Лекция 13.

Теорема Краскала-Катоны.
Лемма о характеристических носителях
включающего поиска.

1 О характеристических носителях включающего поиска

В данном разделе нам понадобится теорема Краскала–Катоны. Переформулируем ее в удобных для нас терминах.

Теорема 1 (Краскала–Катоны). *Пусть B^n_m — m-й слой куба B^n и $A \subseteq B^n_m$. Пусть $R(A) = \{\alpha \in B^n_{m+1} : (\exists \beta \in A : \alpha \overset{b}{\succeq} \beta)\}$. Тогда минимум $|R(A)|$ достигается, если A — начальный отрезок слоя B^n_m, причем в этом случае $R(A)$ — начальный отрезок слоя B^n_{m+1}.*

Если $A \in B^n$, то обозначим $O(A, \overset{b}{\succeq}) = \bigcup\limits_{y \in A} O(y, \overset{b}{\succeq})$.

Приведем одно простое следствие.

Следствие 1 (теоремы Краскала–Катоны). *Пусть $A \subseteq B^n_m$, тогда $|O(A, \overset{b}{\succeq})|$ достигает минимума, если A — начальный отрезок слоя B^n_m.*

Лемма 1. *Пусть $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$ — ЗИП типа S_{bool}. Пусть U — решающий ЗИП I ПИГ над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, где $\mathcal{M}^n$ — множество монотонных булевых функций от n переменных. Тогда существует такое разбиение библиотеки V на непересекающиеся части, что*

- *каждая часть содержит записи одного веса, и этот вес назовем весом части;*

- *каждой части веса $m > 0$ и мощности t можно поставить в соответствие такую совокупность ребер графа U, что сумма сложностей ребер из этой совокупности не меньше чем $t \cdot 2^{1-m}$, причем образы различных частей при этом соответствии не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $V = \{y_1, \ldots, y_k\}$.

Отметим, что если $y_i \in V$ — запись веса m, то $|O(y_i, \overset{b}{\succeq})| = 2^{n-m}$, так как $O(y_i, \overset{b}{\succeq})$ — $(n-m)$-мерная грань куба B^n.

Обозначим через A_m^l начальный отрезок длины l m-го слоя куба B^n. Легко видеть, что если $l \leq n - m + 1$, то

$$|O(A_m^l, \overset{b}{\succeq})| = 2^{n-m+1} \cdot (1 - 2^{-l}).$$

Так как для любой записи $y_i \in V$ выполняется $O(y_i, \overset{b}{\succeq}) \neq \emptyset$, то согласно следствию из теоремы о существовании главных цепей для любой записи $y_i \in V$ в графе U существует главная цепь записи y_i, которую обозначим через C_i. Лист из $L_U(y_i)$, в который ведет эта цепь, будем обозначать α_i $(i = \overline{1,k})$.

Будем строить требуемое в лемме разбиение, последовательно добавляя к нему новые части разбиения, пока они не покроют все множество. Причем будем считать, что в начальный момент разбиение не содержит ни одной части, то есть представляет собой пустое множество.

Рассмотрим произвольную запись $y_i \in V$ $(i \in \{\overline{1,k}\})$, которая на момент рассмотрения не попала ни в какую часть разбиения. Пусть ее вес равен $m > 0$. Пусть $\beta_i \neq \alpha_i$ — ближайшая к α_i вершина в цепи C_i, через которую также проходит главная цепь какой-то другой записи. Такая вершина β_i обязательно существует, в крайнем случае β_i — корень графа U, так как все главные цепи начинаются в корне. Пусть γ_i — вершина графа, в которую ведет ребро цепи C_i, исходящее из β_i.

Разберем возможные случаи.

Случай 1. Пусть β_i — корень графа U. Тогда ребро (β_i, γ_i) имеет сложность 1. Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i, и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i).

Случай 2. Предположим теперь, что β_i не является корнем графа U, но совпадает с каким-либо листом α_j, где $j \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$. Легко заметить, что так как C_i и C_j — главные цепи, то вес записи y_j меньше веса записи y_i и, следовательно, сложность ребра (β_i, γ_i) не меньше чем 2^{1-m}. Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i, и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i).

