Лекция 14.

Нижняя оценка сложности включающего поиска.
Верхняя оценка сложности включающего поиска.
Асимптотика функции Шеннона
сложности включающего поиска.

1 Нижняя оценка сложности включающего поиска

Опираясь на лемму о характеристических носителях включающего поиска, мы можем получить следующую нижнюю оценку сложности включающего поиска.

Теорема 1 (нижняя оценка). *Пусть* $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$ *— ЗИП типа* S_{bool}*. Пусть базовое множество имеет вид* $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$*, где* $\mathcal{M}^n$ *— множество монотонных булевых функций. Тогда*

$$T(I, \mathcal{F}) \geq 2 \cdot \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \overset{b}{\succeq})) - t_0,$$

где t_0 *— число записей веса 0 в библиотеке* V $(t_0 \in \{0, 1\})$.

Доказательство. Обозначим через t_i — число записей веса i в библиотеке V $(i = \overline{1, n})$.

Возьмем произвольный ПИГ U над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, решающий ЗИП I. (Такой ПИГ обязательно существует, так как $\mathcal{F}$ полно для типа S_{bool}.)

Согласно лемме о характеристических носителях включающего поиска библиотеку V можно разбить на такие непересекающиеся части, что каждая часть содержит записи одного веса, и каждой части веса $i > 0$ и мощности t сопоставляется такая совокупность ребер графа U, что сумма сложностей ребер из этой совокупности не меньше чем $t \cdot 2^{1-m}$, причем образы различных частей при этом соответствии не пересекаются. Отсюда следует, что

$$T(U) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i 2^{1-i}.$$

Теперь предположим, что в библиотеке V есть запись $y_0 = (0, \ldots, 0)$ веса 0. Обозначим через C_0 главную цепь, ведущую из корня в множество $L_U(y_0)$ (согласно теореме о существовании главных цепей такая цепь существует). Пусть α_0 — лист, в котором заканчивается цепь C_0, а ребро (β_0, α_0) — последнее ребро цепи C_0. Так как запись y_0 удовлетворяет всем запросам из B^n, то все запросы проходят через ребро (β_0, α_0), и, значит, сложность этого ребра равна 1. Остается заметить, что ребро (β_0, α_0) не принадлежит ни одной совокупности ребер, соответствующей части разбиения веса, большего 0.

Таким образом,

$$T(U) \geq t_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i 2^{1-i} = 2 \cdot \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \overset{b}{\succeq})) - t_0.$$

Отсюда в силу произвольности ПИГ U вытекает утверждение теоремы. Что и требовалось доказать.

Замечание. Если мы находимся в условиях теоремы 1, то нижняя оценка, получаемая из этой теоремы, практически в два раза лучше мощностной нижней оценки.

2 Верхняя оценка сложности включающего поиска

Теорема 2 (верхняя оценка). *Пусть $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$ — ЗИП типа S_{bool}. Пусть базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$, где $\mathcal{K}^n$ — множество монотонных элементарных конъюнкций. Пусть $|V| = k$ и m — такое число, что $2\binom{n}{m} < k \leq 2\binom{n}{m+1}$. Тогда*

$$T(I, \mathcal{F}) \leq 1 + \sum_{i=1}^{m} 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{-m} k.$$

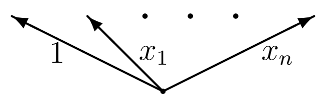

Рис. 1: Универсальный многополюсник для множества $\mathcal{K}_1^n$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{K}_l^n$ — множество всех монотонных элементарных конъюнкций, содержащих не более l переменных (или другими словами, имеющих длину не более l).

Построим по индукции информационный граф U_l^n, реализующий как функции фильтров каких-либо вершин все функции из $\mathcal{K}_l^n$.

Базис индукции. $l = 1$. $\mathcal{K}_1^n = \{1, x_1, \ldots, x_n\}$.

U_1^n будет иметь вид, изображенный на рисунке 1, где жирной точкой изображен корень графа, а на концах ребер реализуются функции из $\mathcal{K}_1^n$.

Шаг индукции. Пусть U_{l-1}^n — граф, реализующий все функции из $\mathcal{K}_{l-1}^n$. Граф U_l^n будем строить, добавляя к U_{l-1}^n вершины и ребра, чтобы реализовать функции из $\mathcal{K}_l^n \setminus \mathcal{K}_{l-1}^n$, следующим образом. Возьмем произвольную монотонную элементарную конъюнкцию длины l $x_{i_1} \& \cdots \& x_{i_l}$. В графе U_{l-1}^n найдем вершину, на которой реализуется функция $x_{i_1} \& \cdots \& x_{i_{l-1}}$ и выпустим из нее ребро, которому припишем переменную x_{i_l}. На вершине, в которую ведет это ребро, будет реализовываться как функция фильтра функция $x_{i_1} \& \cdots \& x_{i_l}$. Перебрав все функции из $\mathcal{K}_l^n \setminus \mathcal{K}_{l-1}^n$ и проделав для каждой эту операцию, получим требуемый граф U_l^n, реализующий все функции из $\mathcal{K}_l^n$.

