Некоторые задачи поиска, допускающие мгновенное в среднем решение

Э.Э.Гасанов
Московский государственный университет

Аннотация

Вводится понятие мгновенно решаемых задач поиска, под которыми понимаются задачи, которые могут быть решены в среднем за время, необходимое на перечисление ответа плюс некая, независящая от размерности задачи константа. Приводятся примеры мгновенно решаемых задач и алгоритмы, обеспечивающие мгновенное решение.

1 Введение

Известным фактом в теории информационного поиска является тот факт, что решение любой задачи информационного поиска (ЗИП) требует времени не меньшего, чем время требуемое на перечисление ответа (см., например, [1, теорема 3]), которое тем самым является тривиальной нижней оценкой сложности ЗИП.

Поэтому естественный интерес представляет проблема нахождения таких алгоритмов решения ЗИП, которые по временной сложности не существенно отличаются от тривиальной нижней оценки, в частности, отличаются на константу, не зависящую от размерности задачи. Задачи поиска для которых существуют такие алгоритмы предлагается называть мгновенно решаемыми задачами поиска.

Итак, под *мгновенно решаемыми задачами поиска* понимаются такие ЗИП, которые могут быть решены в среднем за время, необходимое на перечисление ответа, плюс некая не зависящая от размерности задачи константа. Здесь под размерностью задачи понимается объем информационного массива, в котором производится поиск.

Ранее автором в [2] была исследована ЗИП с отношением поиска, являющимся отношением линейного квазипорядка. Эта задача может служить простейшим примером мгновенно решаемой задачи поиска.

В данной работе также приводятся три задачи, для которых показано, что они мгновенно решаемые. Это известные задачи:

- задача поиска идентичных объектов, которая состоит в поиске в информационном массиве объекта, идентичного объекту-запросу;
- задачи о близости, которые состоят в поиске во множестве, в котором задан линейный порядок, объекта, ближайщего к объекту-запросу справа или слева;
- n-мерная задача интервального поиска, которая состоит в поиске в конечном подмножестве n-мерного пространства всех тех точек, которые попадают в n-мерный параллелепипед-запрос, где $n \geq 1$.

Но если в задаче, исследованной в [2], алгоритм, обеспечивающий мгновенное решение, не требует дополнительной памяти, то мгновенного решения задач, исследуемых в данной работе, иногда удается добиться только за счет больших затрат в объеме памяти. Но в тех ситуациях, когда время является очень дорогим, такие алгоритмы могут быть очень полезны.

Для исследования ЗИП автором вводится новый класс управляющих систем, названных информационными сетями с переключателями (ИСП) и являющихся обобщением введенного ранее автором в [1] понятия информационной сети (ИС). ИСП являются математической моделью алгоритмов решения задач информационного поиска. А хорошее решение задачи поиска предполагает структуризацию данных, в которых производится поиск, и наличие средств ориентации в данных, т.е. средств, позволяющих выделять в структурах те пути, которые ведут к нужным данным. ИСП представляют собой многополюсные ориентированные сети, вершины и ребра которых имеют некоторую нагрузку. Нагрузка полюсов - это и есть множество исходных данных. Граф сети отражает структуризацию данных. А нагрузка ребер и внутренних вершин задает набор средств ориентации в данных.

Перечисленные выше ЗИП исследуются в рамках этой модели.

Автор выражает благодарность В.Б.Кудрявцеву и А.С.Подколзину.

2 Основные понятия и формулировка результатов

Введем понятие ИСП и другие необходимые понятия.

Пусть X – множество запросов, причем на X определено вероятностное пространство $\langle X, \sigma, \mathbf{P}\rangle$, где σ – алгебра подмножеств множества X , $\mathbf{P}$ - вероятностная мера на σ.

$V = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ – конечная библиотека, причем $V \subseteq Y$, где Y – множество записей (объектов поиска).

ρ – бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска.

$I = \langle X, V, \rho\rangle$ – задача информационного поиска (ЗИП), которая состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей из V , которые находятся в отношении ρ с запросом x .

$O(y, \rho) = \{x \in X : x\rho y\}$ – тень записи $y \in Y$.

$N_f = \{x \in X : f(x) = 1\}$, где f – одноместный предикат, определенный на X , т.е. $f : X \to \{0, 1\}$.

$\chi_{y,\rho} : X \to \{0, 1\}$ такая, что $N_{\chi_{y,\rho}} = O(y, \rho)$ – характеристическая функция записи y.

F – множество символов одноместных предикатов, определенных на множестве X , называемое базовым множеством предикатов.

G – множество символов одноместных переключателей, определенных на множестве X. Под переключателями будем понимать функции, областью значений которых являются конечные подмножества натурального ряда.

Пару $\mathcal{F} = \langle F, G\rangle$ назовем базовым множеством.

Если n – натуральное число, а $g(x)$ – некий переключатель, то через $\xi_g^n(x)$ обозначим предикат, определенный на X , такой, что

$$N_{\xi_g^n} = \{x \in X : g(x) = n\}.$$

Обозначим

$$\widehat{G} = \{\xi_g^n : g \in G, n \in \mathbf{N}\}.$$

Определение понятия ИСП можно разбить на два этапа. На первом этапе раскрывается структурная (схемная) часть этого понятия, на втором – функциональная.

I э т а п. Определение ИСП с точки зрения ее структуры.

Пусть нам дана ориентированная многополюсная сеть.

Выделим в ней один полюс и назовем его корнем, а остальные полюса назовем листьями.

Выделим в сети некоторые вершины и назовем их точками переключения (полюса могут быть точками переключения).

Если β вершина сети, то через ψ_β обозначим полустепень исхода вершины β .

Каждой точке переключения β сопоставим некий символ из G , такой, что максимальное значение переключателя, соответствующего этому символу, не превышает ψ_β. Это соответствие назовем нагрузкой точек переключения.

Для каждой точки переключения β ребрам, из нее исходящим, поставим во взаимооднозначное соответствие числа из множества $\{\overline{1, \psi_\beta}\}$. Эти ребра назовем переключательными, а это соответствие - нагрузкой переключательных ребер.

Ребра, не являющиеся переключательными, назовем предикатными.

Каждому предикатному ребру сети сопоставим некоторый символ из множества F. Это соответствие назовем нагрузкой предикатных ребер.

Сопоставим каждому листу сети некоторую запись из множества Y. Это соответствие назовем нагрузкой листьев.

Полученную нагруженную сеть назовем информационной сетью с переключателями над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G\rangle$.

II э т а п. Определение функционирования ИСП.

Пусть нам дана ИСП U .

Последовательность ориентированных ребер сети $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \ldots, (\alpha_{m-1}, \alpha_m)$ назовем ориентированной цепью от вершины α_1 к вершине α_m.

Если c ребро сети, то через $[c]$ обозначим его нагрузку.

Проводимостью ребра (α, β) назовем предикат, равный

- $[(\alpha, \beta)]$, если ребро – предикатное;
- $\xi_g^{[(\alpha,\beta)]}$, если ребро – переключательное, где g – переключатель, соответствующий вершине α .

Проводимостью ориентированной цепи назовем конъюнкцию проводимостей ребер цепи.

Если зафиксировать запрос x, то цепь, проводимость которой на запросе x равна 1, назовем проводящей цепью на запросе x.

В ИСП по аналогии с контактными схемами введем для каждой пары вершин α и β функцию проводимости $f_{\alpha\beta}$ от вершины α к вершине β следующим образом:

- если $\alpha = \beta$, то $f_{\alpha\beta}(x) \equiv 1$ $(x \in X)$;
- если $\alpha \neq \beta$ и не существует в ИСП ориентированных цепей от α к β, то $f_{\alpha\beta}(x) \equiv 0$;
- если $\alpha \neq \beta$ и множество ориентированных цепей от α к β не пусто, то $f_{\alpha\beta}(x)$ равно дизъюнкции проводимостей всех ориентированных цепей от α к β.

Функцию проводимости от корня ИСП к некоторой вершине β ИСП назовем функцией фильтра вершины β и обозначим $\varphi_\beta(x)$.

Через $\mathcal{R}(U), \mathcal{P}(U), \mathcal{L}(U)$ (или просто $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{L}$) обозначим множества вершин, точек переключения и листьев сети U соответственно.

Пусть $\mathcal{N}$ – некоторая подсеть (т.е. произвольное подмножество вершин и ребер) ИСП U. Через $\langle \mathcal{N} \rangle$ обозначим множество записей, соответствующих листьям этой подсети (в частности, если α – некоторый лист сети U, то под $\langle \alpha \rangle$ будем понимать запись, соответствующую листу α).

