ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА том 1 выпуск 4 1989

Д.Н.Бабин

О ПОЛНОТЕ ДВУХМЕСТНЫХ О.Д.-ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СУПЕРПОЗИЦИИ

Аннотация

13 проблема Гильберта состит в следующем: доказать что при любом n всякая непрерывная в n-мерном кубе функция может быть представлена в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных. А.Н.Колмогоров [1] доказал более сильный результат: всякая непрерывная в n-мерном кубе функция может быть представлена в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и функции сложения. Проблема естественно обобщается на другие классы функций. Оказалось, что в классе дифференцируемых функций такая представимость уже не имеет места [2]. Для детерминированных функций (автоматов с бесконечной памятью), которые можно рассматривать как подкласс непрерывных функций, имеет место отрицательное решение 13 проблемы Гильберта [3].

Конечных полных относительно суперпозиции систем о.д.-функций не существует, а все известные полные системы содержат функции с неограниченным в совокупности числом переменных [4]. Поэтому важен вопрос о минимальном числе переменных полной системы конечных автоматов. В статье доказывается, что всякая о.д.-функция (конечный автомат) представим суперпозицией о.д.-функций одного переменного и универсальной булевой функции.

Основные определения взяты из [4]. О.д.-функция d: $E_2^* \to E_2^*$ с уравнениями

$$\begin{cases} q(1) = 0, \\ q(t+1) = a(t), \\ d(t) = q(t), \end{cases}$$

называется "задержкой". Будем обозначать через O множество всех о.д.-функций с одним состоянием (булевых функций), через K множество всех о.д.-функций без входа или константных (выдающих всегда одно и то же периодическое слово).

Определение 1. Пусть f и g — о.-д. функции с одинаковым числом входов и одинаковым числом выходов. Будем говорить , что о.-д. функция g копирует о.-д. функцию f если наидутся натуральные n, j, k $(n \leqslant j)$, такие, что для любого $l = 0, 1, 2, \dots$ и любой входной последовательности достаточно большой длины значение о.-д. функции g в момент времени $j + kl$ совпадает со значением f в момент $n + kl$ т.е. $g(j + kl) = f(n + kl)$.

Пример. Пусть f — некоторая о.-д. функция. Подставим на все ее выходы задержки d. Полученная функция $D(f)$, очевидно, выдает то же самое, что и исходная функция но на один такт позже(на одной и той же последовательности). Следовательно g копирует f.

Рассмотрим систему о.-д. функций

$$F = \{f_i(x_1, \dots, x_{m_i}), m_i = i \cdot 2^i, i = 1, 2, \dots\} \cup O,$$

где f_i — о.-д. функция с $m_i = i \cdot 2^i$ входами и i выходами, задаваемая системой уравнений

$$\begin{cases} q_1(1) = 0, \dots, q_i(1) = 0, \\ (q_1(t+1), \dots, q_i(t+1)) = \varphi_i(q_1(t), \dots, q_i(t), x_1(t), \dots, x_{m_i}(t)) \\ f_i(t) = (q_1(t), \dots, q_i(t)). \end{cases}$$

Занумеруем наборы из E_2^i следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} (0,\dots,0) & — & 0 \\ (0,\dots,1) & — & 1 \\ & \dots & \\ (1,\dots,1) & — & 2^i-1. \end{array}$$

Через $q^{(s)} \in E_2^i$ обозначим набор с номером s. Функция φ_i задается формулой

$$\varphi_i(q^{(s)}(t), x_1(t), \dots, x_{m_i}(t)) = (x_{si+1}(t), x_{si+2}(t), \dots, x_{si+i}(t)),$$
$$s = 0, 1, \dots, 2^i - 1.$$

Согласно [4] система F полна относительно операции суперпозиции.

