задача об A - полноте конечных систем о.-д.функций является алгоритмически неразрешимой. Используемая при этом техника позволяет установить также алгоритмическую неразрешимость задачи о полноте для алгебры $\mathcal{P}^4$. Отметим еще, что существуют A - полные о.-д.функции, которые не являются универсальными в $\mathcal{P}^4$.

Задача о K - полноте.

С другим подходом к поведенческим аспектам о.-д.функций связана задача о Клини-полноте (K - полноте). Множество $\mathfrak{M}$ о.-д.функций называется K - полным в алгебре $\mathcal{P}^4$, если $\mathfrak{I}_n(\mathfrak{M})$ обладает следующим свойством: для любого n и любого события в алфавите A^n существует о.-д.функция f такая, что при подходящей фиксации множества $A' \subseteq A$ f представляет это событие с помощью A'. Замкнутое K- полное множество называется K - множеством. Ю.Дассовым установлены следующие факты, связанные с K - полнотой. Показано, что при $|A|=2$ существует лишь конечное множество K - множеств и они указаны ясно. При $|A|>2$ таких множеств уже континуум. По аналогии с предполными классами вводится понятие K - предполных классов и устанавливается, что этих классов континуум. Поэтому, хотя в принципе решение задачи о K - полноте и может быть получено в терминах K- предполных классов, но с точки зрения эффективности этот подход не может привести к цели. Задача о K - полноте оказывается также алгоритмически неразрешимой. Отношение включения на семействе всех K - множеств задает частичный порядок, минимальные элементы которого являются в определенном смысле простейшими K- множествами. Таких минимальных K- множеств оказывается, как отмечалось выше, конечное число (два) при $|A|=2$ и счетное число при $|A|\geqslant 3$. Каждое из этих множеств является конечно-порожденным. Задача о K- полноте допускает также сочетание ее с A - полнотой, приводящее к задаче об AK- полноте. Основные моменты здесь аналогичны ситуации, возникающей для A - полноты и, в частности, неразрешима задача об AK - полноте для конечных систем о.-д.функций.

Алгебры одноместных о.-д.функций.

Важными подалгебрами в $\mathcal{P}^2$ и $\mathcal{P}^4$ являются алгебры $\mathcal{P}_1^2$ и $\mathcal{P}_1^4$ одноместных о.-д.функций. Каждая из них имеет континуум подалгебр и различные структуры подалгебр. С.В.Алешиным установлены следующие свойства этих алгебр. Обе они не имеют базисов. $\mathcal{P}_1^2$ содержит подгруппу взаимооднозначных о.-д.функций, которая имеет интересные имитационные свойства. Она содержит такую подгруппу, которая является бесконечной, периодической и конечно-порожденной. Установление существования таких групп составляло содержание известной ослабленной проблемы Бернсайда. Указанная группа порождается явно указанными двумя о.-д.функциями с семью и тремя состояниями, соответственно. Для алгебр $\mathcal{P}_1^2$ и $\mathcal{P}_1^4$ Ю.Дассовым изучены некоторые вопросы K - полноты и AK- полноты. Им, в частности, установлено, что в $\mathcal{P}_1^4$ существует континуум K- множеств при любом A, таком, что $|A|\geqslant 2$.

Алгебры д.функций.

В алгебрах $\mathcal{P}^3$ и $\mathcal{P}^5$ полные системы всегда континуальны и, как установлено С.В.Алешиным, в $\mathcal{P}^3$ они не являются базисами. Автором показано [44], что в алгебре $\mathcal{P}^5$ имеется гиперконтинуум предполных классов, то есть столько же, сколько подмножеств. Рассуждая сходным образом для случаев алгебр $\mathcal{P}^2$ и $\mathcal{P}^4$, можно показать, что и в алгебре $\mathcal{P}^3$ предполных классов будет так-же гиперконтинуум.

