Нижняя оценка сложности информационных сетей для одного отношения частичного порядка *

Э.Э.Гасанов
Московский государственный университет

Аннотация

В статье исследуются задачи поиска, в которых отношение поиска является отношением частичного порядка. Доказано общее свойство таких задач, названное фактом существования главных цепей. С помощью этого свойства для задач поиска с естественным отношением частичного порядка, заданным на булевом кубе, получена нижняя оценка. Доказано существование таких задач с данным отношением поиска, для которых полученная нижняя оценка асимптотически не улучшаема.

1 Введение

В практике информационного поиска большое место занимают задачи, в которых отношения поиска являются отношениями частичного порядка, или при декомпозиции дают отношения частичного порядка. Частным случаем частичного порядка является линейный порядок. Случай задач поиска с отношениями линейного порядка или базирующихся на линейных порядках является наиболее разработанной областью теории информационного поиска. Так в [1] дано полное решение задачи поиска с отношением поиска, являющимся отношением линейного квазипорядка. Примерами задач, базирующихся на линейных порядках, являются задачи поиска идентичных объектов и задачи о близости, описанные в [2], где также доказано, что эти задачи являются мгновенно решаемыми и приводятся довольно простые алгоритмы их мгновенного решения. В случае, когда частичный порядок не является линейным порядком, ситуация естественно сложнее. Примером задачи с частичным порядком является задача о доминировании, описанная в [3, 4]. По методу, описанному в [2], можно доказать, что задача о

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-01-00597)

доминировании является мгновенно решаемой, но мгновенный алгоритм, построенный по этому методу, требует квадратичных затрат по памяти. В [4] приводится фоновый алгоритм решения задачи о доминировании, который дает мгновенное решение при линейных затратах памяти. Примером задачи, базирующейся на частичных порядках, является многомерная задача интервального поиска, мгновенное решение которой приводится в [2]. Другим примером задач поиска с частичными порядками являются задачи включающего поиска, упоминаемые в [5]. Наиболее интересным примером задачи включающего поиска на булевом кубе является задача поиска с естественным отношением частичного порядка, задаваемом на булевом кубе, отношением "не меньше по-компонентно". Эта задача и исследуется в данной статье. Кроме того, в статье доказано некое общее свойство задач поиска с отношениями частичного порядка, названное фактом существования главных цепей. Этот факт описывает некоторое свойство оптимальных информационных сетей, разрешающих задачи поиска с отношениями частичного порядка, и может служить подспорьем при получении нижних оценок сложности. Вообще, известным фактом в теории информационного поиска является так называемая тривиальная нижняя оценка [6], которая говорит, что временная сложность задач поиска не меньше, чем время, необходимое на перечисление ответа. Получение же нижних оценок, отличных от тривиальной нижней оценки — задача, вообще говоря, не тривиальная. В данной работе для задач поиска с отношением "не меньше по-компонентно"удалось получить нижнюю оценку, превосходящую тривиальную нижнюю оценку. Кроме того, было доказано существование задач поиска, для которых эта оценка асимптотически не улучшаема.

Автор выражает благодарность В.Б.Кудрявцеву и А.С.Подколзину за поддержку в работе.

2 Основные понятия и формулировка результатов

Мы будем использовать терминологию и обозначения из работы [7]. Напомним понятие информационной сети с переключателями (ИСП) и другие необходимые понятия из [7].

Пусть X — множество запросов, причем на X определено вероятностное пространство $\langle X, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, где σ — алгебра подмножеств множества X, $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на σ; Y — множество записей (объектов поиска); ρ — бинарное отношение на $X \times Y$, называемое отношением поиска; тройку $S = \langle X, Y, \rho \rangle$ (или пятерку $S = \langle X, Y, \rho, \sigma, \mathbf{P} \rangle$, если мы хотим подчеркнуть какое именно вероятностное пространство над X используется) будем называть *типом* или иногда более развернуто *типом задач информационного поиска*; тройку $I = \langle X, V, \rho \rangle$, где V — некоторое конечное подмножество множества Y, в дальнейшем называемое *библиотекой*, будем называть задачей информационного поиска (ЗИП) типа $S = \langle X, Y, \rho \rangle$ (или ЗИП, принадлежащей типу S, и обозначать $I \in S$), и будем считать, что задача $I = \langle X, V, \rho \rangle$ состоит в перечислении для произвольно взятого запроса $x \in X$ всех тех и только тех записей из V, которые находятся в отношении ρ с запросом x, т.е. удовлетворяют запросу x; $O(y, \rho) = \{x \in X : x\rho y\}$ — тень записи $y \in Y$; $N_f = \{x \in X : f(x) = 1\}$, где f — одноместный предикат, определенный на X, т.е. $f : X \to \{0, 1\}$; $\chi_{y,\rho} : X \to \{0, 1\}$ такая, что $N_{\chi_{y,\rho}} = O(y, \rho)$ — характеристическая функция записи y; F — множество символов одноместных предикатов, определенных на множестве X, называемое базовым множеством предикатов; G — множество символов одноместных переключателей, определенных на множестве X. Под переключателями будем понимать функции, областью значений которых являются конечные подмножества натурального ряда.

Пару $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$ назовем базовым множеством.

Если n — натуральное число, а $g(x)$ — некий переключатель, то через $\xi_g^n(x)$ обозначим предикат, определенный на X , такой, что

$$N_{\xi_g^n} = \{x \in X : g(x) = n\}.$$

Обозначим

$$\widehat{G} = \{\xi_g^n : g \in G, n \in \mathbf{N}\}.$$

Определение понятия ИСП разбивается на два этапа. На первом этапе раскрывается структурная (схемная) часть этого понятия, на втором – функциональная.

Определение ИСП с точки зрения ее структуры.

Пусть нам дана ориентированная многополюсная сеть.