ЛЕММА 1. *Пусть $\mathcal{F} = f_i$ при некотором $i = 1, 2, \dots,$ и пусть некоторая о.д.-функция g копирует о.-д. функцию $\mathcal{F}$, тогда $\mathcal{F} \in \big[\{g, d\} \cup K \cup O\big]$.*

Доказательство

Идея доказательства состоит в том, что отрезок входной последовательности $x(t_0), x(t_0+1), \dots, x(t_0+s)$ мы можем "запомнить"с помощью набора задержек. Так же можно "запомнить"значение $\mathcal{F}(t_0)$. Для каждого s можно построить булевую функцию, которая по $\mathcal{F}(t_0)$ и $x(t_0), x(t_0+1), \dots, x(t_0+s)$ вычисляет $\mathcal{F}(t_0+s)$ по формуле $\varphi(\mathcal{F}(t_0)\ x(t_0)\ x(t_0+1)\ \dots\ x(t_0+s))$.

Пусть для любого $l = 0, 1, 2, \dots\quad g(j+kl) = \mathcal{F}(n+kl)$. Введем вспомогательную функцию $C_r(x_1, \dots, x_r) = z_0, \dots, z_{k+j-1}$ с r входами и $(k+j)r$ выходами полученную схемой из задержек (рис. **??**)

$$x(t) \in E_2^r, z_0, z_1, \dots, z_{k+j-1} \in E_2^r,$$
$$z_0(t) = x(t), z_1(t) = x(t-1), \dots, z_{k+j-1}(t) = x(t-k-j+1).$$

Пусть $H_1(t)$ и $H_2(t)$ — константные о.-д. функции, выдающие в двоичной системе счисления $h_1(t)$ и $h_2(t)$ соответственно:

$$h_1(t) = \begin{cases} t, & \text{при } t < j; \\ j-n+s, & \text{при } t = j+kl+s, l = 0,1,\dots, \quad 0 \leqslant s < k; \end{cases}$$
$$h_2(t) = \begin{cases} k, & \text{при } t < j; \\ s, & \text{при } t = j+kl+s, l = 0,1,\dots, \quad 0 \leqslant s < k. \end{cases}$$

Значения $h_1(t)$ и $h_2(t)$ на любой входной последовательности будут таковы:

t	h_1	h_2
1	1	k
2	2	k
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j-1$	$j-1$	k
j	$j-n$	0
$j+1$	$j-n+1$	1
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$j+k-1$	$j-n+k-1$	$k-1$
$j+k$	$j-n$	0
$j+k+1$	$j-n+1$	1
$\dots$	$\dots$	$\dots$

.