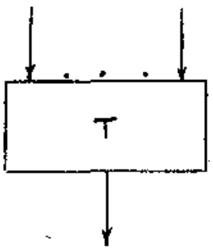

Рис.23

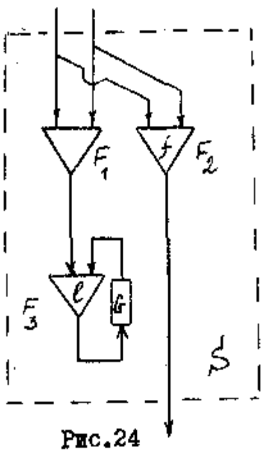

Рис.24

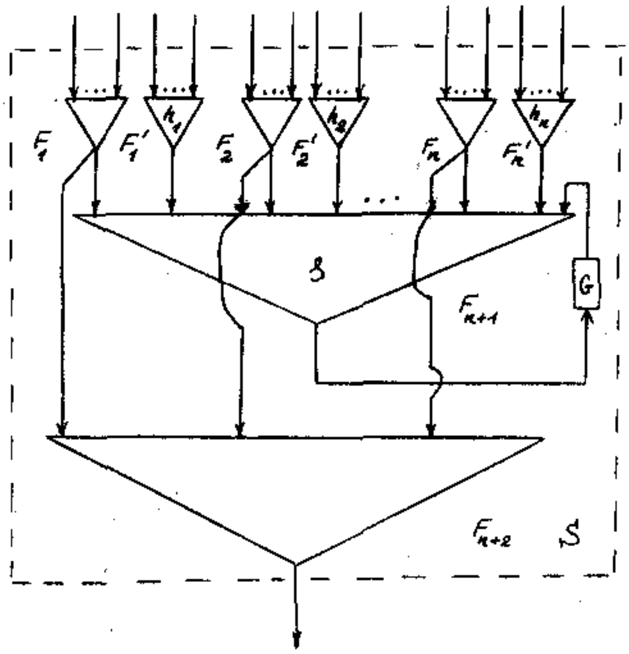

Рис.25.

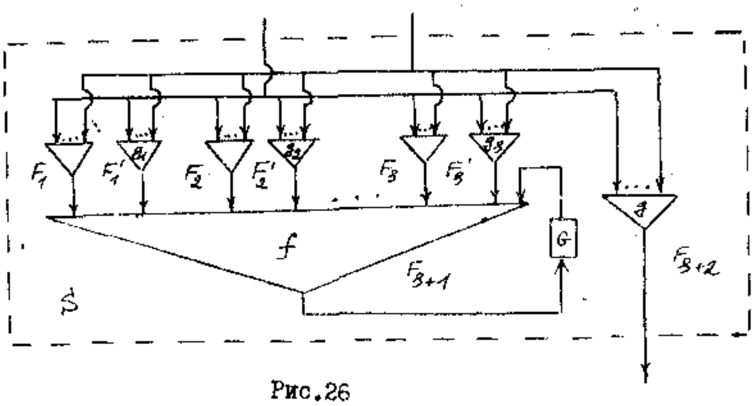

Рис.26

ЛИТЕРАТУРА

1. Post E. Two-valued iterative systems of mathematical logik. Prinston, 1941.

2. Яблонский С.В. О функциональной полноте и трехзначном исчислении.- ДАН СССР, 1954, т.95, № 6, с. 1153-1156.

3. Яблонский С.В. Функциональные построения в к-значной логике. - В кн.: Труды матем.ин-та им.В.А.Стеклова, т.51,Изд-во АН СССР, 1958, с. 5-142.

4. Ло Чжу-Кай. Предполные классы, определяемые нормальными к-арными отношениями в к-значной логике. - Acta Sci.natur.Univ.Jilinensis,1964,v.3,p.

5. Ло Чжу-Кай. Предполнота множества и кольца линейных функций. Acta Sci. nature. Unive. Jilinensis, 1963, v.2.

6. Ло Чжу-Кай, Лю Сюй-Хуа.Предполные классы, определяемые бинарными отношениями в многозначной логике. Acta Sci.natur.Univ.Jilinensis,1963,v.4.