Выделим в ней один полюс и назовем его *корнем*, а остальные полюса назовем *листьями*.

Выделим в сети некоторые вершины и назовем их *точками переключения* (полюса могут быть точками переключения).

Если β — вершина сети, то через ψ_β обозначим *полустепень исхода* вершины β .

Каждой точке переключения β сопоставим некий символ из G, такой, что максимальное значение переключателя, соответствующего этому символу, не превышает ψ_β. Это соответствие назовем нагрузкой точек переключения.

Для каждой точки переключения β ребрам, из нее исходящим, поставим во взаимооднозначное соответствие числа из множества $\{\overline{1, \psi_\beta}\}$. Эти ребра назовем переключательными, а это соответствие — нагрузкой переключательных ребер.

Ребра, не являющиеся переключательными, назовем *предикатными*.

Каждому предикатному ребру сети сопоставим некоторый символ из множества F. Это соответствие назовем *нагрузкой предикатных ребер*.

Сопоставим каждому листу сети некоторую запись из множества Y. Это соответствие назовем *нагрузкой листьев.*

Полученную нагруженную сеть назовем *информационной сетью с переключателями* над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle F, G \rangle$.

Определение функционирования ИСП.

Пусть нам дана ИСП U .

Последовательность ориентированных ребер сети (α_1, α_2), (α_2, α_3), $\ldots$, (α_{m-1}, α_m) назовем *ориентированной цепью* от вершины α_1 к вершине α_m.

Если c ребро сети, то через $[c]$ обозначим его нагрузку.

Проводимостью ребра (α, β) назовем предикат, равный $[(\alpha, \beta)]$, если ребро предикатное и $\xi_g^{[(\alpha,\beta)]}$, если ребро переключательное, где g — переключатель, соответствующий вершине α.

Проводимостью ориентированной цепи назовем конъюнкцию проводимостей ребер цепи.

Если зафиксировать запрос x, то цепь, проводимость которой на запросе x равна 1, назовем *проводящей цепью* на запросе x.

В ИСП по аналогии с контактными схемами введем для каждой пары вершин α и β *функцию проводимости* $f_{\alpha\beta}$ от вершины α к вершине β следующим образом:

- если $\alpha = \beta$, то $f_{\alpha\beta}(x) \equiv 1$ $(x \in X)$;
- если $\alpha \neq \beta$ и не существует в ИСП ориентированных цепей от α к β, то $f_{\alpha\beta}(x) \equiv 0$;
- если $\alpha \neq \beta$ и множество ориентированных цепей от α к β не пусто, то $f_{\alpha\beta}(x)$ равно дизъюнкции проводимостей всех ориентированных цепей от α к β.

Функцию проводимости от корня ИСП к некоторой вершине β ИСП назовем *функцией фильтра* вершины β и обозначим $\varphi_\beta(x)$.

Через $\mathcal{R}(U), \mathcal{P}(U), \mathcal{L}(U)$ (или просто $\mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{L}$) обозначим множества вершин, точек переключения и листьев сети U соответственно.

Пусть $\mathcal{N}$ — некоторая подсеть (т.е. произвольное подмножество вершин и ребер) ИСП U. Через $\langle \mathcal{N} \rangle$ обозначим множество записей, соответствующих листьям этой подсети (в частности, если α — некоторый лист сети U, то под $\langle \alpha \rangle$ будем понимать запись, соответствующую листу α).

Будем говорить, что ИСП U реализует функцию $\mathcal{J} : X \to 2^Y$, называемую функцией ответа сети U и определяемую соотношением :

$$\mathcal{J}(x) = \langle \{\alpha \in \mathcal{L}(U) : \varphi_\alpha(x) = 1\} \rangle.$$

Понятие ИСП полностью определено.

В случае, когда базовое множество переключателей G пусто, т.е. в сетях нет переключателей, то ИСП называются *информационными сетями с дублированием листьев* (ИСД).

В данной статье мы будем в основном исследовать именно ИСД.

Скажем, что ИСП U разрешает ЗИП $I = \langle X, V, \rho \rangle$, если для $\forall x \in X$

$$\mathcal{J}(x) = \{y \in V : x\rho y\}.$$

Сложностью ИСП U на запросе x назовем число

$$T(U, x) = b \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}} \psi_\beta \cdot \varphi_\beta(x) + a \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{P}} \varphi_\beta(x),$$

где константа a характеризует сложность вычисления одного переключателя, а константа b — одного предиката.

Далее всюду будем предполагать, что мы находимся в условиях леммы 1 из [7], т.е. будем считать, что алгебра σ содержит все множества N_f, где $f \in F \cup \widehat{G}$.

При этих условиях $T(U, x)$ — случайная величина по x, и можно ввести понятия сложности сети и сложности ребра сети.

Сложностью ИСП U назовем математическое ожидание величины $T(U, x)$, т.е. число

$$T(U) = \mathbf{M}\, T(U, x).$$

Если (β, α) — ребро ИСП, то *сложностью этого ребра* назовем число

- $b \cdot \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})$ — если (β, α) — предикатное ребро;
- $a \cdot \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta})/\psi_\beta$ — если это ребро переключательное.

Легко видеть, что сложность ИСП равна сумме сложностей ребер ИСП, т.е.

$$T(U) = b \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}} \psi_\beta \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta}) + a \cdot \sum_{\beta \in \mathcal{P}} \mathbf{P}(N_{\varphi_\beta}).$$

Далее всюду будем предполагать, что $a = b = 1$.

Пусть нам дана некая ЗИП I. *Сложностью задачи I при базовом множестве $\mathcal{F}$* назовем число

$$T(I, \mathcal{F}) = \inf\{T(U) : U \in \mathcal{U}(I, \mathcal{F})\},$$

где $\mathcal{U}(I, \mathcal{F})$ — множество всех ИСП над базовым множеством $\mathcal{F}$, разрешающих ЗИП I.

