3-я лекция курса "Теория дискретных функций"

(1-й курс; лектор - проф. А.С.Подколзин)

Критерий полноты систем функций алгебры логики

Если система функций алгебры логики неполна, то ее замыкание представляет собой замкнутый класс, отличный от P_2. Следовательно, любая неполная система является подмножеством некоторого отличного от P_2 замкнутого класса. Обратно, если некоторая система не является подмножеством ни одного отличного от P_2 замкнутого класса, то она полна. В действительности здесь не нужно проверять все замкнутые классы - достаточно было бы ограничиться такими отличными от P_2 замкнутыми классами, внутри которых лежали бы все остальные отличные от P_2 замкнутые классы. К счастью, оказалось, что таких "максимальных" отличных от P_2 замкнутых классов в алгебре логики всего 5. Они и позволят нам получить критерий полноты. Сначала мы перечислим эти классы и установим некоторые их свойства, а затем сформулируем и докажем критерий полноты.

Замкнутый класс T_0

Обозначим посредством T_0 класс всех функций алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих соотношению $f(0, \ldots, 0) = 0$. Про такие функции говорят, что они сохраняют 0.

Докажем, что класс T_0 замкнут. Для этого достаточно рассмотреть три приведенных в первой лекции операции суперпозиции и установить, что все они сохраняют принадлежность функций классу T_0.

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in T_0$, а функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получена из нее операцией подстановки переменных, т.е. $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Тогда $g(0, \ldots, 0) = f(0, \ldots, 0) = 0$,т.е. $g \in T_0$.

2. Операция подстановки одной функции в другую. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in T_0$; $g(x_1, \ldots, x_m) \in T_0$, причем функция $h(x_1, \ldots, x_{m+n-1})$ определена как $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$. Тогда $h(0, \ldots, 0) = f(0, \ldots, 0, g(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0$, т.е. $h \in T_0$.

3. Операция добавления либо удаления несущественных переменных. Очевидно, что данная операция не изменяет свойства функции сохранять 0.

Так как в таблице сохраняющей ноль функции одна клеточка уже заполнена, то общее число функций алгебры логики, сохраняющих ноль и зависящих от n переменных, равно 2^{2^n-1}. Этот класс и класс T_1 (см. ниже) - самые "большие" из пяти замкнутых классов, которые мы будем рассматривать.

Замкнутый класс T_1

Обозначим посредством T_1 класс всех функций алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих соотношению $f(1, \ldots, 1) = 1$. Про такие функции говорят, что они сохраняют 1.

Замкнутость класса T_1 доказывается точно так же, как замкнутость класса T_0.

Замкнутый класс S

Напоним, что функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной, если она совпадает с функций, двойственной к ней. Иными словами, если выполнено тождество $\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Обозначим посредством S класс всех самодвойственных функций алгебры логики.

Равенство $\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что функция f на противоположных наборах принимает противоположные значения. Чтобы задать ее таблицей, достаточно указать лишь значения на наборах вида $(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Тогда для любого двоичного набора $(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значение $f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ однозначно определится как $\bar{f}(0, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$. При этом значения функции на наборах, начинающихся с 0, можно задавать произвольным образом. Число такиз наборов равно 2^{n-1}, т.е. число самодвойственных функций, зависящих от n переменных, равно $2^{2^{n-1}}$.

Приведем несколько примеров самодвойственных функций. Таковыми являются функции x, $\bar{x}$, $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 \cdot x_2 \ \vee \ x_1 \cdot x_3 \ \vee \ x_2 \cdot x_3$. Последняя из этих функций принимает значение 0 на наборах, имеющих менее двух единиц, и значение 1 на наборах, имеющих не менее двух единиц. Отсюда и вытекает самодвойственность. Данную функцию обозначают $m(x_1, x_2, x_3)$ и называют медианой. Иногда ее также называют функцией голосования: она принимает свое значение по значению "большинства" аргументов.

Докажем замкнутость класса S.

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, а функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получена из нее операцией подстановки переменных, т.е. $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Тогда $\bar{g}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{f}(\bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_n}) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = g(x_1, \ldots, x_n)$, т.е. $g \in S$.

2. Операция подстановки одной функции в другую. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$; $g(x_1, \ldots, x_m) \in S$, причем функция $h(x_1, \ldots, x_{m+n-1})$ определена как $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$. Тогда:
   $\bar{h}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n+m-1}) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, g(\bar{x}_n, \ldots, \bar{x}_{n+m-1}))} =$
   $\overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \bar{g}(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1})) =$
   $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1})$,

   т.е. $h \in S$.