Будем говорить, что ИСП U реализует функцию $\mathcal{J} : X \to 2^Y$, называемую функцией ответа сети U и определяемую соотношением :

$$\mathcal{J}(x) = \langle \{\alpha \in \mathcal{L}(U) : \varphi_\alpha(x) = 1\} \rangle.$$

Понятие ИСП полностью определено.

Скажем, что ИСП U разрешает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если для $\forall x \in X$

$$\mathcal{J}(x) = \{y \in V : x\rho y\}.$$

Сложностью ИСП U на запросе x назовем число

$$T(U, x) = b \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}} \psi_\beta \cdot \varphi_\beta(x) + a \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{P}} \varphi_\beta(x),$$

где константа a характеризует сложность вычисления одного переключателя, а константа b – одного предиката.

По аналогии с леммой 1 из [1] справедлива следующая лемма.

Лемма 1 *Если алгебра σ содержит все множества N_f, где $f \in F \cup \widehat{G}$, то для любой ИСП U над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ функция $T(U, x)$, как функция от x, является случайной величиной.*

Далее всюду будем предполагать, что мы находимся в условиях леммы 1.

Сложностью ИСП U назовем математическое ожидание величины $T(U, x)$, т.е. число

$$T(U) = \mathbf{M}\, T(U, x).$$

Если (β, α) – ребро ИСП, то сложностью этого ребра назовем число

- $b \cdot \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})$ – если (β, α) – предикатное ребро;
- $a \cdot \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})/\psi_\beta$ – если это ребро – переключательное.

Легко видеть, что сложность ИСП равна сумме сложностей ребер ИСП, т.е.

$$T(U) = b \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}} \psi_\beta \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta}) + a \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{P}} \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta}).$$

Далее всюду будем предполагать, что $a = b = 1$.

Пусть нам дана ИСП U.

Объемом $Q(U)$ ИСП U назовем число ребер в сети U.

Пусть нам дана некая ЗИП I. Сложностью задачи I при базовом множестве $\mathcal{F}$ и заданном объеме q назовем число

$$T(I, \mathcal{F}, q) = \inf\{T(U) : U \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F}) \text{ и } Q(U) \leq q\},$$

где $\mathcal{U}(I, \mathcal{F})$ – множество всех ИСП над базовым множеством $\mathcal{F}$, разрешающих ЗИП I.

Число

$$T(I, \mathcal{F}) = \min\{T(U, \mathcal{F}, q) : q \in \mathbf{N}\}$$

назовем сложностью задачи I при базовом множестве $\mathcal{F}$.

Сформулируем 2 теоремы, являющиеся перенесением результатов из класса ИС на класс ИСП. Мы не будем приводить доказательства этих теорем, поскольку отличие их от соответствующих доказательств, приведенных в [1] не столь существенно.

Пусть U – некоторая ИСП, y – запись из Y. Через $L_U(y)$ обозначим множество листьев сети U, которым соответствует запись y.

Теорема 1 *ИСП U разрешает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$ тогда и только тогда, когда для любой записи $y \in V$, такой, что $O(y, \rho) \neq \emptyset$, справедливо $L_U(y) \neq \emptyset$ и $\bigvee_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha = \chi_{y,\rho}$, а для любой записи $y \in V$, такой, что $O(y, \rho) = \emptyset$ либо $L_U(y) = \emptyset$, либо $\bigvee_{\alpha \in L_U(y)} \varphi_\alpha = 0$.*

Теорема 2 *Пусть $I = \langle X, V, r \rangle$ – ЗИП, $\mathcal{F}$ - базовое множество, удовлетворяющее условию леммы 1, такое, что $\mathcal{U}(I, \mathcal{F}) \neq \emptyset$, тогда*

$$T(I, \mathcal{F}) \geq \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho)).$$

Эти теоремы соответствуют теоремам 1 и 3 из [1].

Рассмотрим следующую ЗИП, которая описывает задачу поиска идентичных объектов.

Пусть Y – множество записей, и пусть на Y задано отношение линейного порядка $\preceq$. Пусть $X = Y$ – множество запросов.

Пусть $V = \{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq Y$.

Пусть отношение поиска ρ есть отношение идентичности, т.е.

$$x \rho y \Longleftrightarrow x = y.$$

При выполнении этих условий ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$ будем называть задачей поиска идентичных объектов.

Пусть на X задано вероятностное пространство $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$.

Пусть $g_m^1(x)$ – переключатель такой, что

$$g_m^1(x) = i, \text{ если } x \in X_i (i = \overline{1, m}), \tag{1}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_m$ – разбиение множества X (т.е. $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$, если $i \neq j$) такое, что $\mathbf{P}(X_i) \leq c/m$ $(i = \overline{1, m})$, где $c = const$, не зависящая от m.

Пусть

$$g_a^2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \preceq a \\ 2, & \text{в противном случае} \end{cases} , a \in X, \tag{2}$$

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq a \\ 1, & \text{если } x = a \end{cases}, a \in X. \quad (3)$$

Пусть

$$G_1 = \{g^1_m(x) : m \in \mathbf{N}\}, \quad (4)$$

$$G_2 = \{g^2_a(x) : a \in X\}, \quad (5)$$

$$F = \{f_a(x) : a \in X\}, \quad (6)$$

$$\mathcal{F} = \langle F, G_1 \cup G_2 \rangle. \quad (7)$$

Пусть $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ – множество целых неотрицательных чисел.

Пусть

$$L_1(l) = \begin{cases} 0, & \text{если } l = 0 \\ ]\log l[+1, & \text{если } l = 1,2,3 \\ \log l + 2, & \text{если } l \geq 4 \end{cases} - \quad (8)$$

функция, определенная на множестве $\mathbf{N}_0$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3 *Пусть $I = \langle X, V, \rho \rangle$ – задача поиска идентичных объектов, где $|V| = k$, $\mathcal{F}$ – базовое множество, определяемое соотношениями (1)–(7). Пусть $s(k,m) = 2 \cdot k$. Пусть $L(l) = L_1(l)$, где $L_1(l)$ – функция, определяемая соотношением (8) Тогда*

$$\begin{aligned} 1 < T(I, \mathcal{F}, s(k,m)) \quad \leq \quad & \frac{c}{m}\left(\left(k - \left[\frac{k}{m}\right] \cdot m\right) \cdot L\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right) + \right. \\ & \left. + \left(m - k + \left[\frac{k}{m}\right] \cdot m\right) \cdot L\left(\left[\frac{k}{m}\right]\right)\right) + 1. \end{aligned}$$

В частности, если $c_0 = \max(c, 1)$, то

$$1 < T(I, \mathcal{F}, s(k, [c_0 \cdot k])) < 2$$

и $T(I, \mathcal{F}) \sim 1$ при $k \to \infty$.

Перейдем к рассмотрению задач о близости.

В отличии от ЗИП в задачах о близости (ЗоБ) отношение поиска ρ задается на $X \times V$.

Рассмотрим следующую задачу о близости. Пусть на множестве записей Y задано отношение линейного порядка $\preceq$. Пусть множество запросов $X = Y$. Пусть $V = \{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq Y$.

Отношение поиска ρ задается на $X \times V$ и определяется соотношением

$$x\rho y \iff (y \in V)\&(x \preceq y)\&(\neg(\exists y')((y' \in V)\&(x \preceq y')\&(y' \prec y))),$$

т.е. $x\rho y$, если $y \in V$, ближайшее справа к x.

При выполнении этих условий ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$ назовем первой задачей о близости.

Пусть базовое множество

$$\mathcal{F} = \langle \emptyset, G_1 \cup G_2 \rangle, \quad (9)$$

где G_1 и G_2 определяются соотношениями (1), (2), (4), (5).

Пусть

$$L_2(l) = \begin{cases} l, & \text{если } 0 \leq l \leq 3 \\ \log(l+1) + 1, & \text{если } l \geq 3 \end{cases}. \quad (10)$$

Теорема 4 *Пусть $I = \langle X, V, \rho \rangle$ – первая задача о близости, где $|V| = k$. Пусть $\mathcal{F}$ – базовое множество, определяемое соотношением (9), $s(k,m) = 2k + m$, $L(l) = L_2(l)$, где $L_2(l)$ – функция определяемая соотношением (10). Тогда справедливо утверждение, сформулированное в теореме 3.*

Аналогично решается задача, и когда надо найти ближайшую к запросу слева запись в библиотеке, т.е. когда ρ определяется соотношением

$$x\rho y \Longleftrightarrow (y \in V)\&(y \preceq x)\&(\neg(\exists y')((y' \in V)\&(y' \preceq x)\&(y \prec y'))).$$

ЗИП $I = \langle X, V, \rho\rangle$ с таким отношением поиска назовем второй задачей о близости.