Отметим, что на первом ярусе графа U_l^n находится $n + 1 = \binom{n}{1} + 1$ ребер, и сложность каждого из них равна 1 (первый ярус — это ребра, исходящие из корня), а на i-ом ярусе ($i \geq 2$) находится $\binom{n}{i}$ ребер, и сложность каждого из них равна 2^{1-i} (i-ый ярус — это ребра, исходящие из концов ребер $(i-1)$-го яруса). Таким образом, сложность графа U_l^n равна

$$T(U_l^n) = 1 + \sum_{i=1}^{l} \binom{n}{i} 2^{1-i}.$$

Вернемся теперь к нашей задаче I.

Для любой записи $y \in V$ характеристическая функция этой записи есть некоторая монотонная элементарная конъюнкция, которую будем обозначать K_y.

Информационный граф U, решающий задачу I, будем строить следующим образом. Возьмем граф U_m^n, описанный выше. Возьмем произвольную запись $y \in V$. Возможны два случая.

1. Характеристическая функция этой записи K_y имеет длину, не превышающую m. Тогда в графе U_m^n находим вершину, на которой реализуется функция K_y, объявляем эту вершину листом и приписываем ей запись y.

2. Длина элементарной конъюнкции K_y больше чем m. Пусть $K_y = x_{i_1} \& \cdots \& x_{i_l}$, где $l > m$. Тогда найдем в графе U_m^n вершину, на которой реализуется функция $x_{i_1} \& \cdots \& x_{i_m}$, выпустим из этой вершины ребро, припишем этому ребру функцию $x_{i_{m+1}} \& \cdots \ \& x_{i_l}$, объявим конец этого ребра листом и припишем ему запись y.

Проделав эту операцию для каждой записи $y \in V$, мы получим граф U, который, как нетрудно заметить, согласно критерию допустимости информационных графов решает задачу I.

Оценим сложность графа U. Граф U содержит в себе как подграф граф U_m^n. В худшем случае, когда для каждой записи реализуется случай 2, мы добавим к графу U_m^n k ребер, каждое из которых исходит из некоторой вершины, на которой реализуется элементарная конъюнкция длины m. Следовательно, сложность каждого из этих k ребер будет равна 2^{-m}. Таким образом,

$$T(I, \mathcal{F}) \leq T(U) \leq T(U_m^n) + 2^{-m}k = 1 + \sum_{i=1}^{m} 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{-m}k.$$

Тем самым теорема доказана.

3 Асимптотика функции Шеннона сложности включающего поиска

Если k — натуральное число, то обозначим

$$\mathcal{I}(k, S_{bool}) = \{I = \langle X, V, \rho \rangle \in S_{bool} : |V| = k\}.$$

Рассмотрим функцию Шеннона, характеризующую сложность класса ЗИП $\mathcal{I}(k, S_{bool})$

$$\mathcal{T}(k, S_{bool}, \mathcal{F}) = \sup_{I \in \mathcal{I}(k, S_{bool})} T(I, \mathcal{F}).$$

Теорема 2 позволяет нам показать, что существуют библиотеки, для которых нижняя оценка теоремы 1 асимптотически не улучшаема.

Теорема 3. (Асимптотика функции Шеннона) *Если $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $m = \bar{o}(n)$, $k(n)$ такое, что $\binom{n}{m-1} = \bar{o}(k)$ и $k \leq \binom{n}{m}$, и базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle F, \emptyset \rangle$, где $F \subseteq \mathcal{M}^n$ и $\mathcal{K}^n \subseteq F$, то при $n \to \infty$*

$$\mathcal{T}(k, S_{bool}, \mathcal{F}) \sim 2^{1-m}k.$$

Доказательство. Рассмотрим библиотеку V, являющуюся k-элементным подмножеством m-го слоя куба B^n, то есть $V \subseteq B^n_m$ и $|V| = k$. Рассмотрим связанную с этой библиотекой ЗИП $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$. Согласно теореме 1

$$T(I, \mathcal{F}) \geq 2 \cdot \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \overset{b}{\succeq})) = 2^{1-m}k.$$

Согласно теореме 2

$$T(I, \mathcal{F}) \leq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{1-m}k = 2^{1-m}k(1 + \bar{o}(1)).$$

Осталось заметить, что последние два неравенства доказывают утверждение теоремы 3.