3. Операция добавления либо удаления несущественных переменных. Этот случай очевиден.

Лемма 1. (о несамодвойственной функции). Если функция алгебры логики f не является самодвойственной, то из нее и функции $\bar{x}$ суперпозициями можно получить константу.

Пусть $\neg(f(x_1,\ldots,x_n)\in S)$. Тогда существует набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, на котором нарушается условие самодвойственности, т.е. $f(\bar{\alpha_1},\ldots,\bar{\alpha_n})=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Рассмотрим функции $\varphi_i(x)=x^{\alpha_i}$ $(i=1,\ldots n)$. Такая функция есть x при $\alpha_i=1$ и $\bar{x}$ при $\alpha_i=0$. Пусть $\varphi(x)=f(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$. Очевидно, функция φ получена суперпозициями из f и $\bar{x}$ (тождественные функции вместо переменных подставлять не нужно - это ничего не меняет). Имеем:

$\varphi(0)=f(\varphi_1(0),\ldots,\varphi_n(0))=f(0^{\alpha_1},\ldots,0^{\alpha_n})=f(\bar{\alpha}_1,\ldots,\bar{\alpha}_n)=f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=$
$f(1^{\alpha_1},\ldots,1^{\alpha_n})=f(\varphi_1(1),\ldots,\varphi_n(1))=\varphi(1)$.

Следовательно φ - константа. Лемма доказана.

Замкнутый класс M

Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\tilde{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ - двоичные наборы. Скажем, что набор $\tilde{\alpha}$ не превосходит набора $\tilde{\beta}$, если $\alpha_1\le\beta_1,\ldots,\alpha_n\le\beta_n$. Будем записывать это так: $\tilde{\alpha}\le\tilde{\beta}$. Введенное нами отношение является отношением частичного порядка на B_n. Оно рефлексивно и транзитивно. Легко привести пример пары несравнимых наборов. Например, наборы (0,1) и (1,0).

Функция алгебры логики $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется монотонной, если для любых наборов $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ из B_n, таких, что $\tilde{\alpha}\le\tilde{\beta}$, выполнено $f(\tilde{\alpha})\le f(\tilde{\beta})$.

Можно рассмотреть "график" монотонной функции на булевом кубе B_n - множество тех точек, где она обращается в 1. Булев куб можно изображать в виде графа, рисуя его вершины в виде точек и соединяя отрезком пары соседних вершин. Удобно упорядочить вершины куба "по слоям", относя к i-му слою все вершины (двоичные наборы), имеющие ровно i единиц. На рисунке слои размещаются снизу вверх: внизу - единственная точка слоя 0, затем - точки слоя 1, и т.д. вплоть до слоя n, состоящего из единственной точки. Наибольшее число точек окажется расположенным на среднем слое (в зависимости от четности n, таких слоев может быть два либо один). Чтобы функция была монотонной, необходимо и достаточно, чтобы ее график вместе с каждой точкой содержал все такие точки, к которым можно дойти от нее, перемещаясь вверх по слоям вдоль ребер куба. Иными словами, содержал весь "подкуб" с нижней вершиной в данной точке.

Из сказанного легко получить нижнюю оценку числа монотонных функций, зависящих от n переменных. Будем рассматривать функции, принимающие ниже слоя с номером $[n/2]$ значение 0, выше этого слоя - значение 1, а на самом слое определенные произвольно. Очевидно, все они монотонны. Число их равно $2^{C_n^2}$.

Задача определения числа монотонных функций была поставлена еще Дедекиндом. Она оказалась сложной. Попытки ее решения привели к получению целого ряда важных промежуточных результатов (Э.Н.Гильберт, В.К.Коробков, Ж.Ансель, Д.Клейтман), а окончательную асимптотическую оценку числа таких функций удалось найти А.Д.Коршунову. Эта оценка была перепроверена А.А.Сапоженко, получившим ее другим способом. Ввиду громоздкости и сложности получения данной оценки, мы ее рассматривать не будем. Заметим лишь, что в зависимости от четности n имеют место два различных соотношения, а самым существенным сомножителем в оценке оказалось значение $2^{C_n^2}$.

Обозначим посредством M класс всех монотонных функций алгебры логики.

Докажем замкнутость класса M.

1. Операция подстановки переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$, а функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получена из нее операцией подстановки переменных, т.е. $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$.

   Если $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$; $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, то, очевидно, $(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) \leq (\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n})$.

   Поэтому $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}) \leq f(\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_n}) = g(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, т.е. $g \in M$.