Рассмотрим следующую ЗИП, которая описывает n-мерную задачу интервального поиска.

Пусть

$$\begin{gathered} Y = [0,1]^n,\ V = \{\tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^k\} \subseteq Y, \\ X = \{\tilde{x} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) : 0 \le u_i \le v_i \le 1,\ i = \overline{1,n}\} \ - \end{gathered} \tag{11}$$

множество запросов. Пусть на множестве X задано вероятностное пространство $\langle X, \sigma, \mathbf{P}\rangle$, где $\mathbf{P}$ задается функцией плотности вероятности $p(x)$.

Отношение поиска ρ определено на $X \times Y$ и задается следующим соотношением

$$(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)\rho(y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow u_i \le y_i \le v_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Пусть

$$G_1 = \{g^1_{i,m}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) = \max(1,]u_i \cdot m[) : i \in \{\overline{1,n}\},\ m \in \mathbf{N}\}, \tag{13}$$

$$G_2 = \{g^2_{i,m}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) = \max(1,]v_i \cdot m[) : i \in \{\overline{1,n-1}\},\ m \in \mathbf{N}\}, \tag{14}$$

$$G_3 = \{g^3_{i,a}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \text{если } u_i \le a \\ 2,\ \text{если } u_i > a \end{array} \right. : i \in \{\overline{1,n}\},\ a \in [0,1]\}, \tag{15}$$

$$G_4 = \{g^4_{i,a}(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \text{если } v_i \le a \\ 2,\ \text{если } v_i > a \end{array} \right. : i \in \{\overline{1,n-1}\},\ a \in [0,1]\}. \tag{16}$$

Обозначим

$$M_{a,b} = \{\tilde{x} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) \in X : u_n \le b,\ v_n \ge a\}.$$

Пусть

$$F_1 = \{f_{a,b} : N_{f_{a,b}} = M_{a,b},\ 0 \le a \le b \le 1\}, \tag{17}$$

$$F_2 = \{\neg f_{0,a} : a \in [0,1],\ f_{0,a} \in F_1\}, \tag{18}$$

$$G_5 = \{g^5_a(u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{если } u_n \le v_n < u_n + a \\ 2, & \text{в противном случае} \end{array} \right. : a \in [0,1]\}, \tag{19}$$

Пусть

$$\mathcal{F} = \langle F_1 \cup F_2, G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5\rangle. \tag{20}$$

Теорема 5 *Пусть ЗИП $I = \langle X, V, \rho\rangle$ – n-мерная задача интервального поиска, определяемая отношениями (11)–(12), $\mathcal{F}$ – базовое множество, определяемое соотношениями (13)–(20), $n \ge 1$. Пусть*

$$R(I) = \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho)).$$

Тогда если функция плотности вероятности $p(x) \le c$, то

$$R(I) < T(I, \mathcal{F}, (4\,k + 2 + (1 + 6\,[\log k]) \cdot c_0)\,(k\,(k+1)/2)^{n-1}) \le R(I) + 4\,n + 1,$$

где $c_0 = \max(1, c/2^{n-1})$.

Эта теорема была анонсирована в [3].

3 Поиск идентичных объектов

В этом разделе исследуется задача поиска идентичных объектов и приводится доказательство теоремы 3.

Для этого сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2 *Пусть $L_1(l)$ и $L_2(l)$ – функции, определенные выше, пусть $k, m \in \mathbf{N}$, пусть*

$$r_j(k,m) = \max\{\sum_{i=1}^{m} L_j(l_i) : l_1 \in \mathbf{N}_0, \ldots, l_m \in \mathbf{N}_0, \sum_{i=1}^{m} l_i = k\}.$$

Тогда

$$r_j(k,m) = \left(k - \left[\frac{k}{m}\right] \cdot m\right) \cdot L_j\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right) + \left[\frac{k}{m}\right] \cdot m \cdot L_j\left(\left[\frac{k}{m}\right]\right).$$

Доказательство: Если доопределить функцию $L_1(l)$ на положительную полуось числовой прямой, например следующим образом:

$$L_1(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x \le 4 \\ \log x + 2, & \text{если } x \ge 4 \end{cases},$$

а функцию $L_2(l)$ – следующим образом:

$$L_2(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x \le 3 \\ \log(x+1) + 1, & \text{если } x \ge 3 \end{cases},$$

то полученные функции будут непрерывными и вогнутыми. И, вообще говоря, вогнутость этих функций объясняет результат леммы.

Более подробное доказательство будем вести от противного.

Предположим, что лемма не верна, т.е.

$$\begin{aligned} r_j(k,m) \quad &= \sum_{i=1}^{m} L_j(l_i') > \quad \left(k - \left[\frac{k}{m}\right] \cdot m\right) \cdot L_j\left(\left[\frac{k}{m}\right] + 1\right) + \\ &\quad + \left[\frac{k}{m}\right] \cdot m \cdot L_j\left(\left[\frac{k}{m}\right]\right), \ (j = 1,2), \end{aligned} \tag{21}$$

и среди чисел $l_i'(i = \overline{1,m})$ существует 2 числа, разность которых не меньше двух.

Без ограничения общности можем считать, что $l_1' - l_2' \ge 2$.

Пусть

$$l_1'' = \left]\frac{l_1' + l_2'}{2}\right[, \ l_2'' = \left[\frac{l_1' + l_2'}{2}\right].$$

$l_1'' + l_2'' = l_1' + l_2'$ и $l_1'' - l_2'' \le 1$.

Так как функция $L_j(x)$ вогнутая, то по свойству вогнутых функций

$$L_j(l_1'') + L_j(l_2'') \le L_j(l_1') + L_j(l_2'), \ j = 1,2. \tag{22}$$

Если в неравестве (22) неравентство строгое, то получили противоречие, так как $\sum_{i=1}^{m} L_j(l_i')$ – не максимально; если же нет, то обозначим $l_i'' = l_i'$ $(i = \overline{3,m})$ и перейдем к рассмотрению суммы

$$\sum_{i=1}^{m} L_j(l_i'') = \sum_{i=1}^{m} L_j(l_i') = r_j(k,m), \ j = 1,2.$$

Если среди чисел l_i'' $(i = \overline{1,m})$ нет пары чисел, разность которых превышает 1, то получим противоречие с неравенством (21), если же есть, то опять проделаем операцию, описанную выше и избавимся от такой пары, и так будем проделывать до тех пор, пока либо не получим строгое неравенство в неравестве (22), либо не придем к разбиению $l_1^{(n)},\ldots,l_m^{(n)}$, такому, что $\sum\limits_{i=1}^{m} L_j(l_i^{(n)}) = r_j(k,m),\ j=1,2$ и все они отличаются не более, чем на 1, и, тем самым, получим противоречие с неравенством (21).

Что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Построим сеть U_m^0 , имеющую вид дерева, следующим образом.

Возьмем вершину β_0 и объявим ее корнем сети U_m^0. Выпустим из β_0 m ребер, припишем им числа от 1 до m, объявим β_0 точкой переключения и припишем ей переключатель $g_m^1(x)$.

Пусть $V_i = X_i \cap V,\ l_i = |V_i|,\ i=\overline{1,m}$.

Конец ребра с номером i обозначим β_i.

Для всех i таких, что $V_i \neq \emptyset$ проделаем следующую процедуру. Выпустим из вершины β_i бинарное сбалансированное дерево с l_i концевыми вершинами, высоты $]\log l_i[$, все ребра которого ориентированы от корня к концевым вершинам. Если в этом дереве есть внутренняя вершина, из которой исходят ребра, ведущие одно в концевую вершину, а другое во внутреннюю (если такая вершина есть, то она только одна), то из концевой вершины, в которую ведет одно из этих ребер, выпустим одно ребро. Полученное дерево обозначим D_i. Объявим концевые вершины этого дерева листьями и сопоставим им слева направо в порядке возрастания элементы из V_i. (Говоря о дереве, мы подразумеваем некоторую его укладку, и направления "влево", "вправо"определяются уже на этой укладке.)