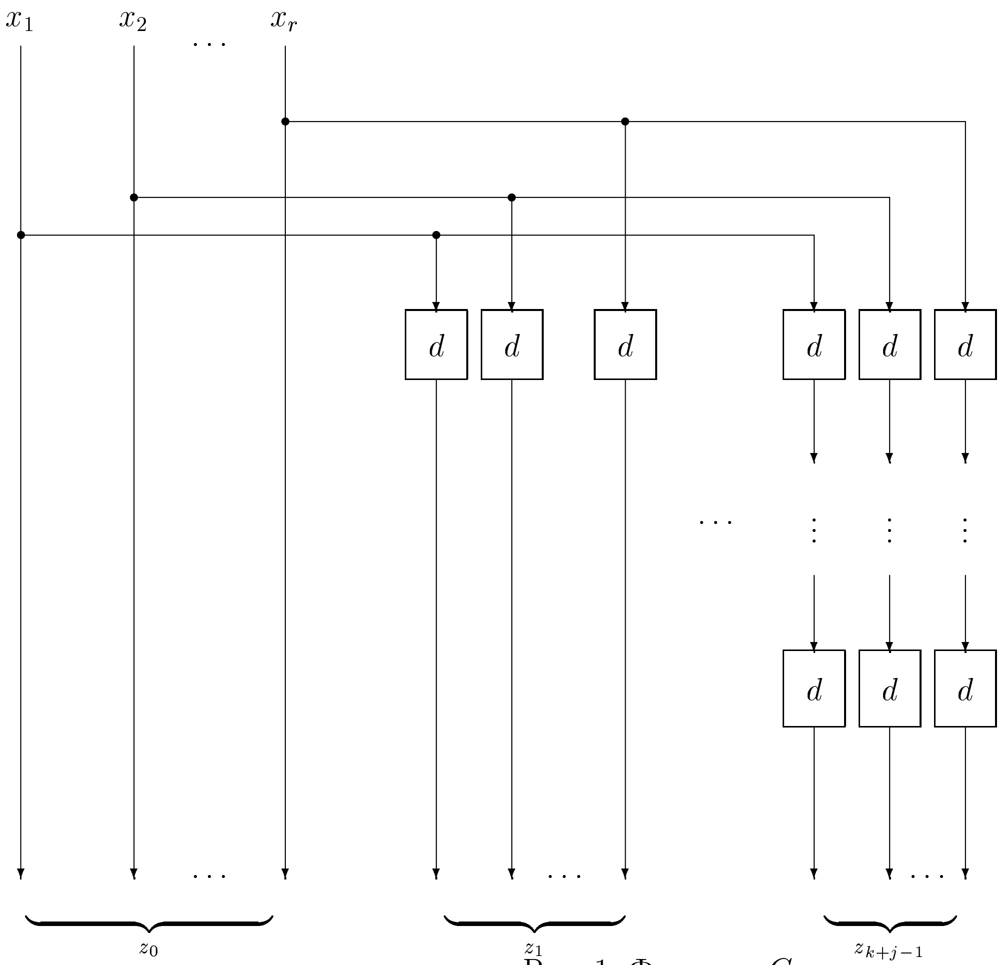

Рис. 1: Функция C_r.

Пусть P_1 и P_2 — двоичные разложения чисел p_1 и p_2 соответственно,

$$0 \leqslant p_1, p_2 \leqslant \max(k, j+k-n)+1,$$

$$u_0, u_1, \ldots, u_{k+j-1} \in E_2^i, z_0, \ldots, z_{k+j-1} \in E_2^m.$$

Пусть булева вектор-функция с i выходами:

$$B(u_0, u_1, \ldots, u_{k+j-1}, z_0, z_1, \ldots, z_{k+j-1}, P_1, P_2) =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\varphi(\ldots\varphi(\varphi}_{p_1}(u_{p_2}, z_{p_1}), z_{p_1-1})\ldots z_1) & \text{при } p_2 \neq k, \\ \underbrace{\varphi(\ldots\varphi(\varphi}_{p_1}((0,\ldots,0), z_{p_1}), z_{p_1-1})\ldots z_1) & \text{при } p_2 = k, \end{cases} \tag{1}$$

где φ — функция переходов автомата о.-д. функции $\mathcal{F}$.

Рассмотрим следующую схему (рис.2), задаваемую формулой:

$$B(C_i(g(x_1,\ldots,x_m)), C_m(x_1,\ldots,x_m), H_1, H_2).$$

Для $t = j+kl+s, l = 0,1,\ldots,\ 0 \leqslant s < k$, эта функция будет выдавать

$$\underbrace{\varphi(\ldots\varphi}_{h_1(t)}(u_{h_2(t)}, z_{h_1(t)})\ldots, z_1) = \underbrace{\varphi(\ldots\varphi}_{j-n+s}(u_s, z_{j-n+s})\ldots, z_1) =$$
$$= \underbrace{\varphi(\ldots\varphi}_{j-n+s}(g(t-s), x(t-j+n-s)\ldots)\ldots x(t-1))) =$$
$$= \varphi(\mathcal{F}(n+kl), x(n+kl)\ldots x(t-1)) = \varphi(\mathcal{F}(t-1), x(t-1)) = \mathcal{F}(t),$$

т.к. по условию копирования $g(t-s) = g(j+kl) = \mathcal{F}(n+kl)$.