Случай 3. Пусть теперь β_i не является корнем графа U и не совпадает ни с каким листом α_j. Пусть $C_{j_1}, \ldots, C_{j_q}$ — множество главных цепей записей, проходящих через вершину β_i.

Случай 3.1 Пусть среди записей $y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}$ существует запись y_{j_s}, вес которой меньше m. Тогда сложность вершины β_i не меньше чем $\mathbf{P}(O(y_{j_s}, \overset{b}{\succeq})) = |O(y_{j_s}, \overset{b}{\succeq})|/2^n \geq 2^{1-m}$ и, следовательно, сложность ребра (β_i, γ_i) не меньше чем 2^{1-m}. Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i, и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i).

Случай 3.2 Предположим, что среди записей $y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}$ не существует записи, вес которой меньше m. Пусть в множестве $\{y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}\}$ имеется t записей веса m таких, что в главных цепях этих записей между вершиной β_i и листом, в котором заканчивается цепь, нет вершин пересечения с другими главными цепями записей. Понятно, что $t \geq 1$. Обозначим это множество записей через V' и объявим его новой частью разбиения. Понятно, что все записи из V' до данного момента еще не рассматривались, так как в противном случае запись y_i уже оказалась бы в некоторой части разбиения. Понятно также, что для каждой записи $y_s \in V'$ β_i — ближайшая к α_s вершина в цепи C_s, через которую проходит главная цепь какой-то другой записи, причем, если γ_s — вершина, в которую ведет ребро цепи C_s, исходящее из β_i, то ребро (β_i, γ_s) не принадлежит никакой другой цепи, кроме C_s. Сопоставим V' совокупность ребер, состоящую из t ребер, исходящих из вершины β_i и принадлежащих главным цепям записей из V', и t' ребер, входящих в вершину β_i и принадлежащих главным цепям записей из V' $(t' \leq t)$. Заметим, что сумма сложностей последних t' ребер не меньше чем $\mathbf{P}(O(V', \overset{b}{\succeq}))$, и сложность вершины β не меньше чем $\mathbf{P}(O(V', \overset{b}{\succeq}))$, следовательно, сумма сложностей ребер совокупности, сопоставленной части V', не меньше чем $(t+1) \cdot \mathbf{P}(O(V', \overset{b}{\succeq})) = 2^{-n}(t+1) \cdot |O(V', \overset{b}{\succeq})|$. Согласно следствию теоремы Краскала–Катоны $|O(V', \overset{b}{\succeq})| \geq |O(A^t_m, \overset{b}{\succeq})|$. Следовательно, если

$t \le n - m + 1$, то

$$\begin{aligned}
2^{-n}(t+1) \cdot |O(V', \overset{b}{\succeq})| &\ge 2^{-n}(t+1) \cdot |O(A_m^t, \overset{b}{\succeq})| = \\
&= 2^{-n}(t+1)(1 - 2^{-t})2^{n-m+1} = \\
&= t \cdot 2^{1-m} + 2^{1-m}(1 - (t+1)2^{-t}) \ge \\
&\ge t \cdot 2^{1-m}.
\end{aligned}$$

При $t > n - m + 1$, поскольку для любой записи $y \in V'$ справедливо $O(y, \overset{b}{\succeq}) \setminus O(V' \setminus y, \overset{b}{\succeq}) \neq \emptyset$, то

$$\begin{aligned}
2^{-n}(t+1) \cdot |O(V', \overset{b}{\succeq})| &\ge 2^{-n}(t+1) \times \\
&\quad \times (|O(A_m^{n-m+1}, \overset{b}{\succeq})| + t - n + m - 1) \ge \\
&\ge (t+1) \cdot 2^{1-m} > t \cdot 2^{1-m}.
\end{aligned}$$

Теперь осталось проверить, что указанное соответствие различным частям разбиения сопоставляет различные непересекающиеся множества ребер.

Отметим, что по ходу построения соответствия мы для каждой записи $y_i \in V$ $(i \in \{\overline{1,k}\})$, нашли свои вершины β_i и γ_i, описанные выше.

Докажем одно полезное свойство.