Пусть β произвольная внутреняя вершина дерева D_i . Обозначим через V_β множество записей, соответствующих листьям ветви, растущей из β . Пусть β' вершина в которую ведет левое (если оно одно, то единственное) ребро из β . Пусть

$$y_\beta = \max_{y\in V_{\beta'}} y.$$

Объявим все внутренние вершины дерева D_i, из которых исходят ребра, ведущие во внутренние вершины, вершинами переключения и для каждой такой вершины β левому ребру, из нее выходящему, припишем 1, а правому – 2, а самой вершине припишем переключатель $g_{y_\beta}^2(x)$.

Все ребра дерева D_i, входящие в листья, объявим предикатными и припишем каждому такому ребру, ведущему в лист с записью y, предикат $f_y(x)$.

Полученную сеть с $|V| = k$ листьями обозначим U_m^0. Это сеть над базовым множеством $\mathcal{F}$.

Покажем, что U_m^0 разрешает задачу $I = \langle X, V, \rho\rangle$.

Возьмем произвольный лист α. Пусть ему приписана запись $y \in V$. Достаточно показать, что $\varphi_\alpha(x) = f_y(x)$. Так как в лист α ведет предикатное ребро с предикатом $f_y(x)$, то

$$N_{\varphi_\alpha(x)} \subseteq N_{f_y(x)} = \{y\}.$$

Покажем, что $\varphi_\alpha(y) = 1$.

Пусть $y \in V_i$ ($i \in \{\overline{1,m}\}$), т.е. лист α принадлежит дереву D_i. В него ведет единственная цепь, состоящая из не более, чем $]\log l_i[+1$ ребра, причем все эти ребра, кроме последнего, переключательные. Так как $g_m^2(y) = i$, и так как первое ребро в этой цепи есть i-ое ребро, исходящее из корня, то проводимость первого ребра в цепи равна 1. Последнее ребро в цепи предикатное с предикатом $f_y(x)$ и его проводимость равна $f_y(y) = 1$. Покажем, что проводимость остальных ребер цепи равна 1. Возьмем произвольное одно из этих ребер (β,β'). Если (β,β') левое, исходящее из β , то $y \in V_{\beta'}$ и предикат, приписанный вершине β, $g_{y_\beta}^2(y)=1$, так как

$$y \leq y_\beta = \max_{y'\in V_{\beta'}} y'.$$

Если (β,β') правое ребро, исходящее из β, то $y > y_\beta$ и $g_{y_\beta}^2(y) = 2$, тем самым проводимость ребра (β,β') в обоих случаях равна 1.

Таким образом, мы показали, что $\varphi_\alpha(x) = f_y(x)$. Учитывая произвольность листа α и теорему 1 получим, что сеть U_m^0 решает задачу $I = \langle X, V, \rho\rangle$.

Объем сети U_m^0

$$Q(U_m^0) \leq m + \sum_{i=1}^{m}(2\cdot l_i - 1) = 2\cdot k.$$

Подсчитаем сложность полученной сети U_m^0.

Рассмотрим произвольный запрос $x \in X_i$. При $l_i = 0$, дерево D_i – пусто и $T(U_0, x) = 1$. Если $l_i > 0$, то, как мы показали выше, активные на этом запросе вершины сети U_0^m (вершина β активна на запросе, если $\varphi_\beta(x) = 1$) образуют единственную цепь, ведущую из корня к вершине с искомой записью, если искомая запись есть в библиотеке, или некую подцепь этой цепи, если искомой записи нет. Причем в этой цепи не более, чем $]\log l_i[$ переключательных вершин и одна вершина, из которой исходит не более двух ребер с предикатами. Тем самым

$$T(U_0^m) \le 2 +]\log l_i[\le 1 + L_1(l_i),$$

где $L_1(l)$ – функция, определяемая соотношением (8).

По определению и, учитывая лемму 2,

$$\begin{aligned}
T(U_0^m) &= \mathbf{M}\, T(U_0^m, x) = \int_X T(U_0^m, x)\, \mathbf{P}(dx) = \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{X_i} T(U_0^m, x)\, \mathbf{P}(dx) \le \sum_{i=1}^m (1 + L_1(l_i)) \cdot \mathbf{P}(X_i) = \\
&= 1 + \sum_{i=1}^m L_1(l_i) \cdot \mathbf{P}(X_i) \le \frac{c}{m} \sum_{i=1}^m L_1(l_i) \le 1 + r(k,m)\, \frac{c}{m} = \\
&= \frac{c}{m} \left(\left(k - \left[\frac{k}{m} \right] \cdot m \right) \cdot L \left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(m - k + \left[\frac{k}{m} \right] \cdot m \right) \cdot L \left(\left[\frac{k}{m} \right] \right) \right) + 1.
\end{aligned}$$

Пусть $c_0 = \max(c, 1)$. Возьмем $m = [c_0 \cdot k]$. Тогда $m \ge k$. Если $m = k$, то $k/m = 1$ и

$$r(m,k) = 0 \cdot L_1(2) + k \cdot L_1(1) = k \cdot L_1(1).$$

Если $m > k$, то $k/m = 0$ и

$$r(m,k) = k \cdot L_1(1) + (m - k) \cdot L_1(0) = k \cdot L_1(1).$$

Следовательно

$$T(I, \mathcal{F}) \le T(U_0^m) \le 1 + \frac{c}{[c_0\, k]}\, k \cdot L_1(1) < 2.$$

Если взять $m = k \cdot \alpha(k)$, где $\alpha(k) \to \infty$ при $k) \to \infty$ и $\alpha(k) > 1$ при любом k, то

$$T(I, \mathcal{F}) \le 1 + \frac{c \cdot k}{k \cdot \alpha(k)} \preceq 1.$$

С другой стороны $T(I, \mathcal{F}) \ge 1$, так как из корня должно исходить хотя бы одно ребро, поскольку $k > 0$.

Что и требовалось доказать.

Приведем два примера задачи поиска идентичных объектов.

Пример 1. Рассмотрим следующую ЗИП.

Пусть $Y = [0,1],\ X = [0,1],\ V = \{y_1, \ldots, y_k\} \subseteq Y$.

Отношение поиска ρ есть отношение идентичности, т.е.

$$x \rho y \Longleftrightarrow x = y.$$

Пусть на X задано вероятностное пространство $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, и $\mathbf{P}$ задается плотностью вероятности $p(x)$.

Пусть

$$X_1 = \{x \in X : 0 \le x \le 1/m\}. X_i = \{x \in X : \tfrac{i-1}{m} < x \le x \tfrac{i}{m}\},\ i = \overline{2, m}, \tag{23}$$

Тогда переключатель $g_m^1(x) = \max(1,]x \cdot m[)$ удовлетворяет соотношению (1).

Если $p(x) \le c = const$, то $\mathbf{P}(X_i) \le c/m$, и мы находимся в условиях теоремы 3.

Приведем неформальное описание алгоритма поиска, приведенного в доказательстве теоремы 3 применительно к этой задаче.

Разобьем отрезок $[0,1]$ на m равных частей в соответствии с соотношениями (23).

Каждой части сопоставим подмножество множества V, состоящее из точек, принадлежащих этой части.

Теперь для произвольной точки-запроса x поиск точки из V, идентичной запросу, будем вести следующим образом.

Определим ту часть отрезка, которой принадлежит запрос x. Ее номер равен $\min([x \cdot m]+1, m)$.

Теперь во множестве, сопоставленном найденной части, осуществим обычный дитохомический поиск.

Согласно лемме 2, наибольшее среднее время поиска будет в том случае, когда точки из множества V равномерно распределены по всем m частям отрезка.

Если в качестве m взять $m = k$, то случай, когда в каждую часть попадет по одной точке из V, будет иметь наибольшую сложность. А поскольку найти или не найти объект во множестве мощности 1 можно за 1 шаг, то в среднем за 2 шага (на первом мы определили номер нужной части) мы можем решить задачу поиска идентичных объектов.

Пример 2. Пусть $X = Y = \{1, \dots, N\}$.

Отношение поиска ρ есть отношение идентичности.

Пусть $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, – вероятностное пространство над X, где σ – множество всех подмножеств, а вероятностная мера $\mathbf{P}$ определяет равномерную вероятность на множестве запросов X, т.е. для любого $x \in X$ $\mathbf{P}(x) = 1/N$.

Пусть задано $m \in \mathbf{N}$.

Пусть $r = N - m \cdot [N/m]$.