А для $t < j$ функция будет выдавать

$$\underbrace{\varphi(\ldots\varphi}_{h_1(t)}(0,0,\ldots,0), z_{h_1(t)})\ldots z_1) = \underbrace{\varphi(\ldots\varphi}_{h_1(t)}(0,0,\ldots,0), x(1))\ldots x(t-1)) = \mathcal{F}(t)$$

т.к.$h_1(t) = t-1$ при $t < j$ и $(0,\ldots,0)$ — начальное состояние автомата $\mathcal{F}$. Лемма **??** доказана.

Заметим, что входная буква $x \in E_2^m$ задает подстановку $\varphi_x : E_2^i \mapsto E_2^i$, где $\varphi_x(q) = \varphi(q,x)$. Функция φ такова, что любая подстановка множества E_2^i может быть задана некоторой, причем единственной, входной буквой из E_2^m. Таким образом $\left\{\varphi_x \middle| x \in E_2^m\right\}$ — это полная полугруппа подстановок множества E_2^i.

Входное слово $x(t+1),\ldots,x(t+m)$ длины m в алфавите E_2^m также задает подстановку

$$\varphi_{x(t+1),\ldots,x(t+m)}(q) = \varphi_{x(t+m)}(\varphi_{x(t+m-1)}(\cdots\varphi_{x(t+1)}(q)\ldots)).$$

Пусть отображение $\alpha : \left(E_2^m\right)^m \mapsto E_2^m$ каждому входному слову $x(1)\ldots x(m)$ длины m ставит в соответствие входную букву, задающую ту же подстановку, что и слово $x(1)\ldots x(m)$. Будем покомпанентно записывать $\alpha(y) = (\alpha_1(y), \alpha_2(y), \ldots, \alpha_m(y))$, через e обозначим букву, задающую тождественную подстановку ($\varphi_e(q) = q, \quad q \in E_2^i$).