2. Операция подстановки одной функции в другую. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$; $g(x_1, \ldots, x_m) \in S$, причем функция $h(x_1, \ldots, x_{m+n-1})$ определена как $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$.

   Пусть $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$; $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{n+m-1})$.

   Тогда $g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{n+m-1}) \leq g(\beta_n, \ldots, \beta_{n+m-1})$.

   Следовательно,
   $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{n+m-1})) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, g(\beta_n, \ldots, \beta_{n+m-1}))$.

   Окончательно имеем: $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, g(\alpha_n, \ldots, \alpha_{n+m-1})) \leq f(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, g(\beta_n, \ldots, \beta_{n+m-1})) = h(\beta_1, \ldots, \beta_{n+m-1})$, т.е. $h \in M$.

3. Операция добавления либо удаления несущественных переменных. Этот случай очевиден.

Лемма 2. (о немонотонной функции). Если функция алгебры логики f не является монотонной, то из нее и констант $0, 1$ суперпозициями можно получить функцию $\bar{x}$.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не монотонна. Тогда существуют два набора $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$, такие, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, причем $f(\tilde{\alpha}) = 1, f(\tilde{\beta}) = 0$.

Неравенство $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ означает, что существуют разряды $i_1, \ldots, i_k$: $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k} = 0; \beta_{i_1} = \ldots = \beta_{i_k} = 1; i_1 < \ldots < i_k$. При этом для каждого $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ выполняется $\alpha_j = \beta_j$.

Рассмотрим последовательность наборов $\tilde{\gamma}_0, \ldots, \tilde{\gamma}_k$. Каждый из этих наборов на позициях с номерами, принадлежащими $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$, совпадает с набором $\tilde{\alpha}$. Разряды набора $\tilde{\gamma}_j$ с номерами $i_1, \ldots, i_j$, равны 1, а разряды с номерами $i_{j+1}, \ldots, i_k$ равны 0. Очевидно, $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_k = \tilde{\beta}_k$. Таким образом, $f(\tilde{\gamma}_0) = 1, f(\tilde{\gamma}_k) = 0$. Следовательно, существует наименьший номер $j \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $f(\tilde{\gamma}_j) = 0$. Очевидно, $f(\tilde{\gamma}_{j-1}) = 1$. Наборы $\tilde{\gamma}_j$ и $\tilde{\gamma}_{j-1}$ отличаются единственным разрядом, имеющим номер i_j: у первого набора этот разряд равен 1, у второго - 0. Иными словами,

$\tilde{\gamma}_{j-1} = (\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 0, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n)$;

$\tilde{\gamma}_j = (\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 1, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n)$

для каких-то значений $\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n$.

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(x) = f(\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, x, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n)$. Она получена из функции f и констант 0, 1 суперпозициями. При этом:

$\varphi(0) = f(\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 0, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n) = f(\tilde{\gamma}_{j-1}) = 1$;

$\varphi(1) = f(\delta_1, \ldots, \delta_{i_j-1}, 1, \delta_{i_j+1}, \ldots, \delta_n) = f(\tilde{\gamma}_j) = 0$.

Следовательно, $\varphi(x) = \bar{x}$. Лемма доказана.

Заметим, что имеется другой способ получить $\bar{x}$ из f и констант. Например, подставить общие значения наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ вместо переменных с номерами из множества $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$, а прочие переменные отождествить между собой. Однако, приведенное выше доказательство дополнительно устанавливает еще один полезный факт - что немонотонность функции может быть выявлена уже на двух соседних (т.е. отличающихся в единственном разряде) наборах.

Замкнутый класс L

Класс L был нами определен как класс линейных функций, т.е. функций, определяемых полиномами Жегалкина степени 1: $c_0 + c_1x_1 + \ldots = c_nx_n$. Доказательство его замкнутости аналогично приведенным выше и совсем несложно.

Лемма 3. (О нелинейной функции) Если функция алгебры логики не является линейной, то из нее и функций 0,1, $\bar{x}$ суперпозициями можно получить функцию $x_1 \& x_2$.

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не является линейной. Рассмотрим определяющий ее полином Жегалкина:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, n\}} a_{i_1 \ldots i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$$

Так как функция нелинейная, в этом полиноме существует член степени, большей единицы. Без ограничения общности можно считать, что в нем присутствуют переменные x_1 и x_2. Перегруппируем члены полинома:

$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2f_1(x_3, \ldots, x_n) + x_1f_2(x_3, \ldots, x_n) + x_2f_3(x_3, \ldots, x_n) + f_4(x_3, \ldots x_n)$

Так как полином Жегалкина определяется по функции однозначно, то f_1 не может быть тождественно нулевой - иначе существовал бы полином, определяющий ту же функцию, но не имеющий членов, содержащих одновременно x_1 и x_2. Следовательно, существуют такие $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$, что $f_1(\alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$. Имеем:

$\varphi(x_1, x_2) = x_1x_2 + \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2 + \gamma$ для каких-то двоичных α, β, γ.