Пусть $X_1, \dots, X_m$ – разбиение множества такое, что

$$X_i = \{x \in X : 1 + (i-1) \cdot ([N/m]+1) \leq x \leq i \cdot ([N/m]+1)\},\ i = \overline{1,r},$$

$$\begin{aligned} X_i = \quad \{x \in X : \ & r \cdot ([N/m]+1) + 1 + (i-1-r) \cdot [N/m] \leq x \leq \\ & \leq r \cdot ([N/m]+1) + (i-r) \cdot [N/m]\},\ i = \overline{r+1, m}, \end{aligned}$$

и $g^1_m(x) = i$, если $x \in X_i,\ i \in \{\overline{1,m}\}$. Тогда $\mathbf{P}(X_i) \leq ([N/m]+1)/N < 2/m$, и мы опять находимся в условиях теоремы 3 при $c = 2$.

4 Задачи о близости

В данном разделе приводится доказательство теоремы 4.

Построим сеть U^1_m по аналогии с сетью U^0_m.

Возьмем вершину β_0 и объявим ее корнем сети. Выпустим из β_0 m ребер, припишем им числа от 1 до m, объявим β_0 точкой переключения и припишем ей переключатель $g^1_m(x)$.

Пусть $V_i = X_i \cap V,\ l_i = |V_i|,\ i = \overline{1,m}$.

Конец ребра с номером i обозначим β_i.

Для всех i таких, что $V_i \neq \emptyset$ проделаем следующую процедуру. Выпустим из вершины β_i бинарное сбалансированное дерево D_i с $l_i + 1$ концевыми вершинами и высоты $]\log(l_i+1)[$.

Объявим все концевые вершины этого дерева D_i, кроме последней (самой правой), листьями и сопоставим им слева направо в порядке возрастания элементы из V_i.

Для произвольной внутренней вершины β дерева D_i введем понятия V_β и y_β, определяемые также, как и в сети U^0_m.

Объявим все внутренние вершины дерева D_i вершинами переключения и для каждой внутренней вершины β левому ребру, из нее выходящему, припишем 1, а правому - 2, а самой вершине припишем переключатель $g^2_{y_\beta}(x)$.

Пусть $i \in \{\overline{1,m}\}$. Обозначим $j(i)$ такой номер, что $j(i) > i$, $|V_{j(i)}| > 0$ и не существует j' : $|V_{j'}| > 0$ и $j' > i$ и $j' < j(i)$, т.е. $j(i)$ индекс ближайшего сверху непустого множества $V_{j(i)}$. Если такого множества нет, то $j(i) = 0$.

Теперь для каждого дерева D_i самую правую концевую вершину дерева отождествим с самым левым листом дерева $D_{j(i)}$, если $j(i) \neq 0$.

Для каждого i такого, что $l_i = 0$ вершину β_i отождествим с самым левым листом дерева $D_{j(i)}$, если $j(i) \neq 0$.

Полученная сеть и будет сетью U^1_m.

Доказательство того, что сеть U_m^1 разрешает первую задачу о близости $I = \langle X, V, \rho \rangle$ аналогично доказательству того, что сеть U_m^0 разрешает задачу поиска идентичных объектов.

Объем сети U_m^1

$$Q(U_m^1) = m + \sum_{i=1}^{m} (2\,(l_i+1) - 2) = m = +2 \sum_{i=1}^{m} l_i = m + 2\,k.$$

Подсчитаем сложность сети U_m^1.

Рассмотрим произвольный запрос $x \in X$. При $l_i = 0$ $T(U_m^1, x) = 1$.

Если $l_i > 0$, то активное на запросе x вершины сети U_m^1 образуют единственную цепь, ведущую из корня к вершине с искомой записью или же к самой правой вершине последнего дерева D_i. И в этой цепочке не более $1+]\log(l_i+1)[$ переключательных вершин, и значит

$$T(U_m^1, x) \leq 1+]\log(l_i+1)[.$$

Отсюда следует, что $T(U_m^1, x) \leq 1 + L_2(l_i)$.

Тогда, как следствие леммы 2 и по аналогии с теоремой 3 доказывается утверждение теоремы 4.

Что и требовалось доказать.

5 Одномерная задача интервального поиска

Доказательство теоремы 5 проведем в два этапа. Сначала рассмотрим одномерный случай, т.е. когда $n = 1$, а затем многомерную задачу ($n > 1$).

В одномерном случае в качестве базового множества можно взять множество

$$\mathcal{F} = \langle F_1 \cup F_2, G_1 \cup G_3 \cup G_5 \rangle,$$

т.е. множества G_2 и G_4 нужны только для реализации многомерной задачи.

В одномерном случае $Y = [0, 1]$, а библиотека V есть конечное множество точек из отрезка $[0, 1]$. Пусть $V = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, причем $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_k$, т.е. V – множество, упорядоченное в порядке неубывания своих элементов.

Нижняя оценка следует из теоремы 2.

Построим ИСП, на которой достигается верхняя оценка одномерной задачи интервального поиска.

Возьмем точку, объявим ее корнем сети и обозначим β_0. Выпустим из корня два ребра, одно из которых будем считать левым, а другое правым. Конец левого ребра обозначим β_1, а конец второго – β_2.

Пусть m некоторый параметр, значение которого определим позже.

Припишем корню переключатель $g^5_{1/m}(u, v)$ из множества G_5. Напомним, что $n = 1$, поэтому мы опустим индексы при переменных. Левому ребру припишем 1, а правому 2.

Выпустим из вершины β_1 дерево D, аналогичное деревьям D_i из доказательства теоремы 3. А именно, дерево D будем строить следующим образом.

Сначала возьмем бинарное сбалансированное дерево с k концевыми вершинами (напомним, что $k = |V|$), высоты $]\log k[$, все ребра которого ориентированы от корня к концевым вершинам. Если в этом дереве есть внутренняя вершина, из которой исходят ребра, ведущие одно в концевую вершину, а другое во внутреннюю (если такая вершина есть, то она только одна), то из концевой вершины, в которую ведет одно из этих ребер, выпустим одно ребро. Полученное дерево обозначим D.

Объявим концевые вершины этого дерева листьями и занумеруем их слева направо. Напомним, что, говоря о дереве, мы подразумеваем некоторую его укладку, и направления "влево", "вправо"определяются уже на этой укладке. Обозначим i-ый лист через α_i и сопоставим ему запись y_i.

Пусть β – произвольная внутреняя вершина дерева D . Также, как и в теореме 3 обозначим через V_β множество записей, соответствующих листьям ветви, растущей из β . Пусть β' – вершина, в которую ведет левое (если оно одно, то единственное) ребро из β . Пусть

$$y_\beta = \max_{y \in V_{\beta'}} y.$$

Объявим все внутренние вершины дерева D, из которых исходят ребра, ведущие во внутренние вершины, вершинами переключения и для каждой такой вершины β левому ребру, из нее выходящему, припишем 1, а правому – 2, а самой вершине припишем переключатель $g^3_{y_\beta}(x)$ из множества G_3.

Все ребра дерева D, входящие в листья, объявим предикатными и припишем каждому такому ребру, ведущему в лист с записью y, предикат $f_{y,y}(x)$ из множества F_1.

Для удобства дальнейшего изложения назовем множество переключательных ребер дерева D переключательной частью дерева D, а множество предикатных ребер – предикатной частью дерева D.

Теперь из каждого листа α_i $(i = \overline{1, k-1})$ выпустим ребро, ведущее в лист α_{i+1} и припишем ему предикат $f_{y_{i+1}, y_{i+1}} \in F_1$.

Это множество из $(k-1)$-го ребра назовем правосторонней концевой цепью.

Теперь из вершины β_2 (напомним, что это вершина, в которую ведет правое ребро, исходящее из корня) выпустим $m-1$ ребро, припишем им числа от 1 до $m-1$, объявим β_2 точкой переключения и припишем ей переключатель $g^1_{1,m} \in G_1$ (напомним, что m – введенный ранее параметр). Отметим, что из β_2 мы выпустили именно $m-1$ ребро, хотя переключатель $g^1_{1,m}$ может принимать m значений.

Конец ребра, исходящего из вершины β_2 и имеющего номер i, обозначим β'_i.

Введем множество номеров $S = \{s_1, \ldots, s_{m-1}\}$ такое, что s_i номер записи из V такой, что y_{s_i} – ближайшая слева запись к точке i/m $(i = \overline{1, m-1})$, а если такой записи не существует, то $s_i = 0$.

Возьмем k новых точек, объявим их листьями и обозначим $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$. Каждому листу α_i $(i = \overline{1, k})$ припишем запись y_i (тем самым каждая запись y_i будет приписана двум листьям α_i и α'_i). Из каждого листа α'_i $(i = \overline{2, k})$ выпустим ребро, ведущее в лист α'_{i-1} и припишем ему предикат $f_{y_{i-1}, y_{i-1}} \in F_1$.