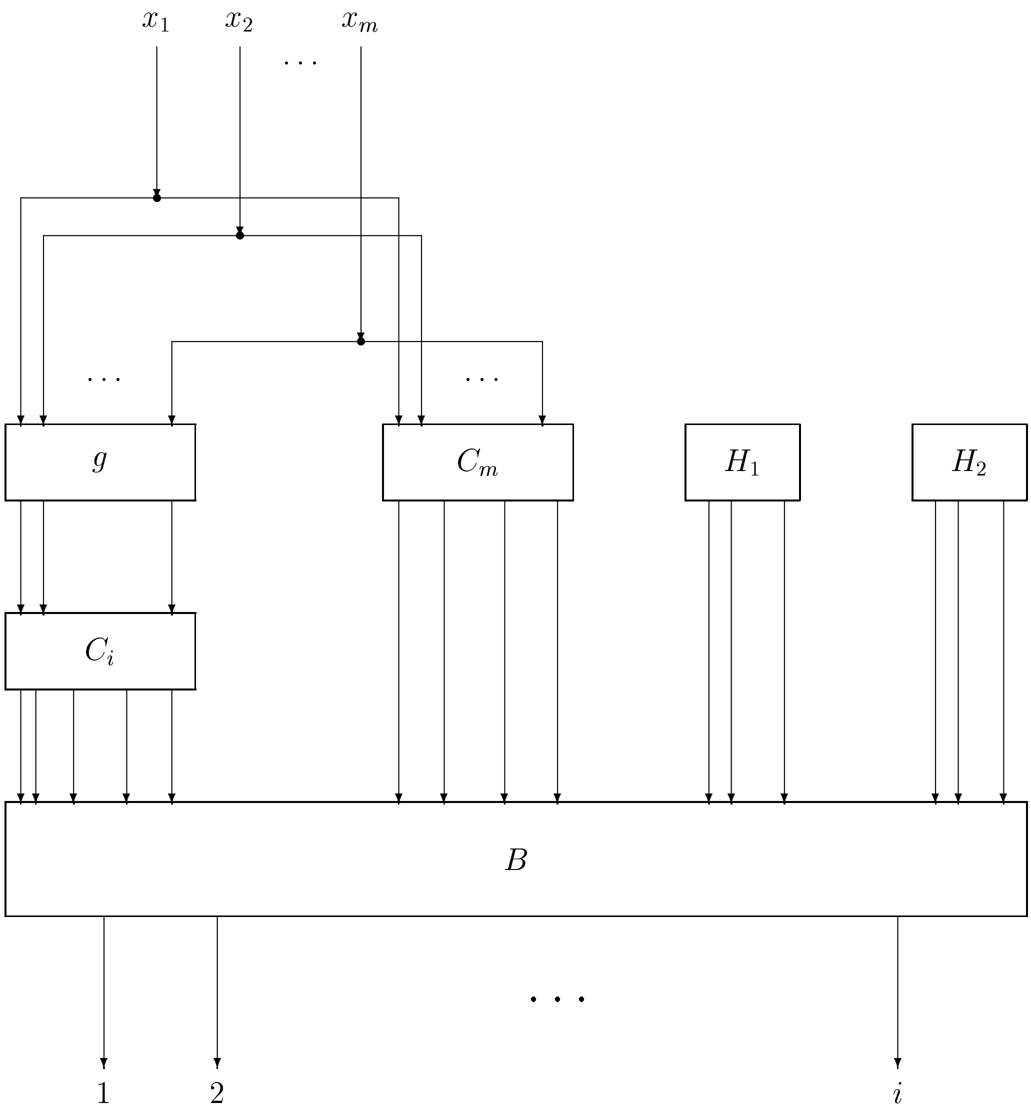

Рис. 2: Функция g.

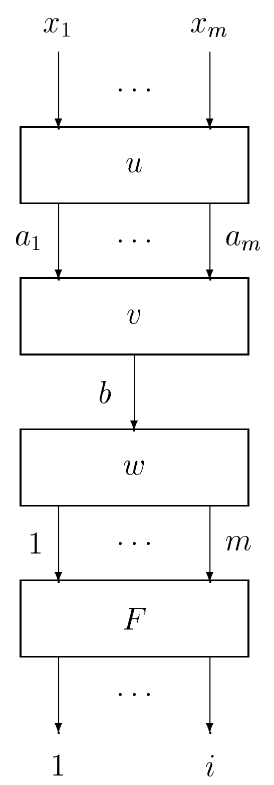

Рис. 3:

Определим вспомогательные о.–д. функции u, v и w следующего вида: Функция u имеет m входов и m выходов и задается формулой:

$$u(t) = \begin{cases} e & \text{при } t \neq lm, \\ \alpha(x(lm-m+1), \dots, x(lm)) & \text{при } t = lm, \end{cases}$$

Функция v имеет m входов и 1 выход и на входной последовательности $a(t) = (a_1(t), \dots, a_m(t)) \in E_2^m$ выдает:

$$v(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < m, \\ a_{s+1}(ml) & \text{при } t = lm + s, 0 \leqslant s < m, \end{cases}$$

Функция w имеет один вход и m выходов и на последовательности $b(t) \in E_2$ выдает

$$w(t) = \begin{cases} e & \text{при } t \neq lm, l = 2, 3, \dots \\ b(lm-m), b(lm-m+1), \dots, b(lm-1) & \text{при } t = lm, l = 2, 3, \dots. \end{cases}$$

Рассмотрим суперпозицию $g(x) = \mathcal{F}(w(v(u(x_1, \dots, x_m))))$ (см. рис. **??**).