Скажем, что базовое множество $\mathcal{F}$ полно для типа S, если для любой ЗИП I типа S $\mathcal{U}(I, \mathcal{F}) \neq \emptyset$.

Пусть M некоторое множество. Через $|M|$ обозначим число элементов во множестве M, называемое мощностью множества M.

Будем писать $\alpha(n) = \bar{o}(1)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(n) = 0$.

Будем писать $A(n) = \bar{o}(B(n))$, если $A(n) = B(n) \cdot \bar{o}(1)$.

Через $\binom{n}{k}$ будем обозначать число сочетаний из n элементов по k.

Под отношением частичного порядка $\succeq$ на $X \times X$ будем понимать отношение, для любых $x, y, z \in X$ удовлетворяющее условиям

- рефлексивности $x \succeq x$;
- транзитивности $(x \succeq y) \& (y \succeq z) \to (x \succeq z)$;
- антисимметричности $(x \succeq y) \& (y \succeq x) \to (x = y)$.

Будем рассматривать следующий тип задач поиска

$$S_p = \langle X, X, \succeq \rangle,$$

где X — некоторое конечное множество, $\succeq$ — некоторое отношение частичного порядка на $X \times X$.

Пусть $a \in X$, $R_a = \{x \in X : x \succeq a\}$, K_a — функция, действующая из X в $\{0, 1\}$ такая, что $N_{K_a} = R_a$. Отметим, что $K_a(x)$ есть характеристическая функция записи a. Пусть $\mathcal{K} = \{K_a(x) : a \in X\}$, $\mathcal{M} = \{\bigvee\limits_{i=1}^{n} K_{a_i}(x) : a_i \in X, n \in \mathbf{N}\}$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Пусть базовое множество имеет вид $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$. Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F}$. Подмножество $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ вершин сети U назовем *характерным*, если существует такая запись $a \in X$, что $\bigvee\limits_{i=1}^{m} \varphi_{\beta_i} = K_a$.

Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$. Пусть $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ — характерное подмножество вершин сети U такое, что $\bigvee\limits_{i=1}^{m} \varphi_{\beta_i} = K_a$. Если в сети U существует такая цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $\mathcal{B}$, что проводимость этой цепи равна K_a, то эту цепь назовем *главной цепью характерного множества* $\mathcal{B}$.

Теорема 1 (о существовании главных цепей) *Пусть U — произвольная ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное характерное подмножество вершин сети U. Тогда в сети U существует главная цепь множества $\mathcal{B}$.*

Следствие 1 *Пусть $I = \langle X, V, \succeq \rangle$ — ЗИП типа S_p. Пусть U — ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}, \emptyset \rangle$, разрешающая ЗИП I. Тогда для любой записи $y \in V$ такой, что $O(y, \succeq) \neq \emptyset$, в сети U существует цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $L_U(y)$, такая, что проводимость этой цепи равна $\chi_{y,\succeq}$.*

Рассмотрим следующий тип задач поиска:

$$S_b = \langle B^n, B^n, \overset{b}{\succeq}, \sigma, \mathbf{P} \rangle,$$

где B^n — *единичный n-мерный куб*, то есть

$$B^n = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \ \alpha_i \in \{0,1\} \ (i = \overline{1,n})\},$$

$\overset{b}{\succeq}$ — отношение поиска на $B^n \times B^n$, определяемое следующим соотношением

$$(x_1, \ldots, x_n) \overset{b}{\succeq} (y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_i \geq y_i, \ i = \overline{1,n},$$

σ — алгебра подмножеств B^n, представляющая собой множество всех подмножеств B^n, $\mathbf{P}$ — равномерная вероятностная мера на σ, то есть такая мера, что для $\forall x \in B^n \ \ \mathbf{P}(x) = 1/2^n$ и $\forall A \subseteq B^n \ \ \mathbf{P}(A) = |A|/2^n$.

Задачи поиска, принадлежащие данному типу, есть разновидность задач, именуемых в литературе задачами включающего поиска (см., например, [5]), поэтому тип S_b мы назовем *типом включающего поиска*, а задачи, принадлежащие этому типу, — *задачами включающего поиска*.

Напомним, что в соответствии с терминологией [8] *весом набора* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ называют число его координат, равных 1. Формула $x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$, где & - знак конъюнкции, $\sigma_k \in \{0,1\}$, $x_{i_k}^0 = \overline{x}_{i_k}$, $x_{i_k}^1 = x_{i_k}$, $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k = 1, 2, \ldots, r$ ($r \geq 1$ и $n \geq 1$), называется *конъюнкцией над множеством переменных* $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Если $x_{i_j} \neq x_{i_k}$ при $j \neq k$, то конъюнкция называется *элементарной*. Элементарная конъюнкция называется *монотонной*, если она не содержит отрицаний переменных. Множество элементарных монотонных конъюнкций от n переменных будем обозначать через $\mathcal{K}^n$.

Функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов α и β из B^n таких, что $\alpha \overset{b}{\succeq} \beta$, имеет место неравенство $f(\alpha) \geq f(\beta)$. Дизъюнкция элементарных монотонных конъюнкций есть монотонная функция. Множество монотонных булевых функций от n переменных будем обозначать через $\mathcal{M}^n$.

Рассмотрим произвольную запись $y \in B^n$. Пусть $\{i_1, \ldots, i_k\}$ есть множество номеров координат вектора y, которые равны 1. Нетрудно заметить, что

$$\chi_{y, \overset{b}{\succeq}}(x_1, \ldots, x_n) = x_{i_1} \& x_{i_2} \& \ldots \& x_{i_k},$$

т.е. характеристическая функция записи y является элементарной монотонной конъюнкцией.