Это множество из $(k-1)$-го ребра назовем левосторонней концевой цепью.

Теперь для каждой вершины β'_i проделаем следующие действия. Если $s_i \neq 0$, то из β'_i выпустим ребро, ведущее в лист α'_{s_i} и припишем ему предикат $f_{y_{s_i}, y_{s_i}} \in F_1$. Если $s_i < k$, то из β'_i выпустим ребро, ведущее в лист α_{s_i+1} и припишем ему предикат $f_{y_{s_i+1}, y_{s_i+1}} \in F_1$.

Это множество ребер, исходящих из вершин β'_i $(i = \overline{1, m-1})$, назовем правой предикатной частью.

Полученную таким образом ИСП обозначим через U_0.

Покажем, что сеть U_0 решает одномерную задачу интервального поиска $I = \langle X, V, \rho \rangle$.

Каждая запись $y_i \in V$ соответствует ровно двум листьям сети U_0, т.е. $L_{U_0}(y_i) = \{\alpha_i, \alpha'_i\}$. Так как $O(y, \rho) = N_{f_{y,y}}$ и так как в каждый лист α_i и α'_i ведут только ребра, которым приписаны предикаты f_{y_i, y_i}, то

$$N_{\varphi_{\alpha_i} \vee \varphi_{\alpha'_i}} \subseteq O(y_i, \rho).$$

Тогда, согласно теореме 1, достаточно показать, что для $\forall y_i \in V$

$$N_{\varphi_{\alpha_i} \vee \varphi_{\alpha'_i}} \supseteq O(y_i, \rho),$$

или, что то же самое, показать, что для $\forall x \in O(y_i, \rho)$ либо $\varphi_{\alpha_i}(x) = 1$, либо $\varphi_{\alpha'_i}(x) = 1$, т.е. из корня либо в лист α_i, либо в лист α'_i существует проводящая цепь.

Обозначим $A_a = \{x = (u, v) : u \leq v \leq u + a\}$.

Возьмем произвольную запись $y_i \in V$.

Рассмотрим сначала случай, когда $x = (u, v) \in A_{1/m} \cap O(y_i, \rho)$. Это означает, что $v - u < 1/m$ и $u \leq y_i \leq v$.

Покажем, что из корня в лист α_i существует проводящая цепь.

В рассматриваемом случае $g^5_{1/m}(x) = 1$ и проводимость ребра (β_0, β_1) будет равна 1.

Отметим, что проводимость ребра (β_0, β_2) будет равна 0.

По аналогии с теоремами 3 и 4 нетрудно заметить, что в дереве D (растущем из вершины β_1) существует проводящая цепь, ведущая из β_1 в лист α_j, такой, что запись y_j, ближайшая справа к u точка из V, принадлежащая отрезку $[u, v]$ (такая точка существует, так как $y_i \in [u, v]$). Таким образом, справедливо: $u \leq y_j \leq y_i \leq v$. Отсюда легко видеть, что часть правосторонней концевой цепи, ведущая из y_j в y_i, является проводящей.

Тем самым, мы показали наличие проводящей на запросе x цепи, ведущей из корня в лист α_i.

Отметим также, что $\varphi_{\alpha'_i}(x) = 0$, так как в лист α'_i можно попасть только через ребро (β_0, β_2), проводимость которого на запросе x, как мы уже отмечали, равна 0.

Рассмотрим теперь случай, когда $x = (u, v) \in (X \backslash A_{1/m}) \cap O(y_i, \rho)$, т.е. $v - u \geq 1/m$ и $u \leq y_i \leq v$.

В этом случае $g^5_{1/m}(x) = 2$ и проводимость ребра (β_0, β_1) будет равна 0, а ребра (β_0, β_2) равна 1.

Пусть $j \in \{\overline{1, m-1}\}$ такой номер, что j/m – ближайшая справа к u точка. Легко видеть, что $g^1_{1,m}(x) = j$.

Так как $v - u \geq 1/m$, то точка j/m принадлежит отрезку $[u, v]$.

Рассмотрим два случая.

1) $y_i \leq j/m$.

Тогда $u \leq y_i \leq y_{s_j} \leq v$, так как y_{s_j} – ближайшая слева к j/m запись из библиотеки V. Отсюда следует, что поводимость ребра, ведущего из β'_j в лист α'_{s_j} равна 1. Осталось заметить, что проводимость части левосторонней концевой цепи, ведущей из α'_{s_j} в α'_i, также будет равна 1, так как $0 \leq y_i \leq y_{s_j} \leq v$.

Отметим также, что в этом случае $\varphi_{\alpha_i}(x) = 0$, так как в лучшем случае мы попадем в вершины правосторонней концевой цепи в точке α_{s_j+1}, которая в этой цепи находится после точки α_i.

2) $y_i > j/m$.

Тогда $u \leq y_{s_j+1} \leq y_i \leq v$. Отсюда следует, что проводимость ребра, ведущего из β'_j в лист α_{s_j+1}, равна 1, и проводимость части правосторонней концевой цепи, ведущей из α_{s_j+1} в α_i, также равна 1 на запросе x.

Аналогично предыдущему случаю $\varphi_{\alpha'_i}(x) = 0$.

Тем самым мы показали, что для $\forall y_i \in V$ и $\forall x \in X : x \rho y_i$ в сети U_0 существует проводящая на запросе x цепь, ведущая из корня в какой-либо (но ровно в один) из листьев α_i и α'_i.

Что и доказывает, что сеть U_0 решает задачу I.

Подсчитаем теперь сложность сети U_0.

Рассмотрим сначала произвольный запрос $x \in A_{1/m}$.

В этом случае
$$T(U_0, x) \leq 1 + (]\log k[-1) + 2 + |\mathcal{J}(x)|.$$

Здесь первое слагаемое соответствует вычислению переключателя $g^5_{1/m}$ в вершине β_0. Второе слагаемое дают переключатели, входящие в единственную проводящую цепь, пролегающую через переключательную часть дерева D. Третье слагаемое соответствует вычислению одного или двух предикатов, соответствующих предикатным ребрам из предикатной части дерева D, растущим из вершины, в которую ведет проводящая цепь. Четвертое слагаемое соответствует вычислению предикатов, соответствующих ребрам, исходящим из листьев, записи которых входят в ответ (по одному на каждую запись).

Рассмотрим теперь случай, когда $x \in X \backslash A_{1/m}$.

Тогда
$$T(U_0, x) \leq 1 + 1 + 2 + |\mathcal{J}(x)|.$$

Здесь первое слагаемое соответствует вычислению переключателя $g^5_{1/m}$, второе – переключателя $g^1_{1,m}$ из вершины β_2, третье – вычислению одного или двух предикатов, приписанных ребрам, исходящим из той вершины β'_j, в которую ведет проводящее ребро из β_2. И, наконец, четвертое слагаемое, как и ранее, соответствует вычислению предикатов, соответствующих ребрам, исходящим из листьев, записи которых входят в ответ. Как мы показали ранее, для любой записи y_i, вошедшей в ответ, ровно у одного из листьев α_i и α'_i функция фильтра будет равна 1, и следовательно каждой записи соответствует ровно одно ребро, и соответственно ровно один вычисленный предикат.

Теперь мы можем подсчитать сложность сети U_0.

$$\begin{aligned}
T(U_0) &= \mathbf{M}\, T(U_0, x) = \mathbf{P}(A_{1/m}) \cdot (2 +]\log k[) + \\
&\quad + \mathbf{P}(X \backslash A_{1/m}) \cdot 4 + \mathbf{M}\, |\mathcal{J}(x)| \leq \\
&\leq \mathbf{P}(A_{1/m}) \cdot ([\log k] - 1) + 4 + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho)) \leq \\
&\leq c \cdot ([\log k] - 1) \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{m^2} \right) + 4 + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho)) \leq \\
&\leq \frac{2c \cdot ([\log k] - 1)}{m} + 4 + \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \rho)).
\end{aligned}$$

Используемое здесь равенство $\mathbf{M}\,|\mathcal{J}(x)| = \sum_{y\in V} \mathbf{P}(O(y,\rho))$ доказывается простой сменой порядка суммирования.