ЛЕММА 2. *О.-д. функция g копирует о.-д. функцию $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Пусть $x(1), \dots, x(t)$ — последовательность на входе о.-д. функций $\mathcal{F}$ и g. Покажем, что для $t \geqslant lm + m + 1, l = 1, 2, \dots,$ выполнено:

$$g(lm + m + 1) = \mathcal{F}(lm + 1).$$

Выходные последовательности функций u, v и v имеют вид:

t	$u(t)$	$v(t)$	$w(t)$
1	e	0	e
2	e	0	e
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x(m-1)$	e	0	e
$x(m)$	$\alpha(x(1),\dots,x(m))$	$\alpha_1(x(1),\dots,x(m))$	e
$x(m+1)$	e	$\alpha_2(x(1),\dots,x(m))$	e
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x(2m-1)$	e	$\alpha_m(x(1),\dots,x(m))$	e
$x(2m)$	$\alpha(x(m+1),\dots,x(2m)$	$\alpha_1(x(m+1),\dots,x(2m))$	$\alpha(x(1),\dots,x(m))$
$x(2m+1)$	e	$\alpha_2(x(m+1),\dots,x(2m))$	e
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x(3m-1)$	e	$\alpha_m(x(m+1),\dots,x(2m))$	e
$x(3m)$	$\alpha(x(2m+1),\dots,x(3m))$	$\alpha_1(x(2m+1),\dots,x(3m))$	$\alpha(x(m+1),\dots,x(2m))$
$x(3m+1)$	e	$\alpha_2(x(2m+1),\dots,x(3m))$	e
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Заметим, что $g(2m+1)$ — это состояние, в которое перейдет о.-д. функция $\mathcal{F}$ после подачи слова $ee\dots e\alpha(x(1)\dots x(m))$, или, по определению функции α, слова $x(1)\dots x(m)$. Следовательно, $g(2m+1) = \mathcal{F}(m+1)$, и далее получаем при всех l

$$g(lm+m+1) = \mathcal{F}(lm+1).$$

Заметим, что о.-д. функция g получается суперпозицией о.-д. функции $v(u(x_1,\dots,x_m))$ и одноместной о.-д. функции $\mathcal{F}(w(b))$. Лемма **??** доказана.

Покажем, что о.-д. функции u и v могут быть выражены через одноместные о.-д. функции и булевы функции.

ЛЕММА 3. *О.-д. функция u принадлежит $\big[K \cup O \cup \{d\}\big]$.*

Доказательство Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 4. *О.-д. функция v принадлежит $\big[K \cup O \cup \{d\}\big]$.*

Доказательство Пусть о.-д. функция $H(x,y)$ с двумя входами и одним выходом такова:

$$H(t) = \begin{cases} y(t) & \text{при } t \neq ml, l = 1,2,\dots, \\ x(t) & \text{при } t = ml, l = 1,2,\dots. \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, что $H \in \big[K \cup O\big]$. Рассмотрим

$$V(x_1,\dots,x_m) = H(x_1, d(H(x_2, d(\dots H(x_{m-1}, d(x_m))\dots)))).$$

Функция $V(x_1,\dots,x_m)$ выдает $x_1(t)$ при $t = lm$, $x_2(t-1)$ при $t = lm+1, \dots$ $x_m(t-m+1)$ при $t = lm+m-1$. Следовательно,

$$V(t) = v(t).$$

Лемма **??** доказана.

Поскольку задержка d является одноместной о.-д. функцией, то справедлива

ЛЕММА 5. $f_i \in \big[P^1_{о.д.} \cup O\big]$, *при всех i.*

Поскольку $\{f_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ является базисом в $P_{\text{о.-д.}}$, то справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Объединение множества всех о.-д. функций одной переменной и булевых функций - полная система.*

Поскольку все булевы функции выразимы через одну двуместную функцию, то справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Множество всех о.-д. функций от двух переменных - полная система.*

.

Список литературы

[1] Колмогоров А.Н. О представлении непрерывнвх функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения. — Докл. АН СССР, 1957, т.114, №5, стр.953–956.

[2] Витушкин А.Г., Хенкин Г.М. Линейные суперпозиции функций. — Успехи матем. наук, 1967, т.22, вып. 1, стр.77–124.

[3] Марченков С.С. Об одном методе анализа суперпозиций непрерывных функций. — Проблемы кибернетики., вып.37, М:Наука, 1980, стр.5–17.

[4] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов.— М.:Наука, 1985.— с.151–174.