Отсюда согласно [7, теорема 1] сеть, разрешающая некоторую задачу включающего поиска, представляет собой сеть, реализующую некоторую систему элементарных монотонных конъюнкций. Отсюда согласно [6, теорема 2] следует, что каждое из базовых множеств $\langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, $\langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$ и $\langle X^n, \emptyset \rangle$ является полным для типа S_b.

Теорема 2 (нижняя оценка) *Пусть* $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$ — *ЗИП типа* S_b. *Пусть базовое множество имеет вид* $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, *где* $\mathcal{M}^n$ — *множество монотонных булевых функций. Тогда*

$$T(I, \mathcal{F}) \geq 2 \cdot \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \overset{b}{\succeq})) - t_0,$$

где t_0 — *число записей веса 0 в библиотеке* V $(t_0 \in \{0, 1\})$.

Теорема 3 (верхняя оценка) *Пусть* $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$ — *ЗИП типа* S_b. *Пусть базовое множество имеет вид* $\mathcal{F} = \langle \mathcal{K}^n, \emptyset \rangle$, *где* $\mathcal{K}^n$ — *множество монотонных элементарных конъюнкций. Пусть* $|V| = k$ *и* m — *такое число, что* $2\binom{n}{m} < k \leq 2\binom{n}{m+1}$. *Тогда*

$$T(I, \mathcal{F}) \leq 1 + \sum_{i=1}^{m} 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{-m} k.$$

Теорема 3 позволяет нам показать, что существуют библиотеки, для которых нижняя оценка теоремы 2 асимптотически не улучшаема.

Следствие 2 (асимптотическая неулучшаемость нижней оценки) *Если базовое множество имеет вид* $\mathcal{F} = \langle F, \emptyset \rangle$, *где* $F \subseteq \mathcal{M}^n$ *и* $\mathcal{K}^n \subseteq F$, *то существуют такие ЗИП* $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$ *типа* S_b, *что*

$$T(I, \mathcal{F}) = 2 \cdot \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \overset{b}{\succeq}))(1 + \bar{o}(1)).$$

3 Теорема о существовании главных цепей

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, докажем некоторые свойства частичных порядков.

Свойство 1 *Если* $a, b \in X$, $K_b \in \mathcal{K}$ *и* $K_b(a) = 1$, *то* $N_{K_a} \subseteq N_{K_b}$.

Доказательство. Так как $K_b(a) = 1$, то $a \succeq b$. $\forall c \in N_{K_a} \Rightarrow c \succeq a \succeq b$. Отсюда следует, что $c \succeq b$ и, следовательно, $c \in N_{K_b}$. Что и требовалось доказать.

Свойство 2 *Если* $a \in X$, $f \in \mathcal{M}$ *и* $f(a) = 1$, *то* $N_{K_a} \subseteq N_f$.

Доказательство. Пусть $f = \bigvee_{i=1}^{n} K_{a_i}$. Так как $f(a) = 1$, то существует K_{a_i} такое, что $K_{a_i}(a) = 1$, но тогда согласно свойству 1 $N_{K_a} \subseteq N_{K_{a_i}}$ и, следовательно, $N_{K_a} \subseteq N_f$. Что и требовалось доказать.

Свойство 3 *Пусть* $a \in X$ *и* $\bigvee_{i=1}^{n} f_i = K_a$, *где* $f_i \in \mathcal{M}$. *Тогда* $\exists i : f_i = K_a$.

Доказательство. Так как $K_a(a) = 1$, то $\exists i$: $f_i(a) = 1$. Тогда согласно свойству 2 имеем $N_{K_a} \subseteq N_{f_i}$, но из условия следует, что $N_{f_i} \subseteq N_{K_a}$, следовательно $N_{K_a} = N_{f_i}$, то есть $K_a = f_i$. Что и требовалось доказать.

Свойство 4 *Если* $a \in X$, $f = \bigwedge_{i=1}^{n} f_i$, *где* $f_i \in \mathcal{M}$, *и* $f(a) = 1$, *то* $N_{K_a} \subseteq N_f$.

Доказательство. $N_f = \bigcap_{i=1}^{n} N_{f_i}$. Так как $a \in N_f$, то $a \in N_{f_i}$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Отсюда согласно свойству 2 имеем $N_{K_a} \subseteq N_{f_i}$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $N_{K_a} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} N_{f_i} = N_f$. Что и требовалось доказать.

Точку $a \in R$ назовем *нижней единицей множества* $R \subseteq X$, если не существует точки $b \in R \setminus \{a\}$ такой, что $a \succeq b$.

Свойство 5 *Если* $f = \bigwedge_{i=1}^{n} f_i$, *где* $f_i \in \mathcal{M}$, *то либо* $f \in \mathcal{M}$, *либо* $f \equiv 0$.

Доказательство. $N_f = \bigcap_{i=1}^{n} N_{f_i}$. Допустим, что $\bigcap_{i=1}^{n} N_{f_i} \neq \emptyset$, то есть $f \not\equiv 0$. Просмотрим все точки множества N_f (а их конечное число) и для каждой проверим, является ли она нижней единицей? Пусть $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — множество всех нижних единиц множества N_f, которое мы в результате получили. Легко видеть, что для любой точки $a \in N_f$ либо $a \in M$, либо существует $a_i \in M$ такое, что $a \succeq a_i$. Из того, что $a \succeq a_i$ следует $K_{a_i}(a) = 1 \Rightarrow a \in N_{K_{a_i}}$. Следовательно, $N_f \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} N_{K_{a_i}}$. С другой стороны, согласно свойству 4 (используем то, что $f(a_i) = 1$) для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ имеем $N_{K_{a_i}} \subseteq N_f$. Следовательно, $N_f = \bigcup_{i=1}^{m} N_{K_{a_i}}$ и, значит, $f \in \mathcal{M}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим некоторую цепь C сети U. Обозначим через f_C проводимость цепи C. Пусть C такая цепь, что $f_C \not\equiv 0$. Так как f_C равна конъюнкции нагрузок ребер цепи C, то согласно свойству 5 $f_C \in \mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ - множество цепей, ведущих из корня в вершины множества $\mathcal{B}$. Так как $\mathcal{B}$ — характерное множество, то существует такая запись $a \in X$, что

что $\bigvee\limits_{\beta\in\mathcal{B}} \varphi_\beta = \bigvee\limits_{C\in\mathcal{C}_\mathcal{B}} f_C = K_a$. Отсюда согласно свойству 3 существует цепь $C' \in \mathcal{C}_\mathcal{B}$ такая, что $f_{C'} = K_a$. Эта цепь C' и есть главная цепь множества $\mathcal{B}$. Что и требовалось доказать.