Подсчитаем объем сети U_0.

$$Q(U_0) \leq 2 + (2k-1) + (k-1) + (k-1) + m + 2m.$$

Здесь первое слагаемое соответствует ребрам, исходящим из β_0. Второе слагаемое есть количество ребер в дереве D. Третье и четвертое слагаемые соответствуют ребрам из правосторонней и левосторонней концевых цепочек. Пятое слагаемое - это ребра, исходящие из вершины β_2. И, наконец, шестое слагаемое не меньше, чем число ребер, исходящих из вершин β'_i $(i=\overline{1,m})$.

Возьмем в качестве параметра $m = 2\,c\,[\log k]$ и получим

$$T(U_0) \leq 5 + \sum_{y\in V} \mathbf{P}(O(y,\rho)),$$

$$Q(U_0) \leq 4\,k - 1 + 6\,c[\log k],$$

что и доказывает утверждение теоремы 5 в случае $n=1$.

Дадим неформальное описание алгоритма, приведенного выше.

Пусть нам дано множество $V = \{y_1,\ldots,y_k\}$, в котором мы должны производить поиск. Сначала упорядочим его в порядке возрастания. Если известна оценка сверху c функции плотности вероятности появления запросов, то в качестве параметра m возьмем $m = 2\,c\,[\log k]$, если же c неизвестна, то вместо нее можно взять любое число, например, $c=2$. Затем для V построим множество номеров $S = \{s_1,\ldots,s_{m-1}\}$, описанное выше. Отметим, что оно строится только однажды. Теперь поиск по произвольно взятому интервалу-запросу $x=(u,v)$ производится следующим образом.

Сначала вычисляется длина запроса x.

Если она меньше, чем $1/m$, то в множестве V дитохомическим поиском находится ближайшая справа к точке u запись. Далее, начиная с этой записи, просматриваются слева направо все записи из V и сравниваются с правым концом запроса – точкой v до тех пор, пока очередная запись не станет больше v. Тем самым в этом случае, помимо перечисления ответа, производится порядка $\log k$ действий.

Если $v-u \geq 1/m$, то с помощью функции $g^1_{1,m}$ получаем номер j точки j/m, попадающей в интервал $[u,v]$. Теперь, начиная с записи с номером s_j, просматриваем справа налево записи из V и сравниваем с левым концом запроса – точкой u. Как только очередная запись окажется меньше u, мы, начиная с записи с номером s_j+1, просматриваем слева направо записи из V и сравниваем с правым концом запроса – точкой v до тех пор, пока очередная запись не станет больше v. Тем самым в этом случае мы, помимо перечисления ответа, производим 4 лишних действия (сравниваем $v-u$ с $1/m$, вычисляем функцию $g^1_{1,m}$, делаем 1 лишнее действие, идя справа налево, и 1 лишнее действие, идя слева направо).

Осталось заметить, что параметр m подобран так, что средняя сложность первого случая не превышает 1, если известна оценка сверху функции плотности вероятности, и не превышает некоторой константы, если эта оценка точно не известна.

И, наконец, заметим, что данный алгоритм требует дополнительную память порядка $\log k$, чтобы хранить множество S.

6 Многомерная задача интервального поиска

Приведем доказательство теоремы 5 при $n>1$.

Обозначим

$$\tilde{x} = (u_1,v_1,\ldots,u_n,v_n),\ \tilde{z}_i = (u_i,v_i),$$

$$X_1 = \{(u,v) : 0 \leq u \leq v \leq 1\},$$

$$p_i(u,v) = \underbrace{\int_{X_1}\cdots\int_{X_1}}_{n-1} p(\tilde{x})\,d\tilde{z}_1\cdots d\tilde{z}_{i-1}\,d\tilde{z}_{i+1}\cdots d\tilde{z}_n\,,$$

$$p^1_i(u) = \int_u^1 p_i(u,v)\,dv\,,$$

$$p_i^2(v) = \int_0^v p_i(u,v)\,du\,.$$

Легко видеть, что

$$p_i(u,v) \le c\cdot \underbrace{\int_{X_1}\cdots\int_{X_1}}_{n-1} d\tilde z_1\cdots d\tilde z_{i-1}\,d\tilde z_{i+1}\cdots d\tilde z_n \;=\frac{c}{2^{n-1}},$$

$$p_i^1(u) \le \frac{c}{2^{n-1}}\cdot(1-u) \le \frac{c}{2^{n-1}},$$

$$p_i^2(v) \le \frac{c}{2^{n-1}}\cdot v \le \frac{c}{2^{n-1}}.$$

Решать задачу будем методом снижения размерности. Покажем как можно перейти от решения n - мерной задачи интервального поиска к решению $(n-1)$ - мерной задачи.

Пусть $S\subseteq V$, и $1\le i_1<\cdots<i_l\le n$.

Обозначим через

$$\Pi^{i_1,\ldots,i_l}(S)=\{(y_{i_1},\ldots,y_{i_l}) : (y_1,\ldots,y_n)\in S\}\ -$$

проекцию множества S на компоненты $i_1,\ldots,i_l$.

Обозначим

$$W^i=\{(y',y'') : y',y''\in\Pi^i(V) \text{ и } y'\le y''\},\ i=\overline{1,k}.$$

Очевидно $|W^i|\le k\cdot(k+1)/2$.

Обозначим

$$Z^i=\{(y_1^1,y_2^1,\ldots,y_1^i,y_2^i) : y_1^j,y_2^j\in\Pi^i(V) \text{ и } y_1^j\le y_2^j,\ j=\overline{1,i}\},\ i=\overline{1,k}.$$

Для каждой пары $(y',y'')\in W^i$ определим множество

$$S^i_{y',y''}=\{\tilde y=(y_1,\ldots,y_n)\in V : y'\le y_i\le y''\}.$$

Обозначим

$$V^1=V,\ M^1=\Pi^1(V^1),\ M^1_y=\{y'\in V^1 : y'\ge y\},$$

$$V^i(y_1^1,y_2^1,\ldots,y_1^{i-1},y_2^{i-1})=\bigcap_{j=1}^{i-1} S^j_{y_1^j,y_2^j},\ i=\overline{2,n},$$

$$M^i(y_1^1,y_2^1,\ldots,y_1^{i-1},y_2^{i-1})=\Pi^i(V^i(y_1^1,y_2^1,\ldots,y_1^{i-1},y_2^{i-1})),\ i=\overline{2,n},$$

$$M^i_y(y_1^1,y_2^1,\ldots,y_1^{i-1},y_2^{i-1})=\{y'\in M^i(y_1^1,y_2^1,\ldots,y_1^{i-1},y_2^{i-1}) : y'\ge y\},\ i=\overline{2,n}.$$

Тогда n - мерную задачу интервального поиска можно решать следующим образом.

Пусть $\tilde x=(u_1,v_1,\ldots,u_n,v_n)\in X$ – произвольный запрос.

Сначала найдем такую пару (y',y'') из W^1, что y' – ближайшая справа к u_1 точка из множества M^1, а y'' – ближайшая слева к v_1 точка из $M^1_{y'}$. Если такой пары нет, то ответ на запрос $\tilde x$ пуст, если же есть, то мы можем перейти к решению для запроса $\tilde x'=(u_2,v_2,\ldots,u_n,v_n)$ $(n-1)$-мерной задачи интервального поиска в множестве $\Pi^{y_2,\ldots,y_n}(V^2(y',y''))$, так как множество $V^2(y',y'')$ содержит все точки $\tilde y=(y_1,\ldots,y_n)\in V$ такие, что $u_1\le y_1\le v_1$.

Таким способом мы за $n-1$ шаг придем к одномерной задаче интервального поиска, решение которой мы описали ранее.

Опишем ИСП, которая решает задачу I описанным выше методом.

Сначала построим ИСП U^1_m, решающую первую задачу о близости для множества M^1 так, как было описано в доказательстве теоремы 4, где в качестве переметра m возьмем $m=[c_0\cdot k]$. Тогда $Q(U^1_m)=2k+[c_0\cdot k]$ и $T(U^1_m)<2$.

Заменим в сети U^1_m переключатель g^1_m на $g^1_{1,m}$, а все переключатели вида $g^2_{y_\beta}$ на g^3_{1,y_β}.

Возьмем произвольный лист α сети U^1_m.

Пусть ему соответствует точка $y\in M^1$.

Объявим α внутренней вершиной и уберем приписанную ему точку y.

Построим сеть $U^{1,y}_m$, решающую вторую задачу о близости для множества M^1_y (отметим, что $M^1_y\ne\emptyset$), где в качестве переметра m возьмем $m=[c_0\cdot|M^1_y|]$. Тогда $Q(U^{1,y}_m)=2\cdot|M^1_y|+[c_0\cdot|M^1_y|]\le |M^1_y|\cdot(2+c_0)$ и $T(U^{1,y}_m)<2$.

