

# Программа курса "Теория дискретных функций"

Курс является введением в дискретную математику - раздел прикладной математики, являющийся основой для математической кибернетики и информатики. В него включены сведения из алгебры логики, теории многозначных логик, а также теории конечных и клеточных автоматов. Эти сведения предоставляют базис для решения широкого круга задач, связанных с компьютерной обработкой данных и созданием интеллектуальных систем.

1. Функции и множества. Равенство функций.  $n$ -местные функции. Функции алгебры логики, их задание таблицами. Число  $n$ -местных функций алгебры логики. Существенные и несущественные переменные. Операция добавления либо удаления несущественной переменной. Симметрические функции алгебры логики. Элементарные функции алгебры логики.
2. Формулы алгебры логики. Слова в конечных алфавитах. Сигнатура. Определение формулы в сигнатуре  $\Sigma$ . Значение формулы  $\Phi$  на наборе  $\tilde{\alpha}$  значений переменных  $\tilde{x}$ . Существенные и несущественные переменные формулы. Функция, определяемая формулой  $\tilde{\Phi}$  относительно переменных  $\tilde{x}$ . Функция, получаемая суперпозициями над множеством функций  $F$ . Определение суперпозиций, не использующее понятия формулы (без доказательства эквивалентности). Операции суперпозиции: подстановка переменных, подстановка функции, добавление либо удаление несущественных переменных.
3. Эквивалентные формулы. Основные тождества для элементарных функций алгебры логики. Двойственность и самодвойственность. Принцип двойственности.
4. Представление функций алгебры логики посредством совершенных дизъюнктивных нормальных форм. Выразимость функций алгебры логики суперпозициями через дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание. Совершенная конъюнктивная нормальная форма.
5. Полные системы функций алгебры логики. Примеры. Теорема Жегалкина.
6. Замыкание множества функций алгебры логики. Примеры. Простейшие свойства замыкания. Замкнутые классы. Примеры.
7. Классы  $T_0$  и  $T_1$ , их замкнутость.
8. Класс  $S$ , его замкнутость. Лемма о несамодвойственной функции.
9. Класс  $M$ , его замкнутость. Лемма о немонотонной функции.
10. Класс  $L$ . Лемма о нелинейной функции.
11. Различие классов  $T_0, T_1, L, S, M$ . Теорема о полноте систем функций алгебры логики.
12. Предполные классы. Предполнота классов  $T_0, T_1, L, S, M$ . Отсутствие в  $P_2$  других предполных классов.
13. Теорема о выделении из полной системы функций алгебры логики полной подсистемы, имеющей не более 4 функций.

14. Полнота относительно замкнутого класса. Базис в замкнутом классе. Примеры. Теоремы Поста (без доказательства) о мощности множества замкнутых классов в  $P_2$  и о базисах этих классов.
15. Функции  $k$ -значной логики. Задание их таблицами, элементарные функции. Формулы  $k$ -значной логики. Суперпозиции.
16. Простейшие тождества для функций в  $P_k$ . Аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы для  $P_k$ .
17. Полные системы в  $P_k$ . Примеры. Система  $\{\max(x_1, x_2), \bar{x}\}$ . Функция Вебба.
18. Замыкание и замкнутые классы в  $P_k$ . Примеры.
19. Алгоритм распознавания полноты в  $P_k$ . Последовательность Кузнецова для множества  $F$  функций  $k$ -значной логики. Стабилизация этой последовательности на множестве  $[F]_{x_1x_2}$ .
20. Существование конечной полной подсистемы в полной системе функций  $k$ -значной логики.
21. Селекторные функции. Сохранение множества  $K$ , включающего селекторные функции. Описание класса  $S$  как класса сохранения некоторого множества  $K$ . Замкнутость класса  $U(K)$  всех функций, сохраняющих  $K$ .
22. Неполнота системы  $F$ , содержащейся в  $U(K)$ , если  $V_k \notin K$ .
23. Существование для неполной системы  $F$  такого множества  $K$ , что  $V_k \notin K$  и  $F \subseteq U(K)$ .
24. Теорема Кузнецова о полноте в  $P_k$ .
25. Существенная функция в  $P_k$ . Лемма С.В.Яблонского о трех наборах.
26. Лемма о подмножестве  $G_1 \times \dots \times G_n$ , на котором функция принимает  $l$  значений.
27. Квадрат в  $(E_k)^n$ . Лемма о квадрате.
28. Теорема Слупецкого. Замечание С.В.Яблонского о возможности сужения множества одноместных функций. Теорема Мартина.
29. Теорема Янова.
30. Теорема Мучника.
31. Представление функций в  $P_k$  полиномами.
32. Абстрактный конечный автомат. Способы задания. Доопределение функций переходов и выходов автомата на множестве входных слов. Функции  $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ . Простейшие свойства функций  $\varphi, \psi, \bar{\varphi}, \bar{\psi}$ .
33. Инициальный конечный автомат. Функции, реализуемые конечными инициальными автоматами. Система канонических уравнений.

34. Преобразование конечным начальным автоматом бесконечной входной последовательности. Периодические последовательности в конечном алфавите. Теорема о преобразовании конечным начальным автоматом периодической последовательности.
35. Неотличимость состояний конечного автомата. Автоматы приведенного вида. Неотличимость автоматов. Изоморфизм автоматов. Теорема о существовании единственного с точностью до изоморфизма конечного автомата приведенного вида, неотличимого от заданного конечного автомата.
36. Теорема Мура о длине слова, достаточной для различения двух отличимых состояний одного конечного автомата.
37. Теорема Мура о длине слова, достаточной для различения отличимых состояний двух различных конечных автоматов.
38. Множества слов, представимые в конечном автомате. События в конечном алфавите. Операции над событиями. Регулярные события.
39. Лемма о решении уравнения  $X = XC \cup D$ .
40. Лемма о регулярности событий, удовлетворяющих системе уравнений с регулярными коэффициентами.
41. Лемма о регулярности представимых событий.
42. Обобщенные источники в конечном алфавите. Событие, определяемое обобщенным источником. Лемма о существовании обобщенного источника, определяющего заданное регулярное событие.
43. Лемма о представимости события, определяемого обобщенным источником. Теорема Клини. Регулярность пересечения, дополнения и разности регулярных событий. Существование нерегулярных событий. Пример нерегулярного события.
44. Представление о схемах из конечных автоматов. Класс  $P_{\text{авт}}$ . Зависимость заданного выхода автоматной функции от заданного входа с задержкой. Сигнатура. Элемент схемы. Индуктивное определение схемы и реализуемой ею автоматной функции. Автоматная функция, получаемая из заданных автоматных функций операциями композиции. Замыкание и полнота множеств функций в  $P_{\text{авт}}$ .
45. Пример полной системы функций в  $P_{\text{авт}}$ .
46. Однородные структуры. Окрестность ячейки. Состояние однородной структуры. Конфигурации. Локальная и глобальная функции переходов. Поведение однородной структуры. Пример: двумерная однородная структура, локальная функция переходов которой имеет вид  $x_0 + x_1 + \dots + x_{h-1} \pmod{2}$ .
47. Теорема Мура о взаимно стираемых конфигурациях.

### Список литературы

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Москва, "Высшая школа". 2001г.

2. Сб. "Дискретная математика и математические вопросы кибернетики". Москва, "Наука", 1974г.
3. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Москва, "Наука", 1985г.
4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. Москва, "Наука", 1977г.