Лекция 15.

Асимптотика функции Шеннона
сложности включающего поиска в классе
древовидных информационных графов.

1 Асимптотика функции Шеннона включающего поиска в классе древовидных ИГ

Нижняя оценка включающего поиска, приведенная на предыдущей лекции, в два раза лучше мощностной нижней оценки. В случае, когда базовое множество состоит из множества переменных X^n, удается найти такие задачи, для которых в классе древовидных схем была получена нижняя оценка, большая по порядку, чем мощностная нижняя оценка, причем на этих задачах достигается асимптотика функции Шеннона сложности.

Пусть $\mathcal{U}_d(I,\mathcal{F})$ — множество всех ИГ над базовым множеством $\mathcal{F}$, решающих ЗИП I и являющихся древовидными. Обозначим

$$T_d(I,\mathcal{F}) = \inf\{T(U) : U \in \mathcal{U}_d(I_k,\mathcal{F})\},$$

$$\mathcal{T}_d(k, S_{bool}, \mathcal{F}) = \sup_{I \in \mathcal{I}(k,S_{bool})} T_d(I,\mathcal{F}).$$

Теорема 1. *Если базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle X^n, \emptyset\rangle$ и $k(n)$, $m(n)$ и $\alpha(n)$ такие числа, зависящие от n, что*

$$k(n) \sim \binom{n}{m-1}\alpha(n),\ m(n) \geq 1,\ m(n) = \bar{o}(\log_2 n/\log_2\log_2 n),$$

$$\alpha(n) \to \infty,\ (\log_2 n - \log_2 \alpha(n))/(m(n)\log_2(m(n)+1)) \to \infty$$

при $n \to \infty$, то при $n \to \infty$

$$\mathcal{T}_d(k, S_{bool}, \mathcal{F}) \sim 2^{2-m}k.$$

Доказательство. **Нижняя оценка.**

Пусть $p(n)$ — такое, что $p^m \geq k > (p-1)^m$. Оценим величину p/n. Для этого рассмотрим два случая: когда $m = const$, и $m \to \infty$ при $n \to \infty$.

В первом случае получим

$$\begin{aligned} \frac{p}{n} &\sim \frac{k^{1/m}}{n} \sim n^{-1}\left(\frac{\alpha n(n-1)\cdots(n-m+2)}{(m-1)!}\right)^{1/m} \sim \\ &\sim \left(\frac{n^{m-1}\alpha}{n^m(m-1)!}\right)^{1/m} = \left(\frac{\alpha}{n(m-1)!}\right)^{1/m} = \bar{o}(1), \end{aligned} \tag{1}$$

поскольку, как легко видеть, $\alpha(n) = \bar{o}(n)$.

Во втором случае, используя формулу Стирлинга, можем получить аналогичный результат

$$\begin{aligned} \frac{p}{n} &\sim \frac{k^{1/m}}{n} \sim n^{-1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi(m-1)}}\left(\frac{n\,e}{m-1}\right)^{m-1}\right)^{1/m} = \\ &= \left(\frac{n^{m-1}\alpha}{n^m}\right)^{1/m} \cdot \left(\frac{e}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \cdot \\ &\quad \cdot(2\pi(m-1))^{-1/2m} = \bar{o}(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $r(n)$ такое, что

$$p\,m + p\sum_{i=1}^{r} m^i \leq n. \tag{3}$$

Договоримся обозначать запись $y \in B^n$ через ее характеристическую функцию, то есть представлять ее в виде конъюнкции переменных, номера которых совпадают с номерами разрядов вектора y, в которых стоят 1.

Разобьем все множество переменных X^n на $m+r+1$ взаимно непересекающиеся части так, что в первых m частях находится по p переменных, в $(m+i)$-й части $(i = \overline{1,r})$ находится $p\,m^i$ переменных, а в $(m+r+1)$-й части все оставшиеся переменные. В соответствии с неравенством (3) такое разбиение возможно. Переменные из i-й части X^n $(i = \overline{1, m+r+1})$ будем обозначать через x_q^i, то есть верхний индекс переменной будет говорить какой части принадлежит переменная.