Заменим в сети $U_m^{1,y}$ переключатель g_m^1 на $g_{1,m}^2$, а все переключатели вида $g_{y_\beta}^2$ на g_{1,y_β}^4.

Теперь отождествим корень сети $U_m^{1,y}$ с вершиной α, т.е. сеть $U_m^{1,y}$ теперь будет расти из α, причем α не будет полюсом полученной сети.

И наконец для каждого листа α' сети $U_m^{1,y}$ заменим приписанную листу α' точку y' на пару (y, y'). Эту пару будем воспринимать как обозначение множества $V^2(y, y')$.

Проделаем такую операцию для каждого листа сети U_m^1.

Полученную сеть обозначим U_1.

Она имеет не более $k(k+1)/2$ листьев, которым взаимооднозначно сопоставлены пары из Z^1. Эта сеть позволяет для любого запроса $\tilde{x} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n) \in X$ находить пару $(y', y'') \in Z^1$ такую, что y' – ближайшая справа к u_1 точка из M^1, а y'' – ближайшая слева к v_1 точка из $M_{y'}^1$, если, конечно, такая пара существует, т.е. по сути позволяет находить множество точек $V^2(y', y'') \subseteq V$, которые удовлетворяют первой паре неравенств из (12).

Так как в сети U_m^1 только 1 активный путь, то

$$T(U^1) = T(U_m^1) + \max_y T(U_m^{1,y}) \leq 2 + 2 = 4.$$

Легко видеть, что

$$Q(U^1) \leq (2 + c_0)k + (2 + c_0) \sum_{y \in V^1} |M_y^1| = k(k+3)(2 + c_0)/2.$$

Рассмотрим произвольный лист α сети U^1.

Пусть ему соответствует пара $(y, z) \in W^1$.

Отметим, что $V^2(y, z)$ не пусто.

Теперь тем же методом, которым на предыдущем шаге мы для множества V^1 строили сеть U^1, построим сеть для множества $V^2(y, z)$. Заменим теперь в этой сети все переключатели вида $g_{1,m}^1, g_{1,y_\beta}^3, g_{1,m}^2, g_{1,y_\beta}^4$ на переключатели $g_{2,m}^1, g_{2,y_\beta}^3, g_{2,m}^2, g_{2,y_\beta}^4$. Заменим также нагрузку листьев этой сети так, что если листу приписана пара (y', y''), то припишем ей четверку (y, z, y', y'').

Обозначим полученную сеть $U_{y,z}^2$.

Теперь объявим α внутренней вершиной и уберем приписанную ему пару (y, z) и отождествим α с корнем сети $U_{y,z}^2$, т.е. сеть $U_{y,z}^2$ будет расти из α.

Проделаем такую операцию для каждого листа сети U^1.

Полученную сеть обозначим U^2.

Сеть U^2 имеет не более $(k(k+1)/2)^2$ листьев, которым соответствуют четверки из множества Z^2, причем каждая четверка $(y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2)$ воспринимается как обозначение множества $V^3(y_1^1, y_2^1, y_1^2, y_2^2)$.

Легко видеть, что $T(U^2) \leq 8$,

$$\begin{aligned}
Q(U^2) \quad &\leq \quad Q(U^1) + (2 + c_0) \cdot \\
&\cdot \left(\sum_{(y_1^1, y_2^1) \in Z^1} \left(\left|M^2(y_1^1, y_2^1)\right| + \sum_{y \in M^2(y_1^1, y_2^1)} \left|M_y^2(y_1^1, y_2^1)\right| \right) \right) \leq \\
&\leq \quad (2 + c_0) \left(k + \frac{k(k+1)}{2} \right) + (2 + c_0) \left(k \frac{k(k+1)}{2} + \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \right) \leq \\
&\leq \quad (2 + c_0) \left(\frac{k(k+1)}{2} \cdot (k+2) + \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Далее из U^2 аналогичным образом получим сеть U^3 и т.д.

На $(n-1)$-ом шаге мы получим сеть U^{n-1}, которая будет иметь не более $(k(k+1)/2)^{n-1}$ листьев, которым соответствуют вектора из множества Z^{n-1}. Эта сеть позволяет для любого запроса $\tilde{x} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ находить вектор $(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{n-1}, y_2^{n-1}) \in Z^{n-1}$ такой, что y_1^i – ближайшая справа к u_i точка из $M^i(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{i-1}, y_2^{i-1})$, а y_2^i – ближайшая слева к v_i точка из $M_{y_1^i}^1(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{i-1}, y_2^{i-1})$ $(i = \overline{1, n-1})$, если же, конечно, такой вектор существует. Если же такой вектор не существует, то ответ на запрос будет пуст, т.е. процесс поиска прервется, не доходя листьев. Если напомнить, что каждый вектор $(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{n-1}, y_2^{n-1})$ воспринимается как обозначение множества $V^n(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{n-1}, y_2^{n-1})$, то сеть U^{n-1} позволяет находить для любого запроса

$\tilde{x}$ подмножество точек множества V, которые удовлетворяют первым $(n-1)$-ой паре неравенств из (12).

Легко видеть, что $T(U^{n-1}) \le 4(n-1)$,

$$\begin{aligned} Q(U^{n-1}) &\le Q(U^{n-2}) + (2+c_0)\left(k \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^{n-1}\right) \le \\ &\le (2+c_0)\left((k+2)\cdot\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Теперь осталось сделать последний шаг.

Рассмотрим произвольный лист α сети U_{n-1}.

Пусть ему приписан вектор $(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{n-1}, y_2^{n-1})$, который является обозначением множества $V^n(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{n-1}, y_2^{n-1})$. Построим для этого множества сеть U_α, решающую одномерную задачу интервального поиска по последней координате y_n. Эту сеть построим по методу, описанному в предыдущем параграфе. Если обозначить

$$l = |V^n(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_1^{n-1}, y_2^{n-1})|,$$

то число ребер этой сети не превышает

$$4\,l - 1 + 3\cdot 2\cdot[\log l]\cdot c/2^{n-1} \le 4\,k - 1 + 6\,c\cdot[\log k]/2^{n-1}.$$

Отметим также, что $T(U_\alpha) \le R(I) + 5$.

Объявим теперь лист α внутренней вершиной, уберем приписанный ему вектор и прикрепим к нему сеть U_α.

Проделаем эту операцию для каждого листа сети U_{n-1} и полученную сеть обозначим U_n.

Так как в сети U_{n-1} не более $(k\,(k+1)/2)^{n-1}$ листьев, то

$$Q(U_n) \le (4\,k + 2 + (1 + 6\,[\log k])\cdot c_0)\,(k\,(k+1)/2)^{n-1}.$$

Легко видеть, что полученная сеть U_n разрешает задачу I, так как для любого запроса $\tilde{x} = (u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n)$ с помощью сети U^{n-1} мы находим подмножество точек множества V, которые удовлетворяют первым $(n-1)$-ой паре неравенств из (12), а с помощью сети, растущей из вершины подсети U^{n-1}, соответствующей этому подмножеству, мы выберем из этого подмножества точки, удовлетроряющие и последней паре неравенств из (12).

Заметив также, что для любого запроса $\tilde{x}$ существует только один активный путь, ведущий к концевым вершинам подсети U^{n-1}, то это означает, что для любого запроса $\tilde{x}$ будет активна только одна из подсетей U_α, и значит

$$T(U^n) \le 4\,(n-1) + 5 + R(I) = 4\,n + 1 + R(I).$$

А поскольку согласно теореме 2

$$T(I, \mathcal{F}) \ge R(I),$$

то теорема полностью доказана.

Список литературы

[1] Г а с а н о в Э.Э. Об одной математической модели информационного поиска // Дискретная математика. – 1991. – Т.3, вып. 2. – С.69–76.

[2] Г а с а н о в Э.Э. Оптимальные информационные сети для отношений поиска, являющихся отношениями линейного квазипорядка // Конструкции в алгебре и логике. – Тверь: Изд-во Тверского госуниверситета, 1990. – С.11–17.

[3] Г а с а н о в Э.Э., Е р о х и н А.Н. О быстром в среднем решении n-мерной задачи интервального поиска // Методы и системы технической диагностики (Тезисы X международной конференции по проблемам теоретической кибернетики). – Саратов: Изд-во Саратовского госуниверситета, 1993. – С.48–49.