Доказательство следствия 1.

Так как ИСД U разрешает ЗИП I, то согласно [7, теорема 1] $\bigvee\limits_{\alpha\in L_U(y)} \varphi_\alpha = \chi_{y,\succeq} = K_y$. Следовательно, множество $L_U(y)$ есть характерное множество, и согласно теореме 1 в сети U существует главная цепь множества $L_U(y)$. Что и требовалось доказать.

4 Нижняя оценка

Напомним, что в соответствии с терминологией [8] *гранью* единичного n-мерного куба B^n называется множество

$$B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in B^n : \alpha_{i_1} = \sigma_1,\ldots,\alpha_{i_k} = \sigma_k\}.$$

Множество вершин куба, имеющих вес k, называется *k-м слоем куба* B^n. *Номером набора* $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in B^n$ назовем число $||\alpha|| = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{n-i} \cdot \alpha_n$. Будем считать, что наборы в слое куба упорядочены в порядке возрастания их номеров. Множество, состоящее из m первых наборов k-го слоя куба B^n, будем называть *начальным отрезком* длины m этого слоя.

Нам понадобится теорема Краскала–Катоны, приведенная, например, в работах [9, 10]. Переформулируем ее в удобных для нас терминах.

Теорема 4 (Краскала–Катоны) *Пусть B^n_m — m-ый слой куба B^n и $A \subseteq B^n_m$. Пусть $R(A) = \{\alpha \in B^n_{m+1} : (\exists\beta \in A : \alpha\overset{b}{\succeq}\beta)\}$. Тогда минимум $|R(A)|$ достигается, если A — начальный отрезок слоя B^n_m, причем в этом случае $R(A)$ начальный отрезок слоя B^n_{m+1}.*

Если $A \in B^n$, то обозначим $O(A, \overset{b}{\succeq}) = \bigcup\limits_{y\in A} O(y, \overset{b}{\succeq})$.

Приведем одно простое следствие.

Следствие 3 (теоремы Краскала–Катоны) *Пусть $A \subseteq B^n_m$, тогда $|O(A, \overset{b}{\succeq})|$ достигает минимума, если A — начальный отрезок слоя B^n_m.*

Лемма 1 *Пусть $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq}\rangle$ — ЗИП типа S_b. Пусть U — разрешающая ЗИП I ИСД над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset\rangle$. Тогда существует такое разбиение библиотеки V на непересекающиеся части, что*

- *каждая часть содержит записи одного веса, и этот вес назовем весом части;*

- *каждой части веса $m > 0$ и мощности t можно поставить в соответствие такую совокупность ребер сети U, что сумма сложностей ребер из этой совокупности не меньше, чем $t \cdot 2^{1-m}$, причем образы различных частей при этом соответствии не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $V = \{y_1, \ldots, y_k\}$.

Отметим, что если $y_i \in V$ — запись веса m, то $|O(y_i, \overset{b}{\succeq})| = 2^{n-m}$, так как $O(y_i, \overset{b}{\succeq})$ — $(n-m)$-мерная грань куба B^n.

Обозначим через A^l_m начальный отрезок длины l m-го слоя куба B^n. Легко видеть, что если $l \leq n - m + 1$, то $|O(A^l_m, \overset{b}{\succeq})| = 2^{n-m+1} \cdot (1 - 2^{-l})$.

Так как для любой записи $y_i \in V$ выполняется $O(y_i, \overset{b}{\succeq}) \neq \emptyset$, то согласно следствию 1 из теоремы 1 о существовании главных цепей для любой записи $y_i \in V$ в сети U существует такая цепь, ведущая из корня в какую-либо вершину множества $L_U(y_i)$, что проводимость этой цепи равна $\chi_{y_i, \overset{b}{\succeq}}$. Обозначим эту цепь через C_i и будем называть ее главной цепью записи y_i. Лист из $L_U(y_i)$, в который ведет эта цепь, будем обозначать α_i $(i = \overline{1,k})$.

Рассмотрим произвольную запись $y_i \in V$ $(i \in \{\overline{1,k}\})$, которая на момент рассмотрения не попала ни в какую часть разбиения. Пусть ее вес равен $m > 0$. Пусть $\beta_i \neq \alpha_i$ — ближайшая к α_i вершина в цепи C_i, через которую проходит также главная цепь какой-то другой записи. Такая вершина β_i обязательно существует, в крайнем случае β_i — корень сети U, так как все главные цепи начинаются в корне. Пусть γ_i — вершина сети, в которую ведет ребро цепи C_i, исходящее из β_i.

Разберем возможные случаи.

Случай 1. Пусть β_i — корень сети U. Тогда ребро (β_i, γ_i) имеет сложность 1. Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i, и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i).

Случай 2. Предположим теперь, что β_i не является корнем сети U, но совпадает с каким-либо листом α_j, где $j \in \{\overline{1,n}\} \setminus \{i\}$. Легко заметить, что так как C_i и C_j главные цепи, то вес записи y_j больше веса записи y_i и, следовательно, сложность ребра (β_i, γ_i) не меньше, чем 2^{1-m}. Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i, и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i).