Нам нужно получить из данной функции конъюнкцию. Для этого сначала используем прием, аналогичный приему из аналитической геометрии, использующему сдвиг начала координат для устранения линейных членов:

$\varphi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) = (x_1 + \beta)(x_2 + \alpha) + \alpha(x_1 + \beta) + \beta(x_2 + \alpha) + \gamma = x_1x_2 + \alpha\beta + \gamma$.

Теперь для получения конъюнкции достаточно прибавить $\alpha\beta + \gamma$:

$x_1x_2 = \varphi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha) + \alpha\beta + \gamma$.

Заметим, что прибавление константы, равной нулю, можно отбросить, а прибавление к выражению единицы - заменить на его отрицание. Следовательно, x_1x_2 может быть получена суперпозициями из φ и $\bar{x}$. Так как φ получается суперпозициями из f и констант, то лемма доказана.

Классы T_0, T_1, S, M, L попарно различны. Более того, ни один из них не содержится в другом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько конкретных функций, сопроводив каждую из них набором из плюсов и минусов - соответственно принадлежности либо непринадлежности данным пяти классам:

	T_0	T_1	S	M	L
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\bar{x}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x_1 \& x_2$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$x_1 + x_2$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x_1 + x_2 + x_3$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

В приведенной таблице для каждой упорядоченной пары замкнутых классов существует функция, принадлежащая первому и не принадлежащая второму.

Теорема (Э.Пост). Система функций алгебры логики полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

Пусть система F полна и $F \subseteq K$, где K - один из указанных в теореме замкнутых классов. Тогда $[F] \subseteq [K] = K$, и $[F] \neq P_2$ - противоречие.

Обратно, пусть $F \nsubseteq T_0$, $F \nsubseteq T_1$, $F \nsubseteq S$, $F \nsubseteq M$,$F \nsubseteq L$. Тогда в F существуют функции $f_1, \ldots, f_5$, такие, что $\neg(f_1 \in T_0)$, $\neg(f_2 \in T_1)$, $\neg(f_3 \in S)$, $\neg(f_4 \in M)$, $\neg(f_5 \in L)$.

Прежде всего, покажем, что константы 0 и 1 могут быть выражены суперпозициями через $f_1, \ldots, f_5$. Рассмотрим $f_1(x_1, \ldots, x_n)$. Известно, что $f_1(0, \ldots, 0) = 1$. Возможны два случая:

1. $f_1(1, \ldots, 1) = 1$. Тогда $\varphi(x) = f_1(x, \ldots, x) \equiv 1$. Таким образом, получаем константу 1. Чтобы получить константу 0, достаточно теперь воспользоваться функцией f_2.

2. $f_1(1, \ldots, 1) = 0$. Тогда $\varphi(x) = f_1(x, \ldots, x) = \bar{x}$. По лемме о несамодвойственной функции, из f_3 и $\bar{x}$ можно получить суперпозициями некоторую константу. Имея отрицание, получаем также и другую константу.

Итак, обе константы выражаются суперпозициями через F. По лемме о немонотонной функции, из f_4 и констант суперпозициями можно получить функцию $\bar{x}$. Наконец, по лемме о нелинейной функции, из f_5, констант и отрицания можно получить суперпозициями функцию $x_1 \& x_2$. Следовательно, через F можно выразить полную систему $\{\bar{x}, x_1 \& x_2\}$, и F полна. Теорема доказана.

Следствие 1. Каждый замкнутый класс функций алгебры логики, отличный от P_2, содержится хотя бы в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

Действительно, если бы он не содержался ни в одном из этих классов, то был бы полон, а так как замкнут, то совпадал бы с P_2.

Класс K функций алгебры логики называется предполным, если $[K] \neq P_2$, но для любой функции $f \in P_2 \setminus K$ выполнено $[K \cup \{f\}] = P_2$.

Очевидно, что предполный класс должен быть замкнутым. Действительно, если бы он был незамкнут, то можно было бы рассмотреть функцию f, принадлежащую $[K]$, но не принадлежащую K. Тогда, согласно определению предполноты, $[K \cup \{f\}] = P_2$. С другой стороны, $K \cup \{f\} \subseteq [K]$, т.е. $[K \cup \{f\}] \subseteq [K] \neq P_2$ - противоречие.