Свойство 1. *Если β_i и γ_i — описанные выше вершины, соответствующие записи y_i, то ребро (β_i, γ_i) принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i.*

Доказательство. Так как для любой записи $y_i \in V$ совокупность ребер, связанная с записью y_i, содержит только ребра либо входящие в β_i, либо исходящие из β_i, то ребро (β_i, γ_i) может попасть в другую совокупность ребер только в том случае, если вершина γ_i совпадает с какой-то другой вершиной β_s. Итак пусть существует $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ такое, что $\gamma_i = \beta_s$. Тогда γ_i принадлежит цепи C_s, отличной от C_i, а так как γ_i в цепи C_i ближе к листу α_i, то согласно определению вершины β_i вершина γ_i должна совпадать с вершиной α_i, а это сразу означает, что каждая из записей y_s, вершина β_s которой совпадает с γ_i, подпадает под случай 2, и, значит, содержащая y_s часть состоит из одной записи y_s и ей соответствует одно единственное ребро (β_s, γ_s), не совпадающее с (β_i, γ_i).

Тем самым свойство 1 доказано.

Возьмем произвольную запись $y_i \in V$. Покажем, что совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i, не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1. Пусть существует $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ такое, что $\beta_i = \gamma_s$.

Тогда по тем же соображениям, которые описаны в доказательстве свойства 1, запись y_i подпадает под случай 2, и, значит, содержащая y_i часть разбиения состоит из одной записи y_i и ей соответствует одно единственное ребро (β_i, γ_i), которое согласно свойству 1 принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i.

Вариант 2. Пусть для любого $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ выполняется $\beta_i \neq \gamma_s$.

Тогда возможны следующие подварианты.

Вариант 2.1 Для любого $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ вершина β_i не совпадает с вершиной β_s.

Отсюда следует, что все ребра, входящие в β_i, не принадлежат никаким совокупностям ребер, кроме, быть может, совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i. Кроме того, отсюда следует, что либо запись y_i подпадает под случай 3.1 алгоритма построения соответствия, и тогда части разбиения, состоящей из одной записи y_i, сопоставляется одно единственное ребро (β_i, γ_i), либо запись y_i подпадает под случай 3.2 алгоритма построения соответствия, где параметр t принимает значение 1, и тогда части разбиения, состоящей из одной записи y_i, сопоставляется два ребра: ребро (β_i, γ_i) и ребро, входящее в β_i и принадлежащее цепи C_i. Следовательно, согласно приведенному выше замечанию и свойству 1, и в этом варианте совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i, не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

Вариант 2.2 Существует $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ такое, что $\beta_i = \beta_s$.

Пусть $V' = \{y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}\}$ — подмножество записей из V таких, что $\beta_{j_r} = \beta_i$ $(r = \overline{1,l})$. Так как мы находимся в условиях варианта 2, то все ребра, входящие в β_i, не принадлежат никаким совокупностям ребер, кроме, быть может, совокупностей ребер, соответствующих частям разбиения, содержащим записи из V'.

Возможны следующие два подварианта.

Вариант 2.2.1 В множестве V' есть запись с весом меньшим, чем вес записи y_i.

Тогда запись y_i подпадает под случай 3.1 алгоритма построения соответствия, и части разбиения, состоящей из одной записи y_i, сопоставляется одно единственное ребро (β_i, γ_i), которое согласно свойству 1 принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i.

Вариант 2.2.2 В множестве V' нет записей с весом меньшим, чем вес записи y_i.

Тогда запись y_i подпадает под случай 3.2 алгоритма построения соответствия. Пусть $V'' \subset V'$ — множество записей, вес которых совпадает с весом y_i. Согласно алгоритму построения соответствия множество V'' образует одну часть разбиения, которой сопоставляется совокупность ребер, инцидентных вершине β_i и принадлежащих главным цепям записей из V''. Согласно свойству 1 и сделанному в варианте 2.2 замечанию, эти ребра не принадлежат образам других частей разбиения.

Таким образом, мы перебрали все возможные случаи и показали, что совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i, не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

В силу произвольности выбора записи y_i это доказывает, что образы различных частей разбиения взаимно не пересекаются.

Тем самым лемма 1 доказана.