7. Розенберг И. Uber die functionale Vollstandigkeit in der mehrwertigen Logiken.-Rozpravy CSAV, Rada mat. prit.,1970,v.80,№4.

8. Захарова Е.Ю. Критерий полноты системы функций из $P_к$. В сб. Проблемы кибернетики, вып.18, М.;Наука, 1967, с. 5-10.

9. Salomaa A. On the heights of closed sets of operations in finite algebras.-Ann. Acad. S. Fennical S.A.,1965, v.363.

10. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

11. Sheffer H.M. A set of five of five independent postulates for Boolean algebras with application to logical constants.-Trans.Amer.Math.Soc.,19 v.14 s.481-488.

12. Slupecki J. Kriterium petnosci wielowartosciowych systemow logiki zdan.- Comtes rendus des scances de la Societe des Sciences et des Letters de Varsovie, 1939, Cl.III, t.32, p. 102-109.

13. Саломаа А. Некоторые критерии полноты для множеств функций многозначной логики. - В кн.: Кибернетический сборник, т.8,М.:Мир, 1964, с. 7-32.

14. Rousseau G. Completeness in finite algebras with a singl operations.- Proc. Amer. Math. Soc., 1967, v.18, 1009-1013.

15. Буевич В.А. Об аппроксимационной полноте (А-полноте) для автоматов. Автореф.канд.дис.,М.:ВЦ АН СССР, 1973.

16. Dassow J. Ein modifizierter Vollstandigkeitsbegriff in einer Algebra von Automatenabbildungen.Dissertation Doktor B, Rostock, Universitet,1978.

17. Кратко М.И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознования полноты для конечных автоматов.-ДАН СССР, 1964, т.155, № 1, с.35-37.

18. Алешин С.В. Относительно суперпозиций автоматных отображений. Автореф. канд.дис. МГУ,1973.

19. Мальцев А.И. Итеративные алгебры и многообразия Поста.- В кн.: Алгеб-

ра и логика, семинар, т.5, вып.2, Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1966.

20. Деметрович Я. О мощностях множеств предполных классов в предельных логиках. – Acta Cybernetika, 1972, t.I, Fasc. 4, Szeged, s. 233-239.

21. Мартынюк В.В. Исследования некоторых классов функций в многозначных логиках. – В кн.: Проблемы кибернетики, вып.3, М.:Наука, 1960, с.49-60.

22. Пан Юн-цзе. Один разрешающий метод для отыскания всех предполных классов в многозначной логике.– Acta Sci.Natur.Univ.Jilinensis,1962,v.2.

23. Ван Сян-хао. Теория структуры функций с отсутствием значений и функций без отсутствия.– Acta Sci.Natur.Univ.Jilinensis,1963, v.2.

24. Rosenberg J. La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini.–Comtes Rendus Acad. Sci. Paris, 1965, v. 260, p.3817-3819.

25. Яновская С.А. Математическая логика и основания математики. В кн.: Математика в СССР за сорок лет 1917-1957, т.I, М.: Физматгиз,1959, с.13-120.

26. Захарова Е.Ю. Об одном достаточном условии полноты в P_k. В кн.: Проблемы кибернетики, вып.16, М.:Наука, 1966, с.239-244.

27. Rosenberg J. Uber die Verschiedenheit maximaler Klassen in P_k.– Rev. Roum. math. pures et appl.,1969, v.3, p.413-438.

28. Hardy G.H.Ramanujan S. Asymptotic formulae in combinatorial analysis.–Proc. Lond. math. Soc., 1918, v.2,№ 17, p.75-115.

29. Байрамов Р.А. Критерии фундаментальности групп подстановок и полугрупп отображений. – ДАН СССР, 1969, т.189, № 3, с. 455-457.

30. Байрамов Р.А. К проблеме полноты в симметричной полугруппе конечной степени.– В кн.: Дискретный анализ, вып.8, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1966, с. 3-25.

31. Foxley E. The determination of all Sheffer functions in 3-valued logic, using a logical computer.– Notre Dame J. of Formal logic,1962,v.3.