Случай 3. Пусть теперь β_i не является корнем сети U и не совпадает ни с каким листом α_j. Пусть $C_{j_1}, \ldots, C_{j_q}$ — множество главных цепей записей, проходящих через вершину β_i.

Случай 3.1 Пусть среди записей $y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}$ существует запись y_{j_s}, вес которой больше m. Тогда сложность вершины β_i не меньше, чем $\mathbf{P}(O(y_{j_s}, \overset{b}{\succeq})) =$

$|O(y_{j_s}, \overset{b}{\succeq})|/2^n \geq 2^{1-m}$ и, следовательно, сложность ребра (β_i, γ_i) не меньше, чем 2^{1-m}. Мы заведем новую часть разбиения, состоящую из одной записи y_i, и сопоставим этой части ребро (β_i, γ_i).

Случай 3.2 Предположим, что среди записей $y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}$ не существует записи, вес которой больше m. Пусть в множестве $\{y_{j_1}, \ldots, y_{j_q}\}$ имеется t записей веса m таких, что в главных цепях этих записей между вершиной β_i и листом, в котором заканчивается цепь, нет вершин пересечения с другими главными цепями записей. Понятно, что $t \geq 1$. Обозначим это множество записей через V' и объявим его новой частью разбиения. Понятно, что все записи из V' до данного момента еще не рассматривались, так как в противном случае запись y_i уже оказалась бы в некоторой части разбиения. Понятно также, что для каждой записи $y_s \in V'$ β_i — ближайшая к α_s вершина в цепи C_s, через которую проходит главная цепь какой-то другой записи, причем, если γ_s — вершина, в которую ведет ребро цепи C_s, исходящее из β_i, то ребро (β_i, γ_s) не принадлежит никакой другой цепи, кроме C_s. Сопоставим V' совокупность ребер, состоящую из t ребер, исходящих из вершины β_i и принадлежащих главным цепям записей из V', и t' ребер, входящих в вершину β_i и принадлежащих главным цепям записей из V' ($t' \leq t$). Заметим, что сумма сложностей последних t' ребер не меньше, чем $\mathbf{P}(O(V', \overset{b}{\succeq}))$, и сложность вершины β не меньше, чем $\mathbf{P}(O(V', \overset{b}{\succeq}))$, следовательно, сумма сложностей ребер совокупности, сопоставленной части V', не меньше, чем $(t+1) \cdot \mathbf{P}(O(V', \overset{b}{\succeq})) = 2^{-n}(t+1) \cdot |O(V', \overset{b}{\succeq})|$. Согласно следствию теоремы Краскала–Катоны $|O(V', \overset{b}{\succeq})| \geq |O(A_m^t, \overset{b}{\succeq})|$. Следовательно, если $t \leq n - m + 1$, то

$$\begin{aligned}
2^{-n}(t+1) \cdot |O(V', \overset{b}{\succeq})| &\geq 2^{-n}(t+1) \cdot |O(A_m^t, \overset{b}{\succeq})| = \\
&= 2^{-n}(t+1)(1 - 2^{-t})2^{n-m+1} = \\
&= t \cdot 2^{1-m} + 2^{1-m}(1 - (t+1)2^{-t}) \geq t \cdot 2^{1-m}.
\end{aligned}$$

При $t > n - m + 1$, поскольку для любой записи $y \in V'$ справедливо $O(y, \overset{b}{\succeq}) \setminus O(V' \setminus y, \overset{b}{\succeq}) \neq \emptyset$, то

$$\begin{aligned}
2^{-n}(t+1) \cdot |O(V', \overset{b}{\succeq})| &\geq 2^{-n}(t+1) \times \\
&\quad \times (|O(A_m^{n-m+1}, \overset{b}{\succeq})| + t - n + m - 1) \geq \\
&\geq (t+1) \cdot 2^{1-m} > t \cdot 2^{1-m}.
\end{aligned}$$

Теперь осталось проверить, что указанное соответствие различным частям разбиения сопоставляет различные непересекающиеся множества ребер.

Отметим, что по ходу построения соответствия мы для каждой записи $y_i \in V$ ($i \in \{\overline{1, k}\}$), нашли свои вершины β_i и γ_i, описанные выше.

Докажем одно полезное свойство.

Свойство 6 *Если β_i и γ_i — описанные выше вершины, соответствующие записи y_i, то ребро (β_i, γ_i) принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i.*

Доказательство. Так как для любой записи $y_i \in V$ совокупность ребер, связанная с записью y_i, содержит только ребра либо входящие в β_i, либо исходящие из β_i, то ребро (β_i, γ_i) может попасть в другую совокупность ребер только в том случае, если вершина γ_i совпадает с какой-то другой вершиной β_s. Итак пусть существует $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ такое, что $\gamma_i = \beta_s$. Тогда γ_i принадлежит цепи C_s, отличной от C_i, а так как γ_i в цепи C_i ближе к листу α_i, то согласно определению вершины β_i вершина γ_i должна совпадать с вершиной α_i, а это сразу означает, что каждая из записей y_s, вершина β_s которой совпадает с γ_i, подпадает под случай 2, и, значит, содержащая y_s часть состоит из одной записи y_s и ей соответствует одно единственное ребро (β_s, γ_s), не совпадающее с (β_i, γ_i).

Тем самым, свойство 6 доказано.

Возьмем произвольную запись $y_i \in V$. Покажем, что совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i, не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1. Пусть существует $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ такое, что $\beta_i = \gamma_s$.

Тогда по тем же соображениям, которые описаны в доказательстве свойства 6, запись y_i подпадает под случай 2, и, значит, содержащая y_i часть разбиения состоит из одной записи y_i и ей соответствует одно единственное ребро (β_i, γ_i), которое согласно свойству 6 принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i.

Вариант 2. Пусть для любого $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ выполняется $\beta_i \neq \gamma_s$.

Тогда возможны следующие подварианты.