Рассмотрим библиотеку

$$V \;=\{ \quad x^1_{q_1}x^2_{q_2}\dots x^m_{q_m}x^{m+1}_{f_1}\dots x^{m+r}_{f_r} : q_j\in\{\overline{1,p}\}, j=\overline{1,m};$$
$$f_j(q_1,\dots,q_m)=\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot i^{j-1}, j=\overline{1,r}\}.$$

Поскольку каждая запись $x^1_{q_1}x^2_{q_2}\dots x^m_{q_m}x^{m+1}_{f_1}\dots x^{m+r}_{f_r}$ полностью определяется набором $(q_1,\dots,q_m)$, то мощность библиотеки V равна $|V|=p^m\ge k$. Отметим также, что для любого $j\in\{\overline{1,r}\}$

$$f_j=\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot i^{j-1}\le p\cdot m\cdot m^{j-1}=p\,m^j.$$

Покажем, что любая пара различных векторов из V имеет не более чем $m-1$ одинаковую переменную. Возьмем произвольную пару векторов из V:

$$x^1_{q_1}x^2_{q_2}\dots x^m_{q_m}x^{m+1}_{f_1}\dots x^{m+r}_{f_r},$$
$$x^1_{q'_1}x^2_{q'_2}\dots x^m_{q'_m}x^{m+1}_{f'_1}\dots x^{m+r}_{f'_r}.$$

Пусть $q_{i_l}\ne q'_{i_l}$, $i_l\in\{\overline{1,m}\}$, $l=\overline{1,s}$, и $q_j=q'_j$ при условии, что $j\in\{\overline{1,m}\}\setminus\{i_l:\ l=\overline{1,s}\}$. Так как вектора различные, то $s>0$.

Пусть $f_{j_l}=f'_{j_l}$, $j_l\in\{\overline{1,r}\}$, $l=\overline{1,t}$, и $f_j\ne f'_j$ при условии, что $j\in\{\overline{1,r}\}\setminus\{j_l:\ l=\overline{1,t}\}$. Покажем, что $t<s$.

Предположим, что это не так, то есть $t\ge s$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_{j_1}=f'_{j_1},\\ \quad\dots\dots\\ f_{j_t}=f'_{j_t}.\end{cases}$$

Взяв в этой системе первые s уравнений, получим

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot i^{j_1-1}=\sum_{i=1}^{m} q'_i\cdot i^{j_1-1},\\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_i\cdot i^{j_s-1}=\sum_{i=1}^{m} q'_i\cdot i^{j_s-1}.\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{l=1}^{s}(q_{i_l} - q'_{i_l}) \cdot {i_l}^{j_1-1} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum\limits_{l=1}^{s}(q_{i_l} - q'_{i_l}) \cdot {i_l}^{j_s-1} = 0.
\end{cases}
$$

Определитель этой системы

$$
\begin{vmatrix}
{i_1}^{j_1-1} & {i_2}^{j_1-1} & \dots & {i_s}^{j_1-1} \\
{i_1}^{j_2-1} & {i_2}^{j_2-1} & \dots & {i_s}^{j_2-1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
{i_1}^{j_s-1} & {i_2}^{j_s-1} & \dots & {i_s}^{j_s-1}
\end{vmatrix}
$$

есть минор определителя Вандермонда и не равен 0, поскольку $i_1, i_2, \dots, i_s$ — положительные числа. Поэтому эта система имеет единственное решение

$$
\begin{cases}
q_{i_1} = q'_{i_1}, \\
\dots\dots \\
q_{i_s} = q'_{i_s}.
\end{cases}
$$

Но согласно предположению

$$
\begin{cases}
q_{i_1} \neq q'_{i_1}, \\
\dots\dots \\
q_{i_s} \neq q'_{i_s}.
\end{cases}
$$

Противоречие. Значит, $t < s$ и, следовательно, любая пара записей из V имеет не более чем $m - 1$ общую переменную.

Рассмотрим такую библиотеку V', что $V' \subset V$ и $|V'| = k$. Пусть $I = \langle B^n, V', \overset{b}{\succeq} \rangle$ — соответствующая этой библиотеке ЗИП типа S_{bool}. Пусть U' — произвольный граф из $\mathcal{U}_d(I, \mathcal{F})$.

Возьмем произвольную запись $y \in V'$. Согласно следствию из теоремы о существовании главных цепей, в графе U' существует главная цепь C_y записи y. Для каждой записи из V' выберем по главной цепи и далее будем говорить только об этих главных цепях. Длина цепи C_y не меньше чем $m + r$ и каждому ребру этой цепи приписана некоторая переменная из характеристической функции записи y. Пусть $y = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{m+r}}$, где переменные упорядочены в порядке следования вдоль цепи C_y (если некоторая переменная встречается в цепи дважды и более, то упорядочиваем по первому вхождению). Сопоставим каждой переменной

x_{i_j} $(j \in \{\overline{1, m+r}\})$ первое ребро, которому приписана эта переменная. Сложность этого ребра не меньше чем