32. Martin N. The Sheffer functions of 3-valued logic.–J.Symbolic Logik, 1954, v. 19, p.45-51.

33. Salomaa A. On the compositionof function of several variables ranging over a finite set.–Ann.Univ.Farkuensis,1960,Ser.AJ,v.41.

34. Wheller R. Complete connectives for the 3-valued prepositional calculs.–Proc.London Math. Soc.,1966,v.3,N 16,p.167-191.

35. Abjan A.,La Macchia S. Examples of generalized Sheffer functions.– Acta Math.Acad.Sci. Hungarical, 1967,t.18(1-2),p.189-190.

36. Колесников М.А.,Шейнбергас И.М. Функции Шеффера в четырехзначной логике.– В кн. Работы по технической кибернетике, вып.3,М.:ВЦ АН СССР,1972, с.50-99.

37. Янов Ю.И.,Мучник А.А. О существовании к-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса. – ДАН СССР,1959. т.127, № 1, с.144-146.

38. Гаврилов Г.П. О функциональной полноте в счетнозначной логике.- В кн. Проблемы кибернетики,вп.I5, М.:Наука, I965,с.5-64.

39. Кудрявцев В.Б. Вопросы полноты для автоматов. - ДАН СССР,I960,т.130, № 6, с.II89-II92.

40. Кудрявцев В.Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. - ДАН СССР,I960, т.I32, № 2, с.272-274.

4I. Кудрявцев В.Б. Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей.- В кн.:Проблемы кибернетики,вып.8,М.:Наука,I962, с.9I-II5.

42. Кудрявцев В.Б. О мощностях множеств предполных классов некоторых функциональных систем, связанных с автоматами.- ДАН СССР,I963,т.I5I,№ 3, с.493-496.

43. Кудрявцев В.Б. Вопросы полноты для некоторых функциональных систем, связанных с автоматами. Автореф. канд.дис.М.: ИПМ АН СССР,I963.

44. Кудрявцев В.Б. О мощностях множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами.- В кн.: Проблемы кибернетики, вып.I3, М.: Наука,I965, с. 45-74.

45. Яблонский С.В., Гаврилов Г.П.,Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики Поста. М.:Наука, I966.

46. Захарова Е.Ю.,Кудрявцев В.Б.,Яблонский С.В. О предполных классах в к-значных логиках. - ДАН СССР, I969, т.I86, № 3, с.509-512.

47. Бирюкова Л.А., Кудрявцев В.Б. О полноте функций с задержками. - В кн.: Проблемы кибернетики, вып.23, М.:Наука,I970, с. 5-25.

48. Кудрявцев В.Б. О покрытиях предполных классов к-значной логики. - В кн.: Дискретный анализ, вып.I7, Новосибирск, Изд-во ИМ СО АН СССР,I970, с.32-44.

49. Блохина Г.Н., Кудрявцев В.Б. О базисных группах в к-значных логиках. -ДАН СССР, I97I, с.20I, № I, с. 9-II.

50. Кудрявцев В.Б. Относительно S - систем функций к-значной логики.- ДАН СССР, т.I99, № I, с. 20-22.

5I. Kudrjawcew W.B.,Burosch G. Das problem der Vollstandigkeit fur Boolesche Funktionen uber zwei Dualmengen.-Math.Nachr.,Berlin,I972,v.54,Heft I-6, s.I5-I25.

52. Кудрявцев В.Б. О функциональных свойствах логических сетей. - Math.Nachr.,I973,v.55,Heft I-6,s.I87-2II.

53. Кудрявцев В.Б. О свойствах S- систем функций к-значной логики. - EJK, I973, v.9, NoI/2,s.8I-I05.

54. Blochina G.N., Kudrjawcew W.B., Burosch G. Das Problem der Vollstandigkeit fur Boolesche Funktionen uber zwei Dualmengen mit nichtleerem Durchschnit,I.-Z.math. Logik und Grund.Math.,I973,v.I9,s.I63-I8o.