Вариант 2.1 Для любого $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ вершина β_i не совпадает с вершиной β_s.

Отсюда следует, что все ребра, входящие в β_i, не принадлежат никаким совокупностям ребер, кроме, быть может, совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i. Кроме того, отсюда следует, что либо запись y_i подпадает под случай 3.1 алгоритма построения соответствия, и тогда части разбиения, состоящей из одной записи y_i, сопоставляется одно единственное ребро (β_i, γ_i), либо запись y_i подпадает под случай 3.2 алгоритма построения соответствия, где параметр t принимает значение 1, и тогда части разбиения, состоящей из одной записи y_i, сопоставляется два ребра: ребро (β_i, γ_i) и ребро, входящее в β_i и принадлежащее цепи C_i. Следовательно, согласно приведенному выше замечанию и свойству 6 и в этом варианте совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i, не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

Вариант 2.2 Существует $s \in \{\overline{1,k}\} \setminus \{i\}$ такое, что $\beta_i = \beta_s$.

Пусть $V' = \{y_{j_1}, \ldots, y_{j_l}\}$ — подмножество записей из V таких, что $\beta_{j_r} = \beta_i$ $(r = \overline{1,l})$. Так как мы находимся в условиях варианта 2, то все ребра, входящие в β_i, не принадлежат никаким совокупностям ребер, кроме, быть может, совокупностям ребер, соответствующим частям разбиения, содержащим записи из V'.

Возможны следующие два подварианта.

Вариант 2.2.1 В множестве V' есть запись с весом большим, чем вес записи y_i.

Тогда запись y_i подпадает под случай 3.1 алгоритма построения соответствия, и части разбиения, состоящей из одной записи y_i, сопоставляется одно единственное ребро (β_i, γ_i), которое согласно свойству 6 принадлежит только совокупности ребер, соответствующей части разбиения, содержащей запись y_i.

Вариант 2.2.2 В множестве V' нет записей с весом большим, чем вес записи y_i.

Тогда запись y_i подпадает под случай 3.2 алгоритма построения соответствия. Пусть $V'' \subset V'$ — множество записей вес, которых совпадает с весом y_i. Согласно алгоритму построения соответствия множество V'' образует одну часть разбиения, которой сопоставляется совокупность ребер, входящих в β_i и исходящих из β_i и принадлежащих главным цепям записей из V''. Согласно свойству 6 и сделанному в варианте 2.2 замечанию эти ребра не принадлежат образам других частей разбиения.

Таким образом, мы перебрали все возможные случаи и показали, что совокупность ребер, соответствующая части разбиения, содержащей запись y_i, не пересекается с образами никаких других частей разбиения.

В силу произвольности выбора записи y_i это доказывает, что образы различных частей разбиения взаимно не пересекаются.

Тем самым, лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Обозначим через t_i — число записей веса i в библиотеке V $(i = \overline{1,n})$.

Возьмем произвольную ИСД U над базовым множеством $\mathcal{F} = \langle \mathcal{M}^n, \emptyset \rangle$, разрешающую ЗИП I. (Такая ИСД обязательно существует, так как $\mathcal{F}$ полно для типа S_b.)

Согласно лемме 1 библиотеку V можно разбить на такие непересекающиеся части, что каждая часть содержит записи одного веса, и каждой части веса $i > 0$ и мощности t сопоставляется такая совокупность ребер сети U, что сумма сложностей ребер из этой совокупности не меньше, чем $t \cdot 2^{1-m}$, причем образы различных частей при этом соответствии не пересекаются. Отсюда следует, что

$$T(U) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i 2^{1-i}.$$

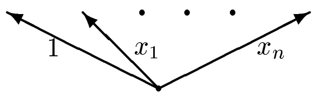

Рис. 1: Универсальный многополюсник для множества $\mathcal{K}_1^n$

Теперь предположим, что в библиотеке V есть запись $y_0 = (0, \dots, 0)$ веса 0. Обозначим через C_0 главную цепь, ведущую из корня в множество $L_U(y_0)$ (согласно теореме 1 такая цепь существует). Пусть α_0 — лист, в котором заканчивается цепь C_0, а ребро (β_0, α_0) — последнее ребро цепи C_0. Так как запись y_0 удовлетворяет всем запросам из B^n, то все запросы проходят через ребро (β_0, α_0), и, значит, сложность этого ребра равна 1. Остается заметить, что ребро (β_0, α_0) не принадлежит ни одной совокупности ребер, соответствующей части разбиения веса, большего 0.

Таким образом

$$T(U) \geq t_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i 2^{1-i} = 2 \cdot \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \overset{b}{\succeq})) - t_0.$$

Отсюда в силу произвольности ИСД U вытекает утверждение теоремы. Что и требовалось доказать.

Замечание. Если мы находимся в условиях теоремы 2, то нижняя оценка, получаемая из этой теоремы, практически в два раза лучше тривиальной нижней оценки.

5 Верхняя оценка

Доказательство теоремы 3.

Обозначим через $\mathcal{K}_l^n$ — множество всех монотонных элементарных конъюнкций, содержащих не более l переменных (или другими словами, имеющих длину не более l).

Построим по индукции информационную сеть U_l^n, реализующую как функции фильтров каких-либо вершин все функции из $\mathcal{K}_l^n$.

Базис индукции. $l = 1$. $\mathcal{K}_1^n = \{1, x_1, \dots, x_n\}$.

U_1^n будет иметь вид, изображенный на рисунке 1, где жирной точкой изображен корень сети, а на концах ребер реализуются функции из $\mathcal{K}_1^n$.