Следствие 2. В алгебре логики имеется ровно 5 предполных классов: T_0, T_1, L, S, M.

Действительно, если класс K предполон, то он, согласно следствию 1, должен содержаться в одном из классов T_0, T_1, L, S, M (обозначим его Q). Если бы он не совпадал с классом Q, то можно было бы взять функцию $f \in Q \setminus K$. Так как $[K \cup \{f\}] \subseteq [Q] = Q \neq P_2$, то получили бы противоречие с предполнотой класса K.

Обратно, рассмотрим произвольный класс Q из указанных пяти классов. Возьмем произвольную функцию алгебры логики f, не принадлежащую Q. Рассмотрим класс $Q' = [Q \cup \{f\}]$. Если бы он не совпадал с P_2, то должен был бы содержаться в одном из классов T_0, T_1, S, M, L, причем (из-за добавленной функции f) отличном от класса Q. Однако, как установлено приведенной выше таблицей, ни один из данных классов не содержится в другом. Поэтому класс Q' совпадает с P_2, т.е. класс Q предполон.

Теорема. Из каждой полной системы функций алгебры логики можно выделить полную подсистему, имеющую не более 4 функций.

Пусть система F полна. Рассмотрим функции $\{f_1, \ldots, f_5\}$, введенные при доказательстве теоремы Поста. Они образуют полную подсистему. Если $f_1(1, \ldots, 1) = 1$, то функция f_1 не самодвойственна, и тогда можно взять f_3 совпадающей с f_1. Если же $f_1(1, \ldots, 1) = 0$, то функция f_1 не монотонна, и тогда можно взять f_4 совпадающей с f_1. В каждом из случаев получаем полную подсистему из 4 функций. Теорема доказана.

В качестве примера полной системы из 4 функций, теряющей свойство полноты при удалении любой из ее функций, можно рассмотреть $F = \{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2 + x_3\}$. Все функции, кроме первой, сохраняют 1; все функции, кроме второй, сохраняют 0; все функции, кроме третьей, линейны; все функции, кроме четвертой, монотонны.

Изучение замкнутых классов функций алгебры логики

Пусть K - замкнутый класс функций алгебры логики. Система F функций этого класса называется полной в K, если $[F] = K$.

Система $F \subseteq K$ называется базисом в K, если она полна в K, но каждая ее собственная подсистема неполна в K.

Примеры:

1. $\{x_1 \cdot x_2, 0, 1, x_1 + x_2 + x_3\}$ - базис в P_2.

2. $\{0, 1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2\}$ - базис в M.

   Если монотонная функция f - не тождественный 0, то для нее существует непустое множество N "нижних единиц" - наименьших в смысле рассматриваемого нами частичного порядка наборов, на которых эта функция обращается в единицу. Если она не тождественно равна 1, то среди ее нижних единиц нет нулевого набора. Для произвольной нижней единицы α, не являющейся нулевым набором, можно рассмотреть номера $i_1, \ldots, i_k$ всех ее разрядов, равных 1, и построить конъюнкцию $K(\alpha) = x_{i_1} \cdot \ldots x_{i_k}; k \geq 1$. Эта конъюнкция обращается в 1 на наборе α и на всех больших (в смысле рассматриваемого частичного порядка) наборах, т.е. $K \leq f$. Очевидно, что f равна дизъюнкции всех таких конъюнкций:

$$f = \bigvee_{\alpha \in E} K(\alpha).$$

Таким образом, если монотонная функция - не тождественная константа, то ее можно выразить через дизъюнкцию и конъюнкцию. Это и устанавливает полноту рассматриваемой системы функций в M. Если удалить из этой системы любую константу, то оставшиеся функции будут сохранять противоположную константу. Если удалить конъюнкцию, то останутся только линейные функции. Если удалить последнюю функцию, то через остальные функции можно будет выразить только константы и многоместные конъюнкции. Таким образом, данная система - базис в M.

Э.Пост получил полное описание всех замкнутых классов в алгебре логики. Это описание позволило установить истинность следующих утверждений:

Теорема. (Э.Пост) Каждый замкнутый класс функций алгебры логики имеет конечный базис.

Теорема. (Э.Пост) Множество замкнутых классов функций алгебры логики счетно.

Обычно описание замкнутых классов сопровождается так называемой диаграммой Поста. На ней замкнутые классы изображаются точками, причем от каждого класса проводятся вниз линии к максимальным его замкнутым собственным подклассам. Эту диаграмму можно найти, например, в книге "Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., Наука, 1966".