$$\mathbf{P}(N_{x_{i_1}\&x_{i_2}\&\ldots\&x_{i_{j-1}}}) = 2^{1-j}.$$

Если ребро цепи C_y, соответствующее переменной x_{i_j}, принадлежит также некоторой другой главной цепи $C_{y'}$, то все ребра, соответствующие переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{j-1}}$, также принадлежат цепи $C_{y'}$, так как граф U' — древовидный. Отсюда, учитывая, что любая пара записей из V' имеет не более чем $m-1$ общую переменную, получаем, что все ребра, соответствующие переменным $x_{i_m}, \ldots, x_{i_{m+r}}$, принадлежат только одной главной цепи C_y. Таким образом, каждой записи из V' мы можем сопоставить цепочку из $r+1$ ребра, причем цепочки, соответствующие различным записям, не пересекаются. Суммарная сложность каждой такой цепочки не меньше чем

$$\sum_{j=0}^{r} 2^{1-m-j} = 2^{2-m}(1-2^{-r-1}).$$

Следовательно,

$$T(U') \geq k \cdot 2^{2-m}(1-2^{-r-1}).$$

Возьмем $r(n) = [\log_{m+1}(n/p)]$. При таком выборе r

$$p\,m + p\sum_{i=1}^{r} m^i \leq p(m+1)^r \leq n,$$

то есть выполняется условие (3).

Оценим величину $r(n)$. Для этого, как и ранее, рассмотрим два случая: когда $m = const$, и $m \to \infty$ при $n \to \infty$.

В первом случае, используя (1), получим

$$\begin{aligned} r &\geq \frac{1}{\log_2(m+1)} \cdot \log_2 \frac{n}{p} - 1 \sim \\ &\sim \frac{\log_2 n - \log_2 \alpha + \log_2((m-1)!)}{m \log_2(m+1)} \to \infty \end{aligned}$$

при $n \to \infty$.

Во втором случае, используя (2), получим аналогичный результат

$$\begin{aligned} r &\geq \frac{1}{\log_2(m+1)} \cdot \log_2 \frac{n}{p} - 1 \sim \\ &\sim \frac{1}{\log_2(m+1)}(\log_2 n - \frac{m-1}{m}\log_2 n - \\ &-\frac{m-1}{m}\log_2 e + \frac{m-1}{m}\log_2(m-1) + \\ &+\frac{1}{2m}\log_2(2\pi(m-1)) - \frac{1}{m}\log_2 \alpha) = \\ &= \frac{\log_2 n - \log_2 \alpha + (m-1)\log_2 \frac{m-1}{e} + \log_2 \sqrt{2\pi(m-1)}}{m \log_2(m+1)} \to \infty \end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Откуда следует, что для любого графа $U' \in \mathcal{U}_d(I, \mathcal{F})$ при $n \to \infty$ выполнено $T(U') \gtrsim k \cdot 2^{2-m}$. Следовательно, при $n \to \infty$

$$\mathcal{T}_d(k, S_{bool}, \mathcal{F}) \geq T_d(I, \mathcal{F}) \gtrsim k \cdot 2^{2-m}. \qquad (4)$$

Верхняя оценка. Возьмем произвольную ЗИП типа S_{bool}. Построим некоторый ПИГ, который решал бы задачу I. Для этого возьмем граф U^n_{m-1}, описанный в теореме о верхней оценке включающего поиска. Возьмем произвольную запись $y \in V$. Пусть она равна $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{m+r}}$. Возьмем в графе U^n_{m-1} вершину, на которой реализуется конъюнкция $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{m-1}}$ и выпустим из нее цепочку ребер, которым приписаны переменные $x_{i_m}, x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_{m+r}}$. И так проделаем для каждой записи $y \in V$. Понятно, что полученный граф U над базовым множеством $\mathcal{F}$ будет решать задачу I.

Подсчитаем сложность графа U. Поскольку он состоит из графа U^n_{m-1} и k цепочек, каждая из которых содержит $r+1$ ребер, и сложность каждой из которых равна, как мы отмечали выше, $2^{2-m}(1-2^{-r-1})$, то

$$T(U) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{1-i}\binom{n}{i} + k \cdot 2^{2-m}(1-2^{-r-1}) = k \cdot 2^{2-m}(1+\bar{o}(1)).$$

В силу произвольности ЗИП I имеем

$$\mathcal{T}_d(k, S_{bool}, \mathcal{F}) \lesssim k \cdot 2^{2-m}.$$

Отсюда, учитывая неравенство (4), получаем утверждение теоремы.