Шаг индукции. Пусть U_{l-1}^n — сеть, реализующая все функции из $\mathcal{K}_{l-1}^n$. Сеть U_l^n будем строить, добавляя к U_{l-1}^n вершины и ребра, чтобы реализовать функции из $\mathcal{K}_l^n \setminus \mathcal{K}_{l-1}^n$, следующим образом. Возьмем произвольную монотонную элементарную конъюнкцию длины l $x_{i_1} \& \cdots \& x_{i_l}$. В сети U_{l-1}^n

найдем вершину, на которой реализуется функция $x_{i_1}\& \cdots \& x_{i_{l-1}}$ и выпустим из нее ребро, которому припишем переменную x_{i_l}. На вершине, в которое ведет это ребро, будет реализовываться как функция фильтра функция $x_{i_1}\& \cdots \& x_{i_l}$. Перебрав все функции из $\mathcal{K}_l^n \setminus \mathcal{K}_{l-1}^n$ и проделав для каждой эту операцию, получим требуемую сеть U_l^n, реализующую все функции из $\mathcal{K}_l^n$.

Отметим, что на первом ярусе сети U_l^n находится $n+1 = \binom{n}{1}+1$ ребер, и сложность каждого из них равна 1 (первый ярус — это ребра, исходящие из корня), а на i-ом ярусе ($i \geq 2$) находится $\binom{n}{i}$ ребер, и сложность каждого из них равна 2^{1-i} (i-ый ярус — это ребра, исходящие из концов ребер $(i-1)$-го яруса). Таким образом сложность сети U_l^n равна

$$T(U_l^n) = 1 + \sum_{i=1}^{l} \binom{n}{i} 2^{1-i}.$$

Вернемся теперь к нашей задаче I.

Для любой записи $y \in V$ характеристическая функция этой записи есть некоторая монотонная элементарная конъюнкция, которую будем обозначать K_y.

Информационную сеть U, разрешающую задачу I, будем строить следующим образом. Возьмем сеть U_m^n, описанную выше. Возьмем произвольную запись $y \in V$. Возможны два случая.

1. Характеристическая функция этой записи K_y имеет длину, не превышающую m. Тогда в сети U_m^n находим вершину, на которой реализуется функция K_y, объявляем эту вершину листом и приписываем ей запись y.

2. Длина элементарной конъюнкции K_y больше, чем m. Пусть $K_y = x_{i_1}\& \cdots \& x_{i_l}$, где $l > m$. Тогда найдем в сети U_m^n вершину, на которой реализуется функция $x_{i_1}\& \cdots \& x_{i_m}$, выпустим из этой вершины ребро, припишем этому ребру функцию $x_{i_{m+1}}\& \cdots \& x_{i_l}$, объявим конец этого ребра листом и пришем ему запись y.

Проделав эту операцию для каждой записи $y \in V$, мы получим сеть U, которая, как нетрудно заметить, согласно [7, теорема 1] разрешает задачу I.

Оценим сложность сети U. Сеть U содержит в себе как подсеть сеть U_m^n. В худшем случае, когда для каждой записи реализуется случай 2, мы добавим к сети U_m^n k ребер, каждое из которых исходит из некоторой вершины, на которой реализуется элементарная конъюнкция длины m. Следовательно, сложность каждого из этих k ребер будет равна 2^{-m}. Таким образом,

$$T(I, \mathcal{F}) \leq T(U) \leq T(U_m^n) + 2^{-m}k = 1 + \sum_{i=1}^{m} 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{-m}k.$$

Тем самым, теорема 3 доказана.

6 Асимптотическая неулучшаемость нижней оценки

Доказательство следствия 2.

Пусть $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $m = \bar{o}(n)$. Пусть $k(n)$ такое, что $\binom{n}{m-1} = \bar{o}(k)$ и $k \leq \binom{n}{m}$. Рассмотрим библиотеку V, являющуюся k-элементным подмножеством m-го слоя куба B^n, то есть $V \subseteq B^n_m$ и $|V| = k$. Рассмотрим связанную с этой библиотекой ЗИП $I = \langle B^n, V, \overset{b}{\succeq} \rangle$. Согласно теореме 2

$$T(I, \mathcal{F}) \geq 2 \cdot \sum_{y \in V} \mathbf{P}(O(y, \overset{b}{\succeq})) = 2^{1-m} k.$$

Согласно теореме 3

$$T(I, \mathcal{F}) \leq 1 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^{1-i} \binom{n}{i} + 2^{1-m} k = 2^{1-m} k (1 + \bar{o}(1)).$$

Осталось заметить, что последние два неравенства доказывают утверждение следствия 2.

Список литературы

[1] Гасанов Э. Э. Оптимальные информационные сети для отношений поиска, являющихся отношениями линейного квазипорядка. *Конструкции в алгебре и логике.* Изд-во Тверского гос. ун-та, Тверь, 1990, 11-17.

[2] Гасанов Э. Э. Мгновенно решаемые задачи поиска. *Дискретная математика*

[3] Ли Д., Препарата Ф. Вычислительная геометрия. Обзор. *Кибернетический сб.* (1987) **24**, 5-96.

[4] Гасанов Э. Э, Мхитарова Т. В. Об одной математической модели фоновых алгоритмов поиска и быстрый фоновый алгоритм двумерной задачи о доминировании. *Фундаментальная и прикладная математика*

[5] Селтон Г. *Автоматическая обработка, хранение и поиск информации.* Сов. радио, Москва, 1973.

[6] Гасанов Э. Э. Об одной математической модели информационного поиска. *Дискретная математика* (1991) **3**, N 2, 69-76.

[7] Гасанов Э. Э. Об одномерной задаче интервального поиска. *Дискретная математика* (1995) **7**, N 2, 40-60.

[8] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. *Задачи и упражнения по курсу дискретной математики.* Наука, Москва, 1992.

[9] Kruskal F. B. The number of simplices in compex. *Mathematical Optimization Techniques* (1963), 251-278.

[10] Katona G. A. A Theorem on finite sets. *Theory of Graphs, Proc. Colloq. held at Tihany.* Hungary, 1966, 187-207.