55. Blochina G.N., Kudrjwzew W.B., Burosch G. Das Problem der Vollstandigkeit fur Boolesche Funktionen uber zwei Dualmengen mit nichtleerem Durchschnit, II.-Z.math. Logic und Grund. Math., I974, v.2, s.79-96.

56. Кудрявцев В.Б. О функциональной системе $\mathcal{P}_\Sigma$. - ДАН СССР, I973, т.210, № 3, I973, с. 52I-522.

57. Blochina G.N., Kudrjawcew W.B., Burocsh G. Ein Vollstandigkeitskriterium bis auf eine gewisse Aquivalenzrelationen fur eine verallgemeinerte Postsche Algebra.-Publ.math., Debrecen, I973, t.20, fasc.I-2, s.I4I-I52.

58. Kudrjawcew W.B., Burosch G., Blochina G.N. Vollstandigkeitsbedingungen fur zwei Algebren vom Postschen Typ.-Math.Balcanica, I973, t.3, s.28I-296.

59. Кудрявцев В.Б. Относительные функциональные системы $\mathcal{P}_\Sigma$. ЖВМ, I974, т.I4, № I. с.I98-208.

60. Бирюкова Л.А., Кудрявцев В.Б. Некоторые задачи о полноте для функций с задержками.- В кн.: Исследование операций, вып.4, I974, М.: ВЦ АН СССР, с.83-I02.

6I. Блохина Г.Н., Критерий базисности групп в к-значной логике. - В кн.: Исследование операций, вып.4, I974, М.: ВЦ АН СССР, с.I03-II0.

62. Кудрявцев В.Б. Относительно многозначных логик. - In: Komplizierheit von Lern-und Erkennungsprozessen, v.2, I975, s.I66-I80.

63. Kudrjawzew W.B. Uber einige allgemeine Eigenschaften des Funktionalsystems P_Σ .— Wiss.Z.Humboldt-Uni., Berlin, Math.-Natur.Reihe, I975, XXIY, No6, s.7I9-720.

64. Кудрявцев В.Б. Лекции по теории конечных автоматов.М.: Изд-во МГУ, I976.

65. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Элементы теории автоматов. М.: Изд-во МГУ, I978.

66. Кудрявцев В.Б. Об условиях полноты для алгебр Поста. - В кн.: Методы и системы технической диагностики, вып.I, I980, Изд-во Саратовск.ун-та, с.79-II5.

67. Кудрявцев В.Б. К теории функциональных систем.-М.: Изд-во МГУ, препринт № I, I98I.

68. Кудрявцев В.Б. О функциональных системах. М.: ВЦ АН СССР, препринт, I98I.

69. Кудрявцев В.Б. О полноте для функциональных систем. - ДАН СССР, I98I, т.257, № 2.

70. Мальцев А.И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск.: Изд-во ИМ СО АН СССР, I976.

71. Захаров Д.А. Рекурсивные функции. Новосибирск :Изд-во Новосибирск. ун-та, 1970.

72. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов.М.:Физматгиз,1962.

73. Калужнин Л.А. и др. Теория Галуа для алгебр Поста I,II. -Кибернетика (Киев),1969, № 3, с.1-10; № 5, с.1-9.

74. Летичевский А.А. Условия полноты в классе автоматов Мура.- В кн.: Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики, вып.2, Киев,1963.

75. Кузнецов А.В. Анализ Штриха Шеффера в конструктивной логике. - ДАН СССР, 1965, т.196 , № 2, с. 274-277.

76. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1965.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВАЛЕРИЙ БОРИСОВИЧ КУДРЯВЦЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Заведующий редакцией С.И.Зеленский
Редактор Ф.И.Горобец

Подписано к печати 7.У.1982г. Л - 80635

Формат 70 х 108 1/16 Объем 11,58уч.-изд.л. Тираж 500экз.

Заказ 2806 Цена 40 коп.

Отпечатано на ротапринте Института механики МГУ

Цена 40 коп.